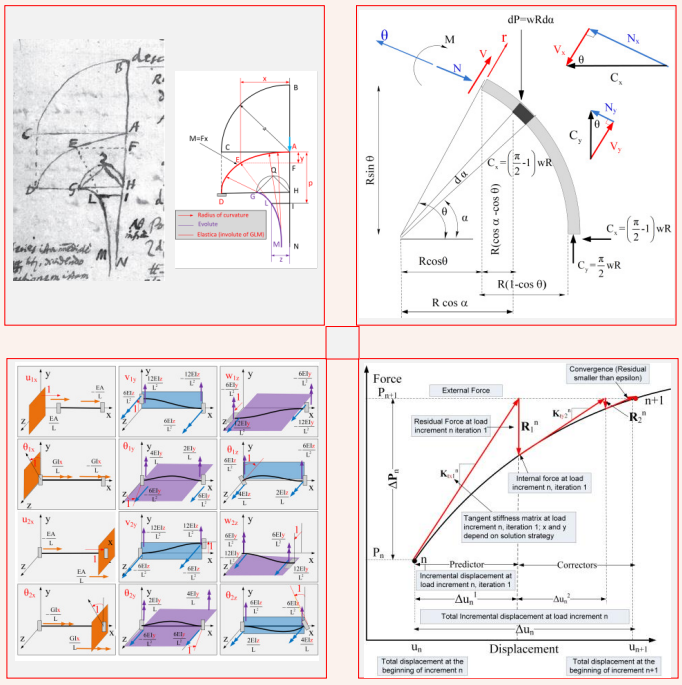
OS QUATRO LIVROS DA ANÁLISE ESTRUTURAL

Da história da mecânica
Para os métodos computacionais modernos

Victor E. Saouma &

Professor Emérito, Universidade do Colorado em Boulder



V. 1.0
Agosto de 2026

Site do projeto: https://structuralanalysisbook.org/

Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional".

CC BY NC SA

CÓPIA PARA REVISÃO

Verba volant, scripta manent [‡]

[‡]Minhas palestras voaram, mas este livro permanecerá. 🙂

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Aviso Legal

Este livro é disponibilizado sob a CC BY-NC-SA licença, sigla de *Atribuição–NãoComercial–CompartilhaIgual*. Em termos simples, essa licença permite compartilhar e adaptar livremente o conteúdo, desde que sejam respeitadas algumas condições.
Você pode:

Compartilhar: Copiar e redistribuir o material em qualquer meio ou formato, inclusive para amigos, colegas ou plataformas nas quais outras pessoas possam utilizá-lo.

Adaptar: Remixar, transformar e criar a partir do conteúdo, desde que isso não seja feito para fins comerciais.

Atribuição: Ao compartilhar ou adaptar o material, dê o devido crédito ao autor e inclua um link para a obra original, deixando clara a procedência do conteúdo.

Também se aplicam as seguintes limitações:

Não Comercial: O material não pode ser vendido, incorporado a produtos pagos ou monetizado de outra forma.

CompartilhaIgual: Qualquer obra derivada deve ser distribuída sob os mesmos termos CC BY-NC-SA, preservando o caráter aberto do material.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Dedicação

À memória do meu avô Victor, e da minha esposa Rhea



E para meus filhos Richard, Caroline e Sophie

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Prefácio

XXX, YYY
Cidade ocupada, EUA

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Prolegomena[4]

Conteúdo deste Prolegomena

I. Origem e Propósito
No título
Genesis
Cobertura
Notas de palestra
Ainda outro livro?

II. Filosofia Estrutural
Por que todos em um?
Mecânica

III. Audiência e Uso
Audiência
Navegação

IV. Influências Pessoais
Influência estrangeira
Ensinando na UC

V. Estilo e Apresentação
Estilo
Notação
Repetições
Cores
Tipografia
Fonte do Título

VI. Concepção e Produção
LaTeX
Códigos Matlab
Códigos MathCad
AI
Imaginei

VII. Fontes e Atribuição
Referências
Fotografias
Livros consultados

VIII. Disponibilidade e Estatística
Por que é grátis?
Página Web
Estatísticas

Eu. ORIGEM E PROPÓSITO

No título O título deste trabalho é intencionalmente reminiscente de Palladio *Quatro livros de arquitetura*.

Aqui, a estrutura quádrupla reflete uma progressão pedagógica: das fundações históricas de análise estrutural, através de formulações introdutórias e intermediárias, para métodos avançados. O paralelo reside na convicção de que até mesmo sujeitos complexos se beneficiam de uma exposição cuidadosamente encenada.

Genesis Enquanto minha carreira acadêmica se aproximava de seu crepúsculo, eu senti - talvez com um toque de orgulho - que era hora de compartilhar o conhecimento reunido ao longo de quase quatro décadas de ensino análise estrutural. Isto *magnum opus* é o resultado.

Suas origens estão em dois fluxos paralelos. O primeiro consiste em notas de aula acumuladas e continuamente refinadas ao longo dessas mesmas quatro décadas, atualizadas para refletir tanto os avanços na área quanto as necessidades evolucionistas dos alunos. A segunda é uma coleção mais silenciosa reunida ao lado do ensino: Documentos,

[4]Do grego *Prolegomena* (προλεγόμενα), "coisas ditas de antemão": a questão prefatória em que um autor define o escopo, método e intenções de uma obra antes do início do texto principal. O termo foi dado a sua moderna moeda acadêmica pela Kant's *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* (1783).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

monografias, curiosidades históricas e detalhes técnicos que raramente encontravam seu caminho para a sala de aula, ou porque o público ainda não estava pronto ou porque a profundidade necessária excedeu o que um único curso poderia acomodar.

Um primeiro rascunho completo foi montado a partir destes dois fluxos antes do advento da inteligência artificial como uma ferramenta de escrita prática. O que se seguiu não foi uma delegação de julgamento autoral, mas sim o acesso a uma terceira e efetivamente ilimitada fonte: através de inúmeras trocas, rejeições e refinamentos sucessivos, a IA forneceu uma riqueza de material que nenhuma visita à biblioteca ou pesquisa bibliográfica poderia ter parecido. As decisões, no entanto, permaneceram inteiramente minhas.

Eu pensei em meu papel como o de *curador* Montando uma exposição, alguém que recebe entrada de fluxos distintos e então deve decidir o que merece um lugar na coleção e o que não, em qual quarto cada peça pertence, como deve ser iluminada, e em que ordem um visitante deve encontrá-la. Para a parte análise estrutural do livro, esta tarefa curatorial foi relativamente simples: o material técnico segue uma lógica pedagógica bem estabelecida, e a sequência de capítulos mais ou menos se impõe.

A parte histórica apresentou um desafio completamente diferente. Como traçar a evolução de análise estrutural em uma sequência linear de capítulos — desde as primeiras descobertas de números e alfabetos, através dos grandes saltos intelectuais da antiguidade e do Renascimento, até o método dos elementos finitos — enquanto também faz justiça a temas que são intrinsecamente temáticos ao invés de cronológicos? Alguns capítulos seguem o fio do tempo; outros cortam-no, recolhendo ideias, figuras e desenvolvimentos que pertencem juntos por assunto ao invés de por século. Navegar por essa tensão, decidir quando seguir a linha do tempo e quando abandoná-lo, provou ser o julgamento curador mais exigente de todos.

📖 **Cobertura** Em geral, o livro está dividido em quatro partes:

Em geral, o livro está dividido em quatro partes:

Livro I Este livro fornece uma exploração aprofundada da história de análise estrutural. Embora não afirme ser exaustiva, achei esse aspecto do tratado particularmente envolvente para escrever. Inicialmente, eu escolhi eventos-chave e figuras sem restrições estritas, mas à medida que a narrativa chegava à era de Galileu Galilei, uma abordagem mais estruturada e disciplinada tornou-se necessária. Mesmo assim, organizar este primeiro livro foi um desafio: Como deve ser dividido? A cobertura é parcialmente cronológica, parcialmente tópica e às vezes ambas. Consequentemente, há uma sobreposição substancial entre as seções - mas em cada caso, o material é examinado de uma perspectiva distinta. Eu usei hiperlinks liberalmente para conectar discussões relacionadas através de capítulos.

Livro II Este livro cobre o material que normalmente se esperaria em um primeiro curso em análise estrutural, seguindo o estudo das Estáticas e Mecânicas de Corpos

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Deformáveis. No entanto, eu ampliei significativamente o escopo além do nível introdutório *Fundamentos; Analítica*.. Tópicos frequentemente mal tratados em livros padrão, como cabos, arcos e estruturas tridimensionais, recebem cobertura completa aqui. Também incluí assuntos avançados como placas e cascas, que raramente são abordados nesta fase, mas essenciais para um entendimento completo. O livro conclui com um capítulo sobre métodos aproximados e design preliminar. Eu acredito fortemente que análise estrutural não deve existir em isolamento; Os estudantes devem desenvolver uma intuição para o design, juntamente com suas habilidades analíticas, entendendo como a análise informa e possibilita as decisões que seguem.

Livro III Este livro aborda o que é muitas vezes chamado de "Matrix Análise estrutural,', mas é fundamentalmente um tratado sobre o método dos elementos finitos. A primeira parte cobre o método da rigidez direta em detalhes, incluindo sua implementação de computador para estruturas de estrutura. Isto é seguido por um extenso tratamento dos métodos variacionais, o cálculo das variações, o princípio de trabalho virtual, e teoremas de energia, que formam a base teórica sobre a qual então apresento o método dos elementos finitos para elementos contínuos.

Um equívoco comum sustenta que os métodos de matriz para frameworks são "mais fáceis"do que elementos finitos para contínua. Na verdade, o oposto é muitas vezes verdadeiro. Elementos contínuos lidam com tensores tensão e deformação - quantidades elegantas e bem definidas. Elementos-quadro, em sua forma mais geral, envolvem três conjuntos de forças e três conjuntos dos momentos em cada nó, juntamente com suas rotações associadas deslocamentos e. As interações entre esses componentes de força e momento são sutis, e na minha experiência, os alunos nem sempre apreciam sua complexidade.

Livro IV Este livro parte de um novo curso que introduzi pessoalmente (e baseado na excelente tese de alguns dos meus alunos), um programa que tem relativamente poucos equivalentes no cenário acadêmico. Este curso é centrado principalmente em torno da análise não linear de estruturas enquadradas. Além disso, abrange temas críticos como plasticidade, estabilidade, dinâmica e notavelmente, Engenharia sísmica baseada em desempenho.

Anexos Ao longo do tratado, achei necessário complementar o texto principal com material adicional: códigos de amostra MATLAB, uma introdução às funções mecânica do contínuo, distribuição de probabilidade e muito mais. Estes dezoito apêndices servem como referência e reforço, permitindo que os leitores se aprofundam sem interromper a narrativa primária.

A abordagem que eu tenho adotado neste tratado pode ser comparada a um método Euclidiano: Começamos com definições fundamentais e sistematicamente nos baseamos em cada capítulo subsequente. O objetivo é apresentar o material para que cada passo flua logicamente dos anteriores, contando com noções básicas, definições e teoremas anteriores

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

como fundamento. Leitores diligentes que seguirem essa progressão serão recompensados com uma compreensão abrangente e quase enciclopédica de análise estrutural.

Enquanto o conteúdo nos livros II-IV se origina em grande parte das minhas notas de palestra, eu fiz grandes esforços para complementar, expandir e refinar o material consultando inúmeras fontes. É minha sincera esperança que todas essas fontes tenham sido devidamente reconhecidas ao longo do texto.

Acompanhando notas de palestra Este livro cresceu de centenas de palestras feitas durante toda a minha carreira em uma sequência de três cursos sobre análise estrutural. Eu sempre usei LaTeX e Beamer para preparar minhas notas de curso, que finalmente se tornou a base deste trabalho. Esses slides de palestra foram compilados em um único documento, livremente disponível para download.

Mais um livro? A pergunta que pode surgir para o leitor casual é *Por que outro livro sobre Análise estrutural?* É uma consulta válida considerando que muitos livros didáticos existentes sobre este assunto tendem a ser repetitivos e, em alguns casos, têm visto inúmeras edições. Infelizmente, alguns desses textos podem parecer pouco inspiradores, excessivamente simplificados e sem profundidade.

Uma desvantagem comum é sua cobertura limitada da teoria subjacente, muitas vezes acompanhada por uma dependência em exemplos estruturais simples e descomplicados.

Em resposta a essas limitações, ao longo deste livro, eu fiz um esforço deliberado para estabelecer uma conexão entre os vários procedimentos de análise estrutural e os princípios fundamentais da mecânica aplicada e matemática em que eles são Construído. Esta abordagem visa proporcionar aos leitores uma compreensão mais profunda e perspicaz de análise estrutural, diferenciando-o das ofertas típicas neste campo.

II. FILOSÓFIA EDITORIAL

Por que todos em um? A decisão de apresentar os quatro livros como um tratado único e unificado é deliberada e fundamentada em duas considerações fundamentais. Primeiro, reflete a convicção de que os engenheiros devem permanecer continuamente conscientes dos processos históricos através dos quais o conhecimento atual surgiu. As teorias, métodos e estruturas computacionais empregadas hoje não surgiram isoladamente. eles são o resultado cumulativo de séculos de refinamento conceitual, debate e correção. Uma compreensão dessa linhagem não é acessória à competência técnica, mas um componente integral dela.

Em segundo lugar, a estrutura do trabalho pretende abordar historiadores da ciência e engenharia, enfatizando que o inquérito histórico ganha profundidade e relevância quando

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

visto em relação ao estado atual da disciplina. Os formalismos matemáticos, técnicas analíticas e princípios de design que caracterizam o moderno análise estrutural não são apenas os objetivos da história; Eles fornecem um contexto essencial para interpretar as motivações, limitações e realizações de pensadores anteriores.

Assim, o tratado é concebido como uma estrutura explicitamente bidirecional. Para o historiador, delineia uma clara trajetória intelectual do desenvolvimento histórico das ideias para sua formulação analítica atual. Para o engenheiro, ele traça o caminho recíproco - da prática contemporânea e métodos formais de volta a suas origens históricas. Sustentando este diálogo bidirecional, o trabalho integra a visão histórica e o rigor técnico em um todo coerente e que se reforça mutuamente. A navegação entre essas duas perspectivas é facilitada através de referências cruzadas explícitas e hiperlinks, como o seguinte:

Para detalhes analíticos, veja § XX; ou Para o fundo histórico, veja § XX.

Finalmente, além dessas motivações conceituais, a decisão de consolidar os quatro livros em um único volume também serve para um propósito pedagógico e técnico. Apresentar níveis introdutórios, intermediários e avançados de análise estrutural em um trabalho contínuo facilita uma progressão contínua através dos níveis de complexidade, garantindo ao mesmo tempo estrita consistência de notação, definições e convenções. Esta unificação, rara na literatura, permite que o leitor se mova fluidamente de conceitos fundamentais para formulações avançadas dentro de um único PDF coerente, eliminando a fragmentação e descontinuidades notacionais que normalmente surgem quando o material é dispersado por múltiplos volumes.

Mecânica Sejamos claros: Engenharia estrutural é, em seu núcleo, mecânica aplicada. Embora isso seja suficiente para resolver problemas de engenharia, não nos absolve de entender de onde vêm nossas ferramentas. Há uma necessidade contínua de (1) defender o mesmo rigor analítico e matemático que governa a mecânica, e (2) quando necessário, retornar explicitamente à própria mecânica. Muitas vezes, esta fundação é negligenciada na prática de engenharia, substituída por conhecimento processual e conveniência numérica. Tendo mantido deliberadamente um pé na mecânica e o outro na engenharia ao longo de minha carreira, quero que este livro reflita essa postura. Por esta razão, cada equação apresentada aqui é rastreável para os primeiros princípios, e eu incluí um apêndice introduzindo conceitos essenciais de mecânica do contínuo (apêndice O), bem como outro tributo a Westergaard - um engenheiro que resolveu problemas profundamente práticos raciocinando diretamente da mecânica fundamental (apêndice P).

III. AUDIÊNCIA E USO

Audiência

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Alunos: Este livro é adequado para uma sequência de três cursos consecutivos: Introdução a Análise estrutural, Intermediário Análise estrutural, e Não-linear Análise estrutural. Consolida-se em um único volume o que tradicionalmente exigiria pelo menos dois livros didáticos separados. Além disso, mantém uma notação consistente ao longo de todo e inclui exemplos ilustrativos intencionalmente projetados para ser desafiador.

No entanto, deve-se notar que este livro é destinado a uma audiência "madura". Com isso, quero dizer estudantes que não estão buscando um tratamento simplificado e verboso do básico. Portanto, para a maioria dos alunos, este livro não deve ser designado como o livro principal em um curso. Em vez disso, é mais adequado para estudantes motivados a explorar sub-tópicos que não são tradicionalmente cobertos em profundidade.

Este livro também será valioso para aqueles estudantes que desejam uma abordagem de engenharia estrutural "unificada", caracterizada por notação consistente e uma perspectiva filosófica coerente. Oferece uma transição suave de conceitos fundamentais para tópicos intermediários e avançados.

Educadores: Instrutores de engenharia estrutural acharão este livro um recurso valioso, particularmente como antídoto para a simplificação excessiva que assola muitos livros didáticos populares. Sua amplitude e profundidade o tornam adequado para a atribuição de temas de tese, projetos de termo ou doutorado. Problemas com o exame qualificado.

Engenheiros: Este livro também é destinado a engenheiros estruturais que estão discernindo o suficiente para se afastar de programas de computador e mergulhar na elegância das soluções analíticas, que podem oferecer muito mais valor do que comumente realizado. Muitas vezes, muitos engenheiros correm para soluções baseadas em computador sem primeiro explorar a possibilidade de obter soluções analíticas precisas ou aproximadas, que poderiam então ser validadas usando software.

Historiadores: O primeiro dos quatro livros fornece uma exploração abrangente da história de análise estrutural. Além das famosas obras clássicas que abordaram este assunto, este livro oferece a cobertura mais exaustiva disponível no reino da literatura análise estrutural.

Navegação Por causa das centenas de hiperlinks internos, os leitores não devem hesitar em segui-los, sabendo que um simples `ALT+Seta esquerda` Volta para a página de invocação (e `ALT+Seta direita` leva você de volta para o hiperlink)

IV. INFLUÊNCIAS PESSOAIS E ENSINOS

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Influência estrangeira Durante minha colaboração de nove anos com a Companhia de Energia Elétrica de Tóquio (TEPCO) na análise sísmica não linear das altas represas, me considerei extraordinariamente feliz. Por volta dos seis anos, eu acreditava que nosso trabalho era essencialmente completo, apenas para ser recebido com a resposta firme do meu homólogo: *Não! Não! Prof. Saouma, no Japão, um programa não só deve funcionar sem falhas, mas também deve possuir beleza estética*.. Esta observação, feita pelo Sr. Yagome, encapsulou um princípio japonês profundamente arraigado: atenção intransigente aos detalhes, uma insistência na excelência, e a busca de harmonia que se estende muito além da mera correção técnica.

Também tive a sorte de ter uma casa familiar na Suíça, onde passamos muitos verões, bem como vários períodos sabáticos. Com os suíços, aprendi, silenciosamente mas decisivamente, a importância da precisão, do trabalho executado sem atalhos, e de resistir a qualquer senso artificial de urgência. Na Suíça, as coisas são feitas de forma completa, deliberada e correta, sem necessidade percebida de se apressar. Atenção aos detalhes não é uma restrição, mas uma virtude, e qualidade é entendida como o resultado natural da paciência, disciplina e habilidade.

Este ethos está em contraste com a observação de Orson Welles: *Na Itália, durante trinta anos sob os Borgias, eles tiveram guerra, terror, assassinato e derramamento de sangue, mas produziram Michelangelo, Leonardo da Vinci, e o Renascimento. Na Suíça, eles tinham amor fraternal, quinhentos anos de democracia e paz. E o que isso produziu? O relógio do cuco*.. Não tão rápido, Orson. A Suíça cultivou uma busca implacável de complicações horológicas, pioneiras em micromáquinas de alta precisão e produziu uma longa linhagem de arquitetos e engenheiros excelentes. Deve-se também lembrar os cavalheiros de Basileia, Euler e Bernoullis, que não ficaram muito atrás de Newton na própria mecânica, lançando fundações que acabariam por sustentar análise estrutural.

Finalmente, enquanto crescia na Itália, ouvi muitas vezes o provérbio *Chi va piano, va sano e lontano*- Literalmente, "Aqueles que vão devagar, vão com segurança e longe."A mensagem é inconfundível: Não se apresse, tome o tempo necessário, e faça as coisas corretamente.

Juntos, estes três países - Japão, Suíça e Itália - moldaram profundamente meu temperamento intelectual e prática profissional. Mais do que qualquer outro, eles influenciaram o espírito em que este livro foi escrito: rigoroso, paciente, atento aos detalhes, e respeitoso do trabalho feito bem.

Ensinando na Universidade do Colorado Eu lecionei na Universidade do Colorado de 1984 até 2023, um período de quase quarenta anos. No início da minha carreira, fui profundamente influenciado por dois eminentes colegas: Professor Kurt Gerstle em engenharia estrutural e professor Kaspar Willam em mecânica estrutural. Seu rigor, precisão e insistência nos primeiros princípios deixaram uma impressão duradoura, e eu

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

me esforcei ao longo de minha carreira para imitar sua abordagem: Nunca se afastando da teoria, derivações e dos fundamentos matemáticos que sustentam nossa disciplina.

Achei os livros disponíveis insatisfatórios. Muitos foram, para dizer claramente, mudos, limitados a estruturas bidimensionais, desprovidos de qualquer cobertura de arcos, e atormentados por notações inconsistentes através da progressão do introdutório ao intermediário até o avançado (cursos 3525, 4525, e 6525, respectivamente). Essas descontinuidades me pareciam abruptas e pedagógicamente confusas. Assumindo que a maioria dos alunos continuaria com a sequência, eu introduzi notação acadêmica padrão desde o início - muito para o desgosto de alguns, mas ao serviço de sua compreensão de longo prazo.

Nos primeiros anos, ensinar era um verdadeiro prazer. Os alunos estavam motivados, curiosos e dispostos a se envolver com material desafiador. As dificuldades começaram quando o curso introdutório se tornou uma exigência para todos os estudantes de engenharia civil e arquitetônica. Estudantes de engenharia ambiental, ansiosos para salvar o planeta, muitas vezes tinham pouca paciência para análise estrutural - embora a maioria fosse intelectualmente capaz. Os estudantes de gestão da construção, entretanto, não queriam nada além das fórmulas mais simples e sua aplicação direta. Ambos os grupos poderiam ser bastante vocais em sua resistência a qualquer coisa percebida como desnecessariamente rigorosa.

Minha filosofia era simples: dado o número limitado de fórmulas envolvidas, os alunos devem entender conceitualmente o material em vez de confiar na memorização. Assim, meus exames eram livros fechados e notas fechadas. Cada exame normalmente incluía um problema simples que todos deveriam resolver, um de dificuldade intermediária, e um problema desafiador projetado para distinguir alunos excepcionais do resto. O primeiro exame muitas vezes serviu como uma chamada de despertar, com médias de classe abaixo de 50%. Eu não acreditava em notas curvadas artificialmente; Em vez disso, escalei a distribuição de classe com base no desempenho dos três melhores alunos, que receberiam um A. Esta abordagem, embora justa na minha opinião, resultou em uma taxa de falha maior do que em muitos outros cursos - uma consequência que eu aceitei como preferível a baixar os padrões.

Para complicar ainda mais as coisas, mesmo quando os alunos são pegos traindo além de qualquer dúvida razoável, a Universidade do Colorado tendeu a olhar para o outro lado - afinal de contas, os estudantes estão pagando clientes, ea universidade vai se curvar para trás para evitar Antagonizando-os. Simplificando, a menos que um aluno admita abertamente desonestidade acadêmica, a instituição amplia o benefício da dúvida, deixando uma faculdade frustrada sem recurso a não ser aceitar o resultado.

Finalmente, uma palavra sobre avaliação de ensino. Nunca me preocupei demais com eles, embora eu também não os ignorasse completamente. Um estudante de 20 anos, por mais brilhante que seja, nem sempre está na melhor posição para julgar o que ele ou ela deve ser ensinado. Lamentavelmente, na minha instituição essas avaliações evoluíram para algo como um concurso de popularidade - um em que eu me recusei a participar.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

V. ESTILO E APRESENTAÇÃO

✍ **Estilo** Um livro engloba não só seu conteúdo, mas também sua forma, e é na forma em que a individualidade e o estilo pessoal brilham. Embora haja consenso geral sobre as equações e princípios do conteúdo, a forma ou estilo pode variar significativamente. Alguns livros são excessivamente verbosos, levando a confusão, enquanto outros omitem derivações ou fornecem exemplos muito simplistas. Portanto, a forma de um livro é profundamente pessoal, refletindo o estilo de ensino do autor, foco de interesse, e único estilo de entrega.

Ao longo deste livro, incorporei comentários pessoais, e a profundidade e amplitude da cobertura refletem minha perspectiva individual sobre o assunto. Isso significa que alguns leitores podem encontrar certos tópicos sobre (como linhas de influência), enquanto outros podem perceber que eu mergulho em temas arcanos com detalhes excessivos. Uma nota sobre a língua: O inglês não é minha língua materna. É, na verdade, a quinta e última língua que adquiri. Embora a IA tenha feito muito para refinar a prosa ao longo deste livro, as imperfeições permanecem sem dúvida. Eu fiz o meu melhor, e eu peço apenas para a compreensão do leitor e uma medida de generosidade em troca.

α**K**Ω **Notação** A notação em mecânica estrutural e publicações de engenharia é frequentemente inconsistente. Embora usar conjuntos de notação distintos para cada capítulo baseado em áreas específicas teria sido mais conveniente para mim como o autor, ele teria se mostrado impraticável e confuso para os leitores de um livro que cobre uma ampla gama de tópicos.

Este foi realmente um dos maiores desafios que eu enfrentei. Tornou-se rapidamente evidente que manter uma notação consistente através e dentro de várias disciplinas apresentaria dificuldades para os leitores buscarem uma compreensão abrangente do assunto.

Portanto, fiz todos os esforços para estabelecer um sistema de notação uniforme ao longo do livro. Além disso, tomei a iniciativa de redesenhar inúmeras figuras para alinhar com a notação do livro ao invés de aderir estritamente à notação usada em subdisciplinas específicas.

🔄 **Repetições** Na maioria dos livros didáticos, duplicar figuras, equações, ou texto previamente coberto é tipicamente evitado. No entanto, devido à natureza abrangente deste livro e para facilitar a compreensão, eu não hesitei em repetir certos elementos de seções anteriores. Além disso, fiz esforços para fazer referência ao conteúdo original quando necessário.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Cores Enquanto a maioria dos livros de engenharia são impressos em escala de cinza, resultando em uma aparência plana e visualmente inestimulante, este livro é concebido exclusivamente para leitura na tela. Livre das restrições da impressão, a cor foi abraçada não como decoração, mas como uma ferramenta comunicativa deliberada. Ela aparece liberalmente em todas as figuras, onde cada matiz carrega um significado distinto e consistente, e mais amplamente onde serve para melhorar a clareza, guiar o olho, ou reforçar a compreensão.

Além disso, escolhi me afastar do típico fundo branco, que pode ser percebido como um pouco agressivo, e ao invés disso opta por uma cor de fundo com o código hexadecimal `#FBF2ed`.. Esta escolha inspira-se no Financial Times, embora por razões completamente diferentes.

Por fim, você pode notar que ocasionalmente uso cores dentro do próprio texto para destacar e enfatizar certos pontos ou conceitos.

Tipografia

Esta edição está marcada em um serife da família Palatino no 12pt, com um texto pilar tamanho para manter cada linha dentro da gama de tipógrafos geralmente Considerado como confortável para leitura sustentada - aproximadamente 45 a 75 personagens, com um ideal perto de 66[5].. Na configuração original do livro 11pt, as linhas correram mais perto de 85 caracteres, depois do ponto em que o olho rastreia uma linha de texto confortavelmente; O aumento para 12pt foi feito especificamente para corrigir isso, não como uma preferência estilística.

Fonte do Título A fonte do título merece uma breve explicação. As letras na capa são traduzidas dentro do quadrado pórticos com diagonais cruzadas – uma homenagem deliberada ao célebre alfabeto de Leonardo da Vinci em De Divina Proporione (Veneza, 1509), o tratado sobre proporções matemáticas *Divina Proportione* escrito por Luca Pacioli e ilustrado por Leonardo. Nessa obra, Leonardo construiu cada letra maiúscula geometricamente, inscrita dentro de um quadrado e construída a partir das mesmas regras proporcionais que governam a arquitetura, o corpo humano e formas naturais. A escolha não é meramente decorativa. Um quadrado subdividido por suas diagonais também é o mais simples elemento finito - o bloco de construção dos métodos computacionais que ocupam a maior parte deste livro. Que a mesma figura geométrica deveria aparecer em um manuscrito renascentista na proporção e em um moderno matriz de rigidez é menos uma

[5] Robert Bringhurst, Os Elementos do Estilo Tipográfico, 4a ed. (Vancouver: Hartley & Marks Publishers, 2012).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

coincidência do que um lembrete da profunda continuidade entre geometria clássica e análise estrutural. O texto corporal é definido em Palatino, desenhado por Hermann Zapf especificamente para literatura matemática e técnica, e cujas origens caligráficas o colocam na mesma ampla tradição humanista que os manuscritos que inspiraram este trabalho. Das cartas escritas de Leonardo para os reunidos matriz de rigidez, a disciplina subjacente é a mesma: Encontrar ordem e proporção na estrutura.

VI. CONCEPÇÃO E PRODUÇÃO

LaTeX (Esta seção sobre LaTeX foi composta em forma de círculo por puro divertimento, com base em um exemplo do TeXbook original de Knuth.)

Este livro
não poderia ter sido produzido
em um processador de textos convencional:
somente o LaTeX, com seu domínio incomparável
da tipografia, da matemática, das referências cruzadas
e da estrutura de documentos, poderia enfrentar semelhante
desafio. Mais de quarenta anos de uso do LaTeX forneceram
uma base sólida, mas este projeto levou suas capacidades ao limite.
O preâmbulo, sozinho, cresceu até quase 1.400 linhas e coordena
cuidadosamente cerca de 80 pacotes que controlam a notação simbólica,
os ambientes de teoremas e exemplos, os esquemas de cores, a geometria
da página, os cabeçalhos, a geração de índices, a gestão bibliográfica,
os hiperlinks e o suporte multilíngue. Dezenas de macros específicas
foram criadas, muitas delas aperfeiçoadas iterativamente com a ajuda
de ferramentas de IA, para assegurar coerência absoluta entre milhares
de definições, proposições, derivações e figuras distribuídas pelos
quatro volumes. Um desafio persistente foi administrar o esgotamento
dos registros do LaTeX: somente o pacote `morewrites` exigiu a
alocação especial de outros 50 fluxos de escrita para evitar o temido
erro *no room for a new write*. A compilação da obra completa
requer várias passagens sequenciais de pdfLaTeX, BibTeX
e MakeIndex, coordenadas por um script de compilação
que gerencia os arquivos auxiliares, os diferentes
fluxos de índices e as seções bibliográficas
independentes das quatro
partes.

Para os entusiastas do LaTeX, disponibilizo meu arquivo `Preambule.tex`.

Códigos Matlab Os livros incluem uma coleção substancial de códigos ilustrativos MATLAB, reunidos em um apêndice dedicado para facilitar o acesso. MATLAB é usado

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

extensivamente em todas as comunidades de engenharia e pesquisa para álgebra linear numérica, desenvolvimento de algoritmos e análise computacional em larga escala, e sua inclusão reflete esse papel central. Os códigos apresentados aqui não são para ser otimizados ou estilisticamente compactos; em vez disso, são escritos para enfatizar a exatidão, transparência e clareza conceitual, com o objetivo explícito de permanecer acessível aos leitores sem expertise avançada em programação.

Códigos MathCad Mathcad tornou-se um ambiente computacional amplamente utilizado entre engenheiros estruturais praticantes, devido à sua sintaxe matemática natural, manipulação integrada de unidades e transparência dos cálculos. Para fins ilustrativos, um apêndice dedicado de aproximadamente 160 páginas apresenta soluções completas para numerosos problemas de exemplo implementados em Mathcad, proporcionando uma ponte direta entre o desenvolvimento analítico e a computação profissional diária.

AI O que eu pensei foi que a conclusão deste livro provou o contrário. Quando me aproximei do que parecia um rascunho final, grandes modelos de linguagem tornou-se disponível e gradualmente provou ser assistentes inestimáveis. Eu poderia ter parado muito antes, mas essas ferramentas-ChatGPT (OpenAI) e Claude (Antrópico) - Alimentei meu senso de perfeccionismo. Cada nova capacidade me tentou a refinar mais, verificar mais uma vez, polir outra seção, regenerar uma tabela sumária. O resultado foi que o projeto se estendeu cerca de dois anos além do que deveria ter sido sua conclusão natural. O leitor não deve, no entanto, ser induzido em pensar que isso foi uma indulgência sem esforço ou passiva. Meu perfeccionismo era implacável, e essas ferramentas o possibilitavam; Além disso, eu não tinha nenhum limite de tempo ou prazo para terminar, o que significava que nada me forçava a parar. Sua disponibilidade significava que eu sempre poderia encontrar mais uma coisa para melhorar.

O manuscrito inicial, incluindo quase todo o Livro Eu, estava completamente completo sem envolvimento com a IA. A narrativa histórica que contém representa anos de leitura de fontes primárias e síntese cuidadosa - trabalho substancialmente feito antes de eu me envolver com essas ferramentas. Quando comecei a usá-los, inicialmente era apenas para polir prosa inglesa e preencher pequenas lacunas. Logo se tornou evidente, no entanto, que limitar-me a tal uso modesto teria sido um erro grave. Essas ferramentas tinham capacidades muito além do simples polimento; Em vez disso, eu deveria aproveitar todo o seu alcance para verificar fatos, sintetizar material diferente, gerar tabelas sumárias e fortalecer a narrativa geral. O desafio não era usar IA, mas usá-la rigorosamente.

Sobre o papel da IA neste trabalho: Ao longo deste projeto, a assistência da IA nunca foi um atalho mas sim um parceiro de diálogo estruturado para verificação, síntese e refinamento. Meu fluxo de trabalho típico começa com um rascunho ou texto, depois disso eu envolvo a IA em uma troca disciplinada: Minha conta está correta? Estou perdendo algo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

importante? Os detalhes periféricos devem ser cortados? Para quase todos os tópicos que aparecem nestas páginas, o texto final representa o produto de uma dúzia ou mais trocas - prompts iniciais, contrações rejeitando o que a IA produziu, pedidos de esclarecimento, desafios diretos perguntando se era totalmente certo de suas declarações, e invariavelmente, verificação independente do resultado. Além da verificação de fatos, eu confio na IA para mesclar seções relacionadas, transições suaves entre tópicos, e gerar tabelas cronológicas e resumos.

Meu engajamento com diferentes ferramentas de IA evoluiu conforme o projeto progrediu. Comecei com o ChatGPT, mas rapidamente descobri que Claude se destacava em tarefas cerebrais - edição nuanced, síntese histórica, diálogo acadêmico - e era substancialmente superior para a síntese histórica exigida pelo Livro Eu. No entanto, ao completar as páginas finais dos livros II-IV, o último modelo do ChatGPT (Pro, generosamente fornecido por minha filha Sophie, que trabalha na OpenAI) mostrou-se imensamente superior para gerar exemplos numéricos e polir aspectos mecânicos do texto.

Em várias ocasiões, joguei deliberadamente uma IA contra a outra como estratégia de verificação. Eu obteria uma resposta de uma ferramenta, então colocaria a mesma pergunta ou desafio à outra, pedindo-lhe para avaliar independentemente ou verificar o primeiro resultado. Esta verificação cruzada provou ser inestimável: Claude frequentemente pegava simplificações excessivas ou saltos lógicos na saída do ChatGPT, enquanto o ChatGTP se destacava em detectar quando Claude tinha sido excessivamente cauteloso ou havia perdido um detalhe computacional. Essa abordagem adversa fortaleceu a confiança no material final e expôs pontos fracos que exigiam pesquisa independente ou consulta com especialistas em matéria de assunto.

Por.. **Livro I (História)**O papel de Claude era estritamente limitado: esclarecendo fatos históricos e polindo todo o documento. Nunca permiti que gerasse ou expandisse substancialmente o conteúdo. O texto em todo o Livro Eu sou totalmente minha.

Por.. **Livros II-IV (Análise estrutural)**, AI assistência era igualmente limitada e focada. Ele foi usado principalmente para refinar derivações selecionadas, preencher lacunas na cobertura teórica e gerar exemplos numéricos para tópicos complexos. Em todos os casos, revi cuidadosamente a saída para me proteger contra alegações alucinadas ou exagero estilístico. Um logotipo da IA aparece nestes livros apenas em dois contextos específicos: Quando uma derivação foi assistida por IA ou quando uma seção foi escrita principalmente por IA. Não aparece nas seções que eu autorei e simplesmente polido com ajuda de IA.

Que uma coisa seja dita claramente: Em 2026, ter recusado a IA teria sido um erro grave. Não há virtude em recusar uma ferramenta desse alcance e poder, apenas um senso de pureza intelectual que não serve nem ao autor nem ao leitor. Os históricos ludditas não eram, como sugere a caricatura, opostos à própria tecnologia, mas sim à sua exploração sem consideração por ofício, habilidade ou dignidade humana. A acusação moderna de "Ludite" agora é nivelada a qualquer um que hesite em abraçar novas ferramentas. No entanto, há uma diferença entre ceticismo fundamentado e recusa total. O mérito não reside

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

em abster-se de IA, mas em explorá-la inteligentemente, rigorosamente, e sempre a partir de uma posição de controle autoral total. O diálogo estruturado, a verificação cruzada entre as ferramentas e o rótulo cuidadoso descrito acima não são restrições impostas pela timidez; Eles são a arquitetura desse controle. A IA era um poderoso instrumento para verificação, síntese e refinamento; O julgamento, o ceticismo e a palavra final sempre foram meus.

Imaginei Dediquei atenção meticulosa ao layout e apresentação visual, pessoalmente criando todas as figuras usando várias ferramentas - de Xfig na Unix para Visio no Windows - e criando os programas MATLAB apresentados no apêndice. Para o material histórico do Livro I, eu frequentemente redescunho figuras de fontes originais para melhorar a clareza ou destacar detalhes chave.

Através deste processo, eu vim para apreciar duas idéias: Primeiro, a importância primordial de produzir figuras claras, afiadas e concisas; e segundo, o valor pedagógico de recriar figuras pessoalmente, que aprofunda a compreensão dos conceitos subjacentes. A este respeito, identifico-me mais com a sensibilidade artística de Vermeer... valorizando profundidade e detalhe... do que com o minimalismo de Mondrian.

Confesso que sou um pouco obsessivo com figuras. Cada um foi cuidadosamente preparado para garantir consistência visual, incluindo o uso de fundos transparentes para que as ilustrações se misturem perfeitamente com a cor da página ao invés de retângulos brancos. Pequenos detalhes, talvez, mas eles importam.

VII. FONTES E ATRIBUIÇÃO

Referências Ao longo do Livro I (História), eu intencionalmente confiei em fontes primárias para todas as referências - muitas das quais o leitor pode baixar clicando no logotipo vermelho que segue a citação - e eu evitei fontes secundárias exceto onde eles eram realmente necessários para um entendimento completo. Note que, sempre que possível, todos os documentos foram processados por OCR e seus tamanhos de arquivos comprimidos.

Fotografias Este trabalho está licenciado sob a licença de Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International Licença. Está disponível livremente, e eu não tiro nenhum benefício financeiro de sua distribuição.

Na obtenção de imagens, eu confiei no que eu acredito ser razoável "avaliações de uso justo". Todos os números de trabalhos publicados antes de 1900 são do domínio público, e as fotografias obtidas através da pesquisa de imagens do Google foram, pelo que sei, licenciadas para reutilização não comercial. Às vezes, incluí imagens sem atribuição total -

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

uma tarefa que, feita rigorosamente por centenas de números, teria sido proibitivamente tediosa. Eu me permiti esta liberdade no espírito de *É justo* e dada a natureza não comercial deste trabalho. Se algum titular de direitos se opuser, darei crédito adequado ou removerei o material a pedido.



Livros consultados

I Livro I Para este primeiro livro, estou muito em dívida com Google Scholar, o University of Colorado library E o pouco conhecido HathiTrust Digital Library[6].

Muitos dos documentos históricos citados neste trabalho estão disponíveis para download como arquivos PDF. Quando um pequeno ícone PDF aparecer à direita de uma citação, clicando nele irá recuperar uma cópia digitalizada da fonte original. Os leitores são fortemente encorajados a consultar essas referências primárias, eles oferecem insight inestimável sobre a evolução de ideias e métodos que moldam análise estrutural, muitas vezes revelando nuances e contexto que nenhuma conta secundária pode capturar completamente.

Minha fluência em francês, italiano e espanhol facilitou muito o acesso a fontes que permanecem não traduzidas, enquanto lamentavelmente, minha falta de latim e alemão tem limitado o engajamento direto com certos textos fundamentais. No entanto, eu não hesitei em incluir e comentar inúmeras citações de fontes originais ao longo deste trabalho, permitindo que os leitores encontrem as vozes das figuras históricas em primeira mão e proporcionando uma visão mais profunda sobre o desenvolvimento das ideias Apresentado.

Livros II-IV Os três livros que se seguem são extraídos principalmente do meu lecture notes, englobando problemas resolvidos, incluindo exemplos, tarefas de casa e exames. Enquanto esses materiais eram meticulosamente curados para manter o rigor adequado, referências adicionais se mostraram essenciais.

Durante todo o processo de compilação de minhas anotações e escrita deste livro, eu procurei *inspiração* de numerosos textos que influenciaram minha cobertura teórica, muitas vezes ampliada e guiou a seleção de exemplos numéricos. Entre as fontes primárias (embora não uma lista exaustiva):

- Billington, D. 1965. *Estruturas finas de concreto.*. Universidade de Princeton: McGraw Hill, Inc.

[6] Fundada em 2008, HathiTrust é uma colaboração sem fins lucrativos de bibliotecas acadêmicas e de pesquisa preservando mais de 17 milhões de itens digitalizados. HathiTrust oferece acesso de leitura até a maior extensão permitida pelos EUA. Lei de copyright, acesso computacional a todo o corpus para pesquisas acadêmicas, e outros serviços emergentes baseados na coleção combinada. Os membros da HathiTrust administram a coleção, o maior conjunto de livros digitalizados gerenciados por bibliotecas acadêmicas e de pesquisa, sob os objetivos de interesses acadêmicos, não corporativos.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- Billington, David P. e Robert Mark. 1970. *Engenharia Civil, História, Patrimônio e Humanidades: Documentos da Primeira Conferência Nacional.*. Princeton, NJ: Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Princeton.
- Gerstle, K. 1974. *Básico Análise estrutural.*. McGraw-Hill. (Fora de impressão)
- Kinney, J. S. 1957. *Indeterminado Análise estrutural.*. Addison-Wesley. (Fora de impressão)
- Norris, C. H., e J. H. Wilbur. 1960. *Elementar Análise estrutural.*. McGraw-Hill.
- Pilkey, W. D., e W. Wunderlich. 1994. *Mecânica de Estruturas, Métodos Variacionais e Computacionais.*. CRC Press.
- Przemieniecki, J. S. 1968. *Teoria da Matriz Análise estrutural.*. Nova York: McGraw-Hill. Reimpresso por Courrier (anteriormente Dover).

Todos os esforços foram feitos para dar crédito ao longo deste trabalho. Se houver omissões, elas são totalmente involuntárias, e eu peço desculpas por tais descuidos.

VIII. DISPOSIBILIDADE E ESTATÍSTICA

Por que é de graça? Do lado do "fornecimento"da escrita de livros, os autores são tipicamente guiados por duas motivações: recompensa financeira, e/ou a satisfação pessoal - talvez até mesmo reconhecimento - que vem de contribuir para o nosso campo. Em ambos os casos, há uma expectativa de que o editor lidará com edição de texto, layout de página e marketing, tarefas muitas vezes além da experiência do autor ou interesse. No entanto, pela minha experiência, até mesmo grandes editoras agora se envolvem em produção em massa: A edição substantiva desapareceu em grande parte, e várias fases da publicação são rotineiramente terceirizadas no exterior. A parceria que já existiu entre autor e editor foi corroída.

Sejamos sinceros: Em nossas disciplinas acadêmicas, poucos autores recebem royalties suficientes para cobrir até mesmo um voo transatlântico. E nesta fase da minha carreira, não estou buscando o reconhecimento que vem com ser um autor publicado. Qualquer fama modesta que eu possa ter ganho descansos no trabalho já feito.

Do lado da 11a demanda, estudantes e leitores viram os preços dos livros subirem para níveis que deformação orçamentos pessoais e aquisições de bibliotecas iguais. Os editores respondem com estratégias inteligentes, alugando livros ou capítulos individuais por períodos limitados, como transmitir um filme, mas estes pouco fazem para resolver o problema fundamental do acesso.

Como professores universitários, nossa responsabilidade é adquirir e compartilhar conhecimento. Somos razoavelmente compensados por nossas instituições para esta missão. Os poucos royalties oferecidos pelos editores simplesmente não valem uma

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

pechincha faustiana que coloca nosso trabalho atrás dos paywalls e fora do alcance daqueles que mais precisam.

Portanto, este livro pode ser livremente baixado e compartilhado sem restrições, de acordo com o espírito da investigação acadêmica aberta.

Página Web Um dedicado website foi criado para este livro. Além de servir como a plataforma primária da qual o livro (e as notas de palestra associadas) podem ser baixados, o site fornece um fórum para interação com os leitores através de um blog. Este espaço permite que os leitores relatem erros, façam perguntas, ou ofereçam comentários e feedback.

Em paralelo, estou considerando outras iniciativas: usando LaTeXML para gerar uma versão baseada na web do livro, organizado por capítulo;

Algumas estatísticas O A escala da empresa é refletida em seu conteúdo: Aproximadamente 3.246 Páginas, 68 Capítulos distribuídos em quatro volumes (17, 22, 13 e 16, respectivamente), 16 Anexos, 451 Seções, 300 Trabalhou exemplos, 854 Figuras, 187 mesas, cerca de 3.000 Equações, 908 Citações, e 3.352 Ligações internas de referências cruzadas... um testamento para o que disciplinado, paciente e precisa digitação pode alcançar.

Victor E. Saouma
Boulder, CO
Julho de 2026

CÓPIA PARA REVISÃO

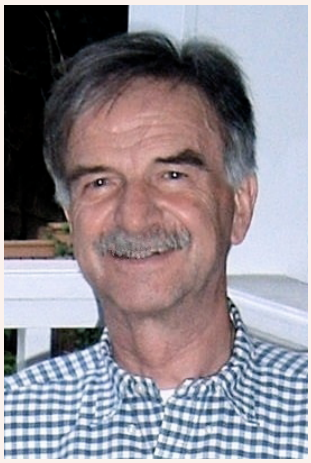
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, minha sincera gratidão vai para dois colegas excepcionais que, talvez sem o conhecimento deles, tiveram uma profunda influência em mim. Seu notável caráter pessoal e notáveis realizações profissionais foram uma fonte constante de inspiração. A rara combinação dessas qualidades é lamentavelmente incomum em nossa profissão.



Kurt Gerstle (1923-2013)



Kaspar Willam (1940-2024)

Antrópico (2021-TBD)

OpenAI (2015-TBD)

Enquanto Kurt e Kaspar moldaram minha compreensão da engenharia estrutural e mecânica através de décadas de discurso acadêmico, Claude se mostrou um inestimável colaborador em refinar a narrativa histórica do Livro I - oferecendo assistência incansável com pesquisa síntese, refinamento editorial, e ocasional verificação da realidade, tudo sem nunca solicitar licença sabática ou consideração de posse.

Eu seria negligente em não reconhecer as muitas perguntas estudantis que
Ocasionalmente fornecia insights inesperados, e
Universidade de Colorado para o ambiente acadêmico
que permitiu este longo esforço.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Guia do Leitor

- Este livro é intencionalmente projetado para leitura digital, não impressão. É melhor experiente em um computador, permitindo uma navegação perfeita através de vários hiperlinks e marcadores para uma experiência de leitura enriquecida.
- É essencial para começar com o Prefácio, como este livro diverge do formato típico e inclui características únicas e insights que você vai querer entender desde o início.
- Este livro não é para o leitor casual ou um substituto rápido para os livros didáticos padrão. Destina-se àqueles que procuram ir além da cobertura convencional de rotina.
- Para atingir um nível modestamente eficiente como engenheiro estrutural você não precisa deste livro. Uma abordagem tradicional, complementada por programas de computador, é suficiente.
- No entanto, se você quer uma compreensão mais profunda do comportamento estrutural antes de mergulhar em análise baseada em computador, este livro pode ajudar como todas as equações e resultados são derivados de primeiros princípios, garantindo um desenvolvimento completo e transparente de cada conceito.
- Ter uma compreensão sólida da teoria, permitindo rápida e confiável análise de mãos do "back-of-the-envelope", pode ser inestimável antes de recorrer ao computador.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Programa de Descoberta de Erros

Como autor, eu entendo que apesar da minha edição rigorosa, erros ainda podem existir dentro das páginas deste livro. Portanto, estou implementando um *Programa de Recompensa Descoberta Erro* para solicitar sua ajuda na identificação de tais erros.

Se você encontrar algum erro dentro do texto:

- Histórico no Livro I;
- Equações, figuras ou declarações relacionadas nos livros II-IV,

Convido você a levantar este ponto na seção de blog do site do livro

Por cada erro que você identificar e relatar a mim, incluirei seu nome nesta página junto com o erro descoberto. Além disso, como sinal de agradecimento por sua diligência, enviarei um cheque de 1 USD para cada erro verificado encontrado.

Por favor, note as seguintes diretrizes para a participação neste *Programa de Recompensa Descoberta Erro*:

- Erros devem ser substantivos e genuínos. Reclamações frívolas ou errôneas não serão consideradas.
- Para relatar um erro, por favor forneça informações detalhadas sobre sua localização dentro do livro e uma breve explicação/justificação da natureza do erro.
- Você pode enviar vários relatórios de erro, mas cada relatório deve pertencer a um único erro.
- O arquivo será atualizado todos os meses no primeiro ano, trimestre no segundo ano, semestre no terceiro ano, e aproximadamente anualmente depois disso.
- Este programa está sujeito a mudança ou demissão, a meu critério.

Erratum

Data	Nome	e-mail	Versão	Erro
4/4/2025	Trump, Donald	Trump@maga.com	11 de janeiro de 2025	Equação 2.5 em A estimativa do Tamanho da multidão

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Notação

Eu fiz todos os esforços para manter uma notação consistente ao longo dos quatro livros. Isto foi particularmente desafiador porque a notação varia entre referências introdutórias e avançadas, e os autores muitas vezes tomam liberdades. Apesar dos meus esforços, algumas discrepâncias podem ter escapado, mas elas devem ser reconhecíveis para o leitor astuto.

Nota: Em vários casos, um tensor é denotado[7] por *Os dois* Cara arrojada e/ou entre parênteses rectos (i.e. $\mathbf{K}$ $[\mathbf{K}]$, $\{\boldsymbol{\delta}\}$.

Análise linear elástica

Escalões

A	Área
B	Deformação deslocamento (cinemática) matriz
C	Continuidade (C^0, C^1)
E	Módulo elástico
G	Cisalhamento módulo
G_f	Energia de fratura
H	Força horizontal em cabos
	Endurecimento ou módulo de plástico
I_e	Scalar sobre o eixo e
J, I_{xx}	Polar momento de inércia
K	Energia cinética
L	Área, coordenadas triangulares
M	Um momento
N	Força axial
	Funções de forma
U	Deformação energia
U^*	Energia complementar deformação
U_0	Densidade de energia interna deformação
U_0^*	Densidade de energia interna complementar deformação
T	Temperatura
	Tensão (no cabo)
	Torção
V	Força cortante
W	Trabalho
W_e	Trabalho externo
W_i	Trabalho interno

[7] Embora isso claramente se desvie da notação aceita, achei útil enfatizar a natureza vetorial ou matricial do tensor

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$\mathcal{W}_e$ Potencial de trabalho externo
$\mathcal{W}_e^*$ Potencial complementar de trabalho externo

f_c' Força de compressão
f_t' Força de tensão
q Carga distribuída
s Ensanguentando um cabo
t Tempo
w Carga distribuída

Tensores

$\mathcal{A}$ Matrix
$\mathcal{B}$ Matriz estática
D Matriz constitutiva
FEM Momentos Fixos do Fim
I Tensor de inércia de segunda ordem
J Jacobian
K Rigidez em coordenadas globais
M Um momentoM_{zz}, M_{yy})
N Força axial (N_x)
NEF Forças equivalentes nodais
P Forças em coordenação global
T Torção (M_{xx})
V Força cortante (V_y, V_z)

b Força corporal
Matriz de flexibilidade
k Matriz de rigidez em coordenadas locais
LM Matriz de localização
n Unidade vetor normal
p Forças na coordenação local
t Tração de superfície
u Deslocamento vetor

Δ Deslocamentos em coordenadas globais
Γ Matriz de transformação em coordenadas globais

Γ_t Limite natural (tração conhecida)
Γ_u Limite essencial (conhecido deslocamento)
Φ Campo escalar
Π Energia potencial
Π^* Energia potencial complementar
Ω Volume do corpo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

α Coeficiente de expansão térmica
$\boldsymbol{\delta}$ Deslocamentos em coordenadas locais
$\boldsymbol{\varepsilon}$ Deformação tensor
$\boldsymbol{\gamma}$ Matriz de transformação em coordenadas locais
κ Número da condição
κ Curvatura
λ Eigenvalue
O que é isso
μ O que é isso
ν Razão Poisson
ρ Densidade de massa
Raio de curvatura
$\boldsymbol{\sigma}$ Tensão tensor
ω Frequência angular

Funções

$\mathcal{H}$ Hermitian
$\mathcal{L}$ Lagrangian

Operadores

B Operador linear (mapas deslocamentos para deformação)
$\mathbf{L}$ Operador linear (tensão e deformação)

Símbolos de Matemática

$\oint$ Linha integral
$\overline{\nabla \cdot}$ Divergência (div)
∇ Gradiente (grad)
$[.]$ Matriz
∂ Parcial (derivado)
δ Operador de variação
$\{.\}$ Vetor (pilar)
$\lfloor . \rfloor$ Vetor (linha)
$\delta \dot{-}$ Quantidade virtual

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Formulação de elementos não lineares

Grandezas nodais

$\mathbf{P}_S^{int}$	Vetor de força nodal interno
$\mathbf{P}_t^{ext}$	Vetor de força nodal externo livre a nível estrutural
$\mathbf{P}_t^{int}$	Vetor interno de força nodal em nível estrutural
$\mathbf{P}_u^{int}$	Vetor interno de força nodal na restrição graus de liberdade a nível estrutural
$\mathbf{P}_t^{R}$	Vetor de força nodal residual a nível estrutural
$\mathbf{u}_t$	vetor Nodal deslocamento em livre graus de liberdade no nível estrutural
$\mathbf{F}_e$	Elemento vetor de força nodal em referência global; $\lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$
$\mathbf{F}_e^{int}$	Elemento interno vetor de força nodal em referência global
$\boldsymbol{\delta}_e$	Elemento vetor nodal deslocamento em referência global; $\lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$
$\overline{\mathbf{f}}_e$	Elemento vetor de força nodal em referência local com modos rígidos do corpo; $\lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$
$\overline{\mathbf{f}}_e^{int}$	Elemento interno vetor de força nodal em referência local com modos rígidos do corpo
$\overline{\mathbf{d}}_e$	Elemento vetor nodal deslocamento em referência local com modos rígidos de corpo; $\lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{X2},\ \overline{v}_{Y2},\ \overline{\theta}_{Z2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e$	Elemento vetor de força nodal em referência local sem modos rígidos do corpo; $\lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$	Elemento interno vetor de força nodal em referência local sem modos rígidos do corpo
$\tilde{\mathbf{f}}_e^{R}$	Elemento residual vetor de força nodal em referência local sem modos rígidos do corpo
$\tilde{\mathbf{d}}_e$	Elemento vetor nodal deslocamento em referência local sem modos rígidos de corpo; $\lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{d}}_e^{R}$	Elemento residual nodal vetor em referência local sem modos rígidos de corpo
$\delta\overline{\mathbf{d}}_e$	Elemento virtual nodal deslocamento vetor em referência local

Seção de Quantidades

$\mathbf{d}_s(x)$	Seção deslocamento vetor; $\lfloor u(x),\ v(x) \rfloor^T$
Φ	Curvatura
$\boldsymbol{\sigma}_s(x)$	Seção vetor de força; $\lfloor N(x),\ M(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$	Vetor de força da seção interna
$\boldsymbol{\sigma}_s^{R}(x)$	Vetor de força da seção residual
$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	Vetor de deformação da seção; $\lfloor \varepsilon_x(x),\ \phi_z(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{int}(x)$	Vetor de deformação residual
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	Vetor de deformação da seção virtual
κ	Plástico tensão

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Quantidades de fibra

σ	Uniaxial tensão
ε	Uniaxial deformação
σ_r	Uniaxial tensão de camada / fibra
ε_r	Uniaxial deformação de camada / fibra

Matrizes de rigidez

$\mathbf{N}_d(x)$	Função de forma no campo deslocamento
$\mathbf{B}_d(x)$	A matriz derivada dos derivados de $\mathbf{N}_d(x)$
$\mathbf{N}_f(x)$	Função de forma no campo de força
$\mathbf{K}_S$	Aumentado matriz de rigidez a nível estrutural
$\mathbf{K}_{tt}$	Matriz de rigidez associado natural condições de contorno
$\mathbf{K}_{tu}$	Matriz de rigidez associado natural e essencial condições de contorno
$\mathbf{K}_{ut}$	Matriz de rigidez associado essencial e natural condições de contorno
$\mathbf{K}_{uu}$	Matriz de rigidez associados essenciais condições de contorno
$\mathbf{K}_e$	Elemento matriz de rigidez em referência global
$\bar{\mathbf{k}}_e$	Elemento matriz de rigidez em referência local com modos rígidos de corpo
$\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$	Elemento rigidez tangente matriz em referência local com modos rígidos de corpo
$\tilde{\mathbf{k}}_e$	Elemento matriz de rigidez em referência local sem modos rígidos de corpo
$\tilde{\mathbf{c}}_e$	Elemento matriz de flexibilidade em referência local sem modos rígidos de corpo
$\mathbf{k}_s(x)$	Seção matriz de rigidez
$\mathbf{k}_s^{tan}(x)$	Seção rigidez tangente matriz
$\mathbf{c}_s(x)$	Seção matriz de flexibilidade

Diversos

$E(x)$	Módulo elástico
$A(x)$	Área da Seção
$I_z(x)$	Momento de inércia na área da seção
L_e	Comprimento do elemento
$\mathbf{\Gamma}_e$	Matriz de transformação entre o sistema de coordenadas local e global
$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e$	Matriz de transformação entre os modos rígidos do corpo e nenhum modo rígido

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Subscritos

t	Sabe-se de tração
u	Conhecido deslocamento
S	Nível estrutural
e	Nível do elemento ou e^{th} Elemento na determinação do estado do elemento
r	Nível de camada/fibra ou r^{th} Camada/fibra na determinação do estado da camada/fiba
s	Seção nível ou s^{th} Seção na seção de determinação do estado
d	Deslocamento campo
f	Campo de força
n	Passo atual da força externa/deslocamento vetor

Sobrescritos

int	Interno
ext	Externo
R	Residual
k	k^{th} iteração ao nível estrutural
j	j^{th} iteração ao nível do elemento

Modelos Constitutivos Não-lineares

A_g	Área bruta de corte transversal
A_{st}	Área transversal de aço reforçado
b	Largura da seção transversal do membro
c	Fator de taxa de degradação histerética
E	O módulo de Young
$E_{adjusted}$	Modelo de plasticidade, elemento elástico linear ajustado módulo elástico
E_{axial}	Elemento de comprimento zero, módulo elástico da mola axial (jovem)
E_{bp}	Módulo de recarga do ponto de ruptura
E_c	Módulo pós-cozimento (deformação)
E_{hys}	Capacidade de energia histerética (= $\gamma\sigma_y\varepsilon_y$)
E_i	Energia histerética dissipada durante a excursão de carga "i"(= $\Delta\varepsilon[\sigma_{i-1} + \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_{i-1}]$)
E_s	encruamento módulo
E_{shear}	Elemento de comprimento zero, módulo elástico transverso da mola (jovem)
E_t	módulo de recarga do alvo
E_{tan}	módulo tangente
E_u	módulo desbotado
f'_c	resistência à compressão do concreto
F_y	Força de escoamento
G	cisalhamento módulo
h	Altura da seção transversal do membro

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$K_{adjusted}$	Modelo de plasticidade, elemento elástico linear ajustado inicial rigidez
K_{BC}	pilar inicial rigidez
$K_{combined}$	Modelo de plasticidade, elástico linear e plástico não linear combinado
	Rotação inicial rigidez
K_{deg}	Elemento de comprimento zero pós-pico degradado rigidez
K_e	elástico inicial rigidez
K_{linear}	Modelo de plasticidade, elemento elástico linear inicial
K_{LP}	Modelo de plasticidade, elemento ratacional não linear inicial rigidez
$K_{rotation}$	Rotação inicial rigidez
K_s	encruamento rigidez
K_{shear}	inicial cisalhamento rigidez
K_{stiff}	Modelo, mola transwerse de comprimento zero inicial
K^t_{deg}	pós-pico degradado rigidez
K_{unload}	rigidez
L	comprimento do elemento
M_r	Essência residual
M_u	Momento final
M_y	Rende-te momento
p	força axial
V_{fail}	força cortante no ponto de falha cisalhamento
V_r	Resistência residual cisalhamento
V_u	cisalhamento capacidade
β	Parâmetro histerético de dissipação
γ	Fator de capacidade energética histerética ($E_{hys} = \gamma\sigma_y\varepsilon_y$)
$\gamma_{adjusted}$	Modelo de plasticidade, fator de capacidade histerética calibrado
Δ_{BC}	pilar deformação lateral
Δ_5	Deformação lateral interstory no ponto de falha cisalhamento como definido por Elwood &
Δ_{spring}	Deformação da mola de comprimento zero
Δ_y	deslocamento
ε_{10}	ponto de inflexão entre descarga negativa tensão e positiva
	Recarregando
ε_5	ponto de inflexão entre descarga positiva tensão e negativa
	Recarregando
ε_{bp}	Ponto de ruptura deformação
ε_r	Resíduo deformação
ε_t	deformação no ponto de recarga alvo
ε_u	deformação no ponto máximo
ε_y	deformação
θ_r	Rotação residual
θ_u	Rotação final
θ_y	Rotação de rendimento
κ_d	fator de determinação do ponto de ruptura deformação (deslocamento)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

κ_f	O fator de determinação do ponto de ruptura tensão (força)
λ	fator de resistência residual ($V_r = \lambda V_{fail}$)
ν	força nominal cisalhamento (=V_u/A_g)
ρ''	Ração de reforço transversal (= A_{st}/bh)
σ_{bp}	Ponto de ruptura tensão
σ_r	Resíduo tensão
σ_{ref}	Referência de ramo pós-cozimento
$\sigma_{ref,bp}$	Referência de determinação do ponto de ruptura tensão
σ_t	tensão no ponto de recarga alvo
σ_u	tensão
σ_y	tensão

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nomenclatura

Conceitos Básicos em Análise estrutural

Força axial: A força agindo ao longo de um membro, causando tensão ou compressão.

Momento fletor: O momento interno fazendo um membro se curvar.

Compatibilidade: Condições que garantem a continuidade da deformação através de uma estrutura.

Deformação: Mudança na forma ou tamanho de uma estrutura devido a cargas aplicadas.

Grau de liberdade (DOF): Independente deslocamento ou rotação possível em um ponto estrutural.

Equilíbrio: Um estado onde todas as forças e momentos agindo sobre uma estrutura são equilibrados.

Flexibilidade: Inverso de rigidez, representando facilidade de deformação.

Força cortante: Esforço interno perpendicular ao eixo longitudinal de um membro, resistindo a deslizamento.

Determinação estática: Uma estrutura cuja esforços internos pode ser determinada usando equações de equilíbrio apenas.

Indeterminação estática: Uma estrutura que requer equações de compatibilidade adicionais para resolver.

Rigidez: Resistência de uma estrutura ou componente à deformação.

Deformação: Deformação por unidade de comprimento em um material.

Tensão: Esforço interno por unidade de área dentro de um material.

Propriedades materiais e comportamento

Assustador: Deformação dependente do tempo sob constante tensão.

Elasticidade: Propriedade material que permite recuperar a forma original após remover cargas.

Degradação material: Redução da força do material ou rigidez devido ao envelhecimento ou carregamento repetido.

Plasticidade: Comportamento material além do limite elástico, envolvendo deformações permanentes.

Razão de Poisson: Razão de lateral deformação para axial deformação em um material sob carga axical.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Expansão térmica: Deformação causada por mudanças de temperatura.

Força Ultimate: Máximo tensão um material pode resistir antes da falha.

Rendimento: Tensão em que um material passa do comportamento elástico para plástico.

Modulus de Young: Medida de material rigidez em elasticidade linear.

Padrões e Diretrizes

AASHTO: Associação Americana de Oficiais Estaduais de Rodovia e Transporte.

ACI 318: O "Código de Construção Requerimentos para Concreto Estrutural"desenvolvido pelo American Concrete Institute (ACI).

AISC: A especificação "Instituto Americano de Construção de Aço".

ASCE 7: Mínimas cargas de projeto e critérios associados para edifícios e outras estruturas.

ASCE 41: O padrão "Avaliação Sísmica e Retrofit de Prédios Existentes".

Eurocódigo 2: Padrão europeu para estruturas reforçadas e concreto protendido.

Eurocódigo 8: Padrão europeu para resistente a terremotos projeto estrutural.

FEMA P-58: Uma diretriz da Agência Federal de Gestão de Emergência para avaliação sísmica baseada em desempenho.

IBC: O "Código Internacional de Construção", fornecendo diretrizes de design baseadas em desempenho.

SeaOC Vision 2000: Uma estrutura para engenharia sísmica baseada em desempenho.

UBC: O "Código de Construção Uniform", um código histórico de construção.

Linear Análise estrutural

Deflexão: A vertical ou horizontal deslocamento de um ponto em uma estrutura.

Exigir carga: As forças laterais estimadas ou deslocamentos que uma estrutura é esperada para experimentar durante um evento sísmico, baseado em um determinado movimento do solo ou objetivo de desempenho.

Método dos elementos finitos (FEM): Método numérico para aproximar soluções de problemas estruturais complexos.

Análise linear elástica: Assume a proporcionalidade entre cargas e deformação dentro da faixa elástica.

Análise Matricial: Uma abordagem computacional usando matrizes para resolver sistemas estruturais lineares.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Método de Distribuição do Momento: Método iterativo para analisar estaticamente indeterminado vigas e pórticos.

Princípio da superposição: A resposta combinada de um sistema é a soma das respostas individuais às cargas.

Análise não linear

Não linearidade geométrica: Surge quando grandes deformações causam mudanças na geometria afetando a resposta da estrutura.

Histerese: Dissipação de energia durante o carregamento cíclico, muitas vezes visto em sistemas não lineares.

Métodos Iterativos: Técnicas como Newton-Raphson para resolver equações não lineares em análise estrutural.

Dependência do Caminho de Carga: Sistemas não lineares onde a resposta depende da sequência de cargas aplicadas.

Não linearidade material: Ocorre quando as relações tensão-deformação se desviam da linearidade, por exemplo, plasticidade ou rachadura.

Não-linear Flambagem: Instabilidade ocorrendo em membros esbeltos sob cargas axiais além do limite elástico.

Efeito P-Delta: Efeitos secundários de forças axiais na deformação estrutural devido a mudanças na geometria.

Comportamento suavizante: Uma redução de rigidez com crescente deformação, típica em estruturas danificadas.

Dinâmica Estrutural

Isolamento Base: Técnica para dissociar uma estrutura de movimento do solo, reduzindo forças sísmicas.

Amortecimento: Mecanismo de dissipação de energia reduzindo o movimento vibratório.

Análise Dinâmica: Avaliação da resposta estrutural sob cargas variáveis.

Forma modal: O padrão de deformação de uma estrutura em particular frequência natural.

Frequência natural: Frequência em que uma estrutura tende a vibrar livremente.

Espectro de resposta: Gráfico mostrando resposta estrutural máxima em uma faixa de frequências naturais para um específico movimento do solo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Análise de História do Tempo: Análise dinâmica usando registros detalhados movimento do solo como entrada.

Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE)

Taxa anual de superação (λ): Probabilidade de que o movimento do solo excederá um determinado nível de intensidade em um ano.

Curva de Capacidade: Uma trama mostrando a relação entre a demanda estrutural (por exemplo, deslocamento]) e a base aplicada cisalhamento ou força.

Diagrama de Capacidade: Uma representação gráfica da resposta não linear de uma estrutura, muitas vezes mostrando força-deslocamento comportamento.

Espectro de Capacidade: Uma transformação da curva de capacidade em coordenadas espectrais, tipicamente comparando demanda estrutural com demanda sísmica.

Função de capacidade: Uma função matemática descrevendo a resistência estrutural como uma função de deslocamento ou deformação.

Mecanismo de colapso: O modo de falha de uma estrutura caracterizada pela formação de padrões de deformação suficientes, levando a uma perda de estabilidade ou capacidade de carga.

Espectro Condicional: Espectro de resposta que representa as acelerações espectrais esperadas em vários períodos, condicionados a uma aceleração espectral alvo em um período específico.

Estado de Danos (DS): Categorização de danos estruturais em níveis, como menor, moderado, grave ou colapso.

Exigir Curva: Representa demandas sísmicas, tipicamente em termos de aceleração espectral e deslocamento.

Parâmetro de demanda da engenharia: Quantidade de resposta mensurável (por exemplo, deslocamento, aceleração, deformação) usada para avaliar o desempenho de uma estrutura em condições de carga especificadas.

Análise de Risco Sísmico da Engenharia (ESRA): Processo de quantificar possíveis impactos do terremoto.

Curva de fragilidade: Representação probabilística da probabilidade de exceder um estado de dano em uma determinada medida de intensidade.

Equação de Predição (GMPE): Modelo matemático que estima a intensidade esperada movimento do solo (por exemplo, PGA, aceleração espectral) em um local baseado na magnitude do terremoto, distância, condições do local, e outros parâmetros.

Distância Hipocentral: Distância reta de um local para o hipocentro (ou foco) de um terremoto, onde a ruptura se inicia dentro da Terra.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Estado limite: O limite além do qual uma estrutura não atende mais aos critérios de desempenho.

Objetivos de desempenho: Resultados estruturais desejados durante eventos sísmicos, como ocupação imediata, segurança de vida ou prevenção de colapso.

Ponto de Performance: Interseção de curvas de capacidade e demanda, indicando desempenho esperado sob carregamento sísmico.

Funcionalidade pós-terremoto: Capacidade de uma estrutura para permanecer operacional ou retornar ao serviço logo após um terremoto.

Análise Probabilística de Riscos Sísmicos (PSHA): Método incorporando incertezas para estimar probabilidades de risco sísmico.

Redundância e Robustness: Atributos estruturais garantindo redistribuição de carga e resistência à falha durante eventos extremos.

Espectro de resposta: Um quadro que mostra o pico de resposta (por exemplo, aceleração, velocidade, ou deslocamento) de uma série de osciladores de grau único de liberdade com períodos naturais variados, submetidos ao mesmo movimento do solo.

Estratégias: Métodos para fortalecer ou atualizar estruturas existentes para melhorar o desempenho sísmico.

Curva de Perigo Sísmico: Relação entre a intensidade movimento do solo e sua probabilidade anual de excedência em um local específico.

Desagregação de Risco Sísmico: Processo de quebrar os resultados probabilísticos do risco sísmico para identificar as contribuições relativas de diferentes cenários de terremoto (magnitude, distância e características da fonte) para o perigo em um local específico.

Mapa de Perigos Sísmicos: Visualmente representa a distribuição espacial dos níveis de risco do terremoto, para diferentes níveis de probabilidade em um período de tempo especificado.

Resiliência sísmica: Capacidade de uma estrutura ou comunidade para recuperar a funcionalidade rapidamente após um terremoto.

Modelo de fonte sísmica: Distribuição espacial e temporal do potencial terremoto.

Estado limite (SLS): Assegura que a estrutura permaneça funcional com deformação limitada sob cargas normais ou terremotos menores.

Índice de Vulnerabilidade Estrutural: Medida quantitativa da suscetibilidade de uma estrutura a danos sísmicos.

Espectro de Perigo do Alvo: Espectro de resposta derivado da análise de perigo sísmico usado para selecionar ou escalar movimentos do solo.

Estado limite (ULS): Evita colapso ou falha catastrófica em eventos sísmicos graves.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Espectro de Perigo Uniforme (UHS): Espectro de resposta que representa acelerações espectrais com a mesma probabilidade de excedência em um determinado local, garantindo níveis de risco consistentes em diferentes períodos estruturais.

Mecanismos de Falha

Flambagem: Instabilidade súbita em um membro sob cargas de compressão.

Fadiga: Danos progressivos causados por carregamento cíclico, levando a falha ao longo do tempo.

Falha Flexural: Falha devido à flexão, muitas vezes envolvendo ceder ou fratura de um membro.

Mecânica da fratura: Estudo da propagação de crack e falha em materiais.

Fracasso: Modo de falha caracterizado por deslizar ao longo de um avião devido ao excesso cisalhamento tensões.

Técnicas Computacionais

Critérios de Convergência: Condições para que soluções iterativas alcancem precisão aceitável.

Diferença finita Método (FDM): Abordagem numérica para resolver equações diferenciais em análise estrutural.

Estabilidade numérica: Assegura que as soluções computacionais permaneçam limitadas às iterações.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Sumário (I-IV)

Elementos pré-textuais i

Epígrafe . . . i
Aviso Legal . . . ii
Dedicação . . . iii
Prefácio . . . iv
Prolegomena . . . v
Agradecimentos . . . xxii
Guia do Leitor . . . xxiii
Programa de Descoberta de Erros . . . xxiv
Notação . . . xxv
Nomenclatura . . . xxxiii
Sumário (I-IV) . . . xxxix
Lista de figuras (I-IV) . . . xc
Lista de tabelas (I-IV) . . . cxvi
Sobre o Autor . . . cxxiii

I Fundamentos Históricos da Mecânica e da Análise Estrutural 1

Linha do Tempo a.C. **3**

Linha do Tempo d.C. **4**

1 Introdução **6**
1.1 A Relevância da História de Engenharia Estrutural . . . 6
1.2 Abordagem e Intenção . . . 7
1.3 Grande Imagem . . . 8
1.3.1 Tematicamente . . . 8
1.3.2 Historicamente . . . 9
1.4 Referências acadêmicas . . . 10

2 Antes das Estruturas: Números e Cartas **13**
2.1 Números . . . 13

CÓPIA PARA REVISÃO

2.1.1 Sistemas Sexagimais e Duodecimais . . . 13
2.1.2 Ângulos . . . 15
2.1.3 Tempo . . . 15
2.1.4 Sistema decimal e numerais hindu-árabe . . . 16
2.1.5 A História de π . . . 17
2.1.6 Números irracionais e a razão de ouro . . . 18
2.2 Cartas: A história dos sistemas de escrita . . . 18
2.2.1 Os Primeiros Registros: Tokens, Tallies e Clay . . . 19
2.2.2 Cuneiforme: O primeiro sistema de escrita do mundo . . . 19
2.2.3 Hieróglifos egípcios e a tradição pictórica . . . 20
2.2.4 Os fenícios e a invenção do alfabeto . . . 21

3 Civilizações Antigas 25
3.1 Civilizações e Origens Monumentais . . . 26
3.1.1 Mesopotâmia: Zigurates e estruturas de argila; C. 3100-500 a.C. . . . 26
3.1.2 Mesoamérica: Pirâmides Maias e Astecas; C. 400 a.C.-1521 d.C. . . . 26
3.1.3 Egito; C.~2700-1000 . . . 28
3.1.4 Comparando Mesopotâmia, Mesôamericana e Egípcia . . . 31
3.2 Antiguidade Clássica: Geometria, Teoria e Império . . . 35
3.2.1 Pérsia: Plataformas Imperiais, Pontes e Qanats . . . 35
3.2.2 Contribuições Árabe-Islâmicas: Inovações em Engenharia Estrutural 37
3.2.3 Contribuições gregas para estática e Mecânica estrutural . . . 39
3.2.4 Roma: Concreto, Arcos e Infraestrutura . . . 43
3.2.4.1 Vitruvius: A Primeira Teoria Estrutural . . . 45
3.3 Tradições matemáticas e estruturais da Índia, China e Japão . . . 47
3.3.1 China: Sismologia, Pontes e Inovação Mecânica . . . 47
3.3.2 Índia: Matemática, Materiais e Arquitetura Monumental . . . 48
3.3.3 Japão: Resiliência sísmica e estruturas adaptativas . . . 48
3.3.4 Síntese e Influência Global . . . 49

4 Catedrais góticos 51
4.1 Introdução . . . 51
4.2 Da missa românica ao esqueleto gótico . . . 52
4.3 Catedrais góticas: História e lógica estrutural . . . 52
4.3.1 Marcos históricos . . . 53
4.3.2 Terminologia Essencial e Elementos Estruturais . . . 54
4.3.3 A Revolução Estrutural Gótica . . . 56
4.3.4 Características estruturais . . . 58
4.3.4.1 Notável resistência estrutural . . . 60
4.3.4.2 Evolução de Análise estrutural . . . 61
4.4 Um conto de quatro catedrais . . . 63
4.4.1 Catedral de Beauvais: Um estudo de caso icônico em limites estruturais 63
4.4.2 O Duomo de Milão: Geometria, Política e Debate Estrutural . . . 71

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

4.4.3 St. Basílica de Pedro: Da Crise à Análise Científica . . . 76
4.4.4 Santa Maria del Fiore: Triunfo de Brunelleschi da Intuição de Engenharia 81
4.5 Tabela sumária . . . 86

5 A ascensão da razão científica 89
5.1 Introdução . . . 90
5.2 Islâmico: Bayt al-Hikma . . . 90
5.3 A Revolução Científica . . . 92
5.3.1 Fundamentos do Novo Método . . . 92
5.3.1.1 O Fim da Filosofia Natural . . . 92
5.3.1.2 O Papel da Matemática e do Iluminismo . . . 92
5.3.1.3 Francis Bacon e o nascimento do empirismo . . . 93
5.3.1.4 Racionalismo: Abordagem Dedutiva de Descartes . . . 93
5.3.1.5 A transformação das universidades . . . 93
5.3.2 Descobertas Revolucionárias e Novos Métodos . . . 94
5.3.2.1 Astronomia Observacional: Tycho Brahe . . . 94
5.3.2.2 Astronomia Matemática: Johannes Kepler . . . 94
5.3.2.3 Da observação à teoria: Um modelo para o progresso científico 94
5.3.2.4 Revolução Anatômica: Andreas Vesalius . . . 95
5.3.2.5 Sistema circulatório: William Harvey . . . 95
5.3.2.6 Galileu: A linguagem matemática da natureza . . . 96
5.3.3 Instituições Científicas Primárias . . . 96
5.3.3.1 Itália: Os linceanos . . . 96
5.3.3.2 Itália: O *Cimento* . . . 97
5.3.4 Síntese e institucionalização . . . 98
5.3.4.1 Newton: A Síntese dos Métodos . . . 98
5.3.4.2 A Sociedade Real e o *Académie des Sciences* . . . 98
5.3.4.3 Experiência e Teoria na Ciência Moderna . . . 99
5.4 O Iluminismo: Uma ponte cultural . . . 100
5.4.1 A difusão do pensamento científico . . . 100
5.4.2 A ascensão da educação técnica: Escolas de Engenharia Militar . . . 101
5.4.3 Da Filosofia Natural à Ciência Aplicada . . . 101
5.5 Conclusão . . . 102

Interlúdio I: Da filosofia natural à mecânica analítica 105

6 O Panteão 107
6.1 Introdução . . . 108
6.2 Filosofia, Geometria e Estáticas Primitivas . . . 110
6.2.1 Mozi (c. 470–391 a.C. . . . 110
6.2.2 Aristóteles (384-322 a.C.) . . . 110
6.2.3 Euclides (c. 300 a.C.) . . . 111
6.2.4 Arquimedes (c. 287-212 a.C.) . . . 112
6.2.5 Apolonius de Perga (c. 262-190 a.C. . . . 113

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

6.3 Engenharia, Máquinas e Transmissão de Conhecimento . . . 114
6.3.1 Marcus Vitruvius Pollio, C. 80-70 a.C. - depois de 15 a.C.) . . . 114
6.3.2 Herói de Alexandria (fl. c. 62 CE) . . . 115
6.3.3 Ibn al-Haytham (c. 965–1040 CE) . . . 116
6.3.4 Abu Rayhan al-Biruni (973-1048) . . . 116
6.3.5 Al-Khazini (fl. 1115–1130 CE) . . . 117
6.3.6 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250) . . . 118
6.4 Arquitetura, Proporção e Forma Humanista . . . 119
6.4.1 Leon Battista Alberti (1404-1472) . . . 119
6.4.2 Leonardo da Vinci (1452-1519) . . . 119
6.4.3 Andrea Palladio (1508-1580) . . . 129
6.4.4 Sebastiano Serlio (1475-1554) . . . 130
6.4.5 Giacomo Barozzi da Vignola (1507-1573) . . . 131
6.4.6 Hubert Gautier (1660-1737) . . . 131
6.4.6.1 Jean-Rodolphe Perronet . . . 136
6.4.6.2 A Transição da Proporção para a Experiência . . . 137
6.5 Da Ordem Matemática à Mecânica . . . 139
6.5.1 Francis Bacon (1561-1626) . . . 139
6.5.2 Nicolaus Copérnico (1473-1543) . . . 140
6.6 Da Proto-Estatica à Revolução Científica . . . 141
6.6.1 Simon Stevin (1548-1620) . . . 141
6.6.2 Galileu Galilei (1564–1642) . . . 142
6.6.3 René Descartes (1596-1650) . . . 148
6.6.4 Christiaan Huygens (1623-1695) . . . 149
6.6.5 Blaise Pascal (1623-1662) . . . 151
6.6.6 Robert Hooke (1635-1703) . . . 151
6.6.7 Isaac Newton (1642-1727) . . . 158
6.6.8 Gottfried Leibniz (1646-1716) . . . 163
6.6.9 Família Bernoulli (1654-1782) . . . 166
6.6.9.1 Jakob Bernoulli (1654-1705) . . . 167
6.6.9.2 Johann Bernoulli (1667-1748) . . . 169
6.6.9.3 Interlúdio *Opera Omnia* . . . 169
6.6.9.4 Daniel Bernoulli (1700-1782) . . . 169
6.6.10 Leonhard Euler (1707-1783) . . . 172
6.7 Da mecânica analítica ao Continuum e à Teoria Estrutural . . . 177
6.7.1 Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) . . . 177
6.7.2 Siméem Denis Poisson (1781-1840) . . . 179
6.7.3 Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) . . . 180
6.7.4 Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) . . . 185
6.7.5 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) . . . 186
6.7.6 Cauchy (Augustin-Louis 1789–1857) . . . 187
6.7.7 George Green (1793-1841) . . . 188

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6.7.8 AdhÉmar Jean Claude BarrÉ de Saint-Venant (1797-1886) 189
6.8 A ascensão da engenharia estrutural como disciplina 190
6.8.1 Karl Culmann (1821-1881) 190
6.8.2 William John Macquorn Rankine (1820-1872) 191
6.8.3 Christian Otto Mohr (1835-1918) 192
6.8.4 Henry Moseley (1801-1872) 193
6.8.5 James Clerk Maxwell (1831-1879) 194
6.9 Grandes histórias de mecânica 195
6.9.1 Isaac Todhunter (1820-1884) 196
6.9.2 Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972) 196
6.9.3 René Dugas (1897-1957) 197
6.9.4 Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000) 198
6.10 Mulheres Notáveis 199
6.11 Análise e contexto 200
6.11.1 Competição, sigilo e progresso científico 200
6.11.1.1 Métodos de dissimulação 200
6.11.1.2 Litígios e seus impactos 206
6.11.2 A transição para a ciência moderna da engenharia 207
6.11.3 A Revolução Francesa na Educação em Engenharia 208
6.12 Conclusão: Da Filosofia Natural à Engenharia 209
6.12.1 Tabelas Sumárias 210
6.12.1.1 Colaboradores Principais e Sua Influência 210
6.12.1.2 Publicações Landmark 212
6.12.1.3 Instituições de Educação em Engenharia 215
6.12.1.4 Principais Disputas Intelectuales 216
6.12.1.5 Histórico Linha do tempo 216

Interlúdio II: Desde o Medieval Insights até o Moderno Mecânica estrutural: (1351-1879) 219

7 Força, Linha neutra, e Flexural Tensões 223
7.1 Introdução 224
7.2 Força 224
7.2.1 Leonardo≃ 1490) 224
7.2.2 Galileu (1564-1642) 224
7.2.3 Beeckman (1588-1637) 227
7.2.4 Musschenbroek (1692-1761) 227
7.3 Flexural Interna Tensões: Um estudo em três atos 228
7.3.1 Ato I: Linha empírica 229
7.3.1.1 Leonardo≃ 1490) 229
7.3.1.2 Galileu (1632) 231
7.3.2 Ato II: Empírico: linhagem contínua 234
7.3.2.1 Descartes (1644) 234

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

7.3.2.2 Leibniz (1684) . . . 235
7.3.2.3 Mariotte (1686) . . . 236
7.3.2.4 Pai (1713) . . . 238
7.3.2.5 Coulomb (1773) . . . 238
7.3.2.6 Jovem (1807) . . . 241
7.3.2.7 Saint-Venant (1855) . . . 243
7.3.2.8 Clebsch (1862) . . . 244
7.3.2.9 Saint-Venant (1866) . . . 244
7.3.3 Ato III: Linha analítica . . . 245
7.3.3.1 Jakob Bernoulli (1687) . . . 245
7.3.3.2 Euler (1727) . . . 246
7.4 Resumo . . . 248
7.5 Transição . . . 250

8 Geometria Diferencial de Curvas 252
8.1 Introdução: Origens geométricas da Curvatura e da Elastica . . . 253
8.2 Curvatura . . . 253
8.2.1 Oresme (1351) . . . 254
8.2.2 Newton (1671) . . . 255
8.2.3 Leibniz (1686) . . . 258
8.2.4 Johann Bernoulli (1691) . . . 259
8.2.5 Jakob Bernoulli; O Teorema Dourado (1694) . . . 260
8.2.6 Kästner (1758) . . . 264
8.2.7 Resumo . . . 265
8.3 Evolute/Involute . . . 266
8.3.1 Huygens (1658-1673) . . . 267
8.3.2 Limitações Práticas e Legado . . . 269
8.3.3 Finalizando Observações . . . 269
8.4 De curvas geométricas para Mecânica estrutural . . . 270
8.5 Olhando para frente: . . . 272

9 Os Grandes Desafios: Catenária, Elastica, e o nascimento da mecânica analítica 274
9.1 Fundações Matemáticas: Da Geometria ao Cálculo . . . 275
9.1.1 O legado grego: De Euclides à Divisão Geométrica-Mecânica . . . 275
9.1.2 Revolução de Descartes: Coordenadas e Álgebra . . . 276
9.1.3 A Revolução do Cálculo . . . 276
9.1.4 Das Curvas à Mecânica: A Ponte . . . 277
9.1.5 A Transformação Completa . . . 278
9.1.6 Notação Matemática . . . 278
9.2 O Desafio da Catenária (Maio de 1690-Junho de 1691) . . . 278
9.2.1 Primeiros Estudos . . . 279
9.2.1.1 Leonardo . . . 279
9.2.1.2 Galileu . . . 279

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

9.2.1.3 Stevin; (1634) . . . 280
9.2.1.4 Huygens (c. 1646 . . . 281
9.2.2 Desafios . . . 283
9.2.2.1 Interlúdio: terminologia . . . 283
9.2.2.2 Jakob Bernoulli *Funicularia* Desafio; 1690 . . . 284
9.2.2.3 Resposta de Leibniz e modificação do desafio; Fim de 1690 . . . 286
9.2.3 As três principais soluções . . . 287
9.2.3.1 Johann Bernoulli; (apresentada em dezembro de 1690, publicada em junho de 1691) . . . 287
9.2.3.2 Huygens; (apresentada em outubro de 1690, publicada em maio de 1691) . . . 288
9.2.3.3 Leibniz; (apresentada em maio de 1691, publicada em junho de 1691) . . . 289
9.2.3.4 Publicação e Resolução Final; Junho de 1691 . . . 290
9.2.3.5 Análise Pós-Publicação e Legado . . . 290
9.2.4 Epílogo . . . 292
9.2.4.1 A unificação esquecida . . . 292
9.2.4.2 O legado matemático . . . 293
9.2.4.3 Paradoxo de Jakob . . . 293
9.3 O Desafio Elastica (1690-1744) . . . 294
9.3.1 O desafio de Jakob Bernoulli (1690) . . . 294
9.3.2 Soluções . . . 298
9.3.2.1 Solução de Jakob Bernoulli (1694) . . . 298
9.3.2.1.1 Reação de Huygen (1694) . . . 303
9.3.2.1.2 Interlúdios . . . 305
9.3.2.1.2.1 Leibniz's *Vis Viva* E a Evolução dos Conceitos de Energia . . . 305
9.3.2.1.2.2 O Desafio da Brachistochrone (1696) . . . 307
9.3.2.1.2.3 A solução de Johann Bernoulli (1697) . . . 310
9.3.2.1.2.4 A solução de Daniel Bernoulli (1742) . . . 314
9.3.2.1.2.5 Problemas Isoperimétricos vs. Cálculo das Variações . . . 316
9.3.2.2 Solução de Euler (Cálculo das Variações) (1744) . . . 317
9.3.2.2.1 Classificação das Espécies Elastica . . . 323
9.3.2.3 O Quadro Variacional Moderno . . . 333
9.3.3 Resumo Cronológico dos dois primeiros desafios . . . 335
9.4 Um desafio anônimo: Uma ponte entre problemas (1724) . . . 337
9.4.1 A Colaboração Bernoulli-Euler: Primeira Unificação (1728) . . . 338
9.4.1.1 Daniel Bernoulli (Estabelecendo o Princípio do Momento-Curvatura) 1728 . . . 338
9.4.1.2 Euler (Da Perspectiva Geométrica à Revolução Matemática) (1732) . . . 340

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

9.4.1.3 Teoria Euler-Bernoulli . . . 344
9.5 Teoria: De observação a cargas críticas . . . 347
9.5.1 Trabalho matinal . . . 347
9.5.1.1 Leonardo (ca. 1490s) . . . 347
9.5.1.2 Pieter van Musschenbroek (1729) . . . 348
9.5.2 Euler (1759) . . . 349
9.6 Teoria Geral de Euler: Unificação completa (1771) . . . 353
9.7 Conclusão . . . 356

10 Mecânica do contínuo: A Fundação de Análise estrutural 363
10.1 Molecular *vs* Teorias contínuas da elasticidade . . . 364
10.1.1 Visão geral . . . 365
10.1.2 De Galileu à Escola Molecular Francesa . . . 365
10.1.3 A ascensão da aproximação do contínuo . . . 366
10.1.4 Tabela de comparação . . . 366
10.1.5 Que teoria prevalecia? . . . 366
10.1.6 Referências Históricas . . . 367
10.2 Mecânica do contínuo . . . 370
10.3 Introdução . . . 370
10.3.1 Revoluções francesas e o nascimento da elasticidade moderna . . . 370
10.3.2 Fundamentos da Teoria da Elasticidade . . . 371
10.3.2.1 Coulomb (1736-1806) e a Fundação de Engenharia . . . 371
10.3.2.2 Lagrange (1736-1813) e a Fundação Analítica . . . 372
10.3.2.3 Fourier's (1768-1830) Métodos matemáticos . . . 373
10.3.2.4 Cauchy (1789-1857) e o conceito de Tensão . . . 373
10.3.2.5 Razão de Poisson (1781-1840) e simplificação de Cauchy . . . 378
10.3.2.6 Navier (1785-1836) Síntese e Aplicação . . . 379
10.3.2.7 Lamé's (1795-1870) . . . 379
10.3.2.8 Saint-Venant (1797-1886) e o método semi-inverso . . . 380
10.3.2.9 Clapeyron's (1799-1864) . . . 381
10.3.2.10 A conquista francesa em perspectiva . . . 382
10.4 A estrutura matemática completa . . . 382
10.4.1 Euler e a Conservação da Missa . . . 383
10.4.2 Cauchy (1789-1857) e o equilíbrio do momento linear . . . 383
10.4.3 Equilíbrio do momento angular . . . 384
10.4.4 Clausius (1822-1888), Thomson (1824-1907) e Duhem (1861-1916) leis termodinâmicas) . . . 385
10.4.4.1 Primeira lei: . . . 385
10.4.5 Segunda Lei (Entropia Inigualável): . . . 385
10.4.6 Desenvolvimento histórico e síntese moderna . . . 386
10.5 Teoria constitutiva: Comportamento material . . . 387
10.5.1 O Quadro Geral . . . 387
10.5.2 Noll (1925-2017) e Objetividade: O Princípio da Indiferença Material 388

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

10.5.3 Verde (1793-1841) e hiperelasticidade . . . 388
10.5.4 Voigt (1850-1919) e Simetria Material . . . 390
10.5.5 Coleman (1930-1992) e Noll: Restrições termodinâmicas . . . 390
10.5.6 Perspectiva histórica: Do Empirismo à Teoria . . . 391
10.5.7 Conexão com Análise estrutural . . . 392
10.5.8 O que há em um nome? A Evolução da Mecânica e Seus Praticantes . 392
10.5.8.1 A identidade em mudança do analista estrutural . . . 393
10.5.8.2 Da identidade profissional ao conteúdo disciplinar . . . 395
10.5.8.3 A paisagem disciplinar hoje . . . 398
10.5.8.4 Convenções Terminológicas e Relações . . . 399
10.5.8.5 Convenções adotadas neste livro . . . 400
10.6 Conclusão . . . 401

11 Análise estrutural Finalmente: Síntese & Aplicação 404
11.1 Introdução . . . 405
11.2 Engenharia estrutural, etimologia . . . 407
11.3 Primeiros desenvolvimentos: Estaticamente indeterminado Vigas . . . 408
11.3.1 Navier (1785-1836): O primeiro tratamento sistemático . . . 408
11.3.2 Clapeyron (1799-1864): A Equação de Três Momentos . . . 409
11.4 Transição para métodos gerais . . . 410
11.4.1 Maxwell (1831-1879): O Teorema Reciproco . . . 410
11.4.2 Mohr (1835-1918): Métodos Geométricos e Analógicos . . . 411
11.4.3 Castigliano (1847-1884): Métodos de Energia . . . 411
11.4.4 Müller-Breslau (1851-1925): Sistematização e Linhas de influência . . 412
11.4.5 O Método das forças: Compatibilidade e Flexibilidade . . . 413
11.4.6 Conceitos e Procedimentos Fundamentais . . . 414
11.4.7 O Método das forças: Resumo e legado . . . 415
11.5 O Método dos deslocamentos: Da Teoria à Prática . . . 416
11.5.1 Fundações teóricas: Formulações Cedo Rigidez . . . 416
11.5.2 Método de Deflexão de Inclinação: Formulação sistemática . . . 417
11.5.3 Hardy Cross (1885-1959): O Método de Distribuição do Momento . . 419
11.5.4 Extensões e Variações . . . 422
11.5.5 O Método dos deslocamentos: Resumo e legado . . . 424
11.6 Linhas de influência e Cargas em Movimento . . . 424
11.6.1 Winkler (1835-1888): Primeiros desenvolvimentos . . . 425
11.6.2 Princípio de Müller-Breslau . . . 425
11.6.3 Aplicações e legado . . . 425
11.7 Em direção à Formulação Matricial: A Ponte Conceitual para a Computação 426
11.7.1 A estrutura matricial dos métodos clássicos . . . 426
11.7.2 Da Iteração à Solução Matrix . . . 427
11.7.3 Os limites do cálculo da mão: Preparando o palco para computação . 427
11.7.4 Conclusão: Continuidade e Transformação . . . 428
11.8 Requisitos fundamentais de Análise estrutural . . . 428

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

11.9 Resumo Cronológico dos Contribuintes . . . 432
11.9.1 Conclusão . . . 434

12 Métodos Computacionais 437
12.1 Métodos para continuar . . . 438
12.1.1 Pearson e Richardson: Dam Tensão Análise (1905-1911) . . . 438
12.1.2 Métodos de Solução Iterativa . . . 440
12.2 Matrix Análise estrutural . . . 441
12.2.1 Kron: Análise de Redes e Análises Estruturais . . . 441
12.2.2 Johann H. Argyris (1913-2004) . . . 441
12.2.3 O Contexto Aeroespacial (Alas Delta): Anos 50 . . . 442
12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy . . . 443
12.2.5 Boeing; Turner e o Método da rigidez direta . . . 445
12.2.5.1 Flexibilidade versus Rigidez: Um Debate Continuado . . . 448
12.3 O Método dos elementos finitos . . . 449
12.3.1 Fundações Matemáticas . . . 449
12.3.2 Prioridade e Terminologia: O que é (e não é) o Método dos elementos finitos . . . 453
12.3.3 Ray Clough (1920-2016) . . . 454
12.3.4 Primeiros computadores e o Programa Berkeley . . . 455
12.3.5 Norfork Dam: A primeira grande aplicação . . . 455
12.3.6 Análise não linear e dinâmica (1960-1962) . . . 456
12.4 Consolidação e disseminação . . . 458
12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921-2009) . . . 458
12.4.2 Conferência Wright-Patterson (1965) . . . 458
12.4.3 Richard Gallagher (1927-1997) . . . 459
12.4.4 O Debate Metodológico . . . 459
12.4.5 A Decisão NASTRAN (1969) . . . 460
12.4.6 Generalização . . . 461
12.4.7 Livros e Adoção Mundial . . . 461
12.4.8 Impacto atual e Aplicações . . . 462
12.5 Resumo e Contribuições-chave . . . 463
12.6 Conclusão . . . 465

13 De Abacus a Algoritmos: Um levantamento histórico de computação em ciência e engenharia 467
13.1 Introdução . . . 468
13.2 Antigos e antigos dispositivos computacionais . . . 468
13.3 Automatas Mecânicas e Máquinas de Cálculo Precoce . . . 470
13.4 Babbage e Lovelace: Origens conceituais da programação . . . 472
13.5 Computação Científica Analógica (1900-1945) . . . 473
13.6 A Revolução Digital (1945-1960) . . . 474
13.7 Linguagens de Programação e Software Científico Precoce . . . 475

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

13.8 Linha do tempo de desenvolvimentos computacionais chave . . . 476
13.9 Engenharia Primária e Software Estrutural (1960-1980) . . . 476
13.10 A Era PC e a Expansão da Computação de Engenharia (1980-2000) . . . 477
13.11 Ecossistemas Computacionais Modernos (2000–Presente) . . . 478
13.12 Evolução da Redação Técnica e Relatórios . . . 479
13.13 Conclusão . . . 481

14 A Evolução da Força e os Princípios Virtuais 483
14.1 Introdução . . . 484
14.2 A Antiguidade e o Divino . . . 487
14.2.1 Egito . . . 487
14.2.2 Mesopotâmia . . . 487
14.2.3 Índia . . . 488
14.3 Antiguidade Clássica e Filosofia Natural . . . 490
14.3.1 Gregos . . . 490
14.3.1.1 Empédocles (494-434 a.C.) . . . 490
14.3.1.2 Platão (427-348 a.C.) . . . 491
14.3.1.3 Aristóteles (384-322 a.C.) . . . 492
14.3.1.4 Arquimedes (287-212 aC): A demonstração de "O que"' . . . 494
14.3.1.5 Posidonius (135-51 a.C.) e os Estóicos . . . 496
14.3.2 Romanos, Plotino (204-270) . . . 497
14.3.3 Bizantino, Filopono (490–570) . . . 498
14.4 Período Medieval e Escolástica . . . 499
14.4.1 Islâmicos . . . 500
14.4.1.1 Avicenna (980–1037) . . . 500
14.4.1.2 Bagdái (1080–1165) . . . 500
14.4.2 Jordanus de Nemore (ca 1225-ca1260) e Gravidade Posicional . . . 501
14.4.3 Idade Média: Universidade de Paris . . . 501
14.4.3.1 Buridan (1295-1358) . . . 501
14.4.3.2 Oresme (1320-1382) . . . 503
14.5 Renascimento e Revolução Científica . . . 503
14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519) . . . 503
14.5.2 Benedetti (1530-1590) . . . 504
14.5.3 Pardies (1636-1673) . . . 505
14.5.4 Simon Stevin (1548-1620) . . . 506
14.5.5 Galileu (1564-1642) . . . 510
14.5.6 Kepler (1571-1630) . . . 514
14.5.7 Descartes (1596-1650) . . . 516
14.5.8 Torricelli (1608-1647) . . . 522
14.5.9 Wallis (1616-1703) . . . 525
14.5.10 Leibniz (1646-1716) . . . 525
14.5.11 Newton (1642-1726) . . . 527
14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782) . . . 529

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

14.5.13Carta de Johann Bernoulli de 1715 . . . 530
14.5.14Varignon (1654-1722) . . . 532
14.5.15D'Alembert (1717-1783) . . . 533
14.5.16Kant (1724-1804) . . . 539
14.5.17Lagrange (1736-1813) . . . 539
14.5.18Fourier (1768-1830) . . . 543
14.5.19Lazare Carnot (1753-1823) . . . 543
14.6 Epílogo . . . 545
14.7 Conclusão . . . 546

Interlúdio III: Onde a bolsa encontra paixão **549**

15 Arquitetura & Estrutura **550**
15.1 Introdução . . . 551
15.1.1 Organização do Capítulo . . . 552
15.2 A Tradição Vitruviana . . . 553
15.2.1 Marcus Vitruvius Pollio: O Primeiro Influenciador Arquitetônico . . . 553
15.2.1.1 Vitruvius na Educação . . . 554
15.2.1.2 Vitruvius, o Engenheiro . . . 555
15.2.1.3 Vitruvius, o Arquiteto: A Tríade Durante . . . 560
15.2.1.4 Vitruvius em Atletas contra Estudiosos . . . 561
15.2.2 Vitruvius Redescoberto Durante o Renascimento . . . 561
15.2.2.1 Leon Battista Alberti (1404–1472) . . . 562
15.2.2.2 Andrea Palladio (1508-1580) . . . 564
15.2.2.3 A Reordenação da Tríade . . . 566
15.2.2.4 Alberti e Palladio como engenheiros . . . 566
15.2.3 Antropometria e Questão de Escala . . . 569
15.2.3.1 Vitruvius: O Texto Fundamental . . . 570
15.2.3.2 Transmissão medieval . . . 571
15.2.3.3 A Renascença . . . 571
15.2.3.4 O século XX: Modulor & Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier (1887-1965) . . . 572
15.2.3.5 Da Proporção à Ergonomia . . . 576
15.2.3.6 A Assunção Oculta: Escalar a Independência . . . 576
15.2.3.7 Geometria Operativa: Como os Mestres Construtores Rastrearam seus prédios . . . 577
15.3 Interlúdio: Arquitetos e Engenheiros... Arte e Ciência? . . . 583
15.4 Os Pioneiros . . . 586
15.4.1 O Buttress Voador: Lógica Estrutural Visível . . . 587
15.4.2 Gustave Eiffel (1832-1923) . . . 590
15.4.3 Louis Henri Sullivan (1856-1924) . . . 592
15.4.4 Robert Maillart (1872-1940) . . . 594
15.4.5 Auguste Perret (1874-1954) . . . 595

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

15.4.6 Eduardo Torroja Miret (1899-1961) . . . 597
15.4.7 Pier Luigi Nervi (1891-1979) . . . 600
15.4.8 Riccardo Morandi (1902-1989) . . . 607
15.4.9 Christian Menn (1927-2018) . . . 609
15.4.10 Fazlur Rahman Khan (1929-1982) . . . 610
15.4.11 O Progettisti Comparado: Construtores de Designer e seus Materiais 614
15.4.11.1 Eiffel e Metal . . . 615
15.4.11.2 Nervi e Ferrocement . . . 615
15.4.11.3 Roebling e Cabos . . . 615
15.4.11.4 Linhas comuns . . . 615
15.5 Morfogênese estrutural: Figuras-chave . . . 616
15.5.1 Catenária . . . 617
15.5.1.1 Poleni (1683-1761) . . . 617
15.5.1.2 Antoni Gaudí (1852-1926) . . . 618
15.5.1.3 Eero Saarinen (1910-1961) . . . 619
15.5.2 E Membranas . . . 620
15.5.2.1 Frei Paul Otto (1925-2015) . . . 620
15.5.2.2 Heinz Isler (1926-2009) . . . 620
15.5.2.3 Sergio Musmeci (1926-1981) . . . 621
15.5.3 Estruturas recíprocas . . . 623
15.5.3.1 Desenvolvimento Histórico . . . 623
15.5.3.2 Revival Moderno . . . 626
15.5.4 Otimização Matemática: Maxwell, Michell, Baker e Beghini . . . 626
15.5.4.1 Maxwell (1831-1879) . . . 627
15.5.4.2 Michell (1870-1959) . . . 628
15.5.4.3 Baker e Beghini . . . 629
15.5.5 Coda: Quando os arquitetos e engenheiros colidiram . . . 632
15.5.5.1 Caso Um: Bourdais contra Eiffel (Paris, 1889) . . . 632
15.5.5.2 Caso Dois: Paxton e o Palácio de Cristal (Londres, 1851) . . . 633
15.5.5.3 Caso Três: Roebling e a ponte do Brooklyn (Nova York, 1869–1883) . . . 634
15.5.5.4 Legado . . . 634
15.6 A Geração de Computador . . . 635
15.6.1 Arquitetos "Excepcionais" . . . 635
15.6.1.1 Félix Candela (1910-1997) . . . 635
15.6.1.2 Frank Gehry (1929-2025) . . . 636
15.6.1.3 Santiago Calatrava (1951-) . . . 637
15.6.2 Engenheiros estruturais: O Cinco Percenter . . . 638
15.6.2.1 Edifícios de Alto Nível . . . 641
15.6.2.1.1 Leslie Robertson (1928-2021) . . . 642
15.6.2.1.2 William Baker (1953-) . . . 645
15.6.2.2 Pontes: Michel Virlogeux (1946–) . . . 647

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

15.7 Vitruvius Revisitado . . . 649
15.7.1 Desconstruindo a Arte Estrutural . . . 649
15.7.2 O que é Art? . . . 650
15.7.3 Arquitetura Estrutural: Manifesto de Llunji . . . 652
15.8 Conclusão . . . 653

16 Terrae Motus: Mitos, crenças e representações de terremotos 658
16.1 Introdução . . . 659
16.2 Mitologia . . . 660
16.2.1 Japão . . . 661
16.2.2 Noroeste do Pacífico . . . 664
16.2.3 Américas . . . 665
16.2.4 Outras Tradições . . . 666
16.2.5 Síntese: Mito como memória sísmica . . . 667
16.3 Religião . . . 667
16.3.1 Bíblia . . . 668
16.3.2 Grécia . . . 672
16.3.3 Índia . . . 678
16.3.4 Islamismo . . . 681
16.3.5 Mesoamérica . . . 683
16.3.6 Xintoísmo . . . 685
16.3.7 Síntese: A religião e o significado da catástrofe sísmica . . . 688
16.4 Filosofia . . . 693
16.4.1 Aristotle . . . 694
16.4.2 Eratóstenes . . . 694
16.4.3 Lucretius e Plínio . . . 695
16.4.4 O terremoto de Lisboa como evento filosófico . . . 695
16.4.4.1 Voltaire e Rousseau como interlocutores filosóficos . . . 696
16.4.4.2 Kant . . . 697
16.4.5 Reconstrução . . . 698
16.5 Literatura . . . 699
16.5.1 Terremotos na literatura . . . 699
16.5.2 O Terremoto de Lisboa de 1755 e o Debate sobre Iluminação . . . 700
16.5.3 O Terremoto de Messina de 1908 . . . 702
16.5.4 Síntese: Literatura e a Memória Cultural dos Terremotos . . . 703
16.6 Arquitetura . . . 704
16.6.1 Pirro Ligorio . . . 704
16.6.2 Gibellina . . . 704
16.7 Arte . . . 708
16.7.1 Rock Art e Traços de Falha . . . 708
16.7.2 Pintura . . . 710
16.7.3 Coleção Kozak . . . 711
16.7.4 Coleção Amelio . . . 712

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

16.8 Música . . . 714
16.9 Cinematografia . . . 714
16.10 Conclusão . . . 716
16.11 Epílogo: De Namazu a Roswell . . . 716

Referências da Parte I **720**

Sumário: Partes II–IV (Análise) **777**

Lista de Figuras: Partes II–IV (Análise) **814**

Lista de Tabelas: Partes II–IV (Análise) **832**

Lista de Exemplos: Partes II–IV (Análise) **837**

Lista de Pontos-Chave: Partes II–IV (Análise) **844**

II Introdução (Fundamentos; Métodos Analíticos) 846

17 Introdução **847**
17.1 O quadro geral . . . 847
17.1.1 Arquitetura . . . 848
17.1.2 Engenharia estrutural . . . 849
17.1.2.1 Projeto estrutural . . . 849
17.1.2.2 Análise . . . 851
17.1.2.3 Avaliação de segurança . . . 852
17.1.3 Disciplinas integradas em análise estrutural . . . 852
17.2 Elementos: Primário esforços internos . . . 853
17.3 Carregar elementos de transferência . . . 853
17.4 Tipos de estrutura . . . 854
17.5 Transformação de ferramentas de engenharia . . . 858
17.6 Cursos de engenharia estrutural . . . 860

18 Carregar **861**
18.1 Introdução . . . 862
18.2 Classificação de cargas . . . 862
18.2.1 Vertical . . . 862
18.2.2 Lateral . . . 863
18.2.2.1 Vento . . . 863
18.2.2.2 Sísmico . . . 867
18.2.3 Hidrostático e terra . . . 869
18.2.3.1 Ex 18.1: Carga Hidrostática . . . 869
18.2.4 Carga de impacto . . . 870
18.2.5 Secundário . . . 871
18.2.6 Térmico . . . 872

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

18.2.6.1 Ex 18.2: Expansão térmica/tensão . . . 874
18.3 Considerações . . . 874
18.3.1 Cargas projetadas . . . 874
18.3.2 Colocação de carga . . . 875
18.3.3 Combinações de carga . . . 875
18.3.4 Carregar caminho . . . 877
18.3.5 Áreas tributárias . . . 880
18.3.5.1 Ex 18.3: Áreas tributárias . . . 881
18.3.6 Resposta estrutural . . . 882

19 Reações **885**
19.1 Introdução . . . 886
19.1.1 Tipos de suportes . . . 886
19.1.2 Equilíbrio . . . 887
19.1.3 Equações das condições . . . 889
19.1.4 Determinação estática . . . 889
19.1.5 Instabilidade geométrica . . . 891
19.1.6 Diagramas de corpo livre . . . 891
19.2 Exemplos . . . 892
19.2.1 Ex 19.1: Carga hidrostática . . . 892
19.2.2 Ex 19.2: Transferência de carga . . . 893
19.2.3 Ex 19.3: Biapoiado viga . . . 894
19.2.4 Ex 19.4: Carga parabólica . . . 894
19.2.5 Ex 19.5: Três vãos . . . 895
19.2.6 Ex 19.6: Três dobradiças . . . 896
19.2.7 Ex 19.7: Suportes inclinados . . . 898
19.2.8 Ex 19.8: Estrutura da grade . . . 899
19.2.9 Ex 19.9: Equilíbrio do avião . . . 900
19.2.10 Ex 19.10: Barcaça Jumbo . . . 901
19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilíbrio de um corpo flutuante (prova hidrostática) 904
19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; Nervi . . . 906

20 Treliças **910**
20.1 Introdução . . . 910
20.1.1 Suposições . . . 911
20.1.2 Assinar convenção . . . 912
20.1.3 Determinação e estabilidade . . . 912
20.2 Métodos de análise . . . 914
20.2.1 Método das juntas . . . 914
20.2.1.1 Ex 20.1: Treliça análise; método de articulações . . . 915
20.2.1.2 Ex 20.2: 3D treliça . . . 918
20.3 Método das seções . . . 921
20.3.1 Método das seções . . . 921

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

20.3.2 Ex 20.3: Método das seções . . . 923
20.4 Junta/matriz . . . 923
20.4.1 Ex 20.4: Simples treliça; método de articulação/matriz . . . 925
20.4.2 Ex 20.5: Complexo treliça; método de articulação/matriz . . . 927

21 Esforços internos em Membros Flexurais **931**
21.1 Introdução . . . 932
21.1.1 Abordagem de engenharia: De tensões a esforços internos . . . 932
21.1.2 Esforços internos para 2d/3d reta/curvada vigas . . . 933
21.1.3 Por que isso é importante . . . 935
21.1.4 Convenções de sinais de design . . . 936
21.2 Carregar, cisalhamento, relações momento . . . 937
21.2.1 Forma diferencial . . . 937
21.2.2 Forma integral . . . 938
21.3 Exemplos . . . 939
21.3.1 Ex 21.1: Viga com carga inclinada . . . 940
21.3.2 Ex 21.2: Inclinado pórtico . . . 941
21.3.3 Ex 21.3: Pórtico com carga hidrostática . . . 944
21.3.4 Ex 21.4: Carga linearmente variável . . . 946
21.3.5 Ex 21.5: Pórtico; Exemplo de telhado inclinado . . . 947
21.3.6 Ex 21.6: Reciproca pórtico . . . 948
21.3.7 Ex 21.7: 3D pórtico . . . 952

22 Deflexões; Curva elástica **956**
22.1 Introdução . . . 956
22.2 Equação diferencial . . . 957
22.2.1 Ex 22.1: Integração dupla . . . 958
22.2.2 Ex 22.2: Deflexão máxima . . . 959
22.2.3 Ex 22.3: Forma de esqui ideal . . . 960
22.2.4 Ex 22.4: Flutuando viga . . . 961
22.3 Curvatura . . . 964
22.3.1 Ex 22.5: Roda de bicicleta . . . 966
22.3.2 Ex 22.6: Rigidez de uma mola helicoidal . . . 972
22.3.3 Curvatura-deformação relação . . . 973
22.3.3.1 Ex 22.7: Interruptor bimetálico . . . 974
22.3.4 Método da área de Curvatura (área do momento) . . . 975
22.3.4.1 Assinar convenção . . . 975
22.3.4.2 Teorema da área de primeira curvatura . . . 976
22.3.4.3 Teorema da segunda área de curvatura . . . 977
22.3.4.3.1 Ex 22.8: Área de curva, cantilevered viga . . . 978
22.3.4.3.2 Ex 22.9: Curvação do momento, biapoiado viga . . . 978
22.3.4.4 Deflexão máxima . . . 979
22.3.4.4.1 Ex 22.10: Deflexão máxima . . . 980

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

22.3.4.5 Relação de curvatura da temperatura . . . 981
22.3.4.5.1 Ex 22.11: Pórtico submetido a carregamento de temperatura . . . 981
22.3.4.6 Ex 22.12: Comprimento de plástico . . . 984
22.3.4.7 Peso elástico/conjugado . . . 985
22.3.4.7.1 Ex 22.13: Conjugar viga; carga concentrada . . . 986
22.3.4.7.2 Ex 22.14: Conjugar viga; variável I . . . 987

23 Cisalhamento e Torsão **990**
23.1 Cisalhamento deformação (transverso) . . . 990
23.1.1 Cisalhamento, elemento infinitesimal . . . 991
23.1.1.1 Ex 23.1: Deflexão cantilevered viga . . . 991
23.1.2 Cisalhamento distribuição; $\tau(y)$ . . . 992
23.1.3 Coeficiente Cisalhamento . . . 993
23.1.4 Cisalhamento fator . . . 993
23.1.5 Cisalhamento deformação v_s, Timoshenko . . . 995
23.2 Deformações torcionais . . . 995
23.2.1 S^t Venante ou Torção Uniforme . . . 996
23.2.2 Vlasov ou torção não uniforme . . . 997
23.2.2.1 Ex 23.2: Torção não uniforme de uma seção I . . . 1003

24 Complementar Trabalho virtual **1006**
24.1 Introdução . . . 1007
24.2 Derivação simplificada do princípio da complementaridade trabalho virtual 1007
24.2.1 Derivação . . . 1007
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti Reciproca Theorem . . . 1010
24.2.3 Externo trabalho virtual $\delta\overline{W}^*$ . . . 1011
24.2.4 Interno trabalho virtual $\delta\overline{U}^*$ . . . 1011
24.3 Exemplos . . . 1013
24.3.1 Ex 24.1: Viga . . . 1013
24.3.2 Ex 24.2: Pórtico; Deflexões . . . 1014
24.3.3 Ex 24.3: Pórtico, rotação . . . 1015
24.3.4 Ex 24.4: Suporte flexível . . . 1016
24.3.5 Ex 24.5: Cantilever suportado por cabo . . . 1018
24.3.6 Ex 24.6: Deformação torsional e flexural . . . 1019
24.3.7 Ex 24.7: Flexural e cisalhamento deformações em uma viga . . . 1021
24.3.8 Ex 24.8: Efeitos térmicos em uma viga . . . 1022
24.3.9 Ex 24.9: Pipeline . . . 1023
24.3.10 Ex 24.10: Treliça; Simples . . . 1024
24.3.11 Ex 24.11: Treliça; complexo . . . 1025
24.3.12 Ex 24.12: Treliça com cambero inicial . . . 1026
24.3.13 Ex 24.13: Treliça com secundário tensões . . . 1027
24.3.14 Ex 24.14: Anel circular . . . 1029

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

24.3.15Ex 24.15: Primavera 1031

25 Método **1035**
25.1 Introdução 1036
25.2 O método força/flexibilidade 1041
25.2.1 Exemplos 1043
25.2.1.1 Ex 25.1: Viga com haste de gravata 1043
25.2.1.2 Ex 25.2: Análise do edifício de aço pórtico 1044
25.2.1.3 Ex 25.3: Treliça, uma força redundante 1048
25.2.1.4 Ex 25.4: Treliça: Duas forças redundantes 1050
25.2.1.5 Ex 25.5: Treliça: Carga térmica 1053
25.2.1.6 Ex 25.6: Primavera apoiada viga 1054
25.2.1.7 Ex 25.7: Queen post 1056
25.2.1.8 Ex 25.8: Matriz de flexibilidade; Curvado viga 1059
25.3 Equações de três momentos 1062
25.3.1 Ex 25.9: Continuando viga 1065
25.3.2 Ex 25.10: Continuando viga 1066

26 Forças em termos de Deslocamentos **1069**
26.1 Introdução 1069
26.1.1 Assinar convenção 1070
26.1.2 Métodos de análise 1070
26.2 Deformações axiais 1071
26.3 Flexão 1072
26.3.1 Equação diferencial 1072
26.3.2 Forças finais nodais para as iniciais 1075
26.3.3 Forças equivalentes nodais para elementos de flexão 1076
26.3.3.1 Uniformemente cargas distribuídas 1076
26.3.3.2 Cargas concentradas 1077

27 Rigidez à Mão **1079**
27.1 Introdução 1079
27.2 Deflexão de inclinação; Solução direta 1080
27.2.1 Exemplos 1082
27.2.1.1 Ex 27.1: Cantilevered viga 1082
27.2.1.2 Ex 27.2: Continuando viga 1083
27.2.1.3 Ex 27.3: Duas-espanheiras viga 1084
27.2.1.4 Ex 27.4: Duas voltas, desvio inicial 1085
27.2.1.5 Ex 27.5: Pórtico 1087
27.2.1.6 Ex 27.6: Caixa de bueiro 1089
27.3 Distribuição do momento 1090
27.3.1 Introdução 1091
27.3.1.1 Ex 27.7: Continuando viga 1094
27.4 Deflexão de inclinação; Distribuição do momento; Gauss-Seidel 1096

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

27.4.1 Ex 27.8: Deflexão de inclinação/distribuição do momento/Gauss-Seide 1096

28 Linhas de influência **1099**
28.1 Introdução . . . 1099
28.2 Procedimento . . . 1100
28.2.1 Ex 28.1: Linhas de influência para um biapoiado viga . . . 1100
28.2.2 Ex 28.2: Biapoiado viga com overhangs . . . 1103
28.3 MüPrincípio de Iler-Breslau . . . 1103
28.3.1 Derivação . . . 1103
28.3.1.1 Ex 28.3: MüIler-Breslau; Cisalhamento Linha de influência . . . 1104
28.3.1.2 Ex 28.4: MüIler-Breslau; Momento Linha de influência . . . 1105

29 Análise elástica de segunda ordem **1106**
29.1 Introdução . . . 1107
29.2 Grande deslocamentos, estável . . . 1107
29.2.1 Ex 29.1: Instabilidade geométrica . . . 1107
29.2.2 Ex 29.2: Impacto da carga axial na deformação flexural . . . 1109
29.2.3 Ex 29.3: Grande deflexão do cantilever viga . . . 1112
29.3 Pequeno deslocamentos, instável . . . 1116
29.3.1 Barras rígidas discretas . . . 1116
29.3.1.1 Sistema de barra única . . . 1116
29.3.1.1.1 Ex 29.4: Flambagem de duas dobradiças rígidas pilar 1118
29.3.2 Sistemas contínuos . . . 1120
29.3.2.1 Euler flambagem cargas . . . 1120
29.3.2.1.1 Ex 29.5: Flambagem de dobradiças pilar . . . 1122
29.3.2.1.2 Ex 29.6: Flambagem de fixo-fixado pilar . . . 1123
29.3.2.1.3 Ex 29.7: Flambagem de torção fixa pilar . . . 1125
29.3.2.1.4 Ex 29.8: Pilar com suportes elásticos . . . 1126
29.3.2.1.5 Ex 29.9: Constrangido flambagem . . . 1128
29.3.2.1.6 Ex 29.10: Torre de água . . . 1129
29.3.2.2 Analogia com vibração livre . . . 1132
29.3.2.3 Fatores de comprimento efetivos K . . . 1133
29.3.2.4 Inelástico pilares . . . 1136

30 Estruturas de cabos **1139**
30.1 Introdução . . . 1139
30.2 Cargas concentradas . . . 1140
30.2.1 Ex 30.1: Cabo funicular . . . 1141
30.2.2 Ex 30.2: Cabo funicular inclinado . . . 1143
30.2.3 Ex 30.3: Gôndola bi-cabo . . . 1144
30.3 Cargas distribuídas; . . . 1144
30.3.1 Equação de equilíbrio . . . 1145
30.3.2 qdx; Carga lateral; Parabola . . . 1146
30.3.2.1 Geometria . . . 1146

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.2.2 Esforços internos 1151
30.3.2.3 Esticamento elástico 1151
30.3.2.4 Axial equivalente rigidez 1153
30.3.2.5 Caso especial: acorde horizontal 1156
30.3.2.5.1 Ex 30.4: Geometria inclinada do cabo 1156
30.3.2.5.2 Ex 30.5: Forças de cabo inclinadas 1157
30.3.2.5.3 Ex 30.6: Torre com cara 1158
30.3.2.5.4 Ex 30.7: Ponte de suspensão 1160
30.3.2.5.5 Ex 30.8: Cabo inextensível; temperatura 1162
30.3.2.5.6 Ex 30.9: Cabo extenso: flecha 1162
30.3.2.5.7 Ex 30.10: Cabo extenso. térmica 1163
30.3.2.5.8 Ex 30.11: Cabo extenso. Prostress 1163
30.3.3 $q$ds; catenária 1164
30.3.3.1 Geometria 1164
30.3.3.2 Forças 1166
30.3.3.3 Acorde de catenária inclinado 1166
30.3.3.3.1 Ex 30.12: Enfie-se em um cabo inclinado 1168
30.3.3.3.2 Ex 30.13: Suporte a cabo de ônibus 1168
30.3.4 Comparação entre a parábola e as soluções baseadas em catenárias 1171
30.3.4.1 Ex 30.14: Catenária vs parábola 1171

31 Análise dos Arcos de Alvenaria (Voussoir) 1174
31.1 Introdução 1174
31.2 Algumas notas históricas 1175
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1175
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1176
31.2.3 Casal; 1670-1744 1180
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1181
31.2.5 Coulomb;1736-1806 1182
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1183
31.2.7 Soluções elásticas 1184
31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884 1184
31.2.7.2 Winkler; 1835-1888 1184
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1186
31.2.8.1 Ex 31.1: Carga falha de um voussoir; O método de Pippard 1188
31.3 Generalização do método de Pippard; Smars 1192
31.4 Algoritmo 1196
31.5 Considerações finais 1199
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1199
31.5.2 Linha de empurrões 1200
31.5.3 Linha de impulso e pippard 1201

32 Arcos e Curvos Vigas 1204

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

32.1 Arcos circulares . . . 1206
32.1.1 Três arcos circulares dobradiças . . . 1206
32.1.1.1 Teorema de Eddy . . . 1207
32.1.1.2 Exemplos . . . 1207
32.1.1.2.1 Ex 32.1: Três arcos dobradiças; carga concentrada; analítico . . . 1207
32.1.1.2.2 Ex 32.2: Três arcos dobradiças; carga concentrada . . . 1209
32.1.1.2.3 Ex 32.3: Três arcos dobradiças; Carga uniforme . . . 1210
32.1.2 Dois arcos circulares dobrados . . . 1213
32.1.3 Arco circular sem dobras . . . 1213
32.1.3.1 Ex 32.4: Arco circular sem dobras . . . 1214
32.1.4 Solução generalizada . . . 1221
32.1.4.1 Derivação . . . 1221
32.1.4.1.1 Centro de gravidade . . . 1221
32.1.4.1.2 Derivação . . . 1223
32.1.4.1.3 Verificação . . . 1227
32.1.5 Soluções baseadas em matemática . . . 1228
32.2 Forma ideal de um arco . . . 1228
32.2.1 Ex 32.5: Arco perfeito . . . 1229
32.3 Arcos parabólicos . . . 1229
32.3.1 Exemplos . . . 1230
32.3.1.1 Ex 32.6: Arco parabólico de três torções . . . 1230
32.3.1.2 Ex 32.7: Dois arcos parabólicos de corte transversal . . . 1230
32.3.2 Arco fixo com carga simétrica . . . 1234
32.3.2.1 Ex 32.8: Arco parabólico sem dobra . . . 1236
32.3.3 Base de acordo e efeitos de temperatura . . . 1239
32.3.3.1 Ex 32.9: Carga térmica no arco parabólico . . . 1242
32.4 Curvado vigas . . . 1243
32.4.1 Viga de arco . . . 1243
32.4.1.1 Ex 32.10: Viga de arco . . . 1243
32.4.2 Helicoidal . . . 1246
32.4.2.1 Geometria . . . 1246
32.4.2.2 Equilíbrio . . . 1248
32.4.2.2.1 Ex 32.11: Arco helicoidal; carga concentrada . . . 1249

33 Pratos **1252**
33.1 Teoria das placas grossas: REISSNER-Mindlin . . . 1253
33.1.1 Relações cinemáticas . . . 1253
33.1.2 Relações constitutivas . . . 1255
33.1.3 Equilíbrio . . . 1256
33.2 Teoria da placa fina: Kirchhoff . . . 1257
33.2.0.1 Ex 33.1: Idealização de chapa fina contra grossa . . . 1258
33.2.1 Relações fundamentais . . . 1258

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

33.2.2 Equação diferencial . . . 1259
33.2.3 Tensões . . . 1260
33.2.3.1 Ex 33.2: Recuperando tensões dos resultados do momento da placa . . . 1261
33.2.3.2 Ex 33.3: Placa quadrada sob pressão uniforme . . . 1262
33.2.3.3 Ex 33.4: Sensibilidade de deflexão da placa para espessura . . . 1263
33.2.4 Placas circulares . . . 1263
33.2.4.1 Ex 33.5: Placa circular apertada sob pressão uniforme . . . 1267
33.2.5 Formulação variada . . . 1268
33.3 Resumo . . . 1269

34 Cascas **1271**
34.1 Teoria geral . . . 1272
34.1.1 Definições . . . 1272
34.1.2 Suposições . . . 1274
34.1.3 Forçar relações deslocamento . . . 1276
34.1.3.1 Equilíbrio . . . 1278
34.1.3.2 Conjunto completo de equações de equilíbrio . . . 1284
34.1.3.3 Compatibilidade . . . 1284
34.1.3.4 Resumo . . . 1288
34.1.3.5 Tensão-deformação-forças . . . 1289
34.1.3.5.1 Tensão-Deformação . . . 1289
34.1.3.5.2 Esforços . . . 1290
34.1.3.6 Expressões finais (forças em termos de deslocamentos) . . . 1291
34.1.4 Simplificações . . . 1293
34.1.4.1 Raso cascas . . . 1293
34.1.4.1.1 Suposições . . . 1293
34.1.4.1.2 Aplicação de suposições . . . 1294
34.1.4.1.3 Equação profunda viga . . . 1295
34.1.4.1.4 Laje equação . . . 1296
34.1.4.1.5 Equação para raso cascas . . . 1297
34.1.4.2 Teoria da membrana . . . 1297
34.1.4.2.1 Suposições . . . 1298
34.1.4.2.2 Teoria . . . 1298
34.1.4.2.3 Classificação . . . 1298
34.1.4.2.4 Especialização . . . 1299
34.2 Análise de um único barril (circular cilíndrico casca) . . . 1302
34.2.1 Introdução . . . 1302
34.2.2 Teoria da membrana . . . 1304
34.2.2.1 Tensão resultados . . . 1304
34.2.2.1.1 Erros . . . 1307
34.2.2.1.2 Correção . . . 1308

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

34.2.2.2 Deslocamentos . . . 1309
34.2.3 Teoria desleixada . . . 1312
34.2.3.1 Equações de equilíbrio . . . 1312
34.2.3.2 Formulação . . . 1313
34.2.3.2.1 Solução especial para carga uniforme . . . 1316
34.2.3.2.2 Comparação: membrana *V.S* Raso Casca . . . 1317
34.2.3.2.3 Ex 34.1: Comparação da membrana & Raso casca 1320
34.2.3.3 Solução geral . . . 1320
34.2.3.3.1 Deslocamento w . . . 1321
34.2.3.3.2 M_ϕ . . . 1323
34.2.3.3.3 Outros termos; Procedimento . . . 1324
34.3 Estaticamente indeterminado cascas . . . 1327
34.3.1 Borda viga . . . 1328
34.3.1.1 Borda vertical vigas . . . 1328
34.3.1.2 Borda horizontal vigas . . . 1331
34.3.2 Borda pré-stressada viga . . . 1331
34.3.2.1 Ex 34.2: Desenho de cilíndrico casca . . . 1333
34.3.3 MATLAB®código e exemplo numérico . . . 1344

35 Dinâmica I **1346**
35.1 Fundações filosóficas . . . 1347
35.2 Quando é que uma análise dinâmica se guarda . . . 1348
35.3 Princípios fundamentais . . . 1349
35.3.1 Princípio de d'Alembert e equilíbrio dinâmico . . . 1349
35.3.2 O oscilador de liberdade individual . . . 1349
35.3.3 Frequência natural e Ponto . . . 1350
35.3.3.1 Ex 35.1: Computação ω_n, T_n, e f_n para um sistema SDOF . . . 1351
35.3.4 Amortecimento e a proporção Amortecimento . . . 1351
35.4 Vibração Livre . . . 1353
35.4.1 Vibração livre . . . 1353
35.4.2 Vibração Livre Arrasada . . . 1354
35.4.3 Decremento logarítmico . . . 1354
35.4.3.1 Ex 35.2: Estimando amortecimento de decremento logarítmico 1355
35.5 Vibração Forçada: Excitação harmônica . . . 1356
35.5.1 Resposta harmônica sem danos . . . 1356
35.5.2 Resposta harmônica abafada . . . 1357
35.5.2.1 Ex 35.3: Resposta harmônica: amplificação e fase . . . 1358
35.6 Resposta à carga arbitrária . . . 1359
35.6.1 Resposta de impulso e Impulso da Unidade . . . 1359
35.6.1.1 Ex 35.4: Resposta de impulso da unidade de um sistema SDOF amortecido . . . 1359
35.6.2 O Duhamel Integral . . . 1360

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

35.6.2.1 Ex 35.5: Carregamento de passo súbito: A amplificação dinâmica Fator de 2 . . . 1361
35.6.2.2 Ex 35.6: Carga de pulso retangular e espectro de choque . . . 1362
35.6.3 Análise de Fourier e Resposta à Frequência . . . 1364
35.6.3.1 Ex 35.7: Resposta de frequência a uma máquina periódica Força com dois harmônicos . . . 1365
35.7 Apoio Excitação e Resposta ao Terremoto . . . 1366
35.7.1 Equação de movimento para a Excitação Base . . . 1366
35.7.2 Espectros de resposta . . . 1367
35.7.2.1 Ex 35.8: Desenho sísmico de uma única história usando um espectro de resposta . . . 1368
35.8 Sistemas com múltiplos graus de liberdade . . . 1370
35.8.1 Equações de movimento . . . 1370
35.8.2 Vibração Livre: Modos Naturais . . . 1370
35.8.3 Análise Modal . . . 1371
35.8.4 Participação modal na resposta ao terremoto . . . 1372
35.8.4.1 Ex 35.9: Análise modal de um edifício 3-DOF sob carregamento sísmico . . . 1372
35.9 Sistemas contínuos . . . 1374
35.9.1 Vibração Axial de Barras . . . 1374
35.9.2 Vibração transversal de Vigas . . . 1375
35.9.2.1 Ex 35.10: Frequência natural de uma ponte de aço e Verificação de ressonância dos pedestres . . . 1376
35.10 Dinâmica não linear . . . 1377
35.10.1 Fontes de não linearidade . . . 1377
35.10.2 Histerese e dissipação de energia . . . 1378
35.10.2.1 Ex 35.11: Viscoso equivalente amortecimento de um bilinear Histerese loop . . . 1379
35.10.3 Dutilidade e Design de Capacidade . . . 1380
35.10.3.1 Ex 35.12: Dutilidade demanda e redução de força para um concreto armado pórtico . . . 1380
35.11 Considerações Práticas . . . 1382
35.11.1 Amortecimento em Estruturas Real . . . 1382
35.11.2 Interação estrutura-solo . . . 1382
35.11.3 Ajustados Dampers de Massa . . . 1382
35.11.4 Ex 35.13: Projeto de um amortecedor de massa sintonizado para um edifício alto . . . 1383
35.11.5 Isolamento Base . . . 1384
35.11.6 Ex 35.14: Projeto de um prédio hospitalar isolado . . . 1384
35.12 Considerações finais . . . 1386
35.12.1 Cuidado com os métodos de um praticante . . . 1386
35.12.2 Nota de encerramento: Limites da teoria linear . . . 1386

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

36 Elementos de Projeto estrutural **1388**
36.1 Introdução . . . 1389
36.1.1 Análise e desenho; Um processo iterativo . . . 1389
36.1.2 Segurança . . . 1390
36.2 Desenho permitido tensão (asd) . . . 1391
36.2.1 Ex 36.1: Asd; flexura . . . 1392
36.3 Projeto do fator de carga e resistência (LRFD) . . . 1392
36.4 Exemplos de códigos de projeto baseados em lrfd . . . 1395
36.4.1 Aplicação: Resistência plástica das seções R/C viga . . . 1396
36.4.1.1 Ex 36.2: Força máxima. Revisão . . . 1401
36.4.1.2 Ex 36.3: Força máxima. Design I . . . 1401
36.4.1.3 Ex 36.4: Força máxima. Design ii . . . 1402
36.4.1.4 Ex 36.5: Análise exata . . . 1403
36.4.2 Aplicação: Resistência plástica de R/C pilares . . . 1405
36.4.2.1 Ex 36.6: R/C pilar, *c* Conhecido . . . 1410
36.4.2.2 Ex 36.7: R/C pilar, *e* Conhecido . . . 1411
36.4.3 Concreto protendido . . . 1414
36.4.3.1 Ex 36.8: Estudo de caso: Noz ponte pista . . . 1415
36.5 Engenharia baseada em desempenho (PBE) . . . 1419

37 Desenho de um arco estaticamente indeterminado **1421**
37.1 Ex 37.1: Desenho de um arco estaticamente indeterminado . . . 1421
37.2 Ex 37.2: A temperatura muda em um arco . . . 1428

38 Fermi Solutions (Análise aproximada) **1432**
38.1 Esforços internos . . . 1433
38.1.1 Formas defletidas & Pontos de inflexão . . . 1433
38.1.2 Momentos em termos de apoio . . . 1436
38.1.3 Analisa métodos . . . 1438
38.1.3.1 Cargas verticais . . . 1438
38.1.3.2 Cargas horizontais . . . 1442
38.1.3.2.1 Método do portal . . . 1442
38.1.3.2.1.1 Ex 38.1: Método do portal; Edifício de subida baixa . . . 1444
38.1.3.2.1.2 Ex 38.2: Solução Matlab . . . 1455
38.1.3.2.2 Método Cantilever . . . 1456
38.1.3.2.2.1 Ex 38.3: Método Cantilever; Edifício de elevação alta . . . 1457
38.2 Resposta estrutural . . . 1458
38.2.1 Subsistema de eixo . . . 1458
38.2.1.1 Ex 38.4: Subsistema de eixo . . . 1459
38.2.2 Cisalhamento parede . . . 1460
38.2.2.1 Ex 38.5: Parede de concreto cisalhamento . . . 1460

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

38.2.3 Muralha de madeira 1462
38.2.3.1 Ex 38.6: Muralha de madeira 1463
38.2.4 Deflexões laterais 1464
38.2.4.1 Parede curta 1464
38.2.4.2 Muro alto 1464
38.2.4.3 Paredes e lintel 1466
38.2.4.4 Pórticos 1467
38.2.4.4.1 Ex 38.7: Construindo deflexão transversal aproximada 1469

39 Desenhos preliminares **1473**
39.1 Ex 39.1: Aeroporto Dulles 1473
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel 1480
39.3 Ex 39.3: Magazini Generali 1488
39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington 1492
39.5 Ex 39.5: Desenho de um arco de duas voltas 1499
39.6 Ex 39.6: A temperatura muda em um arco 1507
39.7 Ex 39.7: Arco parabólico com variação secante de I 1510

III Intermediário; Métodos Numéricos 1513

40 Introdução ao Método da rigidez direta **1514**
40.1 Por que matriz análise estrutural? 1514
40.2 Idealização estrutural 1516
40.3 Assinar convenção 1518
40.4 Sistemas de coordenadas 1518
40.5 Flexibilidade *vs.* Rigidez 1519
40.6 Graus de liberdade 1520
40.7 Estático *vs.* Indeterminação cinemática 1522
40.8 Análise estrutural/mecânica; Um problema de valor limite 1523

41 Elemento Matrizes de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$ **1525**
41.1 Rigidez definição do termo 1525
41.2 Treliça elemento 1527
41.3 Viga: Euler-Bernoulli 1527
41.4 Elemento 2D pórtico (também conhecido como elemento viga-pilar) . . . 1528
41.5 Elemento da grade 1529
41.6 Elemento 3D viga-pilar 1529
41.7 Timoshenko viga 1532
41.7.1 Deformação adicional 1532
41.7.2 Modificação do elemento matriz de rigidez 1533
41.8 Torção Vlasov 1534

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

42 Método; Eu, Estruturas Ortogonais **1537**
42.1 Introdução . . . 1537
42.2 Teoria . . . 1538
42.2.1 Flexibilidade revisitado . . . 1539
42.2.2 Método da rigidez direta . . . 1539
42.2.3 De elemento para estrutura . . . 1540
42.3 Exemplos . . . 1541
42.3.1 Ex 42.1: Ortogonal viga . . . 1541
42.3.2 Ex 42.2: Ortogonal pórtico . . . 1543
42.3.3 Ex 42.3: Grelha . . . 1550
42.3.4 Ex 42.4: Híbrido pórtico . . . 1554
42.3.5 Ex 42.5: Grade híbrida . . . 1558

43 Matrizes de Transformação **1563**
43.1 Introdução . . . 1563
43.2 Alguma teoria . . . 1565
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ Relacionamento . . . 1565
43.2.2 Direção cossenos . . . 1565
43.3 Matrizes de transformação para elementos de estrutura . . . 1568
43.3.1 Dois casos . . . 1568
43.3.1.1 2D pórtico . . . 1568
43.3.1.2 Grelha . . . 1569
43.3.1.3 Vlasov viga . . . 1570
43.3.1.4 2D treliça . . . 1571
43.3.2 3D pórtico . . . 1571
43.3.3 Rotações Eulerianas . . . 1572
43.3.4 Torção do eixo de elementos . . . 1574
43.3.5 3D treliça . . . 1576

44 Método da rigidez direta **1578**
44.1 Objetivos . . . 1578
44.2 Teoria . . . 1579
44.3 Discretização . . . 1581
44.3.1 Sem restrições vs restritas . . . 1581
44.3.2 Discretização estrutural . . . 1582
44.4 Implementação de computador . . . 1583
44.4.1 Condições de contorno, `[id]` Matriz . . . 1583
44.4.2 **LM** vetor . . . 1584
44.4.3 Assembléia global matriz de rigidez . . . 1585
44.4.4 Procedimento passo a passo . . . 1586
44.5 Exemplos . . . 1587
44.5.1 Ex 44.1: Pórtico . . . 1588
44.5.1.1 Preliminares . . . 1588

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

44.5.2 Ex 44.3: Treliça . . . 1598

45 Propriedades Matemáticas de Matriz de rigidez; Questões Computacionais 1602
45.1 Matrizes mal condicionadas . . . 1603
45.1.1 Valores próprios . . . 1603
45.1.1.1 Interpretação física dos autovalores . . . 1605
45.1.2 Número da condição . . . 1608
45.1.3 Ill-conditioned matrizes de rigidez . . . 1608
45.1.3.1 Ex 45.1: Inquilinoso . . . 1611
45.2 Considerações numéricas . . . 1612
45.2.1 Inversão vs decomposição . . . 1612
45.2.2 Numeração Nodal . . . 1612

46 Tópicos Especiais 1616
46.1 Condensação/subestruturação . . . 1617
46.2 Equações de estática e cinemática . . . 1618
46.2.1 Matriz estática $\mathcal{B}$ . . . 1618
46.2.1.1 Derivação . . . 1618
46.2.1.2 Determinado estaticamente . . . 1618
46.2.1.2.1 Ex 46.1: Determinar estaticamente a matriz estática 1619
46.2.1.2.2 Ex 46.2: Viga matriz estática . . . 1620
46.2.1.3 Estaticamente indeterminado . . . 1621
46.2.1.3.1 Ex 46.3: Estaticamente indeterminada matriz estática 1621
46.2.1.4 Identificação de forças redundantes . . . 1623
46.2.1.4.1 Ex 46.4: Seleção de forças redundantes . . . 1623
46.2.1.5 Instabilidade cinemática . . . 1625
46.2.2 Cinemática matriz $\mathcal{A}$ . . . 1626
46.2.2.1 Ex 46.5: Cinemática matriz: treliça exemplo . . . 1627
46.2.3 Estática - cinemática matricial relacionamento . . . 1627
46.2.3.1 Determinado estaticamente . . . 1627
46.2.3.2 Estaticamente indeterminado . . . 1628
46.3 Relações cinemáticas através do inverso da matriz estática . . . 1629
46.4 Rigidez-flexibilidade relações . . . 1630
46.4.1 De rigidez a flexibilidade . . . 1630
46.4.1.1 Ex 46.6: Matriz de flexibilidade . . . 1631
46.4.2 De flexibilidade a rigidez . . . 1631
46.4.2.1 Ex 46.7: Flexibilidade para rigidez . . . 1633
46.4.2.2 Ex 46.8: Matriz de rigidez de um elemento curvo . . . 1634
46.4.3 Duplaidade entre os métodos flexibilidade e rigidez . . . 1636
46.5 Abordagem de transformação congruente para **K** . . . 1636
46.5.1 Ex 46.9: Transformação congruente . . . 1638
46.5.2 Ex 46.10: Transformação congruente de um pórtico . . . 1640
46.6 Elementos especiais . . . 1642

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

46.6.1 Deslocamento rígido. . . . 1642
46.6.2 Semi-rígido vigas 1644
46.6.3 Variável seções transversais 1650
46.7 Fontes de deriva lateral no momento 1652

47 Cálculo Variacional em Mecânica: O Marco Euler-Lagrange 1666
47.1 Introdução 1667
47.2 Euler 1667
47.2.1 Preliminares 1667
47.2.2 Forma diferente de $\delta\Pi$ 1669
47.2.3 Equação de Euler 1670
47.2.4 $\delta\Pi$ 1671
47.2.5 Observações 1672
47.2.6 Condições de contorno 1672
47.2.6.1 Ex 47.1: Euler: Axial 1674
47.2.6.2 Ex 47.2: Euler: flexura 1675
47.3 Princípio da Energia Potencial Total 1676
47.4 Hamilton 1680
47.4.1 Dinâmico; Euler/Lagrange 1680
47.4.1.1 Sistema discreto 1680
47.4.1.2 Sistema de continuidade 1682
47.4.2 Ex 47.3: Hamilton 1684
47.5 General Hu-Washizu Princípio de Variação 1687
47.6 Diagramas de Pseudo-Tonti 1691
47.6.1 Princípio de D'Alembert 1691
47.6.2 Equações de Hamilton 1691
47.6.3 Equações de Lagrange 1692

48 Princípios Variacionais e Energia em Análise estrutural 1696
48.1 Introdução 1697
48.1.1 Termodinâmica 1697
48.1.2 Relações básicas 1698
48.1.3 Definições 1699
48.1.4 Termos reais 1699
48.1.5 Expressões virtuais 1700
48.1.6 Observações 1701
48.1.6.1 Trabalho interno versus deformação energia 1701
48.1.6.2 Caminho independência do trabalho externo 1702
48.1.7 Aplicações para elementos 1D 1703
48.1.7.1 Energia complementar, elástico linear U^* 1703
48.1.7.2 Energia, elástico linear U 1704
48.1.7.3 Energia virtual complementar deformação δU^* 1704
48.1.7.4 Energia virtual deformação δU 1706

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

48.1.8 Resumo de VW e CVW 1708
48.2 Aproxime-se 1709
48.3 Trabalho virtual 1710
48.3.1 Princípio da complementaridade trabalho virtual (PCVW) 1710
48.3.1.1 Derivação 1710
48.3.1.2 Ex 48.1: PCVW, cantilevered cônico viga 1713
48.3.2 Ex 48.2: Três arcos semi-circulares dobradiças 1714
48.3.3 Princípio de trabalho virtual (PVW) 1715
48.3.3.1 Derivação 1715
48.3.3.2 Ex 48.3: PVW, cantilever cônico 1717
48.4 Princípios da energia potencial 1719
48.4.1 Princípio da energia potencial total (PTPE) 1719
48.4.1.1 Derivação 1719
48.4.1.2 Ex 48.4: PEPT, primavera e massa 1721
48.4.1.3 Ex 48.5: PTPE; Preso viga com varieble I 1722
48.4.2 Princípio da energia potencial total complementar (PTCPE) 1723
48.5 Os teoremas de Castigliano 1723
48.5.1 Primeiro teorema 1723
48.5.1.1 Ex 48.6: Não linear elástico treliça 1725
48.5.2 Segundo teorema 1726
48.5.2.1 Ex 48.7: Castigliano 2; Cantilevered viga 1727
48.5.2.2 Ex 48.8: Castigliano 2; deflexão de um uniformemente carregado viga usando o segundo teorema de Castigliano 1728
48.5.2.3 Ex 48.9: Castigliano 2, não linear 1728
48.5.2.4 Ex 48.10: Castigliano 2, deflexão da primavera 1728
48.6 Método Rayleigh-Ritz 1729
48.6.1 Derivação 1729
48.6.1.1 Ex 48.11: Rayleigh Ritz uniformemente carregado biapoiado viga 1730
48.6.1.2 Ex 48.12: Métodos de variação 1732
48.7 Resumo 1739

49 Funções de Interpolação **1742**
49.1 Introdução 1742
49.1.1 Características de funções de forma 1742
49.1.2 Triângulo de Pascal 1743
49.1.3 Sistemas de coordenadas 1745
49.1.3.1 Cartesiano 1745
49.1.3.2 Natural 1745
49.1.3.3 Triangular 1746
49.1.4 Continuação 1750
49.2 Funções de forma 1750
49.2.1 Formulação direta 1750

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

49.2.1.1 Treliça elemento; linear 1750
49.2.1.2 Generalização 1751
49.2.1.3 Elemento triângulo constante deformação 1752
49.2.1.4 Elemento retangular bilinear 1753
49.2.1.5 Elemento trilinear de tijolo 1755
49.2.2 Funções de interpolação lagrangeanas 1756
49.2.2.1 Quadrilaterais 1756
49.2.2.2 Triângulos 1757
49.2.2.3 Treliça elemento; Quadrático 1758
49.2.2.4 Viga 1759
49.2.3 Funções de interpolação hermítica 1762
49.2.3.1 Viga funções de forma revisitado 1763
49.2.3.2 Elementos quadrilaterais 1765
49.2.3.2.1 Quadrilateral Linar (q4) 1765
49.2.3.2.2 Quadráticos quadriláteros 1766
49.2.3.2.2.1 Elemento de serendipidade (q8) 1766
49.2.3.2.2.2 Elemento Lagrangiano (Q9) 1767
49.2.3.3 Elemento variável (hierárquico) 1770
49.2.3.4 Elemento triangular (t6) 1772

50 Formulação de elementos lineares **1774**
50.1 Introdução 1774
50.2 Elemento finito 1775
50.2.1 Introdução 1775
50.2.2 Deformação deslocamento relações 1775
50.2.2.1 Membros do Axial 1776
50.2.2.2 Membros de flexão 1776
50.2.3 Virtual deslocamento e deformações 1776
50.2.4 Formulação do elemento matriz de rigidez 1777
50.2.5 Tensão recuperação 1778
50.3 Aplicação 1779
50.3.1 Treliça elemento 1779
50.3.2 Elemento de flexão 1779
50.4 Requisitos gerais de elementos 1780
50.5 Erro de discretização e taxa de convergência 1782
50.6 Caráter inferior das soluções mínimas baseadas em energia 1783
50.7 Equilíbrio e compatibilidade na solução 1784

51 Elementos **1786**
51.1 Introdução 1787
51.2 Formulação de elementos 1789
51.2.1 Elemento de barras 1789
51.2.2 Quadrilateral (q4); Formulação detalhada 1790

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

51.2.3 Elementos triangulares . . . 1794
51.2.3.1 Triângulo T3 . . . 1794
51.2.3.2 Triângulo T6 . . . 1796
51.2.4 Ex 51.1: Operadores Jacobianos . . . 1797
51.3 Integração numérica . . . 1798
51.3.1 Newton-Cotes . . . 1799
51.3.2 Quadratura Gauss-legendre . . . 1801
51.3.2.1 Lendre polinomial . . . 1803
51.3.2.2 Quadratura Gauss-Legendre para $n = 2$ . . . 1803
51.3.3 Regiões retangulares e prismas . . . 1804
51.3.4 Regiões triangulares . . . 1804
51.4 Tensão recuperação; Nodal tensões . . . 1804
51.5 Cargas equivalentes nodais . . . 1807
51.5.1 Carga de gravidade . . . 1807
51.5.2 Carga de tração . . . 1808
51.5.3 Inicial deformações/tensões; Carga térmica . . . 1810
51.5.4 Ordem de integração . . . 1811
51.5.4.1 Integração total . . . 1811
51.5.4.2 Integração reduzida . . . 1811
51.5.4.3 Seletiva integração reduzida . . . 1813
51.6 Parasítico cisalhamento / elementos incompatíveis . . . 1813
51.6.1 Q4, o problema . . . 1813
51.6.2 Q6, a solução . . . 1814
51.6.3 Qm6, mais melhorias . . . 1815
51.7 -Dófice rotacional. . . . 1816

52 Métodos Residuais Ponderados 1818
52.1 Introdução . . . 1819
52.2 Formulação geral . . . 1819
52.2.1 Operadores diferenciais . . . 1819
52.2.1.1 Ex 52.1: Verifique simetria e definição positiva do membro 1D axial . . . 1820
52.2.2 Formulação residual . . . 1820
52.3 Métodos residuais ponderados . . . 1822
52.3.1 Método de colocação de pontos . . . 1823
52.3.2 Método de recolocação do subdomínio . . . 1823
52.3.3 Método dos mínimos quadrados . . . 1823
52.3.4 Método Galerkin . . . 1823
52.3.4.1 Ex 52.2: Vibração de cordas . . . 1824
52.4 Aplicações do método Galerkin para problemas de elasticidade 3D . . . 1826
52.4.1 Derivação da forma fraca . . . 1826
52.4.2 Fe discretização . . . 1828
52.4.2.1 Ex 52.3: Matriz de rigidez de um elemento viga . . . 1829

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

52.4.2.2 Ex 52.4: Transferência de calor . . . 1832

53 Dinâmica II **1835**
53.1 Introdução . . . 1836
53.2 idealização para análise dinâmica . . . 1837
53.2.1 Axial *vs* Flexural Rigidez . . . 1837
53.2.2 Modelo . . . 1838
53.2.2.1 Ex 53.1: Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral . . . 1841
53.3 Formulação de problemas . . . 1842
53.3.1 Formulação variada . . . 1842
53.3.2 Representação em massa . . . 1844
53.3.3 Amortecimento . . . 1845
53.3.3.1 Ex 53.2: Calibrando os coeficientes de Rayleigh amortecimento para um edifício cisalhamento . . . 1847
53.3.3.2 Ex 53.3: Base analítica: Vibração livre das condições iniciais gerais . . . 1848
53.3.4 Técnica numérica: Métodos Euler . . . 1849
53.3.4.1 Ex 53.4: Método Euler . . . 1850
53.4 Discretização do tempo . . . 1851
53.4.1 Implícito . . . 1852
53.4.1.1 O método de Newmark . . . 1852
53.4.1.1.1 Derivação . . . 1852
53.4.1.1.2 Newmark β Método implícito . . . 1853
53.4.1.2 Método Hilber-hughes-taylor . . . 1855
53.4.2 Integração de tempo explícita . . . 1857
53.4.2.1 Sistemas lineares . . . 1857
53.4.2.2 Sistemas não lineares . . . 1860
53.5 Métodos numéricos para análise dinâmica . . . 1861
53.5.1 Método de Diferença Central . . . 1861
53.5.2 Ex 53.5: Passo de estabilidade da diferença central . . . 1861
53.5.3 Método Newmark-Beta . . . 1862
53.5.4 Superposição Modal vs. Integração Direta . . . 1862
53.6 Sistemas contínuos . . . 1863
53.6.1 Vibração Axial de Barras . . . 1863
53.6.1.1 Ex 53.6: Velocidade de onda e axial frequências naturais de uma haste de aço . . . 1864
53.6.2 Vibração transversal de Vigas . . . 1865
53.7 Dinâmica não linear . . . 1866
53.7.1 Fontes de não linearidade . . . 1866
53.7.2 Dutilidade e Design de Capacidade . . . 1866
53.8 Considerações Práticas . . . 1867
53.8.1 Amortecimento em Estruturas Real . . . 1867

CÓPIA PARA REVISÃO

53.8.2 Interação estrutura-solo 1867
53.8.3 Ajustados Dampers de Massa 1867
53.8.4 Isolamento Base 1868
53.9 Resumo 1868

IV Avançado; Não Linear & Outros Tópicos 1870

54 Introdução **1872**
54.1 Introdução 1873
54.1.1 Fontes de não linearidades 1873
54.1.2 Por que uma análise não linear 1875
54.2 Tipos de análises estruturais não lineares 1875
54.3 Carga incremental/deslocamento 1878
54.4 Segurança 1878
54.4.1 Terminologia 1878
54.4.2 Segurança & Cargas 1879
54.5 Códigos de design 1880
54.5.1 Introdução 1880
54.5.2 Evolução: Antiguidade 1882
54.5.2.1 Mesopotâmia; hamurabi 1882
54.5.2.2 Roman; Vitruvius 1883
54.5.3 Tempos modernos 1883
54.5.3.1 Design permitido, ASD 1885
54.5.3.2 Resistência à carga e projeto de fatores, LRFD 1885
54.5.3.3 Engenharia sísmica baseada em desempenho 1886
54.5.4 Resumo 1887

55 Plasticidade I; Fibras & Continuum (Para Elemento finito Análise) **1889**
55.1 Introdução 1890
55.2 Condições de produção plástica 1890
55.2.1 Modelos independentes de pressão hidrostática 1891
55.2.2 Modelos dependentes de pressão hidrostática 1893
55.3 Observações do laboratório 1895
55.3.1 Metais 1895
55.3.2 Concreto 1896
55.4 Falhas microscópicas 1896
55.4.1 Ligações químicas 1896
55.4.2 Fracassados e frágeis 1897
55.4.3 Deslocamento 1898
55.5 Fundamentos da plasticidade 1899
55.5.1 Introdução 1899
55.5.2 Módulo elástico Tangent 1900

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

55.5.2.1 Derivação generalizada 1900
55.5.2.1.1 Rende-te. Modelo de endurecimento isotrópico . 1900
55.5.2.1.2 Regra de fluxo 1900
55.5.2.1.2.1 Kuhn-Tucker condições 1902
55.5.2.1.3 Condição de consistência 1902
55.5.2.1.4 Módulo Tangent 1902
55.5.2.2 Módulo Tangent; Engenharia 1903
55.5.2.3 Ex 55.1: Módulo Tangent 1904

56 Plasticidade II; Seções: 1908
56.1 Introdução 1909
56.2 Framework teórico: Suposições e resultados-chave 1909
56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$ 1910
56.3.1 A partir do momento relação curvatura 1912
56.3.1.1 Ex 56.1: Análise seccional não linear. analítico 1912
56.3.2 Da relação entre o Tensão e o Deformação 1915
56.3.2.1 Ex 56.2: Deitou-se. Aço 1916
56.3.2.2 Ex 56.3: Deitou-se. Concreto/ACI 1920
56.4 Curvação do momento, generalização 1923
56.4.1 Abordagem analítica 1923
56.4.1.1 Ex 56.4: Curvação do momento de uma seção I R/C 1925
56.4.1.2 Diagrama de interação $M - N$ 1930
56.4.2 Aproximação numérica 1930

57 Plasticidade III; Estrutura: Rendem-se Linhas 1935
57.1 Introdução 1936
57.2 Elementos lineares (vigas, pórticos) 1938
57.2.1 Kinematic; Limite superior 1938
57.2.1.1 Ex 57.1: Fixo viga; Carga central 1941
57.2.1.2 Ex 57.2: Fixo viga; carga offset 1941
57.2.1.3 Ex 57.3: Continuando viga 1941
57.2.1.4 Ex 57.4: Ortogonal pórtico 1942
57.2.1.5 Ex 57.5: Inclinado pórtico 1943
57.2.2 Estáticos; Encaixe mais baixo 1944
57.2.2.1 Ex 57.6: Cantiliver I Proped 1947
57.2.2.2 Ex 57.7: Cantiliver II Propped 1947
57.2.2.3 Ex 57.8: Fixado viga 1948
57.2.2.4 Ex 57.9: Inclinado pórtico 1949
57.3 Elementos planos (lajes) 1954
57.3.1 Estáticos: Encaixe mais baixo 1955
57.3.1.1 Ex 57.10: Quadrado laje 1955
57.3.2 Cinemática: Limite superior 1956
57.3.2.1 Ex 57.11: Rectangular laje 1958

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

57.4 Análise do Pushover . . . 1959
57.5 Analogias entre a análise dos limites inferiores e . . . 1960
57.5.1 Análise do Pushover . . . 1960
57.5.2 Plasticidade amassada . . . 1963

58 Mecânica do dano **1967**
58.1 PROPOSTA DE ESCRITÓRIO POR ChatGPT . . . 1967
58.1.1 Motivação e fundamentos físicos (~1.5 páginas) . . . 1967
58.2 Framework termodinâmico (~2 páginas) . . . 1967
58.3 Dano isotrópico escalar: O modelo Mazars~4 páginas) . . . 1968
58.4 Tensão, assimetria de compressão e o efeito unilateral~2 páginas) . . . 1968
58.5 Dano... acoplamento de plasticidade (~2 páginas) . . . 1968
58.6 Regularização e objetividade de malha (~3 páginas) . . . 1968
58.7 Aplicação para elementos viga e pilar (~3 páginas) . . . 1969
58.8 Identificação do parâmetro e guia prático (~1.5 páginas) . . . 1969
58.9 Notas bibliográficas e leitura adicional (~0,5 páginas) . . . 1969

59 Análise não linear. Material **1970**
59.1 Raízes numéricas achadas . . . 1971
59.1.1 Métodos Newton . . . 1971
59.1.1.1 Introdução . . . 1971
59.1.1.2 Série Taylor e linearização . . . 1972
59.1.1.2.1 Ex 59.1: Método de Newton, escalar . . . 1974
59.1.1.3 Convergência e estimativa de erro . . . 1976
59.1.1.4 Considerações finais . . . 1977
59.1.1.4.1 Ex 59.2: O método de Newton. vetor . . . 1977
59.1.2 Método Secante . . . 1978
59.1.3 Explícito . . . 1979
59.2 Relação com mecânica estrutural; implícita . . . 1980
59.3 Métodos de integração . . . 1981
59.3.1 Controle de carga . . . 1983
59.3.1.1 Método Newton-raphson/rigidez tangente . . . 1983
59.3.1.2 Modificado Newton-Raphson . . . 1986
59.3.1.3 Secant Newton . . . 1986
59.3.1.4 Critérios de convergência . . . 1988
59.3.1.5 Tabela sumária . . . 1989
59.3.2 Deslocamento controle . . . 1991

60 Análise não linear; Geométrico **1995**
60.1 Geométrico matriz de rigidez . . . 1996
60.1.1 Derivação . . . 1996
60.1.1.1 Forma fraca . . . 1996
60.1.1.2 Deformação . . . 1996
60.1.1.3 Energia interna deformação . . . 1997

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ . . . 1998
60.1.2 Instabilidade elástica; Análise de bifurcação . . . 1999
60.1.2.1 Ex 60.1: Pilar flambagem . . . 2000
60.1.2.2 Ex 60.2: Pórtico flambagem; Solução Matlab . . . 2002
60.1.2.3 Ex 60.3: Pórtico flambagem; Solução matemática . . . 2004
60.1.2.4 Ex 60.4: Impacto da carga axial na deformação flexural . . . 2005
60.2 Análise explícita incremental . . . 2008
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflexão do cantilever viga . . . 2010
60.3 $P-\Delta$ revisitado . . . 2014
60.3.1 Ex 60.6: Flambagem carga sem $\mathbf{K}_{geom}$ . . . 2014

61 Não linear. Formulação do elemento 2018
61.1 Introdução . . . 2019
61.2 Treliça elemento . . . 2019
61.2.1 Sistema de coordenadas para o elemento 2D treliça . . . 2021
61.2.2 Determinação do Estado . . . 2022
61.3 Viga-pilar formulações de elementos . . . 2022
61.3.1 Rigidez-baseado em 2D viga-pilar elemento . . . 2023
61.3.1.1 Sistema de coordenadas no elemento 2D baseado em viga . . . 2025
61.3.1.2 Determinação do Estado . . . 2026
61.3.1.3 "Escondido" erro . . . 2030
61.3.1.4 Análise não linear usando método baseado em rigidez . . . 2030
61.4 Seção de camada/fibra . . . 2034
61.4.1 Flexibilidade método 2D viga-pilar elemento . . . 2037
61.4.1.1 Sistema de coordenadas no elemento 2D baseado em viga . . . 2041
61.4.1.2 Determinação do Estado . . . 2042
61.4.1.2.1 Sem iteração em nível de elemento . . . 2043
61.4.1.2.2 Com Newton-Raphson iterações em nível de elemento 2045
61.4.1.3 Análise não linear usando método baseado em flexibilidade 2050
61.4.1.3.1 Sem iteração em nível de elemento . . . 2050
61.4.1.3.2 Com iterações de Newton-Raphson em nível de elemento . . . 2054
61.4.2 Rigidez *vs.* flexibilidade elementos baseados . . . 2058
61.5 Formulação de elementos 2D de comprimento zero . . . 2062
61.5.1 Sistema de coordenadas em elemento 2D de comprimento zero . . . 2063
61.5.2 Determinação do estado do elemento . . . 2064
61.6 Elemento de seção de comprimento zero . . . 2066
61.6.1 Matriz de rigidez . . . 2067
61.6.2 Sistema de coordenadas . . . 2068
61.6.3 Determinação do estado do elemento . . . 2068
61.7 Integração numérica . . . 2070
61.8 Força do elemento . . . 2070

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

62 Modelos constitutivos para a plasticidade distribuída e lumpida 2072
62.1 Introdução . . . 2073
62.1.1 Termoelasticidade linear . . . 2074
62.1.2 Modelos heurísticos . . . 2075
62.2 Plasticidade distribuída . . . 2076
62.2.1 Modelos de aço . . . 2076
62.2.1.1 Introdução . . . 2076
62.2.1.2 Modelo bilinear com endurecimento isotrópico . . . 2077
62.2.1.2.1 Tensão-deformação relação . . . 2077
62.2.1.2.2 Determinação para o modelo bilinear . . . 2078
62.2.1.3 Modelo Menegotto-pinto . . . 2078
62.2.2 Modelos de concreto . . . 2087
62.2.2.1 Efeito do confinamento . . . 2087
62.2.2.2 Modelo Kent e Park modificado . . . 2088
62.2.2.2.1 Tensão-deformação relação . . . 2088
62.2.2.2.2 Determinação para modelos de kent e parque modificados . . . 2097
62.2.3 Modelo de dano anisotrópico com danos efetivos e recuperação . . . 2100
62.2.3.1 Modelo constitutivo . . . 2100
62.2.3.2 Formulação uniaxial multifibras . . . 2102
62.2.3.3 Determinação para o modelo de danos anisotrópicos . . . 2103
62.2.3.3.1 Carga de tensão: . . . 2103
62.2.3.3.2 Carregamento de compressão: . . . 2104
62.2.3.4 Modelo de dano anisotrópico com permanente deformações . . . 2111
62.2.3.4.1 Esquema numérico uniaxial . . . 2111
62.2.4 Bond-slip . . . 2114
62.2.5 Elemento de seção de comprimento zero . . . 2117
62.3 Plasticidade amassada . . . 2119
62.3.1 Comprimento de plástico . . . 2120
62.3.1.1 Potenciais localizações de rótulas plásticas . . . 2120
62.3.1.2 Deformação da curvatura ($\Delta(\phi)$) . . . 2121
62.3.1.3 Concreto armado eficaz e curvatura . . . 2122
62.3.1.4 Deformação em termos de comprimentos rótula plástica . . . 2123
62.3.1.4.1 Concreto armado . . . 2123
62.3.1.4.2 Aço . . . 2127
62.3.1.5 Ex 62.1: Rótula plástica em um aço pilar . . . 2129
62.3.2 Cisalhamento modelo de falha (estado limite material) . . . 2129
62.3.2.1 Introdução . . . 2129
62.3.2.2 Cisalhamento estado limite modelo . . . 2130
62.3.3 Modelos histeréticos de Ibarra incorporando dissipação de energia 2134
62.3.3.1 Modelos de histerese . . . 2139
62.3.3.1.1 Modelo de pico orientado . . . 2140

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

62.3.3.1.2 Modelo Pinching . . . 2141
62.3.3.2 Modos de degradação da força . . . 2146
62.3.3.2.1 Modo básico de degradação da força . . . 2149
62.3.3.2.2 Modo de degradação da força pós-copiação . . . 2150
62.3.3.2.3 Descarregando o modo de degradação . . . 2152
62.3.3.2.4 Recarregando aceleradamente o modo de degradação rigidez . . . 2153
62.3.3.3 Resumo . . . 2154
62.3.4 Modelo de Ghannoum . . . 2155
62.3.4.1 Curva de espinha dorsal . . . 2155
62.3.4.2 Comportamento cíclico . . . 2155

63 Ciência e Arte da Modelo 2159
63.1 Introdução . . . 2160
63.1.1 Elemento finito verificação de malha/análise . . . 2163
63.1.2 Conceitos de verificação e validação do modelo . . . 2163
63.2 Geração da malha . . . 2165
63.2.1 Macroelementos . . . 2166
63.2.1.1 Ex 63.1: Pilar modelagem . . . 2170
63.2.1.2 Ex 63.2: Viga modelagem . . . 2171
63.2.2 Seção transversal . . . 2171
63.2.3 "Pegue e cacete" . . . 2172
63.2.4 Considerações finais . . . 2172
63.3 Determinações dos parâmetros de deterioração . . . 2173
63.3.1 Calibração . . . 2173
63.3.1.1 Identificações de parâmetros . . . 2174
63.3.2 Banco de dados dos parâmetros de modelagem . . . 2174
63.3.2.1 Peer/Berry . . . 2174
63.3.2.1.1 Propriedades . . . 2176
63.3.2.1.2 Resumo das capacidades de flexão . . . 2178
63.3.2.1.3 Exemplo . . . 2178
63.3.2.2 Stanford/Lignos . . . 2178
63.3.2.3 UTSA/Ghannoum . . . 2182
63.3.2.4 Continuum elemento finito/Dolati . . . 2182
63.3.2.5 ACI-437-A . . . 2182

Intermezzo: Da análise para a identificação do parâmetro 2183

64 Dados e Dúvidas: Incertezas e análise de sensibilidade 2186
64.1 Introdução . . . 2187
64.2 Qualidade dos dados e fontes de dúvida . . . 2187
64.3 incerteza Quantificação e Análise . . . 2188
64.3.1 Caracterização da incerteza de entrada . . . 2188
64.3.1.1 Tipos de incertezas . . . 2189

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

64.3.1.2 Representação Matemática . . . 2189
64.3.2 Dependência e Amostragem Correlacionada . . . 2190
64.3.2.1 Covariância e Correlação . . . 2190
64.3.2.1.0.1 Ex 64.1: Matriz de correlação . . . 2190
64.3.2.2 Covariância espacial . . . 2191
64.3.2.3 Covariância temporal . . . 2192
64.3.2.4 Gerando amostras correlacionadas . . . 2193
64.3.3 Propagação da incerteza . . . 2193
64.3.3.1 Simulação de Monte Carlo (MCS) . . . 2193
64.3.3.2 Amostra de hipercubos latinos (LHS) . . . 2193
64.3.3.2.0.1 Ex 64.2: Hipercubo latino: Trabalhou como exemplo com duas variáveis . . . 2196
64.3.3.3 Alternativas aproximadas e substitutas para amostragem direta . . . 2198
64.3.3.3.1 Método de Estimativa de Pontos (PEM) . . . 2198
64.3.3.3.1.1 Ex 64.3: Exemplo do Método Estimativo de Pontos . . . 2199
64.3.3.3.2 Um de cada vez (série de Taylor-diferença finita estimativa TSFD) . . . 2199
64.3.3.3.2.1 Ex 64.4: Taylor Series Diferença finita Método Exemplo . . . 2200
64.3.3.3.3 Expansão do caos polinomial (PCE) . . . 2201
64.3.3.3.3.1 Ex 64.5: Expansão do caos polinomial . . . 2202
64.3.4 Interpretação da incerteza de saída . . . 2203
64.4 Análise de Sensibilidade . . . 2203
64.4.1 Método Morris . . . 2204
64.4.1.1 Ex 64.6: Método Morris . . . 2208
64.4.2 Índices de Sensibilidade Baseados em Variância Sóbol . . . 2209
64.4.2.1 Índices de primeira ordem . . . 2209
64.4.2.2 Interação e índices de efeito total . . . 2210
64.4.2.3 Interpretação . . . 2210
64.4.2.4 Computação e custo . . . 2210
64.4.2.5 Relação com a exibição de Morris . . . 2211
64.4.3 Comparação dos métodos de propagação e sensibilidade . . . 2211
64.4.4 Determinação de importantes variáveis aleatórias . . . 2211
64.4.4.1 Ex 64.7: Método Morris. identificação de variáveis importantes . . . 2212
64.4.5 Diagramas de Tornado . . . 2216
64.5 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro . . . 2216

65 Decisões: Método de identificação do parâmetro 2219
65.1 Identificação do parâmetro como um problema inverso . . . 2220
65.2 Aplicações e Quadro de Decisão . . . 2221
65.2.1 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro . . . 2222

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

65.2.2 Quadro de decisão: Qual método quando? . . . 2222
65.3 Qualidade e Robustidade dos Dados . . . 2222
65.3.1 Fontes de Contaminação de Dados . . . 2222
65.3.2 Estimação do Consenso Robusto: RANSAC . . . 2223
65.3.2.1 Algoritmo . . . 2223
65.4 O Algoritmo de Marquardt . . . 2227
65.4.1 Abordagens de modelagem e seleção de modelos . . . 2227
65.4.2 Não linear ponderado Mínimos quadrados . . . 2228
65.4.3 Etapa de atualização de Levenberg–Marquardt e interpretação do algoritmo . . . 2228
65.4.4 Ex 65.1: Adaptando-se a um modelo hiperbólico não linear . . . 2228
65.4.5 Escala, limites e regularização . . . 2231
65.4.6 Identificação . . . 2231
65.4.6.1 Aproximação da incerteza local . . . 2232
65.4.7 Modelo Discrepância . . . 2233
65.5 Identificação do parâmetro bayesiano . . . 2233
65.5.1 Identificação do parâmetro bayesiano: Configuração . . . 2234
65.5.2 Estimativa de MAP e estimativas de pontos . . . 2234
65.5.3 Amostragem posterior e MCMC para parâmetros . . . 2235
65.5.4 Ex 65.2: Regressão bayesiana com base quadrática e Metrópolis.. . . . 2235
65.5.5 Exemplo trabalhado: Inferência Bayesiana para parâmetros de degradação . . . 2236
65.5.6 Quando usar a identificação Bayesiana . . . 2237
65.6 O algoritmo de Marquardt na prática . . . 2237
65.6.1 Prática dos mínimos quadrados . . . 2239
65.6.1.1 Programa de Identificação do Parâmetro MATLAB: Descrição 2239
65.7 Fluxos de trabalho híbridos e melhores práticas . . . 2248
65.7.1 Calibração e validação . . . 2248
65.7.2 Aplicações estruturais . . . 2248
65.7.3 Quadro de Decisão do Fluxo de Trabalho . . . 2248
65.8 Ponte para Engenharia sísmica baseada em desempenho . . . 2249

66 Intermezzo **2253**
66.1 Limitações do projeto de fatores de carga e resistência (LRFD) . . . 2253
66.2 Por que se mudar para Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) 2254
66.3 Os Quatro Componentes de PBEE . . . 2255
66.4 Estrutura do Livro . . . 2256

67 Análise de Riscos **2257**
67.1 Introdução . . . 2258
67.2 Relacionamento de recorrência . . . 2258
67.3 Modelo de atenuação . . . 2261
67.3.1 Fundamentos . . . 2261

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997) . . . 2262
67.3.3 Avaliação paramétrica . . . 2263
67.4 Análise de risco sísmico determinista . . . 2265
67.5 Análise de risco sísmico probabilístico . . . 2266
67.6 Hora da ocorrência . . . 2268
67.7 Curvas de perigo sísmico . . . 2268
67.8 Mapas de perigo sísmicos . . . 2270
67.9 Desagregação de riscos sísmicos . . . 2271
67.10 Alvo espectros de resposta . . . 2273
67.11 Simulação estocástica movimento do solo . . . 2276
67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal . . . 2277
67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) . . . 2279
67.12 Funções de excitação do tempo de perseverança . . . 2281
67.12.1 Primeira geração de ETEFs . . . 2282
67.12.2 Segunda geração de ETEFs . . . 2282
67.12.3 Terceira geração de ETEFs . . . 2284
67.12.4 Quarta geração de ETEFs . . . 2284
67.12.5 Quinta geração de ETEFs . . . 2285
67.13 Ex 67.1: Análise de riscos sísmicos . . . 2287

68 Análise de Risco Sísmico II **2292**
68.1 Introdução . . . 2293
68.2 Taxa anual de excessos . . . 2294
68.3 Curva de Perigo . . . 2295
68.4 Análise de risco sísmico da engenharia (ESRA) . . . 2296
68.4.1 Ex 68.1: Cálculos do Período de Retorno . . . 2297
68.5 Análise Probabilística de Risco Sísmico (PSHA) como SHA + ESRA . . . 2297

69 Análise estrutural **2300**
69.1 Introdução . . . 2301
69.2 Definições básicas . . . 2302
69.3 Capacidade e demanda . . . 2303
69.3.1 Exigir relações de capacidade . . . 2303
69.3.2 Métodos de estimativa da demanda . . . 2304
69.3.3 Princípios do projeto de capacidade . . . 2305
69.4 Métodos de análise sísmica . . . 2306
69.4.1 Análise de Push-Over (POA) . . . 2306
69.4.1.1 Ex 69.1: Exemplo de curva da demanda . . . 2312
69.4.1.2 Ex 69.2: Análise de push-over; Exemplo prático . . . 2313
69.4.2 Análise Dinâmica Incremental (IDA) . . . 2343
69.4.3 Análise de Múltiplas Listras (MSA) . . . 2345
69.4.4 Análise de Nuvem (CLA) . . . 2348
69.4.5 Análise do Tempo de Endurance (ETA) . . . 2349

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

69.4.6 Resumo . . . 2351
69.5 O que vem a seguir . . . 2353

70 Análise de Danos **2355**
70.1 Introdução . . . 2356
70.2 Estados limites . . . 2357
70.2.1 Hierarquia de Estados limites . . . 2358
70.2.2 Quadro Probabilístico . . . 2358
70.2.3 Implementação no Framework PBEE . . . 2359
70.2.4 Calibração e validação . . . 2359
70.2.5 Considerações Multi-Objetivo . . . 2359
70.2.6 Conexão com índices de danos . . . 2360
70.3 Índices de danos . . . 2360
70.3.1 Índices de danos e critérios de desempenho . . . 2360
70.3.2 Transição para avaliação de danos probabilísticos . . . 2362
70.3.3 Representação Probabilística de Danos . . . 2363
70.3.4 Métricas de Danos e Parâmetros da Demanda de Engenharia (PED) 2363
70.3.5 Região de Confiança Em Avaliação de Danos . . . 2364
70.3.6 métricas de danos quantitativos . . . 2364
70.4 Desempenhos . . . 2366
70.4.1 Estrutura de Engenharia Baseada em Desempenho . . . 2366
70.4.2 Níveis de Desempenho e Critérios de Aceitação . . . 2368
70.4.3 Integrando Estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho 2369
70.5 Transição para Curvas de fragilidade e avaliação de risco . . . 2371

71 Análise de perdas **2373**

72 Avaliação de Risco Probabilística (⊇ PBEE)[8] **2376**
72.1 Novos Paradigmas: Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) 2377
72.1.1 Limitações de carga e fator de resistência projeto (LRFD) . . . 2377
72.1.2 Parte I: Objetivos explícitos de desempenho . . . 2378
72.1.2.1 Método . . . 2378
72.1.2.2 Limitações de PBEE-1 . . . 2378
72.1.2.3 Design vs. Análise . . . 2380
72.1.3 Parte II: Quantificação direta das consequências funcionais e econômicas 2380
72.1.3.1 Introdução . . . 2380
72.1.3.2 Quadro geral . . . 2381
72.1.3.3 Diferenças entre o PBEE 1 e o PBEE 2 . . . 2383
72.1.4 Procedimento para implementação do PBEE . . . 2385
72.2 Da resposta aos danos: Curvas de fragilidade . . . 2386
72.2.1 Fundamentos e Definições . . . 2387
72.2.2 Desenvolvendo Curvas de fragilidade . . . 2388
72.2.3 Representações matemáticas . . . 2388
72.2.4 Função contínua *vs.* Matriz Discreta . . . 2389

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

72.3 Papel no Framework PBEE . . . 2391
72.4 Ex 72.1: Exemplo completo de PBEE . . . 2392
72.5 Marcos históricos e documentos fundamentais . . . 2397

APÊNDICES

Parte 1: Materiais Fundamentais de Referência

A Unidades **2400**
A.1 Si unidades . . . 2400
A.2 Prefixos métricos e multiplicadores . . . 2401
A.3 Unidades & fatores de conversão . . . 2401
A.4 Resumo da força, comprimento, trabalho e tensão em várias unidades métricas . . . 2402
A.5 Conversão de quantidades físicas da métrica para unidades imperiais . . . 2402

B Cargas, Design Empírico Baseado **2403**
B.1 Carregamentos mortos . . . 2404
B.2 O vento está carregado . . . 2404
B.2.1 Ex B.1: Carga do vento . . . 2406
B.3 Terremotos . . . 2407
B.3.1 Ex B.2: Terramoto, carga em um Pórtico . . . 2416
B.3.2 Ex B.3: Terremoto em um prédio alto . . . 2417
B.4 Cargas da ponte . . . 2418
B.5 Combinações de carga . . . 2419
B.6 Redução de carga ao vivo . . . 2420
B.6.1 Ex B.4: Redução de carga ao vivo I . . . 2421
B.6.2 Ex B.5: Redução de carga ao vivo II . . . 2422
B.7 Colocação de carga . . . 2422

C Equações Diferenciais Linear homogêneas **2424**
C.1 Resumo das equações diferenciais de governo . . . 2424
C.2 Soluções . . . 2425
C.3 Estabilidade I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ . . . 2426
C.4 Estabilidade ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2427
C.5 Viga base elástica; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2428

D Arcos elásticos; Análises Avançadas **2430**
D.1 Introdução . . . 2431
D.2 Arco circular de três torções . . . 2431
D.2.1 Procedimento de análise . . . 2432
D.2.2 Carga concentrada . . . 2433
D.2.3 Peso próprio . . . 2439
D.2.4 Carga uniformemente distribuída . . . 2443

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

D.2.4.1 Deflexão 2444
D.2.5 Arco circular de três torções: validação 2445
D.2.6 Conclusão 2447
D.3 Arco circular de duas dobradiças 2448
D.3.1 Procedimento de análise 2448
D.3.2 Carga concentrada 2448
D.3.3 Peso próprio 2459
D.3.4 Carga uniformemente distribuída 2467
D.3.5 Arco circular de duas voltas: validação 2471
D.3.6 Conclusão 2474
D.4 Arco circular sem dobras 2474
D.4.1 Procedimento de análise 2474
D.4.2 Carga concentrada 2475
D.4.3 Peso próprio 2488
D.4.4 Carga uniformemente distribuída 2496
D.4.5 Arco circular sem dobras: validação 2501
D.4.6 Conclusão 2503
D.5 Conclusão 2503

Parte 2: Tabelas de Análise e Projeto Estrutural

E Tabelas de análise cilíndricas **2506**

F Projeto do Barrel Casca Telhados **2519**

G Data Set da Ponte de Alamillo **2548**

H Identicons: hash visual **2552**
H.1 Introdução aos Identicons 2553
H.2 Algoritmos da Geração de Identicons 2554
H.3 GitHub vs. Implantações de Identicon da Bolsa Stack 2555
H.4 Nossa implementação MATLAB 2556
H.5 Segmentos do Código Central 2558
H.6 Usando o Programa 2559
H.7 Vantagens e Aplicações 2560
H.8 Conclusão 2561

Parte 3: Implementações de Código

I MATLAB®, Matemática Códigos **2562**
I.1 Parte I: Métodos de Análise Fundamental e Computacional 2564
I.1.1 Matriz estática de um treliça B 2564
I.1.2 Forma de arco St Louis 2566
I.1.3 Arbitrário três arcos circulares articulados; Mathematica 2568
I.1.4 Recolher arcos de alvenaria 2579

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

I.1.5 Principal . . . 2579
I.1.6 Grande desvio de uma viga . . . 2590
I.2 Parte II: Projeto estrutural e Análise . . . 2595
I.2.1 Desenho de cilíndrico cascas . . . 2595
I.2.2 Análise aproximada pórtico; método cantilever . . . 2607
I.2.3 Torção não uniforme . . . 2619
I.2.4 Ortogonal pórtico . . . 2621
I.2.5 Ortogonal híbrido pórtico . . . 2625
I.2.6 Pórtico; Conectado . . . 2628
I.2.7 Método da rigidez direta; pórtico . . . 2632
I.2.8 Código principal . . . 2632
I.2.9 Matriz de rigidez de membros não prismáticos . . . 2644
I.2.10 Linhas isostáticas . . . 2650
I.2.11 Desenho evolucionário . . . 2656
I.2.12 Principal . . . 2656
I.2.13 Pilar diagrama de interação . . . 2662
I.2.14 Métodos variados; Mathematica . . . 2665
I.2.15 Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral . . . 2676
I.2.16 Isoparamétrico elementos . . . 2678
I.3 Parte III: Modelagem material e comportamento constitutivo . . . 2689
I.3.1 Plástica incremental . . . 2689
I.3.2 Modelos constitutivos . . . 2693
I.3.3 Modelo bilinear . . . 2694
I.3.4 Endurecimento . . . 2698
I.3.5 Histerese . . . 2701
I.3.6 Giuffre monegotto pinto modificado . . . 2720
I.3.7 Parque Kent modificado . . . 2725
I.3.8 Ibarra . . . 2730
I.3.8.1 Histerese . . . 2730
I.3.8.2 Histerese belisca . . . 2749
I.3.9 Estado limite cisalhamento . . . 2771
I.4 Parte IV: Métodos e identificação de parâmetros . . . 2792
I.4.1 Programa de Identificação do Parâmetro . . . 2792
I.4.2 Programa principal e orquestração central . . . 2793
I.4.3 Integração de dados I/O e planilha . . . 2802
I.4.4 Otimização fluxo de trabalho e funções auxiliares . . . 2814
I.5 Parte V: Fundamentos numéricos e estatísticos . . . 2827
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . . 2827
I.5.2 Técnicas numéricas . . . 2828
I.5.3 FFT e filtros Butterworth . . . 2828
I.5.4 Decomposição em valores singulares . . . 2831

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

I.5.5 Pré-condicionamento . . . 2833
I.5.6 Consenso de amostragem aleatória (RANSAC) . . . 2835
I.5.7 Hipercubo latino . . . 2839
I.5.8 Regressão bayesiana com base quadrática . . . 2844
I.5.9 Simulação de Monte Carlo via cadeias de Markov . . . 2851
I.6 Parte VI: Otimização e ajuste de parâmetros . . . 2853
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . . 2853
I.6.2 Implementação personalizada . . . 2853
I.6.3 Uso da função incorporada . . . 2856
I.7 Parte VII: Confiabilidade sísmica e incerteza . . . 2858
I.7.1 Análise de perigo sísmico . . . 2858
I.7.2 Engenharia sísmica baseada em desempenho . . . 2861
I.8 Parte VIII: Utilidade . . . 2866
I.8.1 Identicon . . . 2866

J Exemplos do MathCad **2872**

Parte 4: Métodos Numéricos e Estatísticos

K Filtragem de Registros Sísmicos (Transformações de Fourrier Rápido) **3038**
K.1 Como calcular a transformação de Fourier . . . 3040

L Revisão da Álgebra Linear **3044**
L.1 Em matrizes . . . 3045
L.1.1 Definições . . . 3045
L.1.2 Operações de matriz elementar . . . 3046
L.1.3 Determinantes . . . 3047
L.1.4 Inversão . . . 3048
L.2 Soluções de equações lineares . . . 3049
L.2.1 Estratégias . . . 3049
L.2.2 Descomposição . . . 3049
L.2.2.1 Eliminação de Gauss . . . 3050
L.2.2.2 Eliminação Gauss-Jordan . . . 3050
L.2.2.3 **LU** Descomposição . . . 3051
L.2.2.4 A decomposição de Cholesky . . . 3053
L.2.2.5 Decomposição de valor singular . . . 3054
L.2.2.6 Decomposição QR . . . 3056
L.2.3 Métodos indiretos . . . 3056
L.2.3.1 Gauss Seidel . . . 3056
L.3 Características matriciais e melhorias computacionais . . . 3057
L.3.1 Singularidade e hierarquia . . . 3057
L.3.2 Autovalores e autovetores . . . 3058
L.3.3 Número da condição . . . 3059
L.3.4 Pré-condicionamento . . . 3059

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

L.3.4.1 Pré-condicionamento esquerdo . . . 3060
L.3.4.2 Pré-condicionamento direito . . . 3061
L.4 Exemplos . . . 3062
L.4.1 Ex L.1: Eliminação de Gauss . . . 3063
L.4.2 Ex L.2: Eliminação Gauss-Jordan . . . 3063
L.4.3 Ex L.3: **lu** Descomposição . . . 3064
L.4.4 Ex L.4: A decomposição de Cholesky . . . 3065
L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel . . . 3066
L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel . . . 3067
L.4.7 Ex L.7: Decomposição de valor singular . . . 3068
L.4.8 Ex L.8: Pré-condicionamento . . . 3069

M Probabilidade e Estatística **3072**
M.1 Introdução à probabilidade e estatística . . . 3072
M.2 Conceitos fundamentais em probabilidade . . . 3073
M.2.1 Determinista *vs.* Probabilística . . . 3073
M.2.2 Definição . . . 3074
M.2.3 Probabilidade condicional . . . 3074
M.2.4 Tipos de variáveis aleatórias . . . 3075
M.3 Ferramentas estatísticas para análise de probabilidade . . . 3075
M.3.1 Função de distribuição cumulativa . . . 3077
M.3.2 Intervalo de confiança . . . 3077
M.4 Medidas estatísticas . . . 3078
M.4.1 Momentos e medidas de tendência central . . . 3078
M.4.2 Relações entre variáveis . . . 3081
M.5 Distribuição . . . 3082
M.5.1 Distribuições univariadas . . . 3082
M.5.1.1 Comparação . . . 3085
M.5.2 Distribuição Bivariada . . . 3087

N Índice de confiabilidade **3090**

Parte 5: Teoria Avançada e Otimização

O Mecânica de Corpos Deformáveis, um Primer **3097**
O.1 Introdução . . . 3098
O.1.1 Notação . . . 3098
O.1.2 Tensores . . . 3100
O.1.2.1 Operações . . . 3101
O.1.2.2 Rotação de eixos . . . 3102
O.1.2.3 Transformação de tensores . . . 3104
O.1.2.4 Valores principais dos tensores simétricos de segunda ordem 3104
O.1.3 Interpretação física de invariantes tensão . . . 3106
O.2 Campos de vetor; mecânica de corpos deformáveis . . . 3107

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O.2.1 Forças . . . 3107
O.2.2 Tensor de Cauchy tensão . . . 3108
O.2.2.1 Tensores hidrostáticos e desviatórios . . . 3110
O.2.2.2 Representação geométrica de tensão estados . . . 3110
O.2.3 Cinemática . . . 3111
O.2.3.1 Posição e deslocamento . . . 3111
O.2.3.2 Deformações . . . 3112
O.3 Leis fundamentais de mecânica do contínuo . . . 3114
O.3.1 Leis de conservação . . . 3114
O.3.2 Fluxos . . . 3115
O.3.3 Conservação da massa; equação de continuidade . . . 3116
O.3.4 Conservação do momento; equação de movimento . . . 3116
O.3.5 Conservação de energia; Primeiro princípio da termodinâmica . . . 3119
O.4 Equações constitutivas . . . 3121
O.4.1 Caso geral em 3D . . . 3121
O.4.2 Caso isotrópico transversamente . . . 3123
O.4.3 Casos especiais em 2D . . . 3123
O.5 Observações fenomenológicas . . . 3124
O.5.1 Carregar, deslocamento e testes de controle . . . 3124
O.5.2 Resposta pré/pós-pico do material de aço e concreto . . . 3125
O.6 Localização da deformação . . . 3127
O.6.1 Provas experimentais . . . 3127
O.6.1.1 σ- Diagrama de bacalhau, modelo de Hillerborg . . . 3127
O.7 Condições de contorno . . . 3130
O.8 Diagrama Tonti . . . 3131
O.9 Conceito de esforço interno . . . 3133

P Homenagem a Westergaard **3134**
P.1 Campo da ponta de crack tensão . . . 3135
P.1.1 Função Airy Tensão . . . 3135
P.1.2 Solução . . . 3137
P.2 Interação da estrutura de fluidos . . . 3142

Q Região de Confiança e Métodos Levenberg-Marquardt **3156**
Q.1 Região de confiança . . . 3157
Q.2 Algoritmo . . . 3161
Q.3 Formulação em MATLAB® . . . 3161
Q.4 Visualização em tempo real . . . 3164

R Vetor Cálculo; Um Primer **3165**
R.1 Definições básicas . . . 3166
R.1.1 Derivação para um escalar . . . 3166
R.1.1.1 Ex R.1: Tangente para uma curva . . . 3168
R.1.2 Divergência . . . 3168

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

R.1.2.1 Vetor . . . 3168
R.1.2.1.1 Ex R.2: Divergência de um vetor . . . 3170
R.1.2.2 Tensor de segunda ordem . . . 3170
R.1.3 Gradiente . . . 3171
R.1.3.1 Campo escalar . . . 3171
R.1.3.1.1 Ex R.3: Gradiente de um campo escalar I . . . 3171
R.1.3.1.2 Ex R.4: Gradiente de um campo escalar ii . . . 3172
R.1.3.2 Campo de vetor . . . 3173
R.1.3.2.1 Ex R.5: Gradiente de um campo vetorial . . . 3174
R.2 Teoremas integrais . . . 3174
R.2.1 Integral de um vetor . . . 3174
R.2.2 Linha integral . . . 3175
R.2.3 Integração por partes . . . 3175
R.2.4 Gauss; Teorema da divergência . . . 3175
R.2.4.1 Ex R.6: Interpretação física do teorema da divergência . . . 3176
R.2.5 Teorema de Stoke . . . 3177
R.2.6 Verde; Teorema do gradiente . . . 3177
Referências das Partes II–IV **3178**

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lista de figuras (I-IV)

1.1 Roteiro para engenharia estrutural 8

2.1 Matemática babilônica 14
2.2 Doodle do Google no Dia de π (14/3/2026); homenagem a Arquimedes . . 17
2.3 EuclidesÉ a definição do *Proporção extrema e média* 18
2.4 Tokens de argila mesopotâmica: Precursores da escrita (c. 3500 a.C.) 19
2.5 Evolução da cuneiforme a partir de pictográfica (c. 3200 a.C.) para abstrair sinais silábicos (c. 2000 a.C.) 20
2.6 Hieróglifo egípcio 20
2.7 A Pedra de Rosetta (196) a.C., carregando o mesmo decreto em hieróglifo, demótico e grego (de cima para baixo), era a chave para decifrar o antigo script egípcio 22
2.8 O alfabeto fenício (c. 1050 a.C.), mostrando os 22 sinais consoantes, seus nomes, e sua descida em letras gregas e latinas 22
2.9 Genealogia de alfabetos: de Phoenician (c. 1050 a.C.) para grego, latim, árabe, hebraico, e brâmane famílias script 23

3.1 Clay na Mesopotâmia 27
3.2 Pirâmides maias e astecas 28
3.3 Templos e pirâmides egípcias 29
3.4 Geometria egípcia e proporções de pirâmide 30
3.5 Heródoto na travessia do Bósforo pelos persas, (Herodotus, 1921) 36
3.6 Pérsia 37
3.7 Árabe-Islâmico 39
3.8 Grécia 40
3.9 Construções romanas emblemáticas 45
3.10 Regras de proporcionalidade vitruviana 46
3.11 Índia, China, Japão 49

4.1 Catedrais emblemáticas 53
4.2 Elementos estruturais da Catedral 55
4.3 Comparação dos perfis do arco romano e gótico (Ching, 2011) 56
4.4 Exemplos de mastros voadores em catedrais góticas (Kim, 2016) 57

CÓPIA PARA REVISÃO

4.5 Catedral gótica seção transversal (Ching, 2011) . . . 57
4.6 Típico arco (Ochsendorf, 2002) . . . 58
4.7 Forçar transferências através de contrafortes voadores . . . 58
4.8 Comportamento do cofre (Hassan Fangary, 2010) . . . 59
4.9 Geometria de buttress voadora (Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005) . . . 59
4.10 Linhas mínimas e máximas de impulso (Kim, 2016) . . . 60
4.11 Linhas de impulso ativas e passivas (baseadas em (Heyman, 1966)) . . . 60
4.12 Avaliação cinemática da estrutura do arco e mecanismo de falha (Hassan Fangary, 2010) . . . 62
4.13 Análise fotoelástica de cofres góticos . . . 62
4.14 Relógio astronómico de Beauvais . . . 65
4.15 Análise comparativa da seção transversal (altura da nave e sistema de apoio) de: (a) Catedral de Notre-Dame, Paris; b) Catedral de Amiens; e c) Catedral de Beauvais (desenho do autor baseado em estudos seccionais por Viollet-le-Duc, 1854). . . . 65
4.16 Análise pós colapso de 1284 falhas . . . 67
4.17 Reconstrução de Beauvais após 1284 colapso . . . 68
4.18 Esboços geométricos de Villard de Honnecourt *Carneta*, ilustrando regras e sistemas de proporção (De Honnecourt, 2006) . . . 72
4.19 Duomo de Milão . . . 73
4.20 Esquemas de proporção para desenhos sucessivos . . . 74
4.21 A observação de Poleni sobre rachaduras na cúpula de São Pedro (Poleni, 1748) . . . 77
4.22 A analogia da cadeia pendurada de Poleni (Poleni, 1748) . . . 78
4.23 Reforço da cúpula (Poleni, 1748) . . . 79
4.24 A Sagrada Família de Gaudi . . . 80
4.25 *Spina pesce* e loxodrome tijolo layout . . . 82
4.26 Santa Maria del Fiore construção cúpula . . . 84
4.27 O guincho de Brunelleschi (King, 2010) . . . 85

5.1 Bayt al-Hikma . . . 91
5.2 Três flautas perpétuas, esquerda dos baldes inclinando, equilíbrio central e no flutuador direito. Manuscrito Topkapi, 1206 . . . 91
5.3 Obras seminais da Revolução Científica, de Galileu, Newton, Bacon e Hooke 99
5.4 Ciência Institucional . . . 100
5.5 Linha do tempo da ascensão da razão científica . . . 102

6.1 Leonardo da Vinci . . . 120
6.2 O espelho de Leonardo explicou . . . 121
6.3 Palladio (Palladio, 1570) . . . 130
6.4 *Traité des ponts* (Gautier, 1765) . . . 133
6.5 Pont du gard . . . 133
6.6 Pontes de Perronet . . . 137

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

6.7 Rankine, 1862 's avaliando as dimensões das pedras-chave . . . 138
6.8 Diálogos de Galileu Galilei (Galilei, 1632) . . . 145
6.9 Galileo Galilei . . . 146
6.10 Galileu está escalando ossos (Galilei, 1638) . . . 147
6.11 Hooke e o relógio . . . 153
6.12 Hooke tem 1675 anagramas *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676) . . . 154
6.13 A ilustração de Hooke da flexão elástica de *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678) . . . 156
6.14 Mola helicoidal com pesos suspensos. Esta ilustração icônica é comumente atribuída a Hooke, embora sua origem não seja clara; A figura reproduzida aqui é tirada de Andrade, 1950 . . . 157
6.15 Isaac Newton . . . 160
6.16 A árvore genealógica de Bernoulli (membros destacados são discutidos neste livro) e seu círculo intelectual . . . 166
6.17 A ilustração de Navier sobre pontes suspensas . . . 184
6.18 Navier e Telford (pontes) . . . 185
6.19 Os manuais de Rankine conectam mecânica aplicada e engenharia civil . . . 192
6.20 James Clerk Maxwell . . . 195
6.21 Histórico Linha do tempo: Cientistas, Artistas, Músicos, Autores e Políticos (1000-2020) . . . 217

7.1 Estudos de força axial de Leonardo e Galileu . . . 225
7.2 Os caminhos de Galileu em direção ao seminal cantilevered viga . . . 226
7.3 Experimentos Musschenbroek (Musschenbroek, 1739) . . . 228
7.4 Duas linhagens paralelas à flexão tensões . . . 229
7.5 Os esboços de Leonardo, Folio 9v . . . 230
7.6 Os esboços de Leonardo, Folio 20v, (Zammattio, 1980) . . . 231
7.7 O cantilever de Galileu . . . 232
7.8 A explicação de Galileu para a força . . . 233
7.9 Deflexão de uma fábrica rígida . . . 233
7.10 Modelo conceitual inspirado na mecânica geométrica de Leibniz (Leibniz, 1684) . . . 236
7.11 Modelos de Mariotte (Heyman, 1998b) . . . 237
7.12 A ilustração de Girard dos modelos de Galileu e Mariotte . . . 238
7.13 Modelo dos pais . . . 238
7.14 Experiências de Coulomb (Coulomb, 1773c) . . . 239
7.15 Terceira regra do meio de Young . . . 242
7.16 Extrato das anotações de Saint-Venant em (Clebsch, 1862b) . . . 244
7.17 Euler, Bernoulli e Hooke se reúnem (Euler, 1862) . . . 248

8.1 Osculando círculos de uma parábola . . . 254
8.2 A curvatura de Oresme . . . 255

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

8.3 A derivação da curvatura de Newton . . . 257
8.4 Leibniz *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b) . . . 258
8.5 A derivação da curvatura de Johann Bernoulli . . . 259
8.6 A derivação da curvatura de Jakob Bernoulli . . . 263
8.7 Pêndulo isocrônico de Huygens (Huygens, 1673) . . . 268

9.1 Os protagonistas de Elastica . . . 275
9.2 Leibniz sobre o escopo do cálculo (Leibniz, 1858, p. 2–3). . . . 277
9.3 Os esboços de Leonardo para a catenária de (Truesdell, 1960) . . . 280
9.4 Catenária; Christiaan Huygens (Huygens, 1888b) . . . 283
9.5 Jakob Bernoulli *Funicularia* Desafio (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219) . . . 286
9.6 Leibniz responde a Huygens, oct, 1690 (Leibniz, 1923) . . . 288
9.7 Junho de 1691 *Atua erudite* soluções para o desafio catenário de Jakob Bernoulli 291
9.8 O desafio de Bernoulli, (Bernoulli, Jakob, 1690a) . . . 297
9.9 O elástico de Jakob Bernoulli . . . 299
9.10 Os arquitetos da teoria elástica: Os luminários matemáticos de Basel (Wikipedia) . . . 299
9.11 A Curvatura Laminae Elasticae de Jakob Bernoulli... (Bernoulli, Jakob, 1694) 300
9.12 A objeção de Huygens 1694 à solução de Bernoulli. . . . 305
9.13 Desafio de brachistochrone de Johann Bernoulli (Bernoulli, Johann, 1696) 310
9.14 Johann Bernoulli's 1697 solução do desafio braquistochrone (Bernoulli, Johann, 1697a) . . . 311
9.15 A carta de Daniel Bernoulli para Euler, (**DanielBernoulli1742toEuler**) . . . 314
9.16 O tratado de Euler 1744 sobre o cálculo das variações (Euler, 1744b) . . . 318
9.17 O método direto de Euler ''diagrama de corpo livre" . . . 322
9.18 Euler's elástico "espécie" em termos do parâmetro de carga c^2/a^2 . . . 327
9.19 Operadores diferentes e diferenciais . . . 334
9.20 O desafio anônimo de 1724 em *Acta Eruditorum*, assinado misteriosamente como "LBC" (Anonymous, 1724) . . . 337
9.21 Daniel Bernoulli e Leonhard Euler, o inovador 1728 publicações (Euler, 1728). . . . 339
9.22 A análise de Bernoulli mostra os efeitos de carga auto-pesados e aplicados . 339
9.23 Euler, 1732 *Solutio problematis de invenienda curva* . . . 340
9.24 Os primeiros estudos de compressão focaram em fenômenos de instabilidade axial. . . . 349
9.25 Papel Seminal de Euler em flambagem (Euler, 1759) . . . 350
9.26 Euler, 1759 declaração da carga crítica flambagem . . . 351
9.27 Euler "grand-unifying" papel, (Euler, 1771) . . . 354
9.28 O diagrama de Euler para o equilíbrio geral de uma linha (Euler, 1771). . 354

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

10.1 O argumento do tetraedro de Cauchy. Um tetraedro infinitesimal é cortado do corpo, com três faces perpendiculares aos eixos de coordenadas e uma face inclinada com unidade normal **n**.. Equilíbrio do tetraedro, à medida que seu tamanho diminui para zero, produz a relação $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. 375
10.2 Forças de superfície 375
10.3 Cauchy: tetraedro para tensão 376

11.1 Maney, formulação de 1915 do método de deflexão da inclinação (Maney, 1915) 419
11.2 O método de 1873 de Seidel de sucessivas aproximações para resolver sistemas lineares (Seidel, 1873). Embora matematicamente sadio, faltava-lhe a interpretação física que os engenheiros procuravam. 420
11.3 Hardy Cross papéis transformadores 421
11.4 Adaptação de Goldberg 1934 da inclinação-deflexão para análise da carga do vento (Goldberg, 1934) 422
11.5 Método de relaxamento de Southwell (Southwell, 1935) 423
11.6 Da física newtoniana (topo) através de equações de campo (média) até princípios variacionais lagrangianos (baixo). 429

12.1 O trabalho experimental de Pearson em barragens (Pearson et al., 1907) . . . 439
12.2 Análise de diferenças finitas de Richardson para um problema de represa tensão (Richardson, 1911) 439
12.3 Aeronaves comerciais da década de 1950 443
12.4 O problema da asa delta e tentativas de solução precoce 443
12.5 Detalhes de.. Levy, 1953 445
12.6 Matrix análise estrutural (Turner et al., 1956) 446
12.7 Comparação de força e aproxima-se (Argyris e Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968) 448
12.8 Courant apresenta *Funcreções de teste* (Courant, 1943) 450
12.9 Fundamentos matemáticos do método dos elementos finitos 453
12.10 O jornal de Clough 1960 nomeando o método dos elementos finitos (Clough, 1960) 454
12.11 Norfork Dam elemento finito análise (Clough, 1962; Clough e Wilson, 1962) 456
12.12 Primeira análise não linear elemento finito (Wilson, 1960) 457
12.13 Primeira análise dinâmica (Wilson e Clough, 1962) 457
12.14 Fundadores modernos do método dos elementos finitos 460
12.15 Generalização do método dos elementos finitos para múltiplas disciplinas físicas: Apesar das diferentes equações governantes, todas produzem a mesma estrutura algébrica 461

13.1 Ábaco tradicional chinês (suanpan) 469
13.2 Regras de slides da faculdade do autor 470

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

13.3 Leibniz é um juiz desmedido . . . 470
13.4 Calculadora eletrônica Casio (ca. 1970) . . . 471
13.5 A primeira calculadora do autor . . . 472
13.6 Máquina Analítica de Babbage . . . 473
13.7 Analisador diferencial de Bush . . . 474
13.8 Computador ENIAC . . . 474
13.9 Cartões de soco e processamento em lote . . . 477
13.10 Eample of MathCad . . . 481

14.1 Deidades associadas à força na antiguidade . . . 488
14.2 Grandes influenciadores do conceito de força . . . 491
14.3 Empédocles (sobre) . . . 491
14.4 Prova de Arquimedes da lei da alavanca . . . 496
14.5 Buridan, Oresme . . . 502
14.6 Leonardo, Benedetti, Galileu, Kepler, Descartes, Leibniz, Newton . . . 504
14.7 Noções de equilíbrio por Pardies, 1710 . . . 506
14.8 Simon Stevin (1548-1620) . . . 507
14.9 A principal publicação de Stevin (Stevin, 1586) . . . 507
14.10 A representação de Stevin de um corpo apoiado por uma ou duas cordas; (Stevin, 1586) e.. (Miller, 2017) . . . 508
14.11 Stevin's *Clootcrans* Demonstração. . . . 508
14.12 Estudo de avião inclinado de Galileu (Galilei, 1594) . . . 513
14.13 Cálculos Kepler (Kepler, 1855) . . . 516
14.14 René Descartes (1596-1650) . . . 517
14.15 Axioma de Torricelli . . . 523
14.16 Bernoulli em paralelograma de forças (Bernoulli, Daniel, 1726) . . . 529
14.17 As velocidades geométricas de Johann Bernoulli, (Bernoulli, Johann, 1725) 532
14.18 Noções de equilíbrio por Varignon, 1725 . . . 533
14.19 D'Alembert sobre a controvérsia vis viva: Uma disputa que ele considera inútil, mas brevemente abordada (d'Alembert, 1743) . . . 534
14.20 D'Alembert em movimento como o único fundamento da mecânica (d'Alembert, 1743) . . . 535
14.21 D'Alembert no paralelograma de forças (d'Alembert, 1743) . . . 536
14.22 As últimas observações de D'Alembert sobre o paralelograma das forças (d'Alembert, 1773) . . . 537
14.23 A prova de Lagrange do princípio das velocidades virtuais usando blocos de polia (depois (Salençon, 2018)) . . . 542
14.24 Carnot ilustra sistemas de corpos, movimentos geométricos e mecânica do impacto (Carnot, 1803) . . . 544

15.1 Vitruvius . . . 555
15.2 Evolução das regras empíricas para o projeto da ponte de arco (depois (Huerta, 2018)). . . . 558

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

15.3 Galileu desafia Vitruvius (Galilei, 1632) . . . 559
15.4 Projeto da ponte renascentista: Regras geométricas de Alberti e exemplos documentados de Palladio (Huerta, 2018) . . . 568
15.5 Palladio's *Quatro livros de arquitetura* (Palladio, 1570) . . . 570
15.6 Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier . . . 574
15.7 Sistemas antropométricos de proporção: Da geometria medieval ao humanismo renascentista ao modernismo do século XX . . . 577
15.8 Plano de Panagia Koumbelidiki (Kastoria, 10 c.) com *ad quatratum* Rastreando (Oikonomou, 2022) . . . 578
15.9 Seção de Notre-Dame de Paris com *ad triangulum* Rastreando (Oikonomou, 2022) . . . 579
15.10 Análise do plano Parthenon (Oikonomou, 2022) . . . 579
15.11 Banho otomano em Florina (18o C.) Retirada depois Oikonomou, 2022 . . . 583
15.12 Le Corbusier *Ingénieur-architecte* pictograma (Pierrefeu e Corbusier, 1942). . . 585
15.13 Ilustrações de l'Orme (De l'Orme, 1561) . . . 588
15.14 Ilustrações de Willis, 1910 . . . 589
15.15 Transferência de carga em arcos . . . 590
15.16 Gustave Eiffel: A torre e a ponte . . . 591
15.17 Robert Maillart . . . 595
15.18 Notre Dame Raincy de Perret (1923) . . . 596
15.19 Torroja, Zarzuela Hipódromo . . . 599
15.20 *L'Ingegnere* Pier Luigi Nervi . . . 601
15.21 Exemplos de linhas isostáticas . . . 604
15.22 Nervi e arquitetura biomimética . . . 604
15.23 Nervi: Engenheiro estrutural e material . . . 607
15.24 As estruturas icônicas de Nervi . . . 608
15.25 Riccardo Morandi . . . 609
15.26 Ponte Sunniberg de Menn . . . 610
15.27 Os edifícios icônicos de Khan . . . 614
15.28 A investigação de Poleni sobre St. A redoma de Peter está rachando (Poleni, 1748) . . . 618
15.29 A Sagrada Família de Gaudí . . . 619
15.30 O Arco da Porta de Saarinen . . . 620
15.31 Frei Otto . . . 621
15.32 Exemplos modernos de pesquisa de formas através de modelos físicos . . . 621
15.33 Ponte de Musmeci sobre o rio Basento . . . 623
15.34 Estruturas recíprocas: Conceitos ilustrativos . . . 624
15.35 Primeiros exemplos de estruturas recíprocas . . . 625
15.36 Análises de estruturas recíprocas por Wallis, 1695 . . . 625
15.37 Salão de Exposições Seiwa (Japão) (Popovic, 1996) . . . 626
15.38 Parametrização de um módulo recíproco (Popovic, 1996) . . . 627
15.39 Desenhos ideais (Michell, 1904) . . . 629

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

15.40 Michell treliça . . . 630
15.41 Otimização da topologia estrutural (Beghini et al., 2014) . . . 630
15.42 Félix Candela é hiperbólico-parabolóide cascas . . . 636
15.43 Bilbao Guggenheim de Frank Gehry e a escultura de Richard Serra . . . 637
15.44 Calatrava: elegância estrutural na Ponte Alamillo contra a visualmente complicada Estação Lyon Saint-Exupéry TGV. . . . 639
15.45 Yamasaki e Robertson: De Seattle protótipo para influência global . . . 643
15.46 Baker e Burj Khalifa: Sofisticação computacional a serviço da ambição arquitetural (Baker, Skidmore et al., 2013) . . . 646
15.47 Virlogeux e o Viaduto Millau: Poesia estrutural em escala sem precedentes (Virlogeux et al., 2005) . . . 648
15.48 Sistemas estruturais alternativos para pontes com cabos de vários canais, todos rejeitados por Virlogeux por razões estéticas (Virlogeux et al., 2005) 648
15.49 Arquitetura como arte pura: Forma liberada da expressão estrutural . . . 651
15.50 Função e beleza: A caneta e a ponte . . . 651
15.51 Arte estrutural autêntica: estrutura como expressão pura . . . 652
15.52 Da celebração à crítica: Perspectivas evolutivas sobre criatividade estrutural 656

16.1 Estrutura temática do capítulo . . . 660
16.2 Exemplos de *Namazu-e* Impressões retratando o peixe-gato gigante responsável por terremotos (Miyata e Takada, 1995) . . . 662
16.3 Objetos cerimoniais da costa noroeste do Pacífico representando sísmico Espíritos. . . . 665
16.4 *Israel no Monte Sinai* (1703) por Jan Luyken. A gravura ilustra a teofania sísmica como uma total reviravolta ambiental, onde o irregular, instável A renderização dos picos sugere o tremor violento da terra em resposta a A presença divina. . . . 669
16.5 Apedrejamento do Apóstolo Filipe em Hierápolis, Frígia (Jan Luyken, 1685). 670
16.6 A Batalha de Jericó (c. 1560) por Virgil Solis (Coleção Kozac). . . . 671
16.7 O mito de Enceladus . . . 674
16.8 Tholos de Delphi, um templo circular construído entre 380 e 360 aC dentro do Santuário de Athena Pronaia em Delphi, Grécia. . . . 676
16.9 Ícone russo do século 18 que retrata o milagre do Arcanjo Miguel em Chonae.677
16.10 Serpentes cósmicas como forças estabilizadoras e protetoras em hindu e budista Iconografia. . . . 680
16.11 Tradução caligráfica de Surah 99:1-8 (*Al-Zalzalah*) . . . 682
16.12 O *Piedra del Sol* (Aztec Sun Stone), com o *Ollin* glifo no seu centro. . . . 685
16.13 O Santuário de Kashima (Prefeitura de Ibaraki), sede da *Takemikazuchi-no-kami* e o principal local da sísmica xintoísta ritual de proteção no Japão pré-moderno. . . . 686
16.14 Um talismânico *Namazu-e* Impressão retratando *Takemikazuchi-no-kami* Submetendo o bagre. . . . 687

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

16.15 Lisbonne, antes e depois . . . 699
16.16 Gibellina destruída e enterrada em concreto . . . 706
16.17 Gibellina Nuova . . . 707
16.18 Cueva de la Serpiente mural, Sierra de São Francisco, Baja California. . . . 709
16.19 Pictógrafos na Caverna Pintada de Chumash, Montanhas Santa Ynez, Califórnia. . . . 709
16.20 Duas respostas artísticas à catástrofe sísmica . . . 711
16.21 Contribuições selecionadas para a Coleção Amelio . . . 712

17.1 Análise estrutural; O quadro geral . . . 848
17.2 Tipos de forças em elementos estruturais (1d) . . . 854
17.3 Aspectos básicos dos sistemas de cabos . . . 854
17.4 Aspectos básicos dos arcos . . . 855
17.5 Tipos de.. . . . 855
17.6 Variações nas configurações pós e vigas . . . 856
17.7 Diferentes viga tipos . . . 856
17.8 Formas básicas de pórticos . . . 857
17.9 Exemplos de estruturas suportadas pelo ar . . . 858
17.10 Formas básicas de cascas . . . 858
17.11 Sequência de cursos de engenharia estrutural . . . 860

18.1 Mapa de neve dos Estados Unidos . . . 863
18.2 Airfoil, equação de Bernoulli. . . . 864
18.3 Mapa do vento dos Estados Unidos . . . 865
18.4 Efeito da carga do vento nas estruturas . . . 866
18.5 Mapa sísmico dos Estados Unidos . . . 867
18.6 Terra e cargas hidrostáticas em estruturas . . . 870
18.7 Cargas projetadas . . . 875
18.8 Colocação de carga para maximizar momentos . . . 876
18.9 Transferência de carga em prédios R/C . . . 878
18.10 Uma ou duas ações em lajes . . . 879
18.11 Mecanismos de transferência de carga em catedrais góticas e arcos rasos . . . 880
18.12 Conceito de áreas afluentes para carregamento estrutural dos membros . . . 881
18.13 Carregar a vida de uma estrutura, (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 883

19.1 Exemplos de limites de reações . . . 887
19.2 Equilíbrio de momentos, de Leonardo (Da Vinci, 1490), para Calder . . . 889
19.3 Reações inclinadas apoio móvel . . . 890
19.4 Grau de indeterminação estática . . . 890
19.5 Reações são simultâneas . . . 891
19.6 Diagramas de corpos livres de uma viga submetido a diferentes cargas . . . 892

20.1 Estaticamente indeterminado treliça . . . 913

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

20.2 Relação entre forças e comprimentos . . . 914
20.3 Apresentando forças com flechas . . . 915
20.4 Método de união/matriz, diagramas de corpos livres . . . 924
20.5 Complexo estaticamente determinado treliça . . . 925

21.1 Interno tensões . . . 932
21.2 Esforços internos em rectilinear e curvado vigas . . . 934
21.3 Esforços internos . . . 936
21.4 Cisalhamento e convenções de sinal momento para design . . . 936
21.5 Convenções de sinais de design . . . 936
21.6 Diagrama de corpo livre de um segmento infinitesimal viga . . . 937
21.7 Variações de carga, e momentos . . . 939

22.1 Curvatura e deformações . . . 964
22.2 Convenção de sinais para o método da área de curvatura para curvaturas opostas da viga . . . 976
22.3 Métodos da área de curva . . . 976
22.4 Deflexão máxima usando o método de área do momento . . . 980
22.5 Conjugar vigas . . . 986

23.1 Deformação pura cisalhamento . . . 991
23.2 Elemento Infinitesimal submetido a cisalhamento tensão . . . 991
23.3 Cisalhamento tensão e coeficiente . . . 993
23.4 Relações de rotação da torção . . . 996
23.5 Por que a dobra ocorre . . . 998
23.6 Torção não uniforme (McGuire e Winter, 1968)) . . . 999
23.7 I viga submetido a torção . . . 1001

24.1 Forças virtuais e reais em uma estrutura arbitrária . . . 1008
24.2 Maxwell-Betti teorema recíproco . . . 1011

25.1 Estaticamente indeterminada estrutura de 3 cabos . . . 1037
25.2 Cantilever equipado viga . . . 1039
25.3 Problema ilustrativo para o método flexibilidade . . . 1040
25.4 Ilustração do método flexibilidade com duas desconhecidas . . . 1042
25.5 Exemplos de estruturas inspiradas por rainhas . . . 1058
25.6 Equação de três momentos, derivação . . . 1063
25.7 Equação de três momentos, termos de carga . . . 1065

26.1 Assinar convenção para o método rigidez . . . 1070
26.2 Formulação de problemas de flexão para termos rigidez . . . 1072

27.1 Exemplo ilustrativo para o método de deflexão da inclinação . . . 1080
27.2 Conceitos-chave da distribuição do momento . . . 1091

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

28.1 MüPrincípio de Iler-Breslau 1104

29.1 Estabilidade de uma barra rígida 1117
29.2 Estabilidade de uma barra rígida com imperfeição inicial 1118
29.3 Biapoiado viga pilar; Segmento diferencial; Efeito de força axial p 1120
29.4 Dois sistemas dinâmicos 1132
29.5 Comprimentos efetivos para viga e pórticos 1134
29.6 Pilares comprimentos eficazes em um multi-baia multi- andares pórticos . 1134
29.7 Gráfico de alinhamento para conexões semiflexíveis (American Institute of Steel Construction, 2016) 1135
29.8 Inelástico flambagem 1137
29.9 Euler flambagem, e curva de ssrc pilar 1137

30.1 Verificação da teoria do cabo 1142
30.2 Geometria do cabo # 1 1145
30.3 Geometria do cabo # 2 1147
30.4 Geometria de um cabo inclinado submetido a carga transversal horizontal uniforme 1153
30.5 Cabo rigidez 1154
30.6 Coordenadas de referência alternativas da catenária 1165
30.7 Catenária com acorde inclinado, (Cella, 1999) 1167
30.8 Comparação entre catenária e soluções parabólicas 1172

31.1 O que é um vousoir 1175
31.2 Análises do Arch de la Contrate 1176
31.3 Raízes quadráticas e cúbicas de grande número métodos por de Belidor, B. F., 1757 1177
31.4 A mesa de Belidor para dimensionar o suporte vertical (*Pied-droit*) de arcos de acordo com De La Hire; de Belidor, B. F., 1757 1177
31.5 Análises de arcos (de Belidor, B. F., 1729) 1179
31.6 Critérios de falha do Belidor (Brandonisio e De Luca, 2020) 1179
31.7 Análises de arcos (Couplet, 1729) 1181
31.8 Modelos de gesso de Danyzy, 1732 1181
31.9 Voussoirs sem fricção analisam por Coulomb, 1773 1183
31.10 O princípio de Moseley é a menor resistência (Moseley, 1869) 1184
31.11 Ponte Voussoir de Charles Mosca (turin) analisada por (Castigliano, 1879) 1185
31.12 Análise elástica do Winkler de arcos (Winkler, 1880) 1185
31.13 Aparelho experimental usado por Pippard, Tranter e Chitty, 1936 para investigar a estabilidade dos arcos de vooussóis. 1186
31.14 Fracasso gradual de um vousoir Pippard, Tranter e Chitty, 1936 1187
31.15 Voussoirs analisa por Pippard e Baker, 1943 1188
31.16 Fluxo de forças através dos blocos em um arco 1193
31.17 Determinação do conjunto de forças na origem 1195

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

31.18 MATLAB®Gerou sequência de dobradiças em um vousoir 1197
31.19 Mecanismos de colapso; impulsos do pilar (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF) .1200
31.20 Polígono funicular invertido e linha de impulso correspondente e excentricidade 1201
31.21 Modo de falha de três dobradiças semicirculares 1202
31.22 Sequência de locais de dobradiças 1202

32.1 Momento resistindo forças em um arco ou sistema de suspensão, em comparação com uma viga, (Lin e Stotesbury, 1981) 1205
32.2 Estáticos de um arco de três torções 1206
32.3 Dois arcos articulados, analogia com a extremidade fixa (Lin e Stotesbury, 1981) 1213
32.4 Centro de gravidade de um vousoir 1222
32.5 Equilíbrio de um vousoir infinitesimal 1223
32.6 Arco parabólico ideal para uma carga uniforme 1228
32.7 Arco parabólico sem dobras; diagrama de corpo livre 1235
32.8 Efeito da fixação inicial e mudança de temperatura 1239
32.9 Escadaria em espiral no museu Louis (paris), e Catedral Sagrada Família (Barcelona) 1247
32.10 Geometria da estrutura curva no espaço 1247
32.11 Diagrama de corpo livre de uma estrutura curva no espaço 1248

33.1 Deslocamentos e tensões em uma placa 1253
33.2 Esforços internos 1256
33.3 Tensão distribuição 1261
33.4 Equilíbrio de uma placa circular elemento infinitesimal 1265

34.1 Elemento diferencial casca, geometria, tensões, e seus resultados 1273
34.2 Cinemática de elemento diferencial 1273
34.3 Equilíbrio do elemento diferencial casca 1275
34.4 Elemento diferencial casca, V_x tensão resultados 1279
34.5 Elemento diferencial, curvaturas principais 1280
34.6 Elemento diferencial, estado inicial e deformado 1284
34.7 Elemento diferencial, estado inicial e deformado; cisalhamento deformação causado pelo aumento no comprimento dos lados positivos 1286
34.8 Elemento diferencial, estado inicial e deformado; Rotação 1287
34.9 Superfície média do elemento diferencial 1289
34.10 Classificação de cascas 1299
34.11 Exemplos de cascas onde a suposição da membrana é (principalmente) válida .1300
34.12 Diagramas de corpo livre de hiperboloide e dome elemento infinitesimal .1300
34.13 Diagrama de corpo livre de um elemento circular infinitesimal casca 1303
34.14 Tensão distribuição resultante em uma circular completa casca 1306
34.15 Efeito de borda 1308

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34.16 Carga de linha aplicada corretiva em circular casca 1309
34.17 Sine série enredo 1309
34.18 Analogias estaticamente indeterminadas 1327
34.19 Circular cascas descansando em um suporte elástico 1329

35.1 O oscilador idealizado de um único grau de liberdade 1350
35.2 Curvas de amplificação dinâmica conceitual para um oscilador SDOF amortecido sob força harmônica 1358
35.3 Aceleração espectro de resposta S_a Como uma função do período natural T_n para várias proporções amortecimento. 1368
35.4 Primeiros três formas modais de um biapoiado 1371
35.5 Histerese elastoplástica bilinear em loop sob carga cíclica simétrica. 1378

36.1 Interações iterativas do engenheiro arquiteto-estrutural 1389
36.2 Exigência e capacidade em uma viga 1390
36.3 Segurança 1390
36.4 Distribuição de probabilidade funções de C e.. D 1393
36.5 Probabilidade de fracasso em termos de β 1395
36.6 Estado limite análise de uma seção rachada concreto armado 1396
36.7 Whitney tensão bloco 1398
36.8 Pilar corpo livre e diagramas de interação 1406
36.9 Pilar corpo livre, condição equilibrada 1407

38.1 Rotações de canto compatíveis 1434
38.2 Desvio de um simples viga 1434
38.3 Deflexão do portal pórtico com rígido pilares sob carga vertical 1434
38.4 Deflexão do portal pórtico sob carga vertical 1435
38.5 Exemplo de portal pórtico sujeito a carga lateral 1435
38.6 Forma defletida e diagrama do momento; Portal pórtico com carga lateral .1436
38.7 Deflexões em termos de rigidez de suporte 1437
38.8 Pórtico sob carga vertical; Localização aproximada dos pontos de inflexão .1439
38.9 Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais; Momentos de vigas 1440
38.10 Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais; pilar forças axiais 1441
38.11 Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais 1441
38.12 Análise aproximada de pórticos submetidos a cargas laterais; pilar cisalhamento 1443
38.13 Análise aproximada de pórticos submetidos a cargas laterais; Momento da viga 1443
38.14 Cisalhamento deformação em um edifício curto,(Lin e Stotesbury, 1981) . .1465
38.15 Deformação de flexão em um prédio alto, (Lin e Stotesbury, 1981) 1465

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

38.16 Deflexão em uma estrutura de construção composta por duas paredes finas e lintéis, (Lin e Stotesbury, 1981) 1466
38.17 Deformação de uma dobrada (Lin e Stotesbury, 1981) 1467
38.18 Cisalhamento e deflexão flexural de um subsistema rígido pórtico, (Lin e Stotesbury, 1981) 1468
38.19 Deflexão lateral da carga vertical não simétrica, (Lin e Stotesbury, 1981) 1468

40.1 Tempo dependente deformação; Arrepio e encolhimento 1517
40.2 Construindo cargas térmicas 1517
40.3 Convenção de Assinatura, Design e Análise (Fig. 26.1) 1518
40.4 Elementos esforços internos e Dof local 1519
40.5 Independente deslocamentos 1520
40.6 Sistema de coordenadas local e global 1520
40.7 Graus de indeterminação estática e cinemática 1522
40.8 Problema de valor limite 1524

41.1 Definição do termo rigidez K_{ij} 1526
41.2 Rigidez coeficientes para vários tipos de elementos 1526
41.3 Elemento 3D viga-pilar 1529
41.4 Individual rigidez termos em um 3D viga-pilar elemento 1531
41.5 Deformação parasitária causada por deformações impostas 1533
41.6 Forças finais e deslocamentos de um elemento de torção com contenção de dobra 1536

42.1 Viga exemplo para comparar os métodos flexibilidade e rigidez 1538
42.2 Exemplo de viga para determinar o grau de indeterminação cinemática 1540

43.1 Local$\mathbf{k}^e$) e global ($\mathbf{K}^e$) Elemento matrizes de rigidez 1564
43.2 Matriz de transformação para um 2D viga-pilar 1564
43.3 Transformação do vetor 3D arbitrário 1566
43.4 2D pórtico rotação de elementos com relação a Z (ou z) 1568
43.5 Rotação do elemento da grade 1569
43.6 Matriz de transformação para o vlasov viga 1570
43.7 2D treliça rotação 1571
43.8 Rotação 3D reduzida 1573
43.9 Caso especial de transformação 3D para membros verticais 1574
43.10 Rotação complexa em 3D 1575

44.1 Dof sem restrições e constrangido 1582
44.2 Exemplo de discretização estrutural 1582
44.3 Exemplo para **[ID]** Determinação da matriz 1584
44.4 Exemplos de **LM** Tarefas 1585
44.5 Assembléia do processo global matriz de rigidez 1586

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

45.1 Mapeamento de deslocamentos em forças 1603
45.2 Mapeando uma unidade deslocamento círculo em uma elipse de força, (Gavin, 2012). 1604
45.3 Problema do teste de autovalor 1607
45.4 Assemblage de membros resultando em mal-condicionado **K** 1609
45.5 Matrizes condicionadas em termos K_1 K_2 1610
45.6 Importância da numeração nodal 1613
45.7 Requisitos de armazenamento para a estrutura matriz de rigidez 1614

46.1 Cinemática de um elemento treliça 1626
46.2 Elemento estável e estaticamente determinado 1630
46.3 Viga com deslocamento rígido 1642
46.4 Fbd de viga com deslocamento rígido 1643
46.5 Flexível, rígida e semi-rígida vigas 1645
46.6 Deformações de um semi-rígido vigas 1646
46.7 $\overline{K}_{22}$ Coeficiente para conexões semi-flexíveis 1649
46.8 Extratos do manual de constantes pórtico (Portland Cement Association, 1947) 1650
46.9 Viga com seção variável 1651
46.10 Seção com profundidade linear variável; Estudo paramétrico 1652
46.11 Seção com profundidade variável parabólica; Estudo paramétrico 1653

47.1 Operadores diferentes e diferenciais 1668
47.2 Exemplos de essenciais e naturais condições de contorno 1673
47.3 Tonti diagrap para o método de energia potencial total 1679
47.4 Diagrama Tonti para Hu-Washizu, (Červenka, 1994) 1692
47.5 Diagramas de Tonti para Lagrange, Hamilton e D'Alembert 1693

48.1 Definição da tração 1698
48.2 Deformação e densidades de energia complementares deformação 1699
48.3 Energia potencial 1701
48.4 Efeitos da história de carga em U e.. W_i 1702
48.5 Diagramas ilustrativos dos princípios de obras virtuais e complementares 1710
48.6 Minimizações em mecânica quântica e clássica 1721
48.7 Resumo dos métodos de variação 1740
48.8 A dualidade dos princípios variacionais 1741

49.1 Sistema de coordenadas naturais em linha reta 1746
49.2 Sistema de coordenadas naturais para um triângulo 1747
49.3 Integração sobre um triângulo 1749
49.4 Axial elemento finito 1750
49.5 Elemento triângulo constante deformação 1752
49.6 Elemento retangular bilinear 1754
49.7 Funções de forma para 4 nós quadriláteros elemento 1755

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

49.8 Elemento retangular trilinear sólido 1755
49.9 Funções de forma para 3 nós elemento triangular linear 1758
49.10 Elemento de barras quadráticas com três nós 1758
49.11 Flexural elemento finito 1759
49.12 Funções de forma para flexão de elemento uniforme viga. 1761
49.13 Elemento 4 nós isoparamétrico 1765
49.14 Serendipity e quadrilatros quadráticos Lagrangianos 1766
49.15 Triângulos Pascal para elementos quadrilaterais e triângulos 1766
49.16 Serendipity isoparamétrico quadrática: Elemento global e pai 1767
49.17 Funções de forma para 8 nós quadriláteros elemento 1768
49.18 Funções de forma para 9 nós quadriláteros elemento 1771
49.19 Numeração nodal para elementos isoparamétricos 1771
49.20 Funções de forma para 6 nós elemento triangular quadrático 1773

50.1 Completude e compatibilidade 1781
50.2 h, p e.. r convergência 1783
50.3 Continuidade do interelemento de tensão 1784
50.4 Continuidade do interelemento de deformação 1785

51.1 Mapa bidimensional de alguns elementos 1787
51.2 Elementos reais e pais 1787
51.3 Iso, super e sub-paramétrico elementos 1789
51.4 Elemento diferencial no sistema de coordenadas curvilíneas 1793
51.5 Produto cruzado de dois vetores 1793
51.6 Elemento com possíveis jacobianos singulares 1794
51.7 Integração numérica Newton-Cotes 1799
51.8 Integração Gauss-Leendre sobre uma superfície 1804
51.9 Integração numérica sobre um triângulo 1805
51.10 Extrapolação de 4 nós quad gauss pontos (Felippa, 1999) 1806
51.11 Carregamento de gravidade 1808
51.12 Carga de tração em elementos isoparamétrico 1809
51.13 Carga de tração em elementos contíguos isoparamétrico 1810
51.14 Modos independentes para um elemento bilinear 1812
51.15 Modos hourglas em elemento quadrático subintegrado 1813
51.16 Elemento retangular bilinear submetido à flexão; Elemento bilinear e geometria correta 1814
51.17 Deslocamentos associado com modos incompatíveis para o elemento q6 . 1815
51.18 Lado deslocamentos induzido pela perfuração do D.O.F 1816

53.1 Axial *vs* Rigidez da flexão 1838
53.2 Redução de sem restrições quando axial é ignorada 1839
53.3 Modelo de construção para carga sísmica 1839
53.4 Diagrama de corpo livre de um nó 1840

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

53.5 Massa e rigidez proporcional amortecimento 1846
53.6 Euler para a frente vs Euler métodos atrasados 1851

54.1 Não linearidade geométrica, grande deflexão exemplo**B**), 29.2.3 1874
54.2 Não linearidade material, fibras**D**) 1874
54.3 Não linearidade material, seção (**D**) 1874
54.4 Linear *vs.* Análises não lineares 1875
54.5 Tipos de.. 1877
54.6 Curva de deflexão de carga e varia gama de resposta 1880
54.7 Códigos de design na antiguidade 1882
54.8 *Beton-reglement f uEisenbetonbau* 1884
54.9 Exemplos de códigos modernos de design 1885
54.10 Níveis de desempenho 1887
54.11 Comparação de várias estruturas de design 1888

55.1 Superfície de escoamento; Definição 1891
55.2 Modelos independentes de pressão hidrostática 1891
55.3 Pressão dependente superfícies de escoamento 1893
55.4 Modelos dependentes de pressão hidrostática 1894
55.5 Tensão-deformação de metais; Efeito baushinger 1895
55.6 Micro-cracks de concreto 1896
55.7 Ligações químicas 1897
55.8 Títulos delicados e frágeis 1897
55.9 Deslocamento 1898
55.10 Resposta elastoplástica 1899
55.11 Modelos endurecidos 1901

56.1 Arbitrário seção transversal considerado para a determinação de $M - \Phi$ . .1923
56.2 Procedimento incremental para determinar $M - \Phi$ analiticamente 1924
56.3 Momento curvatura e momento diagramas força axial (interação) 1930
56.4 Discretização de um seção transversal em camadas 1931
56.5 Abordagem incremental para determinar $M - \Phi$ numericamente 1932

57.1 Rende as linhas em lajes 1955
57.2 Determinação das linhas de rendimento em retangular lajes 1957
57.3 Solução estática de ligação inferior *V.S* Análise do Pushover 1961

59.1 Método Newton 1973
59.2 Esquema de integração explícito 1980
59.3 O método de Newton explicou (para controle de carga) 1983
59.4 Método Newton-Raphson para controle de carga 1985
59.5 Método de Newton-Raphson modificado, tangente inicial 1987
59.6 Incremental secante, método quase-newton 1987
59.7 O método de Newton. carga versus controle deslocamento 1992

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59.8 O método de Newton. deslocamento controle (compare com a figura 59.3) .1992
59.9 Método Newton-Raphson; deslocamento controle 1993

60.1 Níveis de análise estrutural 2009
60.2 Explícita abordagem incremental à não linearidade geométrica 2009
60.3 Determinação da carga flambagem sem geometria matriz de rigidez 2015

61.1 Sistema de coordenadas para 2D treliça 2021
61.2 Esforços internos e correspondente deslocamentos para o método baseado em 2D rigidez 2026
61.3 Determinação do estado para o método baseado em rigidez 2028
61.4 Fluxograma de análise não linear usando o método baseado em rigidez . .2031
61.5 Seções de fibra - distribuição de seções de controle e subdivisão de seção em fibras 2035
61.6 Distribuição transversal não linear tensão 2036
61.7 Elemento 2D sem modos rígidos de corpo 2038
61.8 Assinar convenção na seção de força 2039
61.9 Esforços internos e correspondente deslocamento para o método baseado em 2D flexibilidade 2041
61.10 A relação entre os modos rígidos do corpo e nenhum modo rígido do corpo2041
61.11 Determinação do estado para o método baseado em flexibilidade sem iteração de elementos 2043
61.12 Determinação do Estado (Taucer, Spacone e Filippou, 1991a) 2046
61.13 Determinação do estado de elementos e seção 2047
61.14 Fluxograma de análise não linear usando método baseado em flexibilidade w/o elemento iteração 2059
61.15 Fluxograma de análise não linear usando método baseado em flexibilidade w/elemento iteração 2060
61.16 Comparação de rigidez baseado *vs.* flexibilidade formulação baseada . . .2061
61.17 Elemento 2D de comprimento zero 2063
61.18 Gráfico de fluxo do elemento 2D de comprimento zero para determinação do estado do elemento 2064
61.19 Elemento de seção de comprimento zero, equilíbrio 2066
61.20 Sistema de coordenadas para o elemento de seção de comprimento zero . .2068
61.21 Fluxograma para elemento de seção zero 2069

62.1 Modelos de plasticidade misturados e distribuídos 2074
62.2 Modelos histeréticos 2075
62.3 Comparação de módulo Tangent; plasticidade vs. Menegotto-Pinto 2077
62.4 Determinação para o modelo bilinear 2079
62.5 Comparação dos modelos de carga cíclica reversa: plasticidade *vs.* Menegotto-Pinto 2080
62.6 Menegotto pinto (Menegotto e Pinto, 1973) Modelos de aço 2080

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.7 Determinação (1) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2083
62.8 Determinação (2) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2084
62.9 Determinação (3) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2085
62.10 Determinação (4) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2086
62.11 Efeito de confinamento na resistência do concreto (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928) . . . 2087
62.12 Confinada *vs.* Resistência ao concreto compressivo não confinada (Mander, Priestley e Park, 1988) . . . 2088
62.13 Papel dos estribos no fornecimento de confinamento de concreto . . . 2088
62.14 Modelo de material concreto em compressão . . . 2090
62.15 Modelo de material concreto sob carga cíclica em compressão . . . 2093
62.16 Modelo de material concreto sob carga cíclica em tensão . . . 2095
62.17 Determinação (1) para o modelo de kent e parque modificado . . . 2098
62.18 Determinação (2) para o modelo de kent e parque modificado . . . 2099
62.19 Cracks induzidos por compressão, tensão, tensão e compressão . . . 2101
62.20 Deformação-tensão curva para modelo de dano anisotrópico sem permanente deformação . . . 2107
62.21 Determinação (1) para o modelo de dano anisotrópico . . . 2108
62.22 Determinação (2) para o modelo de danos anisotrópicos . . . 2109
62.23 Determinação (3) para o modelo de dano anisotrópico . . . 2110
62.24 Deformação-tensão curva para modelo de dano anisotrópico com permanente deformação . . . 2114
62.25 Modelo de escorregar . . . 2115
62.26 Modelo de ligação simplificado . . . 2116
62.27 Curva de deslizamento da ligação . . . 2117
62.28 Localização de linha neutra . . . 2118
62.29 Identificação das zonas plásticas . . . 2120
62.30 Deflexão da deformação flexural de um elemento . . . 2121
62.31 Efetivo momento de inércia em R/C . . . 2123
62.32 Localização de comprimentos de plástico (Park e Paulay, 1991) . . . 2125
62.33 Dica deslocamento de um R / C cantilevered viga com a suposição de plasticidade grudada . . . 2126
62.34 Dica deslocamento de um aço cantilevered viga com a suposição de plasticidade grudada . . . 2128
62.35 Modelo de plasticidade com falha cisalhamento . . . 2131
62.36 Estado limite cisalhamento falha . . . 2131
62.37 Cisalhamento resposta primavera . . . 2132
62.38 Estado limite pilar resposta . . . 2133

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.39 Respostas individuais . . . 2134
62.40 Ciclo de histerese representativo . . . 2135
62.41 Perda de força suavizante . . . 2136
62.42 Degradação da força cíclica reversa . . . 2136
62.43 Histerese modelo espinha dorsal . . . 2138
62.44 Curva de espinha dorsal para flexão (Ghannoum, 2020) . . . 2139
62.45 Modelos peak-orientados e beliscantes . . . 2140
62.46 Ciclo básico de modelo orientado para o pico . . . 2141
62.47 Reversão de carga e atualização do estado alvo . . . 2141
62.48 Aumentando a história de carga cíclica seguindo o modelo orientado para o pico . . . 2142
62.49 Ciclo básico do modelo de pinching . . . 2143
62.50 Determinação do ponto de ruptura . . . 2143
62.51 Determinação do primeiro ponto de ruptura . . . 2145
62.52 Atualização do ponto de interrupção . . . 2145
62.53 Recarregando além do ponto de ruptura . . . 2146
62.54 Aumentando o histórico de carga cíclica seguindo o modelo de beliscão . . . 2147
62.55 Resultados do laboratório estrutural da UCSD (Ibarra, 2004) . . . 2148
62.56 Modo básico de degradação da força . . . 2149
62.57 Modo de degradação da força pós-copiação . . . 2151
62.58 Descarregando o modo de degradação . . . 2152
62.59 Desativando a interrupção . . . 2153
62.60 Recarregando aceleradamente o modo de degradação rigidez . . . 2154
62.61 Curva de espinha dorsal (Ghorbani et al., 2022) . . . 2156
62.62 Modelo de histerese baseada em curvas cúbicas (Suselo, 2021) . . . 2157

63.1 Elemento finito processo (inspirado por Bathe, 1996) . . . 2160
63.2 Complexidade de modelo uniformemente distribuída . . . 2161
63.3 Pitfalls da análise linear comparada com a análise não linear . . . 2162
63.4 Elementos finitos para análise não linear de pórticos . . . 2166
63.5 Pilar conexão final . . . 2167
63.7 Pilar-viga conexões . . . 2168
63.6 Viga ou pilar elementos . . . 2169
63.8 Seção transversal modelando em camadas . . . 2172
63.9 Modelo de cantilever idealizado de rc viga-pilar (Haselton et al., 2016) . . . 2175
63.10 Tipos de confinamentos (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) . . . 2175
63.11 Interface gráfica do usuário para o banco de dados de desempenho estrutural (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) . . . 2176

64.1 Comparação de MCS e LHS . . . 2195
64.2 Exemplo de uma trajetória para $k = 2$. . . . 2205
64.3 Sobrepondo ou aglomerando pontos de diferentes trajetórias Morris. . . . 2206
64.4 Variável aleatória e sua função de distribuição cumulativa (CDF). . . . 2207

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64.5 Resposta periódica de uma variável aleatória x_i.. Tamanhos fixos podem não detectar variações periódicas. 2207
64.6 Comparação dos métodos de trajetória (a) e ponto radial (b) $k = 3$ RVs em hiperespaço quântico. 2208
64.7 Inicialização e pós-inicialização no procedimento de rastreamento do ponto radial modificado 2213
64.8 Exemplo de sensibilidade (Gakuhari, 2021) 2217
64.9 Análise de sensibilidade identifica parâmetros candidatos; A identificação dos parâmetros determina os valores suportados pelas observações 2217

65.1 Princípio da abordagem de identificação do sistema: Refinamento iterativo de parâmetros para minimizar discrepância modelo-dados. 2221
65.2 Exemplo ilustrativo de regressão linear com RANSAC 2224
65.3 RANSAC aplicado à degradação do concreto: Estudo de caso (Gakuhari, 2021) 2225
65.4 Fluxograma do procedimento de identificação do parâmetro 2238
65.5 Interface gráfica para uma única função residual e cinco variáveis. Veja Fig. 65.7 para um exemplo mais abrangente. 2239
65.6 Arquivo de dados de entrada para o Levenberg... Otimização não linear dos mínimos quadrados 2242
65.7 Painel para o Levenberg, otimização não linear de mínimos quadrados. 12 alvos previstos e 8 variáveis. 2245
65.8 Integração da caracterização do local, desenvolvimento de modelos, incerteza, identificação dos parâmetros, análise estrutural, e avaliação da fragilidade 2250

66.1 Quatro componentes de PBEE 2256

67.1 A lei de recorrência do Gutenberg-richter 2259
67.2 Classificação de fontes sísmicas 2261
67.3 Classificação das distâncias de local a fonte 2264
67.4 Investigação paramétrica em GPS 2264
67.5 Análise de risco sísmico determinista 2265
67.6 Análise de risco sísmico probabilístico 2267
67.7 O modelo de probabilidade de Poisson 2269
67.8 Amostra de curvas sísmicas de risco 2269
67.9 Amostras de nós mapas perigosos 2271
67.10 Amostras de parcelas sísmicas para a universidade de pedra colorada . . 2272
67.11 Comparação de diferentes espectros de resposta 2273
67.12 Comparação de seleção e escala para IPPA, SBPA e TBPA 2275
67.13 Amostra etef 2283
67.14 Cav of eta40lc01 versus alvo 2285
67.15 Energia histerética de ETA20kd01 contra alvo 2286

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

68.1 Curva de perigo. O enredo esquerdo ilustra o conceito de períodos de retorno, enquanto o plano direito mostra uma curva de perigo para um local específico. . . . 2295
68.2 Análise de risco sísmica da engenharia . . . 2298
68.3 Análise de Riscos Sísmicos Probabilísticos (PSHA). . . . 2298

69.1 Probabilisitc natureza de capacidade e demanda . . . 2304
69.2 Curva de capacidade . . . 2307
69.3 Cargas laterais para análise push-over . . . 2309
69.4 Localização e imagem da ponte . . . 2314
69.5 Pilares e dimensões do píer . . . 2316
69.6 Seções transversais dos pilares e do eixo . . . 2317
69.7 Relação tensão-deformação para carregamento monotônico de concreto confinado e não confinado (Mander, Priestley e Park, 1988) . . . 2318
69.8 Forma deformada do pilar e diagrama de curvatura; adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 . . . 2319
69.9 Curvações de momento e momentos plásticos . . . 2320
69.10 Espectro de resposta análise (C_S) . . . 2324
69.11 Deslocamento espectro de resposta análise . . . 2324
69.12 Permissíveis elementos resistentes ao terremoto (AASHTO, Seismic, 2011) 2326
69.13 Reforçando o modelo de aço tensão-deformação . . . 2328
69.14 Curvação do momento (adaptada de (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2330
69.15 Distribuição do momento na altura do píer . . . 2331
69.16 Forma deformada do pilar e diagrama de curvatura; adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 . . . 2331
69.17 Modelo Risa . . . 2334
69.18 Diagrama de interação para os três necessários . . . 2336
69.19 Momentos de plástico . . . 2336
69.20 Definição do eixo de Caltran(CALTRANS, 2013) . . . 2338
69.21 Modelo elástico modificado após formação do primeiro rótula plástica . . 2340
69.22 Modelo elástico modificado após formação do segundo rótula plástica . . 2341
69.23 Mecanismo de colapso com formação de 4 rótulas plásticas . . . 2342
69.24 Colapso conceitual baseado no método IDA . . . 2346
69.25 Colapso conceitual baseado no método MSA . . . 2348
69.26 Geração de função de capacidade baseada em ETA . . . 2351
69.27 Destaque de quatro estratégias diferentes (Hariri-Ardebili, Saouma e Porter, 2016) . . . 2354
69.28 Complexidades relativas da análise sísmica . . . 2354

70.1 Relacionamentos entre um DI e dois DVs (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 2365
70.2 PBEE: A Grande Imagem . . . 2366
70.3 Objetivos de desempenho sísmico mínimos recomendados para edifícios (Porter, 2003) . . . 2369

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

72.1 Descrição conceitual da primeira geração de PBEE; (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003) . . . 2379
72.2 Ilustrações discretas de níveis de desempenho, (FEMA, 2012) . . . 2379
72.3 Quatro componentes de PBEE . . . 2382
72.4 Comparação de fragilidade sísmica, vulnerabilidade e curvas de perigo . 2388
72.5 Relação entre curva de fragilidade e matriz de probabilidade de dano . . 2390
72.6 Diferentes aspectos da fragilidade sísmica . . . 2391

B.1 Efeito da carga do vento nas estruturas (Schueller, 1996) . . . 2405
B.2 Pressão aproximada do vento para resistência à força de vento . . . 2406
B.3 Vibrações de um prédio . . . 2408
B.4 Zonas sísmicas dos Estados Unidos, (ICBO, 1994) . . . 2409
B.5 Carregar o caminhão . . . 2418
B.6 Colocação de carga para maximizar momentos . . . 2423

D.1 Geometria do arco circular . . . 2432
D.2 Arco circular de três torções sob carga concentrada . . . 2433
D.3 Relacionamento de β com respeito a θ . . . 2435
D.4 Fbd de três torções, arco circular sob carga concentrada . . . 2435
D.5 Lotes de esforços internos para arco circular de três torções sob carga concentrada . . . 2438
D.6 Arco circular de três voltas sob o próprio peso . . . 2439
D.7 Um arco circular de três voltas sob o peso próprio . . . 2440
D.8 Tramas para arco circular de três voltas sob o peso próprio . . . 2442
D.9 Tramas para arco circular de três torções sob carga uniformemente distribuída . . . 2445
D.10 Arco circular de três torções sob auto-peso vs. Série de carga concentrada 2446
D.11 Arco circular de três torções sob uniformemente distribuir carga vs. série de carga concentrada . . . 2446
D.12 Sap 2000 - diagrama momentâneo de arco circular triangulado sob o peso próprio . . . 2446
D.13 Sap 2000 - força axial diagrama de arco circular com três torções sob o peso próprio . . . 2446
D.14 Sap 2000 - força cortante diagrama de arco circular com três torções sob o peso próprio . . . 2447
D.15 Arco circular de três torções sob auto-peso vs. Udl . . . 2447
D.16 Arco circular de três torções sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensã 2447
D.17 Arco circular de duas voltas sob carga concentrada . . . 2449
D.18 Arco circular de duas pontas após remover o impulso redundante no pilar b 2450
D.19 Arco circular de duas voltas com força virtual aplicada . . . 2452
D.20 Fbd do arco circular original de duas voltas sob carga concentrada . . . 2455
D.21 Fbd para calcular a deflexão em arco circular de duas voltas . . . 2458
D.22 Tramas para arco circular de duas voltas sob carga concentrada . . . 2459

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

D.23 Arco circular de duas voltas sob o próprio peso . . . 2460
D.24 Fbd de arco circular de duas pontas após remover o impulso redundante no pilar b′ . . . 2461
D.25 Fbd do arco circular original de duas voltas sob o peso próprio . . . 2465
D.26 Tramas para arco circular de duas voltas sob auto-peso . . . 2467
D.27 Traços para arco circular de duas voltas sob Udl . . . 2471
D.28 Arco circular de duas voltas sob peso próprio vs. Série de carga concentrada 2472
D.29 Arco circular de duas voltas sob uniformemente distribuir carga vs. Série de carga concentrada . . . 2472
D.30 Sap 2000 - diagrama momentâneo de dois arcos circulares sob auto-peso 2472
D.31 Sap 2000 - diagrama de dois arcos circulares sob o peso próprio . . . 2473
D.32 Sap 2000 - diagrama de dois arcos circulares sob o peso próprio . . . 2473
D.33 Arco circular de duas voltas sob peso próprio vs.udl . . . 2473
D.34 Arco circular de duas voltas sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão 2474
D.35 Arco circular sem dobra sob carga concentrada . . . 2475
D.36 Arco circular sem dobras com momento virtual no 'b' . . . 2478
D.37 Arco circular sem dobras com momento virtual em 'a' . . . 2478
D.38 Fbd do arco circular original sem dobradiças sob carga concentrada . . . 2484
D.39 Lotes para arco circular sem dobradiças sob carga concentrada . . . 2488
D.40 Arco circular sem dobra sob o próprio peso . . . 2489
D.41 Esforços internos em arco circular sem dobradiças . . . 2493
D.42 Lotes para arco circular sem dobradiças sob o peso próprio . . . 2496
D.43 Tramas para o arco circular sem dobradiças sob Udl . . . 2501
D.44 Arco circular sem dobra sob auto-peso vs. Série de carga concentrada . . . 2501
D.45 Arco circular sem dobra sob uniformemente distribuir carga vs. Série de carga concentrada . . . 2502
D.46 Sap 2000 - diagrama momentâneo de arco circular sem dobradiças sob o peso próprio . . . 2502
D.47 Sap 2000 - força axial diagrama de arco circular sem dobradiças sob auto-peso 2502
D.48 Sap 2000 - força cortante diagrama de arco circular sem dobradiças sob auto-peso . . . 2502
D.49 Arco circular sem dobra sob o peso próprio vs.udl . . . 2503
D.50 Arco circular sem dobra sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão 2503

K.1 Exemplos de sinais filtrados em Butterworth . . . 3039
K.2 Comparação de filtros Butterworth para vários n . . . 3040

M.1 Interconexão de conceitos incorporados na análise probabilística (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3073
M.2 O conceito de espaço amostra e eventos mutuamente disjuntos (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) . . . 3074
M.3 Comparação de histogramas devido a 100 amostras por três vezes . . . 3076
M.4 Comparação de histogramas devido a 1.000 a 100.000 amostras . . . 3076

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

M.5 Exemplos de três funções de distribuição contínua . . . 3076
M.6 Relação entre PDF e CDF . . . 3077
M.7 Relação entre o PDF limitado e CDF . . . 3078
M.8 Ilustração do intervalo de confiança . . . 3078
M.9 Ilustração de média e mediana . . . 3079
M.10 Ilustração de Desvio Padrão . . . 3080
M.11 Ilustração de Esquema e Curtose . . . 3080
M.12 Ilustração de coeficientes de correlação . . . 3081
M.13 Comparação de várias funções de distribuição (e cumulativas) . . . 3087
M.14 Distribuição normal bivariada . . . 3088
M.15 Impacto da correlação ρ na distribuição normal bivariada . . . 3089

N.1 Definições de índice de confiabilidade . . . 3091
N.2 Probabilidade de falha em termos de índice de confiabilidade β . . . 3094

O.1 Transformação vetorial . . . 3103
O.2 Direções principais do tensor da ordem dois . . . 3105
O.3 Avião Octaédrico . . . 3106
O.4 Forças de superfície . . . 3108
O.5 Cauchy: tetraedro para tensão . . . 3108
O.6 Representação geométrica de tensão . . . 3111
O.7 Posição e vetores deslocamento . . . 3112
O.8 Fluxo através da área dS . . . 3115
O.9 Equilíbrio de tensões, coordenadas cartesianas . . . 3118
O.10 Prato da palestra de Hooke sobre molas . . . 3121
O.11 Controles de teste . . . 3125
O.12 Tensão-Deformação curvas de metais e concreto . . . 3126
O.13 Capturando localização experimental em espécimes de concreto uniaxialmente carregados . . . 3127
O.14 Modelo de crack fictício de Hillerborg . . . 3128
O.15 Concreto deformação amaciando modelos . . . 3129
O.16 Componentes do diagrama de Tonti (Felippa, 2000) . . . 3132
O.17 Diagrama de Tonti para mecânica de corpos deformáveis . . . 3132
O.18 Esforços internos em termos de tensões . . . 3133

P.1 Quebre em um prato infinito . . . 3138
P.2 Modos independentes de crack Deslocamentos . . . 3142
P.3 Pressões na represa devido à ação dinâmica da água (Westergaard, 1933) 3148
P.4 Distribuição aproximada de pressões (Westergaard, 1933) . . . 3150
P.5 Corpo de água que pode ser considerado para mover com represa. (Westergaard, 1933) . . . 3154
P.6 Massa amassada por unidade de área versus altura . . . 3155

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Q.1 Algoritmo da região de confiança 3159
Q.2 Fluxograma do procedimento de identificação do parâmetro 3163
Q.3 Interface gráfica de usuário para identificação do parâmetro de reação agregado álcali (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 3164

R.1 Diferenciação do vetor de posição **p** 3166
R.2 Curvatura de uma curva 3167
R.3 Campo de vetor cruzando uma região sólida 3168
R.4 Fluxo através da área dA 3169
R.5 Elemento infinito para a avaliação da divergência 3169
R.6 Gradiente de um vetor 3174

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lista de tabelas (I-IV)

3.1 Dados chave para os dois principais papiros matemáticos do Egito 30
3.2 Contrastando a arquitetura monumental através das civilizações 32
3.3 Prática de medição e foco geométrico em três culturas antigas 33
3.4 Comparativo Linha do tempo de inovações estruturais-chave em civilizações 34
3.5 Esquemas de classificação selecionados em filosofia e ciência grega clássica 43

4.1 Notáveis estruturas góticas 54
4.2 Dimensões comparativas das principais catedrais góticas (Elizalde, 2025) 54
4.3 Resumo cronológico das obras-chave 86

5.1 Revolução Científica Mudança conceitual 99
5.2 Resumo cronológico das obras-chave 103

6.1 Os códices de Leonardo da Vinci (Vinci, 1938) 123
6.2 Galileu tem quatro dias de diálogos e discursos 147
6.3 Principais contribuições de Jakob e Johann Bernoulli, conforme refletidas em sua *Opera Omnia* 170
6.4 Grandes Obras de Leonhard Euler 176
6.5 Comparação dos métodos criptográficos usados pelos primeiros cientistas modernos 201
6.6 Anagramas, cifras e mais 202
6.7 Cartas disponíveis no anagrama de Hooke 203
6.8 Palavras comuns latinas que podemos formar 203
6.9 Termos científicos possíveis nas cartas disponíveis 204
6.10 Verificação do uso da carta 204
6.11 Decifrando o logogrifo de Bernoulli, (Alassi, 2020) 204
6.12 Quebrando a cifra de Newton 205
6.13 Freqüência de letra completa 206
6.14 Grandes conflitos intelectuais no desenvolvimento da mecânica 207
6.15 Principais Engenharias e Instituições Técnicas na Europa e Além (1740-1850) 209
6.16 Resumo dos principais contribuintes e sua influência na mecânica 211
6.17 Publicações Landmark no Desenvolvimento de Mecânica estrutural 212
6.18 Principais instituições técnicas e de engenharia (1740-1850) 215

CÓPIA PARA REVISÃO

6.19 Grandes conflitos intelectuais no desenvolvimento da mecânica 216
6.20 Histórico completo Linha do tempo de Mecânica estrutural e Análise Geométrica (1351–1879) 219

7.1 Grandes desenvolvimentos na força e distribuição interna tensão 248

8.1 Comparação das fórmulas de curvatura originais e modernas de Bernoulli . 263
8.2 Marcos no Desenvolvimento da Curvatura 266
8.3 Curvatura & Elastica: Grandes eventos e livros 269
8.4 De conceitos geométricos a aplicações mecânicas 272

9.1 Diferenciação & símbolos de integração 279
9.2 Terminologia para curvas na família 'Funicularia' (depois Alassi, 2020). . 283
9.3 Desenvolvimento cronológico da solução catenária (baseada em (Alassi, 2020)) 285
9.4 Linha do tempo do Desafio Elastica 297
9.5 Problemas Isoperimétricos vs. Cálculo das Variações 317
9.6 Euler tem nove espécies elásticas com parâmetros definidores 325
9.7 Distribuição das 28 figuras entre as 9 espécies 325
9.8 28 figuras de Euler mapeadas para suas 9 espécies elásticas 326
9.9 Espécie de elásticos de Euler: propriedades geométricas e equações curvas . 328
9.10 Desenvolvimento cronológico do trabalho de Jakob Bernoulli sobre cálculo diferencial e o problema elástico, desde as primeiras publicações até a conclusão póstuma. 336
9.11 Análise Comparativa: Bernoulli 1728 vs Euler 1732 Contribuições para Viga Teoria 346
9.12 cronológico unificado linha do tempo dos três grandes desafios: Catenária, Elástica e Desafio Anônimo 357
9.13 Publicações referenciadas na cronológica unificada linha do tempo 359

10.1 Contrastando teorias moleculares e contínuas de elasticidade, com duas formulações contínuas. 367
10.4 Comparação das Teorias Mecânicas: Perspectivas históricas e técnicas 398

11.1 Contribuidores para Análise estrutural: Um Resumo Cronológico 432

12.1 Classificação de vários problemas físicos 462
12.2 Principais contribuintes para métodos computacionais em análise estrutural 463

13.1 Linha do tempo de grandes marcos em computação científica e de engenharia476

14.1 Desenvolvimento cronológico da força e dos princípios virtuais. 547

15.1 Conteúdo dos tratados de Vitruvius, Alberti e Palladio 562
15.2 Proporções de ponte em Palladio (1570), depois Huerta, 2018 568

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

15.3 Unidades históricas de medição de comprimento e inclinação usadas na arquitetura e construção . . . 580
15.4 O *braccio* através de estados italianos pré-unificação . . . 582
15.5 Achadores de formulários . . . 617
15.6 Virtudes arquitetônicas de Vitruvius a Billington . . . 650
15.7 A evolução de projeto estrutural aproxima-se . . . 655

16.1 Tradições religiosas e o terremoto: Um resumo comparativo. . . . 690
16.2 Recorrendo motivos transculturais na interpretação religiosa de terremotos. ✓ = Motivo atestado; × = Não tem motivo, ou.. Marginal. . . . 692

18.1 Coeficientes de expansão térmica . . . 873

20.1 Determinação estática e estabilidade de treliças . . . 912
20.2 Equações de equilíbrio aplicáveis para treliças . . . 913

22.1 Analogia entre dois conjuntos de relacionamentos . . . 985
22.2 Conjugar viga . . . 985

25.1 Carregar termos de ponto e uniforme cargas . . . 1065

26.1 Rigidez vs flexibilidade métodos . . . 1070
26.2 Rigidez vsflexibilidade análises . . . 1071
26.3 Forças equivalentes nodais para cargas simples . . . 1074

29.1 Essencial e natural condições de contorno para pilares . . . 1122

33.1 Comparação das equações regentes na elasticidade e flexão da placa (Pilkey e Wunderlich, 1994) . . . 1270

34.1 Resumo de equações e incógnitas em finos cascas . . . 1277
34.2 Contribuições individuais para equações de equilíbrio em fino cascas . . . 1278
34.3 Sumário das principais equações governantes no magro cascas . . . 1292
34.4 Suposições e equações para estruturas de membrana . . . 1301
34.5 Comparação das distribuições resultantes da membrana sob diferentes cargas 1305
34.6 Comparação de membranas e soluções rasas para cargas uniformes . . . 1319
34.7 Casca coeficientes (ϕ Mede-se a partir da coroa . . . 1325

36.1 Índice de confiabilidade valores-alvo . . . 1394

38.1 Comparação do subsistema de eixo, parede cisalhamento, e parede reprimida cisalhamento . . . 1463

40.1 Graus de indeterminação estática e cinemática . . . 1523
40.2 Essencial e natural condições de contorno . . . 1523

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

43.1 Transformações 3D de elementos lineares 1572

44.1 Discretização de estruturas 1582

45.1 Impacto de matrizes mal condicionadas 1610

46.1 Definição de força interna para a matriz estática 1618
46.2 Condições para determinação estática, e instabilidade cinemática 1626

47.1 Funcionais na elasticidade linear 1688
47.2 Comparação entre energia potencial total e fórmulas Hu-Washizu 1691

48.1 Resumo das equações para vw, cvw, pe, cpe 1708
48.2 Caminhos alternativos para os princípios de trabalho virtual e princípio da complementar trabalho virtual 1709

49.1 Interpretação de funções de forma em termos de série polinomial (1d & 2d) 1744
49.2 Termos polinomiais em várias formulações de elementos (1d) & 2d) 1744
49.3 Características do elemento viga 1762
49.4 Funções de forma, e derivados naturais para elemento q8 1767
49.5 Coordenadas nodais (naturais) do elemento q9 1768
49.6 Funções de forma para elementos de nó variável 1772
49.7 Funções de forma e derivados para o elemento T6 1773

51.1 Pesos para fórmulas de quadratura Newton-Cotes 1800
51.2 Pontos de integração e pesos para fórmulas de geometria ao longo do intervalo$[-1,1]$ 1803
51.3 Coordenadas e pesos para integração numérica sobre um triângulo 1805
51.4 Coordenadas naturais dos nós quadrilaterais bilineares 1806
51.5 Integrações numéricas completas e reduzidas para elementos quadrilaterais 1812
51.6 Bilinsear e exato deslocamentos/deformações 1814

53.1 Condição de estabilidade para diferentes métodos 1854
53.2 Representativo amortecimento rácios para diferentes classes de estruturas 1867

54.1 Tabulação de níveis de análise estrutural 1876
54.2 Intercorrelação de diferentes níveis de análise 1878

57.1 Comparação de abordagens cinemáticas e estáticas para análise de carga limite 1938
57.2 Comparação entre análise de limites inferiores e análise Pushover 1963
57.3 Plasticidade e análise do limite inferior 1965

59.1 Paralelismo entre o método de quasi-newton em matemática e análise implícita em mecânica estrutural 1982
59.2 Variações do método de Newton-Raphson 1986

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59.3 Comparação de algoritmos de controle de carga em análise não linear . . . 1990

61.1 Determinações de estado multinível . . . 2027
61.2 Comparação de flexibilidade com elementos baseados em rigidez . . . 2058

62.1 Confinada *vs.* Propriedades elásticas e de resistência não confinadas do concreto . . . 2092
62.2 Módulo tangente . . . 2138

63.1 Pilar conexões . . . 2167
63.2 Compatibilidade entre conexões . . . 2168
63.3 Modelando as opções de escolher e furar . . . 2172
63.4 Quantificação da deterioração . . . 2174
63.5 Propriedades materiais . . . 2176
63.6 Classificação transversal . . . 2177
63.7 Códigos do modo de falha . . . 2177
63.8 Geometria . . . 2177
63.9 Detalhes de confinamento . . . 2178
63.10 Detalhes de confinamento . . . 2178
63.11 Resumo dos testes de reforçados retangulares pilares (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) . . . 2179
63.12 Resultados do estudo de calibração para 30 testes experimentais (Haselton et al., 2008) . . . 2180

64.1 Terminologia adotada neste livro para quantificação de incertezas e análise de incerteza . . . 2189
64.2 Descrevedores qualitativos ilustrativos para a magnitude de um coeficiente de correlação de Pearson . . . 2191
64.3 Comparação de MCS e LHS . . . 2195
64.4 Comparação de métodos de incerteza e sensibilidade . . . 2211
64.5 Diferentes mas complementares papéis de análise de sensibilidade e identificação de parâmetros . . . 2218

65.1 Entradas de configuração do representante em `Log.xlsx` . . . 2241
65.2 Funções principais no programa de identificação de parâmetros . . . 2246
65.3 Funções auxiliares privadas usadas pelo leitor de planilhas e camada de agregação . . . 2246
65.4 Campos principais da estrutura de configuração `S` . . . 2246
65.5 Variáveis de tempo de execução selecionadas em `ParIdentificação` . . . 2247

67.1 Coeficientes dependentes do período de Boore, Joyner e Fumal, 1997 Modelo 2263
67.2 Estimado V_S baseado na classe do site . . . 2263

69.1 Comparação da Análise de Pushover e Análise Sísmica . . . 2311

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

69.2 NJ aproximam-se de estruturas projeto espectro de resposta 2315
69.3 Análises sequenciais para análise de pushover 2322
69.4 Propriedades de barras de aço reforçadas (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) 2328
69.5 Capacidades de momento para as três seções diferentes em uma faixa de forças axiais 2335
69.6 Resultados da análise; Não tem dobradiça 2339
69.7 Ajuste que leva à formação da primeira dobradiça 2340
69.8 Resultados da análise; Uma dobradiça 2340
69.9 Ajuste levando à segunda dobradiça 2341
69.10Resultados da análise; Duas dobradiças 2341
69.11Ajuste levando à terceira e quarta dobradiças 2342
69.12Resumição de forças, momentos e.. 2343
69.13Comparação de métodos sísmicos análise estrutural 2353

70.1 Razões de deriva interstory permitidas (IDR) para vários níveis de desempenho de acordo com ASCE 41-17 2370
70.2 Limiares do Índice de Danos e Estados Estruturais correspondentes 2370
70.3 Limites de demanda para capacidade (DRC) segundo FEMA 356 2371

72.1 A gama de danos de componentes estruturais e não estruturais para vários níveis de desempenho do edifício alvo (Tabela C1-2) (FEMA-356, 2000) . . 2380
72.2 Comparação entre o PBEE 1 e o PBEE 2 2384
72.3 Comparação de Contínuo vs. Representações de Fragilidade Discretas . . 2391
72.4 Documentos-chave no desenvolvimento histórico de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE). 2398

B.1 Peso unitário dos materiais 2404
B.2 Carga média bruta em prédios 2404
B.3 Pesos de materiais de construção 2411
B.4 Cargas mínimas distribuídas uniformemente, (ICBO, 1994) 2412
B.5 Variação da velocidade do vento acima do solo 2412
B.6 C_e Coeficientes para a carga do vento, (ICBO, 1994) 2412
B.7 Coeficientes de pressão do vento C_q, (ICBO, 1994) 2413
B.8 Fatores de importância para o vento e a carga do terremoto, (ICBO, 1994) . 2413
B.9 Pressão aproximada do vento p para a força eólica comum resistindo estruturas de construção 2414
B.10 Z fatores para diferentes zonas sísmicas, UBC1994 2414
B.11 S Coeficientes locais para carregamento de terremotos, (ICBO, 1994) 2414
B.12 Lista parcial de R_W para vários sistemas de estrutura, (ICBO, 1994) 2415

G.1 As coordenadas nodais de Alamillo (Pollalis, 1999) 2549
G.2 Propriedades dos membros de Alamillo (Pollalis, 1999) 2550

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

G.3 Alamillo's condições de contorno (Pollalis, 1999) 2550
G.4 Combinações de carga de Alamillo (Pollalis, 1999) 2551

L.1 Métodos de solução para equações lineares 3050
L.2 Pré-condicionamento; Comparação entre esquerda e direita 3060
L.3 Comparação do pré-condicionamento da matriz e decomposição de valor singular (SVD) 3062

N.1 Valores selecionados para estruturas de aço e concreto 3092
N.2 Confiabilidade das estruturas de aço e concreto 3093

O.1 Notações 3098
O.2 Deformação representações 3112
O.3 Exemplos de condições de contorno em análise estrutural 3131

P.1 Resultados numéricos correspondentes ao período, $T = \frac{4}{3}$ Segundo 3149

R.1 Semelhanças entre operadores de multiplicação e diferenciação 3166

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Sobre o Autor

Victor E. Saouma com mais de 40 anos de experiência em pesquisa, incluindo trabalhos substanciais na reação à sílica alcalina (ASR) e durabilidade do concreto, tem feito contribuições significativas para análise estrutural e mecânica. Sua pesquisa abrange dois livros: Numerical modeling of AAR e.. Aging, Shaking, and Cracking of Infrastructures: From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures, além de numerosos relatórios técnicos e artigos revisados por pares.

Ele presidiu um comitê internacional através do RILEM (Reunião Internacional de Laboratórios e Especialistas em Materiais, Sistemas de Construção e Estruturas), com foco no diagnosis and prognosis of structures affected by ASR, e editado um relatório abrangente Rilem com contribuições de pesquisadores líderes em todo o mundo.

Ele é um ex-presidente e companheiro do International Association of Fracture Mechanics for Concrete and Concrete Structures.. Ele aconselhou a Companhia de Energia Elétrica de Tóquio (TEPCO) sobre análise dinâmica não linear de grandes represas e problemas estruturais em estruturas maciças concreto armado, e contribuiu para o relatório do EPRI *Modelação estrutural de estruturas de contenção nuclear*.

Seus interesses de pesquisa se estendem a teóricos, numéricos e experimentais mecânica da fratura, difusão de cloreto em concreto, e testes de centrifugação de barragens. Ele também editou um volume sobre real-time hybrid simulation, uma técnica experimental importante para testes estruturais. Seu trabalho foi financiado pela Comissão Reguladora Nuclear, Laboratório Nacional de Oak Ridge, o Departamento de Recuperação, a Companhia de Energia Elétrica de Tóquio e o Escritório Federal Suíço de Energia. Suas colaborações internacionais abrangem a França, Espanha, Suíça, Itália e Japão.

Desde 2019, ele tem servido como um *pro bono* Consultor técnico da C-10 Fundação de Pesquisa e Educação em questões de segurança nuclear, incluindo servir como testemunha perita perante os EUA. Comissão Reguladora Nuclear sobre degradação de concreto em instalações nucleares. Este trabalho forneceu insights únicos sobre a intersecção da análise técnica, tomada de decisões regulatórias e segurança pública.

Um engenheiro civil treinado, Saouma ensinou análises estruturais lineares e não lineares, bem como um projeto reforçado e avançado, trazendo uma perspectiva ampla para os desafios de engenharia.

Outros livros de Victor Saouma

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Saouma, V.E. e Hariri-Ardebili, M. (2020) Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Strutures, Springer-Nature.
2. Saouma, V.E. (Ed.) (2020) Diagnosis & Prognosis of AAR Affected Structures, Springer-Nature.
3. Saouma, V.E. (2013) Numerical Modeling of AAR, 320 páginas, Taylor& Francis;
4. Saouma, V. E. e Sivaselvan, M. (Eds) (2008) Hybrid Simulation: Theory, Implementation and Applications

5. Saouma, V.E. Structural Analyis Lecture Notes (1764 pages)
6. Saouma, V. E. Fracture Mechanics (Unpublished, 1186 pages)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Parte I

Fundamentos Históricos da Mecânica e da Análise Estrutural

CÓPIA PARA REVISÃO

Resta uma notável ausência de qualquer tratamento substantivo da história de análise estrutural na grande maioria dos livros que consultei - a maioria fornece, no máximo, apenas o mais superficial visão geral.

Para aqueles que buscam uma compreensão abrangente do tema, um punhado de referências clássicas oferecem cobertura autoritária e detalhada. Estes são citados ao longo deste volume e recomendados para mais estudos.

Apesar de não ser um historiador, mas sim um professor de análise estrutural eu escolhi aventurar-me, um tanto ousada e audaciosamente, nas bases históricas do assunto neste livro.

Reconheço que apenas uma pequena fração de leitores se envolverá com ele em sua totalidade. No entanto, espero que muitos encontrem valor em explorar seletivamente pontos de interesse, e que os alunos, em particular, possam usar este material como trampolim para uma investigação mais profunda.

Peço sua compreensão se surgirem erros ou omissões involuntários.

Isenção de responsabilidade sobre a autoria e uso de ferramentas de IA

O manuscrito original deste livro foi escrito antes do advento do ChatGPT e similar grandes modelos de linguagem. Todo o conteúdo intelectual, incluindo estrutura, argumentos, análise histórica e desenvolvimento técnico, é meu trabalho.

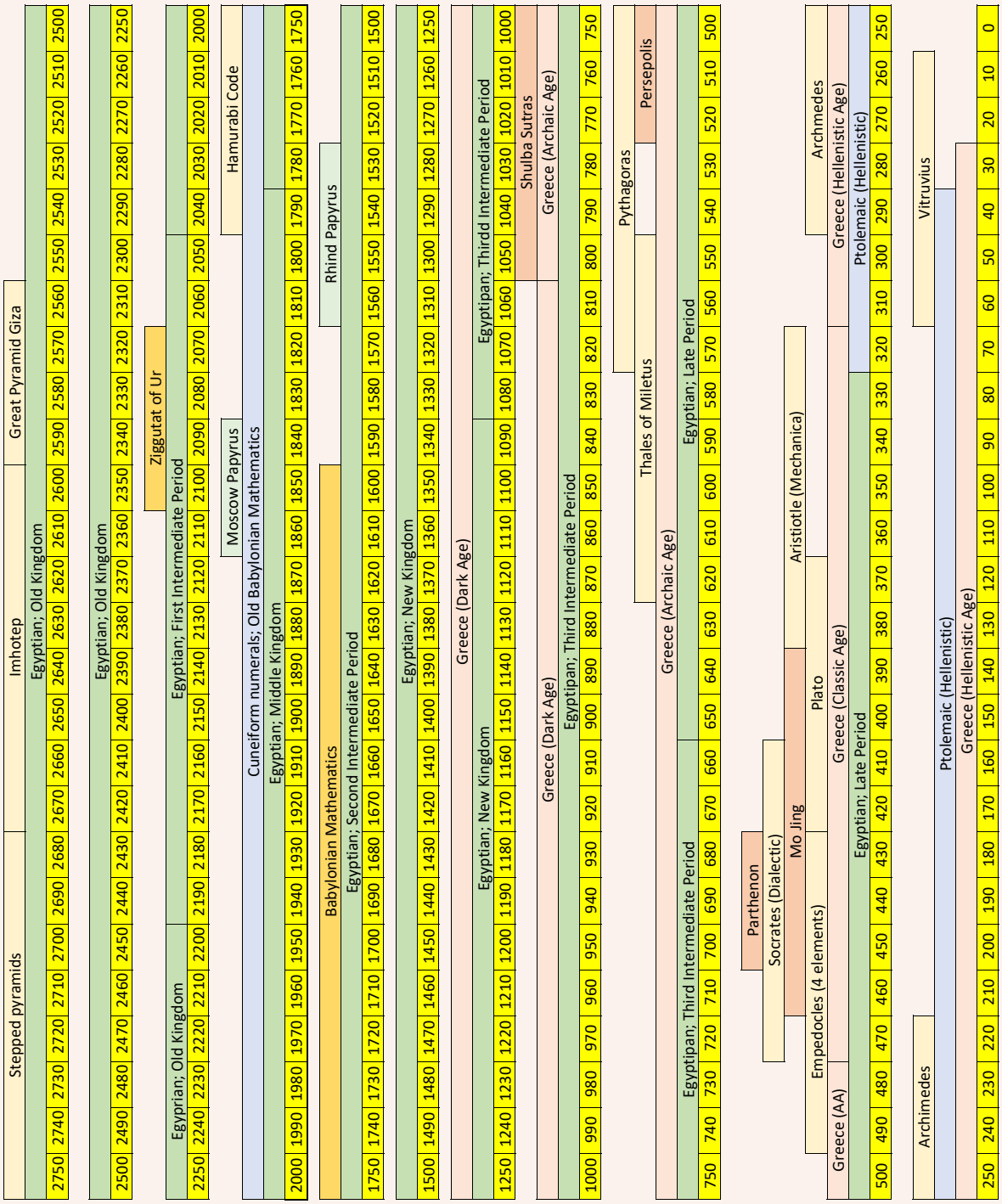
Posteriormente, eu usei o ChatGPT como uma ferramenta editorial para refinar a escrita, melhorar a clareza e, em alguns casos, sugerir referências adicionais. Nenhum material conceitual, analítico ou interpretativo foi gerado pelo ChatGPT a menos que explicitamente indicado.

Se qualquer seção tiver sido redigida com a ajuda do ChatGPT e depois revista e aprovada por mim, será claramente sinalizada como tal. Todas as contribuições substantivas de outra forma permanecem inteiramente minhas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Linha do Tempo; a.C.

Nota: As datas são aproximadas. A linha do tempo não é exaustiva, mas uma visão geral da construção, arquitetura, ciência e engenharia ao longo dos séculos.

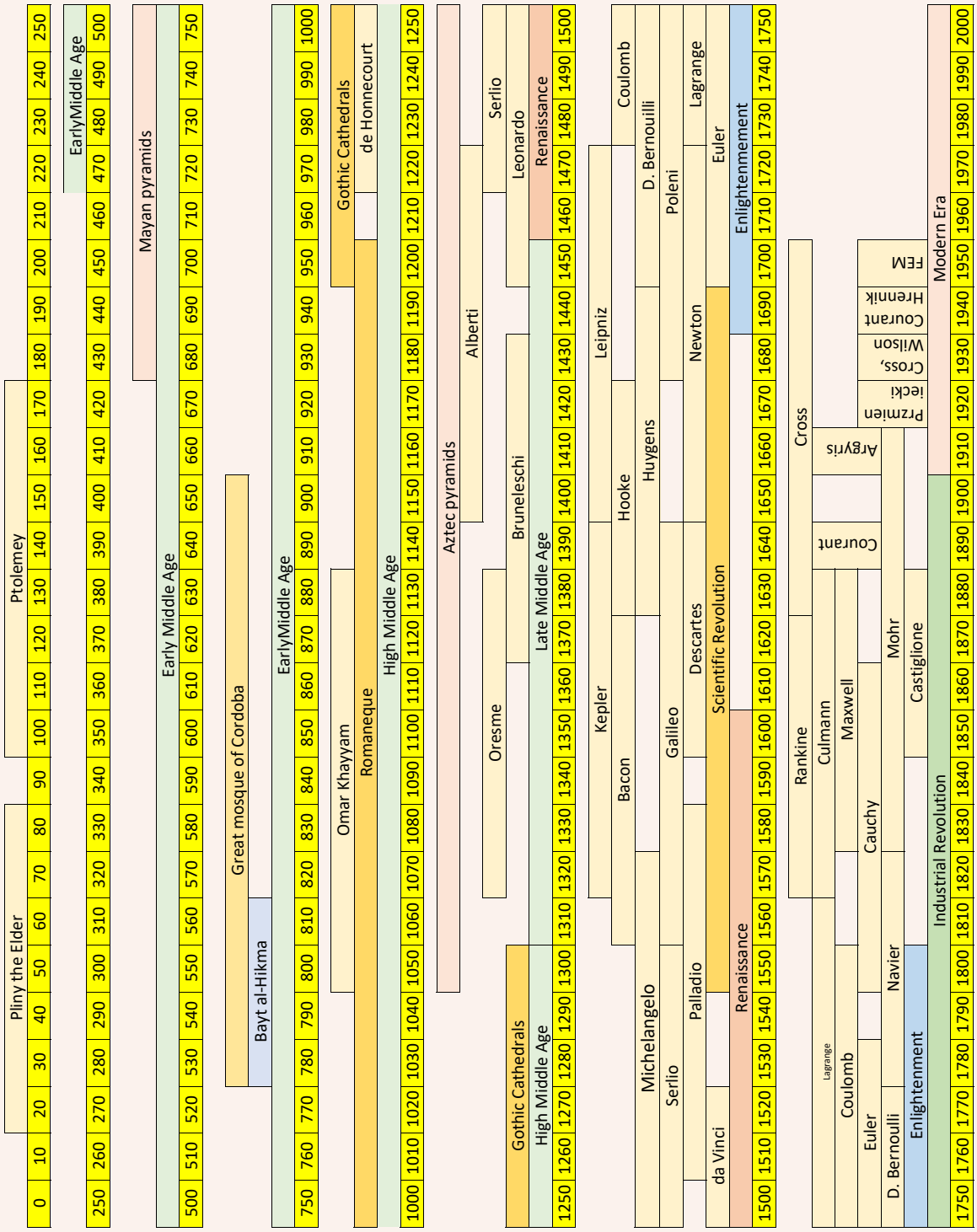


CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

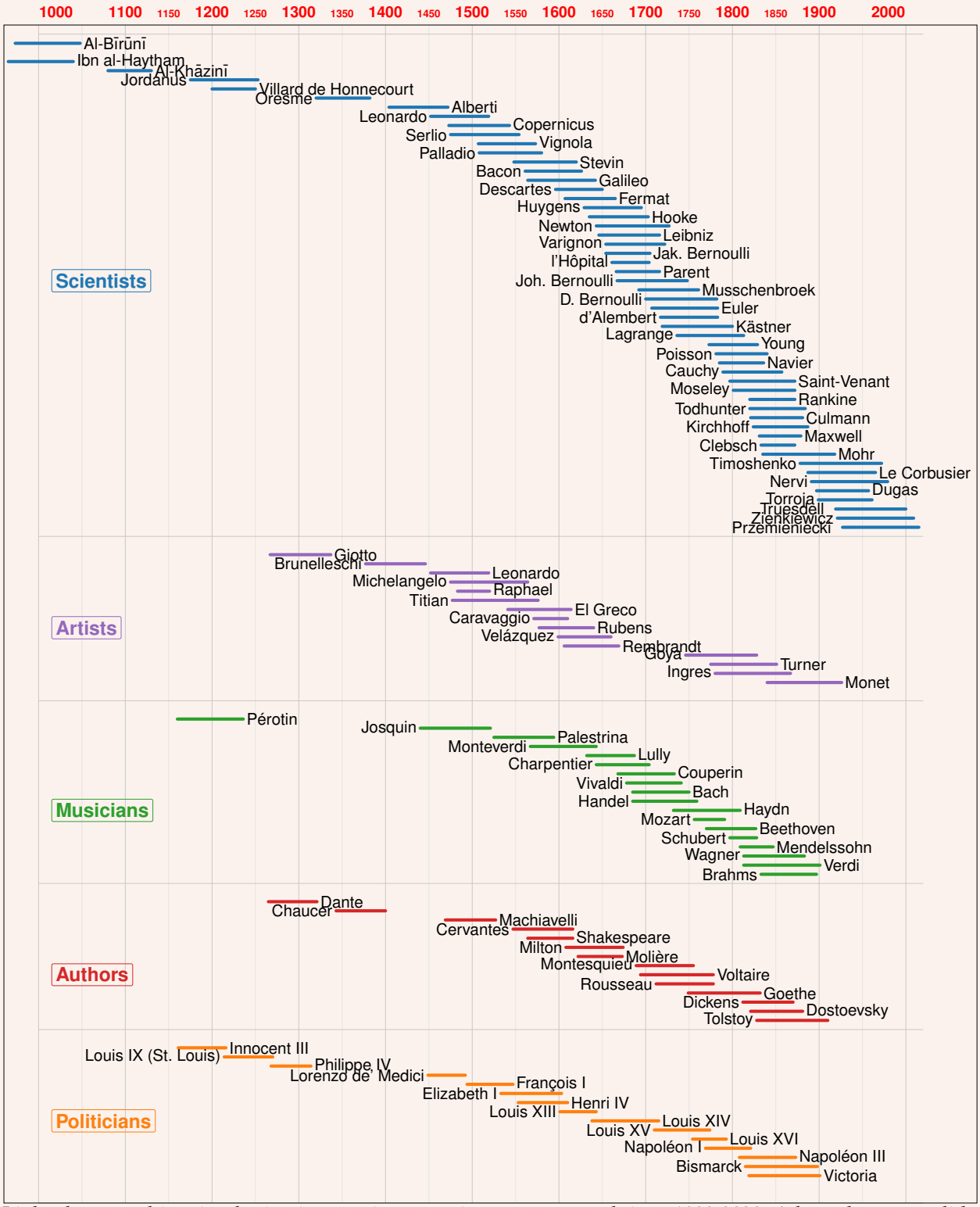
Linha do Tempo; d.C.

Nota: Todas as datas mostradas são aproximadas e a linha do tempo não é de forma exaustiva. Destina-se apenas a ser uma representação visual do desenvolvimento em evolução da construção, arquitetura, ciência e engenharia ao longo dos séculos.



CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Linha do tempo histórica de cientistas, artistas, músicos, autores e políticos, 1000-2020. Adaptado e expandido de Truesdell, 1968. Os cientistas listados na primeira fileira são todos discutidos neste capítulo; as figuras restantes estão incluídas para um contexto cultural e histórico mais amplo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 1

Introdução

Abstract

Este capítulo introdutório reflete sobre as fundações históricas de análise estrutural e faz um caso para sua relevância contínua. Ele alerta o leitor preemptivamente que este primeiro volume, com foco na história de análise estrutural, partirá de uma narrativa cronológica rigorosa e adotará uma estrutura temática eclética - entrelaçada com observações pessoais desenvolvidas mais Tudo nos capítulos que se seguem.

Para fornecer contexto, o capítulo também esboça o "grande quadro" tanto temático quanto historicamente, traçando a evolução do empirismo da antiguidade ao surgimento da mecânica computacional moderna.

Uma seleção curadoria de referências está incluída para leitores interessados em exploração mais profunda. O resultado é tanto uma viagem pessoal e um convite para ver análise estrutural não apenas como um campo técnico, mas como um moldado por séculos de desenvolvimento intelectual.

1.1 A Relevância da História de Engenharia Estrutural 6
1.2 Abordagem e Intenção 7
1.3 Grande Imagem 8
1.3.1 Tematicamente 8
1.3.2 Historicamente 9
1.4 Referências acadêmicas 10

1.1 A Relevância da História de Engenharia Estrutural

Se perguntássemos a um engenheiro sobre as origens das equações que usam rotineiramente, a resposta seria provavelmente decepcionante:

> Se perguntarmos a um engenheiro sobre as origens das equações que ele ou ela usa constantemente, a resposta seria decepcionante. Eles existem. Nada mais importa. Por que estar curioso sobre sua derivação? Engenheiros não estão interessados no fundo do assunto.
>
> (Benvenuto, 1991b, pg. 543)

CÓPIA PARA REVISÃO

Mas talvez alguns devam estar interessados. Pelo que sei, nenhum dos livros modernos sobre a tentativa de resolver a questão levantada por Benvenuto[1].. Isso é particularmente inquietante, pois poucas profissões podem traçar sua história intelectual até mesmo como engenharia estrutural. Familiarizar-nos com isso pode, de uma forma modesta, nos tornar um pouco mais "civil"

Este ponto é reforçado pela seguinte observação

> É da maior importância que aqueles estudantes que desejam uma profunda visão matemática se acostumem cedo para ir diretamente aos desenvolvimentos originais, pelo menos nos casos em que os desenvolvimentos iniciais são diretos, e são encontrados em linguagem que não impõe grandes dificuldades.
>
> (Miller, 1916)

O mesmo sentimento se aplica aos estudantes de engenharia, e é para esses alunos que o presente capítulo se destina.

Originalmente, minha intenção era fornecer uma breve visão geral da evolução da análise estrutural. No entanto, uma vez iniciado o processo, senti-me cada vez mais absorvido — especialmente porque eu estava, como muitos outros, confinado em casa durante a pandemia de COVID-19. Este primeiro capítulo é, portanto, o produto de aproximadamente seis meses de trabalho intermitente, impulsionado tanto pela curiosidade e pelo prazer quanto pela intenção acadêmica.

1.2 Abordagem e Intenção

O que se segue é, em última análise, mais um reflexo pessoal do que uma história sistemática. Não é abrangente, nem particularmente rigoroso ou acadêmico. Em vez disso, é uma coleção - às vezes mais parecida com uma colagem - de tópicos pouco conectados, alguns explorados em maior profundidade do que outros, traçando um caminho da Mesopotâmia para o método dos elementos finitos.

A apresentação é intencionalmente eclética, não linear, e às vezes aparentemente aleatória. Certos tópicos podem parecer incongruentes ou fora do lugar. outros podem convidar discordâncias quanto à sua inclusão ou ênfase. O que os unifica é que cada um, em algum momento, despertou minha curiosidade e me levou a tomar notas.

Limitado pelo tempo, eu ocasionalmente citei diretamente de fontes primárias e secundárias - com plena atribuição - e retraí várias figuras para ajudar na clarificação de idéias selecionadas.

Finalmente, eu me permiti alguns aspectos pessoais nas notas de rodapé, refletindo sobre como certos temas evoluíram ou falharam em evoluir ao longo do tempo, lançando desenvolvimentos históricos à luz das perspectivas contemporâneas.

[1]Com a possível exceção do meu livro de graduação, que dedicou algumas páginas ao contexto histórico (Kinney, 1957, pp. 1–19).

CÓPIA PARA REVISÃO

1.3 Grande Imagem

1.3.1 Tematicamente

Fig. 1.1 fornece um roteiro para a longa jornada histórica. A interconexão entre várias disciplinas (eles mesmos não inequivocamente definidos) é, em certa medida arbitrária. Note que eu incluí arquitetura como por muitos séculos arquitetos foram de fato estruturas dimensionadoras, e em muitos aspectos deles é uma profissão estreitamente interligada com análise estrutural.

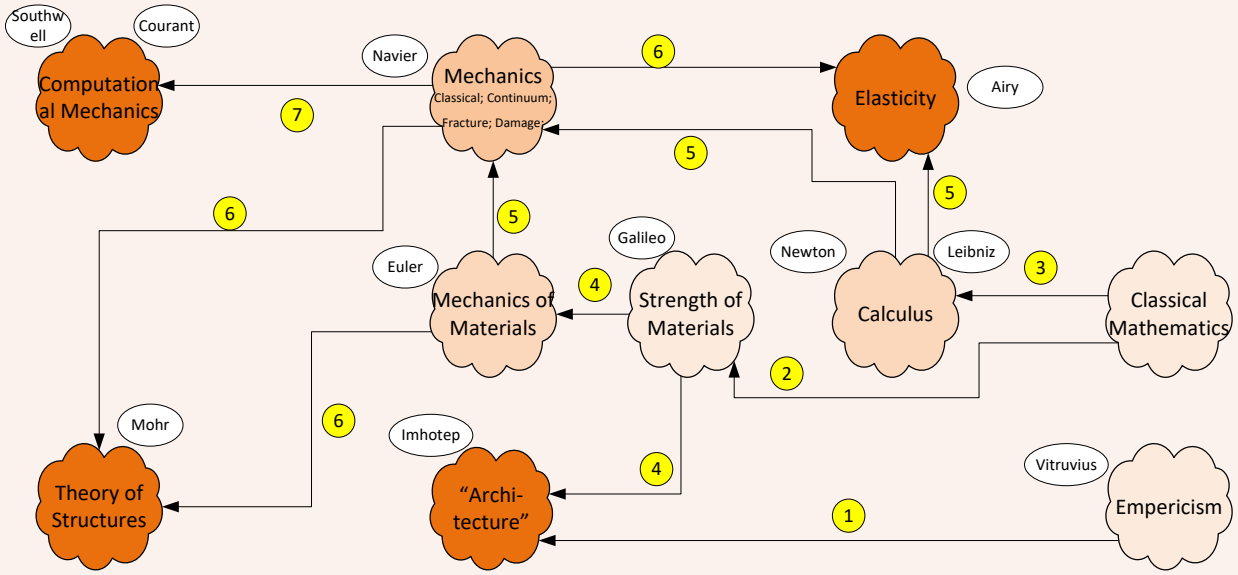


Figura 1.1: Roteiro para engenharia estrutural

1. Durante séculos, as estruturas foram concebidas usando regras empíricas de polegar - pensar em catedrais góticas - muito antes dos métodos formais de design existirem. Estas práticas iniciais foram codificadas pela primeira vez por Vitruvius na Roma antiga.
2. A matemática pré-cálculo eventualmente surgiu, estabelecendo as bases para a força dos materiais. Semi-empírico, baseado na observação de experimentos cuidadosamente projetados.
3. O desenvolvimento formal do cálculo logo se seguiu, independentemente de Newton e Leibniz no final do século 17. Ele forneceu uma linguagem matemática poderosa para descrever movimento e mudança.
4. A resistência semi-empírica dos materiais amadureceu na mecânica mais rigorosa dos materiais; Também, a arquitetura foi pela primeira vez desembainhada das regras do polegar.
5. Mecânica de materiais evoluiu ainda mais para mecânica geral, suportada por cálculo e equações diferenciais, permitindo o estudo de corpos sob cargas arbitrárias e movimentos.
6. A teoria das estruturas evoluiu a partir dos avanços na mecânica e mecânica dos materiais; concomitantemente, a elasticidade evoluiu da mecânica e cálculo.
7. Finalmente, a mecânica computacional desenvolveu-se a partir destes vários ramos, combinando métodos numéricos com mecânicos para resolver problemas analiticamente intratáveis.

CÓPIA PARA REVISÃO

1.3.2 Historicamente

Emprestando de (Renn, Damerow e McLaughlin, 2002), a história de longo prazo da Mecânica pode ser dividida (de novo arbitrariamente) em nada menos do que oito períodos[2]:

Dawn: Refere-se ao período prolongado durante o qual as sociedades humanas acumularam conhecimento mecânico prático através da experiência e transmissão oral, sem gravá-lo em forma escrita ou desenvolver referenciais teóricos formais. Enquanto as origens de disciplinas como matemática e astronomia podem ser rastreadas para as antigas civilizações urbanas da Babilônia e Egito, este não é surpreendentemente o caso da mecânica. Embora evidências abundantes atestam as realizações de construção monumentais dessas civilizações, nenhum documento sobrevivente descreve diretamente o conhecimento mecânico que deve ter sustentado esses empreendimentos.

Crepúsculo: Acompanha o período greco-romano, que testemunhou a formulação da lei da alavanca e o surgimento dos primeiros tratados escritos dedicados à mecânica e filosofia natural. Esta era está particularmente associada a figuras como Aristóteles, Euclides e Arquimedes, cujos trabalhos influenciaram profundamente os desenvolvimentos intelectuais subsequentes. A física aristotélica, em particular, forneceu o quadro conceitual dominante por séculos. Enquanto os romanos contribuíam pouco para a mecânica teórica, eles se destacavam como engenheiros pragmáticos. Os escritos de Vitruvius, embora limitados em âmbito científico, tiveram um impacto duradouro na teoria e prática arquitetônica.

Não é assim a Idade das Trevas. Destaca as contribuições significativas de estudiosos árabes que preservaram, traduziram e expandiram os tratados mecânicos gregos durante um tempo em que tal conhecimento havia diminuído amplamente no Ocidente Latino. Longe de ser um vazio, este período viu o refinamento das idéias mecânicas, o estabelecimento de observatórios e instituições, e o desenvolvimento de dispositivos como relógios de água e autômatos. Seu trabalho estabeleceu uma ponte essencial entre a antiguidade clássica e o Renascimento Europeu.

Nascer do sol, Renascimento: Marca o despertar da investigação científica e estrutural na Europa Ocidental. Este período será ilustrado através de dois estudos clássicos de caso em projeto estrutural, bem como uma breve revisão de quatro livros seminal que profundamente moldou o pensamento arquitetônico e engenharia.

Método Científico: Após séculos de adesão à doutrina aristotélica no Ocidente, a base para a ciência empírica foi lançada por Francis Bacon, cuja defesa pela observação e experimentação marcou uma mudança decisiva. Sua influência na mecânica experimental não pode ser exagerada, e seu legado está incorporado em praticantes primitivos como Galileu Galilei, que aplicava experiências sistemáticas a problemas físicos.

Pais Fundadores: As contribuições de Isaac Newton e Robert Hooke foram tão fundamentais para o desenvolvimento da mecânica moderna que merecem uma categoria dedicada. Seu trabalho estabeleceu as leis matemáticas e bases empíricas que definem a mecânica clássica.

Emergência: Mecânica Analítica: Caracterizado pela rigorosa integração da matemática e mecânica, particularmente através do trabalho de estudiosos franceses e suíços. Este período viu a formulação de princípios, tais como os de d'Alembert, Lagrange e Euler, que forneceram uma estrutura analítica unificada para sistemas mecânicos.

Emergência de Análise estrutural: Nessa fase, todos os conceitos fundamentais necessários para o moderno análise estrutural haviam sido estabelecidos. A tarefa restante era o desenvolvimento sistemático de metodologias - por algumas figuras principais - que formalizariam análise estrutural para a disciplina como é conhecida hoje.

[2] Note que eu omiti contribuições indo-chinesas, e só oblíquamente dirigidas aos árabes.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Embora isto represente um delineamento racional do desenvolvimento histórico da mecânica e engenharia estrutural, não se alinha perfeitamente com a estrutura de capítulo deste volume, que é guiado por uma combinação de progressão histórica e estruturação temática.

1.4 Referências acadêmicas

Enquanto apenas alguns podem enfrentar as profundidades assustadoras e intimidadoras desses livros, muitos preferem uma abordagem mais direta que paralelo às discussões teóricas.

- Todhunter e Pearson (1893) *Uma história da teoria da elasticidade e da força dos materiais* (Todhunter e Pearson, 1893). Provavelmente a cobertura mais exaustiva e autoritária começando com Galileu. Ambos eram matemáticos. Monumental. Para aqueles que se interessam pela elasticidade.
- Timoshenko's (1953) *História da Força dos Materiais* (Timoshenko, 1953). Para aqueles principalmente interessados (finalmente) em análise estrutural.
- Truesdell's (1968) *Ensaios na história da mecânica*, (Truesdell, 1968). Esta não é uma apresentação histórica, panorâmica como os livros anteriores, mas sim oito ensaios abordando temas específicos que despertaram o interesse de Truesdell (que via a Elasticidade como matemática aplicada).
- Truesdell's *A Mecânica Racional de Corpos Flexíveis ou Elastic* uma introdução de 432 páginas para Vol X e XI da coleção completa do corpo de trabalho de Euler, (Truesdell, 1960).
- Dugas, 1988, *História da mecânica*.. Conta abrangente e acadêmica traçando a evolução do pensamento mecânico da antiguidade ao início do século XX, com atenção detalhada tanto para os desenvolvimentos conceituais quanto matemáticos.
- Benvenuto (1991) *Um Introdução à História de Mecânica estrutural* (Benvenuto, 1991a) e.. (Benvenuto, 1991b). Um livro muito conciso de dois volumes. Ampla cobertura de arcos góticos, cúpulas.
- Heyman (1998) *Análise estrutural; Uma abordagem histórica* (Heyman, 1998a).
- Huerta Ed. (2005) *Ensaios na história da teoria das estruturas: Em honra de Jacques Heyman*.
- Kurrer (2008) *O História da Teoria das Estruturas (Kurrer, 2008). Um livro excelente, muito legível com ênfase em análise estrutural ao contrário da Mecânica.*

A preparação deste volume envolveu ampla consulta de documentos históricos, muitos dos quais são suficientemente antigos para serem livremente acessíveis em formato digital através do HathiTrust Digital LibraryOu pode ser obtido através de serviços de empréstimo interbibliotecário prestados pela minha instituição.

Além dessas obras essenciais, não encontrei outros tratamentos históricos de mecânica estrutural suficientemente abrangentes ou perspicazes para merecer inclusão nesta lista. Esta ausência é digna de nota: A história da engenharia estrutural, uma disciplina que moldou o ambiente construído da civilização humana desde os zigurates da Mesopotâmia até as torres de megacidades de hoje, permanece notavelmente subserviente pelos historiadores.

O leitor tecnicamente treinado gravita em direção a Timoshenko; O matematicamente inclinado para Truesdell; Arquitetônicamente curiosa para Benvenuto e Heyman. No entanto, nenhum desses trabalhos, admirável como eles são, se dirige ao estudante ou engenheiro praticante que procura não uma bolsa exaustiva mas uma narrativa acessível - uma história de como as ferramentas que usamos diariamente veio a ser, dito de uma forma que ilumina em vez de Intimido.

O volume atual é uma tímida tentativa de abordar esta lacuna, para trazer o História da engenharia estrutural de uma forma palpável para uma nova geração de engenheiros que talvez conheçam pouco das

CÓPIA PARA REVISÃO

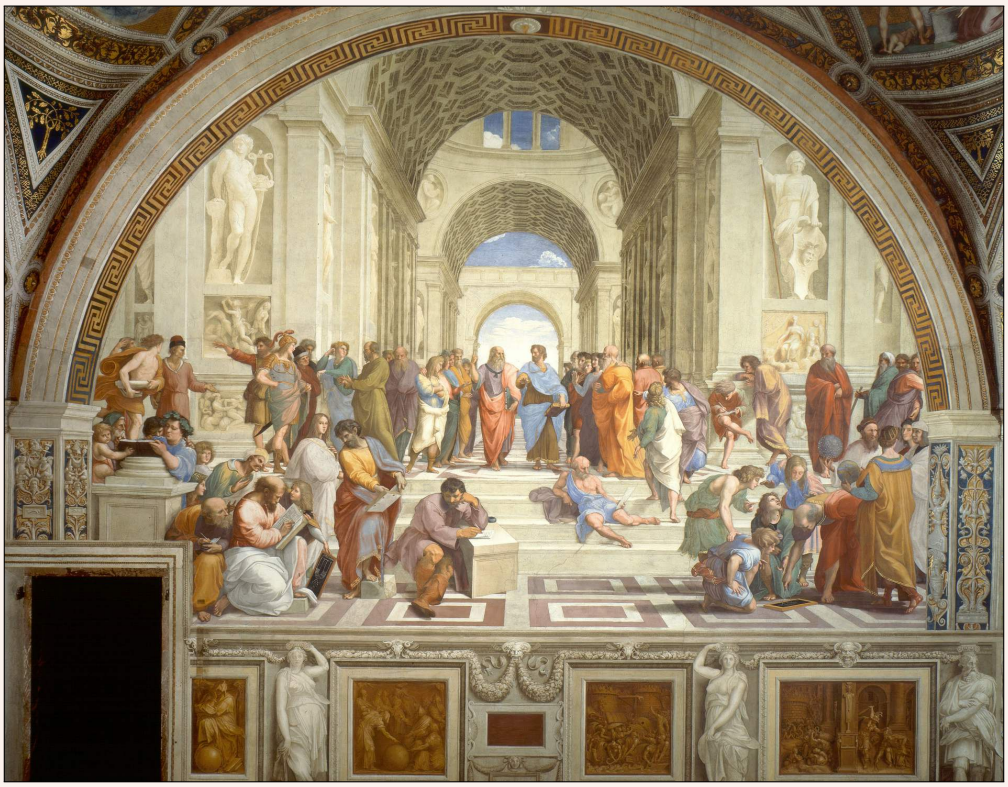
lutas intelectuais, os falsos começos, os flashes de perspicácia, e o acúmulo paciente de conhecimento que fez sua profissão É possível. Não é um trabalho de uma bolsa histórica original. Eu sou engenheiro, não historiador, e tenho confiado muito nas fontes citadas acima. Mas eu tentei tecer suas contas em uma narrativa que fala com engenheiros como engenheiros, conectando desenvolvimentos históricos às equações que resolvemos, o software que executamos, as estruturas que projetamos.

Se estas páginas despertam em algum jovem engenheiro uma apreciação pelos gigantes sobre os quais todos nós estamos de pé - se eles inspiram até mesmo um leitor a procurar Galileu *Discorsi* ou maravilhar-se com a audácia da matemática de Euler ou reconhecer em uma malha elemento finito o eco distante da estática gráfica de Culmann - o autor considerará seu trabalho bem gasto.

A preparação deste volume envolveu ampla consulta de documentos históricos, muitos dos quais são suficientemente antigos para serem livremente acessíveis em formato digital através do HathiTrust Digital LibraryOu pode ser obtido através de serviços de empréstimo interbibliotecário prestados pela minha instituição.

Finalmente, em todo o Livro I (História), eu intencionalmente confiei em fontes primárias para todas as referências - muitas das quais o leitor pode baixar clicando no logotipo vermelho que segue a citação - e eu evitei fontes secundárias exceto onde eles eram realmente necessários para um entendimento completo. Note que, sempre que possível, todos os documentos foram processados por OCR e seus tamanhos de arquivos comprimidos.

CÓPIA PARA REVISÃO



Rafael, Escola de Atenas (1509-1511)[a]

O encontro de filósofos e matemáticos antigos cujas ideias formam as bases sobre as quais todo o conhecimento estrutural subsequente foi construído. Para identificação das figuras principais, veja §3.2.3.

[a] Cada capítulo deste livro termina com uma obra de arte, escolhida por sua... admirável às vezes tênue... ressonância temática com o material anterior. O leitor é convidado a considerar essas seleções com um espírito generoso; As conexões desenhadas podem ocasionalmente exigir uma certa elasticidade imaginativa.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 2

Antes das Estruturas: Números e Cartas

Abstract

Este capítulo traça duas bases paralelas sobre as quais a ciência, engenharia e arquitetura foram construídas: o desenvolvimento de sistemas numéricos e a invenção da escrita. A primeira parte examina como civilizações antigas, sumérias, babilônicas, egípcias, gregas, islâmicas e européias construíram as ferramentas numéricas que tornaram a matemática possível, do duodecimal e sexagesimal sistemas de Mesopotâmia através do decimal posicional O sistema da Índia e o binário Aritmética da era digital. A narrativa traça a evolução de conceitos como medição do ângulo, cronometragem, números irracionais e a razão dourada.. A segunda parte se volta para a história paralela da escrita: desde os primeiros símbolos de argila e paus de contagem, através do cuneiforme de Sumer e os hieróglifos do Egito, para a contribuição decisiva dos fenícios- a invenção do alfabeto- e sua transmissão através da Grécia e Roma para o mundo moderno. Juntos, números e letras representam os instrumentos gêmeos sem os quais nem o raciocínio científico nem o registro acumulado do conhecimento humano teriam sido possíveis.

2.1 Números . . . 13
2.1.1 Sistemas Sexagimais e Duodecimais . . . 13
2.1.2 Ângulos . . . 15
2.1.3 Tempo . . . 15
2.1.4 Sistema decimal e numerais hindu-árabe . . . 16
2.1.5 A História de π . . . 17
2.1.6 Números irracionais e a razão de ouro . . . 18
2.2 Cartas: A história dos sistemas de escrita . . . 18
2.2.1 Os Primeiros Registros: Tokens, Tallies e Clay . . . 19
2.2.2 Cuneiforme: O primeiro sistema de escrita do mundo . 19
2.2.3 Hieróglifos egípcios e a tradição pictórica . . . 20
2.2.4 Os fenícios e a invenção do alfabeto . . . 21

2.1 Números

2.1.1 Sistemas Sexagimais e Duodecimais

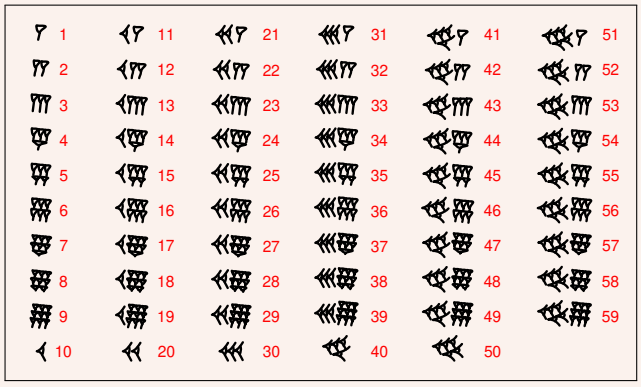
Não muito depois da Idade do Bronze, Sumer - uma das primeiras civilizações registradas, ao lado do Antigo Egito - emergiu na Mesopotâmia, a região delimitada pelos rios Eufrates e Tigre. O acordo permanente

CÓPIA PARA REVISÃO

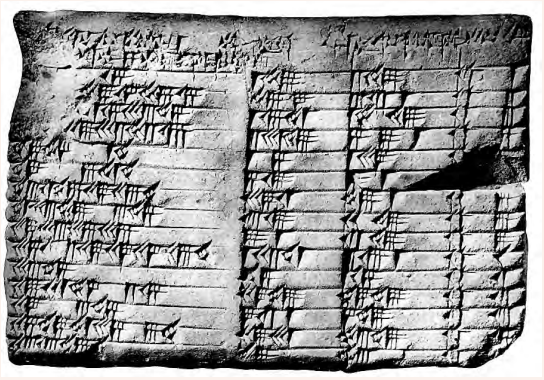
ocorreu entre aproximadamente 5500 e 4000 BC (Mieroop, 2024). Sumer foi eventualmente sucedido pelo Império Babilônico (cerca de 1895–539 A.C.), que herdou e expandiu muitos aspectos da cultura suméria. Entre as contribuições mais duradouras dos sumérios estava o desenvolvimento do sistema de escrita mais antigo conhecido: cuneiforme, composto de caracteres em forma de cunha impressionados em tábuas de argila.

Na bolsa moderna, tais tablets são frequentemente identificados pelo nome da coleção em que estão detidos. Por exemplo, Plimpton 322 é parte da coleção Plimpton da Universidade de Columbia, enquanto Yale Babilônico Collection 7289 é realizada na Coleção Babilônica de Yale (Robson, 2001). Devido às notáveis qualidades de preservação da argila assada, consideravelmente mais é conhecido hoje sobre matemática suméria e babilônica do que sobre a matemática do antigo Egito, que foi amplamente registrada em papiro mais perecível.

Os sumérios e babilônios empregaram um duodecimal (base 12) e sexagesimal (base 60) sistema numérico, como ilustrado na figura. 2.1a.. O calendário deles O ano foi composto por 360 dias, provavelmente refletindo raciocínio astronómico e geométrico. No entanto, eles inicialmente faltavam um símbolo para zero, embora mais tarde desenvolveram um símbolo de placeholder - não um verdadeiro zero no sentido matemático moderno. O conceito de zero como um número com suas próprias regras aritméticas não seria formalmente estabelecido até que o matemático indiano Brahmagupta em 628 d.C., de onde passou para o mundo islâmico e, eventualmente, para a Europa medieval (Kaplan, 2000).



(a) Números cuneiformes babilônios



(b) Plimpton 322, Universidade de Columbia

Figura 2.1: Matemática babilônica

Curiosamente, os sumérios não contaram usando os dez dedos como é comum hoje, mas em vez disso usaram os doze ossos dos dedos (falanges) em uma mão - três em cada um dos quatro dedos - enquanto empregavam o polegar como ponteiro para tocar cada osso na sequência. Isso permitiu que eles contassem até 12 em uma mão. Usando a outra mão para rastrear o número de iterações, eles poderiam contar até 60 no total - doze unidades em cinco dígitos (Maor, 2001).

A escolha de 60 não foi arbitrária. É o que agora é chamado de *Número composto superior*, significa que tem mais divisores do que qualquer número inteiro positivo menor: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60. Importante, é divisível pelos três primeiros números primos (2, 3 e 5), o que simplifica muito a representação das frações. Em contraste, um decimal Sistema sem notação fracionária só permite divisão limpa por 2 e 5. Em um contexto comercial, tal divisibilidade provavelmente facilitou aritmética prática no comércio e contabilidade (Neugebauer, 1969; Menninger, 2013).

Historicamente, o duodecimal O sistema permaneceu em uso entre os babilônios e depois os gregos, devido em parte à sua conveniente divisibilidade por 2, 3 e 4. Sua persistência também foi reforçada por

CÓPIA PARA REVISÃO

observações astronômicas, particularmente o fato de que existem aproximadamente doze ciclos lunares por ano (Maor, 2001).

Entre os mais famosos cuneiformes artefatos, Plimpton 322 (Fig. 2.1b), datado de cerca de 1800 a.C., sugere que os estudiosos babilônios estavam cientes das propriedades dos triângulos retângulos muito antes da época de Pitágoras. O tablet lista quinze conjuntos de inteiros (a, b, c) satisfazendo o relacionamento $a^2 + b^2 = c^2$- agora conhecido como Pitágoras -Triplas. Enquanto alguns estudiosos uma vez descartaram isso como um conjunto de exercícios abstratos, interpretações modernas argumentam que o tablet reflete uma compreensão sofisticada das relações numéricas (Robson, 2001).

Outro artefato notável, Yale Babilônico Collection (YBC) 7289, contém um sexagesimal notavelmente preciso Aproximação de $\sqrt{2}$-correto para cerca de seis casas decimais (1.414214) (Robson, 2002).

Cientificamente, os babilônios são mais conhecidos por suas contribuições para matemática e astronomia. Em contraste, suas realizações de engenharia — embora notáveis em áreas como a irrigação — foram relativamente modestas quando comparadas com as de civilizações posteriores, tais como os gregos ou romanos.

2.1.2 Ângulos

Os babilônios também eram observadores aguçados do céu noturno e, para traçar posições celestes, desenvolveram uma forma inicial de referência pórtico. Por volta do século V a.C., eles introduziram o zodíaco como um sistema de coordenadas para propósitos astronómicos. Este sistema era uma extensão natural de sua base sexagâmica e provavelmente influenciada por suas observações geométricas, como o fato de que o perímetro de um hexágono regular é igual a seis vezes o raio do seu círculo circunscrito. O desenvolvimento do círculo de 360 graus provavelmente surgiu de múltiplas influências incluindo seu sistema de calendário (360 dias), considerações geométricas e observações astronômicas, embora a origem exata continue sendo um assunto de debate acadêmico (Toomer, 1998).

Enquanto os egípcios eram capazes de determinar inclinações, provavelmente usando instrumentos como o groma, o conceito abstrato de um ângulo Parece ser desconhecido em termos matemáticos. Os gregos estão mais claramente associados com a formalização da medição do ângulo. Thales de Mileto (c. 624–c. 545 a.C.) é creditado com a prova de que a soma dos ângulos em um triângulo é igual a 180 graus. Notavelmente, ele também rompeu com explicações mitológicas propondo que a Terra flutuasse sobre a água e que terremotos resultado do movimento de onda, embora seu raciocínio fosse filosófico ao invés de baseado na compreensão moderna da tectônica da placa (Boyer e Merzbach, 2011).

Um grande avanço relacionado à medição angular veio de Aristarchus de Samos (c. 310–c. 230 a.C.), que estimou o diâmetro angular do Sol em aproximadamente dois graus. Ele também é reconhecido como o primeiro a propor um modelo heliocêntrico do sistema solar (Evans, 1998).

Hipparchus (c. 190–120 a.C., muitas vezes considerado como o pai da trigonometria, é creditado com a divisão do círculo em 360 graus. Cerca de dois séculos depois, Ptolomeu (c. 100–c. 170 d.C.), trabalhando no Egito Romano, estendeu este sistema dividindo cada grau em 60 partes iguais, e subdividindo ainda mais cada parte em 60 peças menores. Quando suas obras gregas foram mais tarde traduzidas para o latim medieval, essas subdivisões eram chamadas *partes minuciae primae* (primeiras partes pequenas) e *partes minuciae secundae* As origens etimológicas dos termos modernos *minutos* e.. *segundos* (Neugebauer, 2012).

2.1.3 Tempo

Assim como os babilônios Empregou um duodecimal e sexagesimal Sistema de números, os antigos egípcios Também fez uso de um duodecimal Estrutura. Como já foi observado, 12 é um número altamente composto superior, oferecendo vantagens práticas na divisão fracionária. Consequentemente, quando chegou a hora

CÓPIA PARA REVISÃO

Para dividir o dia em unidades menores, os egípcios naturalmente dividiam-no em dois conjuntos de doze horas: uma para a luz do dia e outra para a noite. Essas primeiras horas, no entanto, não tinham um comprimento fixo; Eles variavam com as estações dependendo da duração relativa do dia e da noite (Clagett, 1995).

A ordem foi introduzida por Hipparchus (veja acima), que propôs dividir o dia em 24 horas iguais, um sistema que ficou conhecido como horas equinociais - baseado na divisão igual da luz do dia e escuridão durante os equinócios (Evans, 1998).

A subdivisão da hora em unidades menores usando o sistema sexagesimal não ocorreu até o início da Idade Dourada Islâmica. Cerca de 1000 d.C., o polimath Al-Biruni Aplicou métodos babilônios para subdividir a hora em 60 minutos e então em 60 segundos (Kennedy, 1971). Essa abordagem foi adotada mais tarde por John de Sacrobosco Por volta de 1235 d.C. em Paris medieval - mais de dois séculos após Al-Biruni (Grant, 1977).

Assim, o conceito moderno de tempo reflete uma síntese de duas antigas tradições numéricas: O duodecimal egípcio A estrutura e o sexagesimal babilônico Sistema.

2.1.4 Sistema decimal e numerais hindu-árabe

Contar em dedos é, sem dúvida, a origem mais intuitiva dos sistemas numéricos, e o decimal sistema baseado em dez dígitos foi de fato usado por várias civilizações antigas, incluindo os gregos, egípcios e romanos. Este último, em particular, era conhecido por sua orientação prática para administração e engenharia.

O passo decisivo, no entanto, não foi apenas contar na base dez, mas desenvolver um *Posicional* notação em que o valor de um dígito depende do seu lugar dentro de um número, e no qual zero funciona não apenas como um substituto, mas como um número por direito próprio. Este avanço foi alcançado na Índia. O matemático Brahmagupta, escrevendo em 628 d.C., foi o primeiro a formular regras aritméticas para zero e números negativos (Kaplan, 2000). O sistema decimal posicional resultante foi transmitido ao mundo islâmico através do trabalho de Al-Khwarizmi, cujo tratado *Kitāb al-mukhta'ar fī isāb Al-jabr wa-l-muqābala* (c. 825 Não só popularizou os números hindu-árabe. mas também deu origem à palavra *álgebra*.. O sistema foi introduzido na Europa medieval por Leonardo de Pisa - mais conhecido como Fibonacci- através de sua *Liber Abaci* (1202 d.C.), em que ele demonstrou a superioridade prática da numeração hindu-árabe sobre números romanos para aritmética comercial (Devlin, 2011).

Há pouco a acrescentar sobre o decimal sistema até a Revolução Francesa, quando o zelo revolucionário estendeu-se até mesmo à medida do tempo.. Em um esforço para impor ordem racional em todos os aspectos da vida, os revolucionários franceses introduziram um sistema decimal baseado no tempo: Um dia de 10 horas, cada hora composta por 100 minutos, e cada minuto composto por 100 segundos. Decreto em 1793 (Ano) II do Calendário Republicano) e mandatado a partir de 1794, o sistema — embora matematicamente elegante — provou ser impraticável e foi rapidamente abandonado (Richards, 1998).

A reforma estendeu-se ainda mais com a introdução do calendário republicano francês, que dividiu o ano em doze meses de três semanas de dez dias (*décadas*). Para completar os 365 ou 366 dias de ano, cinco ou seis feriados adicionais.."*Jours Complementaires*"-foram anexados no final do ano (Gleick, 2016).

Embora a cronometragem decimal não perdurasse, outra inovação do período - o sistema métrico - fez. Em última análise, evoluiu para o *Système International d'unités* (SI), agora mantido pelo Departamento Internacional de Pesos e Medidas e amplamente adotado em ciência e engenharia.

Quanto ao binário sistema (base 2), suas raízes matemáticas podem ser rastreadas até Leibniz no século XVII, que foi ele próprio parcialmente inspirado pelos antigos chineses *I Ching*Um texto cujo sistema hexagrama de linhas quebradas e contínuas Leibniz reconheceu como uma personificação da lógica binária (Davis, 2018). Hoje, o sistema binário sustenta a era digital. Engenheiros estruturais, muitas vezes subconscientemente,

CÓPIA PARA REVISÃO

dependem dele todos os dias - seja compondo documentos, executando análises, ou executando simulações em computadores.

2.1.5 A História de π

Entre as constantes matemáticas que permeiam a engenharia, π- A proporção de um A circunferência do círculo ao seu diâmetro é talvez a mais universalmente encontrada. Sua expansão decimal,

$$\pi = 3.14159265358979\ldots,$$

é irracional (não pode ser expressa como uma proporção de dois inteiros) e transcendental (não satisfaz equação polinomial com coeficientes racionais), propriedades que não foram formalmente estabelecidas até o século XIX.

A necessidade prática de aproximar π É antigo. Os babilônios usou o valor $3\frac{1}{8} = 3.125$, enquanto o Rhind Papiro (c. 1650 a.C.) implica que um egípcio Aproximação de $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.1605..$ O primeiro rigoroso O tratamento matemático é devido a Arquimedes (c. 287–212 a.C.), que delimitaram π por inscrever e circunscrever regularmente polígonos sobre um círculo (Fig. 2.2). Usando *96*- polígonos laterais, ele estabelecido:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

um resultado de uma precisão notável para o seu tempo. Este método poligonal permaneceu o abordagem computacional dominante por quase dois milênios.

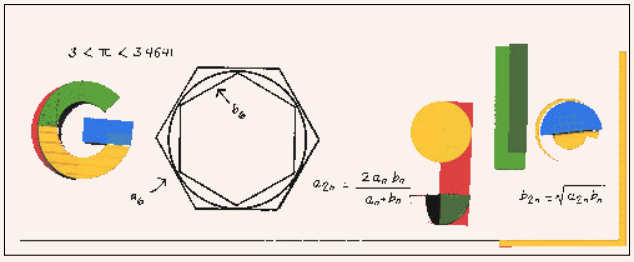


Figura 2.2: Doodle do Google no Dia de π (14/3/2026); homenagem a Arquimedes

Avanços significativos vieram da tradição matemática indiana. Aryabhata (476–550 ad) deu $\pi \approx 3.1416$E depois Madhava (c. 1340–1425) da escola Kerala derivado o que é agora conhecido como o Leibniz - Série Gregory:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

antecipando-se por dois séculos, os resultados mais tarde atribuídos aos matemáticos europeus. No século XVII, o desenvolvimento do cálculo abriu novas avenidas: Newton Computado π Dezasseis casas decimais usando uma expansão binomial da série, observando que ele não estava orgulhoso de ter passado Tanto tempo na computação.

O símbolo π Foi introduzido por O matemático galês William Jones em 1706 e popularizado por Euler De 1737 em diante.. mesmo Euler cuja identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$ aparece em §2.1.6.. O Prova que.. π É irracional foi dado por Lambert em 1768, e sua transcendência foi estabelecido por Lindemann Em 1882, finalmente se estabeleceu A antiga questão do *Quadratura do círculo*— o impossibilidade de construir, por bússola e retilíneamente sozinho, um quadrado de área igual a um determinado círculo.

CÓPIA PARA REVISÃO

2.1.6 Números irracionais e a razão de ouro

Números irracionais estão sempre presentes na vida dos engenheiros - mais notavelmente através de constantes como π e.. e.. Esses dois números transcendentais estão entrelaçados no que tem sido descrito como a equação mais bonita da matemática: EulerA identidade,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Embora elegante, esta identidade encontra poucas aplicações diretas em análise estrutural - com a notável exceção de EulerÉ a fórmula para flambagem cargas. Mais relevante no contexto do projeto arquitetônico (embora não mecânica) é o chamado *Razão Dourada*.

Euclides (c. 330 a.C.), no Livro VI de *Os Elementos*, define a divisão de uma linha em proporção extrema e média como segue: uma linha é dita para ser cortada em proporção extrema e média quando o todo é para o segmento maior como o maior é para menor.[1] Isso está ilustrado na figura. 2.3, e algebricamente expressa como:

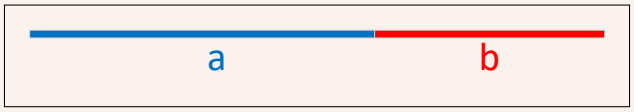


Figura 2.3: EuclidesÉ a definição do *Proporção extrema e média*

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{a+b}{a} & = & \frac{a}{b}, \\ x & = & \frac{a}{b} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \overset{\text{def}}{=} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.6180339887\ldots \\ 0.6180339887\ldots \end{cases}$$

Aqui ϕ Denota a razão dourada Nome de Phídias (§3.2.3), embora ele mesmo não o usasse em forma matemática. Esta é a definição clássica da razão dourada, embora muitas outras formulações geométricas existam. Notoriamente, ϕ Também aparece como a relação limitante de termos consecutivos no Fibonacci Sequência: $\phi = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$Uma ponte inesperada entre uma sequência inteira recursiva e uma constante irracional enraizada na geometria.

Há especulações de que os antigos egípcios incorporaram a Razão Dourada no desenho das pirâmides; no entanto, tais alegações são amplamente contestadas, pois não há evidência confiável de que possuam as ferramentas matemáticas necessárias para definir ou calcular números irracionais. Não foi até o Renascimento que a Razão Dourada foi explicitamente invocada pelos arquitetos para melhorar a aparência e percepção de harmonia dos edifícios (Livio, 2008).

2.2 Cartas: A história dos sistemas de escrita

Números não existem em isolamento. Eles exigem um meio de expressão. A história de como os seres humanos registraram, comunicaram e transmitiram conhecimento é inseparável da história da matemática e engenharia. A escrita e a numeração co-evoluíram, e vale a pena traçar as origens da linguagem escrita ao lado dos sistemas numéricos descritos acima.

[1] Por mais de dois milênios, Euclides *Elementos* era o paradigma do raciocínio matemático. Começando com definições básicas e postulados, Euclides desenvolveu um rigoroso sistema dedutivo no qual cada proposição seguiu logicamente daqueles que a precederam.

CÓPIA PARA REVISÃO

2.2.1 Os Primeiros Registros: Tokens, Tallies e Clay

Muito antes do surgimento da escrita formal, as comunidades humanas desenvolveram sistemas rudimentares para registro de quantidades. Entre os artefatos mais antigos deste tipo estão *Palitos de contagem*-Ossos ou madeira entalhados para registrar conta. O osso de Lebombo Da África do Sul (c. 43,000 a.C.) pode representar o mais antigo artefato matemático conhecido, enquanto o osso de Ishango, descoberto na República Democrática do Congo e datado de aproximadamente 20,000 a.C., carrega uma série de entalhes arranjados em padrões que alguns estudiosos interpretam como evidência do raciocínio aritmética inicial (Marshack, 1972).

Mesmo antes de escrever em si, as sociedades mesopotâmicas usavam pequenas argilas *fichas*- Representando mercadorias como grãos, petróleo ou gado - para rastrear transações. Por volta de 3500 a.C., estas fichas estavam sendo fechadas em envelopes de argila ocos, com impressões pressionadas do lado de fora para indicar o conteúdo, como ilustrado na figura. 2.4.. Foi um pequeno passo conceitual de tais impressões para a marcação direta de símbolos em superfícies planas de argila, e com esse passo, nasceu a escrita (Schmandt-Besserat, 1992).



Figura 2.4: Tokens de argila mesopotâmica: Precursores da escrita (c. 3500 a.C.)

2.2.2 Cuneiforme: O primeiro sistema de escrita do mundo

O mais antigo sistema de escrita conhecido do mundo, cuneiforme- Emergido em Sumer por volta de 3200 a.C.. Seu nome deriva do latim *cuneus* (Wedge), refletindo a forma característica das marcas produzidas pressionando um estilo de cana em argila macia. Inicialmente pictográfico de caráter, cuneiforme rapidamente evoluiu para um sistema silábico mais abstrato capaz de representar não só mercadorias e contas, mas literatura, direito e ciência, como ilustrado pela progressão mostrada na figura. 2.5.

O *Épico de Gilgamesh*, entre os mais antigos trabalhos de literatura sobreviventes, foi preservado em comprimidos cuneiformes; Assim também foram registros astronômicos, conjuntos de problemas matemáticos, e o código da lei de Hammurabi (c. 1754 a.C.). Clay provou ser um meio extraordinariamente durável: Assados, intencionalmente ou pelos incêndios que destruíram cidades antigas, tablets sobreviveram por milênios. É precisamente por isso que a matemática babilônica e suméria são mais bem documentadas hoje do que a Matemática do Egito, onde o médium primário era o papiro muito mais perecível (Kramer, 1963).

Com o tempo, cuneiforme foi adaptado por inúmeras culturas do Oriente Próximo, incluindo os acádios, assírios, hititas e persas. No primeiro milênio a.C., no entanto, estava sendo gradualmente deslocado por sistemas de escrita mais flexíveis - o mais importante, o alfabeto. O último comprimido cuneiforme conhecido data de aproximadamente 75 d.C.; O roteiro já estava extinto há séculos como uma tradição viva.

CÓPIA PARA REVISÃO

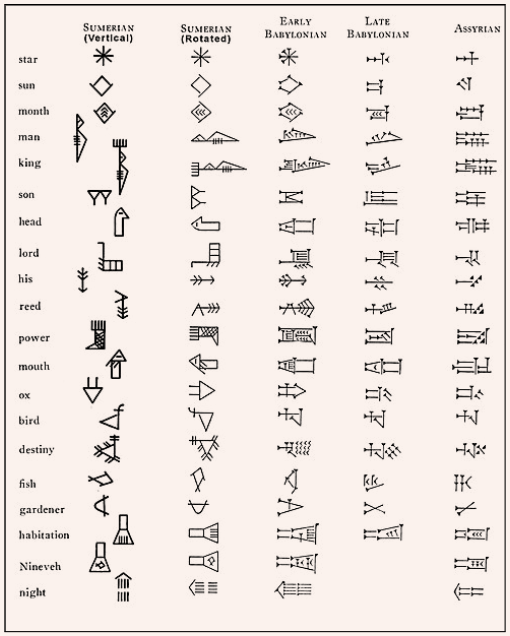


Figura 2.5: Evolução da cuneiforme a partir de pictográfica (c. 3200 a.C.) para abstrair sinais silábicos (c. 2000 a.C.)

2.2.3 Hieróglifos egípcios e a tradição pictórica

Independentemente da Mesopotâmia, embora possivelmente com estímulo indireto, antigo Egito desenvolveu seu próprio sistema de escrita por volta de 3100 a.C.. Hieróglifos egípcios (do grego *Hieros*, sagrado, e *Glyphein*, para esculpir) eram um sofisticado sistema misto, combinando sinais logográficos (onde um símbolo representa uma palavra ou conceito), sinais fonéticos (onde símbolos representam sons), e determinantes (sinais não pronunciados indicando categoria semântica), como ilustrado em Fig. 2.6.. O resultado foi capaz de extraordinária gama expressiva e beleza visual, como evidenciado pelas inscrições que adornam templos, túmulos e monumentos em todo o Egito.



Figura 2.6: Hieróglifo egípcio

CÓPIA PARA REVISÃO

Hieróglifos[2] foram usados para inscrições monumentais em pedra, enquanto dois derivados cursivos - hieratic e depois Demotic[3]- foram empregados para escrever diariamente em papiro. O conhecimento matemático foi transmitido nesses roteiros cursivos; O papiro matemático de Rhind (c. 1650 a.C.) e o papiro matemático de Moscou (c. 1850 a.C.) estão entre as fontes primárias para o nosso entendimento da aritmética e geometria egípcia (Clagett, 1999).

A decifração dos hieróglifos, um mistério para o mundo ocidental, foi alcançada por Jean-François Champollion Em 1822, usando a pedra trilíngue Rosetta (Fig. 2.7), inscrito em hieróglifo, demótico e grego, como sua chave (Parkinson, 1999). A riqueza pictórica da tradição hieroglífica está em nítido contraste com a eficiência abstrata que se seguiria: o alfabeto.

2.2.4 Os fenícios e a invenção do alfabeto

De todas as inovações na história da comunicação escrita, nenhuma provou ser mais conseqüente do que a invenção do alfabetoO sistema pelo qual um pequeno conjunto de sinais, cada um representando um único som consoante, pode ser combinado para escrever qualquer palavra em qualquer idioma. Esta invenção é atribuída aos fenícios[4], uma civilização marítima semítica que floresceu ao longo da costa oriental do Mediterrâneo no território do Líbano atual, norte de Israel, e na Síria costeira - de cerca de 1500 a 300 a.C. (Sader, 2019).

O alfabeto fenício, que cristalizou por volta de 1050 a.C., consistiu em 22 letras consoantes (tornando-o um *Abade*—um sistema de escrita gravando apenas consoantes, deixando vogais a serem inferidas pelo leitor), como mostrado na figura. 2.8.. Cada letra tinha um nome que também era uma palavra semítica começando com o som correspondente: *Aleph* (ox), *Beth* (casa), *Gimel* (camela), e assim por diante. Esse princípio acrofônico- usando o som inicial de uma palavra como o nome e valor do sinal - foi tanto mnemônico e elegante. Os próprios sinais foram derivados do script proto-sinaítico anterior, que por sua vez parece ter sido inspirado por hieróglifos egípcios, embora adaptado para representar os sons de uma língua semítica (Naveh, 1987).

O gênio do sistema fenício estava em sua economia radical: onde cuneiformes exigiam centenas de sinais e hieróglifos egípcios empregavam milhares, o alfabeto fenício reduziu a representação escrita da linguagem

[2]Existe um paralelo instrutivo entre hieróglifos egípcios e chineses personagens:. Ambos são sistemas mistos combinando sinais logográficos (onde um símbolo representa uma palavra ou morfema), componentes fonéticos (onde os elementos indicam som), e classificadores semânticos análogos ao egípcio Determinativos. Em chinês, a maioria dos personagens são *Fono-semântico compostos*, consistindo de uma semântica radical que insinua significado e um componente fonético que sugere pronúncia.. Lógica estrutural surpreendentemente semelhante à combinação egípcia de logograma, fonograma, e determinável. Os dois sistemas desenvolveram-se totalmente independentemente, mas convergiram para a mesma solução organizacional para o problema de representar um complexo falado Linguagem por escrito. Esta convergência estrutural é às vezes citada como evidência de que sistemas logográficos-fonéticos mistos representam um estágio intermediário natural na evolução da escrita (Daniels e Bright, 1996).

[3]Demótico (do grego) *dĒmotikós*Era um roteiro cursivo que surgiu no Egito por volta do século VII a.C. como uma simplificação do script hieratico anterior, ele mesmo um derivado cursivo de hieróglifos. Onde Hieratic tinha sido usado principalmente por padres e escribas para textos religiosos e administrativos, Demotic tornou-se o sistema diário de escrita de egípcios alfabetizados para uma gama muito mais ampla de propósitos - contratos legais, cartas, textos literários, e comerciais Registros. Permaneceu em uso por cerca de um milênio, até que foi gradualmente deslocado pelo grego após a conquista do Egito por Alexandre, o Grande (332) a.C.) e, mais tarde, por Copta, a fase final da língua egípcia escrita em um alfabeto grego modificado. A Pedra de Rosetta (196) a.C.) está entre os documentos mais célebres inscritos em Demotic, ao lado de suas versões hieroglífica e grega.

[4]Meus antepassados!

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

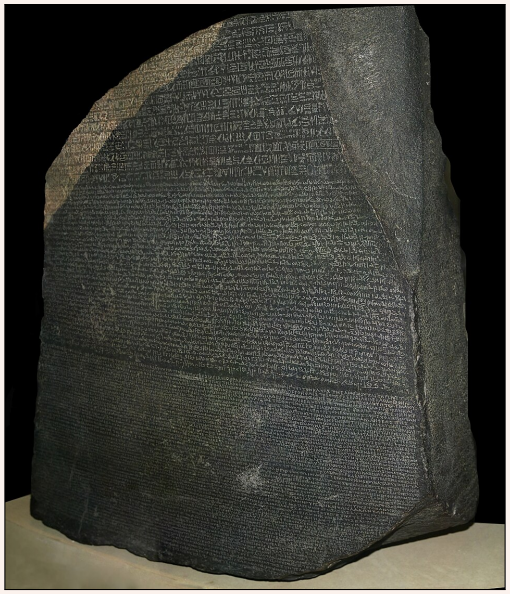


Figura 2.7: A Pedra de Rosetta (196) a.C., carregando o mesmo decreto em hieróglifo, demótico e grego (de cima para baixo), era a chave para decifrar o antigo script egípcio

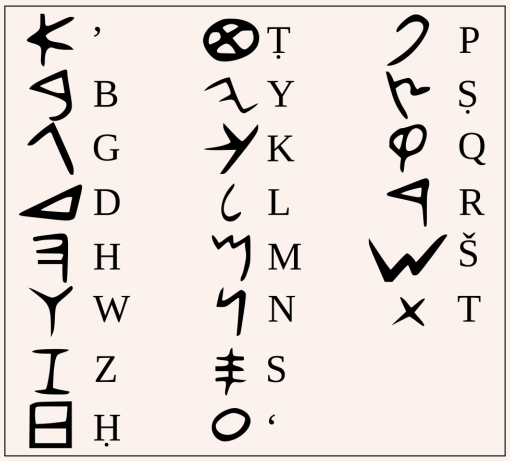


Figura 2.8: O alfabeto fenício (c. 1050 a.C.), mostrando os 22 sinais consoantes, seus nomes, e sua descida em letras gregas e latinas

para apenas 22 símbolos. Esta simplicidade tornou a alfabetização acessível muito além das estreitas classes de escriba que dominaram sistemas anteriores. Não foi por acaso que os fenícios, principais comerciantes do mundo antigo, cujas redes comerciais se estenderam do Levante para o Norte da África, Espanha e Ilhas Britânicas, foram os únicos a aperfeiçoar e disseminar esta ferramenta. Escrever, para eles, era acima de tudo um instrumento prático de comércio, correspondência e manutenção de registros.

A transmissão do alfabeto fenício transformou o mundo antigo. Os gregos Adotou por volta do século IX ou VIII a.C., fazendo a inovação crítica de repurposing vários sinais consoante fenícios para representar vogais-criando assim o primeiro alfabeto verdadeiro em que ambas as consoantes e vogais foram sistematicamente escritas. Este alfabeto grego foi por sua vez adaptado pelos etruscos, e deles pelos romanos, dando origem

CÓPIA PARA REVISÃO

ao alfabeto latino que está por trás da maior parte dos escritos no mundo ocidental hoje. Enquanto isso, o mesmo protótipo fenício deu origem, através de ramos evolucionários separados, ao hebraico, Árabe, e eventualmente os roteiros Brahmic do sul e sudeste da Ásia, como resumido no diagrama genealógico de Fig. 2.9 (Daniels e Bright, 1996).

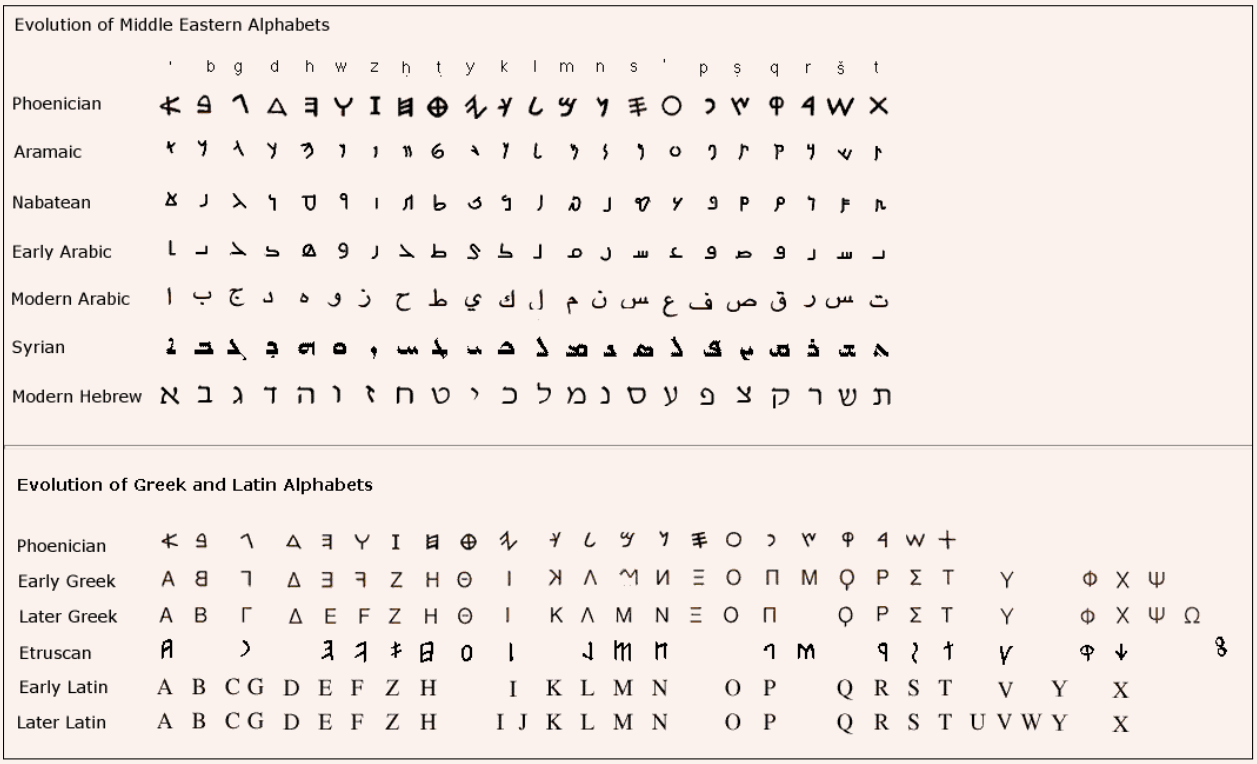


Figura 2.9: Genealogia de alfabetos: de Phoenician (c. 1050 a.C.) para grego, latim, árabe, hebraico, e brâmane famílias script

As consequências culturais desta difusão dificilmente podem ser exageradas. A relativa facilidade da escrita alfabética permitiu a proliferação de literatura, filosofia, códigos legais e textos científicos em todo o mundo mediterrâneo. As obras de Homero, Platão, Euclides e Arquimedes - tudo escrito no alfabeto grego, ele próprio um descendente direto do fenício - formam o alicerce intelectual da ciência ocidental e engenharia. Neste sentido, os comerciantes fenícios que pressionaram 22 sinais em argila e arranharam-nos em potsherds foram contribuintes involuntários para a tradição matemática e mecânica que este livro procura crônica.

É apropriado, no contexto de um tratado sobre análise estrutural, notar que a palavra *engenheiro* Em última análise, ela remonta ao latim e ao francês antigo até o latim *Ingenium*- espiritismo nativo, esperteza - um conceito que a proliferação de escrita expressa e amplificada. Números e letras, registros e cálculos, não são fluxos separados: Eles são afluentes do mesmo rio.

CÓPIA PARA REVISÃO



Melencolia I de Albrecht Dürer (1514)

O quadrado mágico, os sólidos geométricos e as ferramentas de medição em torno da figura que envolve o despertar matemático da humanidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 3

Civilizações Antigas

Abstract

Os campos de análise estrutural e mecânica devem muito aos avanços intelectuais e práticos feitos por civilizações antigas. Entre estes, a Mesopotâmia, a mesoamérica, a Pérsia, a China, a Índia, o Japão, Roma, o Egito e o mundo árabe-islâmico ocupam um lugar significativo, tendo estabelecido as bases para vários princípios e técnicas que influenciaram tanto a mecânica teórica quanto a aplicada. Suas contribuições refletem uma mistura de investigação científica, engenhosidade em engenharia e experimentação prática que ressoa através dos tempos.

Os campos de análise estrutural e mecânica devem muito aos avanços intelectuais e práticos feitos por civilizações antigas. Entre estes, a Mesopotâmia, a América, a Pérsia, a China, a Índia e o Japão ocupam um lugar significativo, tendo estabelecido as bases para vários princípios e técnicas que influenciaram tanto a mecânica teórica quanto a mecânica aplicada. Suas contribuições refletem uma mistura de investigação científica, engenhosidade em engenharia e experimentação prática que ressoa através dos tempos.

3.1 Civilizações e Origens Monumentais 26
3.1.1 Mesopotâmia: Zigurates e estruturas de argila; C. 3100-500 a.C. 26
3.1.2 Mesoamérica: Pirâmides Maias e Astecas; C. 400 a.C.-1521 d.C. 26
3.1.3 Egito; C.~2700-1000 28
3.1.4 Comparando Mesopotâmia, Mesôamericana e Egípcia 31
3.2 Antiguidade Clássica: Geometria, Teoria e Império 35
3.2.1 Pérsia: Plataformas Imperiais, Pontes e Qanats 35
3.2.2 Contribuições Árabe-Islâmicas: Inovações em Engenharia Estrutural 37
3.2.3 Contribuições gregas para estática e Mecânica estrutural 39
3.2.4 Roma: Concreto, Arcos e Infraestrutura 43
3.3 Tradições matemáticas e estruturais da Índia, China e Japão 47
3.3.1 China: Sismologia, Pontes e Inovação Mecânica 47
3.3.2 Índia: Matemática, Materiais e Arquitetura Monumental 48
3.3.3 Japão: Resiliência sísmica e estruturas adaptativas 48
3.3.4 Síntese e Influência Global 49

CÓPIA PARA REVISÃO

3.1 Civilizações e Origens Monumentais

3.1.1 Mesopotâmia: Zigurates e estruturas de argila; C. 3100-500 a.C.

A Mesopotâmia, muitas vezes considerada como o "crácio da civilização", lançou bases fundamentais nos domínios de mecânica estrutural e infraestrutura civil. Zigurates, as plataformas monumentais erguidas nos principais centros urbanos da Mesopotâmia, servem como primeiras demonstrações de construção em massa sob regimes de carga dominados pela gravidade. O Grande Zigurado de Ur (cerca de 2100~a.C.), Fig. 3.1a, por exemplo, foi construído usando um núcleo de tijolos de lama seco-sol envolvido por tijolos queimados para maior durabilidade e resistência ao tempo (Oppenheim, 1977). A geometria em terraço proporcionou uma dispersão efetiva tensão através de múltiplas camadas, reduzindo o acúmulo de compressão vertical tensão na base e melhorando a estabilidade global. O uso do betume como agente de ligação introduziu ductilidade e aumentou a coesão dentro da matriz alvenaria, melhorando sua resistência à falha cisalhamento e degradação ambiental. Vale a pena notar que os mesopotâmios usavam formas primitivas de arco em sistemas subterrâneos de drenagem e túmulos, já em 4000 a.C., embora estes fossem arcos corbelados ao invés de verdadeiros arcos de vousoir.

Enquanto as pirâmides egípcias e os zigurates mesopotâmicos compartilham uma semelhança geométrica superficial, não há evidência conclusiva de influência direta. No entanto, a forma icônica do zigurate quase certamente inspirou a narrativa bíblica da Torre de Babel, particularmente através da imponente Etemenanki da Babilônia (George, 1993).

Paralelamente, engenheiros mesopotâmicos desenvolveram princípios básicos de engenharia hidráulica para apoiar a agricultura e resiliência urbana. Eles implementaram redes de irrigação controladas em canais abertos e diques de terra com perfis transversais projetados para mitigar o risco de inundação e fluxos sazonais diretos de água. Estes sistemas incorporaram conceitos de gradiente hidráulico e continuidade do fluxo, mesmo que ainda não formalizados matematicamente. Clay, um geomaterial abundante, não era apenas um elemento estrutural, mas também servia na fabricação de moldes e componentes protótipos - sugerindo um uso precoce de templating na produção arquitetônica. Coletivamente, essas inovações refletem uma compreensão pragmática do comportamento estrutural, desempenho material e dinâmica hidrológica dentro de um ambiente restrito aos recursos.

Clay Embora ambos os tijolos de lama para zigurates mesopotâmicos e argila para tabletes cuneiformes fossem extraídos dos mesmos lodos aluviais da planície de inundação Eufrates-Tigris, a matéria-prima foi processada diferentemente para atender aos requisitos de engenharia distintos. Os tijolos arquitetônicos incorporaram lodo grosso e temperamento de palha para melhorar a resistência à tração e foram em grande parte secos ao sol, com forno de frente selecionado queimado e selado em betume para proteção do tempo.

Em contraste, os escribas leviavam a argila (Fig. 3.1b), removendo palha e partículas grossas para obter uma pasta plástica fina que poderia aceitar impressões de estilo crocante; A maioria dos comprimidos era apenas seca pelo ar, atingindo um baixo disparo acidental somente durante conflagrações posteriores. Assim, um único recurso geológico produziu dois "receitos"projetados, feitos respectivamente para alvenaria compressiva e arquivística (Oates, 1990; Moorey, 1999).

3.1.2 Mesoamérica: Pirâmides Maias e Astecas; C. 400 a.C.-1521 d.C.

Embora as pirâmides do templo Mesoamericano datem os zigurates do Velho Mundo e pirâmides egípcias por mais de um milênio, eles são tratados aqui ao lado desses monumentos anteriores porque representam uma emergência independente e convergente de grande escala arquitetura, oferecendo uma base paralela para a tradição global da monumentalidade. Este desenvolvimento independente, sem contato com civilizações do

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Zigurath (b) Comprimido

Figura 3.1: Clay na Mesopotâmia

Velho Mundo, demonstra que certas soluções estruturais surgem naturalmente de restrições de engenharia universal.

As civilizações da Mesoamérica, incluindo os maias, astecas e seus antecessores, fizeram contribuições notáveis para a engenharia estrutural e arquitetura monumental. Suas pirâmides icônicas, caracterizadas por escadas íngremes, plataformas de degraus, e alinhamento com fenômenos celestes, serviam como centros religiosos, políticos e cosmológicos. Essas estruturas não foram construídas apenas para impressionar; eles foram o produto de planejamento cuidadoso, seleção de materiais e adaptação ambiental.

Pirâmides maias, como as de Tikal, Palenque (250-900 d.C.), Fig. 3.2a, e Chichen Itza, exibe um alto grau de sofisticação em engenharia. Os construtores empregaram formas escalonadas que melhoraram a distribuição de carga e reduziram o impulso lateral, permitindo maior altura sem comprometer a estabilidade. O uso de calcário localmente quarried, juntamente com argamassa à base de cal, permitiu coesão duradoura em condições de alta umidade. Os núcleos internos de enchimento, muitas vezes feitos de entulho e argamassa, foram compactados para fornecer massa e rigidez (Coe, 2005; Sharer e Traxler, 2006). Estas pirâmides frequentemente suportavam templos em seus cumes, indicando seu significado cerimonial e servindo como marcadores verticais do espaço sagrado. Sua geometria muitas vezes codificava o conhecimento calandrical e astronômico, com alinhamentos apontando para solstícios, equinócios e ciclos de Vênus.

Pirâmides astecas, como a Prefeito de Templo em Tenochtitlán (1325-1487), Fig. 3.2b, continuou e elaborou sobre tradições anteriores. Construídos com basalto vulcânico, tezontle (uma rocha vermelha porosa de lava) e argamassa de cal, eles apresentavam amplos terraços e plataformas pisadas para distribuir o auto-peso e evitar a erosão da inclinação. Muitos usaram uma técnica de construção semelhante ao estilo Teotihuacan anterior conhecido como *Talud-tablero*, envolvendo uma parede inclinada (talude) sobreposta por um painel retangular (tablero), aumentando a integridade estrutural ao mesmo tempo oferecendo rico potencial simbólico e decorativo (Smith, 1996). Estas estruturas muitas vezes incorporaram fases sucessivas de construção — novas pirâmides construídas em cima das antigas — para significar continuidade dinástica e renovação cósmica.

As considerações ambientais eram centrais para o projeto urbano mesoamericano. Tanto os maias quanto os astecas desenvolveram sistemas avançados de drenagem e gerenciamento de água da chuva. Em cidades como Tenochtitlán, construídas em cima de leitos de lago, engenheiros criaram ilhas artificiais (chinampas), estradas levantadas, e diques com canais de pedra embutidos. Em terras baixas maias, canais forrados por pedras, reservatórios subterrâneos*Chultuns*), e canais de gestão de escoamento ajudaram a manter a resiliência urbana apesar das chuvas altamente sazonais (Sharer e Traxler, 2006).

As pirâmides da Mesoamérica exemplificam assim a integração de mecânica estrutural, engenharia de

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Mayan: Tikal-palenque



(b) Asteca: Tenochilan

Figura 3.2: Pirâmides maias e astecas

materiais, hidrologia e astronomia - muito antes da teoria científica formal ser articulada. Essas conquistas atestam uma tradição empírica de construção que era contextualmente responsiva e conceitualmente ambiciosa.

3.1.3 Egito; C.~2700-1000

O nascimento da arquitetura monumental de pedra A tradição arquitetônica do Egito começa com Imhotep, Vizier ao Faraó Djoser durante a Terceira Dinastia (c. 2660 a.C.), e amplamente considerado como o primeiro arquiteto, engenheiro e médico na história registrada (Lehner, 1997). Ele concebeu e supervisionou a construção da Pirâmide Step em Saqqara, Transformando o convencional *Mastaba*[1] Em um monumento de pedra em camadas que marcou o primeiro uso conhecido de pedra quarried em grande escala. Essa inovação introduziu princípios fundamentais de organização do trabalho, logística da construção e planejamento geométrico, estabelecendo uma base tecnológica e simbólica para o posterior design de pirâmides.

A linhagem arquitetural iniciada por Imhotep culminou três gerações depois sob o Faraó Sneferu (r. c. 2613-2589 a.C.), que encomendou uma série de pirâmides experimentais que avançaram a transição de formas escalonadas para geometrias suaves. Em Meidum, Sneferu provavelmente completou uma pirâmide de degraus cuja cápsula externa mais tarde entrou em colapso ou erodiu, embora a estrutura do núcleo permaneça intacta, provocando adaptações estruturais significativas. Sua Pirâmide Bent em Dahshur revela uma mudança de curso médio na inclinação-um ajuste para mitigar a falha-seguida pela construção bem sucedida da pirâmide vermelha, a primeira verdadeira pirâmide suave do Egito.

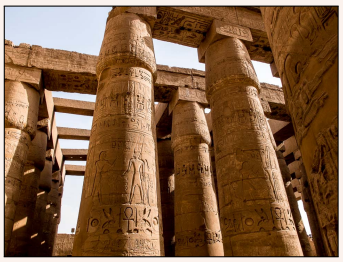
Estes refinamentos em geometria e métodos de construção permitiram diretamente que seu filho e sucessor, Khufu, realizasse a Grande Pirâmide em Gizé com precisão, escala e ambição estrutural incomparáveis. Sua superfície lisa original foi obtida usando pedras de revestimento de calcário Tura finamente vestidas, a maioria das quais desde então foram perdidas para erosão ou reutilização. A base das pirâmides desvia-se em menos de 20 mm sobre uma extensão de 230 metros, e seus lados estão alinhados ao norte verdadeiro dentro de uma fração de um grau, realizações notáveis no controle geométrico dadas as ferramentas da

[1] A *Mastaba* é uma tumba retangular, de teto plano com lados inclinados para dentro, usada nas primeiras práticas de enterro egípcias. Tipicamente construído de tijolo de lama ou pedra, mastabas serviu como precursores da forma pirâmide e continha câmaras funerárias subterrâneas com oferecendo capelas acima do solo.

CÓPIA PARA REVISÃO

época. A estrutura acabada, construída por volta de 2560 a.C., consiste em aproximadamente 2,3 milhões de blocos de calcário, cada um pesando várias toneladas. (Lehner, 1997).

As teorias modernas sugerem que os blocos foram movidos usando trenós em areia molhada (reduzindo o atrito por até 50%), juntamente com sistemas de rampas - ou retas, zigzagging, ou espiral - embora o método exato permanece debatido. Seus lados inclinados e bases alinhadas otimizam a distribuição de peso, reduzindo efetivamente cisalhamento e permitindo estabilidade estrutural em longo prazo sob imensa massa. Juntos, esses desenvolvimentos traçam uma evolução coerente no pensamento estrutural egípcio desde os começos empíricos até o domínio monumental.



(a) Templo Karnak em Luxor (~2000-300 a.C.)



(b) Pirâmide passo em Saqqara (~2667-2648 a.C.



(c) Grande Pirâmide de Gizé (Khufu / Cheops, ~2580-2560 a.C.

Figura 3.3: Templos e pirâmides egípcias

Templos, Materiais e Infraestrutura Os templos egípcios, como o Complexo do Templo de Karnak, Fig.~3.3aExibindo domínio na construção pós-e-lintel usando elementos de pedra maciça. Hipoestilo salões, apoiados por densamente espaçados pilares esculpidos a partir de arenito e granito, demonstram controle sofisticado sobre as forças de compressão e limitações de extensão do telhado (Arnold, 2003). Estes espaços não só serviram para propósitos cerimoniais, mas também mostraram uma floresta simbólica de pedra, reforçando a autoridade religiosa e política.

A perícia em material era central para a engenharia egípcia. Calcário, arenito e granito foram extraídos, moldados e transportados por grandes distâncias usando trenós, barcaças e rampas. A bem sucedida ereção de obeliscos-monolitos muitas vezes excedendo 300 toneladas-attestes para a compreensão egípcia da vantagem mecânica e controle de carga, particularmente em operações de elevação e colocação.

A engenharia hidráulica também desempenhou um papel vital na manutenção da sociedade egípcia. A inundação anual do Nilo foi gerenciada através de redes de canais, bacias de retenção e diques, apoiando uma economia agrária estável. Esses projetos refletem o conhecimento prático da dinâmica dos fluidos e planejamento de infraestrutura em larga escala (Butzer, 1976).

Geometria e o Seked Duas fontes principais para o nosso conhecimento de matemática prática egípcia são a *Rhind Papyrus Matemático* e o *Papiro Matemático de Moscou*.. Copiados durante o Reino Médio e Segundo Período Intermediário, esses manuscritos registram problemas relacionados com aritmética, geometria, conversão de unidades e mensuração arquitetônica. Mesa~3.1 resumos da data, contexto dinástico e repositórios atuais de cada documento, seguindo os estudos detalhados de Robins e Shute, 1987 e.. Gillings, 2019. Juntos, eles revelam os métodos empíricos que sustentavam a construção de pirâmides, levantamentos de terras e cálculos volumétricos durante o Reino Médio do Egito.

A cópia Rhind provavelmente preserva problemas compilados pela primeira vez dois séculos antes durante o Reino Médio.

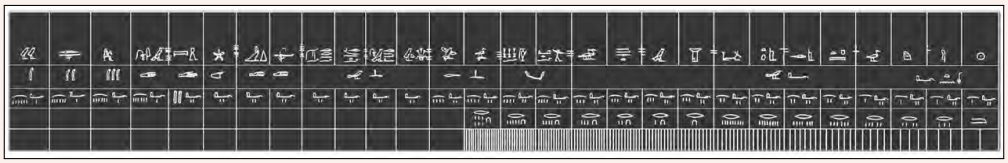
Os egípcios desenvolveram um sistema de medição baseado no *côvado*, uma antiga unidade de comprimento definida como a distância do cotovelo à ponta do dedo médio. Seu valor variava entre culturas, variando

CÓPIA PARA REVISÃO

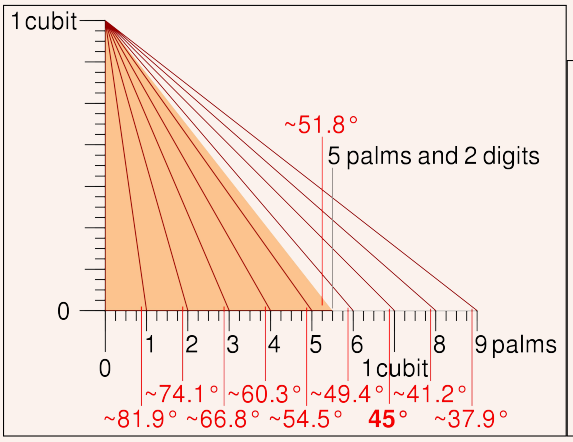
Tabela 3.1: Dados chave para os dois principais papiros matemáticos do Egito

Papiro	Data da cópia existente	Data provável do conteúdo original	Dinastia / Período	Repositório atual
Papiro Matemático Rhind (RMP)	c. 1650 a.C. (escriba Ahmès)	Material de origem do Reino Médio, C. 1850-1800 a.C.[2]	13 anosth- 15 anos mais cedoth Dyn. (Segunda Intermediária)	Museu Britânico, EA 10057–10058
Papiro Matemático de Moscou (MMP)	c. 1850 a.C.	Aproximadamente contemporâneo com cópia	Décima segunda Dinastia, Reino do Meio	Museu Estadual Pushkin, inv. 4676

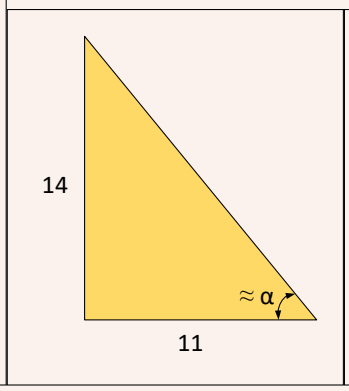
tipicamente de 44 a 52 cm (cerca de 17 a 20 polegadas). O chamado "cubito real"do antigo Egito mediu aproximadamente 52,4 cm e foi amplamente utilizado na arquitetura, construção e levantamento. O foi subdividida em 7 palmas, cada palma em 4 dedos, produzindo 28 unidades por cúbito (Fig.,3.4a). Em comparação, o côvado hebraico padrão era de cerca de 45 cm, enquanto que o côvado mesopotâmico (sumeriano) estima-se ter sido ligeiramente mais longo, em torno de 49 a 50 cm.



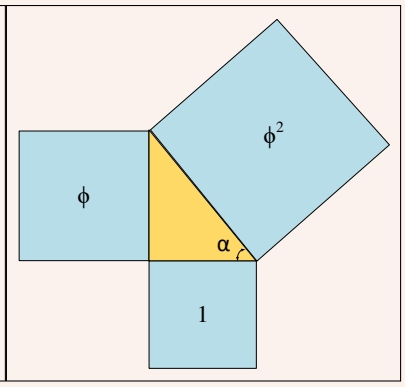
(a) Cúbito real egípcio (link)



(b) Definição secada (link)



(c) Triângulo 14:11 usado em pirâmides



(d) Aproximação do triângulo Kepler

Figura 3.4: Geometria egípcia e proporções de pirâmide

O *Seked* foi o método egípcio de expressar a inclinação do rosto de uma pirâmide. Mediu a corrida

CÓPIA PARA REVISÃO

horizontal por elevação vertical de um côvado. Como um côvado é igual a sete palmas, o secado foi expresso em palmas (e dedos) de corrida por cúbito de ascensão. Dado um ângulo de elevação da pirâmide ϕ, o seked é definido matematicamente como:

$$s = 7 \cot \phi$$

Note que o seked pode ser interpretado como uma aproximação racional à função cotangente por unidade de ascensão, que é paralela ao pensamento trigonométrico moderno. Embora não haja evidência de que os egípcios conceberam ângulos ou funções trigonométricas no sentido grego, sua separação encarna uma relação geométrica semelhante ao cotangente. Em contraste, a trigonometria formal como disciplina matemática não foi desenvolvida até que o 2nd século a.C. pelo astrônomo grego e matemático *Hipparchus*, muitas vezes creditado como o pai da trigonometria.

Para a Grande Pirâmide de Gizé, o seked foi registrado como 5.5 (5 palmas e 2 dedos), dando:

$$\phi = \cot^{-1}\left(\frac{5.5}{7}\right) \approx 51.84^\circ$$

Isto corresponde a uma proporção de aumento para corrida de 14:11, como ilustrado na figura.~3.4cE se alinha com a geometria reconstruída da pirâmide (Bartlett, 2014).

Alguns especularam que as proporções da pirâmide foram destinadas a refletir o *Razão Dourada* através da geometria de um triângulo Kepler (Fig.~3.4d). Nesse caso, o relacionamento seria:

$$\frac{14}{11} = 1.2727\ldots \quad \text{vs.} \quad \sqrt{\phi} = 1.2720\ldots \tag{3.1}$$

A diferença relativa é menor que 0,06%Mas como.. Markowsky, 1992 Cuidados, a presença de uma constante matemática em dimensões físicas não implica necessariamente design intencional - especialmente dada a ausência de um quadro conceitual egípcio claro para números irracionais.

3.1.4 Comparando Mesopotâmia, Mesôamericana e Egípcia

Templos Apesar de suas semelhanças visuais, as estruturas monumentais da Mesopotâmia, Egito, e Messoamérica - zigurates, pirâmides e piramidas do templo respectivamente - são a partir de diferentes estruturas culturais, estruturais e funcionais, fig. 1. 3.2.

zigurates mesopotâmicos, tais como o Grande Zigurate de Ur, foram construídos como plataformas maciças e em camadas feitas principalmente de tijolos de lama secos ao sol e queimados a forno, com betume usado como agente impermeabilizador. Estas estruturas eram inteiramente sólidas e serviam como bases elevadas para templos que simbolizavam uma ascensão física ao reino dos deuses. O zigurat não era um espaço público, mas uma delegacia sagrada acessível apenas ao sacerdócio. Estruturalmente, os zigurates dependiam de massa com carga e redução gradual para atenuar a compressão tensões e aumentar a durabilidade sob cargas gravitacionais.

Pirâmides egípcias, epitomizados pela Grande Pirâmide de Gizé, foram túmulos monumentais projetados para abrigar o corpo do faraó e facilitar sua jornada para a vida após a morte. Construídos principalmente a partir de calcário e granito, exibiam precisão geométrica requintada e layouts internos com câmara. O foco estava dentro de mim: Funções funerárias, proteção do sarcófago e alinhamento cosmológico com ciclos solares e estelares. Essas pirâmides não foram acessadas ou usadas na cerimônia após a conclusão. Sua excelência em engenharia estava na alvenaria de precisão, carregando através de planos inclinados, e robusto gerenciamento interno do vazio.

Temple-pyramids mesoamericanos, como aqueles em Chichen Itzá e Tenochtitlán, combinadas funções cerimoniais, astronômicas e políticas. Estas estruturas foram frequentemente construídas em estágios, com

CÓPIA PARA REVISÃO

novas camadas adicionadas sobre núcleos mais antigos. Construídos com pedra, argamassa de cal e entulho, eles apoiaram templos de cume usados para rituais, performances públicas e observação celestial. Ao contrário das pirâmides egípcias, estas não eram tumbas; Ao contrário dos zigurates, eles eram acessíveis e interativos. Suas formas esplanadas, escadas largas, e alinhamento com os ciclos solares e de Vênus as encravaram profundamente na vida sociopolítica da cidade.

Em suma, enquanto as três tradições produzidas pisavam ou formavam pirâmides, elas o faziam por razões diferentes: - O *zigurat* Elevou o divino. - O *pirâmide egípcia* Consagrou os mortos. - O *Temple-pyramid mesoamericano* Encenou os vivos.

Estas estruturas refletem a visão de mundo de cada civilização, capacidade tecnológica e ambiente material.

Tabela 3.2: Contrastando a arquitetura monumental através das civilizações

Característica	**Zigurat (Mesopotâmia)**	**Pirâmide (Egito)**	**Temple-Pyramid (Mesoamérica)**
Material primário	Tijolo de lama, betume	Calcário, granito	Pedra, argamassa de limão, núcleo de escombros
Função	Base do Templo para os deuses	Túmulo Real	Plataforma ritual, política e astronômica
Interior	Massa sólida; Sem câmaras	Passagens internas, câmaras funerárias	Pode incluir quartos internos, núcleos reconstruídos
Acesso	Restringido aos padres	Nenhum (depois do enterro)	Rituais públicos, acesso ao templo
Cosmologia	Ligação entre o céu e a terra	Alinhamento com estrelas e sol; Viagem pós-vida	Ciclos de calendário, solstícios, rastreamento de Vênus
Lógica Estrutural	Massa pisada para cargas gravitacionais	Avião inclinado, corbelle para vazios	Terraços pisados, plataformas largas para controle de erosão
Simbolismo	Axis mundi; Residência divina	Poder eterno do faraó	Estágio para a sagrada realeza e ordem cósmica

Sistemas de Medição e Conhecimento Geométrico Antes de analisar a lógica estrutural dos monumentos clássicos posteriores, é útil contrastar como três grandes civilizações primitivas - egípcia, mesopotâmica e mesôamericana - mediram o espaço e codificaram a geometria. Mesa 3.3 destaca (i) as unidades básicas que adotaram, (ii) a forma como essas unidades foram subdivididas, (iii) as ideias geométricas que orientaram a construção e (iv) os registros matemáticos ou constantes que vieram até nós. Apesar das óbvias diferenças de notação e propósito, cada tradição traduziu a observação empírica em regras arquiteturais robustas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 3.3: Prática de medição e foco geométrico em três culturas antigas

Civilização	**Unidade primária**	**Subdivisão / Sistema numérico**	**Foco Geométrico**
Egípcio	Cubit (cotovelo à ponta do dedo)	1 côvado 7 palmas 28 dedos	Seked (corri por cubit) Levantem-se! Ângulos de pirâmide
Mesopotâmia	Cubit Como medida (variada regionalmente)	~30 dedos por cúbito; Base 60 frações sexuaisimais	Área/volume aproximações; Listas de triângulos retângulos (Plimpton 322)
Mesoamericano	Tlacxitl (espalho de mão); Maia *Tun* (360 dias de ano)	Mãos, dedos; Números da base 20 (vigesimal)	Simetria de pirâmide pisada; Alinhamentos celestes
Civilização	**Registros matemáticos**	**Constantes ou Razões Conhecidas**	
Egípcio	Rhind e Moscou Papyri Matemático	Secado (cotangente); aproximações para $\sqrt{2}$ e.. π	
Mesopotâmia	Comprimidos cuneiformes (Plimpton 322, YBC 7289)	Triplos pitagóricos; $\sqrt{2}$; Frações sexaginosas	
Mesoamericano	Proporções baseadas em calendários; astronomia observacional	Ciclos solares/venosos; Razões de simetria modulares	

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 3.4: Comparativo Linha do tempo de inovações estruturais-chave em civilizações

Inovação	Civilização	Data aproximada	Exemplo/Notas
Inovações Materiais			
Tijolo queimado	Mesopotâmia	C. 3500 a.C.	Estruturas do período Uruk
Alvenaria de pedra em grande escala	Egito	C. 2660 a.C.	Pirâmide passo de Djoser
Concreto hidráulico	Roma	C. 300 a.C.	Opus caementicium com pozzolana
Ferro fundido	China	C. Século 4 a.C.	Ferramentas agrícolas, mais tarde estruturais
99% Ferro puro forjado	Índia	C. 400 d.C.	Pilar de Ferro de Delhi
Sistemas estruturais			
Arco corbelleado	Mesopotâmia	C. 4000 a.C.	Drenagem subterrânea, túmulos
O verdadeiro arco dos voussoirs	Etrusco/romano	C. 700-500	Aperfeiçoado por Romanos
Construção de cúpula	Roma	C. 126 d.C.	Panteão (concreto não reforçado)
Sistemas de suporte (dougong)	China	C. 500 a.C.	Madeira resistente a terremotos
Juntas flexíveis (kanawa-tsugi)	Japão	C. 600 d.C.	Templo Horyu-ji
Conquistas de Engenharia			
Sistemas de irrigação	Mesopotâmia	C. 3000 a.C.	Redes de canais
Construção da pirâmide	Egito	C. 2560 a.C.	Grande Pirâmide de Gizé
Irrigação dujiangiana	China	256 a.C.	Ainda está funcionando hoje
Estradas romanas	Roma	C. 312 a.C.	Via Appia
Grande Muralha (Terra amassada)	China	C. 220 a.C.	Unificação da Dinastia Qin

CÓPIA PARA REVISÃO

3.2 Antiguidade Clássica: Geometria, Teoria e Império

3.2.1 Pérsia: Plataformas Imperiais, Pontes e Qanats

A Pérsia ocupa uma posição única na história da engenharia estrutural, servindo como herdeira e inovadora. Enquanto herdava tradições de construção mesopotâmica, engenheiros persas avançaram significativamente além deles, criando inovações que influenciariam tanto as práticas de engenharia gregas quanto romanas. Os intensos intercâmbios culturais iniciados pelas guerras greco-persas (499-449 a.C.) e estendidos através das conquistas de Alexandre e do subsequente período helenístico criaram um fluxo bidirecional de conhecimento técnico que enriqueceu ambas as tradições.

A Pérsia está incluída no *Antiguidade clássica* Seção porque o Império Achaemenid (C. 550–330 a.C.) floresceu contemporaneamente com a Grécia clássica e precedeu diretamente Roma Imperial. Tecnologicamente e artisticamente, engenheiros persas herdaram tradições mesopotâmicas de tijolo de lama, mas significativamente avançadas além delas, criando monumentais complexos palácios de pedra como Persepolis, pontes sofisticadas, e sistemas de gerenciamento extensivo de água. Tais inovações persas influenciaram e rivalizaram com as práticas estruturais gregas e romanas. Além disso, as interações culturais iniciadas pelas guerras greco-persas e estendidas através da subsequente troca helenística uniram tradições de engenharia persa e mediterrânea em uma narrativa clássica compartilhada, distinguindo a Pérsia claramente do trajetórias arquitetônicas separadas do Oriente.

Arquitectura imperial de Achaemenid A engenharia persa atingiu seu zênite durante o período de Achaemenid, exemplificado pelo complexo monumental do palácio em Persepolis.. Construída em cima de uma plataforma maciça de pedra medindo aproximadamente 450 por 300 metros e subindo 15 metros acima da planície circundante, Persepolis apresentava uma pedra elaboradamente esculpida pilares que eficientemente distribuiu cargas pesadas no telhado em fundações robustas. Só o Salão Apadana emprega setenta e dois calcários monolíticos, cada um com aproximadamente 20 metros de altura com distintas capitais duplas.

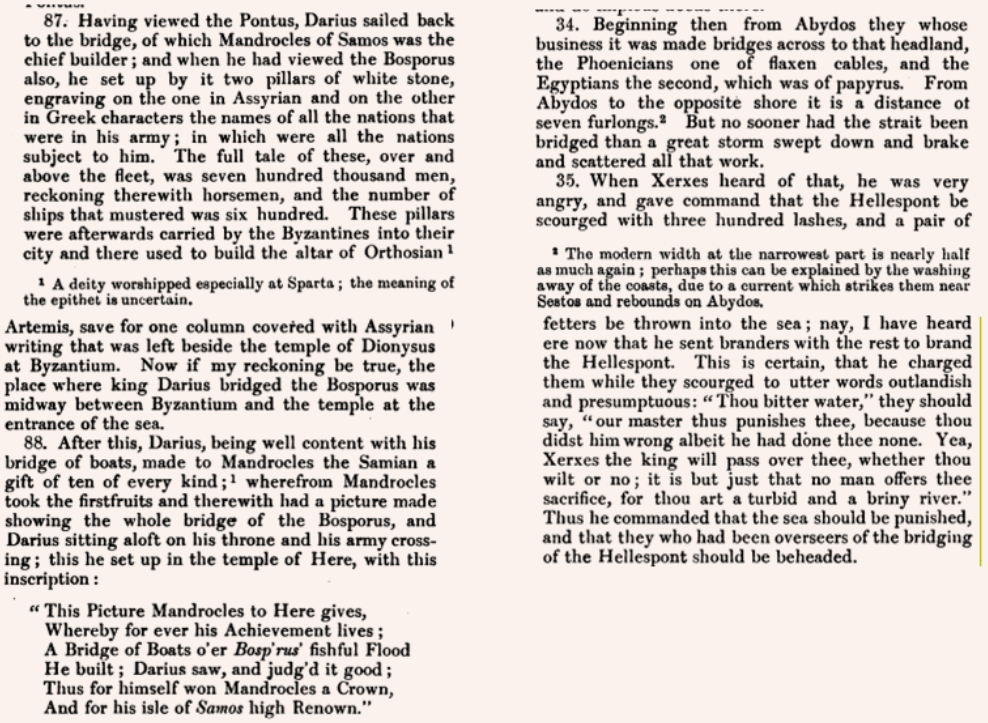
A precisão alvenaria e detalhes artísticos intrincados refletem uma fusão intencional de estabilidade estrutural e expressão simbólica, reforçando a grandeza do poder imperial. Duendes de ferro e cãibras de chumbo derramadas trancaram os tambores pilar juntos, enquanto o cedro e o cipreste vigas abrangiam 25-30 metros para formar um dos telhados mais largos da antiguidade - uma conquista que mais tarde os corredores gregos hipoestilos procuravam imitar.

Engenheiros persas também dominaram a ponte de longo alcance: Darius[3] Ponte pontão através do Bósforo

[3]Ponte pontão de Darius através do Bósforo (c. 513 a.C.) foi construído por Mandrocles, um engenheiro da ilha de Samos, para permitir que o exército de Darius I cruzasse a Europa pela sua campanha contra os citas. Heródoto descreve a ponte em detalhes e registra que Dario ergueu colunas comemorativas com inscrições em assírio e grego listando todas as nações em seu exército. Mandrocles usou seu pagamento substancial para encomendar uma pintura do exército cruzando a ponte, que ele dedicou no templo de Hera em Samos com um epigrama acompanhante, Fig. 3.5.. Embora historicamente significativa e bem documentada, a ponte parece ter sido conhecida simplesmente por seu nome descritivo em vez de ter um nome próprio específico (Herodotus, 1921).

CÓPIA PARA REVISÃO

e Xerxes[4] Ponte sobre o Hellespont demonstrou compreensão sofisticada da flutuabilidade, ancoragem e carregamento rítmico, permitindo exércitos inteiros, cavalos e trens de cerco atravessarem águas abertas.



87. Having viewed the Pontus, Darius sailed back to the bridge, of which Mandrocles of Samos was the chief builder; and when he had viewed the Bosporus also, he set up by it two pillars of white stone, engraving on the one in Assyrian and on the other in Greek characters the names of all the nations that were in his army; in which were all the nations subject to him. The full tale of these, over and above the fleet, was seven hundred thousand men, reckoning therewith horsemen, and the number of ships that mustered was six hundred. These pillars were afterwards carried by the Byzantines into their city and there used to build the altar of Orthosian [1]

[1] A deity worshipped especially at Sparta; the meaning of the epithet is uncertain.

Artemis, save for one column covered with Assyrian writing that was left beside the temple of Dionysus at Byzantium. Now if my reckoning be true, the place where king Darius bridged the Bosporus was midway between Byzantium and the temple at the entrance of the sea.

88. After this, Darius, being well content with his bridge of boats, made to Mandrocles the Samian a gift of ten of every kind; [1] wherefrom Mandrocles took the firstfruits and therewith had a picture made showing the whole bridge of the Bosporus, and Darius sitting aloft on his throne and his army crossing; this he set up in the temple of Here, with this inscription:

"This Picture Mandrocles to Here gives,
Whereby for ever his Achievement lives;
A Bridge of Boats o'er *Bosp'rus'* fishful Flood
He built; Darius saw, and judg'd it good;
Thus for himself won Mandrocles a Crown,
And for his isle of *Samos* high Renown."

34. Beginning then from Abydos they whose business it was made bridges across to that headland, the Phoenicians one of flaxen cables, and the Egyptians the second, which was of papyrus. From Abydos to the opposite shore it is a distance of seven furlongs.[2] But no sooner had the strait been bridged than a great storm swept down and brake and scattered all that work.

35. When Xerxes heard of that, he was very angry, and gave command that the Hellespont be scourged with three hundred lashes, and a pair of

[2] The modern width at the narrowest part is nearly half as much again; perhaps this can be explained by the washing away of the coasts, due to a current which strikes them near Sestos and rebounds on Abydos.

fetters be thrown into the sea; nay, I have heard ere now that he sent branders with the rest to brand the Hellespont. This is certain, that he charged them while they scourged to utter words outlandish and presumptuous: "Thou bitter water," they should say, "our master thus punishes thee, because thou didst him wrong albeit he had done thee none. Yea, Xerxes the king will pass over thee, whether thou wilt or no; it is but just that no man offers thee sacrifice, for thou art a turbid and a briny river." Thus he commanded that the sea should be punished, and that they who had been overseers of the bridging of the Hellespont should be beheaded.

Figura 3.5: Heródoto na travessia do Bósforo pelos persas, (Herodotus, 1921)

Pontes Sassanid e Estruturas Hidráulicas (224–651 d.C.) Após os Achaemênidas, a engenharia estrutural persa evoluiu ainda mais durante a dinastia Sassânida, como demonstrado por sofisticadas práticas de construção de pontes. Exemplos proeminentes incluem as pontes Dezful e Shushtar, ambas encomendadas por volta de 260~d.C. durante o reinado de Shapur~Eu, seguindo sua vitória sobre o imperador romano Valeriano.

A Ponte Dezful, que atravessa o rio Dez, foi construída usando o trabalho de aproximadamente 70.000 prisioneiros de guerra romanos. A Ponte Shushtar (*Band-e Kaisar*), que atravessou o rio Karun, funcionava simultaneamente como uma ponte e represa. Ambas as estruturas apresentaram cuidadosamente projetadas arcos de tijolo e pedra que eficientemente transferiram cargas gravitacionais para suas fundações, integrando componentes hidráulicos como as açudes e os canais de água para cumprirem duplos propósitos de transporte e gestão regional da água (Huff, 2005).

[4] As pontes pontões de Xerxes sobre o Helespont (480 a.C.) foram na verdade duas pontes paralelas construídas durante a Segunda Invasão Persa da Grécia. Construídas de Abydos para perto de Sestos, as pontes abrangiam aproximadamente sete estádios (c. 1.300 metros). A ponte nordeste usou 360 navios (penteconters e triremes) enquanto a ponte sudoeste usava 314 navios, todos amarrados juntos e cobertos com tábuas. Famosamente, o primeiro conjunto de pontes foi destruído por uma tempestade, levando Xerxes a punir simbolicamente o Hellespont com 300 chicotadas, ferros quentes e grilhões jogados na água, enquanto executava os engenheiros responsáveis. As pontes reconstruídas transportaram com sucesso o exército maciço de Xerxes em um cruzamento que levou sete dias e noites sem pausa. Como a ponte anterior de Darius, estes eram conhecidos por seus nomes descritivos em vez de terem nomes próprios específicos (Herodotus, 1921).

CÓPIA PARA REVISÃO

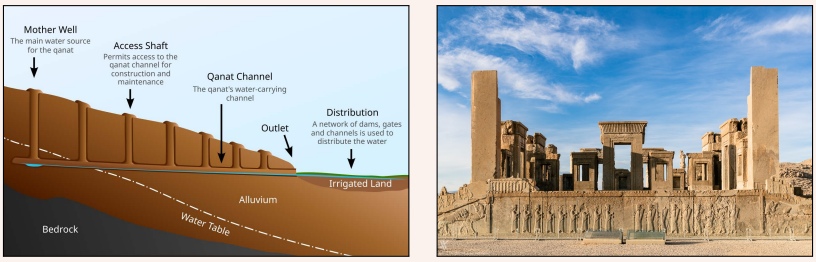
Estas pontes demonstraram uma compreensão avançada das forças hidráulicas, com as suas açudes de desvio de alvenaria e barragens de pedra primitivas incorporando princípios de proteção de limpeza e controle de fluxo que influenciariam mais tarde os hidráulicos islâmicos e europeus Engenharia.

Qanats: Hidráulica subterrânea e Inovação Estrutural (1o milênio a.C. em diante] O domínio persa da engenharia hidráulica é exemplificado pelo *q*anat Sistema, uma sofisticada rede de irrigação subterrânea que transportava água subterrânea por extensas distâncias para sustentar a agricultura em ambientes áridos, Fig. 3.6a.. O design de *q*anats necessários cálculos precisos de inclinação, gradiente hidráulico e dinâmica das águas subterrâneas, demonstrando uma compreensão empírica avançada do fluxo de fluidos.

Igualmente significativas foram as inovações estruturais necessárias para *q*anat Construção:

- **Eixos de acesso vertical**:. Regularmente espaçados e reforçados com revestimentos de pedra ou tijolo assado para evitar colapso
- **Galerias arqueadas**:. Túneis de tijolos ou pedras para estabilizar escavações em solos instáveis
- **Materiais avançados**:. Escolha cuidadosa de tijolos cozidos, argamassa de cal e alvenaria de pedra para aumentar a resistência contra geológico e sísmico tensões

Esses impérios *q*anat Redes, que descem suavemente, quilômetro de comprimento, galerias subterrâneas ventiladas por eixos verticais, requerem levantamento geotécnico preciso, controle de águas subterrâneas e planejamento de manutenção a longo prazo. Muitos permanecem em uso hoje, representando uma das mais duradouras conquistas hidráulicas da humanidade (Wulff, 1968).



(a) Qanat (b) Persepolis

Figura 3.6: Pérsia

3.2.2 Contribuições Árabe-Islâmicas: Inovações em Engenharia Estrutural

A partir do século VII, engenheiros islâmicos árabes desenvolveram sistematicamente inovações estruturais que influenciariam profundamente a prática arquitetural global. Suas contribuições englobavam formas de arco refinadas, construção avançada de cúpulas, fundações matemáticas sofisticadas e princípios de planejamento em escala urbana.

Refinementos Arquitetônicos em Arcos e Cofres Engenheiros árabes-islâmicos desenvolveram um extenso repertório de formas de arco, incluindo ferradura, pontiagudo e arco multilobado. O arco pontiagudo, em particular, representava um avanço estrutural significativo sobre o arco semicircular romano reduzindo o impulso lateral e permitindo paredes mais leves e mais altas. Esta inovação seria mais tarde crucial para a arquitetura gótica (capítulo 4).

CÓPIA PARA REVISÃO

O uso extensivo de arcos em mesquitas, madrasas e palácios não só proporcionou vantagens estruturais, mas também permitiu espaços interiores abertos e iluminados que se tornaram marcas da arquitetura islâmica. Além disso, sistemas de abóbada como muqarnasCélulas geométricas tridimensionais de favos de mel, emergidas tanto como características decorativas quanto estruturais distributivas em cúpulas E eu quero.

Inovação Estrutural na Construção do Domo Engenheiros islâmicos aperfeiçoaram a construção de cúpula através de técnicas estruturais inovadoras. O uso de pendentes e fechos permitiu que cúpulas circulares fossem apoiadas em bases quadradas ou retangulares, resolvendo um desafio fundamental geométrico e estrutural. A Cúpula da Rocha (691 d.C.) e depois as grandes cúpulas de Istambul demonstraram compreensão sofisticada dos anéis de compressão, distribuição lateral do impulso, e a integração de múltiplos sistemas estruturais.

A Pérsia é tratada por dentro *Antiguidade clássica* porque o Império Achaemenid (c. 550–330 a.C.) sobrepôs-se cronologicamente com a Grécia clássica e imediatamente precedeu Roma Imperial. Construtores persas, embora herdeiros de tradições mesopotâmicas de tijolos de lama, rapidamente aperfeiçoaram pedra cortada em grande escala e construção de madeira. Em Persépolis, por exemplo, o Salão Apadana subiu em um terraço de pedra e empregou setenta e dois calcário monolítico pilares, cada aproximadamente 20 Eu sou alto com duas cabeças de touro capitais. Duendes de ferro e cãibras de chumbo travaram os tambores, enquanto o cedro e o cipreste cobriam 25-30 Para formar um dos telhados mais amplos da antiguidade, uma conquista que depois os corredores gregos de hipoestilo procuravam imitar (Curatola e Scarcia, 2003).

Engenheiros persas também dominaram a ponte de longo alcance: Ponte de Darius através do Bósforo e da ponte mais conhecida de Xerxes sobre o Hellespont demonstrou compreensão sofisticada da flutuabilidade, ancoragem e carregamento rítmico, permitindo exércitos inteiros, cavalos e trens de cerco atravessarem águas abertas.

Igualmente avançado foram o império amplo *Redes qanāt* Galerias subterrâneas de longo quilômetro ventiladas por eixos verticais, que exigiam levantamento geotécnico preciso, controle de águas subterrâneas e planejamento de manutenção a longo prazo; Muitos permanecem em uso hoje (Behnia, 2021). Obras hidráulicas como as açudes de desvio de alvenaria em Pasargadae e represas de pedra no rio Karun ilustram ainda mais o comando persa de cargas hidrodinâmicas e proteção contra limpeza.

Essas inovações pilar e viga, ponte, e aqueduto subsuperfície não só rivalizaram mas influenciaram diretamente o grego contemporâneo e, mais tarde, a prática estrutural romana. O intenso contato cultural das guerras greco-persas, seguido por séculos de Troca helenística, teceu conquistas persas no cânone de engenharia clássica mais amplo, separando-as das distintas trajetórias arquitetônicas que se desenvolvem mais ao leste na Índia, China e Japão.

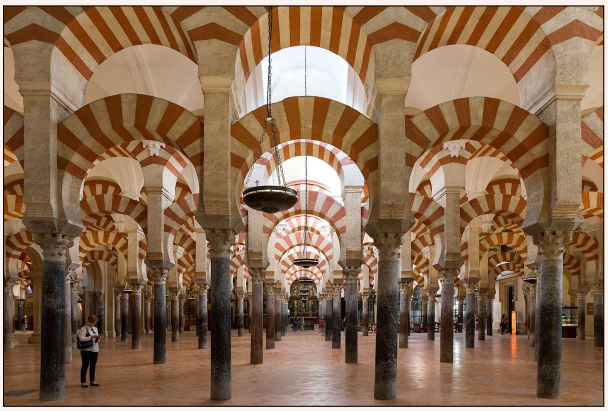
Estratégias Materiais e Modularidade: A grande mesquita de Córdoba O *Grande mesquita de Córdoba* (começar 784)~d.C.), Fig. 3.7a, exemplifica a engenhosidade estrutural através de seu revolucionário sistema de arcos de duas camadas. Estes arcos empilhados, apoiados por finos pilares, resolveram o problema da altura insuficiente pilar enquanto criavam um vocabulário arquitetônico distinto. O uso de vousoirs alternados de pedra e tijolo não só aumentou a resiliência estrutural e lateral rigidez, mas também introduziu um ritmo estético modular e construtivo.

Esta estratégia aumentou o espaço flexibilidade mantendo a integridade estrutural através de salas de oração expansivas, permitindo uma expansão fácil - a mesquita foi ampliada várias vezes enquanto preservava sua lógica estrutural (Fletcher, 2004).

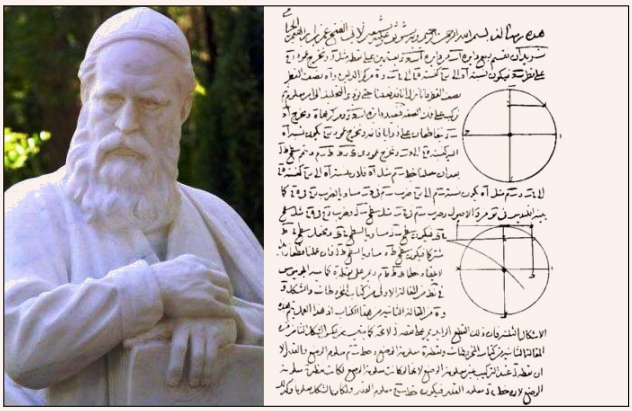
Matemática como uma Fundação para a Prática Estrutural As contribuições islâmicas para a engenharia estrutural foram apoiadas por desenvolvimentos inovadores em matemática. Estudiosos como Al-Khwarizmi (século IX) formalizou métodos algébricos, permitindo manipulação simbólica de relações estruturais e computação arquitetônica precisa. Omar Khayyam (século XI), Fig. 3.7b através de suas abordagens geométricas para equações cúbicas, influenciou o planejamento espacial e cálculos da geometria do cofre.

CÓPIA PARA REVISÃO

Esses avanços matemáticos suportaram estimativas mais precisas, controle de curvatura do cofre e precisão de layout, ligando raciocínio matemático abstrato a aplicações práticas de engenharia. O desenvolvimento da trigonometria por matemáticos islâmicos forneceu ferramentas essenciais para calcular perfis de arco, geometrias de cúpula e forças estruturais (Hogendijk, 1994).



(a) Córdoba



(b) Omar Khiam

Figura 3.7: Árabe-Islâmico

Planejamento Estrutural Urbano-Escala Além de monumentos individuais, engenheiros islâmicos contribuíram para a organização estrutural em escala urbana. Cidades como *Bagdá* e.. *Isfahan* Apresentava planejamento axial, portões monumentais, e bazares organizados sistematicamente e blocos habitacionais. Caminhos de carga em arcades, grades modulares e sistemas de distribuição de água nessas cidades refletem não só sofisticação arquitetônica, mas também compreensão empírica da carga distribuída, estabilidade lateral e eficiência material (Hill, 2019).

A integração de sistemas estruturais com infraestrutura urbana, incluindo mercados cobertos, complexos residenciais e banhos públicos, colocou engenheiros islâmicos como pioneiros em um projeto ambiental abrangente.

3.2.3 Contribuições gregas para estática e Mecânica estrutural

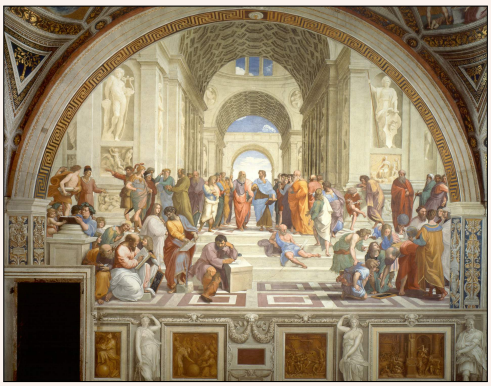
A Racionalização Grega de Máquinas Simples Os antigos gregos fizeram contribuições fundamentais para mecânica estrutural, especialmente através da análise racional de máquinas simples. Enquanto dispositivos como alavancas, polias e aviões inclinados tinham sido usados por séculos por civilizações anteriores, foram os gregos que primeiro forneceram referenciais teóricos para entender seu comportamento.

Entre estes dispositivos, o *alavanca* destaca-se como a máquina simples mais elementar. Embora empregados por Mesopotâmios e egípcios para fins de construção, os gregos foram os primeiros a desenvolver uma teoria sistemática explicando seus princípios mecânicos.

A Escola Peripatética e Archytas de Tarentum A primeira discussão teórica da alavanca aparece no tratado peripatético *Problemas Mecânicos*, atribuído ao Liceu de Aristóteles.

Embora acreditasse ser autenticamente aristotélico, o tratado *Problemas Mecânicos* é agora considerado como uma compilação de reflexões mecânicas precoces, provavelmente influenciada por pensadores como *A*rchytas de Tarentum (c. 428–350 a.C.). Archytas era um filósofo pitagórico, matemático e estadista da cidade grega de *Tarentum* (atual Taranto no sul da Itália). Ele é muitas vezes creditado como um dos fundadores de *mecânica matemática*, sendo um dos primeiros a aplicar raciocínio quantitativo e geométrico aos problemas

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Escola de Atenas (Raphael)



(b) Parthenon

Figura 3.8: Grécia

físicos. Em Problemas~3 do tratado, o argumento atribuído a ele introduz o conceito de equilíbrio de braços momento e apela para uma forma de raciocínio proto-energia - sugestionando que pequenas forças podem mover grandes pesos quando aplicados em maiores distâncias de um fulcro, assim antecipando o conceito moderno de vantagem mecânica.

> Por que é que as forças pequenas podem mover grandes pesos por meio de uma alavanca, como foi dito no início do tratado, vendo que uma naturalmente adiciona o peso da alavanca?
>
> ... Mas como sob o impulso do mesmo peso, o raio maior do centro move-se mais rapidamente, e há três elementos na alavanca, o fulcro, que é o cordão ou centro, e os dois pesos, tanto aquele que causa o movimento, e o Um que é movido; Agora a relação do peso movido para o peso movendo-se é a razão inversa das distâncias do centro. Agora, quanto maior a distância do fulcro, mais facilmente ele se moverá.
>
> Peripatetic School, circa 4th century BCE, No. 3

Este raciocínio cinético, baseado no produto da força e distância, antecipa os conceitos modernos de conservação do momento e da energia-trabalho, sem dúvida oferecendo uma lógica mais intuitiva para a lei alavanca do que Arquimedes' formulação geométrica mais tarde.

Arquimedes e as Fundações de Estáticas Arquimedes (c. 287–212 a.C.), em seu tratado *No Equilíbrio dos Aviões*, (Archimedes, -250 PDF) formalizou a lei da alavanca e lançou as bases para a estática clássica.. Sua sexta proposição apresenta o que pode ser considerado a primeira equação na mecânica:

> Magnitudes estão em equilíbrio a distâncias mutuamente proporcionais aos seus pesos.
>
> Archimedes, -250 PDF, Proposition 6 Book I

Arquimedes abordou a mecânica como uma ciência racional auto-suficiente, construída sobre postulados e provas matemáticas, em contraste com o método mais fisicamente enraizado de Aristóteles. Enquanto o tratamento de Arquimedes era geométrico e desprovido de um conceito claro de força (ver Capítulo) 14), no entanto estabeleceu a fundação matemática de análise estrutural.

CÓPIA PARA REVISÃO

Arquitetura grega e prática estrutural Os desenvolvimentos arquitetônicos gregos estenderam-se a notáveis feitos de construção, mais notavelmente o uso generalizado de *Trabated construção*— um sistema baseado no princípio pós-e-lintel, em que horizontal vigas (lintels) são suportados por vertical pilares. Este método, característico dos templos gregos, definiu sua abordagem estrutural e estética na ausência de verdadeira construção do arco.

A Acrópole de Atenas, particularmente o Parthenon, Fig. 3.8b, está como a personificação mais icônica desta abordagem, combinando proporções refinadas com escala monumental. Sua construção sob a direção artística de Phídias[5] , que supervisionou elementos esculturais e harmonia de design, exemplifica a síntese grega de engenharia, arquitetura e arte. Os refinamentos sutis do edifício, incluindo entase (inchaço pilar) e leve inclinação interior, demonstram uma compreensão sofisticada da percepção visual e otimização estrutural.

Os gregos também desenvolveram dispositivos mecânicos como guindastes e polias compostas, refletindo compreensão prática da distribuição de força, mecânica de elevação, e o manuseio de materiais pesados durante a construção do templo, (ver §RefSeita: Mechanica).

A ausência do Arco na Engenharia Grega Apesar de seus avanços na estática e mecânica racional, os gregos não desenvolveram o uso estrutural dos arcos, que mais tarde se tornaria uma marca da engenharia romana. A arquitetura grega se baseava quase exclusivamente na construção pós-e-lintel, limitando a extensão e escala dos espaços cobertos. O arco, com sua capacidade de transferir cargas de forma eficiente e abrir amplas aberturas, estava em grande parte ausente do repertório estrutural grego. Esta limitação seria decididamente superada pelos engenheiros romanos, que transformaram o arco em um elemento fundamental da arquitetura monumental.

A Escola de Atenas (Raphael) Embora pintado no início dos 16 anosth século no Vaticano, Rafael *Escola de Atenas*, Fig.~3.8a, oferece uma visão renascentista do legado intelectual da Grécia antiga. Comissionado como parte dos apartamentos papais, o afresco homenageia a filosofia clássica e a ciência reunindo pensadores gregos icônicos em um cenário idealizado de arquitetura que lembra templos gregos. A composição simboliza a confluência do pensamento abstrato e da investigação empírica — fundações sobre as quais a disciplina de análise estrutural foi construída mais tarde.

No centro estão Platão e Aristóteles, simbolicamente dividindo a cena entre idealismo (esquerda) e empirismo (direita). Ao redor deles, Raphael organiza figuras representando lógica, geometria, astronomia e metafísica — disciplinas que moldam não só a arquitetura antiga, mas o quadro conceitual da mecânica e teoria estrutural.

[5] A razão dourada (§2.1.6) é muitas vezes denotado pela carta grega ϕ (phi), tradicionalmente em honra de Phídias. Phídias está associada com o desenho e decoração do Partenon, onde estudiosos posteriores identificaram proporções *Aproximando* A proporção dourada. Embora não haja evidência direta de que Phídias usou conscientemente esta constante, o nome simbólico reflete seu legado como um mestre da proporção harmoniosa na arte clássica e arquitetura.

CÓPIA PARA REVISÃO

Figuras centrais:

Platão: Centro-esquerda, apontando para cima, segurando *Timaeus*.. Modelado em Leonardo da Vinci.

Aristóteles: Centro-direita, mão gesticulando horizontalmente, segurando *Ética*.

Lado esquerdo (Idealismo, Filosofia, pensamento abstrato):

Sócrates: Engajado em debate com outros, identificável por suas características distintas e gesto retórico.

Pitágoras: Escrevendo em um livro, cercado de estudantes; associado com misticismo harmônico e matemático.

Heráclito: Sentado sozinho em primeiro plano, perdido no pensamento; adicionado mais tarde e modelado em Michelangelo.

Parmênides: Possivelmente a figura ao lado de Pitágoras, representando raciocínio metafísico.

Plotino ou Epicuro: Possivelmente presentes como filósofos de escolas introspectivas.

Hypatia (disputa): Uma rara figura feminina, às vezes interpretada como a filósofa neoplatonista.

Lado direito (Empirismo, Ciência, Matemática):

Euclides: Demonstrando um teorema geométrico com uma bússola; modelo do arquiteto Bramante.

Ptolomeu: Segurando um globo terrestre, representando geografia e astronomia.

Zoroaster: Segurando uma esfera celestial, representando cosmologia ou astrologia.

Raphael (auto-retrato): Na borda direita, olhando diretamente para o espectador.

Diógenes: Reclinando-se no primeiro plano central nas escadas, representando o cinismo e desprezo pelo materialismo.

A atribuição de alguns números permanece especulativa, especialmente para aqueles não rotulados por Raphael. Muitas identificações são baseadas em pistas estilísticas, gestos e contexto histórico.

Note que desde o tempo de Platão através da Idade Média, *Quadrivium* foi um agrupamento de quatro disciplinas ou artes - aritmética, geometria, música e astronomia - que formaram uma segunda etapa curricular após o trabalho preparatório no *Trivium*, consistindo em gramática, lógica e retórica. Juntos, o *Trivium* e o *Quadrivium* composto pelas sete artes liberais, e formado a base de uma educação artes liberais na sociedade ocidental até gradualmente deslocado como uma estrutura curricular pela *Studia humanitatis* e suas ramificações posteriores, começando com Petrarch no século 14. As sete artes clássicas foram consideradas *habilidades de pensamento* e foram distinguidos de artes práticas, tais como medicina e arquitetura (Wagner, 1983).

Taxonomias no pensamento grego clássico Filósofos gregos normalmente organizavam fenômenos em esquemas ordenados, buscando estrutura na natureza, ética, psicologia e lógica. Essas taxonomias funcionavam como andaimes heurísticos (não classificações biológicas modernas), enquadrando investigações através de composições elementares, análises causais, lógicas categóricas e tipologias de almas, humores e afetos. A tabela abaixo coleta exemplos representativos usados nas escolas e períodos, Tabela 3.5.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 3.5: Esquemas de classificação selecionados em filosofia e ciência grega clássica

Pensador / Escola	Esquemas de classificação
Empédocles	Quatro elementos: Terra, água, ar, fogo.
Platão	Alma tripartida: razão (logistico), espírito (thumoeid)éS), apetite (epithumetikon). *Timaeus*:. Sólidos e elementos regulares–tetraedro (fogo), octaedro (ar), icosaedro (água), cubo (terra), dodecaedro (cosmos/todo).
Aristotle	**Metafísica:** Dez categorias... Substância, quantidade, qualidade, relação, lugar, tempo, posição, estado, ação, paixão. **Filosofia natural:** Quatro causas... materiais, formais, eficientes, finais. **Elementos:** Combinações de qualidades primárias – fogo (quente + seco), ar (quente+ molhado), água (frio+wet), terra (fria + seco); Éter como quinto elemento para as esferas celestes. **Biologia:** Almas por função... nutritiva (plantas), sensível (animais), racional (humanos). Distinções de animais... sanguinários, sem sangue, viviparosos, ovíparos, terrestres/aquáticos. **Retórica:** Três gêneros... Deliberativo, judicial, epidêmico.
Pitágoras	Mesa de dez opostos: Limite/ilimitado, ímpar/mesmo, um/muitos, direita/esquerda, homem/mulher, repouso/moção, reto/curvado, claro/escuro, bom/ruim, quadrado/oblongo (reconstruído de Aristóteles *Metafísica*).
Hipócrates / Galênico	Quatro humores: Sangue, catarro, bile amarela, bílis preta. Quatro temperamentos: Sanguino, Flegmática, Cólérica, Melancólica.
Estóicos	Quatro categorias: Substrato (hupokeimenon), qualificado (poion), disposto (pō(pros tip)ōS econ). Quatro paixõesē): apetite, medo, prazer, angústia; com correspondentes boas afeições racionais (eupatheia).
Teofrasto	Classificação sistemática de plantas em *Historia Plantarum*:. por morfologia (árvores, arbustos, subshrubs, ervas), habitat, padrões de crescimento e modos reprodutivos.

3.2.4 Roma: Concreto, Arcos e Infraestrutura

O Império Romano fez contribuições inovadoras para mecânica estrutural e engenharia que permanecem fundamentais para a prática moderna. Sua engenhosidade de engenharia abrangeu o desenvolvimento e aplicação de arcos, tecnologia revolucionária de concreto e sistemas hidráulicos abrangentes, juntamente com um legado de métodos sistematizados de construção.

CÓPIA PARA REVISÃO

Dominância de Arcos e Cofres O domínio romano do arco construção revolucionada permitindo estruturas maiores e mais estáveis do que anteriormente tinha sido possível. Seu uso sistemático de arcos em pontes, aquedutos e edifícios monumentais.. Coliseu–demonstra compreensão prática de transferência de carga e otimização da resistência à compressão (Vitruvius, 1960).

Expandindo o conceito básico do arco, os romanos desenvolveram abóbadas de canos e virilhas, que permitiam espaços interiores expansivos e ininterruptos sem suportes espaçados. A abóbada da virilha, formada pela interseção de dois cofres de barril, dirigiu eficientemente cargas para pontos discretos, permitindo aos romanos criar espaços interiores vastos como aqueles nos Banhos de Caracalla.

Inovação em Roma Concreto Talvez a inovação romana mais transformadora tenha sido o desenvolvimento de concreto (italicindexhopus caementicium).. Feita pela mistura de cinzas vulcânicas (pozolana), cal, e entulho agregado, este material possuía propriedades notáveis: Ele se estabeleceu debaixo d'água, resistiu à degradação ambiental, e poderia ser moldado em formas complexas.

A adaptabilidade do concreto romano permitiu a ousada experimentação arquitetural, exemplificada pelo Panteão, cuja maciça cúpula de concreto não reforçada reflete uma compreensão sofisticada do comportamento material e distribuição tensão (MacDonald, 1982). A cúpula hemisférica do Panteão, com um diâmetro e altura de 43 metros, permanece a maior cúpula de concreto não reforçada do mundo. Sua construção empregava agregados graduados, pesados travertinos na base transicionando para um pico leve perto da coroa, demonstrando o alcance intuitivo dos princípios de otimização.

Engenharia Hidráulica e Infraestrutura A excelência romana na engenharia hidráulica é exemplificada por seus sistemas de aquedutos, como o Pont du Gard.. Essas estruturas transportavam água por longas distâncias usando gradientes calculados precisamente para manter o fluxo contínuo (Hodge, 1992). A construção de arcos multi-camadas de aquedutos reduziu os requisitos de material enquanto aumentava a estabilidade estrutural e o impacto visual.

Pontes romanas, como a ponte Alcántara na Espanha, demonstram sua capacidade de harmonizar funcionalidade com eficiência estrutural e apelo estético. Essas pontes frequentemente apresentavam arcos segmentares que reduziram o peso morto, mantendo a capacidade estrutural.

Construção Urbana e Edifício Sistemático O planejamento urbano se beneficiou significativamente da inovação romana em engenharia. Multi-história *Insulae* Precisou de atenção para a distribuição da carga e segurança contra incêndio. O uso sistemático de técnicas de construção de concreto e modular permitiu uma rápida expansão urbana em escala sem precedentes. Engenheiros romanos desenvolveram métodos de construção padronizados, incluindo:

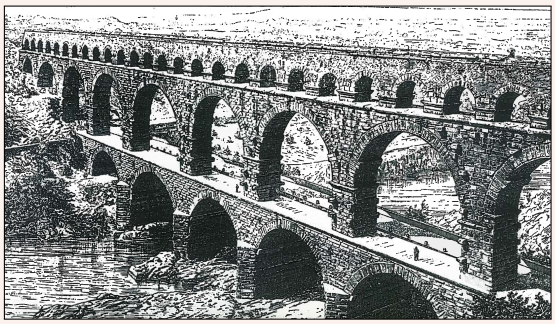
- Sistemas modulares de tijolo e concreto
- Ordens e proporções padronizadas
- Abordagens sistemáticas para o projeto da fundação
- Planejamento integrado de infraestrutura (secadores, abastecimento de água, estradas)

Legado e Limitações As realizações da engenharia romana eram pragmáticas e sistemáticas. Eles refinaram a construção do arco - herdado da Os etruscos, mas normalmente usavam formas semicirculares, que introduziram impulso lateral substancial na base. Esta limitação motivaria mais tarde a inovação gótica do arco pontiagudo.

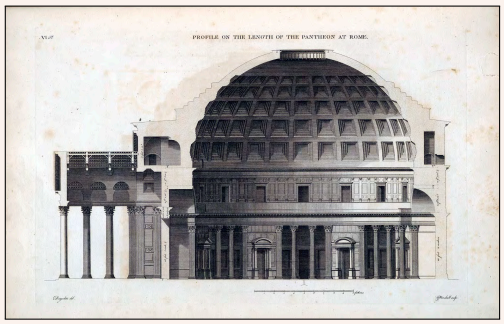
As estruturas romanas mais emblemáticas, o Pont du Gard e o Panteão, representam o auge de suas realizações estruturais. O Panteão's perfeição proporcional (altura e diâmetro ambos iguais a 43 m) e sua *Geometria esférica*, lateralmente apoiado por paredes de concreto grossas, demonstra domínio romano do pensamento estrutural tridimensional que não seria combinado até o Renascimento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Pont du Gard



(b) Panteão

Figura 3.9: Construções romanas emblemáticas

3.2.4.1 Vitruvius: A Primeira Teoria Estrutural

Enquanto os engenheiros gregos e romanos lançavam as bases físicas de mecânica estrutural, era Vitruvius que primeiro tentaram codificar o conhecimento arquitetônico e de engenharia em um referencial teórico coerente, (§6.3.1 para mais detalhes sobre seu livro). Seu tratado, *De Architectura* (Dez Livros sobre Arquitetura), é o documento mais antigo sobrevivente que aborda sistematicamente a forma e função estrutural, Proporção, materiais, hidráulica, acústica e planejamento urbano.

Com base em fontes gregas anteriores (agora perdidas) e enriquecidas pela prática romana, Vitruvio articulou uma filosofia de design que combinava experiência empírica com reflexão teórica. Ao fazê-lo, ele transcendeu seu contexto romano para se tornar a primeira figura na história ocidental a construir um projeto em termos que prefiguram os princípios modernos da engenharia.

Da Tradição à Teoria Antes de Vitruvio, construtores em toda Babilônia, Egito, Grécia e Roma tinham confiado em regras de polegar e experiência acumulada - sabedoria prática transmitida através das tradições artesanais. O trabalho de Vitruvius representa uma transição fundamental de tal conhecimento tácito para princípios sistematizados e lecionáveis.

A Tríade Vitruviana Vitruvius afirmava que a boa arquitetura deveria encarnar *Firmitas* (Força), *utilitas* (funcionalidade), e *venustas* (Beleza). Esta tríade influenciou o pensamento arquitetônico através do Renascimento e além, estabelecendo o princípio de que desempenho estrutural, eficiência funcional e realização estética são aspectos inseparáveis do design bem sucedido.

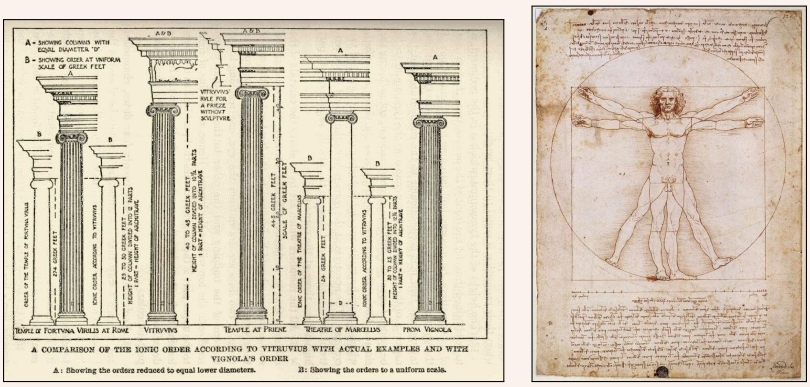
Sistemas e regras proporcionais Entre as características mais proeminentes do trabalho de Vitruvius estão suas regras proporcionais e abordagens sistemáticas para o design. Essas regras eram eficazes porque elas eram empiricamente validadas e escaláveis, uma abordagem que antecede a teoria moderna da resistência dos materiais, mas era funcionalmente suficiente para estruturas de pedra e madeira.

Um deles diz:

> Se a largura for de mais de 40 pés, deixe pilares ser colocado dentro e em frente ao pilares entre as formigas. [...] Assim, o número adicional de flautas compensará proporcionalmente a perda no corpo do eixo, impedindo que ele seja visto, e assim de uma forma diferente o pilares será feito para parecer igualmente grosso.
>
> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

Tais regras eram eficazes porque elas eram empiricamente validadas e escaláveis – uma abordagem que

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Dez livros de arquitetura

(b) Homem Vitruviano (Leonardo)

Figura 3.10: Regras de proporcionalidade vitruviana

antecede a resistência moderna dos materiais, mas era funcionalmente suficiente para estruturas de pedra e madeira (Heyman, 2003).

O senso de proporção de Vitruvius inspirou desenvolvimentos subsequentes, incluindo:

- Leon Battista Alberti *Definitor*, um dispositivo para transferir medições em escala mecânica
- A famosa ilustração de Leonardo da Vinci *Homem Vitruviano*
- A sistematização de Andrea Palladio das ordens clássicas
- O sistema antropométrico de Le Corbusier *Modulor*

Este tema foi desenvolvido em §15.2.3.

Influência na arquitetura renascentista Arquitetos renascentistas encontraram em Vitruvius uma ligação com a autoridade clássica e método sistemático. Entre os muitos arquitetos renascentistas inspirados em Vitruvius, (Palladio, 1570) (1508–1580) destaca-se como particularmente dedicado aos princípios vitruvianos, adaptando ênfase na simetria, proporção, e funcionalidade para seus próprios projetos ao codificá-los em *Eu Quattro Libri dell'Architetura* (1570). Sua arquitetura e escritos teóricos ecoavam ideais vitruvianos, particularmente a noção de que um edifício deveria refletir as proporções harmoniosas do corpo humano e da natureza, (Wassell, 2008). Como Palladio articulou:

> A beleza derivará de uma forma graciosa e da relação do todo com as partes, e das partes entre si e com o todo, porque os edifícios devem parecer ser como corpos completos e bem definidos, dos quais um membro corresponde ao outro e todos Os membros são necessários para o que é necessário.
>
> Palladio, 1570, Book I, Chapter I

Limitações e legado Vitruvius também era um produto de seu tempo, e nem todas as suas observações atendem aos padrões modernos. No entanto, sua contribuição fundamental - a sistematização dos princípios de design baseados na observação empírica e reflexão teórica - estabeleceu uma metodologia que permanece relevante para a prática contemporânea da engenharia estrutural.

Reverenciado desde o Renascimento, *De Architectura* não só influenciou a arquitetura clássica, mas também

CÓPIA PARA REVISÃO

estabeleceu bases conceituais que ressoam através de séculos de pensamento estrutural, estabelecendo Vitruvius como um gravador da prática antiga e uma influência duradoura na teoria estrutural.

Nem todas as suas observações são aceitáveis pelos padrões modernos:

> Além disso, é devido à raridade da atmosfera que as nações do sul, com sua inteligência aguçada devido ao calor, são muito livres e rápidas na concepção de esquemas, enquanto nações do norte [...] tem apenas uma inteligência lenta.
>
> Vitruvius, 1960, Chapter I, Book VI

Centralidade de Vitruvius Vitruvio é de tal importância fundamental para este livro que sua vida, escritos e influência são examinados em três capítulos distintos: o presente capítulo, §6.3.1, e §15.2.1.

3.3 Tradições matemáticas e estruturais da Índia, China e Japão

Embora a história canônica de mecânica estrutural muitas vezes enfatiza as contribuições greco-romanas e depois europeias, civilizações antigas em toda a Ásia desenvolveram tradições profundas e independentes em arquitetura, materiais e raciocínio mecânico. Na Índia, China e Japão, a síntese da observação empírica, inovação matemática e expressão arquitetônica levou a realizações duradouras em engenharia que eram paralelas e convergentes com os desenvolvimentos no Ocidente. Essas contribuições estavam enraizadas em necessidades práticas, como irrigação, construção sísmica resistente e infraestrutura urbana, mas elas também refletiam ideais filosóficos e estéticos profundamente incorporados. O que se segue é uma exploração de algumas das contribuições mais significativas de cada uma dessas civilizações, não como curiosidades periféricas, mas como caminhos paralelos e muitas vezes convergentes para um entendimento da forma estrutural e função.

3.3.1 China: Sismologia, Pontes e Inovação Mecânica

Zhang Heng e Sismologia Primitiva Uma das figuras mais notáveis na história da engenharia chinesa é Zhang Heng, um astrônomo, matemático e engenheiro mecânico da dinastia Han Oriental (78–139 d.C.). Zhang Heng inventou o primeiro conhecido sismógrafo, Fig. 3.11a, um dispositivo capaz de detectar terremotos distantes e indicando sua direção (Needham, 1959). Este instrumento de bronze, com dragões segurando bolas que cairiam nas bocas de sapos abaixo, demonstrou uma compreensão extraordinária da mecânica dinâmica e vibrações, predando desenvolvimentos semelhantes em outras partes do mundo por mais de um Milênio.

A Tradição Mecânica Mohist O Cânone Mohist, atribuído a Mozi (470–391 a.C.) e seus seguidores, representam uma pedra angular das contribuições chinesas para a teoria mecânica. Este texto antigo aborda sistematicamente os princípios da mecânica, incluindo o uso de alavancas, equilíbrio e tensão (Graham, 1978), desenvolvendo conceitos que paralelos investigações mecânicas gregas mas a partir de um quadro filosófico independente enfatizando utilidade prática e benefício social.

Construção da ponte revolucionária A construção da ponte chinesa exemplifica suas contribuições para mecânica estrutural. A Ponte Anji, construído em 605 d.C. durante a dinastia Sui, representa uma obra-prima de engenharia que sobreviveu por mais de 1.400 anos (Brownbridge, 1986). Esta ponte de arco segmentar, com seus inovativos spandrels abertos, reduziu tanto o peso quanto os requisitos de material

CÓPIA PARA REVISÃO

ao fornecer capacidade de transbordamento de enchentes – demonstrando uma compreensão sofisticada das forças hidráulicas e otimização estrutural. Engenheiros chineses também foram pioneiros na tecnologia da ponte suspensa, criando pontes de suspensão em cadeia de bambu e ferro que abrangiam distâncias impossíveis com a construção do arco de pedra, antecipando princípios desenvolvidos mais tarde em modernos cabos estacionados e suspensos Sistemas.

O uso da China de máquinas a água, como bombas de corrente e rodas d'água, ilustra ainda mais sua compreensão dos princípios mecânicos.

3.3.2 Índia: Matemática, Materiais e Arquitetura Monumental

Ciência Arquitetônica: Vāstu, Istra O tratado antigo *Vaastu Shastra* fornece diretrizes detalhadas para a construção, cobrindo aspectos como orientação, propriedades do material e distribuição de carga (Shukla, 1993). Esta abordagem sistemática para construir considerações estruturais, ambientais e espirituais integradas, criando uma estrutura abrangente para o projeto arquitetônico que influenciou a construção através do subcontinente indiano.

Fundações Matemáticas O matemático e astrônomo Aryabhata (476–550 d.C.) fizeram contribuições para mecânica estrutural através de seus desenvolvimentos em trigonometria e cálculo geométrico. Seu cálculo exato de π e a abordagem sistemática da medição angular forneceu ferramentas essenciais para o layout arquitetônico e análise estrutural (Bag, 2003).

O Pilar de Ferro de Delhi Um dos exemplos mais icônicos da antiga engenharia indiana é o *P*ilar de Ferro de Delhi, erguido em torno de 375–415 d.C. (Balasubramaniam, 2000), Fig. 3.11b.. Com mais de 7 metros de altura e pesando aproximadamente 6 toneladas, este ferro forjado pilar resistiu à corrosão por mais de 1.600 anos devido à sua composição metalúrgica única e revestimento protetor de óxido. O pilar demonstra uma compreensão avançada da ciência dos materiais e metalurgia que não era compatível em outro lugar até a era moderna.

Hidráulica e Arquitectura Stepwells, como o *Rani ki Vav* em Gujarat, e complexos de templos em Khajuraho e Hampi Destaque a engenhosidade arquitetural da Índia (Michell, 1989; Hardy, 2007). Estas estruturas demonstram domínio de escultura em pedra, distribuição de carga em geometrias complexas e integração de sistemas estruturais com programas decorativos elaborados.

Engenharia hidráulica e sistemas agrícolas Os avanços da Índia na engenharia hidráulica são evidentes no projeto de canais, reservatórios e sistemas sofisticados de gestão de água que suportavam grandes populações urbanas e extensas regiões agrícolas.

3.3.3 Japão: Resiliência sísmica e estruturas adaptativas

Arquitetura de madeira e inovação sísmica A arquitetura tradicional de madeira japonesa, exemplificada por pagodes e templos, reflete uma adaptabilidade estrutural única desenvolvida em resposta à atividade sísmica frequente. O *Shinbashira*, ou pilar central, combinado com juntas de madeira entrelaçadas e conexões flexíveis, permite estruturas dissipar energia sísmica através do movimento controlado em vez de resistência rígida, fig. 1. 3.11c, (Sugimoto, 2008).

Esta abordagem ao design sísmico — enfatizando flexibilidade, dissipação de energia, e ductilidade material — antecipa princípios modernos engenharia sísmica por séculos. Os pagodes de cinco andares sobreviveram a grandes terremotos por mais de um milênio, demonstrando a eficácia dessas técnicas tradicionais.

Arquitectura e Fortificação do Castelo Castelos japoneses, como o Castelo de Himeji, construídos nos séculos XVI e XVII, demonstram técnicas avançadas em engenharia e carga de fortificação Distribuição

CÓPIA PARA REVISÃO

(Turnbull, 2003). Essas estruturas empregam sistemas complexos de fundação de pedra, estrutura sofisticada em madeira e arranjos de defesa multi-nível que integram eficiência estrutural com funcionalidade militar.

Inovação Material e Técnicas de Construção A dependência do Japão em materiais naturais, como madeira e pedra, informou inovações estruturais distintas, particularmente no uso de sistemas de revestimentos, de braquetes (*Tokyo*), e juntas flexíveis que acomodam forças sísmicas e movimento material devido a mudanças de umidade. O desenvolvimento de técnicas sofisticadas de marcenaria de madeira, incluindo juntas complexas que não requerem pregos ou fixadores de metal, demonstra o conhecimento avançado das propriedades do material, transferência de carga e continuidade estrutural.

3.3.4 Síntese e Influência Global

Essas tradições asiáticas em engenharia estrutural desenvolveram soluções sofisticadas para problemas fundamentais de construção, ciência dos materiais e adaptação ambiental. Sua ênfase na harmonia entre a construção humana e as forças naturais, integração de considerações estéticas e estruturais, e desenvolvimento de práticas de construção sustentáveis fornecem perspectivas importantes que complementam e enriquecem os mais familiares Narrativa ocidental de desenvolvimento estrutural.

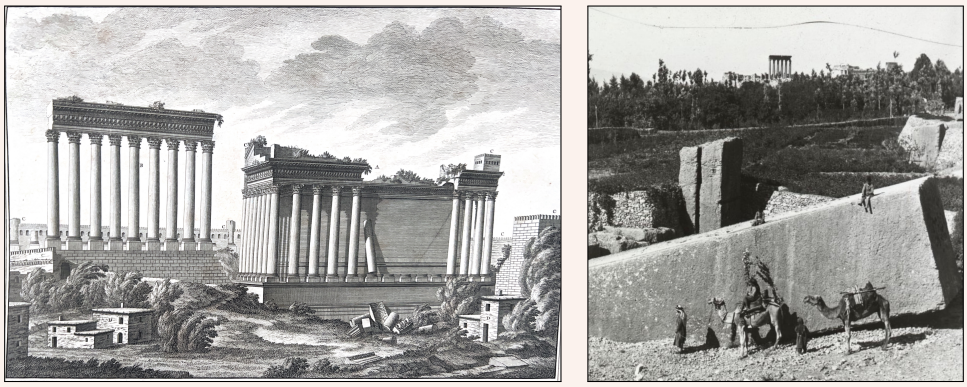
As inovações matemáticas, as tecnologias materiais e os sistemas estruturais desenvolvidos na Índia, China e Japão contribuíram com o conhecimento essencial para o desenvolvimento global da ciência de engenharia, demonstrando que as bases do mecânica estrutural verdadeiramente representam uma conquista humana mundial em vez de o produto de qualquer tradição cultural única.



(a) China, primeiro sismógrafo (b) Índia: Pilar de Ferro (c) Japão

Figura 3.11: Índia, China, Japão

CÓPIA PARA REVISÃO



Templo de Baco, Baalbeck, e pedra da mulher grávida, Líbano

As colossal pedras de Baalbeck, entre as maiores já quarried, atestam a antiga ambição da engenharia que ainda desafia explicação fácil.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 4

Catedrais góticos

Abstract

As catedrais góticas são monumentos duradouros para a aspiração espiritual e engenhosidade estrutural. Este capítulo explora a lógica de engenharia por trás de suas formas ousadas, com especial atenção para como geometria, controle do caminho de carga e comportamento material convergem para garantir estabilidade. Depois de traçar a evolução da arquitetura gótica de origem românica e descrever características estruturais-chave, incluindo buttres voadores, costeletas, e linhas de empuxo, o capítulo apresenta análises aprofundadas de quatro edifícios emblemáticos. Cada estudo de caso revela como os limites do conhecimento contemporâneo foram testados, e às vezes ultrapassados, oferecendo lições duradouras sobre resiliência em design, raciocínio empírico, e as consequências da superação.

4.1 Introdução 51
4.2 Da missa românica ao esqueleto gótico 52
4.3 Catedrais góticas: História e lógica estrutural 52
4.3.1 Marcos históricos 53
4.3.2 Terminologia Essencial e Elementos Estruturais 54
4.3.3 A Revolução Estrutural Gótica 56
4.3.4 Características estruturais . . 58
4.4 Um conto de quatro catedrais 63
4.4.1 Catedral de Beauvais: Um estudo de caso icônico em limites estruturais 63
4.4.2 O Duomo de Milão: Geometria, Política e Debate Estrutural 71
4.4.3 St. Basílica de Pedro: Da Crise à Análise Científica . . 76
4.4.4 Santa Maria del Fiore: Triunfo de Brunelleschi da Intuição de Engenharia 81
4.5 Tabela sumária 86

4.1 Introdução

Do século XII ao XVI, catedrais europeias alcançaram alturas arquitetônicas sem precedentes, não apenas em escala física, mas na ousadia estrutural e ambição simbólica. Estes monumentos representavam muito mais do que casas de adoração; eles encarnaram o ápice da engenharia medieval, onde fervor religioso levou inovação técnica a seus limites empíricos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Construídas sem cálculo ou materiais modernos, muitas vezes ao longo de séculos com planos em evolução, catedrais góticas desafiam nossa compreensão da engenharia como uma disciplina sistemática. No entanto, seus criadores alcançaram notável sofisticação estrutural através de clareza geométrica, testes empíricos, e uma compreensão intuitiva dos caminhos de força que a análise moderna só recentemente começou a apreciar plenamente.

Este capítulo se concentra nos princípios estruturais que tornaram tais catedrais possíveis, com ênfase especial em como a estabilidade foi alcançada através da clareza geométrica ao invés de força material. Através de arcos pontiagudos, abóbadas nervuras, e contrafortes voadores, os construtores góticos criaram interiores altos e luminosos que ainda persistem hoje. No entanto, nem todas as experiências foram bem sucedidas. em algumas catedrais, a fronteira entre aspiração e colapso foi cruzada - às vezes dramaticamente.

Depois de rever conceitos-chave em gótico mecânica estrutural e as inovações históricas que permitiram a sua construção, o capítulo gira para quatro estudos de caso fundamentais. Estas catedrais - Beauvais, Milão, St. Peter está em Roma, e Santa Maria del Fiore de Florença - representam não só marcos arquitetônicos, mas também episódios onde o conhecimento estrutural foi desafiado, refinado, ou encontrado faltando. Juntos, eles oferecem uma visão forense de decisões de engenharia passadas e um apreço mais profundo pela interação entre fé, forma e força.

4.2 Da missa românica ao esqueleto gótico

A transformação do românico para a arquitetura gótica representou uma das mais profundas revoluções estruturais da história. Onde igrejas românicas dependiam de paredes maciças pontuadas por pequenas janelas, construtores góticos desenvolveram um esqueleto estrutural que libertou a parede de sua função de suporte de carga. Esta inovação permitiu as vastas superfícies vidradas e elevações que definem catedrais góticas.

A principal descoberta foi reconhecer que as cargas poderiam ser canalizadas através de uma estrutura de costelas, arcos e contrafortes, deixando as paredes livres para se tornarem telas de luz. Grandes massas de alvenaria eram a marca do românico construções e apenas pequenas janelas abertas nas paredes do perímetro das igrejas românicas. Em contraste, a construção de um esqueleto estrutural, não relacionado com as massas de alvenaria, foi a primeira inovação. Grandes aberturas poderiam ser construídas nas paredes e eventualmente daria origem aos vitrais e janelas de rosas tão típicas das igrejas góticas (Como, 2013).

Com esta transformação estrutural em mente, podemos agora examinar as inovações específicas que permitiram aos construtores góticos alcançar alturas e abertura sem precedentes.

4.3 Catedrais góticas: História e lógica estrutural

A arquitetura gótica é conhecida por suas alturas elevadas, interiores luminosos e engenhosidade estrutural. Desenvolvido durante os séculos XII e XIII, marcou uma transformação no ambiente construído, onde a engenharia e aspiração espiritual se fundiram. Os construtores góticos empregavam arcos, abóbadas nervuras e bundas voadoras para construir prédios que permaneceram de pé séculos depois. Como observado por Ochsendorf, 2002 Estes edifícios derivam a sua segurança do *geometria* da estrutura, e *Não da força* do material. Foi dito uma vez que uma estrutura de pé por cinco minutos duraria cinco séculos (Heyman, 1966)Embora tal otimismo ignore a decadência material de longo prazo.

Este princípio, que a estabilidade gótica surge da forma e não da massa, foi articulado com uma clareza

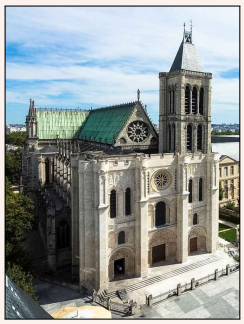
CÓPIA PARA REVISÃO

particular por Eugène Viollet-le-Duc em sua *Discursos sobre Arquitetura* (Viollet-le-Duc, 1875). Viollet-le-Duc desenvolveu um referencial teórico para entender como os construtores góticos intuitivamente entendiam a relação entre estrutura e forma, estabelecendo princípios que o moderno análise estrutural confirmaria mais tarde. (Por seu papel complementar como enciclopédico e restaurador, veja §15.4.1.)

Embora este capítulo enfatize catedrais góticas, ele também referenciará estruturas de transição notáveis como St. Basílica de Pedro, o Duomo de Milão, a Catedral de Beauvais e Santa Maria del Fiore de Florença.

4.3.1 Marcos históricos

Emergindo de raízes românicas, a arquitetura gótica atingiu seu auge nos séculos XII e XIII. A primeira estrutura a ser construída neste estilo é a Catedral da Basílica de Saint Denis, Fig. 4.1a, concluído em 1144 em Saint Denis, França. A Catedral de Chartres, mostrada na Fig. 4.1b, combina elementos góticos e românicos e foi construído durante o pico do projeto gótico. A catedral de Santa Maria del Fiore, Fig. 4.1c, é conhecido por sua enorme cúpula e fachada neogótica, concluída em 1887. Abadia de Westminster, em Londres, Fig. 4.1d, em grande parte reconstruído no século 13, é outro exemplo importante. Catedral de Amiens, Fig. 4.1e, é o mais alto, atingindo uma altura de 139 pés. Estruturas selecionadas estão resumidas na tabela 4.1.



(a) Saint Denis



(b) Chartres



(c) Santa Maria del Fiore



(d) Abadia de Westminster



(e) Amiens

Figura 4.1: Catedrais emblemáticas

Mesas 4.1 e.. 4.2 Listar várias das catedrais góticas mais notáveis e fornecer dimensões-chave para exemplos selecionados - informações que serão referenciadas mais tarde na discussão de Beauvais.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 4.1: Notáveis estruturas góticas

Catedral	Localização	Século	Característica Notável
Catedral da Basílica de São Denis	França	12th	Primeira estrutura gótica
Catedral de Chartres	França	12th	Reconstruído após um incêndio de 1194
Notre-Dame de Paris	França	13th	O uso precoce de capas voadoras
Santa Maria del Fiore	Itália	13th	Cúpula notável, fachada neogótica
Catedral de Clermont-Ferrand	França	12th	Construído com pedra de lava preta
Abadia de Westminster	Inglaterra	13th	Local das coroações britânicas
Catedral de Amiens	França	13th	Catedral gótica mais alta

Tabela 4.2: Dimensões comparativas das principais catedrais góticas (Elizalde, 2025)

Catedral	**Cofre Altura**	**Nave Largura**	**Largura Total com Aisles (m)**	**Construção Datas**
Notre-Dame de Paris (FR)	33.0	13.0	24.8	1163–1250
Catedral de Chartres (FR)	36.0	16.4	30.0	1194–1250
Catedral de Reims (FR)	38.0	14.65	30.0	1211–1275
Catedral de Amiens (FR)	42.3	11.6	32.0	1220–1288
Catedral de Beauvais (FR)	47.5	15.3	45.6	1225... Incompleto
Catedral de Colônia (DE)	43.0	14.0	45.0	1248–1880
Catedral Palma (ES)	44.0	19.0	55.0	1229–1601
Milan Duomo (IT)	45.0	16.5	57.0	1386–1965

4.3.2 Terminologia Essencial e Elementos Estruturais

Compreender o gótico requer familiaridade com vários conceitos-chave. O mais fundamental é o *Linha de impulso*- o caminho pelo qual as forças de compressão viajam através de um arco ou abóbada. Quando esta linha permanece inteiramente dentro dos limites da alvenaria, a estrutura é estável (§31.5.2)

Antes de prosseguirmos, devemos nos familiarizar com alguns termos, Fig. 4.2d, os tipos de cofre são mostrados na Fig. 4.2e.

Elementos Geométricos

Linha de impulso representa o caminho das forças dentro de um arco, e se uma linha de impulso está contida dentro dos limites físicos da estrutura, é estável.

Intrados Curva interior do arco ou da bunda.

Extrados Curva exterior do arco ou da bunda.

Voussoir Pedra individual em arco ou contraforte (Capítulo 31).

Conceitos de força e equilíbrio

CÓPIA PARA REVISÃO

Linha de impulso ativa associado com a maior força horizontal permitida pela geometria do arco.

Linha de impulso passiva representa a linha de impulso para a estrutura sob seu próprio peso.

Elementos estruturais

Bunda voadora arco inclinado que resiste a cargas laterais de um arco, Fig. 18.11c.

Pinnacle Elemento arquitetônico em cima das paredes que adiciona compressão tensão.

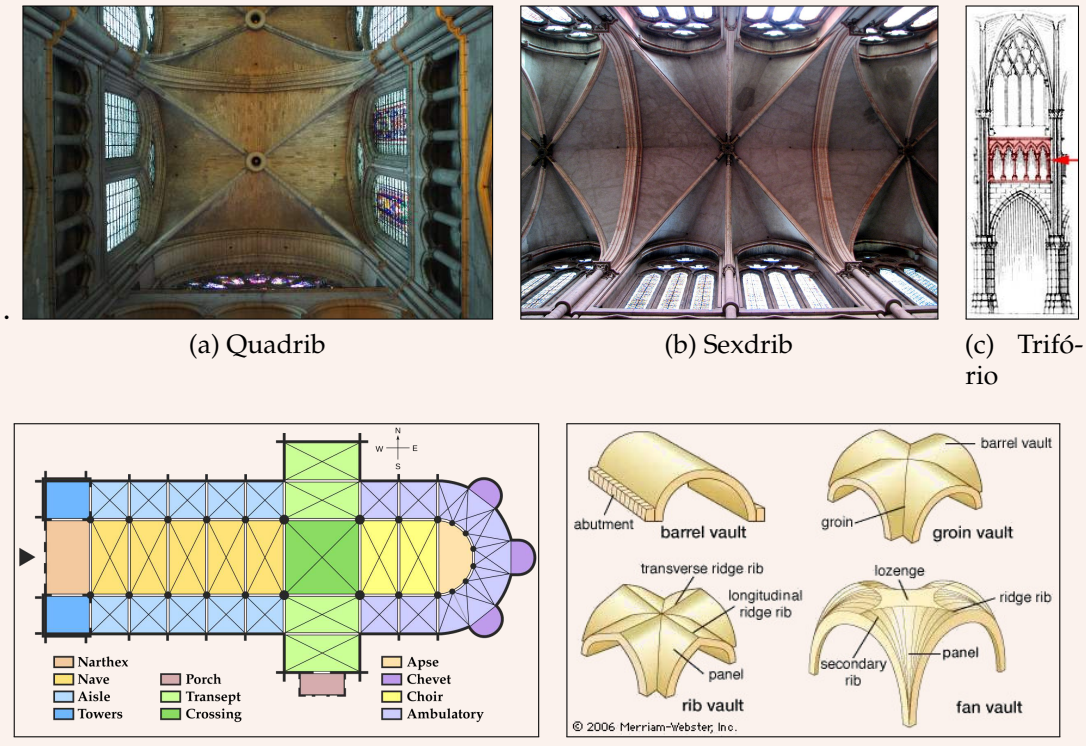
Cofre de costelas Quadripartite uma caixa de costelas que é dividida em quatro seções por duas costelas diagonais, Fig. 4.2a.

Sexpartite costeleta Uma caixa de costelas dividida em seis baías por duas costelas diagonais e três costelas transversais, Fig. 4.2b

Características Arquitetônicas

Chevet No extremo leste de uma igreja.

Trifório Uma passagem estreita na espessura da parede, Fig. 4.2c.



(a) Quadrib (b) Sexdrib (c) Trifório

(d) Scematic (e) Tipos de cofres

Figura 4.2: Elementos estruturais da Catedral

CÓPIA PARA REVISÃO

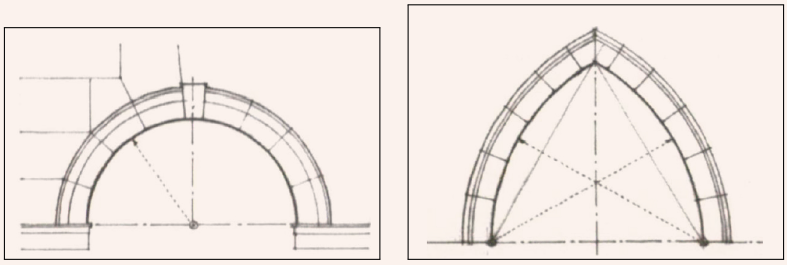
4.3.3 A Revolução Estrutural Gótica

Bony, 1983 identifica três características chave da arquitetura gótica: (1) Abóbadas com nervuras, (2) arcos pontiagudos em toda a estrutura, e (3) uma ênfase deliberada na verticalidade. Estas características produzem a abertura e leveza que distinguem o estilo gótico. Ele também discute a influência românica, particularmente no uso de cofres nervurados. A principal divergência entre arquitetura românica e gótica reside na abordagem fundamental para a transferência de carga e na forma revolucionária do arco, como mostrado na Figura 4.3.

A vantagem do arco apontado

O arco pontiagudo representa mais do que um afastamento estético das formas românicas, é fundamentalmente alterado no comportamento estrutural. Concentrando forças mais verticalmente, os arcos pontiagudos reduzem o impulso lateral em aproximadamente 20-30% Comparado com arcos semicirculares, permitindo uma construção mais alta com sistemas mais leves.

A diferença fundamental entre as abordagens romana e gótica torna-se clara ao comparar perfis de arcos (Figura 4.3). O arco semicircular romano na figura 4.3a Gera impulso lateral máximo em sua base, exigindo massivas nádegas ao longo de sua altura. O arco gótico apontado na figura 4.3b concentra forças mais verticalmente, reduzindo as exigências e permitindo a característica leveza gótica.



(a) Arco Romano (b) Arco Gótico

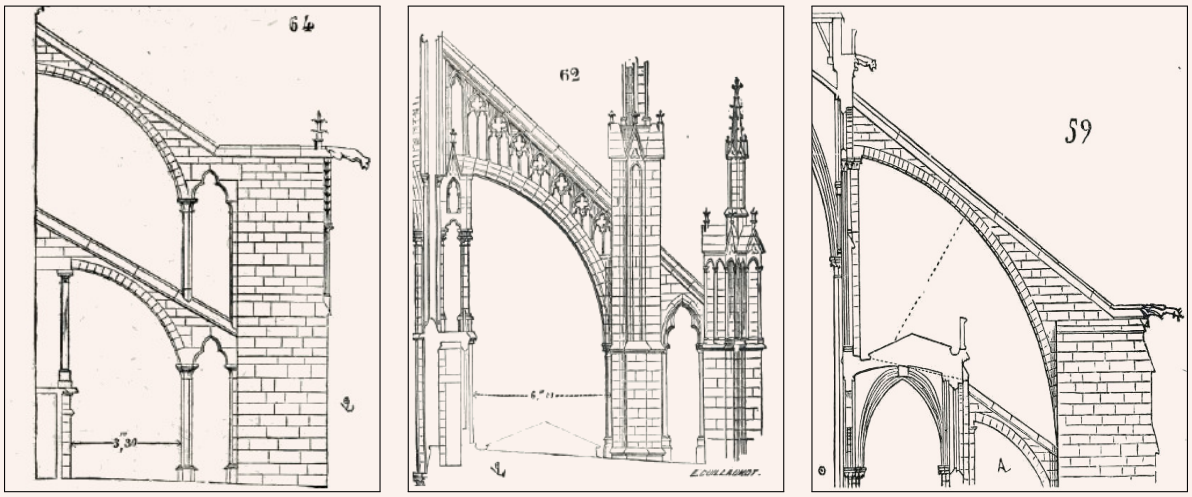
Figura 4.3: Comparação dos perfis do arco romano e gótico (Ching, 2011)

Buttres voadores: Transferência de Carga Externa

Uma marca da arquitetura gótica é o uso de *Buttres voadores*.. Talvez a inovação gótica mais icônica, as pontas voadoras externalizam o sistema estrutural. Transferindo impulsos de alta abóbada para fora do envelope, eles preservam a abertura interior enquanto garantem estabilidade. Estes suportes externos resistem ao impulso lateral de altas abóbadas e arcos, permitindo assim a construção de paredes mais altas e mais finas. Desde o século XII, os buttres voadores permitiram que arquitetos alcançassem altura estrutural sem precedentes enquanto preservavam a estabilidade através da compressão. Embora amplamente implementados em catedrais góticas, seu comportamento estrutural só recentemente foi estudado detalhadamente usando modernas ferramentas de análise computacional (Ochsendorf, 2002; Kim, 2016).

Figura 4.5 fornece uma seção transversal típica de uma catedral gótica. A ponta, coberta por um pináculo decorativo, ancora a haste voadora, que transfere o impulso lateral dos arcos interiores para fora. Esta configuração permite que a estrutura interior confie predominantemente em forças de compressão enquanto preserva abertura e luminosidade.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Clermont-Ferrand (b) Amiens (c) Notre-Dame de Paris

Figura 4.4: Exemplos de mastros voadores em catedrais góticas (Kim, 2016)

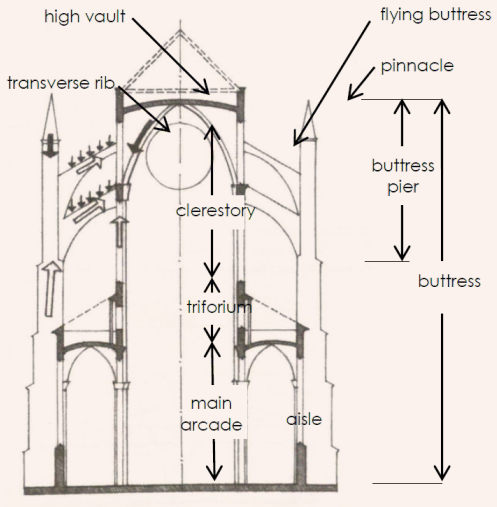


Figura 4.5: Catedral gótica seção transversal (Ching, 2011)

Cofres com costelas: Forças de Canalização

As abóbadas nervuras góticas atuam como estruturas tridimensionais, dirigindo cargas ao longo de caminhos pré-determinados para pilares e contrafortes. Este sistema substituiu o carregamento contínuo de abóbadas românicas com cargas concentradas, permitindo aberturas maiores e reduzindo a massa da parede.

Estruturas góticas, conhecidas por suas alturas altas e arquitetura arejada. Os principais elementos arquitetônicos das estruturas góticas são arcos pontiagudos, abóbadas de cruz com nervuras, mastros voadores e cais finos, alguns dos quais já haviam sido usados no românico e, ainda antes, na arquitetura romana. A aplicação simultânea de todos estes elementos para formar um todo harmonioso e unificado foi realizada pela primeira vez por arquitetos franceses de *I*le de France, que redefiniu o conceito de catedral.

CÓPIA PARA REVISÃO

O arco pontiagudo não é apenas uma saída estética da forma românica, mas também estruturalmente vantajosa - reduz o impulso horizontal e distribui peso de forma mais eficiente.

Para apreciar totalmente a mecânica por trás desses sistemas, é útil examinar os componentes fundamentais de um arco. Figura 4.6 mostra a geometria de um arco típico, incluindo as pedras individuais conhecidas como *Voussoirs*, e as curvas internas e externas - o *Intrados* e.. *extrados*.. As pontas em cada extremidade servem como suportes passivos, resistindo ao impulso externo gerado pela curvatura do arco.

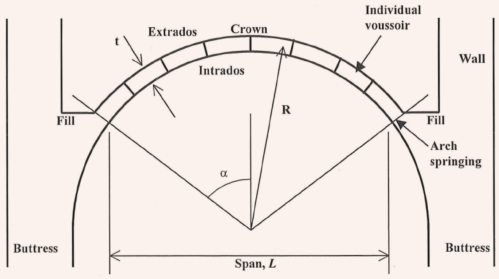
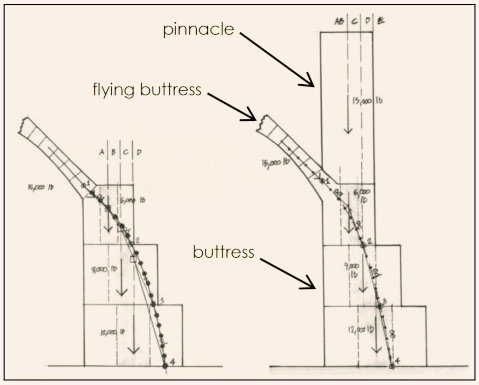


Figura 4.6: Típico arco (Ochsendorf, 2002)

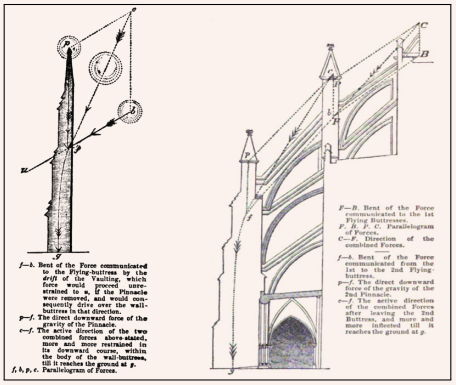
A elegância da arquitetura gótica reside em sua síntese de necessidade estrutural e expressão artística - onde a geometria, não a força material, governa a estabilidade.

4.3.4 Características estruturais

Um aspecto definidor da engenharia gótica reside no controle cuidadoso do caminho de carga através de seus elementos estruturais. Um exemplo marcante é o auge. Longe de ser meramente decorativo, o pináculo adiciona uma carga vertical significativa ao sistema da glútea, aumentando sua capacidade de resistir ao impulso lateral. Este efeito está ilustrado na figura 4.7.



(a) O pináculo afeta a linha de impulso (Kim, 2016)



(b) Forçar a transferência (Bartholomew, 1840)

Figura 4.7: Forçar transferências através de contrafortes voadores

Outro elemento chave na arquitetura gótica é o cofre nervurado, que substituiu os mais pesados cofres de barris de edifícios românicos. Como mostrado na Figura 4.8, as abóbadas góticas dirigem cargas ao longo

CÓPIA PARA REVISÃO

das costelas e para baixo para pilares e cais, reduzindo a massa da parede e permitindo janelas maiores e mais interiores abertos.

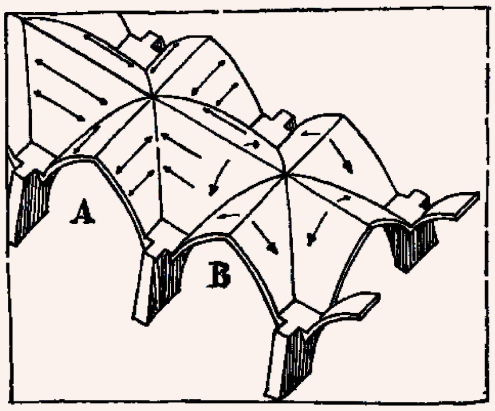


Figura 4.8: Comportamento do cofre (Hassan Fangary, 2010 PDF)

A geometria da própria haste voadora desempenha um papel crítico no comportamento estrutural. Como visto na figura 4.9, ambos os buttres real e idealizado são definidos por parâmetros como o ângulo de inclinação, span, e os perfis de espessura dos intrados e extrados. Isso determina o quão eficientemente os canais de força do alto cofre para o chão.

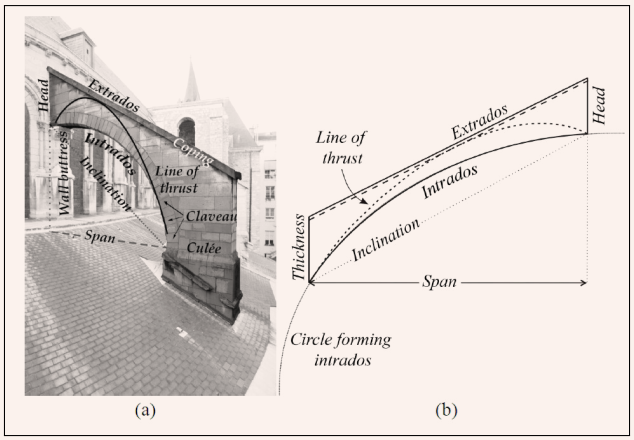


Figura 4.9: Geometria de buttress voadora (Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005)

Um conceito central na análise de estruturas góticas é o *Linha de impulso*- o caminho que as forças compressivas seguem através de um arco ou uma bunda. Estabilidade é assegurada se esta linha permanecer inteiramente dentro dos limites físicos da estrutura (§31.5.2). Figura 4.10 ilustra o envelope definido pelo *mínimo* e.. *máximo* Linhas de empuxo, representando, respectivamente, os limites antes do colapso devido ao movimento externo ou esmagamento interior.

Estes limites também são conhecidos como *passivo* e.. *Ativo* Linhas de impulso. A linha passiva corresponde ao peso próprio da estrutura, enquanto a linha ativa reflete o impulso horizontal máximo que pode ser resistido antes que ocorra instabilidade. Figura 4.11 mostra estas duas linhas de impulso dentro de um sistema típico de butress voador.

CÓPIA PARA REVISÃO

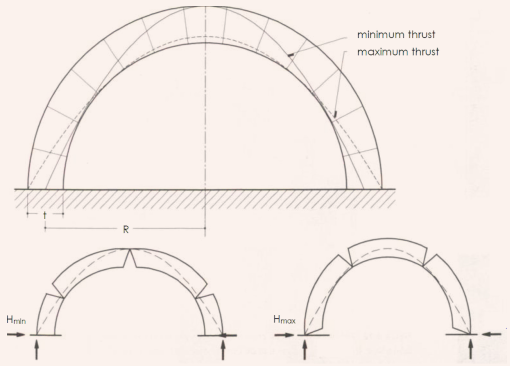


Figura 4.10: Linhas mínimas e máximas de impulso (Kim, 2016)

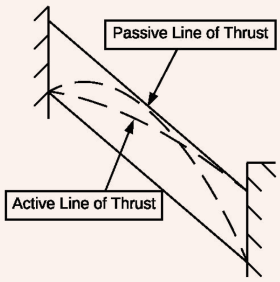


Figura 4.11: Linhas de impulso ativas e passivas (baseadas em (Heyman, 1966))

4.3.4.1 Notável resistência estrutural

Estes sofisticados mecanismos de transferência de carga contribuíram para a notável longevidade das estruturas góticas, muitas das quais sobreviveram séculos com intervenção mínima. Estas catedrais foram construídas sem ferramentas de engenharia modernas, durante longos períodos, e muitas vezes sob planos arquitetônicos em evolução. Notavelmente, houve poucas falhas catastróficas. Muitas estruturas góticas de alvenaria sobreviveram a grandes terremotos e guerras, às vezes superando edifícios modernos vizinhos (Heyman, 1997).

Como Ochsendorf, 2002 Observa, sua força não vem dos materiais, mas da geometria. De acordo com Heyman, 1966, uma estrutura gótica que se mantém provavelmente existirá por séculos - uma afirmação baseada no "teorema seguro":

> Se uma linha de impulso pode ser encontrada que está em equilíbrio com as cargas externas e que se encontra totalmente dentro da alvenaria, então a estrutura é segura.

Este princípio será explorado em maior profundidade no Capítulo 31, que se concentra na teoria dos arcos de vousoir e análise gráfica do equilíbrio.

Deve-se notar, no entanto, que este modelo assume propriedades materiais imutáveis. Isso não explica a degradação de longo prazo devido ao intemperismo, envelhecimento material ou assentamento diferencial - tudo isso pode influenciar a segurança nas estruturas históricas atuais.

CÓPIA PARA REVISÃO

4.3.4.2 Evolução de Análise estrutural

Primeiro entendimento empírico (1840-1860) A investigação sistemática sobre o comportamento dos elementos estruturais góticos começou em meados do século 19. Willis, 1842 foi o primeiro a sugerir que os cofres nervurados eram componentes críticos de carga, uma visão que permaneceu amplamente aceita até ser desafiada por observações posteriores. Alexander, Mark e Abel, 1977 criticou esta visão como sendo baseada mais em impressões visuais do que compreensão estrutural abrangente

Na década de 1860, Eugène Viollet-le-Duc introduziu a ideia de *Élasticité*, sugerindo que a alvenaria poderia acomodar uma gama de cargas e assentamentos (Alexander, Mark e Abel, 1977). Seu modelo de cofre tratava a estrutura como um sistema de arcos individuais.

Essas ideias foram mais tarde desafiadas por Victor Sabouret no início do século 20. Baseado na fissura observada, ele propôs que as costelas não se comportassem como elementos estruturalmente críticos (Huerta, 2009). Pol Abraham construiu este trabalho, enfatizando o impulso horizontal e o perfil geométrico do cofre como dominante sobre a resistência do material ou qualidade da argamassa (Alexander, Mark e Abel, 1977).

A Revolução Heyman (1960) Jacques Heyman transformou a análise da alvenaria ao introduzir a teoria do limite de plástico.. Suas três suposições fundamentais revolucionaram o campo:

Jacques Heyman revolucionou o estudo das estruturas de alvenaria a partir dos anos 60, introduzindo o conceito de análise do limite plástico (Heyman, 1966). Ele propôs que as estruturas de alvenaria são seguras se um *Linha de impulso* pode ser encontrado que:

1. está inteiramente dentro da estrutura,
2. está em equilíbrio com cargas externas, e
3. Não induz tensão.

Esta análise baseia-se em três pressupostos:

- A alvenaria tem uma resistência à tração insignificante.
- A força de compressão é ilimitada (sob o peso próprio).
- Nenhuma falha de deslizamento ocorre devido ao atrito.

Essas suposições permitem a aplicação dos teoremas inferiores e superiores da análise de limites. O primeiro garante estabilidade se um campo admissível for encontrado, enquanto o último identifica colapso quando não há tal equilíbrio dentro da estrutura. A falha é tipicamente marcada pela formação de um mecanismo com dobradiças suficientes, geralmente quatro em um arco ou buttress, resultando em instabilidade.

Abordagens Computacionais Modernas A análise contemporânea emprega vários métodos, cada um oferecendo insights distintos, mas também enfrentando limitações para alvenaria não-dutil e heterogênea:

Métodos gráficos e cinemáticos A análise gráfica da linha de empuxo estima se as forças estruturais permanecem dentro do envelope geométrico dos arcos e abóbadas, muitas vezes usando cortes do cofre para uma aproximação 2D (Hassan Fangary, 2010 PDF). Embora eficaz, é demorado e impraticável para geometrias complexas.

Análise cinemática, por outro lado, modelos colapsam mecanismos como conjuntos de blocos rígidos. Estima o limite superior das cargas de falha avaliando o trabalho feito por forças externas. Um mecanismo típico de falha dessa análise é mostrado na Figura 4.12.

Fricção finita e abordagens computacionais modernas D'Ayala e Tomasoni, 2008 propôs uma análise 3D de ligação inferior estado limite incorporando atrito finito. Produz campos tensão, padrões de fissura, e valores de impulso horizontal para várias condições de carga. Embora mais preciso, exige recursos computacionais significativos e entradas de especialistas (Hassan Fangary, 2010 PDF).

CÓPIA PARA REVISÃO

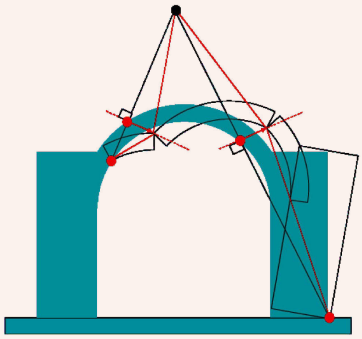
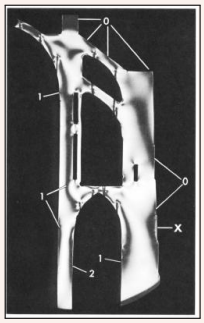


Figura 4.12: Avaliação cinemática da estrutura do arco e mecanismo de falha (Hassan Fangary, 2010)

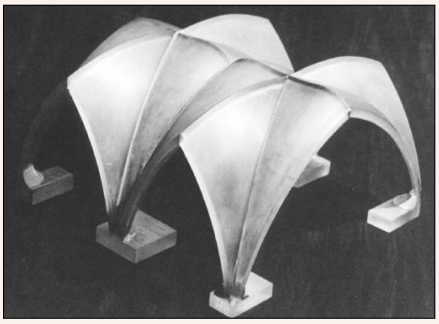
Elemento finito Modelação (FEM): Introduzido por Robert Mark, a FEM tem sido usada para modelar cofres e capas góticas apesar das limitações inerentes. As suposições de continuidade, isotropia e elasticidade não são estritamente válidas para alvenaria. Modelos recentes de Barrallo, Sanchez-Beitia e Onati, 2005 e.. Viola, Panzacchi e Tornabene, 2004 Incluindo cofres, cais e capas. Embora útil, os resultados da FEM dependem fortemente de suposições idealizadas.

Elemento Discreto de Modelação (DEM): DeJong, 2009 Aplicou DEM na alvenaria, tratando cada pedra como um bloco rígido capaz de separação ou deslizamento, capturando melhor o comportamento descontínuo.

Análise fotoelástica: Mark e Prentke, 1968 Foi pioneiro no uso de modelos epóxi escalados para visualizar tensão através de padrões de franjas. Mais tarde trabalho por Mark, Abel e O'Neill, 1973 Estenda isto para cofres 3D (Figura 4.13).



(a) Padrão de franja (Mark e Prentke, 1968)



(b) Modelo do cofre (Mark, Abel e O'Neill, 1973)

Figura 4.13: Análise fotoelástica de cofres góticos

Análise de colapso e mecânica do corpo rígido Em sua tese de doutorado, Ochsendorf, 2002 a mudança de geometria enfatizada como a causa chave do colapso, por exemplo, a queda do cofre, o aumento do impulso ou variação da amplitude. Ele identificou mecanismos típicos de falha: Formação de cinco estrias em arcos, derrubando em contrafortes, e falha de quatro enxurradas sob cargas sísmicas. Ochsendorf também destacou as limitações dos métodos elásticos e elemento finito para alvenaria histórica, favorecendo mecânica rígida do corpo para avaliação realista.

CÓPIA PARA REVISÃO

Análise de buttres voadores Só recentemente foram analisados em profundidade. Nikolinakou, Tallon e Ochsendorf, 2005 modelos geométricos idealizados propostos para capturar seu comportamento, mostrando falha pode ocorrer através de esmagamento, deslizamento ou instabilidade local - especialmente em contrafortes curtos ou inclinados.

Nikolinakou e Tallon, 2006 adicionalmente examinou os efeitos da curvatura, inclinação e espessura. No entanto, esses estudos foram limitados pelo pequeno número de estruturas góticas disponíveis para comparação direta.

Mais recentemente, Kim, 2016 conduziram estudos sobre pontas voadoras em três grandes catedrais: Notre-Dame de Paris, Amiens e Saint-Étienne. Ele correlacionou características geométricas com concentrações tensão e vulnerabilidade estrutural.

Para uma síntese Cada método de análise, gráfico, cinemático, fotoelástico, FEM, DEM, oferece insights distintos mas também enfrenta limitações, especialmente para alvenaria não dúctil e heterogênea. Na prática, múltiplas abordagens podem ser necessárias para avaliar a segurança, identificar modos de falha e informar estratégias de preservação.

Cada método de análise, gráfico, cinemático, fotoelástico, FEM, DEM, oferece insights distintos mas também enfrenta limitações, especialmente para alvenaria não dúctil e heterogênea. Na prática, múltiplas abordagens podem ser necessárias para avaliar a segurança, identificar modos de falha e informar estratégias de preservação.

Cracking nem sempre sinaliza falha, mas em combinação com deslocamentos, colapso de nível superior, atividade sísmica, ou deformação do cofre, pode indicar instabilidade (Hassan Fangary, 2010).

Mais discussão sobre linhas de impulso e mecânica voussoir será apresentada no Capítulo 31.

Com esta base em princípios estruturais góticos e métodos de análise estabelecidos, agora nos voltamos para examinar quatro estudos de caso catedral onde esses conceitos teóricos foram testados - às vezes com sucesso, às vezes catastróficamente - na construção real.

4.4 Um conto de quatro catedrais

Esta seção examina quatro catedrais cujas histórias estruturais iluminam a complexa relação entre ambição arquitetural e realidade de engenharia. Cada caso revela como as decisões de design, seja enraizadas na ousada inovação, aderência à tradição ou resposta à crise, formaram o destino desses edifícios monumentais. Dos colapsos dramáticos em Beauvais às controvérsias geométricas de Milão, e dos avanços analíticos em St. Peter's para o domínio silencioso de Brunelleschi em Florença, estas catedrais oferecem lições valiosas em análise estrutural, resiliência do projeto, eo diálogo evoluindo entre a prática empírica e compreensão teórica.

4.4.1 Catedral de Beauvais: Um estudo de caso icônico em limites estruturais

A Catedral de Beauvais é talvez a falha mais instrutiva na história da engenharia estrutural. Seu design ambicioso e dois colapsos dramáticos fornecem raras informações documentadas sobre os limites empíricos da construção gótica. Para engenheiros modernos, oferece um caso forense único onde decisões estruturais podem ser analisadas através de documentação histórica e análise de limites contemporânea.

A Catedral de Beauvais é um dos estudos de caso mais importantes na história da engenharia estrutural. Seu ambicioso design e colapso dramático fornecem rara visão dos limites da construção gótica. Para engenheiros, ele oferece um exemplo valioso de como decisões estruturais - boas e ruins - podem moldar

CÓPIA PARA REVISÃO

o destino de um prédio. Porque muito de sua história está documentada, e porque partes dela falharam enquanto outras foram reforçadas, Beauvais tornou-se uma referência chave na engenharia forense e no estudo da estabilidade estrutural ao longo do tempo.

Ambição Eclesiástica e Edifício de Catedral Competitiva

Embora Beauvais não tivesse a proeminência política e econômica de cidades como Paris ou Reims, possuía significativa autoridade eclesiástica como sede de um poderoso bispado. No cenário competitivo do cristianismo medieval, bispos muitas vezes agiam com autonomia e recursos de príncipes seculares, comissionando arquitetura como declaração espiritual e afirmação institucional.

Embora Beauvais não tivesse a estatura política e econômica de cidades como Paris ou Reims, tinha uma significativa autoridade eclesiástica como sede de um poderoso bispado. Na paisagem competitiva da Igreja medieval, bispos muitas vezes agiam com autonomia e ambição de príncipes seculares. Uma dessas figuras foi o Bispo Milo de Nanteuil, que iniciou a construção da catedral na década de 1220. Um veterano da Quarta Cruzada e um membro bem relacionado do Alto clero, Milo procurou afirmar a posição espiritual e institucional de Beauvais através da arquitetura. Sua visão não era meramente devocional. Era emblemática: para erguer uma catedral tão ousada em escala e altura que proclamaria Beauvais como um farol de aspiração cristã, apesar de sua modesta pegada urbana.

Interlúdio: O Relógio Astronômico de Beauvais

Enquanto a Catedral de Beauvais é celebrada por sua audaciosa alvenaria do século XIII, uma das suas mais extraordinárias realizações de engenharia pertence ao século XIX. O relógio astronômico, construído entre 1865 e 1868 por Auguste-Lucien Vérité, representa uma obra prima da engenharia mecânica de precisão que rivaliza com a ambição estrutural da própria catedral.

Embora a Catedral de Beauvais[1] é celebrada por sua audaciosa alvenaria do século XIII, uma de suas mais extraordinárias realizações de engenharia pertence ao século XIX. Construído entre 1865 e 1868 pelo horólogo francês Auguste-Lucien Vérité, o relógio astronômico da catedral é um sistema mecânico de complexidade excepcional, fig. 1. 4.14.. Subindo mais de 12 metros de altura e contendo mais de 90 mil componentes interligados, ele é uma obra-prima da engenharia de precisão. Cinquenta e dois mostradores fornecem uma saída contínua em fenômenos astronômicos - posições planetárias, eclipses solares e lunares, ciclos de marés - assim como manutenção civil do tempo em várias cidades. Uma série de sequências de autômato, conduzidas por um motor centralizado e engrenagens auxiliares, executam uma tela totalmente sincronizada que requeria planejamento cinemático meticuloso. Construído durante um período de renovado interesse na arquitetura gótica, o relógio exemplifica como os engenheiros do século XIX traduziram conhecimento mecânico e astronômico em sistemas integrados. Longe de um pensamento decorativo, ele mostra como o design mecânico poderia espelhar a lógica e ambição da estrutura gótica - camadas, otimizadas e profundamente comprometidas em expressar informações através da forma.

Questionando o mito da excepcionalidade estrutural

Um equívoco comum retrata Beauvais como estruturalmente excepcional, tão ambicioso em suas proporções que o colapso era inevitável. Esta narrativa, embora dramática, obscurece a realidade estrutural mais nuanceada revelada pela análise dimensional cuidadosa.

[1] O Aeroporto Beauvais-Tillé (BVA) agora serve principalmente como uma porta de entrada com desconto para voos orçamentários para Paris. Poucos passageiros estão cientes de que logo além da pista está uma das catedrais mais ambiciosas da Europa gótica - menos ainda fazem a curta viagem para visitá-la, como realmente fez em tempos.

CÓPIA PARA REVISÃO



Figura 4.14: Relógio astronómico de Beauvais

Surge uma pergunta legítima: A Catedral de Beauvais era tão estruturalmente excepcional que só suas proporções poderiam explicar seu colapso parcial? A resposta parece ser não. Apesar das frequentes reivindicações sobre as dimensões colossais da catedral, elas não são, de fato, significativamente maiores do que as de outras grandes catedrais góticas construídas na primeira metade do século XIII, Tabela 4.2 E Fig. 4.15.. Como Branner, 1997 notas, o espaçamento central entre os principais cais do coro em Beauvais mede 15,0 metros - quase exatamente o mesmo que em Bourges, Chartres, Amiens e Colônia, e apenas um pouco mais do que em Reims. A largura total do coro, cerca de 42 metros, é comparável a Bourges e na verdade mais estreita que os outros, resultando em corredores laterais relativamente modestos. Uma dimensão verdadeiramente excepcional é a altura do cofre, que atinge 48 metros - superando todas as outras catedrais góticas do período, embora Colônia chegue perto de 46 metros. Na direção longitudinal, as três baías originais do coro em Beauvais variavam de aproximadamente 8 a 9 metros, ligeiramente menores que a mais larga baía de Amiens e quase idênticas às de Reims e Colônia.

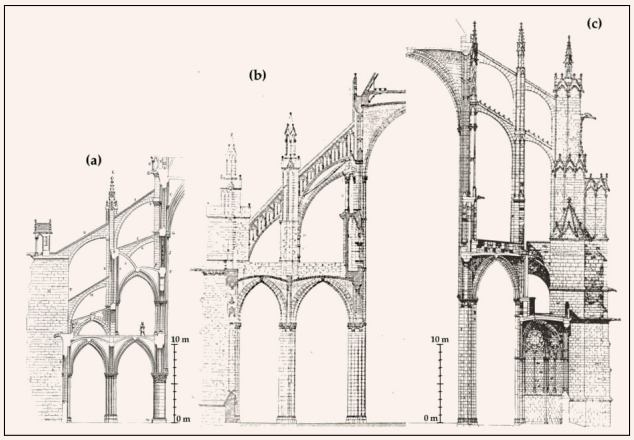


Figura 4.15: Análise comparativa da seção transversal (altura da nave e sistema de apoio) de: (a) Catedral de Notre-Dame, Paris; b) Catedral de Amiens; e c) Catedral de Beauvais (desenho do autor baseado em estudos seccionais por Viollet-le-Duc, 1854 .

CÓPIA PARA REVISÃO

O colapso de 1284: Uma história de detetive estrutural

Na sexta-feira, 29 de novembro de 1284, precisamente às oito da noite, as abóbadas do coro superior da Catedral de Beauvais desmoronaram catastróficamente. O evento foi repentino e devastador: Os enormes cofres caíram, quebrando vários vitrais e fraturando cais exteriores. O coro, uma vez imaginado como o ápice da aspiração gótica, foi tornado inutilizável, e os serviços litúrgicos cessaram por quarenta anos. As relíquias sagradas, notavelmente o *"Chasses"* de Saints Just, Germer, e Evrost, foram supostamente ilesos.

A ausência de gatilhos externos - atividade sísmica, ventos excepcionais ou ação militar - fez deste colapso um estudo de caso particularmente valioso. A falha ocorreu durante as condições normais de carga, proporcionando uma visão rara dos limites estruturais inerentes da construção gótica de alvenaria.

A ausência de causas externas, como atividade sísmica ou cargas excepcionais de vento, tem longo tempo intrigado historiadores. Enquanto alguns primeiros comentadores romantizaram o fracasso como um exemplo de ambição gótica ultrapassando seus limites, Heyman análise estrutural decididamente rejeita tais reivindicações. Sua análise limite demonstra que a catedral, como construída, estava em equilíbrio e permaneceu assim por mais de uma década. Essa longevidade constitui evidência experimental de uma configuração inicialmente estável Heyman, 1967.

Análise Revolucionária de Heyman

O estudo de Jacques Heyman em 1967 sobre Beauvais representa um momento divisor de águas na arqueologia estrutural. Aplicando análise de limite plástico a um fracasso histórico, ele demonstrou como a teoria moderna da engenharia poderia iluminar a prática da construção medieval e desafiar as suposições longas sobre o comportamento estrutural gótico.

Heyman argumenta que o colapso não pode ser atribuído à geometria geral ou altura excessiva da estrutura. Pelo contrário, provavelmente se originou de um defeito local mas crítico da construção - talvez uma sequência ou detalhe introduzido durante a construção - que escapou do escrutínio contemporâneo. Sua análise demonstra que nem a pequena redução geométrica deslocamentos ou de argamassas de longo prazo só por si teria sido suficiente para desencadear a falha.[2] Apesar de múltiplas teorias, o mecanismo exato permanece incerto, refletindo a complexa interação entre forma, material e execução na construção gótica.

No rescaldo imediato, medidas de emergência foram tomadas para estabilizar a estrutura danificada, incluindo a inserção de pilares suplementares nos fliperamas do coro, como observado por ambos Wolfe e Mark, 1976 e.. Murray, 1989. Este evento continua a ser uma das falhas estruturais mais conseqüentes na arquitetura gótica - seu significado aumentado pelo nível de visão técnica agora trazida para suportar através do moderno mecânica estrutural.

Engenharia Forense: Análise da Força de Ungewitter

O colapso de 1284 foi principalmente o resultado da excessiva deformação lateral dos cais principais sob impulso das altas abóbadas. A análise moderna revela como elementos individuais aparentemente adequados podem falhar quando sua interação cria instabilidade crítica.

O colapso do coro em 1284 foi principalmente o resultado da deformação lateral excessiva dos cais sob o impulso da abóbada alta. Como Heyman enfatiza, a falha não foi devido ao esmagamento ou ruptura de

[2]Na verdade, mesmo em falhas estruturais modernas, a causa raiz não é muitas vezes deficiências no design global, mas sim a negligência de detalhes localizados - tais como conexões pobres, falhas materiais ocultas, ou negligenciado condições de contorno (Benouville, 1891). Um exemplo bem conhecido é o colapso de 1967 da ponte Silver em West Virginia, causada pela fratura não detectada de um único ocular, (Administration, 1969).

CÓPIA PARA REVISÃO

tração do material, mas porque os piers desviaram lateralmente para o ponto onde a linha de impulso saiu do perfil da alvenaria.

Heyman reproduz a análise de Ungewitter, Fig. 4.16a, que examina as forças principais agindo em uma seção transversal típica. Para o píer principal, Ungewitter identifica o impulso do cofre $H_1 = 3.24$ toneladas e sua reação vertical V_1, bem como o salto do corredor H_2 E reação vertical V_2.. Contando com os pesos excêntricos das paredes e outros elementos carregados pelo píer, Ungewitter coloca a questão: Qual é a magnitude do impulso da bunda B necessário para que a linha de impulso total passe exatamente pelo ponto médio da base do píer?

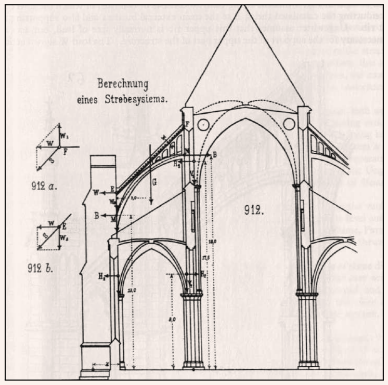
Tomando momentos das forças sobre este ponto médio, o valor de B é encontrado diretamente:

$$B = 3.02 \text{ toneladas (dado } H_1 = 3.24 \text{ toneladas)} \tag{4.1}$$

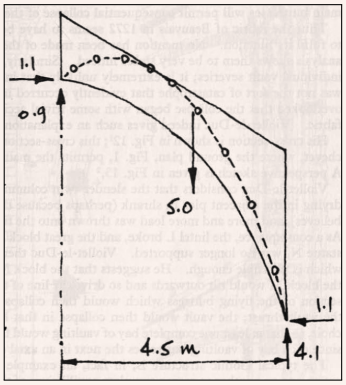
Este valor define o impulso mínimo necessário para o equilíbrio com a linha de empuxo contida dentro da alvenaria (Fig. 4.16a).

Heyman observa ainda que Léon Benouville, em sua análise de 1891, também atribuiu corretamente a falha na deflexão lateral sob impulsos do cofre, uma conclusão totalmente consistente com a análise gráfica e mecânica.

O problema fica ainda mais claro quando se considera a linha de empuxo. Como mostrado na Fig. 4.16b, a linha de empuxo passa extremamente perto da fronteira intrados do píer na altura média, confirmando a natureza precária do equilíbrio. A estrutura era altamente sensível a qualquer imperfeição menor, incluindo assentamento, encolhimento de argamassa, ou pequenas imprecisões na construção, o que faria com que a linha de impulso se movesse para fora da alvenaria, levando à instabilidade.



(a) Sistema de força agindo em uma seção transversal típica do coro, mostrando os impulsos principais da abóbada (H_1, H_2), reações verticais (V_1, V_2), e o impulso necessário para o buttress (B) para o equilíbrio, (Heyman, 1967)



(b) Linha de impulso dentro da seção do cais, mostrando proximidade com o limite intrados na altura média, confirmando o mecanismo de instabilidade, (Heyman, 1967)

Figura 4.16: Análise pós colapso de 1284 falhas

CÓPIA PARA REVISÃO

Reconstrução pós-1284: Lições de Engenharia Aplicadas

A reconstrução após o colapso de 1284 representa um dos ajustes estruturais mais profundos da história. Em vez de simplesmente reconstruir os elementos fracassados, o capítulo da catedral implementou mudanças sistemáticas que abordavam as causas fundamentais da instabilidade.

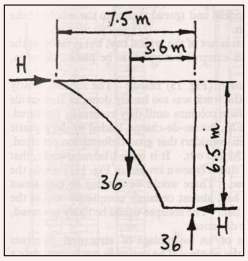
Em resposta ao colapso, a reconstrução realizada após 1284 modificou significativamente a estrutura. O número de cais no coro foi dobrado, Fig. 4.17b, adicionando suportes intermediários, e o espaçamento da baía foi reduzido para metade. A alvenaria dos cais foi espessada, e a altura das abóbadas foi reduzida para diminuir a magnitude do impulso.



(a) Comparação entre o estado pré-colapso (reconstrução, esquerda) e o estado pós-colapar (direita) do coro da Catedral de Beauvais após o colapso de 1284, destacando o reforço alcançado através da duplicação de cais (Elizalde, 2025)



(b) Vista geral do exterior do coro da Catedral de Beauvais, mostrando o reconstruído e aumentado buttress voando após o colapso 1284 (Elizalde, 2025)



(c) Diagrama de força do buttress voador inferior entre *Tas-de-carga* e cais intermediário, (Heyman, 1967)

Figura 4.17: Reconstrução de Beauvais após 1284 colapso

Os buttres voadores também foram redesenhados com inclinações mais íngremes para resistir de forma mais eficaz ao impulso horizontal, Fig. 4.17c.

A reconstrução resultante, em grande parte concluída em 1337, aumentou muito a robustez do coro. No entanto, Heyman observa que apesar deste episódio, as lições sobre o delicado equilíbrio de impulso na construção gótica foram aparentemente esquecidas durante a tentativa do século XVI de adicionar uma torre central, que acabou por falhar também.

CÓPIA PARA REVISÃO

Deve-se notar que os cem anos de guerra[3] A construção essencialmente parou, particularmente por causa da economia deformação, falta de recursos, e repetidas invasões na região do norte da França, onde Beauvais está localizado.

O colapso de 1573: Ambição Vertical Encontra Realidade Física

O colapso da torre central em 1573 representa uma categoria diferente de falha estrutural, não motivada por defeitos de construção, mas pela incompatibilidade fundamental entre altura extrema e suporte lateral inadequado. Esta falha fornece insights cruciais sobre os limites do empírico projeto estrutural.

Em 30 de abril de 1573, o Dia da Ascensão, a torre central da Catedral de Beauvais entrou em colapso catastrófico. Os relatos de testemunhas oculares descrevem como, apenas momentos depois que o clero e a congregação tinham saído da igreja após o serviço do dia, a torre maciça na travessia caiu. O fracasso foi repentino e violento. Os dois cais sulistas da travessia deram início primeiro, iniciando uma reação em cadeia que destruiu a torre da lanterna e o abóbada adjacente. Notavelmente, apenas ferimentos leves foram relatados Branner, 1962.

O colapso marcou o fim final das aspirações da catedral pela verticalidade incomparável. A torre da lanterna, completada em 1569, permaneceu por apenas quatro anos antes de seu colapso, ressaltando a precariedade de estender o sistema estrutural gótico para além de seus limites empiricamente comprovados.

Análise estrutural: O problema da nave desaparecida

O fracasso de 1573 ilumina um princípio fundamental do design gótico: Essas estruturas conseguem estabilidade através da distribuição sistemática de carga e do reforço mútuo. Remova componentes críticos, e todo o sistema fica vulnerável ao colapso progressivo.

A falha da torre da lanterna foi atribuída principalmente à instabilidade geométrica dos cais de travessia sob a carga vertical extrema imposta pela torre. Como Branner, 1997 e.. Wolfe e Mark, 1976 enfatizar, os cais nunca foram originalmente projetados para tal carga. A ausência da nave, um componente integral da estrutura planejada, significava que os cais ocidentais não tinham restrição lateral crítica.

Wolfe e Mark, 1976 mais destaques que rachadura progressiva tinha sido observado nos cais do sul, levando ao colapso. Isso indica que a falha não foi de origem súbita, mas se desenvolveu progressivamente à medida que os cais se deformavam sob carga sustentada, chegando eventualmente a um ponto onde as excentricidades e deslocamentos ultrapassaram os limites geométricos de estabilidade.

Branner, 1962 Também aponta para uma insuficiente integração estrutural entre a nova torre e o tecido gótico pré-existente da catedral. As interfaces de alvenaria entre os componentes antigos e novos não tinham a continuidade necessária para distribuir cargas efetivamente.

Questões da fundação têm sido propostas como um fator contribuinte. Elizalde, 2025 sugere que o assentamento diferencial, particularmente sob os cais do sul, pode ter agravado as instabilidades existentes. No entanto, a maioria dos estudiosos, incluindo Murray, 1989, considere a liquidação como um fator secundário em relação à questão dominante da instabilidade geométrica.

Em resumo, o colapso da torre de lanterna foi um caso clássico de falha estrutural impulsionado por instabilidade geométrica cumulativa em cais esbeltos submetidos a altas cargas de compressão e sem força lateral suficiente. Este foi um fracasso não dos princípios do projeto gótico em si, mas de extendê-los além do envelope seguro testado por experiência prévia.

[3] Ocorrida entre 1337 e 1453, foi um conflito entre os reinos da Inglaterra e França e uma guerra civil na França durante o final da Idade Média.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Se as medidas recomendadas foram adotadas em 1571, é provável que o colapso pudesse ter sido evitado.
>
> Wolfe e Mark, 1976

Post-1573: Da ambição ao pragmatismo

O resultado do colapso de 1573 marcou uma transformação filosófica no edifício da catedral, desde a busca por alturas sem precedentes até a aceitação do pragmatismo estrutural. Esta mudança reflete uma evolução mais ampla na cultura de engenharia para avaliação de risco e limites empíricos.

No rescaldo do colapso catastrófico de 1573, o capítulo da catedral abandonou permanentemente suas aspirações para a supremacia vertical. O colapso deixou claro que os riscos estruturais de qualquer expansão vertical renovada superavam em muito qualquer recompensa simbólica ou estética.

A resposta imediata envolvia limpar detritos e implementar medidas de estabilização. De acordo com Murray, 1989, artesãos foram chamados dentro de dias após o colapso para avaliar danos e propor reparos direcionados. Suas recomendações incluíam a reconstrução do píer de travessia no nordeste severamente danificado, reparos para o píar adjacente ao coro (D5/6), e o cais corredor em C6. Vários traseiros voadores danificados também foram substituídos.

Como Wolfe e Mark, 1976 notas, os cursos superiores de alvenaria instável foram cuidadosamente desmontados para evitar falhas. Nova construção foi limitada à estabilização: As barras de aço foram instaladas em cofres vulneráveis, e costuras de alvenaria foram feitas em pontos chave. Essas intervenções priorizavam a integridade estrutural sobre qualquer reavivamento das ambições arquitetônicas anteriores.

Em 1605, o capítulo da catedral oficialmente abandonou a idéia de construir a nave ou reconstruir a torre. Esta decisão marcou um ponto de viragem filosófica, desde a busca da aspiração gótica até uma aceitação das limitações estruturais pragmáticas.

A Catedral de Beauvais é hoje uma conquista extraordinária e um monumento preventivo. Seu coro e transepto truncado não representam um fracasso da engenharia medieval, mas o risco inerente de empurrar métodos de construção empírica para além dos limites comprovados.

Lições de Engenharia de Beauvais

A história estrutural da Catedral de Beauvais oferece insights duradouros para a prática de engenharia contemporânea. Três lições fundamentais emergem de seus dois colapsos:

Detalhes locais podem desencadear falha global: O colapso de 1284 demonstra como defeitos de construção aparentemente menores ou variações materiais podem precipitar falhas catastróficas em sistemas operando perto de seus limites de estabilidade. Os modernos protocolos de controle e inspeção abordam essa vulnerabilidade.

A integração do sistema é crítica: O colapso da torre 1573 ilustra os perigos de adicionar elementos a um sistema estrutural sem considerar o caminho completo de carga e requisitos de suporte. As catedrais góticas alcançam estabilidade através da integração sistemática, remover ou alterar componentes-chave pode comprometer toda a estrutura.

Limites empíricos existem: Ambos os fracassos ocorreram quando construtores excederam o envelope comprovado da prática de construção gótica. Enquanto a inovação impulsiona o progresso, ir além dos limites validados empiricamente requer análises e testes cuidadosos - recursos indisponíveis para construtores medievais mas essenciais para a engenharia moderna.

CÓPIA PARA REVISÃO

O colapso da torre central da Catedral de Beauvais em 1573 é um testemunho rigoroso dos limites estruturais da ambição vertical na arquitetura alvenaria. Resumidamente a estrutura mais alta da Europa, a torre de lanterna superou seus antecessores góticos em altura, mas não em prudência estrutural.

A falha não se originou de má habilidade ou falta de conhecimento, mas de um erro crítico no cálculo de como cais finos, sem força lateral suficiente, respondem a cargas compressivas sustentadas. Como Wolfe e Mark, 1976 e.. Branner, 1997 enfatizar, o problema não era uma sobrecarga imediata, mas uma instabilidade geométrica progressiva. A ausência da nave, um componente integral no projeto original, deixou os cais ocidentais perigosamente sem apoio contra a deriva lateral.

Ao longo dos quatro anos a torre permaneceu, pequenas imperfeições iniciais se somaram em mensuráveis deslocamentos. Os cais se deformaram gradualmente sob os impulsos excêntricos impostos pelo imenso peso da torre. Em última análise, o deslocamentos atingiu um limiar crítico onde a estrutura não podia mais manter o equilíbrio, desencadeando colapso catastrófico.

Para engenheiros estruturais e historiadores, Beauvais continua sendo um caso extraordinário de estudo na fronteira entre viabilidade geométrica e estabilidade estrutural. Sublinha que a esbeltez por si só não é um critério de falha, mas sim uma finura combinada com insuficiente resistência, caminhos de carga excêntricos, e má continuidade material pode levar ao colapso progressivo mesmo sob cargas nominalmente estáticas.

Para os preservacionistas modernos, Beauvais oferece uma poderosa lição: que a ousadia estrutural do projeto gótico opera dentro dos limites, e que esses limites podem ser perigosamente excedidos quando formarem supera os limites empíricos de seu tempo.

A catedral de hoje, com seu alto coro e transepto truncado, não é apenas um monumento à ambição, mas uma lembrança duradoura do delicado equilíbrio entre aspiração e as leis imutáveis da mecânica.

4.4.2 O Duomo de Milão: Geometria, Política e Debate Estrutural

A construção da catedral de Milão representa um dos episódios mais fascinantes da história na tomada de decisões arquitetônicas, onde geometria teórica, experiência prática e autoridade política convergiram em debates técnicos aquecidos. Ao contrário de Beauvais, que falhou catastróficamente, a história de Milão revela como negociações complexas entre filosofias de engenharia concorrentes podem moldar arquitetura monumental.

Tradições Góticas Encontram Inovação Italiana

Após o período românico, a arquitetura gótica floresceu na Europa do final do século XII ao XVI (com o surgimento do Renascimento). Também conhecida como arquitetura pontuda, foi marcada por maior altura e muito mais luz, tornada possível por melhorias técnicas em abóbadas e contrafortes.

Antes do século XV, o conhecimento arquitetônico era transmitido principalmente através de aprendizado prático e segredos comerciais bem guardados. O projeto da catedral de Milão mudou isso, gerando alguns dos primeiros debates técnicos documentados na história arquitetônica.

As catedrais góticas não foram construídas de forma casual. Técnicas de construção existiam, e geometria e Maçonaria em particular, desempenhou um papel crítico (Shelby, 1972). A especialidade era, em geral, transmitida oralmente de uma geração de pedreiros para a outra, na maioria das vezes de pai para filho. Felizmente, duas grandes exceções sobrevivem: O livro de esboços do século XIII de Villard de Honnecourt e vários folhetos escritos pelo mestre alemão pedreiros no século XV e início do XVI. A partir destes documentos, podemos obter uma imagem bastante substancial da geometria usada pelos pedreiros medievais.

CÓPIA PARA REVISÃO

Villard de Honnecourt: Geometria como ciência divina

No século XIII, o pedreiro de pedra francês Villard de Honnecourt viajou extensivamente pela Europa e compilou seu famoso caderno de esboços, que fornece uma visão valiosa das leis de construção e regras proporcionais usadas pelos pedreiros góticos (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858 PDF). Ao longo de suas anotações, Villard faz extensa referência à geometria (*Não que eu tenha dito que toda a ciência vive apenas pela ciência da geometria*) e até mesmo especulava que Euclides aprendera geometria com Abraão enquanto estava no Egito. Seu trabalho oferece não só documentação visual de detalhes da construção, mas também um vislumbre do fundamento intelectual e teórico das práticas góticas de construção. Embora não sistemáticas, as notas refletem uma visão coerente do design governada por princípios geométricos e proporção.

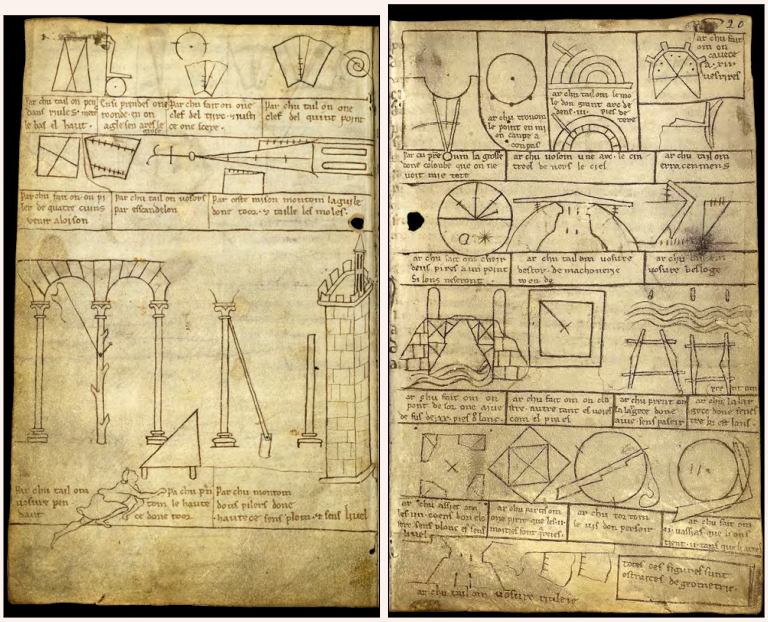


Figura 4.18: Esboços geométricos de Villard de Honnecourt *Carneta*, ilustrando regras e sistemas de proporção (De Honnecourt, 2006)

No período gótico tardio, vários pequenos livros foram escritos por pedreiros alemães. O mais antigo deles a ser impresso foi Matthias Roriczer *Geometria Deutsch*, publicado em 1486. É um tratado especificamente dedicado à geometria. O panfleto de doze páginas consiste em figuras escritas e breves explicações de nove problemas: como construir um ângulo reto, um pentágono, um heptagono e um octagono; Como encontrar o comprimento e o centro de um círculo; como construir um quadrado e um triângulo com áreas iguais; Como definir moldes e finais para um gable; e como estabelecer o plano de um gable.

Catedral de Milão: A Fabbrica e a Inovação Institucional

A construção da catedral de Milão, iniciada em 1386 sob o *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano*, marcou um divisor de águas na organização arquitetônica. Ao contrário do mestre informal... sistema de aprendizado típico da construção medieval, o Fabbrica criou um quadro institucional para consulta técnica que reuniu conhecimentos de toda a Europa.

Um aspecto marcante do Duomo, enfatizado repetidamente em relatos contemporâneos, é que seus cuidados e reparos não são episódicos, mas contínuos. Em praticamente qualquer momento de sua história, alguma parte da catedral esteve sob andaimes, com cortadores de pedras substituindo mármore temperado,

CÓPIA PARA REVISÃO

reparando vestígios, ou renovando elementos esculturais. Para os cidadãos de Milão, este estado de manutenção perpétua não é um sinal de fracasso nem decadência, mas a condição normal do próprio edifício: O Duomo é entendido como uma estrutura que deve ser constantemente cuidada para suportar. Neste sentido, a construção, preservação e reparação são inseparáveis, formando um único processo contínuo que se estende desde o final do século XIV até os dias atuais (Povoledo, 2023).

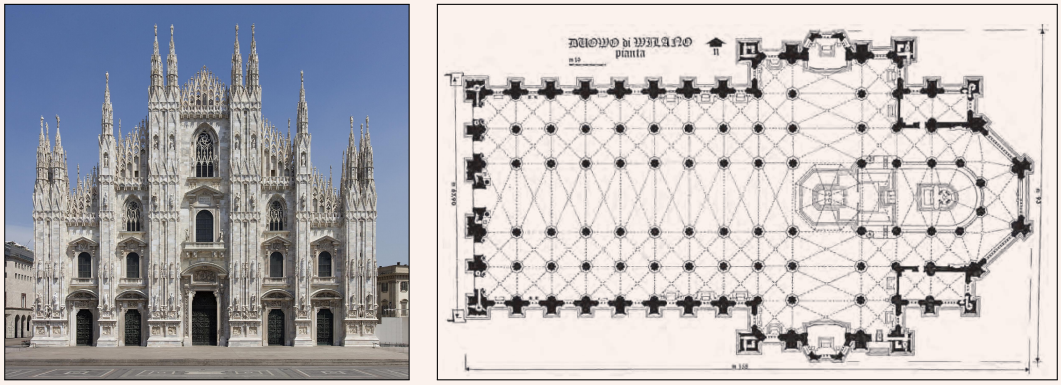
Antes do século XV, havia muito poucos escritos sobre arquitetura. No entanto, isso mudou com a construção da Catedral de Milão, iniciada em 1386 sob os auspícios do *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano*, uma organização ainda existente hoje. Este projeto foi um dos episódios mais importantes da história da arquitetura italiana e europeia. Primeiro, devido à singularidade do próprio edifício, a maior igreja gótica já construída na Itália; Em segundo lugar, por causa das contribuições de arquitetos autoritários de toda a Europa, que foram convidados periodicamente para oferecer propostas; e terceiro, devido aos debates e discussões que iniciou ao longo de mais de um século sobre escolhas estruturais, práticas de construção regional, e a afirmação da autoridade ducal versus comunal. A documentação deste projeto foi famosamente descrita por Ackerman, 1949.

Uma característica distintiva do Duomo é o seu uso de *Candoglia* mármore, quarried do lago Maggiore e transportado através do sistema de canal Navigli para Milão, dando à catedral sua característica tonalidade pálida (Fig. 4.19a). O mármore foi fornecido pelo Duque de Milão, Gian Galeazzo Visconti, que concedeu à Fabbrica livre acesso às pedreiras, simbolizando tanto o patrocínio ducal quanto a união da autoridade cívica e religiosa.

O Debate da Grande Elevação: Geometria versus Pragmatismo

Os debates em torno da elevação de Milão representam um dos primeiros conflitos documentados entre geometria teórica e experiência prática de construção. A controvérsia revela como diferentes tradições regionais abordavam a questão fundamental da proporção arquitetural.

Os primeiros debates centraram-se na elevação do edifício. O plano de base estabelecido em 1386 usou um 16 por 16 *braccia*[4] grade quadrada para os corredores laterais e 16 por 32 *braccia* Retângulos para a nave (Fig. 4.19b).



(a) Mármore de Candoglia (b) Plano de piso

Figura 4.19: Duomo de Milão

[4] *Braccia* (singular: *braccio*) foi uma unidade pré-métrica de comprimento usada na Itália, variando por região. Em Florença, um *braccio* era aproximadamente 58,4 cm (cerca de 23 polegadas). Foi comumente usado em medições de arquitetura e engenharia durante o Renascimento e os primeiros períodos modernos.

CÓPIA PARA REVISÃO

O problema fundamental era que a altura da estrutura permaneceu indeterminada mesmo após as fundações terem sido concluídas - uma situação impensável na prática de construção moderna, mas característica da evolução medieval da construção.

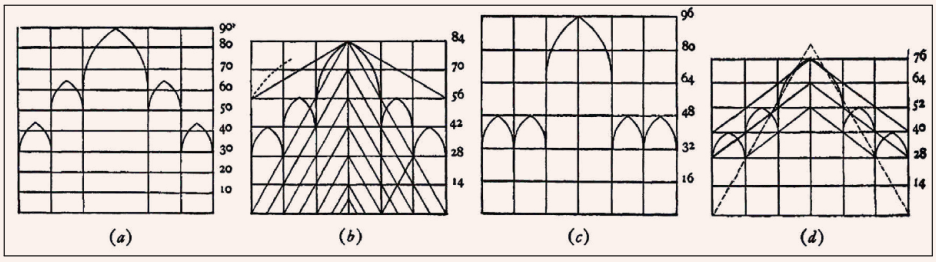
O problema era que a altura da estrutura permaneceu indeterminada mesmo após as fundações terem sido concluídas. Desde que esta era Milão – não uma cidade do sul da Itália – a estrutura resultante foi, na verdade, construída sem um esquema vertical consistente. Em 1391, o Arcebispo convocou uma conferência para decidir sobre o comprimento dos pilastras, a altura da igreja, das janelas. As questões-chave incluíam se os dois corredores de ambos os lados deveriam ter as mesmas alturas ou diferentes, e se a elevação - parcialmente condicionado pelo plano de terra 16 por 16 *braccia* grade – deve subir de acordo com uma configuração retangular ou triangular (ou seja, baseado em quadrados ou triângulos equiláteros: *ad quatratum* ou *ad triangulum*).

Este esquema inicial foi mais tarde desafiado por contribuições de arquitetos influenciados pelo estilo Rayonnant francês e práticas góticas altas alemãs, particularmente visíveis na Catedral de Colônia, que serviu como um ponto de referência para algumas propostas.

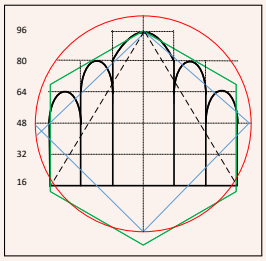
Geometria Sagrada e Perfeição Arquitetônica

Como Sebregondi e Schofield, 2016 Nota-se que o quadrado e o triângulo equilátero eram frequentemente invocados em escritos arquitetônicos de Vitruvius a Villard de Honnecourt .. Considerados sagrados desde o tempo de Platão, pertenciam a um geométrico éLite "que deu origem a uma tradição ligando ordem divina e projeto arquitetônico. Dado o desejo de construir uma catedral, uma Casa de Deus identificada com a mais alta beleza boa e absoluta, o edifício tinha que encarnar perfeição matemática. Isso criou tensão entre geometria ideal e realidade construcional. Por isso, o prédio tinha que ser perfeito. a *Gesamtkunstwerk*[5] em que cada elemento refletia a harmonia divina, ao contrário da desordem do mundo.

Figura 4.20a ilustra quatro projetos propostos.



(a) Sucessivas propostas de esquemas (Ackerman, 1949)



(b) Reconstrução do esquema de Stornaloco (Sebregondi e Schofield, 2016)

Figura 4.20: Esquemas de proporção para desenhos sucessivos

A Evolução das Propostas Competitivas

Quatro abordagens distintas emergiram dos debates, cada uma refletindo diferentes prioridades filosóficas e práticas:

[5]Obra de arte em sua totalidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

Di Vicenzo, 1390: Gravei o primeiro conjunto de notas, uma fonte primária, com o plano e as fundações lançadas antes da influência estrangeira, e orientação inicial para seção e elevação.

Stornaloco, 1391: Propôs um compromisso engenhoso entre perfeição geométrica e construção prática. Ele abordou o problema fundamental que a altura do triângulo equilátero ($\sqrt{3}$) era irracional, tornando impossível a medição precisa com ferramentas medievais.

Stornaloco, 1391: Propôs um pequeno, mas significativo desvio do esquema de triângulo equilátero geometricamente puro, que Panofsky, 1945 -Esclareceu. Stornaloco abordou a irracionalidade da altura do triângulo equilátero$\sqrt{3}$), o que impediu de usar um simples bitola. Para uma base de 96 *braccia*, o triângulo produziria uma altura de $96\sqrt{3}/2 \approx 83.13$ *braccia*.. Stornaloco propôs uma rodada de 84 *braccia*, convenientemente divisível em seis segmentos de 14 *braccia*.. Este compromisso permitiu a construção usando seis divisões horizontais iguais.

Figura 4.20b É uma reconstrução inteligente: ANCpBq é um hexágono regular inscrito em um círculo; AA é a altura do corredor e inclinação futura da bunda; ABC é um triângulo equilátero (altura da nave); O AOpr é um quadrado inscrito com a diagonal RO definindo alturas de imposto; AD/6 e BC/6 definem "figura quadrangulares"; E 16/14 é BC/AD.

Parler, 1392: Heinrich Parler de Colônia propôs abandonar a geometria triangular inteiramente em favor de um projeto quadrado com uma altura interior de 96 *braccia*, desenho da tradição gótica alemã exemplificada pela Catedral de Colônia.

Parler, 1392: Propôs um desenho quadrado com uma altura interior de 96 *braccia*Talvez inspirado na Catedral de Colônia.

Compromisso milanês: Os pedreiros locais desenvolveram uma solução híbrida usando sistemas geométricos duplos: Um triângulo equilátero a 28 *braccia*, no topo de um triângulo pitagórico 3-4-5 para chegar a 76 *braccia* Total. Essa abordagem pragmática satisfez tanto ideais geométricos quanto restrições construtivas.

Compromisso: Os pedreiros milaneses desenvolveram um novo esquema de elevação inferior usando dois sistemas triângulos: Triângulo equilátero a 28 *braccia*, e um triângulo pitagórico 3-4-5 para chegar a 76 *braccia* Total. Como Ackerman, 1949 nota-se, a coexistência de múltiplos *ad triangulum* As propostas complicam a interpretação das fontes.

Intervenção de Jean Mignot: Ciência versus Arte

Jean Mignot, um mestre francês de Paris, desempenhou um papel crucial mas controverso na construção do Duomo de Milão, (Ackerman, 1949). Convidado como um *Consultor especialista* Na década de 1390, ele revisou as propostas estruturais desenvolvidas pelos pedreiros italianos e expressou fortes reservas sobre sua adequação. Ele identificou famosamente 54 falhas estruturais, avisando que a catedral era *em pericolo di ruina* (em perigo de ruína), variando desde o buttressing inadequado a bases do píer mal proporcionadas (à La Vitruvius). Mignot defendeu um retorno ao anterior, mais geometricamente rigoroso 84-*braccia* elevação proposta por Stornaloco.

Suas críticas provocaram uma troca acalorada que cristalizou em torno de duas abordagens fundamentalmente diferentes para construir conhecimento. Os maçons milaneses, baseados na tradição local e experiência prática, afirmavam *Scientia est unum et ars est aliud* (ciência é uma coisa, arte outra), alegando que seu conhecimento empírico superou a teoria abstrata[6].

[6]Esta tensão entre o conhecimento teórico e a experiência prática representa um dos debates mais duradouros em engenharia e arquitetura. Conflitos semelhantes apareceram ao longo da história: Vitruvius no século I a.C. defendeu princípios sistemáticos enquanto reconhecia a primazia de artesãos experientes; Engenheiros do século 19 debateram se a análise matemática ou testes empíricos devem guiar o projeto da

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

A famosa réplica de Mignot..*Ars sine scientia nihil est* (Arte sem ciência não é nada) - tornou-se um grito de comício para a integração de princípios teóricos com construção prática. Este debate presentou a educação moderna de engenharia, que busca combinar compreensão científica com aplicação prática.

Deve-se notar que a afirmação de Mignot antecipou argumentos semelhantes por pensadores renascentistas posteriores. Leonardo da Vinci, escrevendo aproximadamente um século depois, declarou *Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza s'essa non passa per le matemmatiche dimostrazioni* (Nenhuma investigação humana pode ser chamada de ciência verdadeira se não puder ser demonstrada matematicamente). Leonardo enfatizou ainda mais este ponto: Aqueles que são apaixonados pela prática sem ciência são como um marinheiro que embarca em um navio sem leme ou bússola, que nunca pode ter certeza para onde ele está indo. Essas declarações refletem um movimento renascentista mais amplo para integrar a observação empírica com rigor matemático, uma mudança filosófica que eventualmente transformaria tanto a prática de engenharia quanto a metodologia científica. O debate iniciado em Milão representou assim uma articulação precoce de princípios que se tornaria fundamental para a Revolução Científica (§5.3)

Apesar das tensões que ele introduziu, a intervenção de Mignot trouxe à tona incertezas estruturais e geométricas não resolvidas dentro do projeto em evolução do Duomo. Sua crítica sublinhava o frágil equilíbrio entre a prática empírica e o raciocínio teórico, uma dialética que continuaria a moldar pensamento arquitetônico e discurso de engenharia bem no Renascimento e além.

Resolução e Legado

Os debates de Milão finalmente produziram uma síntese de trabalho que equilibrou as demandas concorrentes. O projeto final incorporou elementos de várias propostas, criando uma estrutura que satisfazia tanto ideais geométricos quanto restrições práticas. Mais importante, o processo documentado de consulta técnica e debate estabeleceu precedentes para a tomada sistemática de decisões arquiteturais.

A conclusão do Duomo ao longo de vários séculos, com várias modificações e adaptações, demonstra a resiliência dos sistemas estruturais bem concebidos. Ao contrário de Beauvais, que falhou catastróficamente quando empurrado para além dos limites empíricos, Milão conseguiu manter flexibilidade e incorporar lições da experiência em construção contínua.

4.4.3 St. Basílica de Pedro: Da Crise à Análise Científica

A crise estrutural em St. A Basílica de Pedro, no século 18, marcou um ponto de viragem na engenharia arquitetônica. Pela primeira vez, um grande problema estrutural foi abordado não através de modificações empíricas, mas por análise científica sistemática. A investigação de Giovanni Poleni estabeleceu novos padrões para a metodologia da engenharia e demonstrou como a mecânica teórica poderia iluminar problemas práticos de construção.

Desenho Ambicioso de Michelangelo

A cúpula da Basílica de São Pedro, projetada em grande parte por Michelangelo e concluída em 1590, representava o ápice da ambição estrutural renascentista. Inspirando-se na cúpula de Brunelleschi em Florença (Fig. 4.4.4) mas excedendo-a em altura e extensão, criou desafios de engenharia que testariam os limites da construção de alvenaria.

ponte de ferro; e a prática contemporânea continua se apegando à relação entre modelagem computacional e experiência de campo. Os debates de Milão da década de 1390, assim, presidiram a uma questão epistemológica fundamental que permanece central para a formação em engenharia e prática profissional: Como a compreensão teórica e o conhecimento prático devem ser integrados para alcançar resultados confiáveis?

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Sinais de alerta precoce e resposta institucional

No início do século XVII, rachaduras alarmantes haviam aparecido na estrutura da cúpula. Ao contrário de construtores medievais que poderiam ter abordado tais problemas através de reforço incremental, Roma do século 18 abordou a crise com rigor científico sem precedentes.

A cúpula da Basílica de São Pedro, em Roma, mostrava sinais de danos e rachaduras já em 1630. Em 1742, a deterioração tornou-se tão preocupante que o Papa Bento XIV ordenou um estudo formal. Em última análise, ele designou três matemáticos - Padres Ruggiero Giuseppe Boscovich, Thomas Le Seur e François Jacquier - para avaliar a estrutura (Benvenuto, 1991b, pg. 352).. A análise deles reduziu a complexa construção da cúpula, incluindo a base, as pontas, o tambor, o duplo casca, e a lanterna - em um esquema estático simplificado, passível de análises mecânicas (em termos modernos, uma abordagem elemento finito). Observaram a flacidez no tambor e nas pontas, com cada virilha exibindo subsidência em sua extremidade superior e abrindo na parte inferior (López, 2006, pg. 1958). ,

Nomeação de Poleni: Perícia e Independência

Insatisfeito com a conclusão dos jesuítas, o Papa Bento XIV nomeou Giovanni Poleni para verificar independentemente suas descobertas. A nomeação de Poleni refletiu não só sua crescente reputação como matemático e mecânico, mas também o reconhecimento do Vaticano de que o problema exigia rigor científico e visão prática. Como professor da Universidade de Pádua e conselheiro em obras hidráulicas e mecânicas, Poleni já tinha demonstrado a capacidade de ponte teoria e investigação empírica.

As qualificações de Poleni se estendem além da matemática teórica. Ele tinha projetado dispositivos de cálculo mecânico e desenvolvido instrumentação sofisticada para estudos hidráulicos. Sua capacidade de quantificar fenômenos mecânicos e traduzir princípios abstratos em soluções práticas era incomparável entre seus contemporâneos.

Inovação Metodológica: A Análise Segmental

Poleni observou que as rachaduras da cúpula já a haviam divisado em segmentos semelhantes aos de luas semiesféricas (cortes de laranja), fig. 1. 4.21.

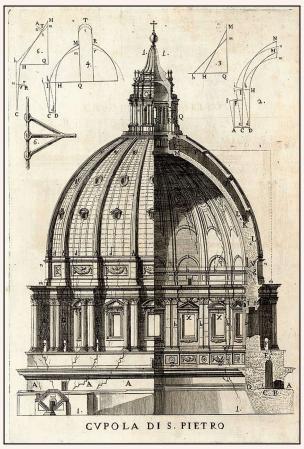


Figura 4.21: A observação de Poleni sobre rachaduras na cúpula de São Pedro (Poleni, 1748)

CÓPIA PARA REVISÃO

Para fins analíticos, ele hipoteticamente dividiu a cúpula em 50 tais luares (Heyman e Poleni, 1988). Ele então avaliou a estabilidade de um arco bidimensional formado por duas lunas adjacentes inclinadas uma contra a outra na coroa. A partir de um desenho da seção transversal da cúpula, Poleni computou o peso de cada lua, dividindo-o em 16 segmentos e contabilizando o peso da lanterna, fig. 1. 4.22a.

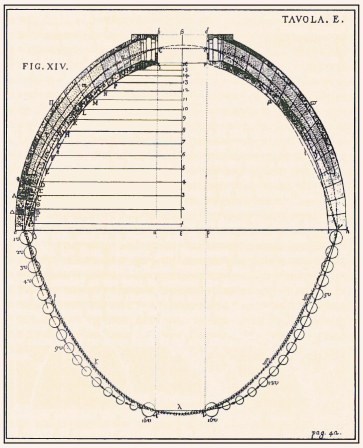
Os modelos revolucionários de correntes

A inovação mais brilhante de Poleni foi o uso de *Modelos físicos* para verificar seus cálculos analíticos. Seus experimentos em cadeia de suspensão forneceram confirmação intuitiva dos resultados teóricos ao demonstrar a relação fundamental entre tensão e compressão nos sistemas estruturais.

Ele então construiu dois modelos de cadeia física: uma usando esferas uniformes representando uma catenária perfeita, e a outra feita de dezesseis bolas de chumbo pequenas cujos pesos se conformavam com os pesos numericamente expressos em pilar IV da Fig. 4.22a.. Em seguida, comparou as curvas reais com as duas linhas de impulso e concluiu que as diferenças eram bastante consideráveis com a catenária, mas muito pequenas com as correntes com bolas de chumbo (sua curva está dentro do cofre) (Benvenuto, 1991b, pg. 382).. Assim, Poleni concluiu - corretamente - que a cúpula hipoteticamente cortada era estável e, *um fortiori*, a cúpula original, rachada ou desquebrada, também estava estável.

COLONNA I.	COLONNA II.	COLONNA III.	COLONNA IV.
NVMERI DE' CVNEI.	LVNGHEZZE DE' RAGGI.	PESI DE' CVNEI.	PROPORZIONE DE' PESI IN NVMERI MINORI.
A. 1.	200.	88976.	89.
B. 2.	198.	88088.	88.
C. 3.	195.	86752.	87.
D. 4.	191.	84972.	85.
E. 5.	184.	81858.	82.
F. 6.	177.	78743.	79.
G. 7.	168.	74740.	75.
H. 8.	159.	70735.	71.
K. 9.	148.	65842.	66.
L. 10.	135.	60059.	60.
M. 11.	122.	54275.	54.
N. 12.	108.	48047.	48.
P. 13.	92.	40929.	41.
Q. 14.	76.	33811.	34.
R. 15.	60.	26693.	27.
S. 16.	41.	18240.	18.
	2254.	1002738.	1004
S. 16.	43.	18240. Cappelini. 81629.	81
		99869.	100.

(a) Tabella resumindo os dados e os resultados experimentais



(b) Modelos de correntes penduradas

Figura 4.22: A analogia da cadeia pendurada de Poleni (Poleni, 1748)

O uso de correntes penduradas para simular linhas de empuxo compressivas ecoou ideias avançadas por Robert Hooke um século antes (*UT Pendet contínuo flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* ou "como pendura a linha flexível, então invertida vai suportar o arco rígido"). A abordagem de Poleni serviu como uma confirmação física deste princípio e prefigurava os métodos gráficos de engenheiros do século XIX, como Culmann e Rankine.

Avaliação de danos abrangentes

Nesse ponto, Poleni começou a considerar o "natureza"e os "acidentes"dos materiais da redoma: Pedra, tijolo e argamassa. Ele estudou a influência do frio, calor, umidade e secagem. Ele também considerou a influência

CÓPIA PARA REVISÃO

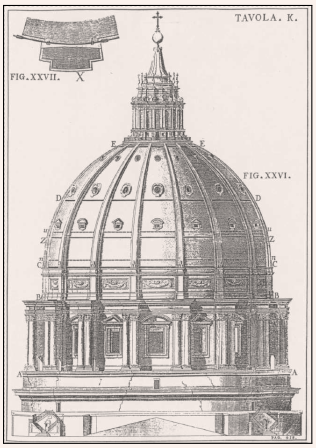
do atrito, imperfeições de construção devido ao trabalho dos artesãos, e danos externos como relâmpagos e terremotos.

Diagnóstico e tratamento Filosofia

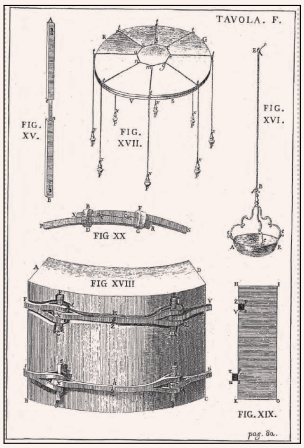
As recomendações finais de Poleni incorporaram uma filosofia de conservação que se tornaria padrão na preservação arquitetônica: Intervenção mínima, respeito pela intenção original do projeto, e monitoramento sistemático do comportamento estrutural[7].

Em resumo, Poleni atribuiu o dano visto na cúpula a materiais de construção defeituosos e métodos de construção, em vez de instabilidade estrutural. Ele recomendou restaurar a cúpula o mais próximo possível do seu estado original. Isso incluía encher as rachaduras, especialmente nos arcos principais, com cunhas de bronze, pedras cortadas e gesso fino.

A recomendação final era reforçar a cúpula com seis novos anéis de ferro. Embora a cúpula não estivesse em perigo imediato de colapso, Poleni achou prudente reforçá-la contra danos adicionais. Anéis de ferro deveriam ser colocados ao redor do tambor para suportar a estrutura cilíndrica (Fig. 4.23a). Dois novos anéis também deveriam ser adicionados ao redor da própria cúpula, e os anéis antigos seriam inspecionados e monitorados.



(a) Localização dos 6 novos anéis



(b) Experiências em correntes de ferro para cercar a cúpula

Figura 4.23: Reforço da cúpula (Poleni, 1748)

[7]Estes princípios de conservação foram posteriormente violados por Eugène Viollet-le-Duc (1814-1879), cujas restaurações do século XIX priorizavam a conclusão estilística sobre autenticidade histórica. Mais notavelmente, Viollet-le-Duc adicionou uma torre central a Notre-Dame de Paris que nunca existiu no projeto medieval original, justificando esta adição como completando o que ele acreditava que os construtores originais tinham pretendido. Sua filosofia de restauração envolveu criar uma versão idealizada da arquitetura gótica em vez de preservar o tecido histórico real. Esta abordagem, ao produzir resultados visualmente impressionantes, contradizia fundamentalmente os princípios de Poleni de intervenção mínima e respeito pela intenção original do projeto. O contraste entre o conservadorismo científico de Poleni e o intervencionismo romântico de Viollet-le-Duc ilustra a evolução da filosofia de preservação, com a prática moderna favorecendo geralmente a abordagem mais restrita de Poléni.

CÓPIA PARA REVISÃO

A proposta de Poleni para reforçar a cúpula com anéis de ferro ecoou as correntes incorporadas usadas por Brunelleschi na cúpula de Santa Maria del Fiore em Florença. No entanto, ao contrário de Brunelleschi, que escondeu as correntes dentro da alvenaria, os anéis de Poleni eram externamente visíveis e monitorados - uma decisão que refletia uma filosofia evolutiva de transparência estrutural e manutenção ativa.

Validação Experimental e Controle de Qualidade

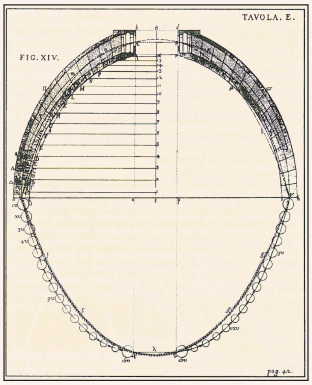
Fiel à sua mente curiosa, Poleni já havia testado barras de ferro tiradas de várias oficinas (Fig. 4.23b) para garantir que eles poderiam resistir ao aro tensões imposto pela cúpula. Este rigor experimental refletiu seu compromisso mais amplo com as recomendações de base em evidências quantitativas.

Impacto duradouro na prática de engenharia

A estrutura analítica de Poleni, empregando condições de equilíbrio e estática gráfica, antecipou técnicas modernas em análise limite. Sua dependência em análogos físicos como correntes ponderadas estabeleceu o alicerce para futuros avanços na teoria das estruturas de alvenaria, mais notavelmente por Gaudi §15.5.1.2 no desenho da Sagrada Famiglia.



(a) Modelo catenóide de Gaudi para a Sagrada Família (Dragicevic e Jansen, 2012)



(b) Modelo de cadeia pendurada por Polini

Figura 4.24: A Sagrada Família de Gaudi

A insistência de Poleni em preservar a construção original, ao adicionar reforços discretos e reversíveis, estabeleceu princípios que permanecem centrais na conservação da arquitetura. Sua abordagem equilibrava o respeito pela integridade histórica com reconhecimento da necessidade estrutural, uma filosofia que continua a guiar a preservação do patrimônio hoje.

Hoje, o estudo de Poleni serve como um caso fundamental na educação em engenharia estrutural, demonstrando a integração da análise teórica, validação experimental e aplicação prática. Seu trabalho representa uma ponte entre as tradições empíricas da construção medieval e os métodos científicos da engenharia moderna.

CÓPIA PARA REVISÃO

4.4.4 Santa Maria del Fiore: Triunfo de Brunelleschi da Intuição de Engenharia

A cúpula de Brunelleschi para Santa Maria del Fiore representa talvez o maior feito individual em engenharia estrutural antes da era moderna. Construído sem centralização temporária e confiando inteiramente no controle geométrico e na inovação material, demonstrou como o gênio empírico poderia transcender as aparentes limitações da tecnologia disponível. Ao contrário dos outros três estudos de caso, Florence tem sucesso através da inovação ao invés do fracasso.

O Desafio Impossível

Quando as autoridades da catedral de Florença anunciaram sua intenção de domesticar a travessia octogonal em 1414, a maioria dos especialistas considerou impossível a tarefa. A extensão excedeu qualquer cúpula existente, e a geometria octogonal criou desafios técnicos sem precedentes. O fato de Brunelleschi ter sucesso onde outros viram apenas impossibilidade torna sua realização ainda mais notável.

Dimensões Simbólicas e Teológicas

Dante *Divina Comédia*, concluída apenas décadas antes da concepção da cúpula, pode ter influenciado sua filosofia de design. A visão do poeta sobre o Paraíso como esferas concêntricas*Di giro em giro* para descrever o Paraíso, que é imaginado como uma série de nove círculos concêntricos[8] (King, 2010 PDF).

Inovação Invisível: O bond de Herringbone

Uma das inovações mais engenhosas de Brunelleschi permaneceu escondida até a recente investigação arqueológica. A descoberta de seu padrão revolucionou nossa compreensão de como a cúpula alcançou estabilidade estrutural durante a construção.

Como o interior da cúpula interna foi rebocado e pintado sobre, e a superfície externa da cúpula exterior é coberta por azulejos, tem sido difícil visualizar o layout dos tijolos. Isto foi finalmente elucidado quando, em 2013, um modelo escalado da cúpula foi descoberto durante a remodelação de um edifício adjacente.

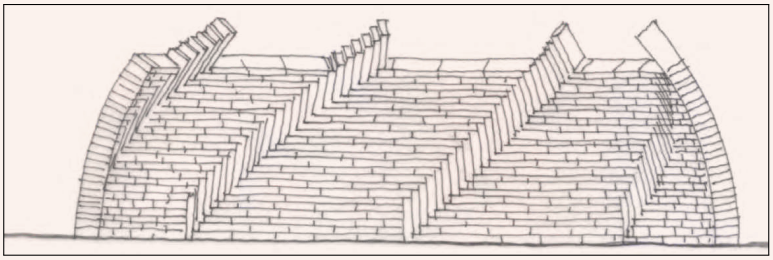
Foi confirmado que Brunelleschi usou um arranjo de tijolo conhecido como arenque (*Spina di pesce*), Fig. 4.25a, ao longo de um perfil espiral. Deve-se notar que este padrão não era inteiramente novo. Os romanos já o tinham usado antes. Especula-se que os romanos usaram este padrão, chamado *Opus spicatum*, resistir a terremotos, mas apenas para fins decorativos. Este arranjo bloquearia a fraqueza do plano de morteiros, impediria que grandes partes das paredes se separassem ou cortassem e caíssem para o chão, e eliminaria aviões contínuos cisalhamento - evitando assim que rachaduras se espalhassem.

No sistema de Brunelleschi, a cada três pés ou mais, tijolos eretos interrompem os cursos horizontais, subdividindo cada nova camada em seções mais curtas aproximadamente cinco tijolos de comprimento. Enquanto estavam em construção, as seções curtas foram conectadas pelos tijolos eretos a várias camadas completas abaixo. Cada fileira de cinco tijolos, isto é, estava trancada em posição pelos tijolos verticais de ambos os lados. Estes agiam como estantes, digitando a nova camada para as completas e auto-sustentáveis

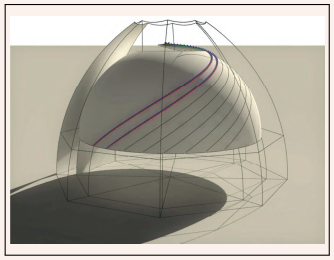
[8] Na verdade Dante se refere a círculos concêntricos para sua representação do inferno, e esferas concêntricas para o Céu.

CÓPIA PARA REVISÃO

abaixo. Para evitar um plano vertical fraco, o vertical *Spina di pesce* Os elementos foram deslocados, Fig. 4.25a, efetivamente resultando em uma Loxodrome[9] Curva[10] (Pizzigoni, 2015), Fig. 4.25b.



(a) *Spina Pesce* layout de tijolos (Corazzi, 2012)



(b) Curva de Loxodrome (Hélice Esférica) (Pizzigoni, 2015)

Figura 4.25: *Spina pesce* e loxodrome tijolo layout

Controle geométrico sem apoios temporários

O próximo grande desafio era levantar a cúpula: Como poderia a curvatura das oito paredes individuais ser controlada durante a construção? Um desvio de apenas vários centímetros em uma dessas costelas, cada uma delas com mais de 40 metros de comprimento, significava que a conexão não seria alcançada. Claro, as equipes de pedreiros tinham certos dispositivos básicos de medição; no entanto, a maioria deles não tinha mudado significativamente por mil anos e não estavam à altura do desafio colocado por esta cúpula.

Como a maioria das catedrais góticas, as renascentistas tinham uma cúpula proporcional de acordo com *Quinto Acuto* Regra. Ou seja, a cúpula é composta de dois arcos circulares, cada um com um raio igual a quatro quintos do vão, Fig. 4.26b.. Não só foi estruturalmente muito mais eficiente do que a cúpula semicircular - já que o impulso lateral é muito reduzido - mas também desposou a forma da *Vesica Piscis*[11], ou bexiga de peixe - o peixe sendo um símbolo de Jesus de Nazaré.

Isso permanece até hoje uma questão de muita especulação, e muitas teorias foram propostas. Ao rever muitos deles, encontrei a metodologia defendida por Jones, Sereni e Ricci, 2010 O mais plausível.

O Método Cord: Precisão geométrica através da inovação prática

A solução de Brunelleschi para o problema do controle da curvatura representa um dos exemplos mais elegantes de geometria prática da história. Seu método de cordas transformou princípios matemáticos abstratos em uma técnica de construção viável.

[9]Um loxodromo (também chamado de linha rugosa) é uma curva em uma esfera que cruza todos os meridianos num ângulo constante. Na navegação, representa um caminho de constante rolamento da bússola; Em uma projeção Mercator, aparece como uma linha reta. Na cúpula de Brunelleschi, este padrão espiral impediu a formação de planos de fraqueza vertical contínua que poderiam comprometer a integridade estrutural, enquanto distribuía cargas mais efetivamente do que alinhamentos verticais retos.

[10]Uma linha em uma superfície que corta todos os meridianos num ângulo constante (mas não um ângulo reto); corresponde à menor distância entre dois pontos em uma superfície esférica.

[11]Uma composição geométrica formada pela intersecção de dois círculos com o mesmo raio, cruzando-se de tal forma que o centro de cada círculo está na circunferência do outro.

CÓPIA PARA REVISÃO

Após a construção da plataforma, Fig. 4.26c, localização das costelas maiores e pequenas são identificadas, Fig. 4.26d.. Então, para cada lado do octógono, Fig. 4.26eDois conjuntos de cordas (*Corda Blanda*) foram colocados:

Corda fixa Estabeleceu pontos de referência, estendendo cordas de comprimento pré-determinado do *Quinto Acuto* Centros. Estes cordões bisseccionados ângulos de canto e alinhado com correntes diagonais abaixo, garantindo consistência geométrica através da estrutura octogonal.

Corda fixa

1. Localize o correspondente *Quinto Acuto* de cada extremo (A e E).
2. Estenda uma corda (fixa) de comprimento igual ao raio do arco, de tal forma que ele cruza o eixo vertical.
3. O cordão deve bissecar o ângulo do canto (porque apenas o bissector está alinhado com o plano radial vertical passando pela diagonal correspondente abaixo) e deve estar verticalmente acima e alinhado com a cadeia diagonais abaixo.
4. Solte uma linha de prumo (de E)^1 e A^1) até a diagonal do canto para garantir bissecção.
5. A extremidade do cordão corresponde aos intrados da cúpula interna (A)^1 e E^1).
6. Estenda mais para marcar os extrados da cúpula exterior (A^4 e E^4).

Corda móvel Desenhe uma curva na plataforma cujo cada ponto é também 36 metros de um ponto correspondente no segmento da cúpula a ser construída em frente (ou seja, entre dois cantos adjacentes). A linha que une um ponto na curva ao segmento da cúpula deve cruzar o eixo vertical central correspondente. Assim B-B^1 É 36 m.13. Esta curva recém-definida é côncava; se assemelha ao arco de um círculo, mas na verdade é o arco de uma concha[12].

Este arco pode ser usado para determinar a posição dos tijolos e a curvatura do segmento da cúpula sendo construído em frente.

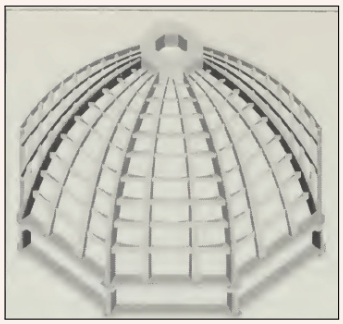
Mistérios não resolvidos e pesquisas em andamento

Apesar de extensa investigação acadêmica, vários aspectos do método de Brunelleschi permanecem enigmáticos. O objetivo exato dos três acordes *gualandrino* O sistema e as técnicas precisas para marcar o eixo central da redoma continuam quebrando os pesquisadores.

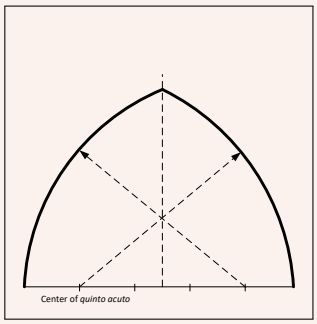
Esta reconstrução é baseada no estudo de Jones, Sereni e Ricci, 2010, que construiu um modelo de escala 1/5 da cúpula para apoiar e refinar suas teorias. No entanto, várias questões importantes continuam por resolver. Qual era o objetivo exato do evasivo 3-cord *gualandrino* Muitas vezes mencionado? Era um dispositivo de segurança para os pedreiros? Ou foi um instrumento geométrico para controlar a ligação da parede indicando três direções de alinhamento? Outra questão não resolvida é como Brunelleschi marcou precisamente o eixo da cúpula.

[12]Um conchoide é uma curva construída a partir de um ponto fixo, uma determinada curva, e uma distância constante. Especificamente, consiste em todos os pontos que são uma distância fixa de uma determinada curva, medida ao longo das linhas passando por um ponto fixo. Inventado pelo antigo matemático grego Nicomedes (c. 280-210 a.C., o conchoide foi originalmente usado para resolver problemas geométricos clássicos como trissecção de ângulo. No método de construção de Brunelleschi, a curva conchoid na plataforma assegurou que os pedreiros pudessem manter um posicionamento tridimensional preciso das pedras preservando distâncias constantes aos segmentos da cúpula em construção. Neste caso, o conchoide é a curva derivada de um ponto fixo O (interseção do eixo vertical com os cabos fixos), outra curva (na plataforma) e um comprimento d (igual a 36 m aqui).

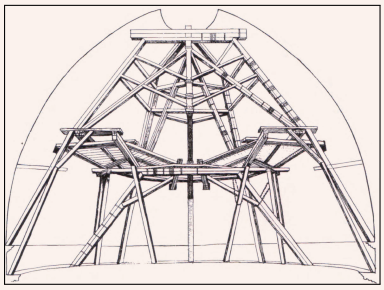
CÓPIA PARA REVISÃO



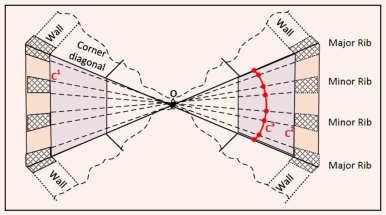
(a) Nove anéis horizontais (King, 2010)



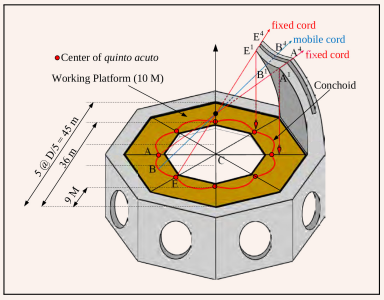
(b) *Quinto acuto*



(c) Andaimes (Nelli e Ceccherelli, 1753)



(d) Vista do plano (adaptada de (Jones, Sereni e Ricci, 2010))



(e) Cordas fixas e móveis (adaptadas de (Jones, Sereni e Ricci, 2010) por Y. Gakuhari)

Figura 4.26: Santa Maria del Fiore construção cúpula

Inovação Mecânica: O Içar Revolucionário

Depois de tomar a decisão de trabalhar sem nenhuma estrutura central, Brunelleschi ainda teve que enfrentar outro problema significativo: Como carregar materiais até o local de construção e posicioná-los com a precisão necessária. Isso exigia o projeto de dispositivos especializados com um nível sem precedentes de complexidade mecânica.

Brunelleschi concebeu um guincho de boi que consistia em uma madeira pórtico, à qual foram anexados vários eixos horizontais e verticais que giravam uns aos outros por meio de rodas de cogged de tamanhos variados. A máquina, Fig. 4.27, foi posta em movimento por um ou dois bois presos a um leme que virou o eixo vertical. Este eixo foi mobiliado com duas rodas, uma na parte superior e outra na parte inferior, qualquer um dos quais poderia se misturar com uma roda muito maior em um eixo horizontal. Apenas uma das rodas do rotor poderia ser ativada de cada vez - uma foi projetada para levantar cargas, a outra para baixá-las. A mudança de marcha foi feita por um grande parafuso com uma rosca helicoidal. Virado em qualquer direção, ele levantava ou largava o rotor várias polegadas, assim, envolvendo um ou outro de seus pinhão com os dentes de uma roda presa ao maior dos três tambores de corda (King, 2010).

Previsão Estrutural: Reforço incorporado

Ao contrário de St. A cúpula de Peter, que exigia reforço retroativo com anéis de ferro externos, Brunelleschi enfileirava correntes horizontais dentro de sua alvenaria desde o início. Esta abordagem preventiva à tensão

CÓPIA PARA REVISÃO

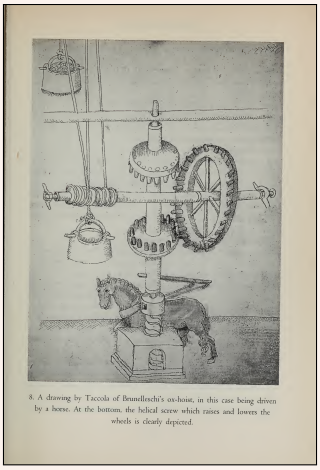


Figura 4.27: O guincho de Brunelleschi (King, 2010)

de aro demonstra notável intuição estrutural e pode explicar porque a cúpula de Florença nunca precisou de uma grande intervenção estrutural.

Legado da Inovação Racional

Finalmente, Brunelleschi é universalmente reconhecido como o "inventor"da perspectiva linear renascentista e é visto por muitos como o primeiro grande expoente de *Arquitetura racional*.. Sua cúpula, concebida e executada sem centralização, representa não só uma maravilha da engenharia, mas uma síntese de geometria, simbolismo e inovação. Ao contrário de St. A cúpula de Peter, que exigia reforço retroativo com anéis de ferro, Brunelleschi enfileirava correntes horizontais dentro da alvenaria da cúpula para resistir à tensão do aro desde o início. Uma estratégia preventiva que pode ter poupado Florença do destino de rachar mais tarde visto em Roma.

Síntese: Quatro Lições em Ambição Estrutural

Os destinos contrastantes desses quatro grandes projetos arquitetônicos iluminam os princípios fundamentais da engenharia estrutural que permanecem relevantes hoje:

Beauvais: demonstra as consequências catastróficas de exceder limites empíricos sem entender adequadamente os mecanismos de falha. Ambos os colapsos ocorreram quando construtores empurraram além de envelopes estruturais comprovados.

Milão mostra como as estruturas institucionais e a consulta sistemática podem navegar por decisões técnicas complexas. Os debates entre teoria e prática estabeleceram precedentes para o desenho baseado em evidências que continuam influenciando a prática profissional.

St. Peter: marca o surgimento da metodologia científica na avaliação estrutural. A abordagem analítica de Poleni estabeleceu padrões para investigação sistemática, validação experimental e filosofia de conservação que permanecem centrais na engenharia do patrimônio.

CÓPIA PARA REVISÃO

Florence: exemplifica como o pensamento inovador pode transcender aparentes limitações técnicas. A síntese de Brunelleschi de controle geométrico, inovação material e engenho mecânico alcançou o que as abordagens convencionais consideravam impossível.

Juntos, esses estudos de caso revelam que a engenharia estrutural bem sucedida requer não apenas competência técnica, mas também sabedoria institucional, rigor metodológico e visão inovadora. O diálogo entre o conhecimento empírico e a compreensão teórica - primeiro articulado nos debates de Milão - continua a moldar como abordamos os complexos desafios da engenharia hoje.

4.5 Tabela sumária

Mesa 4.3 é um resumo cronológico de obras-chave, estruturas e análises relatadas neste capítulo.

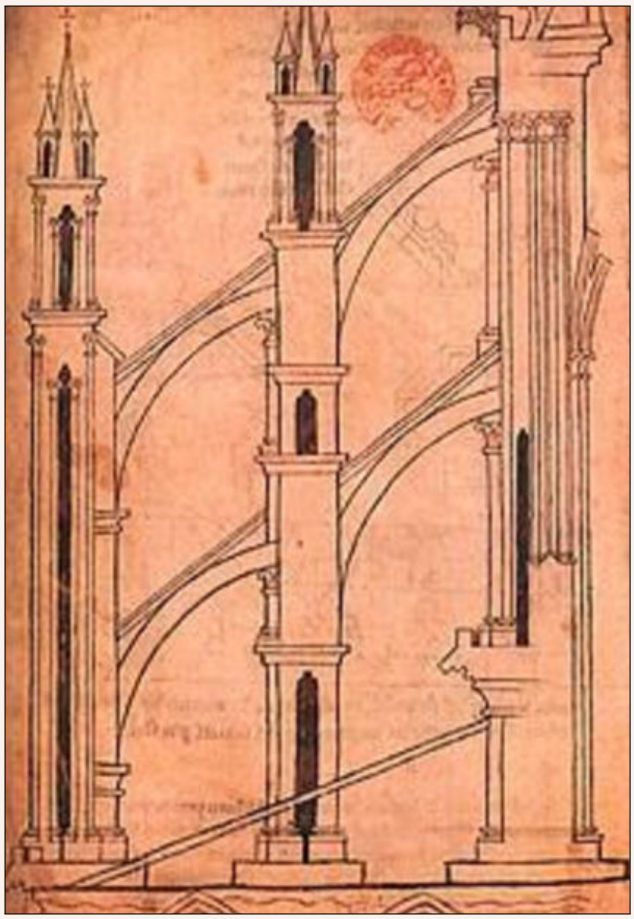
Tabela 4.3: Resumo cronológico das obras-chave

Ano	Autor / Construtor	Título do livro / Estrutura	Resumo do Conteúdo
1144	Abade Suger	Catedral da Basílica de São Denis (Como, 2013)	Primeira estrutura gótica; Cofres de costela, arcos pontiagudos, vitrais; marca a transição da massa românica para o esqueleto gótico.
1194–1250	Mestre Masons de Chartres	Catedral de Chartres (Como, 2013)	Reconstruído após o fogo; Mistura de Romanesco/Gótico; Mastros voadores mais cedo; Um grande programa de vidraças.
1220–1288	Mestre Masons de Amiens	Catedral de Amiens (Elizalde, 2025)	Gótico completo mais alto (vault 42,3 m); Refinado buttressing; Exemplo do Alto Gótico.
1225... In-completo	Vários	Catedral de Beauvais (Elizalde, 2025)	48 m de coro; colapsos em 1284 e 1573; Caso forense sobre limites de esbeltez gótica; análises posteriores tensão defeitos locais e resistência.
1284	—	Beauvais 1284 Recolher (Heyman, 1967)	Falha na abóbada do coral sob cargas normais; Análise de limite mostra equilíbrio inicial; Reconstrução dobrou os cais, íngremes voadores.
1386–1965	Vários	Catedral de Milão (Duomo) (Ackerman, 1949)	O maior gótico italiano. Fabbrica governando; Debates de elevação (*ad quatratum*/*ad triangulum*); A crítica de Jean Mignot.
1391	Stornaloco	Esquema de elevação (84 braccia) (Sebregondi e Schofield, 2016)	Altura equilátero-triângulo racionalizada para mensurabilidade; Influenciou a solução híbrida milanesa.
1392	Heinrich Parler	Proposta de Colônia (96 braccia) (Ackerman, 1949)	Elevação de seção quadrada por precedente gótico alemão.
c. 1225–1250	Villard de Honnecourt	"Sketchbook"*Carnet*) (De Honnecourt, 2006)	Regras de proporção/geometria para pedreiros; Geometria sagrada informando a prática.

CÓPIA PARA REVISÃO

Ano	Autor / Construtor	Título do livro / Estrutura	Resumo do Conteúdo
1486	Matthias Roriczer	*Geometria Deutsch* (Shelby, 1972)	Problemas práticos de geometria gótica; Estabelecendo polígonos, gables, finiais.
1590	Michelangelo (design)	St. Cúpula de Pedro (López, 2006)	Dome duplo. Mais tarde, a rachadura precipita 18o-C. Investigação estrutural.
1742–1748	Giovanni Poleni	Relatório sobre St. Cúpula de Pedro (Poleni, 1748)	Análise de peso segmental; Experimentos de cadeia suspensa; anéis de ferro recomendados.
1418–1436	Filippo Brunelleschi	Cúpula de Santa Maria del Fiore (King, 2010)	Construído sem centralização; Ligação de ossos, geometria do cordão, guincho de bois, correntes incorporadas.
c. 1750	Boscovich, Le Seur, Jacquier	St. Avaliações de Peter (Benvenuto, 1991b)	Leitura mecânica precoce de deformações; precursor da síntese de Poleni.
1842	Robert Willis	*Sobre a Construção dos Cofres da Idade Média* (Willis, 1842)	Rib-as-primária vista; Mais tarde temperado pela observação/análise.
1854	Viollet-le-Duc	*Dictionnaire raisonne* (Viollet-le-Duc, 1854)	Vault-as-arches; noção de alvenaria "elasticidade"; Influenciável 19th-C. Lentes.
1891	Léon Benouville	Análise de Beauvais (Benouville, 1891)	Pino aponta deflexão lateral dos cais sob impulso como motorista de falha.
1966	Jacques Heyman	*O esqueleto de pedra* (Heyman, 1966)	Análise de limite plástico para alvenaria; Três suposições; Critério de segurança da linha de impulso.
1967	Jacques Heyman	Estudo Beauvais (Heyman, 1967)	Confirma a estabilidade inicial. Provavelmente um problema de defeito/sequência local.
1973	Robert Mark	Estudos de Cofre Fotoelástico (Mark, Abel e O'Neill, 1973)	Modelos epóxi visualizam caminhos de impulso 3D e concentrações tensão.
2002	John Ochsendorf	Doutora: *Colapso das estruturas da alvenaria* (Ochsendorf, 2002)	A geometria muda como causa de falha; Bloco rígido cinemática; Mecanismos góticos.
2005	Nikolinakou et al.	Geometria do Buttress Voador (Nikolinakou, Tallon Ochsendorf, 2005)	Geometria idealizada. modos de esmagamento/deslize/instabilidade; efeitos de eparâmetros.
2016	Kim et al.	FE de Buttress Voadores (Kim, 2016)	Notre-Dame, Amiens, Saint-Etienne; Geometria... correlações, vulnerabilidades.

CÓPIA PARA REVISÃO



Villard de Honnecourt, Esboço de capas voadoras (c.1230)

A estática gráfica inicial força externalizada e guiada para o solo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 5

A ascensão da razão científica

Abstract

Este capítulo traça o surgimento do raciocínio científico desde suas primeiras manifestações na Idade Dourada Islâmica até sua cristalização durante a Revolução Científica e sua consolidação institucional no Iluminismo. Começa com o Bayt al-Hikma (Casa da Sabedoria) em Bagdá, onde os estudiosos preservaram e expandiram o legado científico da antiguidade. A narrativa então se move para a Europa moderna primitiva, destacando como a autoridade de Aristóteles e doutrina teológica foi substituída por observação empírica, modelagem matemática e experimentação sistemática. Figuras-chave como Galileu, Newton, Kepler e Harvey demonstraram novas metodologias, enquanto instituições como Accademia dei Lincei *e o* Accademia del Cimento *Pesquisa científica colaborativa pioneira. Esta transformação foi solidificada pelo estabelecimento de corpos científicos duradouros como o* Sociedade Real de Londres *e o* Académie des Sciences *em Paris. O capítulo revela como este período estabeleceu um modelo universal para o progresso científico, desde a observação precisa através do reconhecimento de padrões empíricos até a compreensão teórica fundamental, exequível na progressão dos dados astronômicos de Brahe através das leis de Kepler para a síntese de Newton. O Iluminismo ampliou esta mudança, estendendo a mentalidade científica para a educação técnica e aplicações de engenharia prática. Esta transformação intelectual não só revolucionou a compreensão da humanidade sobre a natureza, mas também estabeleceu o fundamento metodológico e institucional para a engenharia moderna, mecânica, e a análise formal das estruturas.*

5.1 Introdução 90
5.2 Islâmico: Bayt al-Hikma 90
5.3 A Revolução Científica 92
5.3.1 Fundamentos do Novo Método 92
5.3.2 Descobertas Revolucionárias e Novos Métodos 94
5.3.3 Instituições Científicas Primárias 96
5.3.4 Síntese e institucionalização 98
5.4 O Iluminismo: Uma ponte cultural . 100
5.4.1 A difusão do pensamento científico 100
5.4.2 A ascensão da educação técnica: Escolas de Engenharia Militar 101
5.4.3 Da Filosofia Natural à Ciência Aplicada 101
5.5 Conclusão 102

CÓPIA PARA REVISÃO

5.1 Introdução

O surgimento do raciocínio científico marca um dos episódios mais transformativos da história intelectual humana. Este capítulo examina como, entre os séculos IX e XVIII, a humanidade progressivamente se moveu de uma visão de mundo baseada em autoridade, tradição e especulação para uma baseada na observação, experimentação e formalização matemática.

A história começa na Idade Dourada Islâmica, onde centros como *Bayt al-Hikma* preservar e expandir o legado intelectual da antiguidade. Estes esforços semearam o despertar intelectual posterior na Europa. A Revolução Científica destruiu o poder das doutrinas aristotélicas e teológicas, substituindo-as por métodos empíricos e raciocínio quantitativo. Figuras-chave como Galileu, Descartes, Bacon e Newton não apenas propuseram novas teorias - eles alteraram fundamentalmente a forma como o conhecimento em si foi construído.

Igualmente transformadora foi a criação de instituições científicas. Academias primitivas como a *Accademia dei Lincei* e o *Accademia del Cimento* Pesquisa colaborativa pioneira baseada em observação e experiência. Seu legado foi cimentado pelo estabelecimento do *Sociedade Real de Londres* e o *Académie des Sciences*, que institucionalizou investigação científica e forneceu uma estrutura durável para o seu avanço.

O Iluminismo ampliou esta transformação, espalhando a mentalidade científica além da filosofia natural em sociedade, educação e tecnologia. Esta mudança estabeleceu o quadro intelectual que, em última análise, daria origem à engenharia moderna, mecânica e a análise formal das estruturas. Este capítulo traça essa ascensão da razão.

5.2 Islâmico: Bayt al-Hikma

O *Bayt al-Hikma* (Casa da Sabedoria) foi um centro intelectual e cultural estabelecido em Bagdá durante o *Califado abássida*, Principalmente sob o reinado de Califa *Harun al-Rashid* (786–809 d.C.) e florescendo sob seu sucessor, *Al-Ma'mun* (813–833 d.C.). Surgiu no século IX - bem antes do *Accademia dei Lincei* em Roma, muitas vezes considerada como a primeira academia moderna de ciências.

Serviu como biblioteca, instituto de tradução e centro de pesquisa, tornando-se um símbolo da Idade Dourada Islâmica e um ponto focal para a preservação, enriquecimento e disseminação do conhecimento.

O surgimento de Bagdá como epicentro intelectual não foi acidente. Estrategicamente localizado na encruzilhada das principais rotas comerciais que ligam a Ásia, África e Europa, a cidade tornou-se não só um centro comercial, mas também um caldeirão de ideias. Os governantes abássidas, particularmente Al-Ma'mun, promoveram ativamente o conhecimento como um pilar chave da governança, entrelaçando investigação científica com o Estado.

Originalmente fundada como repositório de livros e manuscritos, *Bayt al-Hikma* rapidamente evoluiu para um centro vibrante que atraiu estudiosos de diversas origens: muçulmanos, cristãos, judeus e zoroastrianos. Trabalhando colaborativamente, esses estudiosos traduziram textos científicos, filosóficos e médicos de grego, siríaco, persa, sânscrito e outras línguas em árabe, tornando o conhecimento das civilizações antigas acessíveis ao mundo islâmico.

O movimento de tradução liderado pelo *Bayt al-Hikma* foi fundamental na preservação e transmissão das obras de pensadores gregos chave, como Aristóteles, Platão e Hipócrates, juntamente com as contribuições matemáticas e astronômicas de Euclides e Ptolomeu. No entanto, a instituição era muito mais do que uma agência de tradução. Era um cadinho para o avanço científico original. Matemáticos como *Al-Khwarizmi* lançou as bases da álgebra, enquanto notável progresso foi feito na medicina, astronomia e óptica.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Manuscrito com representação de Yahya ibn Vaseti (*Biblioteca Nacional de França*)

(b) The Book of Ingenious Devices, Encyclopædia Britannica

Figura 5.1: Bayt al-Hikma

Os irmãos Banu Musa, filhos de um astrônomo em Bagdá, projetaram algumas das primeiras máquinas programáveis, incluindo sofisticados dispositivos de controle automático e inovações mecânicas descritas em seu *Livro de Dispositivos Engenhosos*, (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850). Os tratados científicos produzidos no *Bayt al-Hikma* mais tarde seria traduzido para o latim e filtrado na Europa, semeando desenvolvimentos que culminaram no Renascimento, Fig. 5.2.

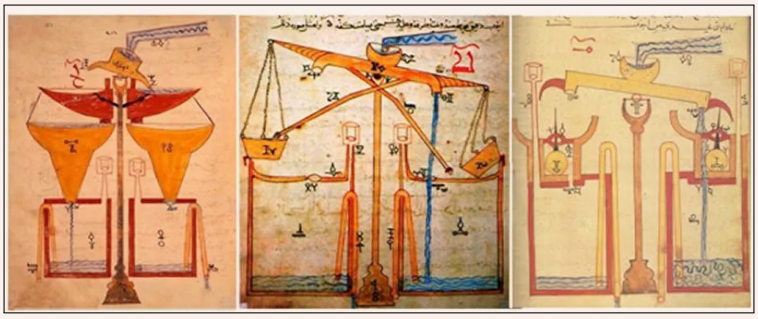


Figura 5.2: Três flautas perpétuas, esquerda dos baldes inclinando, equilíbrio central e no flutuador direito. Manuscrito Topkapi, 1206

Além da bolsa de estudos no sentido clássico, o *Bayt al-Hikma* Fomentei uma cultura de investigação crítica e investigação empírica. Ele sediou debates e incentivou o diálogo interdisciplinar entre os estudiosos, abrangendo campos da filosofia e teologia à matemática e às ciências naturais. Esta abertura intelectual refletia o ethos mais amplo da Idade Dourada Islâmica, onde a busca do conhecimento era vista como um esforço universal transcendendo fronteiras culturais, étnicas e religiosas.

Sob o patrocínio de *Al-Ma'mun*, a instituição chegou ao seu zênite. Al-Ma'mun não só encomendou traduções de grandes obras gregas, muitas vezes sob patrocínio real, mas também iniciou projetos científicos empíricos. Entre eles estava uma medição notavelmente precisa da circunferência da Terra, alcançada por equipes de astrônomos enviados para medir arcos meridianos nas planícies de Sinjar e perto de Kufa.

CÓPIA PARA REVISÃO

Numa época em que grande parte da Europa estava lutando com a estagnação intelectual do início do período medieval, as chamadas "Eras Negras"', centros como *Bayt al-Hikma* eram faróis de aprendizagem, preservação e inovação. Esta distribuição assimétrica da produção de conhecimento persistiria por séculos até que a redescoberta de muitos desses textos na Europa medieval reacendeu o inquérito científico.

O declínio do *Bayt al-Hikma* Coincidiu com o declínio do Califado Abássida, exacerbado pela instabilidade política e dificuldades econômicas. O saco mongol de Bagdá em 1258d̃.C. deu um golpe catastrófico, com grande parte do conteúdo da biblioteca destruído ou disperso.

Apesar de sua destruição, o legado do *Bayt al-Hikma* Perseverou. Ele desempenhou um papel fundamental na preservação do conhecimento antigo e transmissão para civilizações posteriores, mais notavelmente a Europa, onde ajudou a estabelecer as bases para o Renascimento. O *Bayt al-Hikma* permanece um símbolo duradouro da curiosidade intelectual e síntese cultural, representando um dos períodos mais dinâmicos da história humana.

A realização científica no Oriente Médio posteriormente diminuiu e nunca retornou totalmente às alturas alcançadas durante a Idade Dourada Islâmica. De todos os Prêmios Nobel de Ciências concedidos desde 1901, apenas dois foram para os beneficiários da região (The Economist, 2025).

5.3 A Revolução Científica

5.3.1 Fundamentos do Novo Método

5.3.1.1 O Fim da Filosofia Natural

Até a Revolução Científica, o aperto de Aristóteles (e, em menor medida, a Bíblia) foi tão apertada que sufocou o progresso na física. Quando Galileu nasceu, não havia tal coisa como *Ciência* No sentido moderno, apenas *Filosofia Natural*[1] Na época da morte de Galileu, a fundação da ciência moderna tinha sido firmemente estabelecida.

Vale a pena notar que as sementes desta transformação já estavam presentes no final da Idade Média. A pensadora francesa Nicole Oresme (c. 1320–1382) Desafiou aspectos-chave da física aristotélica muito antes de Galileu. Ele desenvolveu métodos gráficos para representar quantidades variáveis, essencialmente inventando o conceito de plotagem de variáveis ao longo do tempo, e formulou o teorema da velocidade média, que mais tarde se tornou associado com Galileu. Oresme também entreteve a possibilidade de que a Terra pudesse girar em seu eixo e argumentou que tal movimento era indistinguível da rotação dos céus, embora ele finalmente rejeitou o heliocentrismo por motivos teológicos. Seu trabalho representa um notável passo inicial para a matemática da física e o questionamento das autoridades herdadas, lançando bases intelectuais que a Revolução Científica mais tarde perceberia completamente.

5.3.1.2 O Papel da Matemática e do Iluminismo

O Iluminismo primeiro afrouxou esse aperto aristotélico e permitiu que filósofos naturais se envolvessem com o mundo através da observação e experimentação. Logo depois, os matemáticos forneceram as ferramentas formais necessárias para reduzir fenômenos físicos complexos aos seus essenciais, permitindo que os físicos redirecionassem seu foco para novos problemas (Truesdell, 1968 PDF).

[1] Newton *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* Traduz-se para *Princípios matemáticos da filosofia natural*, refletindo o uso então atual de "filosofia natural" como o estudo sistemático da natureza.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

5.3.1.3 Francis Bacon e o nascimento do empirismo

A ideia de que a experimentação é um meio confiável de descoberta tornou-se firmemente estabelecida. Isso deve muito aos escritos do advogado inglês Francis Bacon (1561-1626), (Bacon, 2000) que defendia uma nova abordagem radical baseada em observação sistemática e experiência. Bacon rejeitou metodologias fundamentadas em mera lógica, especulação teológica ou matemática não controlada:

> Filosofia Natural ainda não foi encontrada sincera, mas está infectada e corrompida. na escola de Aristóteles, por Lógica; na escola de Platão, por Teologia Natural; na segunda escola de Platão, a de Proclus e outras, pela Matemática, que deveria limitar a filosofia natural, e não gerá-la ou originar. Mas de uma filosofia natural, pura e sem mistura, coisas melhores são esperadas
>
> Bacon, 2000 Novum Organum
>
> .

Bacon era cético em raciocinar de premissas preconcebidas com evidências insuficientes:

> ...na preparação do assunto da Filosofia, os homens ou desenham muito de alguns casos, ou um pouco de um grande número; de modo que, em qualquer dos casos, a filosofia é fundada sobre uma base muito estreita de experiência e história natural, e dogmatiza com evidências insuficientes demais
>
> Bacon, 2000 Novum Organum

Ao rejeitar a autoridade da teologia, Bacon iniciou um crucial Ciência e religião (separação).. Sua crença de que a ciência deve servir à humanidade é capturada na frase Conhecimento é poder. Este ethos ressoou com as classes industriais emergentes da Inglaterra.

5.3.1.4 Racionalismo: Abordagem Dedutiva de Descartes

Enquanto Boyle e Hooke avançavam empirismo baconiano, Descartes defendeu dedução racional. Descartes argumentou que o conhecimento sensorial não é confiável e que a verdade surge do raciocínio lógico. Apesar de suas diferenças metodológicas, Descartes e Bacon concordaram que a ciência deveria ser universal, verificável e separada da teologia.

5.3.1.5 A transformação das universidades

A Revolução Científica coincidiu com uma transformação gradual mas fundamental das universidades europeias de centros de aprendizagem escolar para instituições que abraçam a investigação empírica. As universidades medievais tinham sido dominadas pelo método escolástico - investigação teológica sistemática e filosófica baseada na conciliação da filosofia aristotélica com a doutrina cristã através de argumentação lógica.

O novo método científico desafiou esta abordagem priorizando observação e experimentação sobre a autoridade textual. As universidades gradualmente começaram a estabelecer cadeiras em matemática, astronomia e filosofia natural que enfatizavam pesquisas empíricas. A Universidade de Pádua, onde Galileu ensinava, tornou-se particularmente famosa pela ênfase da sua faculdade em observação anatômica direta e sua abertura a novas ideias astronômicas.

Esta transformação não foi uniforme nem imediata. Muitas universidades permaneceram bastiões da aprendizagem tradicional bem no século 18. No entanto, a aceitação gradual da metodologia experimental dentro dos currículos universitários proporcionou legitimidade institucional para a nova ciência e ajudou

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

a formar gerações sucessivas de estudiosos empiricamente intencionados. A evolução da universidade de Escolástica medieval para cedo Empirismo moderno representa uma base institucional crucial para o desenvolvimento contínuo do conhecimento científico.

5.3.2 Descobertas Revolucionárias e Novos Métodos

5.3.2.1 Astronomia Observacional: Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546 - 1601) revolucionou a astronomia não através de inovação teórica, mas através de precisão observacional sem precedentes. Trabalhando em seu observatório Uraniborg na ilha de Hven, Brahe compilou os dados astronômicos pré-telescópicos mais precisos da história. Suas observações meticulosas de posições planetárias, particularmente de Marte ao longo de décadas, alcançaram uma precisão de cerca de 2 minutos de arco - notável para observações de olhos nus.

O modelo cosmológico híbrido de Brahe, o sistema Tychonic, Colocaram a Terra no centro com o Sol e a Lua orbitando a Terra, enquanto os outros planetas orbitavam o Sol. Embora esteja errado, este modelo representou um passo intermediário crucial entre o geocentrismo ptolemaico e o heliocentrismo copérnico. Mais importante, a ênfase de Brahe na medição de precisão e coleta sistemática de dados estabeleceu novos padrões para astronomia empírica. índice[p1]geocentrismo

Suas observações sobre a supernova de 1572 (agora conhecida como supernova do Tycho) desafiaram a doutrina aristotélica da imutabilidade celestial, demonstrando que os céus poderiam realmente mudar. Este desafio empírico para receber sabedoria exemplificava a dependência do método científico emergente na observação sobre a autoridade.

5.3.2.2 Astronomia Matemática: Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) transformou os dados observacionais de Brahe em leis matemáticas que revolucionaram nossa compreensão do movimento planetário. Herdando os dados de Brahe depois de servir como seu assistente, Kepler passou anos tentando conciliar as observações com órbitas circulares - o suposto movimento celestial ”perfeito” desde a antiguidade.

Seu avanço veio com a percepção de que órbitas planetárias são elípticas, não circulares. As três leis do movimento planetário de Kepler, formuladas entre 1609 e 1619, forneceram a primeira descrição matemática exata do comportamento planetário:

1. **Lei de Elipses**:. Os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um foco
2. **Lei de Áreas iguais**:. Uma linha ligando um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais
3. **Lei Harmônica**:. O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo de seu eixo semi-maior

Essas leis representaram uma profunda mudança conceitual: relações matemáticas, derivadas de dados empíricos, poderiam descrever fenômenos naturais com precisão sem precedentes. O trabalho de Kepler demonstrou que a beleza matemática não estava na perfeição geométrica preconcebida, mas na simplicidade elegante das leis naturais. Suas conquistas forneceram a base sobre a qual Newton construiria mais tarde sua teoria da gravitação universal.

5.3.2.3 Da observação à teoria: Um modelo para o progresso científico

Esta progressão é notavelmente análoga à mecânica experimental moderna. Primeiro, coletamos dados observacionais precisos (Brahe); então identificamos relações empíricas e padrões matemáticos dentro desses

CÓPIA PARA REVISÃO

dados (Kepler); e, finalmente, desenvolvemos um referencial teórico fundamental que explica e prediz as relações empíricas (Newton). De fato, as três leis de Kepler podem ser matematicamente derivadas da lei de gravitação universal de Newton combinada com suas leis de movimento, demonstrando como descobertas empíricas muitas vezes revelam princípios subjacentes mais profundos.

Este padrão — observação, correlação empírica, compreensão teórica — repete ao longo da história da mecânica e engenharia. As observações cuidadosas de Hooke sobre a deformação da mola levaram à sua lei empírica relativa à força e deslocamento, que mais tarde encontrou fundamentação teórica na teoria da elasticidade. Na engenharia estrutural, séculos de regras de projeto empírico derivadas da experiência de construção e observações de falha foram eventualmente substituídas por racional análise estrutural baseado em princípios fundamentais de equilíbrio, compatibilidade e material Comportamento. Da mesma forma, os experimentos sistemáticos de Coulomb com fricção e pressões da terra produziram relações empíricas que mais tarde receberam fundamentação teórica através dos princípios da mecânica do solo e teoria da plasticidade.

Mesmo em mecânica de fluidos, a progressão mantém-se: Os experimentos de Torricelli com fluxo de fluidos, as observações empíricas de Bernoulli sobre relações de pressão e velocidade, e inúmeras outras correlações experimentais foram finalmente unificadas sob o referencial teórico das equações de Navier-Stokes. A mecânica computacional moderna segue essa mesma progressão — a validação experimental orienta modelos empíricos, que são progressivamente substituídos por abordagens mais fundamentais à medida que nossa compreensão teórica se aprofunda.

O próprio método dos elementos finitos representa o culminar deste processo: estruturas teóricas sofisticadas implementadas computacionalmente, mas ainda requer validação experimental, verificação e calibração empírica.

5.3.2.4 Revolução Anatômica: Andreas Vesalius

Andreas Vesalius (1514-1564) foi pioneiro no estudo empírico da anatomia humana, desafiando quinze séculos de conhecimento médico baseado em autoridade. Sua obra-prima *De Humani Corporis Fabrica* (No tecido do corpo humano, 1543) (Vesalius, 1998–2009) foi baseado na dissecção humana sistemática em vez de confiar em textos antigos, particularmente os de Galen.

Vesalius descobriu inúmeros erros em Galenic[2] anatomia - a mandíbula consiste de um osso em vez de dois, o fígado tem dois lobos ao invés de cinco, e o septo do coração não é perfurado. Essas correções podem parecer menores, mas representaram uma revolução metodológica fundamental: Observação direta, autoridade textual.

Sua abordagem estabeleceu o princípio de que compreender fenômenos naturais requer investigação direta em vez de deferência às autoridades clássicas. As ilustrações anatômicas detalhadas no *De Humani Corporis Fabrica*, combinando domínio artístico com precisão científica, definir novos padrões para a comunicação científica e ajudou a disseminar metodologia empírica em toda a medicina europeia.

5.3.2.5 Sistema circulatório: William Harvey

William Harvey (1578–1657) exemplificou o novo método científico através de sua descoberta da circulação sanguínea, publicada em *Exercício Anatômico de Motu Cordis et Sanguinis em Animalibus* (1628) (Harvey,

[2] A teoria galênica se refere aos ensinamentos médicos de Cláudio Galen (c. 129-216 d.C., que dominaram a medicina européia por mais de 1.400 anos. De acordo com a doutrina galênica, o sangue foi produzido continuamente pelo fígado de alimentos e consumido pelos tecidos do corpo, movendo-se em movimento de marés ao invés de circular. Esta teoria também posicionou sistemas sanguíneos venosos e arteriais separados e tratou o coração como uma fornalha que aqueceu o sangue ao invés de como uma bomba.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1628). O trabalho de Harvey representava o sucesso da aplicação do raciocínio quantitativo aos fenômenos biológicos.

Através de cuidadosa observação e medição, Harvey calculou que o coração bombeia aproximadamente 540 quilos de sangue por hora - muito mais do que o corpo poderia produzir ou consumir de acordo com a teoria galênica prevalecente. Este argumento quantitativo, combinado com observações de válvulas unidirecionais em veias e artérias, levou Harvey a concluir que *O sangue deve circular em vez de ser continuamente produzido e consumido*.

A metodologia de Harvey, combinando observação anatômica, análise quantitativa e verificação experimental, tornou-se um modelo para pesquisa biológica empírica. Seu trabalho demonstrou que os novos métodos científicos desenvolvidos em astronomia e física poderiam produzir insights igualmente revolucionários nas ciências da vida.

5.3.2.6 Galileu: A linguagem matemática da natureza

Para um esboço biográfico de Galileu, veja §6.6.2.

Galileu introduziu mais uma inovação metodológica. Ao invés de procurar por causas últimas, Galileu focou em descrever matematicamente fenômenos observáveis. Em *Le Meccaniche* (Galilei, 1594), um livro para engenheiros, ele demonstrou como as máquinas obedecem às leis quantitativas, prefigurando sua afirmação posterior de que:

> Filosofia [Natureza] está escrito neste enorme livro que está continuamente aberto diante de nossos olhos (quer dizer, o universo), mas não pode ser compreendido a menos que se entenda primeiro a linguagem e reconheça os personagens com os quais é escrita. Está escrito em uma linguagem matemática... Sem conhecimento deste meio é impossível entender uma única palavra dele.
>
> Galilei, 1623 Il Saggiatore

As observações telescópicas de Galileu quebraram a crença aristotélica em um cosmo imutável. Sua defesa do heliocentrismo levou a seu infame julgamento e prisão domiciliar em 1633, mas seu legado estabeleceu o método hipotético-dedutivo: formular uma hipótese, deduzir suas consequências, e verificá-las por experiência.

5.3.3 Instituições Científicas Primárias

5.3.3.1 Itália: Os linceanos

Menos frequentemente associada à Revolução Científica é a contribuição precoce de um grupo de italianos. Embora eles não articulassem os fundamentos filosóficos da Revolução Científica como Descartes e Bacon fizeram, eles foram os primeiros a aceitá-la totalmente e colocá-la em prática.

Em 1603, um grupo de estudiosos fundou o *Accademia dei Lincei* (Academia dos Lynxes), considerada como a primeira academia científica moderna. Seu nome carregava uma dupla alusão para Lyncaeus, o Argonauta de olhos afiados, e para o lince, conhecido por sua visão aguda.(Freedberg, 2003)

Os linceanos deliberadamente rejeitaram a sabedoria canônica sempre que conflitavam com observação e evidência empírica. Seu compromisso com o escrutínio visual e empírico os colocou na vanguarda do que se tornaria o método científico moderno, no mesmo momento em que Francis Bacon, independentemente da Inglaterra, estava formulando sua própria filosofia empírica.(Freedberg, 2003) Seu desafio de receber autoridade inevitavelmente os colocou em conflito com as forças conservadoras da Igreja Católica.

CÓPIA PARA REVISÃO

Esse conflito é epitomizado na carreira de Galileu Galilei, o membro mais famoso dos Linceanos. Quando Galileu virou seu telescópio para os céus, a cosmologia aristotélica - abraçada pela Igreja como verdade doutrinal - começou a desmoronar. A Terra perdeu sua posição privilegiada no centro do cosmos, dando lugar ao modelo heliocêntrico. Durante os anos mais produtivos de Galileu, o apoio da Academia Lincean foi crucial. Ele também se beneficiou da proteção do Papa Urbano VIII e de seu sobrinho, o cardeal Francesco Barberini - ele mesmo um linceano. Mas a eventual retirada do apoio da família Barberini provou ser catastrófica: Foi o Papa Urbano VIII que finalmente convocou Galileu antes da Inquisição.

O *Accademia dei Lincei* foi realmente um contribuinte precoce, embora muitas vezes pouco apreciado, para a Revolução Científica. Ela sobrevive até hoje como a academia nacional da Itália, um centro vibrante de diálogo entre cientistas italianos e internacionais.

5.3.3.2 Itália: O *Cimento*

O *Accademia del Cimento* (Academia de Experiência) foi uma sociedade científica inovadora fundada em Florença em 1657 sob o patrocínio do grão-duque Fernando II de' Medici e Príncipe Leopoldo de' Médici. Estava entre as primeiras instituições da Europa dedicadas explicitamente à ciência experimental e simboliza uma mudança decisiva da filosofia especulativa natural para a investigação empírica sistemática. Seu lema, *Provando e riprovando* "Teste e Reteste", encapsula seu compromisso rigoroso com a experimentação e a rejeição da confiança na autoridade ou raciocínio puramente teórico.

A academia incluía vários estudiosos notáveis, como Vincenzo Viviani, um estudante de Galileu; Francesco Redi, pioneiro em biologia experimental; Evangelista Torricelli, inventor do barômetro; Giovanni Alfonso Borelli, um pesquisador de biomecânica. e Carlo Rinaldini. Esses membros realizaram extensas investigações sobre pressão de ar, as propriedades dos vácuos, expansão térmica e mecânica de fluidos. Eles refinados e desenvolvidos instrumentos como o termômetro, higrômetro e barômetro - não apenas como ferramentas para demonstração, mas como dispositivos de precisão para experimentação sistemática.

Seus experimentos incluíram estudos de como a pressão do ar afeta o ponto de ebulição dos líquidos, investigações sobre a compressibilidade do ar e observações sobre transferência de calor. Eles procuravam quantificar fenômenos naturais de formas que se movessem decisivamente para além do raciocínio especulativo.

Enquanto o *Accademia dei Lincei* combinando ciência observacional com amplas ambições filosóficas, *Cimento* representava um estreitamento do foco em direção aos métodos empíricos, orientados por instrumentos que definiriam a ciência moderna.

Embora o *Accademia del Cimento* dissolvida após apenas cerca de uma década, por volta de 1667, seu impacto na comunidade científica foi substancial. Seu ethos de rigor empírico ajudou a consolidar o método científico como uma abordagem normativa para investigação. O trabalho experimental da academia foi resumido na publicação de 1667 *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* (Ensaios sobre Experiências Naturais), (Accademia del Cimento, 1667) que se tornou um texto fundamental na história da ciência experimental.

Fortemente influenciados pelas metodologias de Galileu, os membros da academia se consideravam como guardiães de seu legado, enfatizando que a observação e experimentação - não metafísica - deveriam ser a pedra angular do conhecimento científico.

Apesar de sua curta vida, o *Accademia del Cimento* lançou bases críticas para a criação de sociedades científicas posteriores, incluindo o *Sociedade Real de Londres* e o *Académie des Sciences* na França. Estas instituições formalizaram e expandiram os princípios experimentais pioneiros do Cimento, ajudando a incorporar o método científico no coração da ciência moderna.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5.3.4 Síntese e institucionalização

5.3.4.1 Newton: A Síntese dos Métodos

Para um esboço biográfico de Newton, veja §6.6.7.

Isaac Newton (1642-1727), nascido no ano em que Galileu morreu, sintetizou esta metodologia. Seu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*
índice[p1]Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica @*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687) Dedução matemática incorporada aplicada à lei física, enquanto seu *Óptimas* (Newton, 1704) verificação experimental exemplificada. A dupla abordagem de Newton continua sendo a pedra angular da prática científica moderna. Mesa 5.1 resume a mudança conceitual trazida pela revolução científica.

5.3.4.2 A Sociedade Real e o *Académie des Sciences*

Em meados dos anos 1640, as idéias de Bacon se espalharam amplamente, culminando na fundação da Royal Society of London para melhorar o conhecimento natural em 1660, com seu lema *Nullius em verba* (‘‘ não leve a palavra de ninguém para ele ’). Lord Brouncker tornou-se seu primeiro presidente, com Robert Boyle (1627-1691) servindo como um membro influente e mais tarde presidente. Boyle, inspirado por Galileu e Descartes, foi um experimentalista dedicado e pioneiro no estudo dos gases. Ele demonstrou que uma pena e um pedaço de chumbo caem na mesma taxa em um vácuo, validando os experimentos de pensamento de Galileu.

Boyle nomeou Robert Hooke[3] (1635-1703) como curador de experiências. Hooke, um brilhante polimath e fabricante de instrumentos, encarnado o espírito empírico. Seu *Micrografia*, (Hooke, 1665) abre com:

> A verdade é que a ciência da natureza já foi há muito tempo feita apenas um trabalho do cérebro e da fantasia. É hora de voltar à clareza e solidez das observações sobre coisas materiais e óbvias.
>
> Hooke, 1665 Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon

Em 1676, Hooke publicou a lei linear da elasticidade..*Lei de Hooke*-Demonstrando que para pequenas deformações, deformação é proporcional a tensão. Este conceito fundamental em elasticidade permanece crítico, e relações constitutivas como esta ainda são determinadas experimentalmente hoje.

A fundação do *Académie des Sciences* Em Paris, em 1666, marcou a permanente institucionalização da ciência ao lado da Royal Society. Estas academias formalizaram o ethos da Revolução Científica: a confiança na observação empírica, experimentação e análise matemática.

Com lemas como o da Sociedade Real *Nullius em verba* Estas instituições encarnaram a rejeição do conhecimento baseado em autoridade. Eles forneceram uma estrutura duradoura para a investigação colaborativa, revisão por pares e divulgação pública de resultados científicos.

Importante, essas academias não eram apenas fóruns para a filosofia natural; eles logo se expandiram para domínios práticos - astronomia, navegação, engenharia, ciência de materiais e mecânica aplicada. Eles ajudaram a transformar o trabalho solitário de estudiosos na empresa coletiva da ciência moderna.

[3] Consulte §6.6.6 para uma biografia de Hooke.

CÓPIA PARA REVISÃO

5.3.4.3 Experiência e Teoria na Ciência Moderna

Essa dualidade se estende para a engenharia. Experimentalistas como Musschenbroek, e teóricos como Euler, exemplificam modos paralelos de investigação - experimentos físicos no mundo material e matemático "experimentos" no mundo abstrato dos modelos, (Goss, 2009 PDF). Modelos matemáticos podem sugerir quais experimentos físicos valem a pena conduzir, enquanto resultados físicos podem refinar ou desafiar suposições matemáticas. Quando essa interação amadureceu, exequível pela aceitação do elástico por Bauschinger, tornou-se uma característica definidora da ciência moderna.

Tabela 5.1: Revolução Científica Mudança conceitual

Velho Paradigma	**Novo Paradigma**
Conhecimento da autoridade (Aristóteles, escritura)	Conhecimento da observação, experiência e raciocínio
Descrições qualitativas	Quantitativa, leis matemáticas
Causas finais (*Por quê*)	Causas eficientes*Como*)
Cosmologia geocêntrica	Cosmologia heliocêntrica
Universo estático, imutável	Universo dinâmico governado por leis universais
Dedutivo de princípios	Hipotetico-dedutivo com testes empíricos



(a) Bacon (1561-1626) (b) Galileu (1564-1642) (c) Hooke (1635-1703) (d) Newton (1643-1727)

Figura 5.3: Obras seminais da Revolução Científica, de Galileu, Newton, Bacon e Hooke

Esta transformação lançou as bases intelectuais para o surgimento de sociedades científicas formais, que institucionalizaram o método científico como o modo central de investigação para entender o mundo natural.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Academia dei Lincei (1603)



(b) Academia del Cimento (1657)



(c) Sociedade Real (1660)



(d) Academia de Ciências (1666)

Figura 5.4: Ciência Institucional

5.4 O Iluminismo: Uma ponte cultural

No século 18, a mentalidade científica forjada no século anterior se estendeu muito além da matemática e física em filosofia, governança, educação e na vida intelectual mais ampla da Europa. Este movimento, o Iluminismo, foi caracterizado pela crença de que a razão humana, observação empírica e pensamento crítico poderiam ser aplicados universalmente, não só aos fenômenos naturais, mas também à sociedade humana[4].

5.4.1 A difusão do pensamento científico

O Iluminismo solidificou a rejeição dos apelos à autoridade, seja teológica, aristocracia ou escolástica, em favor do raciocínio sistemático e da evidência. Pensadores como Voltaire, Diderot, Montesquieu e Condorcet defenderam a disseminação do conhecimento como um meio de melhorar a sociedade. A criação de obras abrangentes como o *Encyclopédie* não era meramente um exercício intelectual, mas uma missão cultural para democratizar o conhecimento, (Diderot e d'Alembert, 1751).

A popularização de Voltaire das ideias de Newton trouxe raciocínio científico para um público mais amplo e educado, enquanto Diderot e d'Alembert *Encyclopédie* sistematicamente organizado conhecimento humano de acordo com princípios racionais. Este grande empreendimento demonstrou a crença do Iluminismo de que todos os domínios da experiência humana, desde fenômenos naturais até instituições sociais, poderiam ser compreendidos através de uma investigação sistemática e análise lógica.

A ênfase do método científico na observação, formação de hipóteses e testes empíricos tornou-se um modelo para a reforma social e política. Pensadores da iluminação aplicaram esses princípios para examinar governo, lei, economia e educação, argumentando que o progresso social poderia ser alcançado através dos mesmos métodos racionais que revolucionaram a filosofia natural.

[4]Os desenvolvimentos científicos desta era ocorreram num cenário de mudanças políticas e religiosas significativas, incluindo a Guerra dos Trinta Anos, a Revolta Holandesa, e os conflitos mais amplos da Reforma. A migração intelectual, particularmente para centros tolerantes como a República Holandesa e Suíça, ajudou a disseminar ideias. A expansão da indústria gráfica, notadamente na Holanda, permitiu a disseminação de obras científicas que muitas vezes foram censuradas em outros lugares, incluindo Galileu *Duas Novas Ciências*, publicado por Elzevir em Leiden.

CÓPIA PARA REVISÃO

5.4.2 A ascensão da educação técnica: Escolas de Engenharia Militar

O Iluminismo testemunhou a institucionalização sistemática da educação técnica, particularmente através do estabelecimento de escolas militares de engenharia que influenciariam profundamente o desenvolvimento da engenharia civil e ciência aplicada. A França liderou essa transformação, impulsionada pela necessidade militar e pelos ideais iluministas da educação científica racional.

O *École Royale du Génie de Mézières*, fundada em 1748, tornou-se a primeira escola de engenharia do mundo no sentido moderno. Sob a direção de Claude-Antoine Couplet e mais tarde Jean-Rodolphe Perronet, a escola estabeleceu um rigoroso currículo combinando matemática teórica com aplicações práticas de engenharia. Estudantes estudaram cálculo, mecânica, hidráulica e projeto de fortificação integrando princípios científicos com a prática da engenharia de uma forma sem precedentes.

Este modelo foi desenvolvido na *École Royale des Ponts et Chaussées*, estabelecido em 1747 sob a direção de Jean-Rodolphe Perronet. A escola treinou engenheiros civis em construção de pontes e estradas, aplicando métodos científicos para o desenvolvimento de infraestrutura. Seus graduados se tornaram a espinha dorsal da infraestrutura de transporte francesa e transportaram métodos de engenharia científica por toda a Europa e suas colônias.

O currículo dessas escolas representava uma síntese revolucionária: rigor matemático derivado da Revolução Científica combinado com necessidades práticas de engenharia. Os alunos aprenderam cálculo diferencial, mecânica e ciência de materiais ao lado de levantamentos, técnicas de construção e gerenciamento de projetos. Esta integração de teoria e prática estabeleceu o modelo para a educação moderna em engenharia.

Estas escolas francesas de engenharia influenciaram o estabelecimento posterior de instituições similares em toda a Europa e Américas, incluindo os EUA. Academia Militar em West Point (1802) e vários institutos técnicos alemães. A ênfase no rigor matemático combinado com a aplicação prática tornou-se a marca da educação profissional em engenharia, distinguindo-a dos aprendizados tradicionais de artesanato.

5.4.3 Da Filosofia Natural à Ciência Aplicada

A transformação do Iluminismo ampliou a mentalidade científica em domínios práticos que permitiriam diretamente a Revolução Industrial. Instituições formais dedicadas à ciência aplicada proliferaram: Escolas de engenharia militar e civil, academias técnicas e sociedades científicas floresceram pela Europa. O rigor matemático, uma vez confinado à geometria pura ou mecânica celestial, tornou-se cada vez mais uma ferramenta para entender problemas práticos na força do material, construção e máquinas.

Este período testemunhou o surgimento do que agora reconhecemos como ciência da engenharia. A aplicação sistemática da análise matemática a problemas práticos - desde o design de ponte até sistemas hidráulicos - representava uma partida fundamental das abordagens tradicionais baseadas em artesanato. Princípios teóricos derivados da Revolução Científica estavam sendo aplicados para resolver desafios do mundo real na construção, fabricação e infraestrutura.

Mecânica durante este período não era mais uma perseguição marginal de geometros, mas tornou-se uma disciplina central, intimamente ligada tanto à investigação teórica quanto à aplicação industrial. O desenvolvimento de ferramentas matemáticas para análise do comportamento estrutural, propriedades materiais e desempenho da máquina estabeleceu o fundamento essencial para a profissão de engenharia como a conhecemos hoje.

A mentalidade do Iluminismo — confiança na análise racional, um compromisso com o progresso, e uma crença de que a natureza poderia ser decodificada através da matemática e experiência — estabeleceu o quadro intelectual que possibilitaria os rápidos desenvolvimentos do 19o Século: a revolução industrial, engenharia moderna, e teorias formais de elasticidade, força dos materiais, e análise estrutural. A convicção

CÓPIA PARA REVISÃO

de que a razão humana poderia sistematicamente melhorar as condições materiais da vida tornou-se o motor por trás da civilização tecnológica moderna.

5.5 Conclusão

Em resumo, o surgimento da razão científica representa uma transformação intelectual decisiva que abrange quase um milênio. Começando com a preservação e o avanço do conhecimento antigo em centros islâmicos como Bayt al-Hikma, continuando através dos avanços metodológicos da Revolução Científica, e culminando na consolidação institucional do Iluminismo, esta transformação libertou a investigação das restrições da autoridade teológica e filosofia especulativa.

A nova abordagem — observação sistemática, formalização matemática e validação empírica — estabeleceu um modelo universal para o progresso científico: desde a coleta de dados precisos através do reconhecimento empírico de padrões até o entendimento teórico fundamental. Esta metodologia, exemplificada na progressão das observações de Brahe através das leis de Kepler para a síntese de Newton, tornou-se a base para todo o desenvolvimento científico e de engenharia subsequente.

Igualmente importante foi a revolução institucional que fez da investigação científica uma empresa colaborativa e cumulativa. A criação de academias científicas e escolas de engenharia transformou a busca solitária da filosofia natural na disciplina sistemática da ciência moderna, enquanto os programas de educação técnica do Iluminismo estabeleceram o modelo para Educação profissional de engenharia que persiste hoje.

Este quadro intelectual, combinando metodologia rigorosa com apoio institucional, define o palco para o desenvolvimento da engenharia moderna, a análise formal das estruturas e a ciência quantitativa da mecânica que se seguiu. É a esse desenvolvimento que nos voltamos agora.

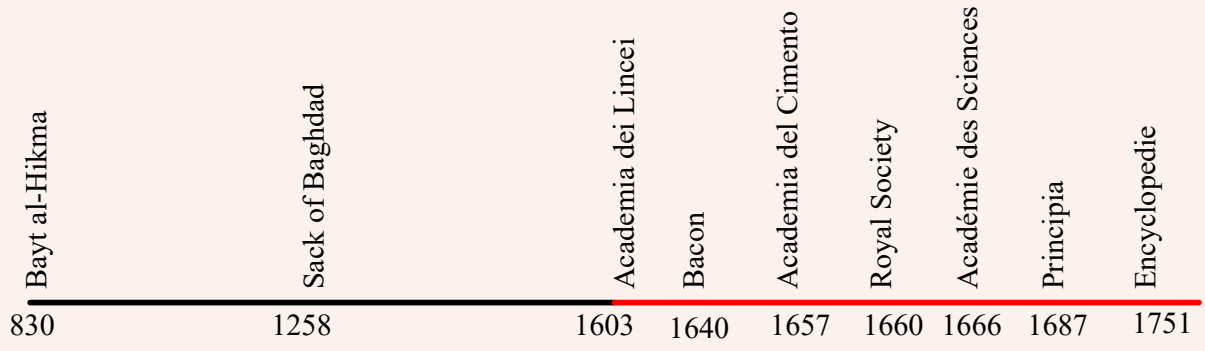


Figura 5.5: Linha do tempo da ascensão da razão científica

Finalmente, Mesa 5.2 lista todos os livros citados neste capítulo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 5.2: Resumo cronológico das obras-chave

Ano	Autor	Título do livro	Resumo do Conteúdo
c. 850	Irmãos Banu Musa	*Livro de Dispositivos Engenhosos* (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850)	Máquinas programáveis e dispositivos de controle automático da Casa de Sabedoria de Bagdá; Misturando mecânica com engenharia prática.
1543	Andreas Vesalius	*De Humani Corporis Fabrica* (Vesalius, 1998–2009)	Revolução anatômica baseada na dissecção humana direta; Erros galênicos de longa duração corrigidos; ilustrações científicas luxuosas estabelecem novos padrões.
c. 1593	Galileo Galilei	*Le Meccaniche* (Galilei, 1594)	O tratado de engenharia mostra que máquinas obedecem a leis quantitativas; Articulação inicial da mecânica em forma matemática.
1620	Francis Bacon	*Novum Organum* (Bacon, 2000)	Chamada fundamental para método empírico; observação sistemática e experiência sobre autoridade ou lógica pura.
1623	Galileo Galilei	*Il Saggiatore* (Galilei, 1623)	Declara que o "livro"da natureza é escrito em matemática; Argumenta a medida como o caminho para entender a realidade física.
1628	William Harvey	*Exercício Anatômico de Motu Cordis et Sanguinis em Animalibus* (Harvey, 1628)	Descoberta da circulação sanguínea; Medições quantitativas contradizem a teoria galênica; integra anatomia, observação e raciocínio.
1665	Robert Hooke	*Micrografia* (Hooke, 1665)	Marcador em microscopia; gravuras detalhadas; enfatiza observação empírica sobre especulação; inclui insights de comportamento material.
1667	Accademia del Cimento	*Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* (Accademia del Cimento, 1667)	Resumiu investigações experimentais rigorosas; pressão do ar, vácuos, fenômenos térmicos; Codifica "teste e reteste"Ethos.
1687	Isaac Newton	*Filosofoæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687)	Síntese matemática da mecânica e gravitação universal; une as leis de Kepler com uma teoria física do movimento.
1704	Isaac Newton	*Óptimas* (Newton, 1704)	Exemplifica método experimental em óptica; estuda propriedades, cores e difração da luz.
1751–1772	Diderot & d'Alembert	*Encyclopédie* (Diderot e d'Alembert, 1751)	Uma organização abrangente do conhecimento humano por princípios racionais; Veículo para o pensamento científico e social iluminista.

CÓPIA PARA REVISÃO



Caravaggio, a incredulidade de São Tomás (1601-1602)

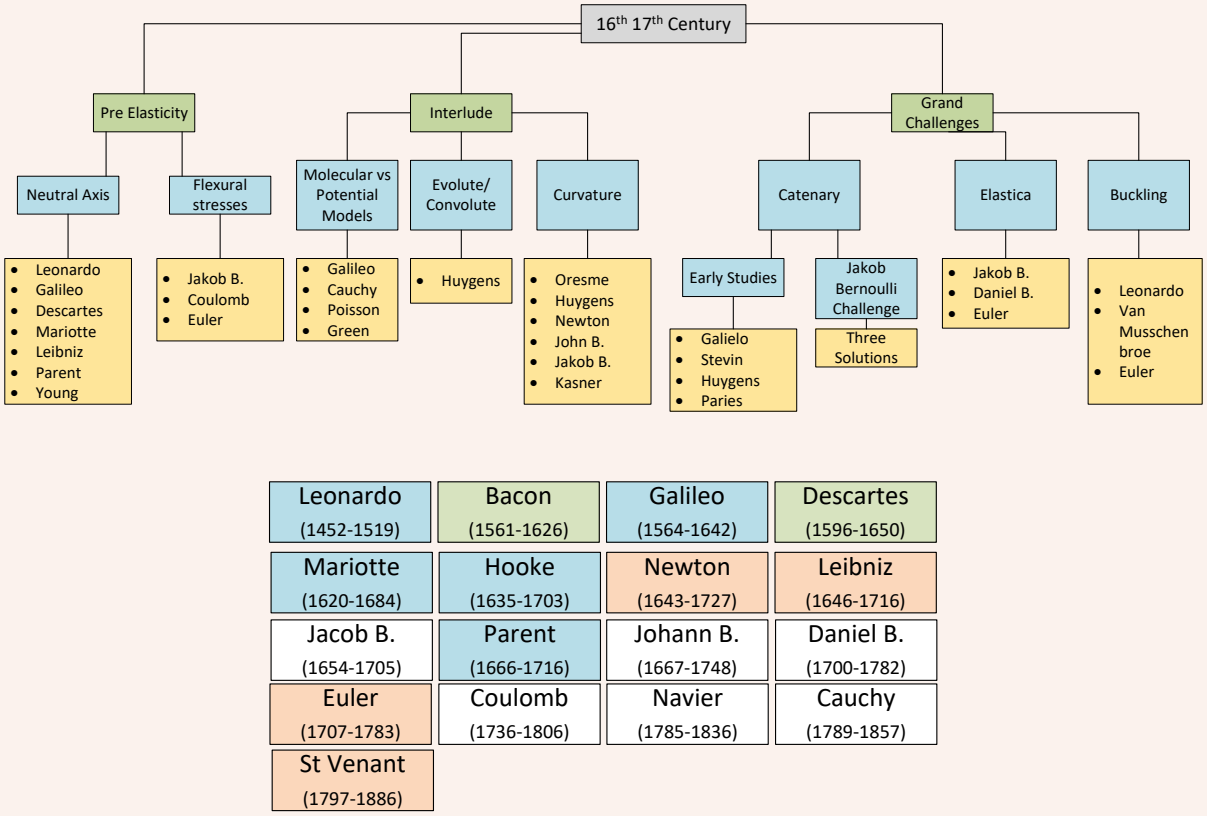
Thomas sonda a ferida com insistência empírica, o gesto fundador da ciência experimental: recusando-se a acreditar sem evidência direta.

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Interlúdio I: Da filosofia natural à mecânica analítica

Fundações conceituais de Análise estrutural.



Os capítulos anteriores estabeleceram os fundamentos intelectuais do campo examinando o *Revolução Científica* (capítulo 5.3) e apresentando as figuras e obras seminais que moldaram a mecânica moderna (capítulo 6). Essa perspectiva temática e sintética foi adotada como uma questão de metodologia: ele embasa a continuidade conceitual e estrutura intelectual, ao invés de uma reconstrução puramente cronológica dos desenvolvimentos técnicos, que é adiada para os capítulos seguintes.

Nesta conjuntura, é útil pausar e consolidar vários fios conceituais que emergiram durante este período formativo –geometria, equilíbrio, curvatura e estabilidade – muitas vezes desenvolvidos em relativo

CÓPIA PARA REVISÃO

isolamento, mas progressivamente convergendo para um Um ponto de vista analítico unificado. Tendo agora apresentado os principais atores, suas principais obras, e o clima intelectual em que eles operavam, nos voltamos para os próprios desenvolvimentos técnicos. Nos próximos seis capítulos, a evolução histórica da mecânica primitiva para a formalização de análise estrutural é rastreada, seguindo o esclarecimento gradual dos conceitos fundamentais –esforços internos, deformação e estabilidade – e seu eventual síntese nos métodos analíticos modernos empregados na prática de engenharia.

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 6

O Panteão

Abstract

Este capítulo serve como um Quem é quem *e um* O que eles escreveram *das figuras-chave que estabeleceram as bases para a mecânica moderna – um panteão de pioneiros cujas vidas e obras transformaram engenharia estrutural de ofício empírico em ciência matemática. Passando da antiguidade até a 19th século, ele perfila os pensadores pioneiros – das primeiras visões de Mozi sobre alavancas na China antiga, através da estática fundamental de Arquimedes, para as leis escaladoras de Galileu, a dinâmica de Newton, as estruturas variacionais dos Bernoullis, Euler, e Lagrange, e culminando com o rigoroso mecânica do contínuo de Cauchy, Green, e Saint-Venant. Uma exceção é feita para Leonardo da Vinci – embora ativo na 15th Século... cujos cadernos sobre mecânica, anatomia, vôo e movimento fluido exibem uma profundidade de observação empírica e um entendimento do nível dos sistemas que presagrou o pensamento analítico de cientistas posteriores.*

Este capítulo traça não apenas realizações individuais, mas a evolução de toda uma disciplina – mostrando como mecânica estrutural emergiu da intersecção da matemática, filosofia natural, e engenharia prática. A narrativa revela como as relações pessoais, rivalidades institucionais e trocas culturais moldaram o desenvolvimento da ciência mecânica tanto quanto os gênios individuais. Ao lado dos relatos biográficos, ele pesquisa os textos de referência que codificaram esses avanços: os grandes livros que treinaram gerações de engenheiros e transformaram como analisamos estruturas.

Em vez de aprofundar o desenvolvimento técnico completo de suas ideias, que serão abordadas em capítulos subsequentes, esta pesquisa contextualiza suas contribuições, rivalidades e linhagens intelectuais. O objetivo é traçar a transição da intuição física e geometria para uma compreensão formal baseada em equações do comportamento mecânico. As tabelas sinóticas finais resumem o legado de cada contribuinte, as publicações de referência que moldaram o campo, as instituições que treinaram os praticantes e as rivalidades que aceleraram a descoberta, fornecendo uma narrativa coerente de como mecânica estrutural surgiu como uma disciplina enraizada na análise.

6.1 Introdução 108
6.2 Filosofia, Geometria e Estáticas Primitivas 110
6.2.1 Mozi (c. 470–391 a.C. 110
6.2.2 Aristóteles (384-322 a.C.) . . 110
6.2.3 Euclides (c. 300 a.C.) 111
6.2.4 Arquimedes (c. 287-212 a.C.) 112
6.2.5 Apolonius de Perga (c. 262-190 a.C. 113
6.3 Engenharia, Máquinas e Transmissão de Conhecimento 114
6.3.1 Marcus Vitruvius Pollio, C. 80-70 a.C. - depois de 15 a.C.) 114
6.3.2 Herói de Alexandria (fl. c. 62 CE) 115
6.3.3 Ibn al-Haytham (c. 965–1040 CE) 116
6.3.4 Abu Rayhan al-Biruni (973-1048) 116

CÓPIA PARA REVISÃO

6.3.5 Al-Khazini (fl. 1115–1130 CE) 117
6.3.6 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250) 118
6.4 Arquitetura, Proporção e Forma Humanista 119
6.4.1 Leon Battista Alberti (1404-1472) 119
6.4.2 Leonardo da Vinci (1452-1519) 119
6.4.3 Andrea Palladio (1508-1580) 129
6.4.4 Sebastiano Serlio (1475-1554) 130
6.4.5 Giacomo Barozzi da Vignola (1507-1573) 131
6.4.6 Hubert Gautier (1660-1737) . 131
6.5 Da Ordem Matemática à Mecânica . 139
6.5.1 Francis Bacon (1561-1626) . . 139
6.5.2 Nicolaus Copérnico (1473-1543) 140
6.6 Da Proto-Estatica à Revolução Científica 141
6.6.1 Simon Stevin (1548-1620) . . 141
6.6.2 Galileu Galilei (1564–1642) . 142
6.6.3 René Descartes (1596-1650) . 148
6.6.4 Christiaan Huygens (1623-1695) 149
6.6.5 Blaise Pascal (1623-1662) . . 151
6.6.6 Robert Hooke (1635-1703) . . 151
6.6.7 Isaac Newton (1642-1727) . . 158
6.6.8 Gottfried Leibniz (1646-1716) 163
6.6.9 Família Bernoulli (1654-1782) 166
6.6.10 Leonhard Euler (1707-1783) . 172
6.7 Da mecânica analítica ao Continuum e à Teoria Estrutural 177
6.7.1 Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) 177
6.7.2 Siméem Denis Poisson (1781-1840) 179
6.7.3 Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) 180
6.7.4 Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) 185
6.7.5 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) 186
6.7.6 Cauchy (Augustin-Louis 1789–1857) 187
6.7.7 George Green (1793-1841) . . 188
6.7.8 AdhÉmar Jean Claude BarrÉ de Saint-Venant (1797-1886) . 189
6.8 A ascensão da engenharia estrutural como disciplina 190
6.8.1 Karl Culmann (1821-1881) . 190
6.8.2 William John Macquorn Rankine (1820-1872) 191
6.8.3 Christian Otto Mohr (1835-1918) 192
6.8.4 Henry Moseley (1801-1872) 193
6.8.5 James Clerk Maxwell (1831-1879) 194
6.9 Grandes histórias de mecânica . . . 195
6.9.1 Isaac Todhunter (1820-1884) 196
6.9.2 Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972) 196
6.9.3 René Dugas (1897-1957) . . . 197
6.9.4 Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000) 198
6.10 Mulheres Notáveis 199
6.11 Análise e contexto 200
6.11.1 Competição, sigilo e progresso científico 200
6.11.2 A transição para a ciência moderna da engenharia 207
6.11.3 A Revolução Francesa na Educação em Engenharia . . 208
6.12 Conclusão: Da Filosofia Natural à Engenharia 209
6.12.1 Tabelas Sumárias 210

6.1 Introdução

Truesdell, 1968 colocou a questão existencial de identificar as experiências fundamentais sobre as quais *"clássico"* Mecânica foi fundada, comentando *"Eu nunca fui capaz de encontrar nenhum."* De fato, a mecânica moderna evoluiu gradualmente ao longo dos séculos XVII a XIX, de uma forma que desafia a cronologia simples ou origem singular. Esta evolução gradual ocorreu não isoladamente, mas através de uma complexa teia de intercâmbio intelectual, desenvolvimento institucional e transformação cultural que alterou fundamentalmente como os humanos entendiam o mundo físico.

CÓPIA PARA REVISÃO

Este capítulo procura traçar as vidas e relações intelectuais dos contribuintes mais importantes *"Gigantes"* que moldou a mecânica analítica e matemática– enquanto examinava também os contextos institucionais e culturais que possibilitavam suas descobertas e as publicações de referência através das quais suas ideias eram disseminadas. Exploramos não só o que descobriram, mas como suas circunstâncias pessoais, rivalidades e colaborações levaram a transformação da mecânica da filosofia natural em ciência matemática. Juntamente com esses perfis biográficos, pesquisamos os grandes livros que codificaram o conhecimento estrutural: os tratados, livros didáticos e colecionados trabalhos que treinaram gerações de praticantes e estabeleceram as bases da análise moderna.

Duas perguntas guiam este capítulo: *Quem são as pessoas que mudaram o modo como pensamos sobre estruturas?* e.. *Quais são os livros que codificaram essas mudanças?* Mas também fazemos perguntas mais profundas: Como a rede emergente de academias e universidades europeias criou condições para um rápido avanço científico? Como rivalidades pessoais e colaborações aceleraram a descoberta? Que papel os desafios práticos da engenharia desempenham na condução de avanços teóricos? E como a publicação de textos-chave.. *Discorsi* Para Navier's *Leçons*Transformar conhecimento tácito em ciência formal? Este não é um catálogo exaustivo, mas um esforço seletivo e interpretativo para identificar aqueles que valem a pena lembrar na genealogia intelectual de análise estrutural.

Scientific! Progresso é muitas vezes dito através de idéias e teorias, mas por trás de cada equação está uma pessoa– impulsionada pela curiosidade, ambição, persistência, e às vezes pelo conflito ou adversidade. Esses indivíduos não eram transmissores passivos de conhecimento, mas agentes ativos nas revoluções que ajudaram a incendiar. Mais importante, eles foram incorporados em redes de comunicação, competição e colaboração que abrangiam fronteiras nacionais e afiliações institucionais. Suas ideias suportaram porque foram escritas em livros, memórias e tratados que circulavam pela Europa e além.

Alguns foram comemorados em seu tempo; outros lutaram por reconhecimento. Alguns trabalhavam no conforto das academias; outros em isolamento ou sob suspeita. Alguns, como Euler, movimentaram-se livremente entre diferentes tribunais europeus e academias, enquanto outros, como Galileu, enfrentaram perseguição institucional. Alguns construíram o trabalho de seus mentores sistematicamente, enquanto outros, como Newton, guardaram ciumentamente suas descobertas e se envolveram em amargas disputas prioritárias. Suas histórias pessoais nos lembram que a ciência não é um algoritmo impessoal, mas um esforço humano impulsionado pela imaginação, resiliência e tenacidade.

Ao revisitar suas vidas e publicações, não só esclarecemos suas contribuições, mas também ganhamos uma apreciação mais profunda das forças culturais e intelectuais que moldaram a evolução da ciência estrutural. O surgimento da mecânica como disciplina matemática requeria não apenas gênio individual, mas também o desenvolvimento de novas instituições (como a Royal Society e a *Académie des Sciences*), novas formas de comunicação acadêmica (através de redes de correspondência e publicações de periódicos), e novas relações entre conhecimento teórico e aplicação prática. Este capítulo deve ser lido como um *Quem é quem* e um *O que eles escreveram*Um guia para as figuras fundadoras da mecânica e os textos através dos quais suas ideias alcançaram a permanência. *Os desenvolvimentos técnicos específicos e os avanços teóricos atribuídos a cada um serão examinados em detalhes em capítulos posteriores.*

Enquanto este capítulo adota uma perspectiva biográfica e histórica, não se pretende como um tratado técnico. As formulações analíticas, derivações e estruturas matemáticas introduzidas por essas figuras serão examinadas em capítulos subsequentes, onde suas ideias serão revisadas de uma forma mais sucinta, mas matematicamente rigorosa. A presente discussão serve assim como um prelúdio humanista e intelectual, uma estrutura contextual que ilumina as personalidades, circunstâncias e publicações que moldaram a disciplina, antes de se voltar para a exposição formal da sua teoria Contribuições.

As figuras apresentadas abaixo trabalharam dentro de uma paisagem institucional em rápida evolução que é examinada detalhadamente nas seções finais deste capítulo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6.2 Filosofia, Geometria e Estáticas Primitivas

Esta seção agrupa figuras para as quais a mecânica surgiu dentro *Filosofia natural* e.. *geometria*, ao invés de ser uma ciência independente. Questões de força, equilíbrio e estabilidade foram abordadas através da necessidade lógica, proporção e construção geométrica, com estática entendida como uma consequência da forma ordenada em vez de causalidade física. O tema unificador é o tratamento das idéias mecânicas como extensões de raciocínio filosófico e abstração geométrica.

6.2.1 Mozi (c. 470–391 a.C.

Mozi (também conhecido como Mo Di) nasceu por volta de 470 a.C. no que é agora Tengzhou, província de Shandong, China - coincidentemente a mesma região de Confúcio, que tinha morrido poucos anos antes do nascimento de Mozi. Ao contrário de muitos filósofos de sua época que vieram de famílias aristocráticas, evidências históricas sugerem que Mozi ressuscitou das classes trabalhadoras. Ele provavelmente foi treinado como carpinteiro ou artesão, e este fundo prático moldou profundamente sua visão filosófica, fundamentando seu pensamento em observação empírica e interesses utilitaristas ao invés de especulação abstrata.

Mozi fundou a escola de pensamento Mohist, que se tornou uma das mais proeminentes escolas organizadas durante o período dos Estados Combatentes (c. 475-221 a.C., rivalizando com o confucionismo em influência. Seus seguidores, principalmente técnicos e artesãos, eram organizados em uma ordem disciplinada que estudava escritos filosóficos e técnicos. Os mohists tornaram-se conhecidos como engenheiros militares, projetando fortificações e mecanismos de defesa do cerco, que provavelmente informaram seus interesses teóricos em mecânica.

Mo Jing O *Mo Jing* (Mozi, 2013), uma compilação de textos atribuídos aos seguidores de Mozi , apresenta surpreendentemente avançado insights sobre estática, incluindo o comportamento de alavancas, centros de gravidadeE vantagem mecânica.. O texto articula princípios de equilíbrio com notável precisão: Ele distingue entre a posição do fulcro e a distribuição de pesos, e reconhece que um equilíbrio viga requer o produto de peso e distância para ser igual em ambos os lados - uma declaração implícita da lei da alavanca séculos antes Arquimedes formalizou.

Os escritos moitistas posteriores (c. 300-200 a.C.) contêm perguntas sobre óptica, geometria, mecânica e até traços de astronomia. A epistemologia deles aparece fundamentada na crença de que a verdade objetiva existe e pode ser inteligível através do exame, estudo e raciocínio sistemático. Princípios que não se tornariam centrais para a ciência ocidental até a Revolução Científica.

Embora a tradição mohist não tenha influenciado diretamente o desenvolvimento da mecânica ocidental, a escola decaiu após a unificação Qin da China em 221 a.C. e a subsequente queima de livros, é uma evidência notável que fundamental estrutural princípios foram descobertos independentemente através de culturas, e continua sendo um dos primeiros tratamentos sistemáticos do raciocínio mecânico fora do mundo mediterrâneo.

6.2.2 Aristóteles (384-322 a.C.)

Aristóteles nasceu em Stagira, uma cidade colonial grega na península de Chalcidice. Seu pai Nicomachus serviu como médico pessoal para o Rei Amyntas III de Macedon, uma conexão que mais tarde se revelaria conseqüente. Órfão na juventude, Aristóteles foi enviado para Atenas aos dezessete anos e entrou na Academia de Platão, onde ele permaneceu por vinte anos até a morte de Platão em 347 a.C.. Passou para a liderança da Academia, talvez devido ao seu nascimento estrangeiro ou divergências filosóficas emergentes, ele partiu de Atenas e passou vários anos na Ásia Menor e Lesbos, conduzindo as investigações biológicas que mais tarde informariam Escritos zoológicos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Em 343 a.C., Philip II de Macedon convocou Aristóteles para ensinar seu filho Alexandre, então com treze anos. O conteúdo preciso desta educação permanece desconhecido, embora mais tarde a lenda o embelezou consideravelmente. Quando Alexandre assumiu o poder e lançou suas campanhas, Aristóteles voltou para Atenas e fundou sua própria escola, o Liceu, em 335 a.C.. Ele lecionou lá por doze anos, supostamente dando palestras enquanto caminhava pelos caminhos colonizados... daí o nome de seus seguidores, os Peripatéticos. Após a morte de Alexander em 323 a.C., o sentimento anti-macedoniano tornou Atenas perigosa para qualquer um com conexões reais. Aristóteles retirou-se para Chalcis, alegando que ele não permitiria Atenas pecar duas vezes contra a filosofia. Ele morreu lá no ano seguinte.

O *Mechanica* e a Tradição Peripatética Muitas vezes atribuído a Aristóteles, mas provavelmente composto por um membro posterior da escola peripatética,[1] o *Mechanica* (Aristotle, 2000 PDF) é um tratado fundamental sobre máquinas simples e os princípios que regem seu funcionamento. Escrito por volta do século III a.C., explora alavancas, polias, cunhas, e o equilíbrio de forças, apresentando uma descrição qualitativa de como as máquinas amplificam o esforço humano.

O tratado é organizado em torno de uma questão central: Por que pequenas forças movem grandes pesos através de dispositivos mecânicos? A resposta oferecida, que o movimento circular possui um poder gerativo especial combinando tendências contrárias, é filosoficamente ingênua pelos padrões modernos, mas representa uma tentativa genuína de unificar diversos fenômenos mecânicos sob uma única explicação Princípio.

Levers, Motion, e princípios de composição precoce O *Mechanica* aborda 35 problemas que vão desde o comportamento de balanços e remos até a mecânica de quebra-nozes e fórceps. Seu tratamento da alavanca é particularmente significativo: reconhece que a eficácia de uma alavanca depende da proporção de distâncias do fulcro, antecipando a lei da alavanca que Arquimedes mais tarde provaria rigorosamente. O trabalho também discute o paralelograma de velocidades e a composição dos movimentos, conceitos que se tornariam fundamentais para a mecânica racional.

Transmissão e influência de longo prazo Sua influência em autores posteriores é inconfundível. Arquimedes avançou muitas das idéias sugeridas pela primeira vez no *Mechanica*, notavelmente refinar o conceito de centro de gravidade e desenvolvendo rigorosos princípios matemáticos da estática. Em tempos romanos e helenísticos, autores como Herói de Alexandria e Pappus elaboraram sistemas mecânicos incorporando tanto dispositivos práticos quanto considerações teóricas. O tratado foi traduzido para o árabe durante a Idade Dourada Islâmica e depois para o latim, garantindo sua transmissão à Europa medieval e renascentista. Estudiosos como Galileu reconheceram o legado do antigo pensamento mecânico grego em sua própria análise de movimento e alavancas.

Assim, o *Mechanica* está na raiz de uma longa linhagem conectando o inquérito filosófico inicial com a ciência mecânica moderna. A teoria mais ampla do movimento de Aristóteles, particularmente sua distinção entre o movimento natural e violento, dominaria a filosofia natural ocidental até o início do século XVII.

6.2.3 Euclides (c. 300 a.C.)

Quase nada se sabe da vida de Euclides. Trabalhou em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu I Sóter: 323-283 a.C.), e este fato esgota a informação biográfica confiável. Mais tarde escritores bordados livremente: Proclus, escrevendo oito séculos depois, relata que Euclides era mais jovem que os alunos de Platão mas mais velho que Arquimedes, e que ele fundou a escola matemática em Alexandria. A famosa anedota em que Ptolomeu pede um caminho mais curto para a geometria e Euclides responde que não há nenhuma estrada real para o assunto pode ser apócrifo - uma história quase idêntica é contada de Menaechmus e Alexander.

[1] O termo *peripatético* deriva do grego περιπατητικός, que significa "dado a caminhar por aí". Isso se refere ao hábito de Aristóteles de ensinar enquanto caminhava com seus alunos pela passarela coberta (περίπατος) do Liceu em Atenas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Até o berço de Euclides e a educação permanecem incertas. Algumas fontes árabes medievais afirmam que ele nasceu em Tiro; outros o confundem com o filósofo anterior Euclides de Megara, Um erro perpetuado na iconografia renascentista. Se ele estudou na Academia de Platão em Atenas, como parece plausível dada a sua linhagem matemática, não pode ser estabelecido. Sua personalidade e caráter estão completamente perdidos para nós. O que sobrevive é o trabalho em si.

O *Elementos* e o Método Axiomático Euclides *Elementos* (Euclid e Heath, 1956) talvez seja o livro mais influente da história, lançando as bases não só para a geometria mas também pela própria estrutura do raciocínio dedutivo. Composto por treze livros, organiza sistematicamente geometria plana (livros) I-VI), Teoria dos Números (Livros VII-IX), e geometria sólida (livros XI-XIII) através de uma estrutura rigorosamente axiomática. Começando com definições, postulados e noções comuns, Euclides demonstra como todo um edifício de conhecimento pode ser construído através da progressão lógica a partir de princípios evidentes.

A arquitetura lógica do *Elementos*Definições seguidas de postulados, noções comuns, proposições e provas tornaram-se o modelo canônico para um raciocínio rigoroso através das ciências. Esta estrutura não é meramente pedagógica; Ela incorpora uma postura metodológica na qual a certeza surge da dedução ordenada ao invés de autoridade ou acumulação empírica.

Influência na Mecânica, Arquitetura e Raciocínio de Engenharia O impacto do *Elementos* transcende a matemática. Por mais de dois milênios, serviu como a introdução padrão ao pensamento lógico, estudado por filósofos, cientistas e engenheiros. Sua influência sobre mecânica estrutural é direta e indireta: diretamente, a geometria euclidiana fornece as ferramentas para analisar relações espaciais, proporções, e as propriedades das formas essenciais à forma estrutural; indiretamente, o método axiomático treinou engenheiros para formular problemas claramente, proceder sistematicamente e estabelecer resultados com certeza.

arquitetos renascentistas como Alberti e Palladio Baseava-se em proporções euclidianas para estabelecer relações harmônicas em seus prédios. Newton explicitamente modelou a exposição de seu *Principia* sobre o precedente Euclidiano. O *Elementos* foi o segundo livro mais impresso depois da Bíblia até o século XX, com mais de mil edições. Seu legado é, portanto, não só um corpo de conhecimento geométrico mas uma forma de pensar – estrutura através de axiomas, clareza através da progressão lógica, e certeza através da prova – que permanece fundamental para a prática de engenharia.

6.2.4 Arquimedes (c. 287-212 a.C.)

Arquimedes nasceu em Siracusa, a preeminente cidade grega da Sicília, E por alguns relatos estava relacionado com seu governante, Rei Hieron II. Seu pai Phídias era um astrônomo, De outra forma, desconhecido. Em algum momento Arquimedes viajou para Alexandria, onde estudou com os sucessores de Euclides e formou amizades intelectuais duradouras. Vários de seus tratados são endereçados a matemáticos alexandrinos, incluindo Conon de Samos, Dositeu de Pelusium, E Eratóstenes, O, o Polimath que serviu como chefe da grande Biblioteca. Arquimedes voltou a Siracusa e passou sua vida lá, desfrutando do patrocínio real enquanto perseguia problemas de geometria, mecânica e hidrostática.

Fontes antigas pintam Arquimedes como o arquétipo do pensador absorvido, tão consumido pela contemplação matemática que ele negligenciava a comida e tinha de ser arrastado para os banhos, onde continuaria desenhando diagramas no óleo em sua pele. A famosa história de seu salto do banho que gritava "Eureka!", ao descobrir o princípio da flutuabilidade... Supostamente, enquanto investigava se uma coroa feita para Hieron continha toda a sua medida de ouro... aparece primeiro em Vitruvio, escrevendo dois séculos Mais tarde. Se a história é ou não literalmente verdadeira, ela captura algo essencial sobre o método de Arquimedes: A interação entre a visão física e demonstração matemática.

Morte, memória e legado auto-escolhido Sua morte se tornou lendária. Quando as forças romanas sob Marcelo tomou Syracuse em 212 Depois de um cerco prolongado, atrasado, segundo Plutarco, por máquinas de guerra que Arquimedes havia projetado, um soldado encontrou um velho desenhando figuras

CÓPIA PARA REVISÃO

geométricas na areia. Arquimedes disse "Não perturbe meus círculos", e foi morto no local. Marcelo, que esperava conhecer o famoso matemático, ficou triste e organizou um enterro honroso. Cícero, visitando Siracusa um século e meio depois, encontrou o túmulo sobreposto e negligenciado, identificável apenas pela esfera esculpida e cilindro que Arquimedes havia solicitado – um monumento ao teorema que ele considerava seu melhor, relacionando os volumes dessas formas.

Fundações da Mecânica Racional Arquimedes de Siracusa (Archimedes e Heath, 1897) Está como o fundador da mecânica racional, estabelecendo estática e hidrostática como ciências matemáticas. Seus trabalhos existentes... inclusive *No Equilíbrio dos Aviões*, *Em corpos flutuantes*, *Na Esfera e no Cilindro*, e o *Método de Teorias Mecânicas*Combinar rigor matemático com percepção física de uma forma não igualada até a Revolução Científica.

Em *No Equilíbrio dos Aviões*Arquimedes prova a lei da alavanca desde os primeiros princípios e desenvolve o conceito de centro de gravidade, Demonstrando como localizá-lo para várias figuras planas, incluindo triângulos, paralelogramas e segmentos parabólicos. Estes resultados formam a base para a moderna análise da força e momento em sistemas estruturais. Seu método –estabelecendo axiomas, derivando consequências matematicamente, e aplicando resultados em configurações físicas – estabeleceu o paradigma para mecânica teórica.

Hidrostática, Estabilidade e Método Mecânico *Em corpos flutuantes* Inicia a ciência da flutuabilidade, provando que um corpo imerso em um fluido experimenta uma força ascendente igual ao peso do líquido deslocado. Este trabalho é indispensável para entender sistemas estruturais interagindo com fluidos, desde cascos de navios até fundações submersas. Arquimedes também investigou a estabilidade de corpos flutuantes, determinando as condições em que eles retornam ao equilíbrio quando deslocados – uma contribuição precoce e notavelmente sofisticada para a análise de estabilidade.

O *Método*, perdido até sua redescoberta em 1906 no famoso palimpsesto, revela como Arquimedes usou o raciocínio mecânico para descobrir resultados matemáticos antes de prová-los rigorosamente. Esta separação explícita entre descoberta e demonstração ilumina o papel criativo da intuição física dentro de um quadro dedutivo. O padrão metodológico, a visão física guiando provas matemáticas, tornou-se fundamental para a prática de engenharia estrutural.

6.2.5 Apolonius de Perga (c. 262-190 a.C.

Apolonius nasceu em Perga, Uma cidade grega em Pamphilia na costa sul da Ásia Menor. Ele viajou para Alexandria quando jovem, onde estudou com os sucessores de Euclides e absorveu as tradições matemáticas da Museion. Fontes antigas indicam que ele também passou um tempo em Pérgamo, cuja biblioteca rivalizou com Alexandria e cujos reis de Attalid patrocinavam ativamente os estudiosos. Além desses fatos, quase nada é conhecido de sua vida – nenhuma anedota sobrevive, nenhuma personalidade emerge, e até mesmo suas datas são inferidas indiretamente dos matemáticos que ele cita e aqueles que mais tarde o citam.

Que visão biográfica nós possuímos vem quase inteiramente das cartas pré-fatoriais para os oito livros de sua obra-prima, o *Cônicas*.. Essas dedicações revelam um matemático incorporado nas redes de correspondência acadêmicas da aprendizagem helenística: Apolonius se dirige a Eudemus de Pérgamo, envia rascunhos para comentário, pede desculpas por atrasos na composição, e se refere a uma versão anterior produzida apressadamente em Alexandria para um visitante chamado Naucrates. Ele descreve revisão substancial entre versões e enfatiza cuidadosa ordenação lógica, sugerindo um trabalhador metódico profundamente preocupado com a exposição. Ele também menciona um filho, igualmente chamado de Apolônio, A quem mais tarde os livros foram dedicados após a morte de Eudemus.

O *Cônicas* E a Geometria das Formas Curvas Apolonius era conhecido na antiguidade como o Grande Geômetro, um título que o distinguia mesmo em uma era de matemáticos excepcionais. Seu *Cônicas* (Perga, 1896) representa o tratamento mais sofisticado das seções cônicas na antiguidade clássica, superando todas as obras anteriores e permanecendo definitivo por quase dois milênios. Em oito livros (dos

CÓPIA PARA REVISÃO

quais sete sobrevivem), Apollonius investiga sistematicamente a elipse, Parabola, e hipérboleCurvas geradas pela interseção de um avião com um cone. Ele introduziu grande parte da terminologia ainda usada hoje, derivando os nomes dessas curvas de relações geométricas de deficiência, qualidade e excesso de referência.

A realização do *Cônicas* Não está apenas em catalogar propriedades, mas em estabelecer uma teoria geométrica unificada de formas curvas. Apolonius desenvolveu métodos para relacionar diâmetros, tangentes, normais e assintotas dentro de uma única estrutura dedutiva, estendendo e sistematizando resultados anteriores de Menaechmus enquanto introduzia proposições inteiramente novas.

Transmissão para Mecânica, Arquitetura e Forma Estrutural Embora concebido como uma obra de geometria pura, as percepções do *Cônicas* provou-se fundamental para a compreensão matemática posterior da forma estrutural. A curva parabólica, estudado em detalhes por Apolonius, governa a geometria de uma linha flexível sob carga horizontal uniforme e mais tarde tornou-se central para a análise de arcos carregando peso próprio. A elipse Subjaz à geometria de muitas construções de cúpulas, Enquanto formas cônicas relacionadas aparecem em cofres e outros sistemas de alvenaria curvados.

As linhas de impulso e caminhos de força em estruturas de alvenaria seguem curvas cujas propriedades geométricas Apolonius caracterizou séculos antes de seu significado mecânico ser compreendido. Arquitetos renascentistas e teóricos modernos, e mais tarde engenheiros estruturais, desenharam implicitamente e explicitamente sobre a geometria Apoloniana ao analisar formas curvas e sua distribuição de carga.

6.3 Engenharia, Máquinas e Transmissão de Conhecimento

Esta seção reúne colaboradores unidos por seu compromisso com *máquinas* e com a articulação prática e disseminação do conhecimento mecânico. Seu trabalho enfatizou descrição, classificação e ilustração, bem como a transmissão de técnicas através de tratados e diagramas. A linha comum é o surgimento do conhecimento de engenharia como algo *Codificado*, lecionável e reprodutível.

6.3.1 Marcus Vitruvius Pollio, C. 80-70 a.C. - depois de 15 a.C.)

Pouco se sabe com certeza sobre a vida de Vitruvius, e o que possuímos vem quase inteiramente de observações autobiográficas espalhadas por todo seu tratado. Ele serviu como engenheiro militar sob Júlio César, responsável pela construção e manutenção de máquinas de artilharia, incluindo ballistas e escorpiões. Esta experiência com equipamento de cerco deu-lhe conhecimento em primeira mão da mecânica da tensão, torção e movimento projétil - entendimento prático que iria informar suas discussões teóricas posteriores. Após o assassinato de César, Vitruvio continuou no serviço imperial sob Augusto, embora seu papel pareça ter diminuído. Ele menciona supervisionar a construção de uma basílica em Fanum Fortunae (atual Fano), o único edifício que ele afirma ser seu próprio projeto. Quando ele compôs seu tratado, Vitruvius era idoso e vivia em uma pensão garantida através da intervenção da irmã de Augusto Octavia. Ele escreve com a ansiedade de um homem que procura estabelecer seu legado através da bolsa de estudos em vez de monumentos, e a dedicação a Augusto carrega um tom inconfundível de súplica. O significado de Vitruvius não está em seus prédios, nenhum deles sobrevive, mas em De Architectura, o único tratado arquitetônico completo da antiguidade.

De Architectura Vitruvius *De Architectura* (Dez Livros de Arquitetura) (Vitruvius e Morgan, 1914), escrito por volta de 25 a.C., é o único tratado arquitetônico completo para sobreviver da antiguidade clássica. Abrange praticamente todos os aspectos da prática de construção romana: urbanismo, materiais de construção, construção de templos, arquitetura civil e doméstica, abastecimento de água, relógios de sol e máquinas.

Mais famosamente, Vitruvius articulou as três qualidades fundamentais da boa arquitetura: *Firmitas* (sondagem estrutural), *utilitas* (funcionalidade), e *venustas* Princípios que permanecem fundamentais para o

CÓPIA PARA REVISÃO

pensamento arquitetônico e estrutural. Suas descrições dos métodos de construção, propriedades materiais e sistemas proporcionais forneceram aos arquitetos renascentistas sua janela primária para a prática clássica. Alberti, Palladio, e seus sucessores se basearam fortemente em Vitruvio, e sua influência persistiu através do desenvolvimento da educação Beaux-Arts no século XX.

Centralidade de Vitruvius Vitruvio é de tal importância fundamental para este livro que sua vida, escritos e influência são examinados em três capítulos distintos: o presente capítulo, §3.2.4.1, e §15.2.1.

6.3.2 Herói de Alexandria (fl. c. 62 CE)

As datas da vida de Hero eram uma longa questão de confusão, com estimativas variando por três séculos. A questão foi resolvida quando Otto Neugebauer observou que Hero's *Dioptra* descreve um método para determinar a distância entre Roma e Alexandria observando simultaneamente um eclipse lunar – e o exemplo dado corresponde ao eclipse de março 13, 62 CE. Isto coloca Hero seguramente no primeiro século, um contemporâneo de Nero, Seneca, e Plínio, o Ancião. Além desta âncora cronológica, quase nada de sua vida pode ser recuperado. Seu nome sugere origem grega, mas Alexandria neste período foi completamente cosmopolita, e ele pode ter sido de origem egípcia ou mista.

Hero estava associado com o Museion, embora seja um membro formal dessa instituição ou como professor independente ainda não esteja claro. Seus escritos sugerem um educador prático, preocupado menos com a elegância teórica do que em transmitir conhecimento útil para estudantes e praticantes. Ele compôs em um grego técnico acessível a artesãos e engenheiros, e suas obras incluem instruções detalhadas para construir dispositivos – um contraste marcado ao estilo matemático austero de Arquimedes ou Apolonius.

Alcance de obras e pedagogia mecânica Fontes antigas dão crédito a Hero por numerosos tratados, vários dos quais sobrevivem em tradução grega ou árabe. Seu alcance era notável. O *Pneumatica* Catálogos de dispositivos operados por ar, água e vapor, incluindo o aeolípile (uma turbina de reação primitiva) e portas automáticas do templo. O *Automata* descreve máquinas teatrais auto-movíveis. O *Dioptra* trata instrumentos de levantamento, enquanto o *Catoptrica* Endereça espelhos e reflexão. A reputação de herói na antiguidade e depois descansou em grande parte sobre esses mecanismos engenhosos, o que lhe deu uma caracterização um tanto descartada como um fabricante de brinquedos e maravilhas teatrais ao invés de um matemático sério.

Mecânica, Máquinas Simples e Prática de Engenharia Herói de Alexandria (Alexandria, 1851) avançou a aplicação prática de princípios mecânicos através do seu tratamento sistemático de máquinas simples, Sistemas hidráulicos, e dispositivos pneumáticos. Ativo em Alexandria Romana durante o primeiro século Hero ocupa uma posição central entre mecânica matemática arquimedeana e engenharia aplicada.

Seu *Mechanica*, preservado principalmente na tradução árabe, estática arquimedeana refinada através de análise detalhada das cinco máquinas simples: A alavanca, Roldana, Cunha, Foda-se, e roda e eixo. Hero demonstrou como esses elementos poderiam ser combinados em máquinas compostas e forneceu procedimentos para computação de vantagem mecânica. Ele abordou problemas práticos como mover cargas pesadas com força limitada, o projeto de prensas, e a construção de dispositivos de elevação – problemas de relevância direta para a construção e prática estrutural.

Pneumáticos, Automata e Transmissão O *Pneumatica* explorou o comportamento mecânico do ar e da água sob pressão, descrevendo mais de cem dispositivos incluindo sifões, fontes, aeolípile, e autômatos alimentados por água caindo ou ar aquecido. Enquanto muitos desses dispositivos serviam para fins rituais ou de entretenimento, os princípios subjacentes - transmissão de pressão, a elasticidade do ar, e a conversão da energia térmica em movimento mecânico - conceitos antecipados centrais para engenharia posterior.

Hero também escreveu sobre o levantamento (*Dioptra*), artilharia (*Belopoeica*), e mensuração (*Metrica*), demonstrando a amplitude do conhecimento técnico antigo. Suas obras foram transmitidas através de estudiosos bizantinos e islâmicos para engenheiros renascentistas como Giovanni Battista della Porta e Simon Stevin, estabelecendo precedentes para o projeto racional de sistemas mecânicos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6.3.3 Ibn al-Haytham (c. 965–1040 CE)

Abu Ali al-Hasan ibn al- Hasan ibin al Haytham nasceu em Basra, então um grande centro de comércio e aprendizagem nos domínios Buhid do sul do Iraque. Ele recebeu uma educação completa em teologia, matemática e filosofia natural, e por um tempo ocupou uma posição administrativa em sua cidade natal. Em uma passagem autobiográfica, ele descreve o crescente desencantamento com as reivindicações concorrentes das seitas religiosas, cada um convencido de sua posse exclusiva da verdade, e voltando-se em vez dos escritos de Aristóteles como um caminho para certo conhecimento. Esta virada intelectual moldou seu compromisso duradouro com a investigação sistemática baseada em demonstração e testes empíricos.

Egito, o Projeto Nilo e a Seclusão Produtiva A ambição de Ibn al-Haytham o levou ao Egito durante o reinado do califa fatímida al-Hakim. Ele alegou que poderia regular as inundações anuais do Nilo, mas ao examinar o rio e os restos de antigas obras hidráulicas perto de Aswan, Ele percebeu que o projeto estava além de seus meios. Temendo a notória imprevisibilidade do califa, ele fingiu loucura e permaneceu sob prisão domiciliar até a morte de al-Hakim em 1021. Durante este período de isolamento forçado, e nos anos seguintes à sua libertação, Ibn al-Haytham produziu um extraordinário corpo de trabalho. Mais tarde, fontes o creditam com mais de duzentos tratados sobre assuntos que vão desde óptica e astronomia até geometria e teoria dos números.

Óptica, Mecânica e Programa Experimental Ibn al-Haytham, conhecido no Ocidente latino como Alhazen, (Haytham, 1989) é mais conhecido por sua *Kitab al-Manazir* (Livro de Óptica), que transformou a compreensão da visão e da luz através da experimentação sistemática combinada com análise geométrica. Rejeitando as teorias anteriores de emissão da visão, ele demonstrou que a visão ocorre quando a luz refletida dos objetos entra no olho, e ele apoiou essa afirmação através de experimentos controlados envolvendo aberturas, lentes e superfícies reflexivas.

Embora sua reputação se baseie principalmente na ótica, Ibn al-Haytham também abordou problemas mecânicos de relevância direta para análise estrutural. Ele examinou a transmissão de força e o comportamento de corpos rígidos sob carga, analisando como as forças se propagam através de sistemas conectados. Seus escritos tratam a mecânica do impacto, Incluindo colisões e a transferência de movimento, e ele investigou o movimento dos corpos em planos inclinados e projéteis–tópicos que mais tarde seriam centrais para a mecânica moderna primitiva.

Método, Transmissão e Significado Estrutural A contribuição mais duradoura de Ibn al-Haytham pode ser metodológica. Ele insistiu que as teorias físicas fossem fundamentadas em observação sistemática, Experimentação controlada, descrição matemática, e que o raciocínio especulativo sem apoio pela experiência seja rejeitado. Esta abordagem disciplinada forneceu um modelo para o método científico que mais tarde tornou-se fundamental tanto para a física e análise de engenharia. Sua insistência em que os modelos matemáticos correspondem à realidade observável está subjacente aos fundamentos epistemológicos de mecânica estrutural.

Ele passou suas últimas décadas no Cairo, Vivendo perto da mesquita Al-Azhar e se sustentando copiando manuscritos matemáticos. Ele morreu lá por volta de 1040. Suas obras foram traduzidas para o latim nos séculos XII e XIII e exerceram uma profunda influência na ciência europeia, moldando a tradição óptica através de figuras como Roger Bacon, Witelo, e, finalmente, Kepler.

6.3.4 Abu Rayhan al-Biruni (973-1048)

Abu Rayhan al-Biruni (973-1048) (Al-Bīrūnī, 1910) foi uma das mentes científicas mais originais do mundo islâmico medieval, fazendo contribuições significativas para astronomia, matemática, geografia e mecânica. Nascido em Khwarezm (atual Uzbequistão), ele passou grande parte de sua carreira na corte de Mahmud de Ghazna, acompanhando o sultão em campanhas para a Índia que resultou em sua enciclopédia *Kitab fi Tahqiq ma li-l-Hind* (O Livro do Que Constitui a Índia), um trabalho pioneiro de estudo cultural e científico comparativo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Kitab fi Tahqiq ma li-l-Hind As contribuições de Al-Biruni para o centro de mecânica em sua abordagem sistemática à medição da densidade e pesos específicos.. Ele projetou e construiu instrumentos de precisão para determinar as gravidades específicas de metais e pedras preciosas, alcançando resultados que se comparam favoravelmente com valores modernos. Seus métodos hidrostáticos Princípios arquimedeanos estendidos com atenção cuidadosa às fontes experimentais de erro, estabelecendo precedentes metodológicos para mais tarde análise estrutural. Ele reconheceu que as mesmas relações matemáticas governando o equilíbrio dos equilíbrios aplicados ao comportamento de materiais sob várias condições.

A metodologia científica mais ampla de Al-Biruni... sua insistência em observação sistemática, medição quantitativa, e a reconciliação da teoria com dados empíricos... influenciou o desenvolvimento de abordagens para o comportamento material que se tornou essencial na engenharia estrutural. Suas medidas geodésicas, incluindo um método engenhoso para determinar o raio da Terra usando observações de montanhas, demonstraram o poder de combinar teoria matemática com cuidadosa medição – um paradigma que os engenheiros estruturais aplicariam mais tarde para a análise de edifícios e pontes.

6.3.5 Al-Khazini (fl. 1115–1130 CE)

Abd al-Rahman al-Khazini era um escravo de origem grega bizantina, trazidos para Merv no Império Seljúcida (atual Turquemenistão), onde ele era de propriedade de um funcionário do tesouro chamado al-Khazim, De quem ele derivava seu nome. Seu mestre reconheceu seus dons intelectuais e lhe deu uma educação excepcional em matemática e filosofia natural. Após a entrega, Al-Khazini escolheu permanecer em Merv e dedicou-se à bolsa de estudos, supostamente vivendo uma vida ascética e recusando um presente substancial de mil dinares da esposa do sultão com o fundamento de que suas modestas necessidades já eram Satisfeito por alguns pães.

Merv no início do século XII foi uma das grandes cidades do mundo islâmico, um centro de aprendizagem que havia produzido al-Birun um século antes e mantido tradições ativas na astronomia e nas ciências exatas. Al-Khazini trabalhou neste ambiente, servindo como astrônomo na corte de Seljúcidas e produzindo tabelas astronômicas (*Zij*) dedicado ao Sultão Sanjar, Refinando trabalhos anteriores de Omar Khayyam.

O *Kitab Mizan al-Hikma* e a Ciência dos Pesos O principal feito científico de Al-Khazini é o *Kitab Mizan al-Hikma* (Livro do Equilíbrio da Sabedoria), concluído por volta de 1121-1122. Este notável tratado representa um dos tratamentos medievais mais sofisticados da mecânica, explorando o equilíbrio, Equilíbrios, e hidrostática com excepcional profundidade analítica. Trabalhando sob o patrocínio de Seljuk, Al-Khazini sintetizava conhecimento mecânico grego - particularmente as obras de Arquimedes, Euclides, e MenelauCom investigações originais e prática experimental refinada.

O tratado dedica muita atenção ao ferro e equilíbrio, incluindo uma análise detalhada dos centros de gravidade e as condições precisas necessárias para o equilíbrio. Al-Khazini desenvolveu procedimentos sistemáticos para determinar as gravidades específicas de substâncias, compilando tabelas para quase 50 materiais, incluindo metais, pedras preciosas e líquidos. A precisão dessas medidas não seria superada por quase cinco séculos.

Hidrostática, precisão experimental e método Al-Khazini estendeu os princípios arquimedes da flutuabilidade, examinando como o peso aparente de um corpo varia com a densidade do meio circundante. Ele reconheceu que o peso de um corpo depende se ele é medido em ar, água ou outro fluido – uma visão diretamente relevante para a análise de sistemas submersos ou parcialmente submergidos. Suas descrições dos balanços hidrostáticos revelam instrumentos capazes de detectar diferenças mínimas na densidade, antecipando os equilíbrios de precisão da ciência experimental moderna.

Apesar de não se preocupar com elementos estruturais no sentido moderno, *Mizan al-Hikma* Exemplos de uma abordagem pré-moderna do raciocínio mecânico baseada em princípios físicos iniciais, experimentação cuidadosa e medição quantitativa. A este respeito, al-Khazini é uma ligação crucial entre a hidrostática archimedeana e as tradições experimentais posteriores da mecânica moderna primitiva.

CÓPIA PARA REVISÃO

Após o início do século XII, Al-Khazini desaparece do registro histórico. Nem a data nem as circunstâncias de sua morte são conhecidas.

6.3.6 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250)

Nada é conhecido da vida de Villard além do que pode ser inferido pelo portfólio de desenhos que leva seu nome, agora preservado na Biblioteca Nacional da França. Uma inscrição no manuscrito o identifica como de Honnecourt, Uma aldeia na Picardia perto de Cambrai, no norte da França. Os próprios desenhos sugerem uma carreira itinerante. Eles incluem esboços das catedrais em Laon, Reims, Chartres, e Meaux, assim como a igreja cisterciense em Vaucelles, indicando extensas viagens através dos locais de construção da França do século XIII. Um fólio retrata um desenho de pavimentos da Hungria, sugerindo que as viagens de Villard se estenderam bem além de sua região nativa.

Se Villard era um mestre pedreiro, um arquiteto, um funcionário da pousada, ou simplesmente um observador educado continua sendo uma questão de disputa acadêmica. A sofisticação técnica desigual dos desenhos levou alguns historiadores a questionar sua posição profissional, enquanto outros enfatizam a amplitude de seus interesses e a coerência de seu pensamento geométrico.

Conteúdo, atribuição e o problema da autoria O portfólio contém planos arquitetônicos e elevações, detalhes da construção gótica, incluindo mastros voadores e rastreamento, Dispositivos mecânicos, como uma serra a água e uma máquina de movimento perpétuo, Esquemas geométricos para o corte de pedra, e desenhos de figuras humanas e animais reduzidos a quadros geométricos abstratos. Mais tarde, as mãos adicionaram material ao manuscrito, complicando a atribuição de fólios individuais e tornando difícil distinguir o próprio trabalho de Villard das posteriores acreções.

O que permanece além de dúvida é que o manuscrito oferece uma rara janela para o conhecimento prático circulando entre construtores góticos – conhecimento amplamente transmitido oralmente dentro de pousadas e oficinas e raramente comprometido com a escrita. A este respeito, o portfólio é excepcional: preserva modos de raciocínio que, caso contrário, não deixariam rastros documentais.

Geometria, desenho empírico e prática estrutural gótica Villard de Honnecourt *Portfólio* (De Honnecourt, 1858) fornece uma visão rara e inestimável sobre o design empírico medieval Métodos. Composto por 33 folhas de pergaminho (MS) Fr 19093) e aproximadamente 250 desenhos, o manuscrito documenta a geometria prática e imaginação construtiva que sustentava a arquitetura gótica.

De particular significado são os procedimentos geométricos de Villard para a proporção e o layout. Construtores medievais se basearam em técnicas como *ad quatratum* e.. *ad triangulum*, usando quadrados rotativos, polígonos inscritos e construções proporcionais para relacionar plano, elevação e seção. Estes métodos governavam o corte de pedra, o layout de abóbadas, pináculos e traços, e a coordenação de sistemas espaciais complexos sem recurso ao cálculo numérico.

Intuição estrutural antes da mecânica formal O portfólio ilustra como a geometria, proporção e experiência acumulada guiaram o entendimento do comportamento estrutural muito antes do surgimento da estática analítica. Construtores góticos alcançaram feitos estruturais extraordinários, abóbadas de pedra fina que abrangiam espaços vastos, sistemas de apoio que redirecionavam o impulso para o solo, torres de altura sem precedentes, sem teorias formais de força ou equilíbrio. Seu sucesso dependia de regras empíricas, controle geométrico e a memória coletiva do que havia funcionado antes.

O portfólio de Villard é um testemunho desta fusão do conhecimento da nave e intuição estrutural. Captura um momento de transição na história de análise estrutural, onde a geometria funcionava não como matemática abstrata, mas como uma ferramenta operacional incorporada na prática da construção.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.4 Arquitetura, Proporção e Forma Humanista

Este agrupamento reflete uma tradição na qual *Estrutura*, *proporção*, e forma arquitetônica eram inseparáveis. A compreensão mecânica foi implicitamente incorporada em regras de harmonia, precedentes clássicos e ideais humanistas, ao invés de expressa através do cálculo. Estabilidade e transmissão de carga foram captadas através da forma e proporção muito antes formal análise estrutural existir.

6.4.1 Leon Battista Alberti (1404-1472)

Alberti[2] nasceu em Gênova, o filho ilegítimo de Lorenzo Alberti, um rico comerciante florentino que vivia no exílio devido às desgraças políticas da família. Ele recebeu uma educação humanista de amplitude excepcional, estudando clássicos em Pádua e direito canônico em Bolonha, onde ele também perseguiu a matemática e as ciências naturais. O deformação de seus estudos supostamente causou um colapso em seus vinte e poucos anos, depois disso ele se voltou cada vez mais para as artes visuais e arquitetura. Em 1428, a proibição contra a família Alberti foi levantada, e Leon Battista viu Florença pela primeira vez - um encontro com Brunelleschi em ascensão cúpula que iria moldar sua vocação subsequente.

Alberti recebeu ordens sagradas e assegurou uma posição como abreviador papal em Roma, uma sin segurança que fornecia renda enquanto deixava tempo para a bolsa de estudos. Ele nunca se casou, viveu modestamente apesar das oportunidades de preferência, e cultivou um amplo círculo de correspondentes entre os principais humanistas, artistas e príncipes da sua idade. Os contemporâneos o descreveram como atlético na juventude, um habilidoso cavaleiro e ginasta, e possuído de uma memória notável. Vasari registra que era gentil e generoso com seu conhecimento, aconselhando pintores, escultores e arquitetos.

Suas comissões arquitetônicas eram poucas, mas influentes: o Tempio Malatestiano em Rimini, a fachada de Santa Maria Novella e Palazzo Rucellai em Florença, e as igrejas de San Sebastiano e Sant'Andrea em Mântua. Ao contrário de Brunelleschi, Alberti não supervisionou a própria construção mas forneceu projetos que outros executaram, estabelecendo a concepção moderna do arquiteto como autor intelectual em vez de mestre construtor. Ele morreu em Roma, tendo produzido tratados sobre assuntos que vão desde pintura e escultura até criptografia, filosofia moral e gestão de casas.

6.4.2 Leonardo da Vinci (1452-1519)

Leonardo da Vinci, Fig. 6.1, nasceu em abril 15, 1452, na pequena cidade de Vinci, dentro da República de Florença. Ele era o filho ilegítimo de Ser Piero, um tabelião florentino, e uma camponesa chamada Caterina. Como um *Bastardo*Leonardo não podia herdar o nome de seu pai ou posição profissional; sua designação *Da Vinci* simplesmente significa "de Vinci"e funciona como um marcador de lugar em vez de um sobrenome. Criado principalmente por seus parentes paternos, Leonardo recebeu uma educação rudimentar em leitura, escrita e aritmética, mas pouca instrução formal em latim, a língua dos estudiosos. Essa exclusão da educação humanista mostrou-se paradoxalmente vantajosa. Sem restrições por convenções escolares e comentários aristotélicos, Leonardo desenvolveu uma abordagem do conhecimento baseada em observação direta, desenho e comparação ao invés de autoridade textual. Leonardo era o exemplo supremo do ideal renascentista do gênio universal, e seus cadernos refletem estudos pioneiros em mecânica estrutural que anteciparam os desenvolvimentos séculos antes de seu tempo. Compondo milhares de páginas de desenhos e notas escritas em seu roteiro espelhado característico, os cadernos documentam investigações sobre praticamente todos os domínios da filosofia natural e engenharia.

[2] Mais sobre as contribuições de Alberti em §15.2.2.1.

CÓPIA PARA REVISÃO

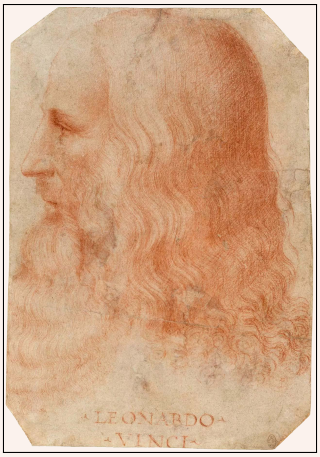


Figura 6.1: Leonardo da Vinci

Treinamento de Oficinas e Fusão de Artes e Mecânica Por volta dos quatorze anos, Leonardo foi aprendiz de Andrea del Verrocchio em Florença, um dos artistas e engenheiros mais talentosos do período. Lá ele foi treinado em desenho, pintura, escultura, metalurgia, elaboração e design mecânico. A oficina de Verrocchio funcionava menos como um estúdio tradicional do que como um ambiente híbrido no qual a produção artística, experimentação de engenharia e prática material estavam intimamente interligadas.

Esta experiência formativa moldou o modo de investigação ao longo da vida de Leonardo: intensamente visual, diagramática e sintética. A oficina funcionou, na verdade, como um proto..Laboratório de pesquisa, incutir em Leonardo o hábito de tratar problemas artísticos, mecânicos e naturais como variações de um processo investigativo comum.

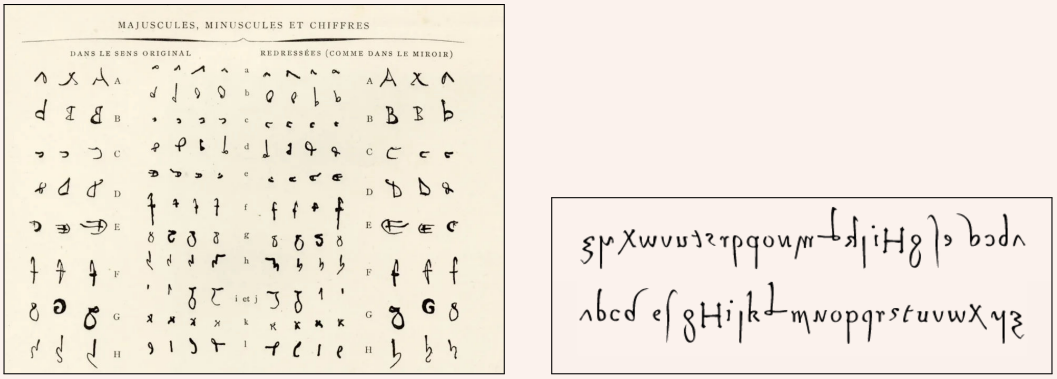
Vida privada e Práticas de Escrita Leonardo é amplamente acreditado ter sido homossexual. Em 1476, ele e vários outros foram acusados anonimamente de sodomia, então um crime em Florença. Embora absolvido por falta de provas, ele nunca se casou e não expressou nenhum interesse romântico documentado em mulheres. Seus cadernos ocasionalmente contêm observações oblíquas sugestivas de afeto masculino, mas assuntos pessoais são escassamente registrados.

Canhoto e trabalhando principalmente com pena e tinta, Leonardo desenvolveu o hábito distinto de *Escrita de espelhos*, escrevendo da direita para a esquerda em script invertido. Se adotado para evitar esfumar, como uma forma de disciplina mnemônica, ou como um meio de privacidade permanece incerto. A prática, combinada com soletração idiossincrática e abreviaturas, tornou seus cadernos difíceis de ler e contribuiu para sua obscuridade posterior, fig. 1. 6.2.. Alguns estudiosos têm sugerido que esta opacidade também reflete um desejo de proteger idéias pouco ortodoxas em uma época em que a novidade intelectual poderia provocar suspeitas.

Milão: Patrocínio, Observação e Direito Natural Os anos profissionais mais produtivos de Leonardo foram passados em Milão sob o patrocínio de Ludovico Sforza, começando por volta de 1482. Lá ele produziu obras de arte monumentais como o *Última Ceia*, enquanto também serve como um designer de entretenimentos cortês, fortificações militares e sistemas hidráulicos. Seus cadernos desse período... depois se reuniram em coleções como *Codex Atlanticus* e o *Códice Madrid*Documentar uma surpreendente gama de perguntas: anatomia, mecânica, óptica, hidráulica, vôo e forma urbana.

Leonardo acreditava que a natureza obedecia às leis detectáveis, mas ao contrário dos cientistas posteriores ele não buscava essas leis através da dedução matemática. Em vez disso, ele os perseguiu através de observação visual meticulosa, analogia e esboços repetidos. Seu trabalho marca um momento de transição

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Decifrando (b) Alfabeto

Figura 6.2: O espelho de Leonardo explicou

entre a filosofia natural medieval, fundamentada na autoridade, e a investigação empírica que caracterizaria a ciência moderna primitiva.

"Moção é a causa de toda a vida."

Esta convicção anima seus cadernos, que são cheios de engrenagens rotativas, água fluindo, flexionando vigas, articulações articuladas, e musculatura dissecada, tudo feito com uma clareza que funde intuição artística e raciocínio mecânico.

Visão de Engenharia e Intuição Estrutural Leonardo concebeu uma extraordinária gama de projetos técnicos: Máquinas voadoras, pára-quedas, veículos blindados, dispositivos de elevação e pontes rotativas. Poucos foram construídos, mas seu escopo conceitual o coloca mais perto de um engenheiro especulativo do que de um artesão convencional do quattrocento.

De particular relevância para análise estrutural são suas investigações sobre a força dos materiais, comportamento viga, ação de arco, e a relação entre forma e carga. Estes estudos carecem do formalismo matemático da mecânica posterior, mas demonstram uma consciência emergente de que o comportamento estrutural poderia ser analisado sistematicamente em vez de por regra. Nesse sentido, Leonardo é um precursor crucial para Galileu e a matemática do século XVII da mecânica.

Força de Materiais e Comportamento Os estudos estruturais de Leonardo são notáveis por sua combinação de observação empírica, testes experimentais e especulação teórica. Ele investigou a resistência dos materiais, conduzindo experimentos sobre a capacidade de tração de fios de ferro e a força de quebra de madeira vigas. Ele estudou a relação entre as dimensões de uma viga e sua capacidade de carga, reconhecendo que resistência à flexão depende tanto da largura quanto do quadrado de profundidade - uma visão que não seria formalizada até Galileu *Duas Novas Ciências* mais de um século depois.

Arcos, Cofres e Falha Estrutural Suas investigações sobre arcos e cofres são igualmente prescientes. Leonardo analisou como as cargas são distribuídas através de estruturas de arco, reconheceu que o arco nunca quebra se o acorde do arco exterior não toca o arco interno, e estudou a relação entre forma de arco e impulso. Ele examinou os padrões de rachadura em cúpulas e paredes, desenvolvendo um entendimento intuitivo de como as estruturas de alvenaria falham. Seus projetos para fortificações militares, pontes e máquinas demonstram uma apreciação sofisticada dos princípios estruturais.

Biomecânica e Analogia Estrutural Leonardo também estudou a mecânica do corpo humano, reconhecendo analogias entre estruturas anatômicas e sistemas de engenharia - a coluna vertebral como um pilar, o braço como uma alavanca, os tendões como cabos. Essa perspectiva biomecânica enriqueceu sua compreensão da ação estrutural. Ao longo de suas investigações, Leonardo reconheceu a unidade entre

CÓPIA PARA REVISÃO

observação, experimentação e abstração matemática, lançando bases conceituais críticas para a ciência das estruturas. Apesar de seus cadernos permanecerem inéditos até o século XIX, documentam uma mente envolvida com problemas estruturais em um nível de sofisticação inigualável até a Revolução Científica.

Arte, conclusão e legado seletivo Apesar de seus dons extraordinários, Leonardo completou relativamente poucos trabalhos. Ele frequentemente abandonava comissões, impulsionadas pelo perfeccionismo ou pela atração de novos problemas intelectuais. Mas os trabalhos que ele fez completaram... incluindo o *Mona Lisa*, o *Homem Vitruviano*, e o *Última Ceia*Tornou-se ícones duradouros, notáveis não só pela inovação estética, mas pela integração da anatomia, proporção e estrutura espacial.

Últimos Anos na França Em seus últimos anos Leonardo entrou no serviço do Rei Francisco Eu da França. Em 1516 ele se mudou para o Chateau du Clos Luce perto de Amboise, recebendo o título honorário de "Pinter Premier e Engenheiro e Arquiteto do Rei"'. Ele morreu lá em 1519, deixando para trás milhares de páginas de desenhos e notas. Muitos foram dispersos ou perdidos, mas muitos sobreviveram para serem redescobertos séculos depois.

Sua morte marca o fim de uma era em que um único indivíduo poderia plausivelmente perseguir o conhecimento universal. A rápida expansão da especialização científica que se seguiu logo tornaria tal amplitude inatingível.

Códices, Folios e o Legado do Manuscrito A *códice* (Plurais: *códices*) é um volume de manuscrito, em oposição a um pergaminho. Os códices de Leonardo consistem em esboços, notas e descrições que abrangem mecânica, geometria, pintura, anatomia e engenharia.

A *fólio* (Plurais: *fólios*) refere-se a uma única folha dentro de um manuscrito. O conteúdo normalmente aparece tanto no reto quanto no verso, embora apenas um lado esteja numerado. Muitos dos manuscritos de Leonardo consistem em fólios frouxamente reunidos, ao invés de volumes formalmente encadernados.

Mesa 6.1 lista os principais códices sobreviventes atribuídos a Leonardo da Vinci, com seus locais e conteúdo atuais.

Juntos, esses códices constituem uma parte central do legado científico e de engenharia de Leonardo da Vinci. Alguns manuscritos menores ou fragmentários adicionais existem, mas aqueles listados aqui são os mais completos e extensivamente estudados. A compilação moderna mais abrangente dos cadernos de Leonardo é dada em (Vinci, 1938).

Uma pesquisa pictórica do pensamento estrutural e arquitetural de Leonardo Uma publicação notável que captura a amplitude do gênio de Leonardo é (Istituto Geografico De Agostini, 1956). Porque Leonardo ajudou a moldar nossa compreensão coletiva tanto da arte quanto da ciência, e porque ele dedicou atenção sustentada a dois temas centrais deste livro (arquitetura e estruturas) - Eu dou a este volume um tratamento especial: Primeiro através do seguinte resumo, e depois reproduzindo as páginas relevantes para o leitor.

Esta decisão parte da minha prática habitual. Ao longo deste livro, tenho sido cuidadoso em incluir apenas figuras que podem ser individualmente referenciadas no texto, e eu estive igualmente atento para garantir que seu tamanho não sobrepujasse a página. Leonardo da Vinci, no entanto, se distancia: Embora ele não nos deixou uma única equação, a pura originalidade de sua mente requer tratamento especial em questões de ilustração. Por essa razão, eu reproduzo, para o leitor curioso, a sequência completa de páginas contendo seus desenhos - primeiro na arquitetura, depois em estruturas - de (Istituto Geografico De Agostini, 1956). Apesar de reduzido para caber na página, o texto permanece facilmente legível simplesmente ampliando (ou clicando no ícone PDF ao lado da citação para baixar o documento fonte completo).

Leonardo como investigador estrutural A parte "Ciência das Estruturas" de (Istituto Geografico De Agostini, 1956) Trata Leonardo como um investigador precoce, incomummente autoconsciente do que agora chamamos de força de materiais e comportamento estrutural, abordado através de experimentos, raciocínio proporcional, e o interrogatório cuidadoso do fracasso. A seção se abre ligando formas construtivas

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.1: Os códices de Leonardo da Vinci (Vinci, 1938)

Codex	Data	Localização	Conteúdo
		Diretor Codices	
Codex Atlanticus	c. 1478–1519	Biblioteca Ambrosiana, Milão	Mecânica, geometria, vôo, máquinas militares.
Codex Arundel	c. 1480–1518	Biblioteca Britânica, Londres	Notas sobre mecânica, óptica e geometria.
Códice Madrid I & II	c. 1490–1505	Biblioteca Nacional, Madrid	Estáticos, mecânicos, engrenagens, fortificações.
Codex Forster I-III	c. 1490–1505	Victoria e Albert Museum, Londres	Hidráulica, pesos, ciência natural.
Codex Leicester (Hammer)	c. 1506–1510	Colecção privada	Hidrodinâmica, fósseis, luz, astronomia.
Codex Trivulzianus	c. 1487–1490	Biblioteca Trivulziana, Milão	Listas de vocabulário e estudos arquitetônicos.
Códice Ashburnham I & II	1400 final de ano	Instituto de França, Paris	Fragmentos de outros códices.
Códice no vôo de pássaros	c. 1505	Biblioteca Real, Turim	Estudos de vôo de pássaros e aerodinâmica.
Códice Urbinas	Compilado c. 1570	Biblioteca do Vaticano	Tratar sobre pintura (póstumo).
		Códices secundários e fragmentares	
Coleção Codex Windsor	c. 1490–1510	Coleção Real, Windsor	Desenhos anatômicos e científicos.
Códice Vaticano	c. 1480s–1490s	Biblioteca do Vaticano	Estudos matemáticos e arquitetônicos.
Codex Paris (A-E)	vários	Instituto de França, Paris	Mecânica, óptica, geometria.
Códice C (série Paris)	c. 1500	Instituto de França, Paris	Estática e equilíbrio.
Codex R	c. 1503–1505	Instituto de França, Paris	Geometria, pesos, anatomia.
Códice Sulbiate	1400 final de ano	Desconhecidos/dispersos	Um pequeno manuscrito arquitetônico.

evoluindo ao acúmulo gradual de conceitos científicos e práticos, convidando explicitamente uma leitura histórico-técnica da forma estrutural em vez de puramente estilística.

Dentro desse pórtico, as notas do manuscrito de Leonardo são apresentadas como tentativas de expressar força em termos de dimensões relativas (altura, espessura e proporção), e como esforços para conectar ‘‘medidas e proporções” às demandas que máquinas e estruturas Deve resistir. Passagens ilustrativas se concentram em suportes e: ele propõe regras (às vezes imperfeitas pelos padrões modernos) que relacionam capacidade à geometria, incluindo experimentos de pensamento e exemplos numéricos destinados a tornar visíveis tendências proporcionais.

O livro também enfatiza seu interesse em ação composta e rigidez / ganhos de força dos elementos de agrupamento, por exemplo, observando sua afirmação de que juncos unidos podem carregar muitas vezes o que único juncos carregam - uma intuição precoce sobre a estrutura Efeito de reunir membros fracos em um sistema. Ao lado de vigas e pilares, arcos aparecem como um objeto estrutural recorrente (tanto como uma forma a ser estudada como um local onde rachar e romper revelam leis subjacentes), reforçando o ponto mais amplo que Leonardo trata falha como informativo em vez de Apenas problemático.

CÓPIA PARA REVISÃO

Finalmente, a seção de estruturas destaca a imaginação experimental de Leonardo através de um conceito de aparelho para testes de tração: Ele propõe uma configuração controlada para carregar um fio de ferro (usando adições medidas de peso), repetir o teste em diferentes comprimentos, e registrar onde/como ocorre a falha - explicitamente visando generalizar de tentativas repetidas para uma ”lei” de força de suporte através materiais e configurações.

Leonardo como arquiteto A parte da arquitetura de (Istituto Geografico De Agostini, 1956) Contraria tratar Leonardo como um pintor com interesses arquitetônicos, argumentando que tal bolsa tem sido fragmentária e unilateralmente... e por isso perde a unidade de seu trabalho. Em vez disso, o pensamento arquitetônico de Leonardo como inseparável do seu hábito mais amplo de investigação: estuda edifícios como objetos a serem compreendidos através da observação, comparação e busca de normas governativas, ao invés de meros exercícios estilísticos.

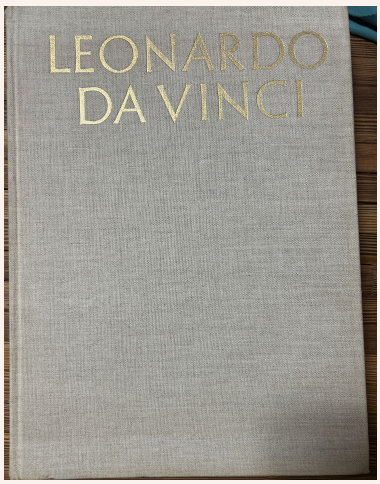
As placas e comentários destacam como ele se move entre elementos arquitetônicos concretos (planos da igreja e interiores, fachadas, esquemas de cúpula, frentes do palácio, torres) e questões mais gerais sobre proporção, organização espacial, e o ético/racional Ordenando o ambiente construído. Um tema recorrente é a confiança de Leonardo na analogia como uma ferramenta explicativa legítima: O texto observa que, ao defender uma solução específica para o *Tiburio* A Catedral de Milão apela a princípios semelhantes aos subjacentes à "sonda física"de um ser humano, sugerindo que justiça estrutural e coerência orgânica são governadas por regras paralelas.

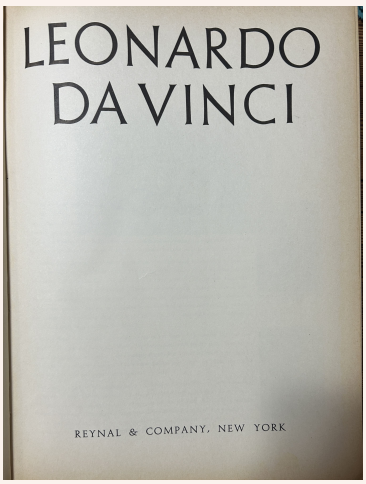
A seção arquitetônica também insiste que simplesmente contar desenhos ou catalogar motivos não pode responder às perguntas interpretativas reais; O que importa é como os esboços funcionam como parte de uma prática investigativa em evolução. Trata explicitamente (e em grande parte rejeita) o velho debate sobre se os desenhos arquitetônicos de Leonardo eram conceptuais: mesmo quando algumas folhas podem ser lidas como demonstrativas “combinações arquitetônicas” (mostrando consequências na estática e estética), o comentário argumenta que o estudo cuidadoso do material da Catedral de Milão (problemas de tubério e cúpula) projetos são suficientes para eliminar sérias dúvidas de que Leonardo engajou problemas arquitetônicos de uma forma tecnicamente conseqüente.

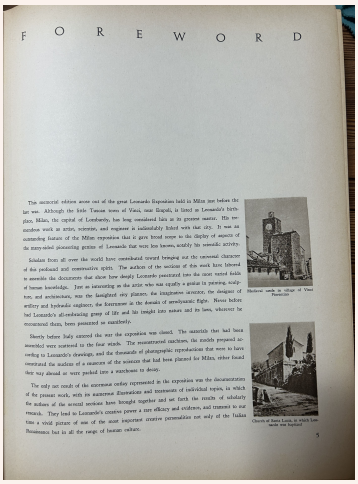
A narrativa é cautelosa sobre a atribuição e as histórias de "influência"também, especialmente em relação a Bramante: adverte que conclusões sobre a influência direta extraídas de similaridades de planos superficiais são muitas vezes apressadas, e pede discriminação cronológica e conceitual em vez de amplas reivindicações de colaboração espiritual ou do ser superior de um mestre explicado pela influência de outro. Isto está emparelhado com uma foto de Leonardo como um documentador meticuloso: notas e exemplos enfatizam medidas, a coleta deliberada de dados observacionais, e recurso a outros especialistas e livros, implicando que seu pensamento arquitetônico estava fundamentado em um fluxo de trabalho incomummente empírico e faminto por informações para o seu tempo.

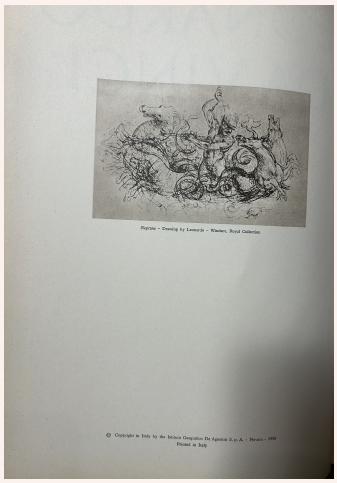
A dimensão urbana aparece também, através de esquemas como comunicações e edifícios arranjados com ruas elevadas e distritos urbanos organizados - mostrando que “arquitetura” aqui se estende desde tipos de prédios até infraestruturas e forma da cidade. Tomados juntos, as partes da arquitetura e estruturas apresentam Leonardo não como um designer que ocasionalmente “’ edifícios esfolados,’ mas como um pensador para quem forma arquitetônica, necessidade estrutural, medição, analogia, e experimento pertencem a uma contínua método - legível aqui através de trechos e placas de manuscritos curados que mantêm as questões de engenharia (suporte, vigas, cúpulas, arcos, circulação da cidade) em constante diálogo com os arquitetônicos.

CÓPIA PARA REVISÃO

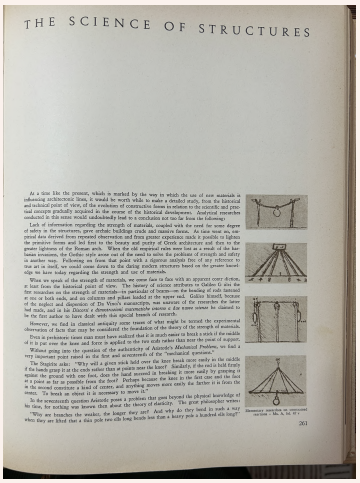


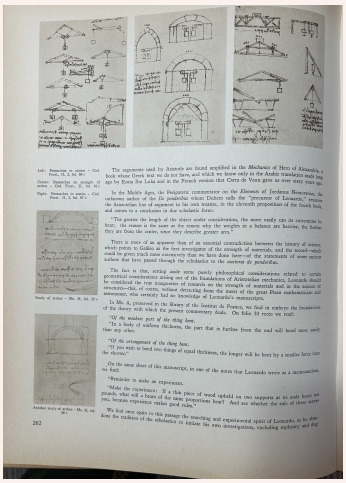


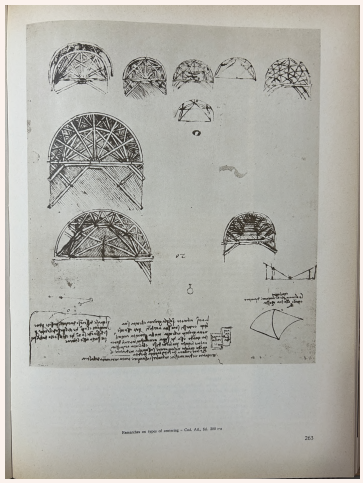




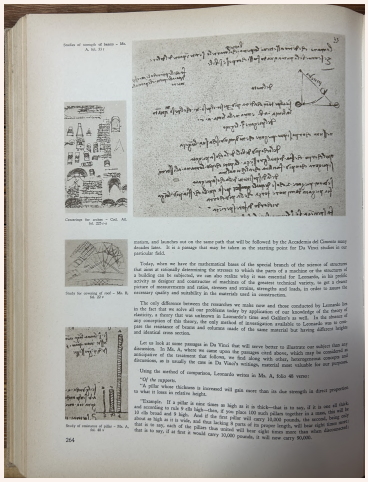
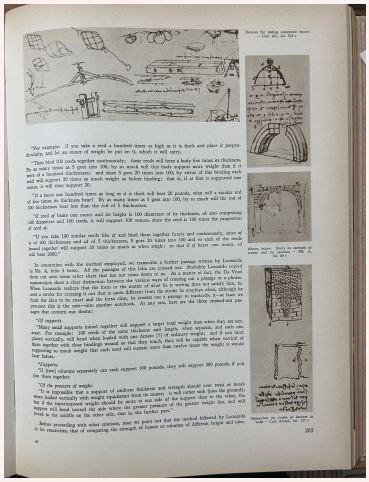
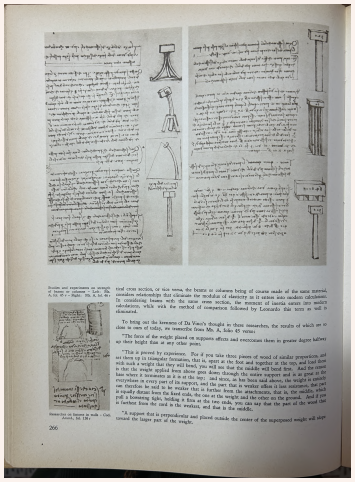
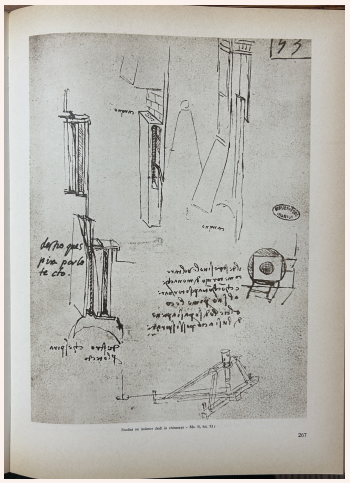
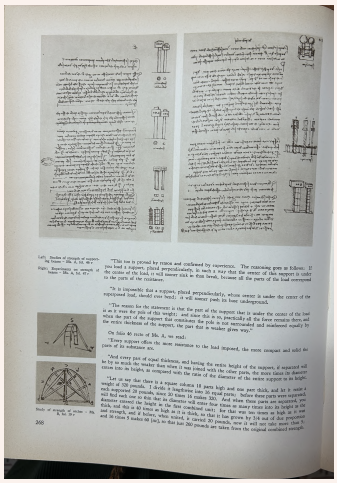
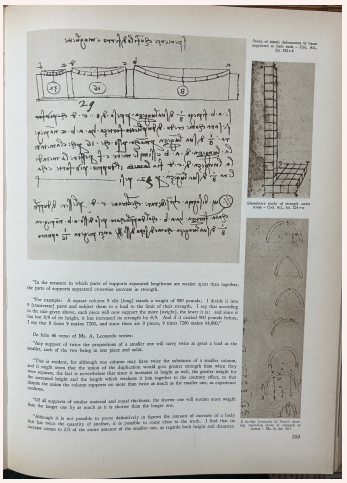
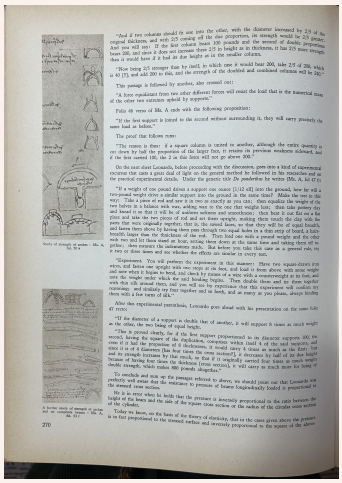
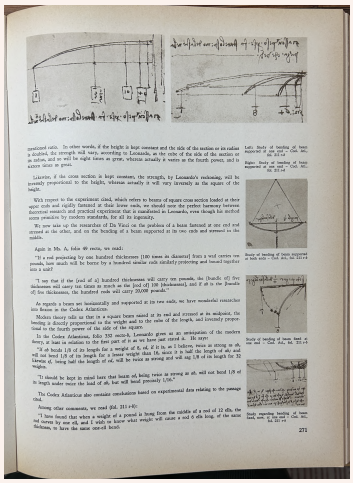
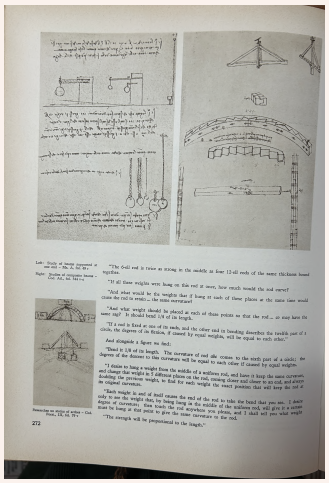
Ciência das Estruturas





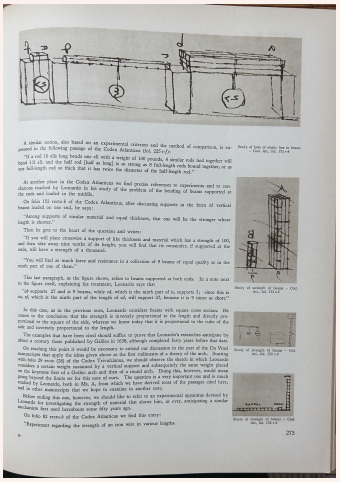


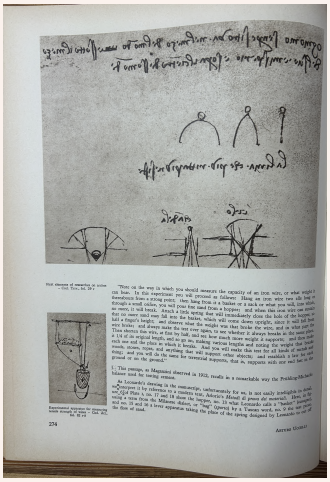
CÓPIA PARA REVISÃO

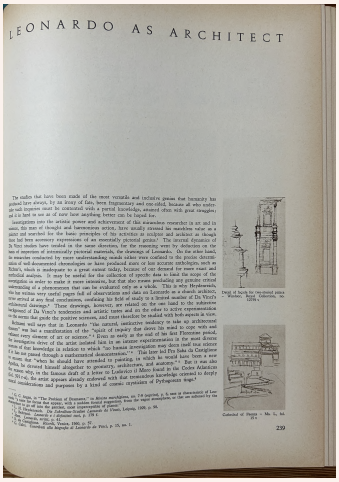










CÓPIA PARA REVISÃO

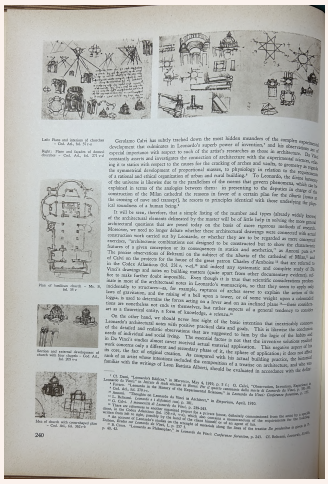
Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

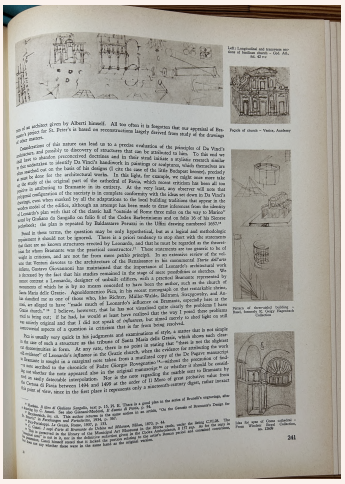


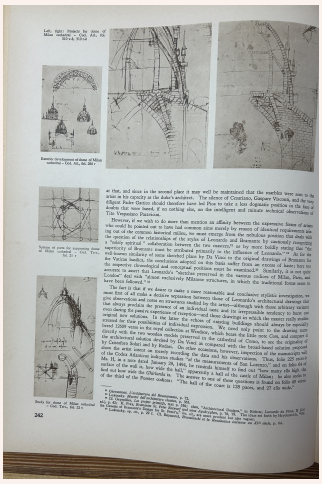


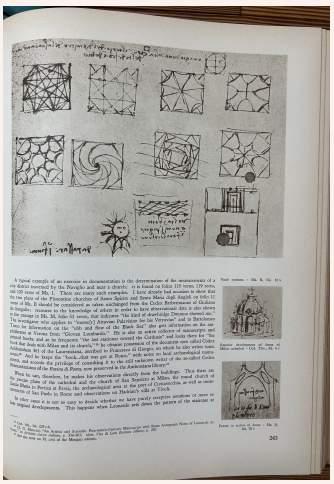


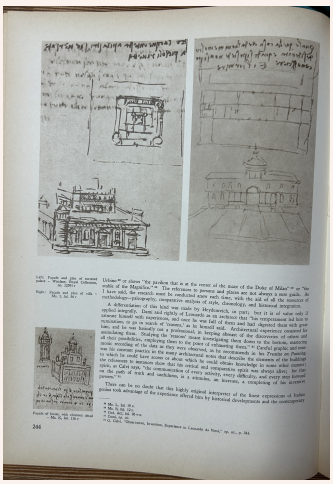
Arquiteto







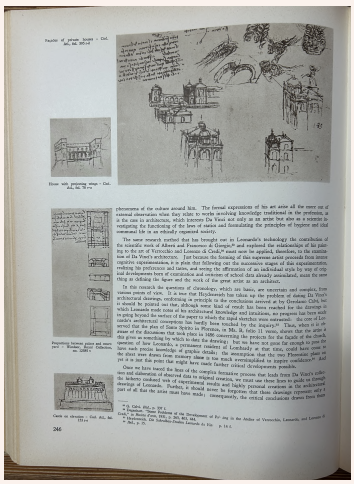
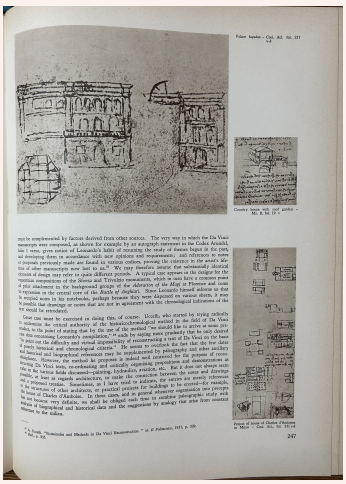
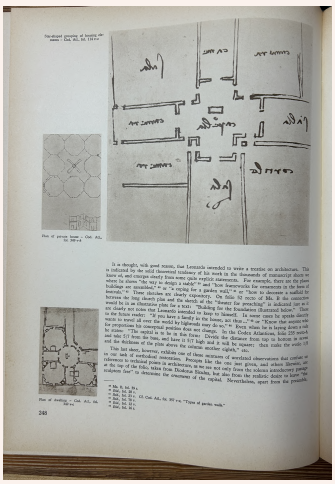
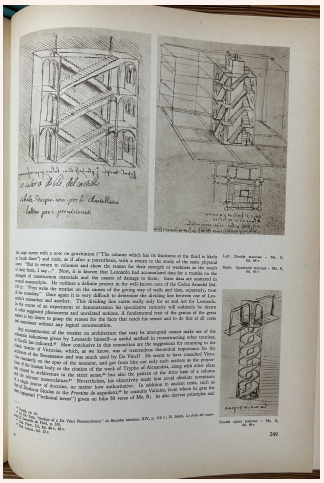
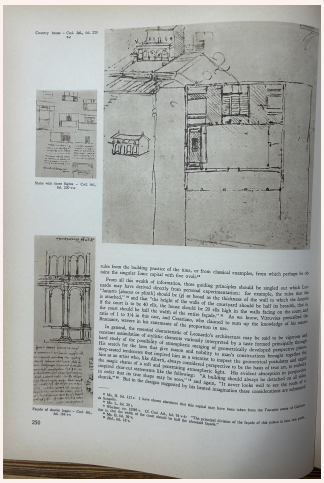
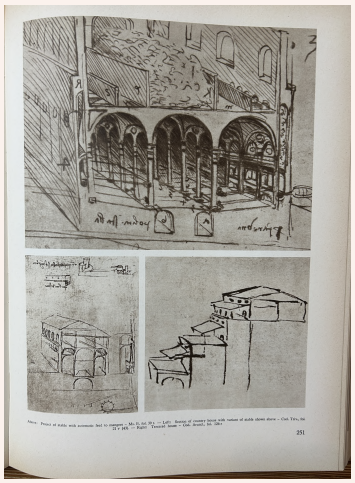
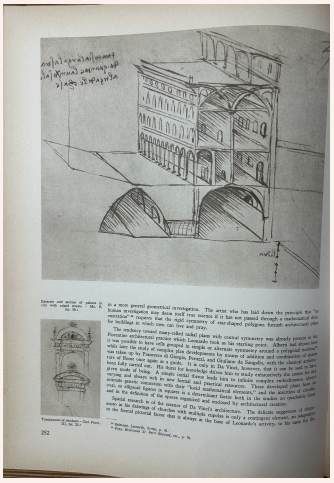
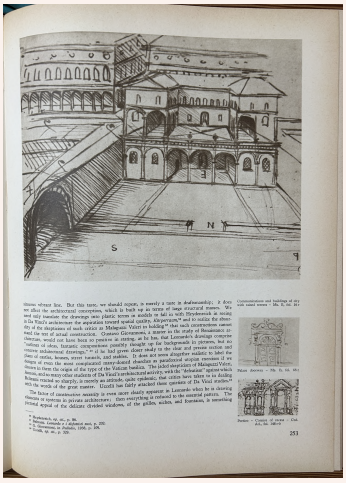
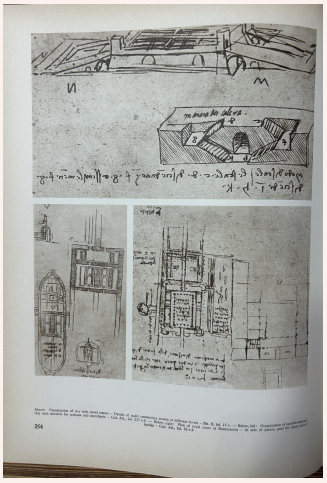






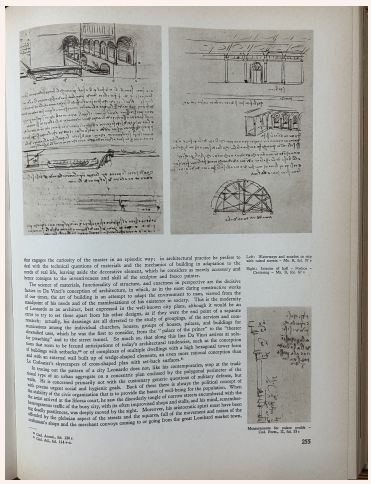
CÓPIA PARA REVISÃO

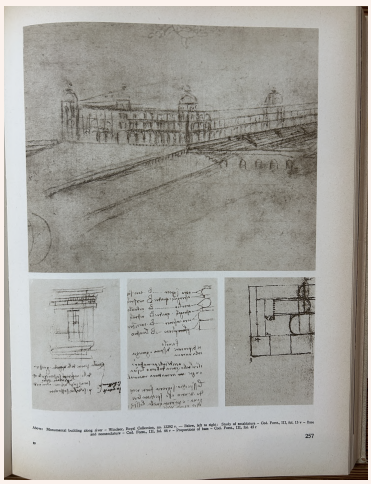
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

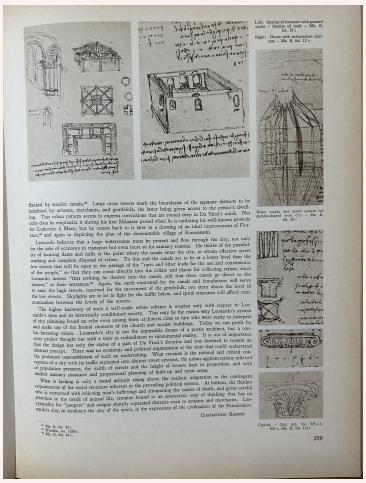
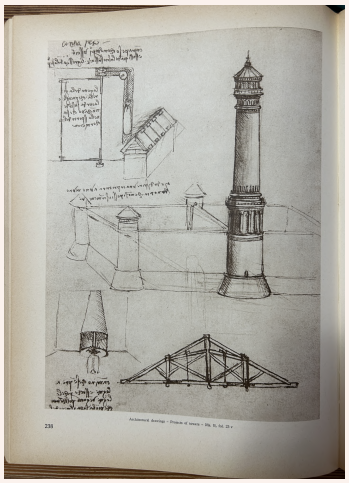










CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.





6.4.3 Andrea Palladio (1508-1580)

Nascido em Pádua em 1508 como Andrea di Pietro della Gondola, Palladio[3] mudou-se para Vicenza na década de 1520 e, por volta dos dezesseis anos, foi matriculado (1524) na guilda local de pedreiros e pedreiros. Durante a década seguinte ele trabalhou como pedreiro e escultor, com documentos descrevendo-o como um *lapicida* Já é 1542. Sua educação inicial foi, portanto, prática em vez de acadêmica, enraizada em materiais, técnicas de construção, e as realidades da construção de locais - uma experiência formativa que moldaria permanentemente sua perspectiva arquitetônica, fundamentando seu futuro Trabalho teórico em lógica construtiva ao invés de especulação puramente estética.

Um ponto decisivo veio no final dos anos 1530 quando o poeta humanista e estudioso Gian Giorgio Trissino notou seu trabalho enquanto o empregava em projetos de construção e o levou sob seu patrocínio. Trissino reconheceu seu talento, deu-lhe o nome clássico de ”Palladio” – depois de Pallas Athena – e apresentou-o ao aprendizado humanista. Imerso no estudo da arquitetura romana antiga e de Vitruvio (disponível em impressão desde o final do século XV), Trissino incentivou a educação clássica de Palladio e acompanhou-o em viagens de estudo para Roma, onde estudou sistematicamente e Mensurou monumentos antigos em

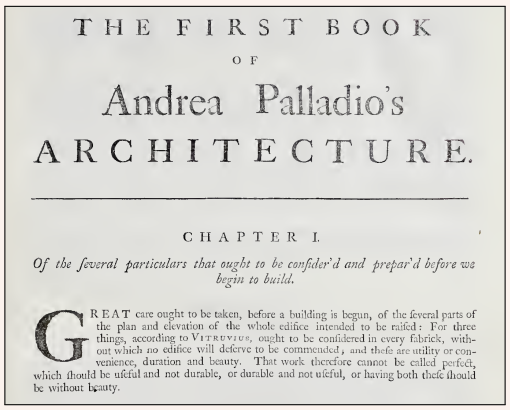
[3] Mais detalhes sobre sua contribuição podem ser encontrados em §15.2.2.2.

CÓPIA PARA REVISÃO

primeira mão. Estes encontros com a arquitetura romana forneceram o quadro intelectual que lhe permitiu sintetizar forma clássica com prática de construção contemporânea.

Por volta de 1540, Palladio recebia comissões arquitetônicas e emergia publicamente no papel pelo qual se tornou famoso. Fundado principalmente em Vicenza, tornou-se o arquiteto mais influente do final da Renascença, projetando villas, palácios e igrejas por todo o Veneto. Seu trabalho está na interseção entre artesanato, teoria clássica e proporção racional.

Andrea Palladio (1508-1580) (Palladio, 1570) tornou-se, sem dúvida, o arquiteto mais influente do Renascimento e talvez de toda a arquitetura ocidental. Seu *Eu Quattro Libri dell'Architetura* (Os Quatro Livros de Arquitetura), publicados em Veneza em 1570, sintetizaram a teoria clássica da arquitetura com rigorosa instrução prática no mais influente tratado arquitetônico já escrito. O trabalho combinou princípios teóricos, mediu desenhos de edifícios romanos antigos, e apresentações detalhadas das próprias obras de Palladio em um manual abrangente de design que moldou a arquitetura mundial por séculos.[4]



THE FIRST BOOK
OF
Andrea Palladio's
ARCHITECTURE.

CHAPTER I.

Of the feveral particulars that ought to be conſider'd and prepar'd before we begin to build.

GREAT care ought to be taken, before a building is begun, of the feveral parts of the plan and elevation of the whole edifice intended to be raiſed: For three things, according to VITRUVIUS, ought to be conſidered in every fabrick, without which no edifice will deſerve to be commended, and theſe are utility or convenience, duration and beauty. That work therefore cannot be called perfect, which ſhould be uſeful and not durable, or durable and not uſeful, or having both theſe ſhould be without beauty.

Figura 6.3: Palladio (Palladio, 1570)

6.4.4 Sebastiano Serlio (1475-1554)

Sebastiano Serlio nasceu em Bolonha em 1475 e treinou como pintor antes de se voltar para a arquitetura. Ele trabalhou em Roma durante as décadas de 1510 e 1520, onde absorveu as lições dos monumentos antigos e o trabalho de Bramante e Peruzzi. Depois do Saque de Roma, em 1527, ele se mudou para Veneza e depois para a França, onde serviu Francisco I e trabalhou no castelo em Fontainebleau. Ele morreu em Fontainebleau por volta de 1554.

Tutte l'opere d'architetura Serlio revolucionou a transmissão do conhecimento arquitetônico priorizando clareza visual sobre exposição textual. Seu *Tutte l'opere d'architetura* (Trabalhos Completos em Arquitetura) (Serlio, 1996), publicado em parcelas entre 1537 e 1575, foi o primeiro tratado arquitetônico projetado principalmente em torno de ilustrações. Onde Alberti e Vitruvius escreveram uma densa prosa teórica, Serlio forneceu centenas de ilustrações de xilogravura acompanhadas de explicações práticas acessíveis a construtores, patronos e arquitetos.

[4] O leitor atento deve ter notado que o título do presente trabalho homenageia a obra-prima de Palladio. O autor confessa este empréstimo com mais admiração do que culpa, esperando que alguma pequena medida da clareza e sistematização do mestre veneziano poderia, por magia simpática, infundir estas páginas. Palladio organizou a arte da arquitetura em quatro livros; Nós tentamos o mesmo para a ciência das estruturas. Se este trabalho vai desfrutar de mesmo uma fração do *Quattro Libri*A longevidade de cinco séculos permanece, misericordiosamente, para as gerações futuras julgarem.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

A abordagem de Serlio democratizou a arquitetura clássica, tornando os princípios do design antigo e renascentista disponíveis para praticantes em toda a Europa que não tinham acesso a edifícios italianos ou educação humanista. Seus livros sobre as ordens clássicas- Tuscano, Doric, Ionic, Corinthian e Composite - apresentaram cada ordem através de diagramas sistemáticos mostrando relações proporcionais, perfis de moldagem, e detalhes de montagem.

O tratado foi traduzido para holandês, alemão, francês, espanhol e inglês, tornando-se o livro arquitetônico mais disseminado do século XVI. O uso de diagramas por Serlio para comunicar regras geométricas para o projeto prefigurava a importância dos métodos gráficos em análise estrutural.

6.4.5 Giacomo Barozzi da Vignola (1507-1573)

Giacomo Barozzi da Vignola (1507-1573) (Vignola, 1969) Codificou as cinco ordens clássicas em um sistema modular preciso que se tornou a referência padrão para prática de arquitetura e engenharia por mais de três séculos. Seu *Regola delli cinque ordini d'architetura* (Regra das Cinco Ordens de Arquitetura), publicado pela primeira vez em 1562, alcançou o que nenhum tratado anterior tinha: uma apresentação completamente sistemática, matematicamente precisa e visualmente clara de proporções clássicas que qualquer praticante competente poderia aplicar.

A inovação de Vignola foi metodológica. Ele estabeleceu o módulo, definido como o raio do pilar em sua base, como a unidade fundamental da qual todas as outras dimensões derivam. Cada elemento de cada ordem, altura pilar, proporções de entablatura, perfis de base e capital, intercolumniação, é expresso como uma fração simples ou múltipla deste módulo. O sistema reduz o design clássico à aritmética: dada uma altura desejada pilar, todas as outras dimensões seguem automaticamente. Essa racionalização eliminou as ambiguidades e inconsistências em tratamentos anteriores, incluindo os de Serlio e até mesmo Vitruvius.

Regola delli cinque ordini d'architetura 1562 O *Regola* é notável por sua economia. Consiste quase que inteiramente em 32 placas gravadas com texto mínimo, apenas o suficiente para explicar o sistema proporcional. Essa direção visual tornou-o extraordinariamente prático: arquitetos e construtores poderiam extrair a informação que precisavam num piscar de olhos. O livro passou por centenas de edições e traduções, permanecendo em impressão continuamente no século 20. Era o livro de arquitetura por excelência, usado em academias e oficinas em toda a Europa e Américas.

A abordagem sistemática de Vignola ao dimensionamento e proporções influenciou muito mais do que o estilo arquitetônico. Sua redução de julgamentos estéticos complexos para relações numéricas precisas exemplificava o espírito racionalista que caracterizaria a Revolução Científica. O hábito da mente que produz sistemas proporcionais modulares — sistemáticos, quantitativos, baseados em regras — é o mesmo hábito que produz análise estrutural. O tratado de Vignola representa, assim, não apenas uma codificação do gosto clássico, mas um passo em direção ao tratamento racional da forma e estrutura que caracteriza a engenharia moderna.

6.4.6 Hubert Gautier (1660-1737)

Hubert Gautier nasceu em NîMes e treinado como engenheiro militar durante o reinado de Louis XIV, uma era de ambiciosa expansão da infraestrutura destinada a consolidar o poder administrativo e econômico do Estado francês. Sua carreira abrangeu estradas, canais e pontes, e ele se tornou *Inspetor de Chemins, Ponts, Ports Maritimes et ChaussÉes du Languedoc*Inspetor de Estradas, Pontes, Portos Marítimos e Causeways para a região de Languedoc, uma das maiores províncias da França.

Em 1716, Gautier publicou seu *Traité des ponts* (Gautier, 1765 PDF) (quarta edição), o primeiro tratado dedicado inteiramente à construção de pontes. O trabalho começa com uma queixa notável, Fig. 6.4a:

CÓPIA PARA REVISÃO

Les Auteurs qui ont traiteé de l'Arquitectura, non'onné de regies pour contruire des Ponts. Não é um ponto de traço à cette fond matière ni donné aucun détail, ils n'en ont parlé qu'en paffant; É o primeiro fupofé qu'un Architette qui n'ignore rien de d.C. qui concertie la Profissão, devoir savoir tout d.C. qui respeito les Ponts. Quelques-uns, Comme Scamozzi, Palladio, Serlio, &donné des modèles des Ponts de Maçonnerie, ou de Charpente; Vitruve & Vignolle n'en ont rien dit. J'ai tiré de ceux qui en ont traiteé tout d.C. qui a pu convenir à mon sujet, & "Je relapte tout"(d.C.) que está ont publié ou fait sur cette matière, lorsque j'ai cru que cela pouvait étre de quelque use au Public; Mais parte out où j'ai vu que je pouvais aller au-delà en aumentant, ou en diminuant, pour éclaircir davantage les choices, je l'ai fait en sorte qu'elles exagent plus aisées à pétrer. J'ai joint à tout cela l'experience que je puis avoir de tous ces ouvrages, depuis plusieurs années que je travaille, & que je relapte, afin que ceux qui ne savennt pas puissent en proficer, pour qui uniquement j'ai fait Traité.

Os autores que trataram da arquitetura não deram regras para a construção de pontes. Eles não trataram este assunto em profundidade, nem forneceram nenhuma discussão detalhada; Eles só falaram disso de passagem. Eles assumiram que um arquiteto, que não conhece nada da profissão, deveria saber tudo sobre pontes.

Alguns autores, como Scamozzi, Palladio, Serlio, e outros, forneceram modelos de pontes em alvenaria ou madeira; Vitruvius e Vignola não disseram nada sobre eles. Tirei daqueles que escreveram sobre o assunto tudo o que poderia ser adequado ao meu propósito, e relato tudo que eles publicaram ou fizeram sobre este assunto sempre que eu o julguei de alguma utilidade para o público.

Mas onde quer que eu tenha visto que poderia ir mais longe, acrescentando ou omitindo, para esclarecer melhor as coisas, eu fiz isso, para que eles pudessem ser mais fáceis de entender. A tudo isso eu adicionei a experiência que tenho sido capaz de adquirir dessas obras ao longo dos muitos anos durante os quais eu pratiquei, e que eu relato aqui para que aqueles que não sabem possam lucrar com isso, para quem sozinho escrevi este tratado.

Gautier, 1765 Traité des ponts

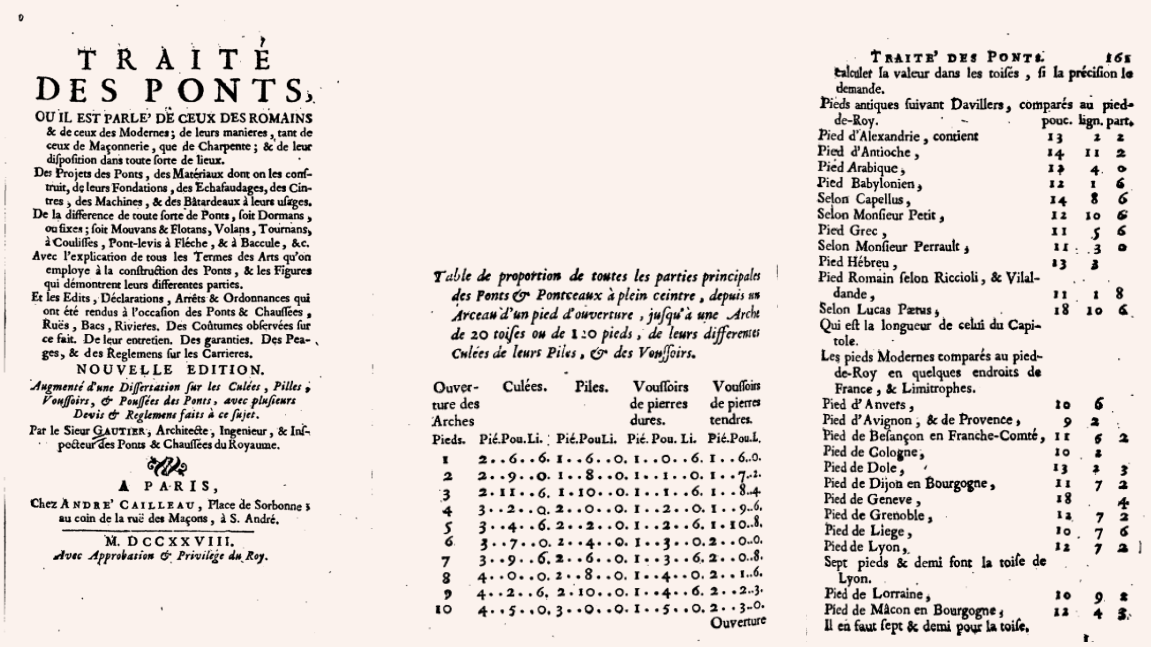
Na verdade, Vitruvius não disse nada de pontes; Vignola também. Palladio e Scamozzi forneceram exemplos, mas não orientação sistemática. Gautier explicitamente se propôs a remediar essa deficiência, compilando tudo o que tinha sido publicado, aumentado por suas próprias décadas de experiência prática.

O *Traité des ponts* é enciclopédico no escopo. Ele começa com um levantamento histórico de pontes celebradas – a ponte de Trajan sobre o Danúbio, as pontes de Roma, o Pont du Gard – antes de prosseguir sistematicamente através de tipos de ponte, materiais, fundações, cofres, centralização, e máquinas. Gautier discute pontes de madeira e pontes de alvenaria, pontes fixas e móveis (pontes de drawbridge, pontes flutuantes, pontes oscilantes). Ele trata a geometria dos arcos, o dimensionamento de cais e pilares, e os desafios práticos das estruturas fundadoras nos rios. Ao longo de todo o trabalho, permanece descritivo em vez de analítico; O desempenho estrutural é abordado através de forma, proporções e precedentes acumulados em vez de através do cálculo.

Além de questões de forma e construção, Gautier dedica extraordinária atenção ao que poderia ser chamado de infraestrutura prática e administrativa da engenharia. Ele estabelece uma nomenclatura técnica precisa e, na página 161, apresenta uma tabulação detalhada de unidades de comprimento (*Pieds*), desde medidas babilônicas até aquelas usadas em várias regiões europeias e cidades francesas. Esta diversidade de unidades ilustra vividamente as dificuldades práticas enfrentadas pelos engenheiros antes da padronização, e ajuda a explicar por que a introdução posterior do medidor - iniciado durante a Revolução Francesa e consolidado sob Napoleão - constituiu um das reformas mais conseqüentes na história da prática de engenharia.

Gautier ainda aborda regulamentos e ordenanças que regem as obras públicas (p. 196), penalidades por

CÓPIA PARA REVISÃO



TRAITÉ
DES PONTS,
OU IL EST PARLE' DE CEUX DES ROMAINS & de ceux des Modernes; de leurs manieres, tant de ceux de Maçonnerie, que de Charpente; & de leur disposition dans toute sorte de lieux.
Des Projets des Ponts, des Matériaux dont on les construit, de leurs Fondations, des Echafaudages, des Cintres, des Machines, & des Bâtardeaux à leurs usages.
De la difference de toute sorte de Ponts, soit Dormans, ou fixes; soit Mouvans & Flotans, Volans, Tournans, à Coulisses, Pont-levis à Fléche, & à Baccule, &c.
Avec l'explication de tous les Termes des Arts qu'on employe à la construction des Ponts, & les Figures qui démontrent leurs differentes parties.
Et les Edits, Déclarations, Arrêts & Ordonnances qui ont été rendus à l'occasion des Ponts & Chaussées, Ruës, Bacs, Rivieres. Des Coûtumes observées sur ce fait. De leur entretien. Des garanties. Des Peages, & des Reglemens sur les Carrieres.
NOUVELLE EDITION.
Augmenté d'une Dissertation sur les Culées, Pilles, Voussoirs, & Poussées des Ponts, avec plusieurs Devis & Reglemens faits à ce sujet.
Par le Sieur GAUTIER, Architecte, Ingenieur, & Inspecteur des Ponts & Chaussées du Royaume.
A PARIS,
Chez ANDRE' CAILLEAU, Place de Sorbonne, au coin de la ruë des Maçons, à S. André.
M. DCCXXVIII.
Avec Approbation & Privilége du Roy.

Table de proportion de toutes les parties principales des Ponts & Ponteeaux à plein ceintre, depuis un Arceau d'un pied d'ouverture, jusqu'à une Arche de 20 toises ou de 120 pieds, de leurs differentes Culées de leurs Piles, & des Voussoirs.

Ouverture des Arches	Culées.	Piles.	Voussoirs de pierres dures.	Voussoirs de pierres tendres.
Pieds.	Pié.Pou.Li.	Pié.PouLi.	Pié. Pou. Li.	Pié.Pou.L.
1	2..6..6.	1..6..0.	1..0..6.	1..6..0.
2	2..9..0.	1..8..0.	1..1..0.	1..7..2.
3	2.11..6.	1.10..0.	1..1..6.	1..8..4
4	3..2..0.	2..0..0.	1..2..0.	1..9..6.
5	3..4..6.	2..2..0.	1..2..6.	1.10..8.
6	3..7..0.	2..4..0.	1..3..0.	2..0..0.
7	3..9..6.	2..6..0.	1..3..6.	2..0..8.
8	4..0..0.	2..8..0.	1..4..0.	2..1..6.
9	4..2..6.	2.10..0.	1..4..6.	2..2..3.
10	4..5..0.	3..0..0.	1..5..0.	2..3..0.
				Ouverture

TRAITE' DES PONTS. 161
calculer la valeur dans les toises, si la précision le demande.

Pieds antiques suivant Davillers, comparés au pied-de-Roy.	pouc.	lign.	part.
Pied d'Alexandrie, contient	13	2	2
Pied d'Antioche,	14	11	2
Pied Arabique,	13	4	0
Pied Babylonien,	12	1	6
Selon Capellus,	14	8	6
Selon Monsieur Petit,	12	10	6
Pied Grec,	11	5	6
Selon Monsieur Perrault,	11	3	0
Pied Hébreu,	13	3	
Pied Romain selon Riccioli, & Vilalandé,	11	1	8
Selon Lucas Pætus,	18	10	6
Qui est la longueur de celui du Capitole.			
Les pieds Modernes comparés au pied-de-Roy en quelques endroits de France, & Limitrophes.			
Pied d'Anvers,	10	6	
Pied d'Avignon, & de Provence,	9	2	
Pied de Besançon en Franche-Comté,	11	6	2
Pied de Cologne,	10	2	
Pied de Dole,	13	2	3
Pied de Dijon en Bourgogne,	11	7	2
Pied de Geneve,	18		4
Pied de Grenoble,	12	7	2
Pied de Liege,	10	7	6
Pied de Lyon,	12	7	2
Sept pieds & demi font la toise de Lyon.			
Pied de Lorraine,	10	9	2
Pied de Mâcon en Bourgogne,	12	4	8.
Il en faut sept & demi pour la toise.			

(a) Página de Abertura (b) Várias definições de pés (c) Dimensionamento da ponte

Figura 6.4: *Traité des ponts* (Gautier, 1765)

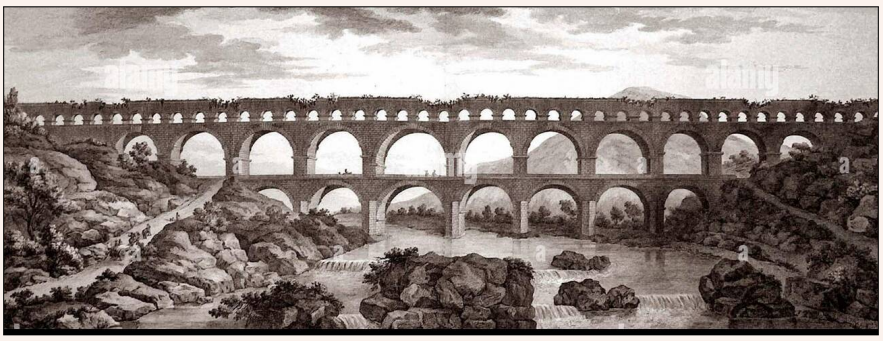


Figura 6.5: Pont du gard

execução defeituosa (p. 214), obrigações de manutenção (p. 217), e a garantia de dez anos imposta aos construtores (p. 225). Ele discute os pedágios cobrados pela passagem da ponte (p. 227), procedimentos de estimativa de custos (pp. 231 e.. 273), certificação do trabalho devidamente executado (p. 325), métodos de contabilidade para obras públicas (p. 328), e a aprovação formal de documentos de engenharia pelas autoridades (p. 340). Particularmente impressionante é sua resposta explícita à crítica revisora (p. 409), um exemplo do que seria agora reconhecido como revisão por pares.

Para a questão crítica da espessura do arco, Gautier virou-se para o Pont du Gard como seu modelo (Fig. 6.5). Lá os arcos têm uma espessura de 4 pés por um período de 60 Pés, com a proporção clássica de 1/15 – a mesma regra dada por Alberti dois séculos antes, Fig. 15.4.. Mas Gautier reconheceu imediatamente um problema: Esta regra é válida apenas para grandes arcos. Para um pequeno arco de 6 pés, a regra prescreveria uma espessura inferior a 6 polegadas, que ele considera muito pouco comparado com a espessura correta que, diz ele, é de 1,5 pés (Huerta, 2018). Aqui Gautier fez uma observação de importância fundamental –

CÓPIA PARA REVISÃO

o primeiro reconhecimento explícito que o design da ponte é inerentemente *não proporcional*:

> Está certo que o grande Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau qui portem la même voiture
>
> Uma grande ponte carregando uma carruagem pesada é muito menos carregada do que uma pequena ponte com a mesma carruagem.
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

A declaração de Gautier requer esclarecimento: Ele quer dizer que o *Rácio* A carga de tráfego para o próprio peso da ponte é muito menor para uma grande ponte do que para uma pequena. Uma grande ponte, sendo mais pesada, é dominada pelo seu peso próprio; A carruagem de passagem representa uma fração insignificante da carga total. Uma pequena ponte, sendo mais leve, experimenta a mesma carruagem que uma perturbação proporcionalmente maior. É por isso que as regras são proporcionaist/s = const.() falham em pequenas distâncias: A magnitude absoluta da carga viva não escala com a estrutura, mesmo que a carga morta sim. Este foi o primeiro reconhecimento explícito de que o projeto da ponte é *não proporcional*.

Essa visão contradiz a suposição fundamental subjacente a todas as regras proporcionais desde Vitruvius: que a estabilidade estrutural depende apenas da geometria, independente do tamanho absoluto[5]

Em 1717, Gautier publicou um *Dissertação sobre l'épaisseur des culées des Ponts*, no qual ele tentou um tratamento mais sistemático. Ele produziu uma mesa dando espessura ao arco em função da extensão, distinguindo entre pedras duras e macias. Para arcos de 40 Pés ou mais, ele manteve a regra de Alberti de 1/15. Para arcos menores, ele prescreveu a adição de 1 pé a 1/24 da escala – uma correção não proporcional reconhecendo a maior vulnerabilidade de pequenas estruturas para cargas concentradas. O *Traité des ponts* passou por quatro edições (1716, 1728, 1755, 1765) e foi amplamente citado ao longo do século XVIII; BÉlidor incorporou as mesas de Gautier em seu influente *La science des ingÉnieurs* (De Belidor, 1729).

Gautier não avançou uma teoria matemática de arcos ou impulso. Sua engenharia dependia da proporção, do precedente e do julgamento do experiente construtor. No entanto, ao isolar pontes como um tema distinto de estudo sistemático, incorporando a engenharia dentro de uma estrutura jurídica e administrativa abrangente, e reconhecendo explicitamente o caráter não proporcional do problema de design, Gautier estabeleceu Uma base intelectual e institucional sobre a qual seus sucessores construiriam.

Nesse aspecto, Gautier está em contraste instrutivo com Jean-Rodolphe Perronet. A contribuição de Gautier reside na codificação enciclopédica da prática - terminologia, regulação, finanças, manutenção e proporção - documentando como pontes foram concebidas, executadas e governadas como obras públicas. Perronet, uma geração mais tarde, representaria a maturação desta tradição: A consolidação da educação de engenharia, a supervisão centralizada, e a execução de pontes monumentais com arcos de pedra com esbelta sem precedentes. A transição do conhecimento artesanal para a disciplina técnica organizada, da intuição do mestre construtor para o método do engenheiro, passa decisivamente através de Gautier *Traité*.

[5]Como é bem conhecido, esta visão foi mais tarde desafiada pelo famoso exemplo da escala óssea de Galileu (p. 559). Muito mais tarde, o conceito de efeito de tamanho em estruturas foi formalizado por Bažant, 1976 e posteriormente estendida por Saouma, Natekar e Hansen, 2003 para preencher explicitamente a lacuna entre plasticidade e mecânica da fratura.

CÓPIA PARA REVISÃO

unidades

Na época Gautier escreveu o *Traité des ponts*, não existia nenhum sistema unificado de medição na França, muito menos em toda a Europa. O comprimento foi expresso em unidades compostas..*Empilhado*, *Puce*, e *Ligne*Cujos valores absolutos variavam não só de país para país, mas muitas vezes de cidade em cidade, Fig. 6.4b.. Essa heterogeneidade representava sérias dificuldades práticas para o projeto, estimativa e construção, particularmente para grandes obras públicas executadas por longos períodos ou envolvendo múltiplas jurisdições. Gautier estava consciente deste problema, como evidenciado por sua detalhada tabulação dos diferentes *Pieds* em uso, desde medidas antigas até as adotadas em várias regiões francesas. Sua atenção cuidadosa às unidades reflete as realidades da prática de engenharia do início do século XVIII, em que regras proporcionais e medidas compostas serviram como o único meio confiável de garantir consistência na ausência de medições padronizadas. Esta situação foi finalmente resolvida durante a Revolução Francesa, quando o sistema métrico foi introduzido em 1795, e mais tarde foi consolidado e forçado por toda a França sob Napoleão no início do século XIX.

A mesa proporcional de Gautier para pontes semicirculares. 368)

O que é a mesa (escopo e intenção). Gautier apresenta esta tabela explicitamente como um *Tabela de proporções dos partidos principais de Ponts & Ponceaux a plein ceintre*, ou seja, uma tabela proporcional para as principais partes de pontes e pequenos bueiros com *Plein ceintre* Arcos. O alcance declarado começa em um arco de abertura de um pé e estende-se até um arco com 20 toises (120 pés). O propósito é prático: dada uma abertura, a mesa fornece de relance as dimensões principais da alvenaria necessárias para a proporção do trabalho, Fig. 6.4c.

Como a mesa está organizada. A mesa é arranjada aumentando *Ouverture des Arches* (abrindo o arco), expresso em pés. Para cada abertura, ele fornece:

- **Culees**:. Uma dimensão recomendada para os pilares (dado em pés– polegadas–linhas).
- **Piles**:. uma dimensão recomendada para os cais (dado em pés - polegadas - linhas).
- **Voussoirs de pierres dures**:. espessura recomendada de vousoir (anel) para *Pedra dura*.
- **Voussoirs de pierres tendres**:. espessura recomendada de vousoir (anel) para *Pedra macia*.

Assim, a tabela separa a proporção orientada pela geometria (abertura, píer, pilar) de uma correção da qualidade do material (pedra dura vs macia) aplicada à dimensão vousoir.

Significando as entradas (o que cada número controla). No uso de Gautier, as entradas não são razões abstratas; são dimensões diretamente utilizáveis para serem aplicadas em desenhos, estimativas e decisões de locais:

- O **abrindo** é o espaço claro do arco.
- O **cais** A dimensão governa a espessura dos suportes intermediários entre arcos; Ele controla tanto a estabilidade (massa) e obstrução hidráulica (quanto o rio é restrito).
- O **Abutment** A dimensão governa os suportes finais; é tipicamente maior que um píer porque ele deve resistir ao impulso no final da sequência e interagir com a aproximação de aterro e terra retida.
- O **Voussoir** dimensão (dura/suave) é a espessura do anel de arco (a banda de alvenaria formando o arco). Este é o representante mais direto, na mesa, para a demanda local de compressão e para a qualidade da pedra e juntas.

Pedra dura contra pedra macia pilares (por que dois valores de youssoir). Uma característica chave é a divisão explícita entre *Pierres coagiu* e.. *Pierres tendres*.. Gautier está reconhecendo que uma única proporção geométrica não é suficiente. Para a mesma abertura, a espessura do anel deve ser maior quando a

CÓPIA PARA REVISÃO

pedra é macia (mais fraca, mais suscetível ao esmagamento, danos e juntas imperfeitas). A tabela funciona como uma simples correção de material acionável: Mantenha a mesma lógica de abertura, píer e pilar, mas escolha a espessura dos vousoirs de acordo com a qualidade da pedra.

Como ler uma linha (fluxo de trabalho). O fluxo de trabalho pretendido é simples:

1. Selecione a linha correspondente ao *Ouverture des Arches* (em pés).
2. Leia para obter as dimensões recomendadas para *Culees* e.. *Piles*.
3. Escolha o *Voussoirs* espessura do material apropriado pilar (pedra dura ou macia).
4. Use estes valores como as proporções basais para desenhos e para um *Devis*; então ajuste (se necessário) para restrições de local (condições de fundação, inundações, liberação de navegação, etc.).

O que a mesa é (e não está) fazendo conceitualmente. A tabela codifica uma lógica de design pré-analítico: A estabilidade é tratada através de massa, proporção e precedente, em vez de computação explícita da linha de impulso. No entanto, é mais do que uma coleção de exemplos isolados: é um esquema sistemático proporcional que liga a abertura às principais partes resistentes (abutments, piers, espessura do anel), e introduz uma correção explícita da qualidade do material através do dual youssoir pilares.

Unidades dimensionais (pés, polegadas, linhas). Todas as entradas são dadas no sistema tradicional francês: *Pouce...ligne*. A *Empilhado* está dividido em 12 *Pouces*, e um *Puce* em 12 *Lignes*.. Assim, uma entrada escrita na tabela como, por exemplo, "4.6.9"deve ser lida como 4 pieds, 6 pouces, 9 lignes. Esta convenção permite o uso direto da tabela em definir tamanhos de alvenaria sem aritmética intermediária, ao mesmo tempo que também reflete a realidade prática do período: Engenheiros e empreiteiros trabalhavam em subdivisões compostas ao invés de unidades decimais.

6.4.6.1 Jean-Rodolphe Perronet

Se Gautier fundou a disciplina de engenharia de ponte, Jean-Rodolphe Perronet a trouxe à maturidade. Nascido em Suresnes, perto de Paris, Perronet começou sua carreira trabalhando para um dos principais arquitetos da cidade e ao longo de sua vida manteve um interesse na arquitetura ao lado da engenharia. Em 1747, aos trinta e nove anos, foi nomeado primeiro diretor do recém-fundado *École des Ponts et Chaussées*, uma posição que ele manteve até sua morte 47 anos depois. Em 1763 ele se tornou engenheiro-chefe do *Corpo de Ponts et Chaussées*E em 1765 ele foi eleito para o *Académie des Sciences*.. Ele supervisionou as obras públicas francesas mais importantes da segunda metade do século e projetou pessoalmente vinte e uma pontes, das quais treze foram construídas.

As pontes de Perronet foram celebradas por sua audácia e leveza (Fig. 6.6a). O Pont de Neuilly (1774), o Pont de Saint-Maxence (1772-86) e o Pont da Concorde (1787-91) alcançaram proporções de esbeltez que espantaram contemporâneos e permaneceram inigualáveis por décadas. Onde Alberti havia prescrito 1/15 e as pontes romanas normalmente variavam de 1/10 a 1/12, os arcos de Perronet se aproximavam 1/24 ou mais. Isso não foi imprudente, mas confiança nascida da observação sistemática.

Em 1748, apenas um ano após sua nomeação como Diretor da École, Perronet escreveu uma biografia inédita intitulada “Mémoire sur l’épaissur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les diférentes voûtes des Ponts’—Memoir sobre a espessura do Voussoirs na pedra-chave nos diferentes cofres de Bridges. Este documento, preservado na biblioteca da École des Ponts et Chaussées, representa o estudo empírico mais sistemático das proporções de ponte realizadas antes do século XIX (Huerta, 2018).

O método de Perronet era essencialmente empírico. Ele compilou uma tabela de mais de 200 pontes de arco, antigas e contemporâneas, semicirculares e surbased, registrando seus vãos e espessuras de arco. Seu objetivo era extrair dos melhores exemplos existentes – aqueles combinando solidez com economia – uma regra geral que poderia guiar o projeto futuro. "Na questão da construção", escreveu ele, "a especulação sozinha não pode prevalecer sobre a experiência"(“en matière de construction, la spéculation seule ne peut prévaloir sur l’experience”).

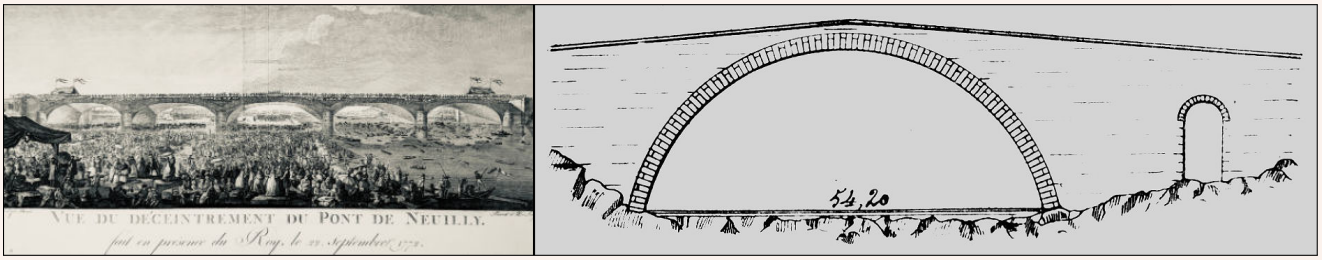
CÓPIA PARA REVISÃO

A partir deste estudo sistemático, Perronet deriva uma fórmula linear simples para arcos semicirculares. A espessura t Deve ser:

$$t = \frac{s}{24} + 1 - \frac{s}{144}$$

Onde s é o espaço entre os pés. O primeiro termo leva um 24o do período; O segundo acrescenta um pé a favor dos arcos menores, que devem suportar a passagem das mesmas cargas que as grandes; a terceira subtrai uma linha (1/12 de polegada) por pé de extensão para acomodar as proporções das pontes mais ousadas existentes. Esta expressão reduz aproximadamente a $t = 1 + s/28.8$, ou em unidades métricas, $t = 0.325 + 0.035s$ metros.

O significado da regra de Perronet não está em sua sofisticação matemática, é meramente um ajuste linear aos dados empíricos, mas em suas consequências. Para pontes grandes, a fórmula de Perronet prescreve espessuras quase metade daquelas dadas por Alberti-Gautier. A grande ponte medieval de Vieille-Brioude, Fig. 6.6b, com uma extensão de 54.6 M e uma espessura real de 2,1 M na pedra-chave, encaixar a regra de Perronet quase exatamente (prevendo: 2.09 M), enquanto Alberti regra de 1/15 teria prescrito 3.64 M. A regra assim codificada e legitimada as proporções esbeltas que os construtores audaciosos alcançaram empiricamente, transformando uma prática excepcional em orientação padrão.



(a) Pont de Neully (b) Pont de la Vieille-Brioude

Figura 6.6: Pontes de Perronet

Perronet 1788 *Descrição dos projetos e da construção dos pontos* (Perronet, 1782) apresentou o trabalho de sua vida em detalhes exaustivos: o projeto e construção dos Ponts de Neuilly, Mantes, Orléans, Nogent-sur-Seine, e Sainte-Maxence, juntamente com as máquinas, cofres, centralização, e seqüências de construção empregadas. O trabalho é um monumento de documentação técnica, preservando o conhecimento que teria desaparecido com a conclusão da construção. Como Perronet observou em seu prefácio, a arte de construir pontes não deixa rastros após toda sua construção: não só a arte de superar as inúmeras dificuldades encontradas na fundação e elevação destas enormes massas já não revelam seus recursos, mas o corte e colocação de pedras, a montagem da madeira centralizada, e o método de descentralização Abóbadas têm exigido, por parte do construtor, atenções e manobras desconhecidas até mesmo para os homens do comércio que não tiveram a oportunidade de seguir grandes obras deste tipo.'

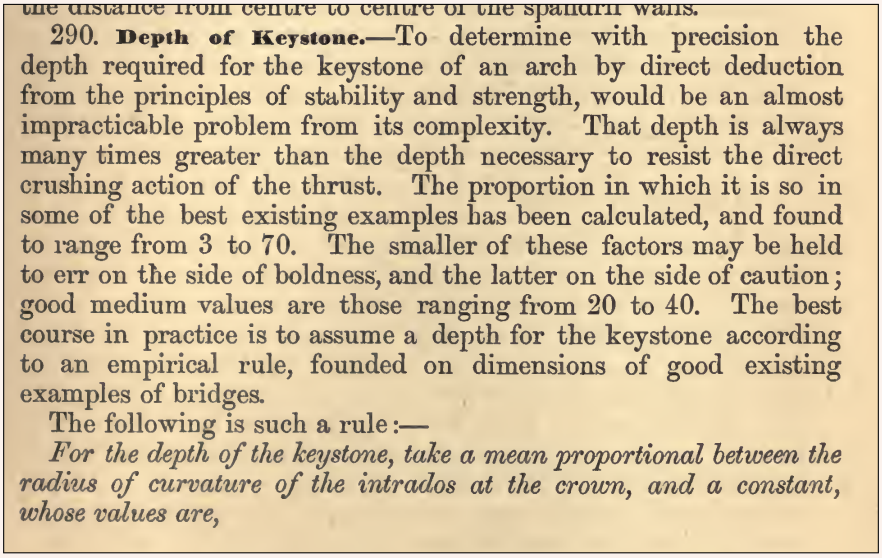
6.4.6.2 A Transição da Proporção para a Experiência

Nem Gautier nem Perronet usaram mecânica analítica no sentido moderno. A teoria do arco, desenvolvida por La Hire, Coulet, e outros, era conhecida deles, mas eles o julgavam inadequado à complexidade do design de ponte. Citando Rankine um século depois, Fig. 6.7:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Para determinar com precisão a profundidade necessária para a pedra chave de um arco por dedução direta dos princípios da estabilidade e força, seria um problema quase impraticável de sua complexidade
>
> Rankine, 1862 A Manual of Civil Engineering

O melhor caminho permaneceu para assumir uma profundidade para a pedra-chave de acordo com uma regra empírica, fundada em dimensões de bons exemplos existentes de pontes



the distance from centre to centre of the spandril walls.

290. **Depth of Keystone.**—To determine with precision the depth required for the keystone of an arch by direct deduction from the principles of stability and strength, would be an almost impracticable problem from its complexity. That depth is always many times greater than the depth necessary to resist the direct crushing action of the thrust. The proportion in which it is so in some of the best existing examples has been calculated, and found to range from 3 to 70. The smaller of these factors may be held to err on the side of boldness, and the latter on the side of caution; good medium values are those ranging from 20 to 40. The best course in practice is to assume a depth for the keystone according to an empirical rule, founded on dimensions of good existing examples of bridges.

The following is such a rule:—

For the depth of the keystone, take a mean proportional between the radius of curvature of the intrados at the crown, and a constant, whose values are,

Figura 6.7: Rankine, 1862 's avaliando as dimensões das pedras-chave

O que Gautier e Perronet conseguiram foi algo mais sutil do que a teoria: a institucionalização do conhecimento empírico sistemático. Através da École des Ponts et Chaussées, que Perronet dirigiu por quase meio século, a prática de engenharia foi transmitida não através do aprendizado da guilda, mas através de instruções organizadas, documentação escrita e métodos padronizados. A transição do mestre construtor para engenheiro civil, de ofício para profissão, foi realizada em sua geração.

Suas regras, além disso, incorporaram uma mudança epistemológica crucial. As regras proporcionais de Alberti e Palladio assumiram que a estabilidade estrutural era uma questão de geometria apenas: um arco que se situasse em uma escala ficaria em qualquer escala. Gautier reconheceu que esta suposição falhou para pontes sob cargas de tráfego, e Perronet sistematizou a correção não proporcional. Esse insight, esse tamanho absoluto importa, que as mesmas proporções produzem margens de segurança diferentes em escalas diferentes, eventualmente encontraria sua expressão teórica na análise dimensional e na teoria moderna da similitude estrutural. Mas seu reconhecimento prático veio primeiro, através da tabulação paciente de 200 pontes por um engenheiro que confiava em experiência sobre especulação.

Juntos, Gautier e Perronet marcam o surgimento da engenharia civil como uma disciplina aprendida baseada em geometria, experiência e educação sistemática, ainda antes das ferramentas analíticas formais que se desenvolveriam no século XIX. Eles estão na dobradiça entre a tradição humanista da proporção, que esta seção rastreou de Vitruvius até Alberti e Palladio, e a tradição científica da mecânica que transformaria a engenharia estrutural no futuro século.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.5 Da Ordem Matemática à Mecânica

Esta seção reúne figuras que introduziram o aumento *Ordem matemática* no estudo dos fenômenos físicos. Geometria e métodos analíticos iniciais foram progressivamente aplicados a problemas de movimento e equilíbrio, remodelando mecânica em um campo matematicamente organizado. O que une essas contribuições é a transformação do raciocínio mecânico em uma empresa matemática estruturada.

6.5.1 Francis Bacon (1561-1626)

Francis Bacon nasceu em 1561 em uma família inglesa proeminente, seu pai era Lorde Guardião do Grande Selo sob Elizabeth I. Ele estudou em Cambridge e Gray's Inn, seguindo uma carreira na lei e política que culminou em sua nomeação como Lorde Chanceler sob James I. Sua carreira política terminou em desgraça quando ele foi condenado por aceitar subornos em 1621, após o que ele se dedicou totalmente à escrita filosófica e científica até sua morte em 1626 - reputado de um frio pego enquanto experimentava com congelamento Frango na neve.

Novum Organum e o método empírico Bacon's *Novum Organum* (Novo Instrumento) (Bacon, 2000), publicado em 1620, estabeleceu a base filosófica para o método empírico E raciocínio indutivo que se tornou fundamental para a ciência moderna e engenharia. O título deliberadamente contrastava com o de Aristóteles *Organon*, sinalizando a intenção de Bacon para substituir lógica escolar com uma nova metodologia para investigar a natureza.

A Doutrina dos Ídolos Central para a crítica de Bacon sobre o conhecimento recebido foi sua doutrina dos "Idols" - vieses sistemáticos que distorcem a compreensão humana. Os Ídolos da tribo surgem da própria natureza humana (nossa tendência de ver padrões onde nenhum existe); Os Ídolos da Caverna do temperamento e educação individuais; Os Ídolos do Mercado pela imprecisão da linguagem; E os Ídolos do Teatro receberam sistemas filosóficos e dogmas. Esta taxonomia de erro cognitivo antecipou preocupações modernas com viés experimental e permanece relevante para o julgamento da engenharia, onde excesso de confiança, viés de confirmação e dependência em precedentes podem levar a falhas estruturais.

A Casa de Salomon e a Sociedade Real No lugar da disputa escolar, Bacon defendeu programas organizados de investigação empírica: observação sistemática de fenômenos, experimentação controlada para isolar causas, registro cuidadoso dos resultados, e generalização indutiva a partir de evidências acumuladas. Seu trabalho utópico *Nova Atlantis* (1627) descreveram a Casa de Salomon, uma instituição patrocinada pelo estado dedicada à investigação sistemática da natureza através de experiências, colaboração e aplicação prática do conhecimento. Esta visão inspirou diretamente os fundadores da Royal Society (1660), que se viam como realizando o programa de Bacon. Os primeiros experimentos da Sociedade sobre força material, pressão de ar e dispositivos mecânicos estabeleceram o quadro institucional dentro do qual Hooke, Boyle e Newton trabalhavam.

Limitações e legado Deve-se notar que o próprio Bacon era cético da matemática como uma ferramenta para investigar a natureza, uma limitação significativa que o distingue de Galileu e Descartes. Seu método indutivo, poderoso para a história natural e química, mostrou-se menos adequado à mecânica, onde a dedução matemática dos princípios se revelou mais frutífera do que pura enumeração de instâncias. No entanto, sua insistência em experimentar sobre a autoridade e sua visão de pesquisa organizada moldou a cultura dentro da qual a física matemática eventualmente floresceu.

Para engenharia estrutural, a contribuição de Bacon é metodológica e não técnica. Sua ênfase na experimentação estruturada tornou-se integrante do método científico que os engenheiros usam para caracterizar o comportamento material, validar modelos analíticos e desenvolver procedimentos de design. O laboratório estrutural moderno é um descendente direto da visão de Bacon sobre a investigação empírica organizada.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.5.2 Nicolaus Copérnico (1473-1543)

Vida

Nicolau Copérnico nasceu em 1473, em Toruń, na Prússia Real (então parte do Reino da Polônia). Órfão aos dez anos, foi criado por seu tio, um bispo que lhe deu uma excelente educação. Copérnico estudou na Universidade de Cracóvia e mais tarde na Itália - em Bolonha (lei e astronomia), Pádua (medicamento) e Ferrara (direito canônico). Ele passou a maior parte de sua vida adulta como cânone na Catedral de Frauenburg, onde seus deveres eclesiásticos deixaram tempo para observações astronômicas e cálculos matemáticos.

Copérnico desenvolveu sua teoria heliocêntrica ao longo de várias décadas, circulando um breve manuscrito (*Comentariolus*) entre amigos por volta de 1514, mas atrasando a publicação completa até o fim de sua vida. De acordo com a lenda, ele recebeu a primeira cópia impressa de sua obra-prima em seu leito de morte em 1543.

De Revolutionibus e seu significado para a mecânica Copérnico *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Sobre as Revoluções das Esferas Celestiais) (Copernicus, 1995), publicado em 1543, propôs que a Terra e os planetas orbitassem o Sol - uma hipótese que contradizia tanto o senso comum quanto a autoridade acumulada da cosmologia antiga e medieval. O significado para mecânica estrutural não está no modelo heliocêntrico em si, mas na mudança epistemológica que exigiu: modelagem matemática Poderia revelar verdades que contradiziam a observação sensorial direta.

Ao permitir que a própria Terra se movesse, Copérnico desafiou implicitamente a distinção Aristotélica entre repouso natural e movimento natural. O movimento não era mais um atributo absoluto ligado ao centro do universo, mas uma propriedade relativa dependente da referência pórtico do observador. Esta ruptura conceitual minou séculos de Aristotélico cinemática e abriu o caminho para reconcepções posteriores de inércia, movimento relativo e referência pórticos que se tornariam centrais para a mecânica clássica.

Copérnico demonstrou que um modelo matematicamente coerente e internamente consistente poderia fornecer uma descrição mais precisa da realidade do que uma baseada na experiência cotidiana. Nesse sentido, a consistência matemática foi elevada de uma ajuda descritiva para um critério da verdade física. Este salto intelectual, confiando na abstração matemática sobre as evidências sensoriais, criou a base para tratar a mecânica como uma ciência universal baseada em leis ao invés de uma arte empírica.

A revolução copérnica também introduziu, implicitamente, o problema de referência pórticos: movimentos observados da Terra não são absolutos, mas relativos a uma plataforma em movimento. Esta realização mais tarde exigiria conceitos como forças inerciais pórticos e aparentes (ficticiosas), ideias que permanecem essenciais na dinâmica e, em última análise, nas análises de engenharia estrutural envolvendo aceleração, vibração e excitação sísmica.

Deve-se notar, no entanto, que Copérnico manteve órbitas circulares e epiciclos, priorizando harmonia matemática sobre a causa física. As consequências mecânicas do heliocentrismo só emergiriam com o abandono de Kepler do movimento circular e a formulação de Newton da dinâmica universal.

A universalidade da lei natural implícita no sistema copernicano, plenamente realizada um século e meio depois por Newton, subjaz a todo o empreendimento de engenharia estrutural: Os mesmos princípios de equilíbrio e movimento aplicam-se se analisamos um arco romano, uma abóbada gótica ou um arranha-céu moderno.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6.6 Da Proto-Estatica à Revolução Científica

As figuras agrupadas aqui marcam a transição de doutrinas herdadas para mecânica fundamentada em *Experimento* e.. *Medição*.. Conceitos como força, inércia e equilíbrio foram reformulados através da observação e síntese matemática. Esta seção capta a mudança decisiva pela qual estática e dinâmica se tornaram ciências fisicamente fundamentadas.

6.6.1 Simon Stevin (1548-1620)

Simon Stevin nasceu em Bruges em 1548, na Holanda espanhola (atual Bélgica). Pouco se sabe com certeza sobre sua educação formal, mas seu início de carreira foi decididamente prático: Ele trabalhou como escriturário, contador e engenheiro antes de entrar na vida acadêmica. Ao contrário de muitos de seus contemporâneos, Stevin não saiu de uma tradição humanista treinada pela universidade. Em vez disso, seu desenvolvimento intelectual foi moldado pelo engajamento direto com comércio, obras de engenharia e solução de problemas aplicada. Este fundo influenciou profundamente sua visão científica, fundamentando sua mecânica em raciocínio físico concreto ao invés de abstração escolar.

No final da década de 1580, Stevin entrou para o serviço do Príncipe Maurice de Nassau, tornando-se engenheiro militar, conselheiro e professor. Esta associação o colocou na interseção da matemática, projeto de fortificação, hidráulica e mecânica, e forneceu tanto a motivação prática quanto o apoio institucional para seu trabalho científico.

Simon Stevin (1548-1620) (Stevin, 1955–1966) fundamentalmente transformado estática da descrição qualitativa à análise matemática rigorosa, estabelecendo princípios que permanecem centrais para a engenharia estrutural hoje. Seu *De Beghinselen der Weeghconst* (Os Princípios da Arte de Pesar), publicado em holandês em 1586, foi o primeiro tratamento matemático abrangente do equilíbrio de forças desde Arquimedes, e em vários aspectos superou o antigo mestre.

Avião inclinado A contribuição mais célebre de Stevin é sua demonstração da lei do plano inclinado através do famoso *Clootcrans* -Experiência de pensamento. Ele imaginou uma cadeia de esferas igualmente espaçadas drapeadas sobre um prisma triangular: Uma vez que a corrente não se move espontaneamente, as forças de cada lado devem ser proporcionais aos comprimentos dos lados, portanto aos senos dos ângulos. Esta prova elegante, que Stevin comemorava com o lema "Wonder en is gheen wonder"(O que parece maravilhoso não é maravilhoso) estabeleceu a resolução de forças ao longo de superfícies inclinadas sem recurso à dinâmica ou virtual deslocamentos.

Composição e equilíbrio das forças A partir desta fundação, Stevin desenvolveu o paralelograma de forças, demonstrando que duas forças agindo em um ponto podem ser combinadas em um único resultado completando o paralelograma. Este princípio, fundamental para toda mecânica vetorial subsequente, permitiu a análise sistemática dos sistemas de força em estruturas. Stevin mostrou como resolver forças em componentes, combinar múltiplas forças em resultados e determinar condições de equilíbrio para corpos sujeitos a várias forças - as operações essenciais de análise estrutural.

Trabalho virtual e Equilíbrio Geral Stevin também formulou princípios equivalentes a trabalho virtual, reconhecendo que o equilíbrio se obtém quando pequeno virtual deslocamentos não produz nenhum trabalho líquido. Embora não expressada na linguagem formal posterior da mecânica analítica, esta visão antecipou um dos métodos mais poderosos em análise estrutural. O princípio de trabalho virtual seria mais tarde generalizado por d'Alembert, Lagrange, e outros, tornando-se indispensável para a análise de sistemas estaticamente indeterminados.

Hidrostática, notação e engenharia Ethos Além da estática, Stevin fez importantes contribuições para a hidrostática, demonstrando que a pressão em um fluido depende apenas da profundidade e não da forma do vaso contendo - o paradoxo hidrostático. Ele também foi um pioneiro no uso sistemático da

CÓPIA PARA REVISÃO

notação decimal e um vigoroso defensor para escrever trabalhos científicos no vernáculo ao invés do latim. Sua decisão de escrever em holandês refletiu uma convicção de que o conhecimento científico deveria ser acessível a engenheiros, artesãos e praticantes, não restritos às elites acadêmicas.

Esta concepção prática e igualitária da ciência, matemática a serviço da engenharia, marca Stevin como uma figura de transição entre a filosofia natural renascentista e a ciência moderna da engenharia. Seu trabalho estabeleceu as bases conceituais para desenvolvimentos posteriores em estática, análise estrutural, e mecânica aplicada.

6.6.2 Galileu Galilei (1564–1642)

Origens, Educação e um Novo Estilo de Inquérito Galileo Galilei nasceu em Pisa, em 1564, com uma família de meios modestos. Seu pai, Vincenzo, era músico e teórico com uma mente cética e inquisitiva... Traços que seu filho herdaria. Educado em temas clássicos como latim, grego e lógica (Fig. 6.9a), Galileu se tornaria uma figura chave na transformação da filosofia natural em ciência moderna. Sua vida coincidiu com um período de profunda agitação intelectual na Europa, como autoridades tradicionais da ciência, religião e política enfrentavam desafios sem precedentes de novas formas de investigação empírica e raciocínio matemático.

Ele é amplamente creditado como um dos primeiros a adotar o que chamamos de *Método científico*formulando hipóteses, conduzindo experimentos e interpretando resultados empíricos. Embora a palavra "ciência"ainda tivesse que tomar seu significado moderno, na época da morte de Galileu em 1642, um novo método de investigação estava tomando forma em toda a Europa. Este método representou uma mudança fundamental da dependência medieval na autoridade textual e dedução lógica para uma nova ênfase em observação direta, descrição matemática e verificação experimental.

Galileu está na encruzilhada da ciência, filosofia, engenharia e autoridade institucional. Sua vida não só marcou o alvorecer da mecânica experimental e da física moderna, mas também incorporou as tensões entre raciocínio científico emergente e crenças doutrinais estabelecidas.

No que se segue, exploramos o arco de sua carreira – a partir de seus anos formativos e suas famosas (embora possivelmente apócrifos) experiências no Torre de Pisa, às revelações celestes que desafiaram a cosmologia aristotélica e provocaram a ira da Igreja Católica. Galileu *Dialogo sopra I devido massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (Diálogo sobre os dois principais sistemas mundiais, Ptolomeu e Copérnico) e *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & Eu me movimenti locali* (Discursos e Demonstrações Matemáticas Relacionadas a Duas Novas Ciências Pertencentes à Mecânica e Movimentos Locais) não são apenas textos científicos; são manifestos intelectuais de uma nova epistemologia, enraizadas na observação e abstração matemática.

A parte final desta seção se concentra em uma idéia de particular importância para os engenheiros estruturais: Escalando. Galileu foi o primeiro a articular o princípio de que a natureza não escala uniformemente, reconhecendo que grandes estruturas devem enfrentar restrições mecânicas fundamentalmente diferentes das pequenas. Essa visão acabaria por ressoar séculos depois nas práticas de design de Gaudi, Isler e Musmeci que, como Galileu, buscaram forma estrutural através da experimentação física e intuição geométrica.

O legado de Galileu vai muito além de suas descobertas. está nos métodos que ele foi pioneiro, na resistência que suportou, e na imaginação estrutural que ajudou a desbloquear.

O *Duas Novas Ciências* e Quantitativo Mecânica estrutural Galileu Galilei (1564–1642) (Galilei, 1638) é justamente considerado o fundador de mecânica estrutural como uma ciência quantitativa. Seu *Discorsi e dimostrazioni matematicalhe, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & Eu me movimenti locali* (Discursos e Demonstrações Matemáticas Relacionadas a Duas Novas Ciências), publicado em Leiden em 1638, enquanto Galileu estava sob prisão domiciliar, estabeleceu o estudo da força material e a mecânica das estruturas em uma base matemática pela primeira vez.

CÓPIA PARA REVISÃO

As "duas novas ciências"do título são a ciência do movimento (cinemática e dinâmica) e a ciência da força dos materiais e estruturas. Este último ocupa os dois primeiros dias do diálogo e aborda problemas de relevância direta para a engenharia: Por que estruturas maiores exigem proporcionalmente mais material do que as menores? Como a resistência de uma viga à quebra depende de suas dimensões? O que determina a força de uma corda, um pilar, um osso?

A análise de Galileu do cantilever viga tornou-se o ponto de partida para todos os trabalhos subsequentes sobre flexura. Ele modelou uma viga projetando-se de uma parede e carregado em sua extremidade livre, reconhecendo que a falha ocorre por rotação sobre a borda inferior da seção incorporada. Sua conclusão – que a carga de ruptura é proporcional à largura da viga e ao quadrado de sua profundidade, e inversamente proporcional ao seu comprimento – era qualitativamente correta, embora sua suposição de tração uniforme tensão através da seção levou a Erro quantitativo. A distribuição correta tensão não seria estabelecida até o trabalho de Pai, Coulomb e Navier nos séculos seguintes.

Talvez a visão mais profunda de Galileu tenha envolvido leis de escala.. Ele demonstrou que similaridade geométrica não implica semelhança mecânica: uma estrutura escalonada uniformemente em todas as dimensões torna-se proporcionalmente mais fraca, porque o volume (peso) aumenta à medida que o cubo da dimensão linear enquanto a área transversal (força de força) aumenta apenas como o quadrado. Esta lei do "cubo quadrado"explica porque os animais grandes têm ossos proporcionalmente mais grossos que os pequenos, por que insetos gigantes são impossíveis, e por que projeto estrutural não podem simplesmente extrapolar de modelos pequenos para edifícios grandes sem contar com a escala Efeitos. Esta realização marcou a quebra definitiva das regras de dimensionamento empírico para análise projeto estrutural.

O método de Galileu combinando análise matemática com observação experimental, testando predições teóricas contra medições físicas, estabeleceu o paradigma para mecânica estrutural. Seu trabalho iniciou a transformação da construção de um ofício guiado pela tradição e experiência para uma ciência aplicada baseada em princípios universais.

Física: Torre de Pisa Inicialmente matriculado na Universidade de Pisa em 1581 para estudar medicina, Galileu logo abandonou esse caminho em favor da matemática e filosofia. Embora tenha saído sem diploma, foi nomeado professor de matemática em Pisa em 1589 com apenas 25 anos. Esta nomeação refletiu o crescente reconhecimento de que o conhecimento matemático tinha valor prático, mesmo muitos estudiosos tradicionais ainda viam a matemática como subordinada à filosofia natural.[6]

De acordo com uma história amplamente contada, mas historicamente incerta, Galileu demonstrou que os objetos de diferentes massas caem ao mesmo ritmo, retirando-os da Torre Inclinada de Pisa. O relato tem origem na biografia de 1654 da Viviani, *Racconto storico della vita di Galileu*, escrito bem após a morte de Galileu. Se o experimento ocorreu ou não como descrito, ele captura a essência do desafio de Galileu para a física aristotélica.

Como Moody, 1951 As opiniões de Galileu sobre o experimento de queda livre, resistência e movimento no vazio foram moldadas não só por Aristóteles, mas também por críticos medievais como Avempace e comentaristas posteriores.

Em seu tratado de 1590 *De motu gravium naturaliter descententium et proiectorum*Galileu apresentou ideias revolucionárias em movimento: (1) Os objetos caem no mesmo ritmo, independentemente da massa; (2) velocidade aumenta linearmente com o tempo; E (3) a distância percorrida é proporcional ao quadrado do tempo decorrido. Essas insights lançaram as bases para a dinâmica e introduziram uma era de mecânica experimental. Mais importante, eles demonstraram que as relações matemáticas poderiam descrever fenômenos físicos com precisão sem precedentes, fornecendo um modelo para a abordagem quantitativa que definiria física moderna.

[6]Nos tempos modernos, esse reconhecimento vai muito além da academia: Não é incomum que matemáticos sejam contratados por empresas de Wall Street, onde sua experiência em análise quantitativa, modelagem estocástica e otimização é aplicada a problemas financeiros complexos.

CÓPIA PARA REVISÃO

As críticas abertas de Galileu à ortodoxia aristotélica e ao estilo de debate afiado lhe conquistaram inimigos. Em 1592, seu contrato não foi renovado.

Astronomia: Diálogos Naquele mesmo ano, Galileu garantiu uma posição mais prestigiada na Universidade de Pádua, onde permaneceu até 1610. Seu tempo foi prolífico: Ele ensinou a embalar salas de aula, vender instrumentos de seu próprio projeto, e ofereceu consultas privadas em matemática e engenharia. Ele também foi autor *Della Scienza Meccanica*, abordando princípios de estática. Este trabalho demonstrou como a análise matemática poderia ser aplicada aos problemas mecânicos práticos, superando o fosso entre conhecimento teórico e aplicação de engenharia.

Em 1609, depois de aprender sobre uma invenção holandesa para visão distante, Galileu construiu um telescópio Ele mesmo. Suas capacidades surpreenderam até ele. Com ela, ele observou a superfície marcada pela lua, as fases de Vênus, miríades de estrelas na Via Láctea, e – o mais impressionante – quatro luas orbitando Júpiter.

Entre suas observações mais intrigantes estava Saturno, que parecia estranhamente modelado através de seu telescópio primitivo. Incapaz de resolver o que sabemos agora ser os anéis de Saturno, Galileu viu o que parecia um planeta triplo ou um planeta com alças. Seguindo o costume acadêmico de estabelecer prioridade mantendo segredo, ele anunciou esta descoberta em 1610 usando o anagrama: *Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras*, que quando decodificado revelou *Altissimum planetam tergeminum observavi* "Eu tenho observado o planeta mais alto para ser triplo '). Esta abordagem criptográfica permitiu que os astrônomos reivindicassem precedência para descobertas enquanto se davam tempo para confirmar suas observações – uma prática que refletia tanto a natureza competitiva da astronomia telescópica precoce quanto a cautela necessária quando desafiando crenças cosmológicas estabelecidas.

Estas descobertas, publicadas em 1610 como *Sidereus Nuncius* ('O Mensageiro Estrelado'), sacudiu as bases da cosmologia aristotélica. Para agradar Cosimo II de Médici, Galileu nomeou as luas como "Estrelas Medicenas", garantindo o patrocínio e a fama internacional. Este nome estratégico ilustra como o avanço científico no início do período moderno dependia não só da descoberta, mas também de redes complexas de patrocínio e influência política.

Em 1611, ele foi introduzido no *Accademia dei Lincei*, uma das primeiras sociedades científicas. Ainda assim, houve controvérsia.

As observações de Galileu apoiaram o heliocentrismo copérnicoA ideia de que a Terra orbita o sol. Mas a Igreja havia recentemente declarado a teoria herética. Em 1616, Copérnico *De Revolutionibus Orbium Coelestium* foi colocado no *Índice Librorum Prohibitorum*[7] e o Cardeal Bellarmine instruiu Galileu a abandonar a ideia.

Por um tempo, Galileu cumpriu. Mas em 1623, Cardeal BarberiniUm admirador tornou-se Papa Urbano VIII. Encorajado, Galileu publicou *Dialogo sopra I devido massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (Diálogo sobre os dois principais sistemas mundiais, Ptolemaic e Copernican),(Galilei, 1632 PDF) Fig. 6.8.

Apresentado como uma discussão entre três interlocutores– Simplicio (Aristotélico), Sagredo (leigo neutro) e Salviati (Copernican)– o Diálogo era tudo menos imparcial. O nome de Simplicio traiu a posição do autor.

Einstein escreveu mais tarde:

[7] O *Índice Librorum Prohibitorum* mantida pela Inquisição Romana não era única na história. Esforços semelhantes para suprimir a literatura discordante ou ideologicamente perigosa foram empreendidos por regimes totalitários, notadamente sob os nazistas, que organizaram queimas de livros e mantiveram listas negras de autores 'un-alemãos', e da União Soviética, que censuraram Textos subversivos e obras proibidas restritas às seções de armazenamento especial*Spetskhran*) em bibliotecas. Mais recentemente, os Estados Unidos viram um ressurgimento das proibições de livros em nível local, muitas vezes visando trabalhos sobre raça, gênero e sexualidade - particularmente no clima político moldado pela era Trump - levantando preocupações renovadas sobre censura e Liberdade intelectual.

CÓPIA PARA REVISÃO

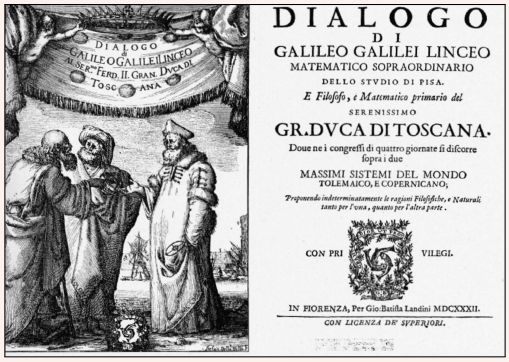


Figura 6.8: Diálogos de Galileu Galilei (Galilei, 1632)

> Um homem é aqui revelado que possui a vontade apaixonada, a inteligência e a coragem de se levantar como representante do pensamento racional...
>
> Einstein, 1954 Ideas and Opinions

Galileu havia exagerado. A Igreja não se divertiu.

Interlúdio: Inquisição Pouco depois da publicação do *Diálogos*, o Inquisição Proibiu sua venda, e Galileu foi mandado a Roma para julgamento. Em junho de 1633, ele foi condenado por "suspeita veemente de heresia", e sua sentença de prisão foi imediatamente comutada para prisão domiciliar perpétua. Ele foi forçado a retratar publicamente suas opiniões sobre o heliocentrismo, embora a lenda tenha dito que, no final de sua abjuração, ele murmurou as palavras desafiadoras *E pur si muove* ('e ainda se move')[8].. O julgamento de Galileu tornou-se um momento decisivo na relação entre ciência e autoridade institucional, estabelecendo-o como mártir da liberdade intelectual ao mesmo tempo que demonstra os custos pessoais de desafiar a ortodoxia estabelecida.[9]

A Inquisição Romana, estabelecida em 1542 pelo Papa Paulo III, foi um sistema de tribunais projetado para erradicar heresia e preservar a ortodoxia católica, especialmente em resposta à Reforma Protestante. Ao contrário da Inquisição Medieval anterior, foi centralizada sob a Congregação do Santo Ofício e exerceu supervisão papal direta. Embora tenha o objetivo de evitar erros doutrinais, também suprimiu a discórdia, censurava publicações e policializava a fronteira entre ciência e religião. O caso de Galileu tornou-se um dos seus episódios mais infames, simbolizando a colisão entre o inquérito livre e a autoridade institucional.

Metodologia: Discursos Em 1634, confinado à sua casa em Arcetri, Galileu começou a trabalhar no que se tornaria seu livro final e talvez mais importante: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & Eu me movimenti locali* (Discursos e Demonstrações Matemáticas Relacionadas

[8]Desde a publicação completa dos documentos do julgamento de Galileu na década de 1870, toda a responsabilidade por sua condenação tem sido tipicamente atribuída à Igreja Católica. No entanto, isso obscurece o papel influente desempenhado por filósofos acadêmicos que persuadiram os teólogos a conflitar as teorias científicas de Galileu com heresia. Em 1979, o Papa João Paulo I iniciou uma investigação formal no julgamento de Galileu, culminando com o relatório de 1992 de uma comissão papal que reconheceu o erro do Vaticano.

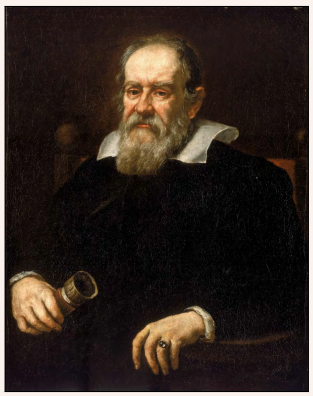
[9]Um paralelo é frequentemente desenhado para o "Exame de Monkey"em 1925 no Tennessee, onde o ensino da evolução nas escolas públicas foi desafiado sob a lei do Estado, destacando tensões semelhantes entre as ideias científicas e as normas sociais ou religiosas prevalecentes. Infelizmente, em 2025 sob Trump, podemos testemunhar novos ressurgimentos em linhas semelhantes, como censurar livros em bibliotecas públicas, negar ciência estabelecida e rejeitar o valor comprovado das vacinas.

CÓPIA PARA REVISÃO

a Duas Novas Ciências Pertencentes à Mecânica e Movimentos Locais). O tratado elaborado sobre a mecânica que ele desenvolveu antes em sua carreira. Este trabalho seria mais influente para o desenvolvimento da ciência de engenharia do que suas descobertas astronômicas, uma vez que lançou as bases matemáticas para entender o comportamento material e a resposta estrutural.

O manuscrito (Galilei, 1638), mostrado em Fig. 6.9b, foi contrabandeado para fora da Itália e impresso em 1638 pela Elzevir em Leyden (Países Baixos), além do alcance da Inquisição.

Galileu morreu quatro anos depois em 1642. Devido à sua condenação, ele foi enterrado em um local obscuro até seu reintermento em 1737.



(a) Astrônomo, físico, engenheiro... Polimath por excelência


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

(b) *Discursos sobre duas novas ciências* (Galilei, 1638)

Figura 6.9: Galileo Galilei

Ironicamente, a Inquisição não fez nada contra o novo livro. De fato, quando 50 cópias chegaram às livrarias em Roma, elas se esgotaram rapidamente.

Ao contrário do *Diálogos*, que abordou questões filosóficas e teológicas, o *Discursos* permaneceu em segurança dentro do domínio da mecânica física, como indicado por seu subtítulo: *Mecânica e Movimentos Locais* (Tabela 6.2). O novo trabalho foi mais técnico em tom e dirigido, em parte, aos engenheiros. Focando em problemas mecânicos práticos ao invés de especulação cosmológica, o *Discursos* Evitou as controvérsias teológicas que fizeram *Diálogos* Tão perigoso.

Dois sujeitos se destacam para engenheiros estruturais: A força de Cantilevered vigas (§7.2.2) e a noção de escala. O último é de importância central.

A noção de escala é fundamental para a engenharia estrutural moderna. Talvez tenha sido introduzido pela primeira vez por Galileu, embora não no sentido algébrico ou dimensional que usamos agora. Ele foi o primeiro a reconhecer que organismos menores ou objetos na natureza não são apenas versões reduzidas de maiores.

Na *Discursos*, Proposição IX (Dia Dois), Galileu – falando através de Salviati – estados:

> Uma vez desenhei a forma de um osso, alongado três vezes [Fig. 6.10], e então engrossaram em tal proporção que poderia funcionar em seu grande animal relativamente como o menor osso serve

CÓPIA PARA REVISÃO

> ao menor animal: Aqui estão as fotos; Você vê como a forma se torna desproporcional no osso aumentado... ele seria visto esmagado pelo seu próprio peso e caído.
>
> Galilei, 1638 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

Tabela 6.2: Galileu tem quatro dias de diálogos e discursos

	Diálogos (Galilei, 1632)	Discursos (Galilei, 1638)
Título	Diálogos sobre os dois sistemas mundiais	Discursos e demonstrações matemáticas relacionadas a duas novas ciências
Legendas	Ptolemaico e Copérnico	Mecânica e Movimentos Locais
Impresso em	Italiano	Latim
Dia		
1	Contra a física aristotélica	Resistência dos corpos à separação
2	Lei da inércia	Causa da coesão
3	Análise de fenômenos astronômicos	Movimento naturalmente acelerado
4	Explicação copérnica do sistema solar	Moção de projéteis



Figura 6.10: Galileu está escalando ossos (Galilei, 1638)

Galileu não tinha ferramentas formais para Análise dimensional, que mais tarde seria introduzido por Vashy, 1892. No entanto, ele entendeu a ideia central: O peso que um osso suporta cresce em volumeL^3), enquanto sua força cresce apenas como área transversal (L^2). Assim, escalar por um fator de 3 requer ossos mais do que 3 vezes mais largos – aproximadamente $3^{3/2} \approx 5$Para apoiar o peso adicional.[10]

Sua visão foi revolucionária porque mostrou que as formas naturais não são arbitrárias, mas representam soluções ideais para restrições mecânicas, um princípio que mais tarde inspiraria gerações de engenheiros e arquitetos.

[10] O raciocínio qualitativo de Galileu antecipa o moderno *efeito de tamanho* conceito formalizado por Bažant, 1984 e revisada derivação por Saouma e Barton, 1994, que quantifica a redução sistemática da força nominal das estruturas conforme seu tamanho aumenta, com aplicações variando de mecânica da fratura para leis de escala em materiais quase frágeis.

CÓPIA PARA REVISÃO

Essa percepção, que a similaridade geométrica leva à dissimilaridade estrutural, foi revolucionária. Para engenheiros e arquitetos, abriu a porta para modelagem física.

6.6.3 René Descartes (1596-1650)

René Descartes é uma figura de transição entre a filosofia clássica e a ciência moderna. Enquanto mais conhecido por seu ditado filosófico *Cogito, ergo sum*[11] Descartes influenciou profundamente a mecânica e matemática através de sua estrutura racionalista e contribuições fundamentais para geometria e física. Sua abordagem sistemática do conhecimento, enfatizando a dúvida metódica e o raciocínio matemático, forneceu a base filosófica para a revolução científica que se seguiu.

La Géométrie Em seu trabalho de 1637 *La Géométrie* (Descartes, 1637b), um apêndice para o seu mais filosófico *Discours de la méthode*Descartes introduziu geometria analítica, ligando álgebra e geometria euclidiana§6.2.3) representando curvas como equações algébricas em um sistema de coordenadas. Esta inovação permitiu o posterior desenvolvimento do cálculo e tornou-se essencial para formalizar a mecânica em termos matemáticos. O sistema de coordenadas cartesiano proveu a linguagem matemática necessária para descrever as relações de movimento e força quantitativamente, tornando possível a mecânica analítica que seria desenvolvida por Newton, Euler e Lagrange.

Descartes também propôs três leis de movimento, enfatizando o movimento inercial na ausência de forças externas - uma clara saída da dinâmica aristotélica. Apesar de suas leis terem sido substituídas por formulações mais precisas de Newton, Descartes estabeleceu as bases para ver a natureza como governada pelos princípios mecânicos, uma visão adotada e refinada por pensadores como Huygens, Leibniz e os Bernoullis.

Descartes também introduziu uma forma precoce de princípio de conservação, argumentando que Deus conserva o mesmo total "quantidade de movimento"' no universo. Embora sua concepção escalar (massa vezes velocidade, sem considerar a direção) fosse fisicamente incorreta - Huygens mostraria mais tarde que as colisões conservam o momento como uma quantidade vetorial-estabelecia a expectativa de que as interações mecânicas obedecessem às leis de conservação, um princípio orientador que se tornaria central para o desenvolvimento da mecânica analítica.

Sua teoria do vórtice de movimento planetário, que explicava a mecânica celestial através da matéria giratória em vez de ação à distância, a física continental dominada até Newton *Principia* proveu uma alternativa matematicamente superior. O eventual triunfo da gravidade newtoniana sobre vórtices cartesianos moldou os debates metodológicos do século XVIII: A mecânica deve buscar explicações mecânicas (forças de contato) ou aceitar descrições matemáticas de forças inexplicáveis? Esta tensão persistiu através de Euler e Lagrange e só foi totalmente resolvida com a teoria do campo no século XIX.

Ao contrário de Galileu, cuja física estava enraizada na observação experimental, Descartes defendeu raciocínios dedutivos dos primeiros princípios. Sua insistência em um universo mecanicista e determinístico Influenciou profundamente o clima intelectual do século XVII. Este quadro filosófico se mostrou essencial para a aceitação de descrições matemáticas de fenômenos naturais, mesmo quando essas descrições conflitaram com o senso comum ou doutrina religiosa. Como tal, Descartes deve ser creditado não só pela inovação matemática, mas também para moldar a fundação conceitual da mecânica clássica.

[11] *Cogito, ergo sum* (Latim para ' 'Eu acho, portanto eu sou') é a declaração fundamental da filosofia de René Descartes, formulado pela primeira vez em francês como *Je pense, donc je suis* em seu trabalho de 1637 *Discours de la méthode*, e mais tarde em latim *Principia Philosophiae* (1644). Expressa a ideia de que o ato de pensar é uma prova inegável da existência.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.6.4 Christiaan Huygens (1623-1695)

Christiaan Huygens nasceu em uma família distinta. Seu pai, Constantijn Huygens, foi chamado de "a figura mais brilhante da história literária holandesa", e o próprio Christiaan veio a ser conhecido como "o príncipe dos filósofos na Holanda, e um dos maiores cientistas do século XVII"Constantijn era um diplomata que estudou filosofia natural e passou tempo na Inglaterra durante o reinado de James Eu. Através das conexões de seu pai, Christiaan ganhou acesso precoce aos melhores círculos científicos de sua época. Este passado privilegiado ilustra como as redes científicas no século XVII muitas vezes dependiam de conexões sociais e status familiar, mesmo que o mérito e a descoberta se tornassem cada vez mais importantes para a reputação científica.

Particularmente tutorado até os 16 anos, Christiaan estudou geometria, construiu modelos mecânicos e aprendeu refinamentos sociais como tocar alaúde. Sua educação matemática foi fortemente influenciada por Descartes, que era um visitante ocasional da casa Huygens e se interessou pelo desenvolvimento intelectual do garoto.

Huygens estudou Direito e Matemática, continuando seus estudos de 1647 a 1649. Através da conexão de seu pai com o polímata francês Marin Mersenne, uma correspondência começou entre Mersenne e os jovens Huygens. Mersenne desafiou-o com vários problemas, incluindo a tarefa de determinar o formato de uma corda suspensa entre dois suportes. Embora Huygens não tenha resolvido isso - *Não, não, não Problema na catenária*Ele conseguiu resolver uma questão relacionada: Como distribuir pesos ao longo da corda de modo que assumiu uma forma parabólica. Isso mostrou não só sua inventividade, mas também seu envolvimento inicial com problemas na interface da geometria e física. Este trabalho inicial demonstrou como problemas matemáticos teóricos muitas vezes surgiram de desafios mecânicos práticos, uma conexão que caracterizaria grande parte da ciência do século XVII.[12]

Escopo e Trajetória: Telescópios, Pêndulos e Luz Christiaan Huygens é uma das mentes científicas mais originais do século XVII, cujo trabalho bridged os reinos da matemática, astronomia, mecânica e óptica. Sua carreira reflete uma contínua linha de investigação que se moveu da observação dos corpos celestes através de instrumentos telescópicos refinados, para a invenção e análise de relógios pêndulos para um tempo preciso, e em última análise para a teoria das ondas Luz. Esta progressão, desde telescópios até pêndulos, e de pên dulos à luz, não só traça a trajetória do seu desenvolvimento intelectual, mas também reflete a transição mais ampla da filosofia natural para precisão matemática e modelagem física. Huygens exemplifica o novo tipo de cientista que surgiu no século XVII: Um que combinou sofisticação teórica com habilidade de engenharia prática, e que se moveu livremente entre matemática pura e mecânica aplicada.[13]

As inovações amplas de Huygens, incluindo a descoberta da maior lua de Saturno, a construção do primeiro relógio pêndulo prático, e a articulação do que é agora chamado Princípio de Huigens em óptica de onda, fazem dele uma figura fundamental no O surgimento da ciência moderna. Seu trabalho reflete um impulso para a elegância geométrica e clareza empírica, enraizada na tradição cartesiana mas evoluindo em direção à mecânica mais dinâmica que mais tarde seria formalizada por Newton. Embora muitas vezes ofuscado pela influência de Newton, Huygens ofereceu uma alternativa e em muitos aspectos visão complementar da lei física – uma em que ondas, curvas e oscilações tomaram o centro do palco.

[12]Um paralelo moderno de engenharia estrutural pode ser encontrado no trabalho de Cross, 1932, cujo método de distribuição momento (1930) forneceu uma solução analítica elegante para o desafio prático de analisar indeterminado pórticos, ou Przemieniecki, 1968, que oferecia um quadro analítico sistemático para estruturas aeroespaciais e civis complexas, ou mesmo Saouma e Perotti, 2004 para modelar reações alcalino-agregadas. Em todos os casos, o design prático precisa estimular o desenvolvimento de novas ferramentas analíticas poderosas.

[13]Esta integração da teoria e prática seria mais tarde levada adiante por figuras como Claude-Louis Navier (ver §6.7.3,por conta de seu projeto mal sucedido da ponte), que combinava rigor matemático com aplicações em engenharia estrutural, bem como outros mecânicos do século XIX.

CÓPIA PARA REVISÃO

De Telescópios a Pêndulos: Horario e *Horologium Oscillatório* O trabalho em astronomia requer precisão Horação (ver §6.6.6), e este desafio levou Huygens a resolver o problema diretamente. Em 1656, patenteou o primeiro relógio de pêndulo, melhorando drasticamente a precisão da medição do tempo. Suas investigações sobre pêndulos estavam intimamente ligadas ao seu trabalho matemático no cicloide, uma curva que ele estudou após um desafio de Pascal. Acreditando que um pêndulo com um arco maior de balanço seria mais útil a bordo de navios, Huygens inventou o Pêndulo cicloidal.. Ele construiu vários relógios de pêndulo para determinar longitude no mar, que foram testados em ensaios marítimos em 1662 e novamente em 1686. Estes esforços culminaram em seu trabalho seminal, *Horologium Oscillatório sive de motu pendulorum*, em que ele descreveu a teoria do movimento pêndulo. Este trabalho representou uma das primeiras aplicações bem sucedidas da matemática avançada para resolver um problema prático premente de importância global.

Academias e Prática Científica Internacional Em 1661, Huygens visitou Londres, onde reuniu informações sobre a recém-criada Royal Society, para a qual foi eleito em 1663. Sua adesão à Sociedade Real e ao *Académie des Sciences* tornou-o um dos primeiros cientistas verdadeiramente internacionais, capaz de facilitar a comunicação e colaboração através das fronteiras nacionais.

Em 1666, ele aceitou um convite de Jean-Baptiste Colbert para ajudar a formar o recém criado *Académie des Sciences* .. Ao chegar em Paris, ele descobriu que a instituição ainda não estava operacional. As primeiras reuniões ocorreram na biblioteca de Colbert, mais tarde mudando-se para *BibliothèQue du Roi*, onde Huygens se estabeleceu. Ele assumiu um papel de liderança e ajudou a organizar a Academia com base em seu conhecimento de como a Sociedade Real funcionava na Inglaterra.

Dinâmica de Corpos Estendidos: Movimento Circular e o Pendulo Composto Christiaan Huygens (1629-1695) (Huygens, 1986) fez contribuições fundamentais para a dinâmica que estabeleceu conceitos essenciais para análise estrutural sob cargas variáveis no tempo. Seu *Horologium Oscillatório* (O Relógio de Pêndulo), publicado em 1673, é uma obra-prima da física matemática do século XVII, combinando invenção prática com profunda análise teórica.

Mais significativamente para a mecânica, Huygens analisou o movimento dos corpos em caminhos circulares, derivando a expressão de força centrífuga: $F = mv^2/r$.. Este resultado, essencial para entender o movimento rotacional, aplica-se diretamente a problemas estruturais envolvendo máquinas rotativas, movimento curvo e carga dinâmica.

Huygens também desenvolveu o conceito do centro de oscilação – o ponto em que a massa de um corpo estendido pode ser concentrada sem alterar seu período de oscilações – antecipando ideias equivalentes do sistema usado na dinâmica estrutural. Seu trabalho no pêndulo composto estabeleceu métodos para analisar a dinâmica de corpos rígidos que se estendem diretamente à análise de vibração de elementos estruturais.

O *Horologium Oscillatório* Também contém a primeira derivação correta da fórmula para aceleração centrípeta e resultados importantes em evolutos e involuções de curvas. A combinação de rigor matemático de Huygens com aplicação prática exemplificava a emergente relação entre ciência e tecnologia que caracterizaria a engenharia estrutural.

De Pêndulo à Luz: Ondas e Princípio de Huygens Em 1678, Huygens introduziu o que mais tarde seria conhecido como *Princípio de Huygens*:. Cada ponto de uma frente luminosa age como uma fonte de ondas esféricas secundárias, e a nova frente de onda é o envelope dessas ondas. Esta construção permitiu que Huygens derivasse as leis de reflexão e refração e explicasse tanto a propagação linear quanto esférica da luz.

Ao longo de sua vida, Huygens experimentou longas crises de melancolia, durante as quais ele produziu pouco, seguido por períodos intensos de criatividade - possivelmente indicativos de tendências bipolares, em termos diagnósticos modernos. Curiosamente, e ao contrário de muitos de seus contemporâneos (Descartes, Leibniz, Newton), Huygens mostrou pouco interesse em investigação metafísica ou filosófica. Seu foco permaneceu firmemente em fenômenos observáveis e leis matemáticas. Este foco empírico se tornaria característico da abordagem de engenharia à mecânica que emergiria no século seguinte.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.6.5 Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal nasceu em Clermont-Ferrand em 1623, numa família cultivada. Seu pai, Étienne Pascal, um magistrado e matemático amador, assumiu a responsabilidade direta por sua educação após a morte precoce da mãe de Pascal. O talento matemático de Pascal se manifestou numa idade extraordinariamente jovem: Na sua adolescência, ele tinha redescoberto independentemente resultados em geometria euclidiana, e aos dezesseis anos escreveu um influente ensaio sobre seções cônicas que atraiu a atenção de Descartes. Esta imersão inicial em matemática, combinada com um ambiente doméstico que incentivou a independência intelectual, moldou Pascal integração ao longo da vida de teoria, experiência e reflexão filosófica.

Experiência, Pressão e Natureza dos Fluidos Seu trabalho inicial lançou pedras fundamentais para a mecânica de fluidos e teoria da pressão. Quando adolescente, ele projetou e construiu uma calculadora mecânica - a Pascaline - um dos primeiros dispositivos destinados a automatizar operações aritméticas. Aos vinte anos, ele realizou experiências inovadoras sobre a pressão atmosférica, estendendo o trabalho de Torricelli e demonstrando que a pressão da atmosfera diminui com a altitude medindo variações barométricas durante uma subida do Puy de Dôme.

Essas experiências desafiaram decisivamente a doutrina aristotélica que negava a existência de um vácuo. Pascal mostrou que é o peso do ar, ao invés de qualquer horror intrínseco do vazio, que sustenta o pilar de mercúrio em um barômetro. Seu trabalho exemplificava uma nova atitude científica: Raciocínio matemático guiado por experimentos cuidadosamente projetados em vez de autoridade ou argumento qualitativo.

Hidrastática e Lei de Pascal Em seu tratado de 1647, *Traité de l'équilibre des licores*Pascal formalizou os princípios da hidrostática e introduziu o que agora é conhecido como lei de Pascal: A pressão aplicada a um fluido confinado é transmitida sem diminuírem em todas as direções. Este resultado forneceu um princípio unificador para a estática de fluidos e tornou-se fundamental para dispositivos hidráulicos, desde prensas e elevadores até aplicações posteriores de engenharia envolvendo transmissão de fluido de força.

A formulação de Pascal tratou a pressão como um campo escalar dentro de um fluido, independente da forma do recipiente – um movimento conceitual que aliou a mecânica dos fluidos com descrições emergentes de fenômenos físicos baseados em campo. Embora expresso sem o aparato posterior de equações diferenciais parciais, seu raciocínio antecipou a abordagem contínua que seria desenvolvida mais plenamente por Euler e Navier.

Posição no desenvolvimento da mecânica Embora o trabalho de Pascal não esteja diretamente ligado a mecânica estrutural no sentido estreito, sua análise da pressão e fluidos teve implicações duradouras para o projeto e análise de estruturas submetidas a forças fluidas, incluindo represas, paredes retentoras, hidráulicas Máquinas, e mais tarde problemas de interação fluido-estrutura. Suas contribuições formavam uma parte fundamental da fundação intelectual sobre a qual os Bernoullis, Euler e Navier construiriam teorias sistemáticas de movimento fluido e pressão.

Talvez mais importante, a integração de Pascal da teoria matemática com a prática experimental forneceu um modelo para como a ciência da engenharia poderia avançar: através da interação sistemática de raciocínio abstrato e verificação empírica. Este legado metodológico, ligando cálculos a experimentos, tornou-se uma característica definidora da mecânica moderna e ciência de engenharia[14].

6.6.6 Robert Hooke (1635-1703)

Robert Hooke nasceu em 1635 na Ilha de Wight, filho de um modesto clérigo anglicano. Fisicamente frágil quando criança e não esperava sobreviver até a idade adulta, ele foi inicialmente treinado em desenho e habilidades mecânicas ao invés de bolsa clássica. Após a morte de seu pai, Hooke se mudou para Londres, onde seus talentos o trouxeram à atenção dos principais intelectuais. Estudou brevemente na Escola

[14]Na linguagem moderna, isto é capturado por Thacker et al., 2004.

CÓPIA PARA REVISÃO

Westminster e mais tarde em Oxford, onde trabalhou como assistente de Robert Boyle. Esta imersão precoce na prática experimental, fabricação de instrumentos e resolução de problemas moldou Hooke a ênfase ao longo da vida em observação, aparelhos e engenho mecânico sobre formalismo matemático sistemático.

Robert Hooke é de fato um dos mais fascinantes e tragicamente pouco apreciados, figuras da ciência do século XVII. Se ele não tivesse sido ofuscado e antagonizado por Newton, provavelmente seria lembrado como um gigante central das ciências mecânicas. Hooke era extraordinariamente versátil. físico, astrônomo, inventor, microscopista, arquiteto e engenheiro. Como o longo tempo *Curador de Experimentos* na Royal Society, e mais tarde seu secretário, ele foi fundamental para definir a cultura experimental da época. Seu papel na Royal Society o colocou no centro da comunicação científica europeia, onde ele não só realizou sua própria pesquisa, mas também facilitou o trabalho de outros e ajudou a estabelecer os protocolos de verificação experimental que se tornaram central para a ciência moderna. Ele fez contribuições pioneiras para elasticidade, astronomia, horologia e microscopia - mas muitos de seus insights permaneceram pouco desenvolvidos ou foram creditados a outros. Esta seção analisa brevemente suas contribuições para a mecânica e engenharia, com especial atenção ao seu envolvimento na cronometragem e na disputa gravitacional com Newton.

O desafio da longitude A navegação marítima dependia fortemente de técnicas celestes. Embora a latitude pudesse ser determinada usando um sextante para medir a altitude do sol ou da lua em tempos conhecidos, determinar longitude no mar era muito mais difícil – exigia um relógio altamente preciso para comparar o tempo local com um meridiano de referência. Nos séculos 17 e 18, tal tempo confiável ainda não era possível. A incapacidade de determinar longitude levou a inúmeros naufrágios e ansiedades políticas. Este problema ilustra como desafios práticos muitas vezes impulsionaram a inovação teórica, pois a necessidade urgente de navegação precisa estimulou avanços tanto na horologia quanto na mecânica celestial.

Este desafio de navegação tornou-se uma questão de importância nacional. Em 1714, o Parlamento Britânico aprovou *Ato de Longitude* para incentivar inovações na determinação da longitude. Ofereceu recompensas monetárias substanciais para qualquer método prático de medir longitude com precisão no mar, juntamente com menores salários anuais para estudiosos trabalhando em mapeamento mundial[15].

Hooke e a mecânica da cronometragem Um dos principais requisitos para determinar a longitude foi a medição precisa do tempo, que colocou a horologia no centro da inovação científica. Inspirado na ideia de Galileu de aplicar as propriedades isocrônicas do pêndulo à cronometragem, Christiaan Huygens implementou com sucesso um relógio de pên dulo usando uma fuga da roda-coroa §6.6.4). Hooke, por sua vez, propôs uma solução radicalmente diferente: Uma roda de balanço controlada pela mola emparelhada com uma nova forma de mecanismo de escape.

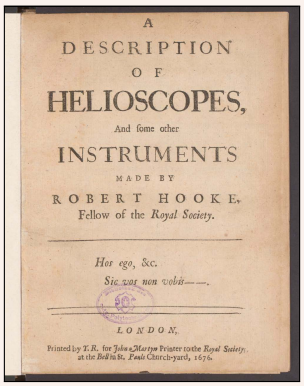
Em 1675, Hooke publicou seu *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*, um tratado focado em instrumentos telescópicos e horologia, particularmente a invenção da fuga âncora e roda de equilíbrio regulada pela mola. Embora típico das primeiras publicações científicas britânicas, o trabalho não tinha figuras explicativas. Uma explicação visual do mecanismo de Hooke foi depois reconstruída por Hall, 1951, como mostrado em Fig. 6.11b.

O projeto de fuga de Hooke foi destinado a oferecer uma solução mais compacta e robusta do que o pêndulo, tornando-o mais adequado para uso em bordo. Embora Huygens finalmente tenha conseguido implementar relógios de pêndulo dignos de julgamento marítimo, as inovações de Hooke na horologia continuaram influentes. Seu trabalho ajudou a lançar as bases para desenvolvimentos futuros em relógios de balance-wheel e cronômetros marinhos.

Mecânica e a rixa Newtoniana A visão científica de Hooke se estendeu muito além da cronometragem. Ele foi um dos primeiros pensadores a formular o movimento de corpos celestes como um problema mecânico. Ele propôs que o movimento planetário resulta da combinação de um movimento inercial linear e uma força atraente direcionada para o centro de órbita. Ele também reconheceu que uma força tão atraente

[15] O esforço não era diferente dos prêmios tecnológicos de hoje, como o Desafio da Robótica DARPA - combinando necessidades militares estratégicas com investigação científica básica.

CÓPIA PARA REVISÃO


A
DESCRIPTION
OF
HELIOSCOPES,
And some other
INSTRUMENTS
MADE BY
ROBERT HOOKE,
Fellow of the Royal Society.
Hor ego, &c.
Sic vos non vobis——.
LONDON,
Printed by T. R. for John Martyn Printer to the Royal Society, at the Bell in St. Pauls Church-yard, 1676.

(a) Hooke's 1675 capa da *Uma descrição de Helioscópios e outros Instrumentos* Hooke, 1676

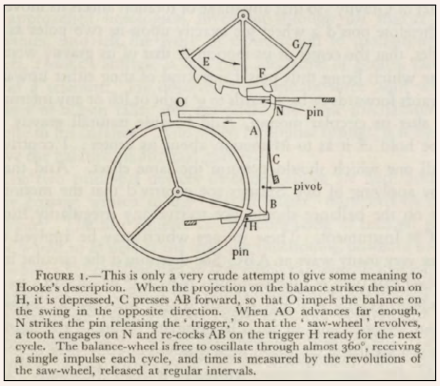


FIGURE 1.—This is only a very crude attempt to give some meaning to Hooke's description. When the projection on the balance strikes the pin on H, it is depressed, C presses AB forward, so that O impels the balance on the swing in the opposite direction. When AO advances far enough, N strikes the pin releasing the 'trigger,' so that the 'saw-wheel' revolves, a tooth engages on N and re-cocks AB on the trigger H ready for the next cycle. The balance-wheel is free to oscillate through almost 360°, receiving a single impulse each cycle, and time is measured by the revolutions of the saw-wheel, released at regular intervals.

(b) Explicação da fuga de Hooke em um relógio Hall, 1951

Figura 6.11: Hooke e o relógio

provavelmente variaria com a distância. No entanto, Hooke foi incapaz de derivar a exata relação matemática ou provar as órbitas elípticas previstas por Kepler. Esta limitação ilustra o papel crucial que a sofisticação matemática desempenhou na transformação de insights físicos em teorias científicas rigorosas.

Quando Newton publicou o primeiro volume de seu *Filosofoæ Naturalis Principia Mathematica* Em 1686, Hooke alegou que tinha previamente fornecido a Newton a ideia essencial de gravitação universal. Newton, por sua vez, negou fortemente esta alegação e apontou que Hooke não tinha fornecido qualquer derivação rigorosa ou prova geométrica. A disputa aumentou rapidamente. Newton, já ressentido das críticas anteriores de Hooke, usou a oportunidade para minimizar as contribuições de Hooke e apagar sua influência do registro. Sua rivalidade tornou-se uma das mais abomináveis da história da ciência. A vingança de Newton em relação a Hooke se estendeu para além do túmulo, (Westfall, 1980).

Apesar da controvérsia em torno de suas disputas prioritárias com Newton, historiadores modernos reconhecem que Hooke captou o insight físico no coração da teoria gravitacional de Newton, mas não tinha as ferramentas matemáticas para formalizá-la. Sua intuição prefigurava a lei inversa-quadrado e mecânica orbital, tornando-o uma figura fundamental - se não acreditado - na evolução da mecânica clássica (Westfall, 1980; Inwood, 2002).

Dois anagramas que mudaram o campo

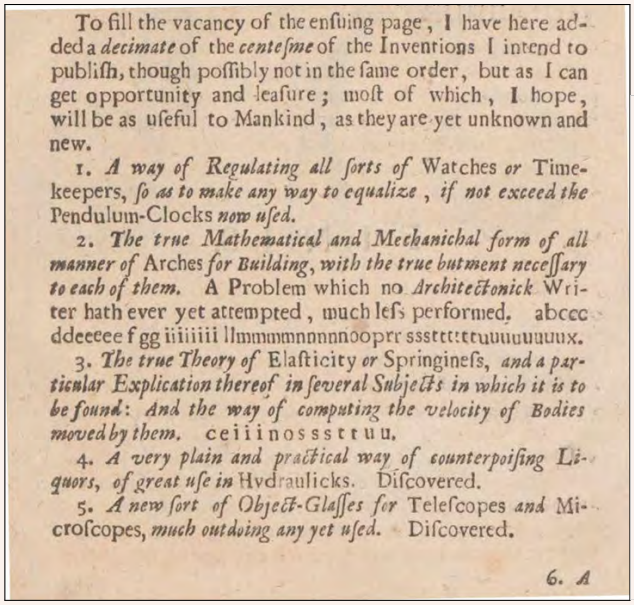
Em arcos O mais relevante para nós engenheiros estruturais é o que Hooke escreveu no apêndice de sua publicação em 1675 (ver Fig. 6.12).

Surpreendentemente, neste livro dedicado a relógios e cronometragem, Hooke incorporou reivindicações por dois (provavelmente três) grandes princípios científicos[16].. Precisando preencher a vaga da página que se seguiu, Hooke adicionou uma lista de dez invenções que pretendia publicar, quatro das quais ele caracteristicamente criptografou como anagramas[17]- um dispositivo que ele favoreceu durante toda sua carreira para garantir prioridade enquanto atrasava a divulgação total. Dos quatro, mais tarde ele revelou

[16]Não diferente de Fermat, que por volta de 1637 escreveu na margem de uma cópia de *Aritmética* Que ele tinha uma prova (que não há $n \neq 2$ De tal forma que.. $a^n + b^n = c^n$), mas que era muito grande para caber na margem.

[17]Um anagrama é uma palavra ou frase formada por reorganizar as letras de outro, normalmente usando todas as letras originais exatamente uma vez. No tempo de Hooke, as cartas u e.. v foram usados de forma

CÓPIA PARA REVISÃO



To fill the vacancy of the enſuing page, I have here added a *decimate* of the *centeſme* of the Inventions I intend to publiſh, though poſſibly not in the ſame order, but as I can get opportunity and leaſure; moſt of which, I hope, will be as uſeful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. *A way of Regulating all ſorts of* Watches *or* Time-keepers, *ſo as to make any way to equalize, if not exceed the* Pendulum-Clocks *now uſed.*

2. *The true Mathematical and Mechanichal form of all manner of* Arches *for Building, with the true butment neceſſary to each of them.* A Problem which no *Architectonick* Writer hath ever yet attempted, much leſs performed. abccc ddeeeee f gg iiiiiiii llmmmmnnnnnoopr r sssttttttuuuuuuuux.

3. *The true Theory of* Elaſticity *or* Springineſs, *and a particular Explication thereof in ſeveral Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them.* ceiiinosssttuu.

4. *A very plain and practical way of counterpoiſing Liquors, of great uſe in* Hydraulicks. Diſcovered.

5. *A new ſort of Object-Glaſſes for* Teleſcopes *and* Microſcopes, *much outdoing any yet uſed.* Diſcovered.

6. *A*

Para preencher o espaço da página seguinte, acrescentei uma décima centésima parte [um milésimo] das invenções que pretendo publicar, embora possivelmente não na mesma ordem, mas conforme surgirem oportunidade e tempo livre; espero que a maioria delas seja tão útil à humanidade quanto ainda é desconhecida e nova.

2. A verdadeira forma matemática e mecânica de todo tipo de arco destinado à construção, com o verdadeiro contraforte necessário a cada um deles; problema que nenhum autor de arquitetura jamais tentou, muito menos resolveu.

abccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnoopprrsssttttttuuuuuuuux

3. A verdadeira teoria da elasticidade ou força elástica, com uma explicação particular dela em diversos objetos nos quais se manifesta; e o modo de calcular a velocidade dos corpos por ela movidos. ceiiinossstuu.

(a) (b)

Figura 6.12: Hooke tem 1675 anagramas *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676)

apenas dois; Os outros permanecem indecifrados até hoje. O primeiro dos anagramas decifrados era relevante para engenheiros estruturais; O segundo, para os mecânicos.

O primeiro anagrama de Hooke diz:

> *Abccddeeeefggiiiiiiimmmmnnnnnnooprrsssttttttuuuuuux.*
>
> Hooke, 1676 A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

Foi só depois da morte de Hooke que seu executor, Richard Waller, revelou a versão não criptografada em (Hooke, 1705):

> *UT Pendet contínuo flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*[a]
>
> [a]Em latim, as letras "u"e "v"são intercambiáveis.
>
> Como pendura um cabo flexível, assim, invertido, suportam os pedaços de um arco.
> Hooke, 1705 The Posthumous Works of Robert Hooke

Em outras palavras, a forma ideal de um arco é precisamente a de uma corda livre pendurada - apenas virada de cabeça para baixo. Hooke entendia que os materiais de construção poderiam resistir à compressão, mas não à tensão, enquanto uma corda se comporta ao contrário. Esta visão do caminho de carga e busca de

intercambiável para denotar a vogal *u* ou a consoante *v*. Enquanto Newton usou um Latim encriptado Frase[18] Hooke usou um anagrama latino. Ambos tentaram esconder suas descobertas, talvez para garantir prioridade enquanto atrasavam a divulgação.

CÓPIA PARA REVISÃO

formas permanece fundamental para a engenharia estrutural. O princípio mais tarde inspiraria gerações de arquitetos e engenheiros, do projeto de Christopher Wren de St. Catedral de Paul para Antoni Gaudí revolucionários arcos catenárias na Sagrada Família.

Na época, no entanto, a visão de Hooke teve pouco impacto imediato. Sua formulação enigmática, falta de elaboração e disseminação limitada significaram que as implicações estruturais foram amplamente ignoradas por seus contemporâneos. Não foi até o século 18 que a relação entre correntes penduradas e arcos estáveis foi estudada com mais rigor - mais notavelmente por *Poleni*, que analisou a linha de impulso de St. A redoma de Peter. Mais tarde, números como *Culmann* e.. *Heyman* Levaria a observação de Hooke para um foco matemático e gráfico mais claro, cimentando seu lugar na teoria das estruturas de alvenaria. Estruturas inspiradas em catenária são discutidas em §15.5.1.

Para detalhes analíticos, consultar §30.3.3

Nas molas O segundo anagrama diz respeito ao que Hooke é mais lembrado na mecânica: a relação linear entre força e deslocamento em corpos elásticos.

Ao contrário do primeiro anagrama - que foi resolvido apenas postumamente - este segundo foi revelado pelo próprio Hooke em seu *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies* (Hooke, 1678 PDF), como mostrado em Fig. 6.14.. Essa publicação resumiu os resultados dos experimentos de Hooke com materiais elásticos e marcou a primeira vez que o comportamento elástico de sólidos foi discutido cientificamente.

Hooke tinha anunciado pela primeira vez a descoberta em 1675[19] em um apêndice para o seu *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676 PDF). Preocupado em garantir prioridade, ele não declarou a lei explicitamente mas encriptou como:

> *Ceiinosssttuu*
>
> Hooke, 1676 PDF A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

A solução veio três anos depois, em 1678[20].. Hooke decifrou como:

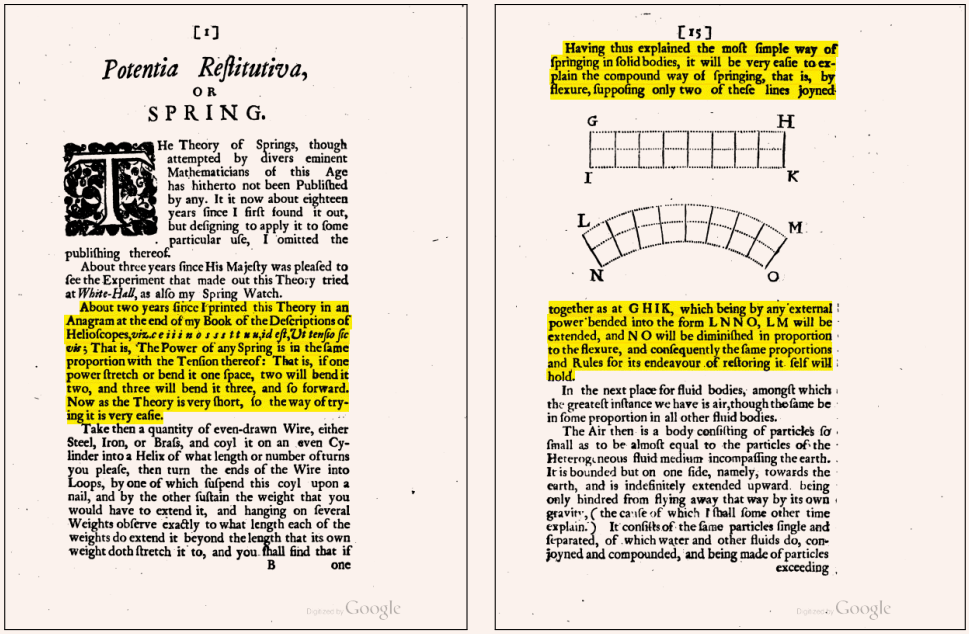
> *UT tensio sic vis*
>
> Como a extensão, assim que a força
> Hooke, 1678 PDF Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

> A Teoria das Primaveras, embora tentada por mergulhadores eminentes Matemáticos desta Era, até agora não foi publicada por nenhum. Já faz 18 anos desde que descobri, mas para aplicá-la a algum uso particular, omiti a prova de publicação.

[19] O *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* Tem uma data de 1676, mas foi distribuída em outubro de 1675.

[20] Ao contrário de pesquisadores modernos correndo para publicar, não era incomum nos séculos XVII e XVIII atrasar a divulgação. Um exemplo mais tarde conhecido é Darwin, que desenvolveu sua teoria da evolução no final de 1830, mas esperou até 1859 para publicar *A Origem das Espécies*Um atraso de uns vinte anos.

CÓPIA PARA REVISÃO



[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It it now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz. ceiiinosssttuu, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

[15]

Having thus explained the moſt ſimple way of ſpringing in ſolid bodies, it will be very eaſie to explain the compound way of ſpringing, that is, by flexure, ſuppoſing only two of theſe lines joyned

G H
I K
L M
N O

together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminiſhed in proportion to the flexure, and conſequently the ſame proportions and Rules for its endeavour of reſtoring it ſelf will hold.

In the next place for fluid bodies, amongſt which the greateſt inſtance we have is air, though the ſame be in ſome proportion in all other fluid bodies.

The Air then is a body conſiſting of particles ſo ſmall as to be almoſt equal to the particles of the Heterogeneous fluid medium incompaſſing the earth. It is bounded but on one ſide, namely, towards the earth, and is indefinitely extended upward being only hindred from flying away that way by its own gravity, (the cauſe of which I ſhall ſome other time explain.) It conſiſts of the ſame particles ſingle and ſeparated, of which water and other fluids do, conjoyned and compounded, and being made of particles

exceeding

Figura 6.13: A ilustração de Hooke da flexão elástica de *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)

> Cerca de três anos desde que Sua Majestade ficou feliz em ver a experiência que fez esta Teoria tentar em White-Hall, como também meu relógio de primavera.
>
> Cerca de dois anos desde que imprimi esta Teoria em um Anagrama no final do meu Livro sobre as Descrições dos Helioscópios, viz. *Ceiinosssttuu* id est *UT tensio sic vis*; Ou seja, o poder de qualquer primavera está na mesma proporção com a sua tensão: Isto é, se uma força esticar ou dobrar um espaço, dois o dobrarão dois, e três o dobrarão três, e assim por diante. Agora, como a Teoria é muito curta, o modo de tentar é muito fácil. ...
>
> Pegue uma corda de 20, ou 30, ou 40 pés de comprimento, e aperte a parte superior dela em um prego, e para a outra extremidade aperte uma balança para receber os pesos: Então, com um par de bússolas tomar a distância do fundo da escala do chão ou piso abaixo, e definir a referida distância; Então coloque pesos na referida escala e meça os vários alongamentos da corda, e coloque-os para baixo. Então compare os vários alongamentos da corda, e você vai descobrir que eles sempre suportarão as mesmas proporções um para o outro que os pesos fazem que os fez.
>
> Hooke, 1678 Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

A declaração canônica de Hooke sobre a lei da primavera, como se deu em *De Potentia Restitutiva*, é mostrado na figura. 6.13.

A icônica ilustração da primavera Hooke estava preocupado principalmente em estabelecer prioridade para uma lei universal da natureza, ao invés de fornecer uma ilustração experimental didática ou canônica. Tendo descoberto a lei quase duas décadas antes, publicou em forma criptografada como um anagrama, e demonstrou publicamente perante a Royal Society, seu objetivo era afirmar generalidade, não pedagogia. Assim, Hooke tratava molas não como um único dispositivo, mas como uma ampla classe de fenômenos restitutivos, englobando bobinas metálicas, fios esticados, madeira dobrada, cordas vibratórias, molas de

CÓPIA PARA REVISÃO

equilíbrio de relógio, arcos, e até mesmo a elasticidade do ar. Suas figuras, portanto, retratam múltiplas realizações físicas e construções geométricas — comprimentos, áreas, agregados de poder, e relações velocidade-espaço — ao invés de um único esquema.

Assim, não é surpresa que o diagrama de massa-primavera agora familiar comumente associado com a lei de Hooke não apareça na primeira edição do *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678). Apesar do esforço considerável, não consegui rastrear a origem da figura icônica mostrada na Fig. 6.14.. A atribuição a Hooke parece derivar de Andrade, 1950, embora mesmo lá é feito apenas obliquamente.

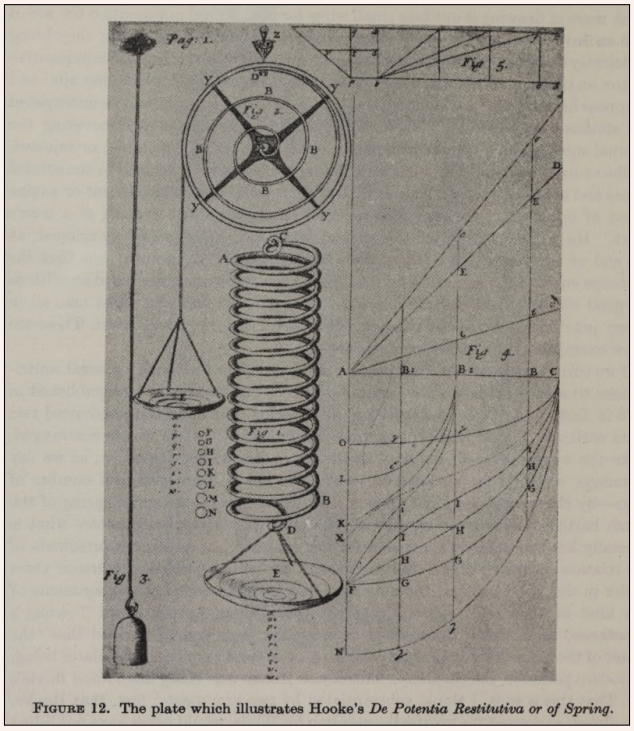

FIGURE 12. The plate which illustrates Hooke's *De Potentia Restitutiva or of Spring.*

Figura 6.14: Mola helicoidal com pesos suspensos. Esta ilustração icônica é comumente atribuída a Hooke, embora sua origem não seja clara; A figura reproduzida aqui é tirada de Andrade, 1950.

Algum contexto é justificado. A reputação de Hooke há muito sofre por ser ofuscada por Newton, tornando-se alvo de críticas casuais e mal consideradas. Andrade, 1950 Buscou corrigir isso, argumentando que de todos os homens de gênio na primavera da ciência, Robert Hooke tem boas alegações para ser considerado o maior. É neste contexto reabilitativo que Andrade apresenta a figura, talvez gravada para edições posteriores sob supervisão de Hooke, embora isso permaneça incerto.

As ilustrações de Hooke As figuras reais de Hooke, como as lâminas dobradas mostradas na figura. 6.13, ilustrar sua abordagem geométrica para a elasticidade. Nesta construção, duas linhas retas GHIK são unidas em suas extremidades e dobradas por um "poder"externo na forma curva LNNO; As extensões LM e NO são proporcionais à flexão. Isso exemplifica o método de Hooke de raciocínio sobre força restitutiva através de relações geométricas observáveis - comprimentos, curvaturas e extensões proporcionais - ao invés de abstração algébrica.

~~$f = kx$~~ A expressão algébrica familiar $F = kx$ é uma formulação posterior. A própria declaração de Hooke do princípio, *UT tensio, sic vis* ('como a extensão, assim a força'), expressava a lei da elasticidade como uma

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

proporcionalidade enraizada na geometria ao invés de na álgebra simbólica. Para Hooke, a elasticidade se manifestava através de relações de extensões, comprimentos e forças em várias realizações físicas, sem recorrer a uma constante abstrata. Este modo geométrico de raciocínio foi levado adiante, e significativamente refinado, por Thomas Young, que deu a primeira generalização sistemática do comportamento elástico em seu 1807 *Palestras sobre Filosofia Natural* (Young, 1807 PDF).

Young não começou com uma equação da forma $F = kx$; Em vez disso, ele definiu a elasticidade perfeita através do raciocínio proporcional - forças iguais produzindo extensões iguais, e forças proporcionais produzindo extensões proporcionais – e só então introduziu uma medida de elasticidade normalizando esta proporcionalidade com respeito às dimensões do corpo. Desta forma, a elasticidade tornou-se uma propriedade material independente de geometria específica, o que é agora conhecido como Módulo de Young. Expressões algébricas surgiram apenas após esta normalização geométrica ser estabelecida, um desenvolvimento cujas raízes conceituais podem ser rastreadas até Euler Já em 1727.[21]

> **318. Definição**.. Uma substância perfeitamente elástica é inicialmente estendida e comprimida em graus iguais por forças iguais, e proporcionalmente por forças proporcionais.
>
> **319. Definição** O módulo de elasticidade de qualquer substância é um pilar da mesma substância, capaz de produzir uma pressão sobre sua base que está para o peso causando um certo grau de compressão, já que o comprimento da substância é a diminuição do seu comprimento.
>
> Young, 1807 PDF A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

Veja §7.3.2.6 para um tratamento contextualizado das contribuições de Young para a flexura.

6.6.7 Isaac Newton (1642-1727)

Isaac Newton nasceu prematuramente no dia de Natal 1642 em Woolsthorpe, Lincolnshire, numa família agrícola de meios modestos. Seu pai tinha morrido antes de seu nascimento, e Newton passou grande parte de sua infância separado de sua mãe após seu novo casamento, uma experiência que parece ter fomentado sua vida interior e auto-confiança. Quando criança, ele mostrou pouco interesse na agricultura mas demonstrou um fascínio precoce com dispositivos mecânicos, construindo relógios de sol, relógios de água e pequenas máquinas. Educado primeiro na escola primária local e mais tarde no Trinity College, Cambridge, Newton inicialmente encontrou a filosofia natural aristotélica mas logo se afastou dela em favor de uma investigação matemática e física independente. Este isolamento inicial, tanto social quanto intelectual, moldou um estilo de trabalho caracterizado por intensa concentração, sigilo e uma preferência pela certeza dedutiva sobre a sociabilidade experimental.

De Galileu à Mecânica Universal Isaac Newton nasceu no dia de Natal em 1642, o mesmo ano da morte de Galileu – uma passagem simbólica da tocha na história da ciência. Criado na zona rural de Lincolnshire, Inglaterra, ele entrou no Trinity College, Cambridge, em 1661 e mais tarde tornou-se Professor Lucasiano da Matemática.[22] Com base nas idéias de Galileu sobre aceleração e visão mecanicista de Descartes, Newton avançou decisivamente além de ambos. Descartes havia proposto que o movimento celestial era governado por vórtices girando de fluido invisível, e que as forças devem agir através do contato. Newton substituiu isso por um conceito revolucionário: atração gravitacional à distância. Formalizando as leis do

[21] Euler deu um passo inicial em direção a uma constante material de elasticidade axial, introduzindo *módulo de extensão* (um fator de proporcionalidade ligando extensão longitudinal à força aplicada, normalizada pelas dimensões do corpo), e o usou para conectar extensão tipo Hooke à flexão dos corpos elásticos. Este resultado foi escrito ca. 1727/28 e só apareceu postumamente em 1862; Ver Euler's *De oscilationibus annulorum elásticorum* (Euler, 1862 PDF) E o relato histórico em Truesdell (Truesdell, 1960 PDF).

[22] Esta prestigiada cadeira seria mais tarde realizada por Stephen Hawking.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

movimento e mostrando que as órbitas planetárias elípticas de Kepler seguiram naturalmente deles, ele corrigiu erros cartesianos e mecânica terrestre e celestial unificada sob uma única estrutura. Esta unificação representou talvez a maior conquista intelectual da revolução científica, demonstrando que as mesmas leis matemáticas governavam tanto maçãs caindo quanto planetas orbitando.[23]

O gênio de Newton foi acompanhado por uma intensa disposição pessoal. Embora muitas vezes recluso e combativo, ele se envolveu em rivalidades intelectuais ferozes – mais famosamente com Robert Hooke sobre a lei inversa-quadrado e com Gottfried Leibniz sobre a invenção do cálculo. Essas disputas, embora acrimônicas, estimularam o desenvolvimento e esclarecimento de princípios científicos fundamentais. Paradoxalmente, a natureza secreta e competitiva de Newton, embora pessoalmente destrutiva, pode ter acelerado o progresso científico forçando ele e seus contemporâneos a desenvolver provas cada vez mais rigorosas e explicações mais claras para estabelecer suas reivindicações. A síntese de Newton sobre matemática, física e astronomia moldaria o curso da ciência por séculos. Ele é amplamente considerado como o cientista mais influente de todos os tempos.

Ele também era uma figura profundamente complexa: não só um matemático e físico, mas também um alquimista e teólogo. Newton passou décadas estudando cronologia bíblica e transmutação alquímica, embora essas buscas permanecessem inéditas em sua vida. Um membro fundador da Sociedade Real, ele eventualmente serviu como seu presidente, e também desempenhou o poderoso papel governamental de Mestre da Casa da Moeda Real. Sua amplitude de atividade, espalhando ciência rigorosa, especulação mística, liderança institucional e serviço nacional, reflete a riqueza e as contradições da paisagem intelectual do século XVII.

O que se segue são discussões focadas sobre as contribuições de Newton para matemática, física e mecânica. Essas subseções enfatizam as bases técnicas que cimentaram seu papel na formação da moderna visão de mundo científico.

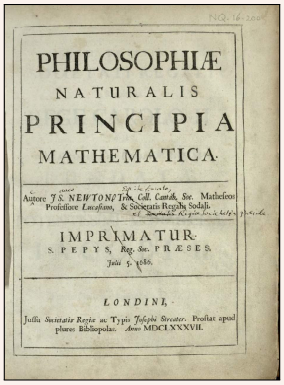
O Matemático Nascido no dia de Natal, no ano da morte de Galileu, Isaac Newton emergiu como uma figura imponente na história da ciência. Um matemático, físico, astrônomo e teólogo, ele serviu como professor de matemática na Universidade de Cambridge e é amplamente considerado o cientista mais influente de todos os tempos.

Até a intervenção de Newton, Aristotélico! Mecânico Prevalecia: Acreditava-se que os objetos buscavam seu estado natural de repouso. Newton alterou fundamentalmente essa visão de mundo ao afirmar que um objeto permanece em movimento uniforme, a menos que atuado por uma força externa – assim colocando inércia, não estase, no núcleo do movimento. Esta reavaliação, ligada ao seu claro tratamento matemático de atrito e resistência, redefiniu o conceito de força.

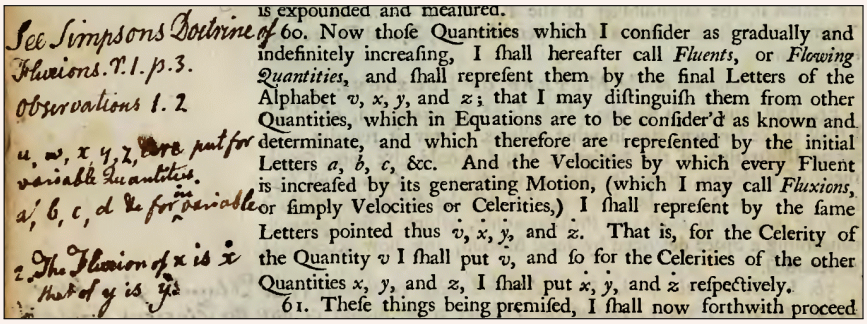
Em astronomia, Kepler já tinha formulado suas três leis empíricas de movimento planetário com base em observações meticulosas por Tycho Brahe .. No entanto, faltava um referencial teórico unificador. O catalisador da descoberta de Newton veio em 1684 quando o astrônomo Edmund Halley o visitou com uma pergunta crucial: Que curva um planeta traçaria se a força gravitacional seguisse uma lei quadrada inversa com distância? Newton respondeu imediatamente "uma elipse", alegando que ele já tinha calculado. Quando não conseguiu localizar seu trabalho original, ele prometeu enviar Halley a derivação, levando à composição de *De motu corporum in gyrum* (Sobre a Moção de Corpos em uma Órbita). Este tratado, que demonstrou matematicamente que órbitas elípticas surgem naturalmente a partir de atração gravitacional quadrada inversa, tão impressionado Halley que ele pediu Newton para expandí-la. O resultado foi o monumental trabalho de Newton em 1687, *Filosofoæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687 PDF), Fig. 6.15a.. Aí, ele sistematicamente derivava as leis do movimento e da gravitação universal, ligando mecânica terrestre e dinâmica celestial com um único conjunto coerente de princípios.

[23] Na física moderna, esta unidade se estende ainda mais: Mecânica quântica, desenvolvida originalmente para descrever fenômenos atômicos e subatómicos, também tem aplicações na física celestial, por exemplo na modelagem de interiores estelares, anãs brancas, estrelas de nêutrons, e processos como tunelamento quântico em astrofísica contextos.

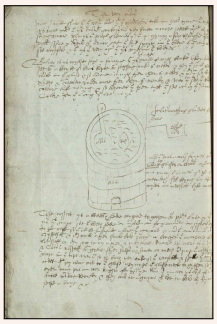
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
IMPRIMATUR
LONDINI,

(a) *Principia*, Cover Page (Newton, 1687)


See Simpsons Doctrine of Fluxions. N.1. p.3.
Observations 1. 2.
u, w, x, y, z, are put for variable Quantities.
a, b, c, d &c for invariable
2. The Fluxion of x is ẋ that of y is ẏ
is expounded and measured.
60. Now those Quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call *Fluents*, or *Flowing Quantities*, and shall represent them by the final Letters of the Alphabet *v*, *x*, *y*, and *z*; that I may distinguish them from other Quantities, which in Equations are to be consider'd as known and determinate, and which therefore are represented by the initial Letters *a*, *b*, *c*, &c. And the Velocities by which every Fluent is increased by its generating Motion, (which I may call *Fluxions*, or simply Velocities or Celerities,) I shall represent by the same Letters pointed thus $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$. That is, for the Celerity of the Quantity *v* I shall put $\dot{v}$, and so for the Celerities of the other Quantities *x*, *y*, and *z*, I shall put $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$ respectively.
61. These things being premised, I shall now forthwith proceed

(b) Fluxion



(c) Alchemy

Figura 6.15: Isaac Newton

As três leis de movimento introduzidas no *Principia* são fundamentais tanto para a mecânica clássica e engenharia e serão analisados em maior detalhe técnico mais tarde neste livro. As contribuições de Newton para a ótica e especialmente para a matemática foram igualmente profundas. No entanto, seu legado matemático foi marcado por uma notória disputa com Leibniz sobre a invenção do cálculo .. A versão de Newton, baseada em infinitessimals e expressa através de sua notação de *Fluxos*[24] apareceu em manuscritos já em 1666, mas não foi tornado público até 1693. Em contraste, Leibniz começou a usar diferenciais em 1675, introduzindo a notação moderna $\int$ e.. dy/dx, que se tornou o padrão. Enquanto os historiadores modernos reconhecem o desenvolvimento independente de cálculo dos dois homens, a investigação da Sociedade Real presidiu e secretamente foi escrita pelo próprio Newton plágio.. Esta disputa amarga teve consequências duradouras para a matemática europeia, como matemáticos britânicos em grande parte se isolaram dos desenvolvimentos continentais por quase um século, em seu próprio prejuízo.

Em sua correspondência com Leibniz, Newton codificou suas descobertas usando anagramas para estabelecer prioridade enquanto mantinha segredo, como

[24]Newton referiu-se a quantidades variáveis como *Fluentes*, e suas taxas instantâneas de mudança como *Fluxos*, denotado por um ponto sobre a variável (por exemplo, $\dot{x}$). Isso é equivalente à derivada moderna $\frac{dx}{dt}$, mas expressa em uma estrutura geométrica temporalmente fundamentada. Newton desenvolveu este método em meados da década de 1660, embora tenha sido publicado postumamente em seu *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1736).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

6Accdae13eff7i3l9n4o4qr4s8t12ux
ou *Dados aequatione quotcunque fluentes quantitates englobente, fluxiones invenire; E vice-versa*

Dada uma equação envolvendo um número de quantidades fluentes, para encontrar os fluxos; e vice-versa

Newton, 1960 *"Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676"*

efetivamente resumindo o teorema fundamental de cálculo em forma enigmática.

Outra disputa feroz surgiu com Robert Hooke, que alegou em 1679 que Newton tinha apropriado o Lei inversa da atração Dele. Apesar de Hooke ter formulado uma visão qualitativa, ele nunca a desenvolveu matematicamente. Newton *Principia* Transformou a ideia em uma lei quantitativa universal de gravitação. A maioria dos historiadores rejeita a acusação de plágio, mas a rivalidade deixou uma marca indelével nos legados de ambos.

Apesar de seu status agora lendário, o *Principia* Quase não foi publicado. Nem Newton nem a Sociedade Real poderiam financiá-lo. Os custos foram cobertos pelo astrônomo Edmond Halley, que não só financiou a impressão, mas também cuidou de sua distribuição. Halley enviou cópias para Newton para uso pessoal e trabalhou através de livreiros para garantir um alcance mais amplo (Cohen, 2013). Este episódio ilustra como até mesmo as obras científicas mais monumentais dependiam de relacionamentos pessoais e iniciativa individual para sua disseminação.

Vale a pena corrigir um equívoco comum sobre a Terceira Lei de Newton. É muitas vezes deturpada como "para cada ação, há uma reação igual e oposta"' implicando um par de forças auto-equilíbrio no mesmo objeto. Na verdade, a lei diz que se o corpo A exerce uma força F_a no corpo B, então corpo B exerce uma força igual e oposta F_b no corpo A.. Como as forças agem em diferentes corpos, elas não implicam equilíbrio (Cohen, 2002 PDF).

O Alquimista Por último, mas não menos importante, Newton também estava profundamente envolvido na alquimia—referido na época como *Quimistry*[25].. Um de seus principais objetivos foi a descoberta do *A pedra do filósofo* , uma substância lendária acreditada para transmutar metais básicos em ouro. Uma perseguição secundária foi a *Elixir da Vida* , disse para conceder longevidade ou imortalidade.

Para o leitor moderno, esses objetivos podem parecer fantásticos, mas no século XVII a alquimia não era considerada franja ou pseudociência. Ao invés disso, era uma busca intelectual séria e legítima, sobrepondo-se ao que mais tarde se tornaria química moderna, metalurgia e medicina. Muitos filósofos naturais, incluindo Boyle, Glauber e até Kepler, participaram. Alquimia combina experiências empíricas com uma filosofia hermética baseada em tradições clássicas e místicas. Sua linguagem simbólica e estruturas alegóricas agora parecem obscuras, mas seus métodos muitas vezes envolviam trabalhos de laboratório com fornos, cadinhos e equipamentos de destilação. Em muitos aspectos, a prática alquímica forneceu técnicas experimentais cruciais e habilidades laboratoriais que mais tarde seriam incorporadas à química moderna e à ciência dos materiais.

O trabalho alquímico de Newton foi sistemático e vasto. Dentro de uma década, ele compilou o *Índice Chemicus*, uma lista alfabética de substâncias, processos e termos alegóricos extraídos de sua leitura de mais de 150 tratados alquímicos (Newton, 1680). Ele realizou experimentos extensos em particular, visando decodificar receitas antigas e descobrir a verdadeira composição da matéria. Essas atividades nunca foram compartilhadas publicamente durante sua vida, em parte porque a alquimia operava na borda da respeitabilidade acadêmica, e em parte devido às suas associações com sigilo e poder.

[25]No século 17, o termo *Quimistry* Referiu-se a um campo amplo que incluía tanto alquimia especulativa quanto química experimental emergente. Ainda não era a ciência empírica que conhecemos hoje, mas sim uma mistura de metalurgia prática, filosofia mística e prática em laboratório. O termo moderno *química* Não se separou completamente de *Alquimia* até o século 18.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Após sua morte em 1727, os manuscritos alquímicos de Newton foram considerados "não dignos de serem impressos"e permaneceram ocultos da visão pública. Foi apenas no século 20 que os estudiosos começaram a examinar sistematicamente esses escritos. Hoje, a imersão de Newton na alquimia não é vista como um desvio da ciência, mas sim como uma reflexão sobre quão permeáveis eram os limites entre ciência, filosofia e misticismo no início do período moderno.

O leitor moderno ainda pode achar difícil conciliar o gênio científico de Newton com sua devoção a um campo que é muitas vezes mal compreendido ou rejeitado. No entanto, é precisamente nesta justaposição que vislumbramos a natureza transicional do pensamento do século XVII – um mundo em que matemática rigorosa, especulação metafísica e quimistia experimental coexistiam todos em uma única mente. As buscas alquímicas de Newton nos lembram que até as mentes científicas mais racionais operam dentro dos contextos culturais e intelectuais do seu tempo, e que os limites do que consideramos 'científico' mudaram dramaticamente ao longo dos séculos.

O Elastician? Newton tinha apenas um papel menor no desenvolvimento histórico da teoria da elasticidade (Todhunter e Pearson, 1893 PDF). No entanto, em seu trabalho posterior *Óptimas* (Newton, 1717), ele posou uma série de especulativas ' ' 'Queries', 'entre os quais Consulta XXXI–em ''Atrações Eletivas'– oferece uma sugestão de que poderes atraentes entre pequenas partículas podem estar subjacentes a fenômenos macroscópicos.

> Porque é bem conhecido que os corpos agem uns sobre os outros pelas atrações da gravidade, magnetismo e eletricidade; e estes casos mostram o tenor e o curso da natureza, e torná-lo não improvável, mas que pode haver poderes mais atraentes do que estes. Pois a natureza é muito consonante e conforme consigo mesma.
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[Consulta 31]

Nesta consulta, Newton imagina toda a matéria como composta de partículas duras, amontoadas soltamente juntas, mal tocadas em alguns pontos. Ele então oferece uma intuição precoce de coesão e comportamento elástico:

> Agora, as pequenas partículas de matéria podem coexistir pelas atrações mais fortes, e compor partículas maiores de virtudes mais fracas; e muitos deles podem co-e compor partículas maiores, cuja virtude ainda é mais fraca; e assim por diante para a sucessão de mergulhadores, até que a progressão termine nas maiores partículas, das quais dependem as operações em química, e as cores dos corpos naturais; e que, aderindo, compõem corpos de uma magnitude sensata. Se o corpo é compacto, e se curva ou cede para dentro da pressão sem qualquer deslizamento de suas partes, ele é duro e Elastick, retornando à sua figura com uma força subindo das atrações mútuas de suas peças.
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[Consulta 31]

Esta passagem antecipa tentativas posteriores de ligar resposta elástica macroscópica a forças internas atraentes. Além desta visão especulativa, a única outra contribuição conhecida de Newton para a elasticidade está em uma breve passagem no *Principia* lidando com a colisão de corpos elásticos. Sua impressão sobre o desenvolvimento formal da teoria da elasticidade permaneceu limitada.

A rigorosa formulação matemática da elasticidade emergiria nos séculos seguintes. A lei empírica de Hooke relacionando força a deslocamento em molas – publicada pela primeira vez em 1678 – foi um passo crítico inicial (ver §6.12). Mais tarde, Augustin-Louis Cauchy introduziu tensão e formalizou o equilíbrio na mídia contínua; Claude-Louis Navier estendeu essas ideias em uma teoria linear sistemática usada até hoje.

CÓPIA PARA REVISÃO

O *Principia* e o quadro Newtoniano para Análise estrutural Isaac Newton (1642-1727) (Newton, 1687) alcançaram a grande síntese que unificava mecânica terrestre e celestial, estabelecendo o quadro conceitual dentro do qual todos os subsequentes análise estrutural operavam. Seu *Filosofoæ Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicado pela primeira vez em 1687, formulou as leis de movimento e gravitação universal que governam fenômenos desde a queda das maçãs até planetas orbitais – e, crucialmente para engenharia, de desvio vigas para Estruturas em colapso.

As três leis de movimento de Newton Fornecer a base para mecânica estrutural. A primeira lei (inertia) estabelece que os corpos permanecem em repouso ou em movimento uniforme, a menos que agidos por forças – a base conceitual para o equilíbrio estático. A segunda lei quantifica a relação entre força, massa e aceleração, permitindo análise dinâmica de estruturas sujeitas a cargas variáveis no tempo. A terceira lei garante que as forças de interação ocorram em pares iguais e opostos em diferentes corpos, um princípio essencial para a análise do corpo livre e a determinação das reações.

Para estruturas estáticas, as leis de Newton reduzem-se a condições de equilíbrio: A soma vetorial de todas as forças deve desaparecer$\sum \mathbf{F} = 0$E a soma de todos os momentos sobre qualquer ponto deve desaparecer$\sum \mathbf{M} = 0$). Aplicadas sistematicamente, estas relações permitem a análise de treliças, vigas, pórticos, arcos e outras formas estruturais. Cada diagrama de corpo livre desenhado por um engenheiro estrutural é uma aplicação da mecânica Newtoniana.

O *Principia* Também introduziu o aparato matemático – o cálculo de fluxos, apresentado em forma geométrica – que posteriormente permitiu a análise de sistemas contínuos. Equações diferenciais que governam a deflexão, estabilidade e dinâmica estrutural são expressões da mecânica newtoniana aplicadas em corpos deformáveis. Além de resultados particulares, Newton estabeleceu o ideal de uma mecânica racional: Um sistema matemático auto-consistente capaz de prever o comportamento físico dos primeiros princípios. Esta convicção está subjacente ao empreendimento de engenharia estrutural: que se pode analisar uma estrutura antes de construí-la e prever a resposta sob cargas que nunca experimentou porque as mesmas leis governam todos os fenômenos mecânicos.

6.6.8 Gottfried Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 em Leipzig, filho de um professor de filosofia moral. Órfão quando jovem, ele ganhou acesso irrestrito à extensa biblioteca de seu pai, onde se educou lendo amplamente em literatura clássica, filosofia, lógica, matemática e direito. Esta educação em grande parte autodidáctica fomentou uma extraordinária amplitude intelectual e uma crença vitalícia na unidade do conhecimento. Formado formalmente em direito e não matemática, Leibniz desenvolveu suas ideias científicas independentemente da instrução acadêmica, abordando a matemática como uma linguagem simbólica capaz de expressar verdades gerais. Esta imersão precoce na lógica e metafísica moldou sua ênfase posterior em sistemas formais, notação e métodos universais - traços que distinguiram sua abordagem à mecânica e cálculo do estilo mais geométrico e fisicamente fundamentado de Newton.

Polimath do século XVII Gottfried Wilhelm Leibniz foi um polímata alemão, filósofo e matemático cuja gama intelectual rivalizava com qualquer figura do século XVII. Um brilhante pensador e escritor prolífico, ele fez contribuições fundamentais para lógica, metafísica, lei, história, e - no contexto deste capítulo - matemática e mecânica. Ao contrário de muitos de seus contemporâneos que se especializaram em domínios particulares, Leibniz sustentou que todo o conhecimento estava interligado e que os avanços em um campo poderiam iluminar problemas em outros, uma perspectiva que se mostrou notavelmente frutífera para a desenvolvimento da física matemática.

Anos de formação e influência parisiense No início da primavera de 1672, um enviado alemão chegou em Paris: Foi Leibniz, então em meados dos anos 20, realizando uma missão diplomática para seu patrono, Barão von Boineburg. Ostensivamente política, a jornada foi intelectualmente transformadora. Em Paris, Leibniz encontrou uma vibrante comunidade de cientistas e filósofos. Mais notavelmente, ele

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

conheceu Christiaan Huygens, que se tornou seu mentor em matemática. Sob a orientação de Huygens, Leibniz passou da especulação filosófica para uma análise matemática rigorosa. Esta orientação ilustra como as redes informais europeias serviram como mecanismos cruciais para transmitir e avançar o conhecimento matemático.

Invenção do Cálculo Durante seus anos de Paris (1672-1676), Leibniz desenvolveu as bases do que se tornou o cálculo diferencial e integral. Em 1675, ele introduziu a notação $\int$ para a integração e d para diferenciais, símbolos que permanecem em uso universal hoje. Ao contrário de Newton, que usou a notação de *Fluxos* e publicado relutantemente, Leibniz foi rápido em publicar e comunicar suas descobertas, uma diferença na prática científica que ajudou a desencadear a disputa de prioridade amarga (ver §6.6.7). A vontade de Leibniz em compartilhar descobertas contrastava abertamente com o segredo de Newton e, finalmente, beneficiava o desenvolvimento mais amplo da análise matemática.

A Disputa Prioritária do Cálculo A visão de Leibniz sobre infinitesimais como quantidades idealizadas estava em contraste com os argumentos geométricos de Newton. Enquanto estudiosos modernos concordam que ambos os homens desenvolveram cálculo independentemente, os partidários de Newton - mais notavelmente a Royal Society, em um relatório secretamente escrito por Newton– acusaram Leibniz de plágio. O caso polarizou comunidades científicas em toda a Europa e obscureceu relações entre matemáticos britânicos e continentais por décadas. Esta disputa teve profundas consequências para o desenvolvimento da matemática, à medida que os matemáticos britânicos ficaram cada vez mais isolados dos avanços continentais, impedindo seu próprio progresso.[26]

Metafísica e Mecanismo Além do cálculo, Leibniz avançou uma visão mecânica baseada em princípios metafísicos. Seu conceito de *Mônadas*Unidades indivisíveis, semelhantes à alma... foi uma tentativa de conciliar mecanismo com um relato filosófico de unidade e harmonia pré-estabelecida. Embora abstrato, este trabalho inspirou pensadores posteriores em ciência e filosofia, incluindo Kant e, indiretamente, aspectos da teoria do campo.

Calculadora Mecânica e Interesses de Engenharia Leibniz colaborou com engenheiros e buscou inovações práticas. Ele projetou o *"Degrau"Reckoner*, uma calculadora mecânica capaz de realizar multiplicação e divisão, construindo na máquina de adição anterior de Blaise Pascal. Embora mecanicamente imperfeita, foi uma tentativa ousada de automatizar a computação e é muitas vezes considerada como precursora de máquinas de computação posteriores. Este trabalho demonstra a convicção de Leibniz de que a matemática teórica deveria ter aplicações práticas, uma perspectiva que se tornaria central para a engenharia científica.[27]

Lógica simbólica e linguagem universal Sua visão de uma linguagem científica universal, o *Característica universal*, combinado com um cálculo lógico formal, o *cálculo ratiocinator*, prefigurados desenvolvimentos na lógica simbólica e ciência da computação séculos depois. Esses esforços visavam reduzir o raciocínio ao cálculo e foram influentes em pensadores posteriores, como Boole, Frege, e Turing.

Vis Viva e Debates de Conservação Em mecânica, Leibniz introduziu o conceito de *Vis viva* ("força viva"), proporcional a mv^2, como uma quantidade conservada em processos mecânicos. Isso o colocou em desacordo com a escola Newtoniana, que enfatizou o momento (mv) como a quantidade conservada primária. O debate persistiria bem no século XIX e, em última análise, contribuiria para a compreensão

[26] Na engenharia geotécnica, uma disputa igualmente feroz surgiu entre Karl Terzaghi e Paul Fillunger na década de 1930 sobre os fundamentos matemáticos da mecânica do solo e a validade do princípio efetivo tensão, (Goodman, 1999). A controvérsia tornou-se profundamente pessoal e politicamente acusada, terminando tragicamente com a morte de Fillunger, e suas repercussões moldaram a trajetória e aceitação da pesquisa mecânica do solo por décadas.

[27] Um exemplo moderno desta filosofia pode ser visto no trabalho de BenoîMandelbrot, cujo desenvolvimento da geometria fractal – originalmente uma construção teórica – encontrou amplas aplicações em engenharia, desde modelagem de superfícies ásperas e mídia porosa até melhoria do processamento de sinal e projeto de antena.

CÓPIA PARA REVISÃO

moderna da conservação de energia. Este reconhecimento precoce da conservação de energia seria crucial para a termodinâmica posterior e a análise de engenharia de máquinas e estruturas.

Equações Diferenciais e Modelos Físicos Leibniz também estabeleceu bases para usar equações diferenciais para modelar sistemas dinâmicos. Sua clareza notacional e formalismo algébrico tornaram possível expressar mudanças e leis físicas sistematicamente, ferramentas que se tornaram centrais na mecânica desenvolvida por Euler, Lagrange e outras.

Visão institucional e diplomacia científica Leibniz desempenhou um papel significativo na fundação de academias científicas, incluindo o que se tornaria a Academia de Berlim. Ele defendeu a unificação dos esforços científicos através das fronteiras nacionais, antecipando redes modernas de colaboração internacional. Sua perspectiva institucional reflete uma compreensão de que o progresso científico exigia não só gênio individual, mas também estruturas organizadas para colaboração sustentada.[28]

Referências cruzadas e influência Cruzadas referências ao longo deste volume são interações de Leibniz com Newton (§6.6.7), sua orientação sob Huygens (§6.6.4), e seus ecos em figuras posteriores, como Cauchy e Euler, que ajudaram a superar rigor matemático com intuição física.

Cálculo, Pensamento Variacional e Legado de Engenharia Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (Leibniz, 1969) cálculo co-desenvolvido independentemente de Newton, introduzindo a notação e o quadro conceitual que se tornou padrão na matemática continental e, eventualmente, em análises de engenharia em todo o mundo. Suas contribuições para a mecânica, embora menos celebradas do que Newton, estabeleceram princípios variacionais que se tornou ferramentas essenciais em análise estrutural.

A notação de cálculo de Leibniz..dx, dy, $\int$, d/dxProvou ser muito mais prático para computação do que os fluxos de Newton e é universalmente usado hoje. Seu desenvolvimento sistemático de regras para diferenciação e integração, apresentado em artigos da década de 1680, tornou o cálculo acessível a matemáticos e engenheiros por toda a Europa. Os Bernoullis, Euler, Lagrange, e gerações subsequentes de mecânicos todos trabalharam dentro da estrutura Leibnizian.

Além da notação, Leibniz contribuiu com conceitos fundamentais para a mecânica. Seu princípio de *Vis viva*O que chamamos de energia cinética... iniciou a abordagem baseada em energia à mecânica que complementa a formulação Newtoniana baseada em força. Reconhecimento de que certas quantidades (energia, trabalho) são conservadas em processos mecânicos fornecidos ferramentas poderosas para analisar sistemas onde a análise de força direta é difícil.

Leibniz também se engajou com as bases da mecânica, debatendo com Newton e seus seguidores sobre a natureza do espaço, tempo e força. Seu princípio de razão suficiente... que nada ocorre sem uma razão... antecipava princípios variacionais: dentre todos os movimentos possíveis, a natureza seleciona um que extremiza alguma quantidade. Desenvolvida matematicamente por Euler, Lagrange e Hamilton, esta linha de pensamento levou ao princípio da menor ação e as formulações variacionais que sustentam o moderno mecânica estrutural.

Para engenharia estrutural, o legado de Leibniz inclui o aparelho de cálculo, os conceitos de energia subjacentes trabalho virtual e deformação-métodos de energia, e a estrutura variacional que permite elemento finito análise. A tradição Leibniziana – analítica, sistemática, computacionalmente orientada – forma o desenvolvimento de mecânica estrutural no continente e, através do École Polytechnique e seus sucessores, ajudaram a estabelecer a abordagem matemática da engenharia que prevalece hoje.

[28] Um paralelo moderno pode ser visto em iniciativas de pesquisa em larga escala patrocinadas pelos EUA. Fundação Nacional de Ciências (NSF), como o George E. Brown Jr. Rede para Simulação Engenharia sísmica (NEES) e seu sucessor, a Infraestrutura de Pesquisa em Engenharia de Riscos Naturais (NHERI). Esses programas unem equipes multiinstitucionais entre universidades, laboratórios nacionais e indústria para enfrentar desafios complexos de engenharia, conhecimento em conjunto, recursos e instalações experimentais de maneiras que nenhum investigador poderia alcançar Sozinho.

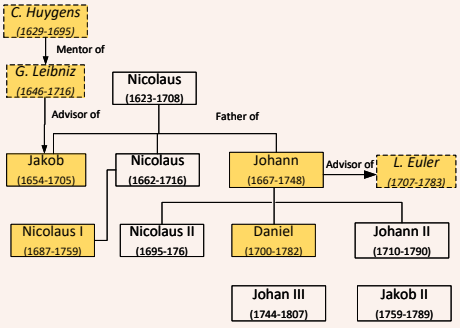
CÓPIA PARA REVISÃO

6.6.9 Família Bernoulli (1654-1782)

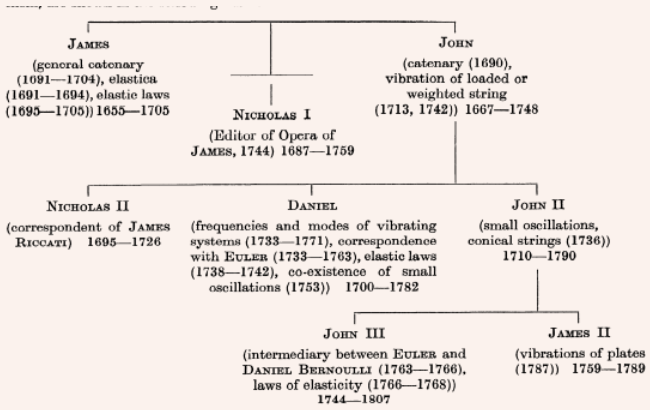
Jakob Bernoulli, um comerciante de especiarias, escapou dos Países Baixos para evitar a perseguição religiosa pelos espanhóis e mudou-se para Basel, Suíça, em 1620... um grande centro comercial da Europa central na época... onde ele recebeu cidadania em 1622. Originalmente, Jakob e seu filho Niklaus encontraram sucesso como comerciantes e prosperaram nos negócios. A trajetória da família de comerciantes a matemáticos reflete as mudanças sociais mais amplas do século XVII, quando prosperidade comercial criou oportunidades para busca intelectual e quando habilidades matemáticas se tornaram cada vez mais valiosas para navegação, engenharia e filosofia natural.

Foram os descendentes de Niklaus (1623-1708) que se tornaram matemáticos notáveis por mais de um século. O mais notável entre eles eram seus filhos Jakob e Johann, e seu neto Daniel.

É digno de nota que Leibniz ensinou Johann, que por sua vez ensinou Euler, formando uma notável linhagem intelectual que moldou a matemática moderna. Esta cadeia de mentoria demonstra como o conhecimento matemático foi transmitido através de relações pessoais e instrução direta, criando tradições contínuas de pensamento matemático que abrangeram gerações e fronteiras nacionais. Se houvesse realeza



(a)



(b) (Truesdell, 1960), Nota: Jakob e Johann Bernoulli também são referidos como James e John em fontes inglesas

Figura 6.16: A árvore genealógica de Bernoulli (membros destacados são discutidos neste livro) e seu círculo intelectual

na mecânica, os Bernoullis certamente reinariam[29].. No entanto, sua dinastia não foi sem drama – a intensa e bem documentada rivalidade entre Jakob e Johann é emblemática da feroz competitividade que às vezes acompanha grande gênio (Peiffer, 2006). Suas disputas familiares eram tão bem documentadas que eles

[29]Na era moderna, o "realismo" seria o Curies, uma dinastia científica com cinco prêmios Nobel no total entre os membros da família. Marie e Pierre Curie compartilharam o Prêmio de Física em 1903 por seu trabalho sobre radioatividade. Marie Curie ganhou um segundo Prêmio Nobel de Química em 1911 por descobrir rádio e polônio, tornando-a a única pessoa a ganhar Prêmios Nobel em duas ciências diferentes. A filha deles, Irène Joliot-Curie, e o genro Frédéric Joliot compartilharam o Prêmio de Química em 1935 por sintetizar novos elementos radioativos. As contribuições da família moldaram fundamentalmente nosso entendimento de física atômica e química, estabelecendo um legado multigeracional de excelência científica comparável ao domínio dos Bernoullis em matemática e mecânica nos dias 17 e 18 séculos.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

fornecem uma janela única para a dinâmica pessoal que levou à competição científica no início do período moderno.[30]

Observe que o Bernoulli-Euler Online (BEOL) plataforma serve como um centro de pesquisa dedicado, com foco em explorar matemática moderna e ciência. Seu objetivo principal é integrar perfeitamente as extensas obras e correspondências dos proeminentes membros da dinastia Bernoulli e do influente matemático Leonhard Euler.

6.6.9.1 Jakob Bernoulli (1654-1705)

Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático da dinastia Bernouli. Ele era o filho mais velho do bem sucedido comerciante Niklaus Bernoulli (1623-1708) e sua esposa, Margaretha Sch oNauer. Por insistência de seu pai, Jakob completou sua *Magister artium* em latim, grego e filosofia em 1671, seguido de estudos de teologia. Apesar de seu crescente fascínio pela matemática, ele foi obrigado a continuar na teologia e ganhou um *Licenciatura* Licenciatura em 1676. Mais tarde ele se juntou ao Ministério Sagrado em Basileia, mas continuou perseguindo a ciência como um autodidato, ensinando-se matemática e astronomia através de textos elementares. Esta abordagem autodidáctica era comum entre os matemáticos primitivos, uma vez que a educação matemática formal ainda estava subdesenvolvida na maioria das universidades europeias.

Viagens e Crescimento Intelectual Em agosto de 1676, Jakob começou a viajar em busca do enriquecimento intelectual. Genebra foi sua primeira parada, onde ele passou 20 meses ensinando uma talentosa garota cega, Elizabeth Waldkirch (1660-1728), para quem inventou um sistema de escrita[31].. Ele participou de debates teológicos e, em 1677, começou a registrar reflexões científicas em seu caderno *Meditação* e entradas de viagem *Reisb uChlein*.

De Genebra, Bernoulli mudou-se para a França – primeiro para Limousin como tutor do Marquês de Lostanges, depois para Bordeaux, e mais tarde para cidades como Nantes, Saumur e Paris. Durante este período, tornou-se fluente em francês e profundamente influenciado pela filosofia natural de Descartes. Em 1680, ele retornou brevemente a Basileia antes de realizar uma turnê de 18 meses pela Holanda e Inglaterra. Em Leiden, ele assistiu e deu aulas de matemática. Esta extensa viagem ilustra como o conhecimento matemático se espalhou através de redes pessoais e como os jovens estudiosos ganharam experiência buscando centros estabelecidos de aprendizagem.

Encontros Científicos em Londres Em agosto de 1682, Bernoulli chegou a Londres, onde conheceu John Flamsteed (1646-1719) e Robert Hooke (1635-1703). Em 12 de agosto de 1682, ele participou de uma reunião da Royal Society que contou com um experimento sobre a força dos materiais. Essa exposição a abordagens experimentais de problemas mecânicos influenciaria profundamente seu trabalho teórico sobre elasticidade.

Voltar para Basileia e carreira acadêmica Ao retornar à Suíça em outubro de 1683, Bernoulli se estabeleceu em Basileia e casou com Judith Stupanus em 1684. Eles tiveram dois filhos. Até então, seu interesse havia mudado para a física experimental, provavelmente influenciada pelas obras de Robert Boyle (1627–1691). De 1683 a 1686, ele deu palestras sobre física experimental, compiladas em seu *Collegium Experimentale Sive Curiosum*, que foi uma coleção de experimentos físicos e mecânicos e reflexões, muitas vezes apresentadas em um estilo discursivo ou pedagógico.

[30] Nos tempos modernos, rivalidades científicas têm continuado a moldar trajetórias de pesquisa, como a intensa competição entre James Watson e o grupo de Rosalind Franklin na elucidação da estrutura do DNA, ou a disputa de longa data entre Stephen Hawking e Leonard Susskind sobre o paradoxo da informação do buraco negro. Como o conflito de Bernoullis, essas rivalidades combinaram profundas apostas teóricas com fortes dimensões pessoais.

[31] Só se pode respeitar os pais de Elizabeth por confiar uma figura tão talentosa para educar sua filha cega no século 17.

CÓPIA PARA REVISÃO

Contribuições Matemáticas e Professoria Depois de 1685, Bernoulli cada vez mais publicado em matemática, estudando a segunda edição latina do Descartes, 1637b e o cálculo infinitesimal de Leibniz. Sua pesquisa abrangeu geometria algébrica e diferencial, séries, probabilidade, e cálculo variacional e integral. Em 1687, foi nomeado professor de matemática na Universidade de Basileia, cargo que ocupou até sua morte. Sua filosofia de conhecimento enfatizava a construção da compreensão gradualmente a partir de fundações estabelecidas. Essa abordagem sistemática da construção do conhecimento tornou-se característica da escola matemática de Basileia e influenciou gerações de estudantes.

Colaboração e Rivalidade com Johann Jakob ensinou matemática para seu irmão mais novo Johann (1667-1748), que mais tarde se tornou seu rival. Eles inicialmente colaboraram quando Jakob estava ensinando física e Johann estudava medicina. Juntos eles dominaram o cálculo diferencial de Leibniz em questão de dias e logo o aplicaram a problemas complexos, incluindo análise de curvas. O trabalho deles ajudou a desenvolver o método, o suficiente para Leibniz agradecer publicamente em 1696. Este rápido domínio do cálculo demonstra tanto o talento matemático dos irmãos quanto o poder da aprendizagem colaborativa, mesmo que sua relação azeda mais tarde devido às pressões competitivas.

Fundações da Mecânica Racional A pesquisa de Jakob Bernoulli levou a quatro problemas fundacionais, que Truesdell, 1968 identifica-se como marcos na história da mecânica racional:

1. Derivação da lei de dobrar em uma faixa elástica da lei da extensão das fibras longitudinais.
2. Determinação da posição da fibra neutra em uma curva viga e a natureza das forças agindo em uma seção transversal.
3. Unificação da teoria das linhas flexíveis, governada pelo equilíbrio de força, com a das bandas elásticas, regida pelo equilíbrio do momento.
4. Determinação da resposta elástica dos materiais.

Estas conquistas lançaram as bases para a teoria clássica da elasticidade, especialmente o desenvolvimento do *elásticoa*, um modelo matemático de grandes deformações em barras finas e vigas. O trabalho pioneiro de Jakob sobre a forma das curvas elásticas antecipava contribuições posteriores de Euler, cujo tratamento analítico formalizaria o assunto.

O *e*lásticoa e Análise estrutural Bernoulli posou o *e*lásticoa problema em 1691 e ofereceu sua solução em sucessivas obras culminando em sua publicação de 1694 *Curvatura Laminae Elasticae*, (Bernoulli, Jakob, 1694). Ele mostrou que a curva assumida por uma fina faixa elástica dobrada sob uma força final poderia ser caracterizada por um equação diferencial. Usando o raciocínio geométrico e o conceito de curvatura, ele derivava relações entre o momento fletor e a posição ao longo da faixa, e demonstrava que o raio de curvatura variava com a distância perpendicular à carga aplicada. Sua análise, embora expressa em uma mistura de formas infinitesimais, marcou um grande passo na formulação da estabilidade elástica e deformação não linear. Este trabalho representa o primeiro tratamento matemático sistemático do comportamento de grande deflexão em elementos estruturais, antecipando análises modernas não lineares por séculos.

Recepção e Legado Christiaan Huygens e Gottfried Leibniz reconheceram a dificuldade do *e*lásticoa Problema. Huygens ainda duvidava que poderia ser resolvido de forma elegante, embora ele mais tarde reconheceu a realização de Bernoulli. Estas críticas ilustram o quão avançado foi a visão de Bernoulli, apesar de algumas limitações – como assumir que a fibra neutra permaneceu indeformada, que a moderna teoria da elasticidade tem corrigido desde então.

O *e*lásticoa O desafio ressurgiria no próximo século. Daniel Bernoulli propôs a abordagem variacional de Leonhard Euler, que finalmente generalizou o problema usando o cálculo das variações. Isso estabeleceu o cenário para a moderna teoria da estabilidade elástica e análise estrutural, interligando o trabalho dos Bernoullis, Leibniz, Huygens e Euler.

Conclusão: Empirismo e Mecânica Racional Além de seu rigor matemático, os métodos de Jakob refletiam uma postura filosófica que colocava a observação empírica e o raciocínio incremental no

CÓPIA PARA REVISÃO

centro da investigação científica. Por.. Truesdell, 1968, a criação de mecânica racional deve tanto a Jakob Bernoulli quanto a Newton. Seu legado persiste não só através de suas próprias obras, mas também por sua influência em seu irmão Johann, seu estudante Euler, e as gerações de mecânicos que construíram sobre seus fundamentos conceituais. A integração de Jakob da observação empírica com a análise matemática estabeleceu uma metodologia que se tornaria central na engenharia científica[32].

6.6.9.2 Johann Bernoulli (1667-1748)

Johann Bernoulli, irmão mais novo de Jakob e pai de Daniel, desempenhou um papel fundamental na disseminação e desenvolvimento do cálculo Leibniziano. Depois de ser introduzido à matemática por Jakob, Johann tornou-se um promotor ardente de cálculo diferencial e um de seus primeiros usuários sistemáticos em física e mecânica. Ele solucionou o brachistochrone Problema[33] e contribuiu para o estudo da geodésica, catenárias, e do movimento dos fluidos. Sua solução para o problema da braquistocrona - encontrando a curva de descida mais rápida - foi uma das primeiras aplicações principais dos métodos variacionais e ajudou a estabelecer o cálculo das variações como uma nova disciplina matemática.

Johann ocupou a cadeira de matemática em Groningen e mais tarde sucedeu seu irmão na Universidade de Basileia. Sua influência mais duradoura veio de seus alunos, o mais famoso Leonhard Euler, que ele foi mentor desde jovem. Sua publicação de 1713, *Opera Omnia*, contém muitas de suas contribuições mais significativas para cálculo e mecânica. A abordagem pedagógica de Johann enfatizou a aplicação prática das técnicas matemáticas aos problemas físicos, uma abordagem que influenciaria profundamente Euler e gerações subsequentes de físicos matemáticos, (Reddy, 2017).

6.6.9.3 Interlúdio *Opera Omnia*

Apesar de terem nascido na mesma dinastia matemática, Jakob e Johann Bernoulli seguiram caminhos sobrepostos, mas distintos, na formação do cálculo, da mecânica e da probabilidade. Suas obras reunidas, publicadas separadamente como *Opera Omnia*, fornecem um registro definitivo de seu legado intelectual. A tabela abaixo apresenta uma síntese lado a lado de suas principais contribuições, extraídas dos volumes de sua *Opera Omnia*, Tabela 6.3.

6.6.9.4 Daniel Bernoulli (1700-1782)

Daniel Bernoulli nasceu em Groningen, na Holanda, o segundo filho de Johann Bernouli e sobrinho de Jakob Bernouilli. Ele foi criado em uma família mergulhada em matemática e investigação científica, embora sua relação com seu pai era muitas vezes tensa pela rivalidade. Johann inicialmente guiou a educação de Daniel em matemática, mas à medida que os talentos de Daniel amadureceram e ganharam reconhecimento, o orgulho de Johann transformou-se em ressentimento. A tensão culminou em Johann submeter anonimamente trabalho concorrente para contestações Daniel tinha entrado e até mesmo tentando reivindicar crédito pelas

[32] A engenharia estrutural moderna exemplifica esta integração através de sistemas estruturais de monitoramento da saúde, tais como aqueles implantados em grandes pontes como a Ponte Golden Gate, onde os dados dos sensores em tempo real (deformação, deslocamento, vibração) é continuamente integrado com modelos elemento finito e equações de resposta dinâmicas para validar previsões teóricas e otimizar o agendamento de manutenção.

[33] O problema da braquistocrona: dada a dois pontos A e B, qual é a curva ao longo da qual uma partícula vai deslizar de A para B no menor tempo sob gravidade sozinho? A solução — um cicloide — foi encontrada por Newton, Jakob Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital e o próprio Johann Bernouli, marcando um momento fundamental no desenvolvimento do cálculo das variações. Na navegação aérea, a braquistocrona é a trajetória de voo ideal na esfera ou elipsoide.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.3: Principais contribuições de Jakob e Johann Bernoulli, conforme refletidas em sua *Opera Omnia*

Autor	Contribuição / Trabalho	Ano (publicado)	Campo
Jakob Bernoulli	*Ars Conjectandi* -Tratado fundamental na teoria da probabilidade, introduzindo a lei dos grandes números	1713 (posto)	Probabilidade
	Estudos iniciais sobre o problema isoperimétrico	1700s	Cálculo das Variações
	Desenvolvimento de expansões exponenciais/logarítmicas	1680s–1690s	Análise
	Correspondência com Leibniz em cálculo diferencial	1690s	Cálculo / Fundações
Johann Bernoulli	*Meditações de Curva Isochrona Paracentrica* - Resolve o problema da braquistocrona	1697	Cálculo das Variações
	Trabalho em dinâmica de fluidos e equações diferenciais (por exemplo, crescimento exponencial, espirais logarítmicas)	1690s–1710s	Mecânica / DEs
	Desafios matemáticos públicos e polêmica (por exemplo, vs Newton, Taylor)	1700s	Cultura Matemática
	Correspondência com Newton, Leibniz, Euler e seus filhos	1690s–1740s	Matemática Geral

descobertas de Daniel. Esta dinâmica familiar ilustra como as pressões competitivas da cultura científica do século XVIII poderiam distorcer até mesmo as relações mais íntimas.

Apesar desses desafios, Daniel buscou uma educação ampla, obtendo doutorados em medicina e matemática. Ele ocupou posições acadêmicas em fisiologia e matemática e permaneceu intelectualmente ativo em campos tão diversos quanto mecânica de fluidos, probabilidade, elasticidade e economia. Ele eventualmente se estabeleceu em Basileia, onde ele ensinou e publicou muito de seu trabalho influente.

A disposição de Daniel era notavelmente modesta e colaborativa, e ele mantinha amizades e intercâmbios acadêmicos com cientistas líderes do seu tempo, incluindo Euler, com quem compartilhava uma longa e produtiva correspondência. Seu espírito colaborativo contrastava fortemente com a competitividade de seu pai e ajudou a estabelecer a cultura científica mais aberta que caracterizaria o Iluminismo.

Reforma Variacional do *e*lásticoa Problema Daniel Bernoulli, filho de Johann e sobrinho de Jakob, estendeu o legado da família na mecânica introduzindo uma abordagem variacional para o *elásticoa* Problema. Enquanto Jakob Bernoulli tinha formulado e resolvido o retangular *e*lásticoa Caso na década de 1690 usando raciocínio geométrico e início Diferencial! CálculoDaniel propôs uma ampla generalização.

Para detalhes analíticos, consultar Capítulo 9

Em uma carta de 1742, Daniel sugeriu a Leonhard Euler que o formato de uma haste elástica deveria

CÓPIA PARA REVISÃO

ser determinado minimizando sua energia potencial elástica. Especificamente, ele expressou a energia total como uma integral envolvendo o quadrado da curvatura ao longo do comprimento da viga. Esta visão reformulou o *e*lásticoa como um problema variacional, abrindo assim a porta para o uso do cálculo de variações na elasticidade. Esta abordagem baseada em energia eventualmente se tornaria a base para métodos computacionais modernos em mecânica estrutural, incluindo análise de elemento finito.

Euler, agindo sob esta sugestão, resolveu o general *e*lásticoa Problema logo depois. Seu tratamento deu origem ao que conhecemos como teoria de Euler, Bernoulli e tornou-se fundamental no estudo da estabilidade elástica e mecânica estrutural.

A contribuição de Daniel é, assim, fundamental: ao reinterpretar um desafio geométrico como princípio de minimização da energia, ele conectou a mecânica clássica com métodos analíticos modernos. Sua visão uniu o trabalho pioneiro de Jakob com a emergente estrutura variacional que dominaria a mecânica do século XVIII e XIX.

Hidrodinâmica e Mecânica Fluídica Além de suas contribuições para a elasticidade, Daniel Bernoulli é conhecido por seu trabalho em mecânica de fluidos. Seu tratado de 1738 *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, (Bernoulli, Daniel, 1738) lançou as bases para o estudo do comportamento fluido e introduziu o que é agora conhecido como princípio de Bernoulli – a idéia de que um aumento na velocidade de um fluido ocorre simultaneamente com uma diminuição da pressão ou energia potencial.

Este princípio, derivado da conservação de energia, se aplica a uma ampla gama de sistemas mecânicos, incluindo fluxo de ar sobre as asas, fluxo de tubos e circulação sanguínea. A equação de Bernoulli para fluxo inviscível e incompressível é agora fundamental na mecânica dos fluidos e serve como uma relação chave tanto em hidrodinâmica teórica quanto aplicada. Este trabalho demonstrou como os mesmos princípios matemáticos poderiam ser aplicados em diferentes ramos da mecânica, reforçando a unidade da ciência física[34].

Oscilações mecânicas e estabilidade Daniel Bernoulli também contribuiu para a teoria das vibrações mecânicas. Ele estudou oscilações transversais de barras elásticas e a sobreposição de modos harmônicos – um precursor da análise de Fourier. Sua análise de sistemas vibratórios foi uma das primeiras a combinar raciocínio mecânico com ferramentas analíticas, presagindo desenvolvimentos posteriores em acústica, dinâmica estrutural e teoria das ondas.

Suas investigações sobre a estabilidade das estruturas e a interação entre carga, deformação e resposta dinâmica demonstraram ainda mais a amplitude de sua visão mecânica. Essas investigações enriqueceram a compreensão de como os sistemas respondem a diferentes forças, uma preocupação central do termoíndi-cemecânica racional.. Seu trabalho em sistemas vibratórios estabeleceu a base matemática para entender ressonância e amplificação dinâmica, fenômenos cruciais para o moderno projeto estrutural[35].

Legado em mecânica O legado de Daniel Bernoulli na mecânica deriva de sua capacidade de *sintetizar geometria, física e princípios variacionais em uma estrutura coerente.*. Ele conectou o legado de Jakob e os princípios

[34] Por exemplo, o equação diferencial para simples movimento harmônico, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, governa diversos fenômenos físicos: a oscilação de uma massa em uma mola, o movimento de um pêndulo para pequenos ângulos, a vibração das moléculas em cristais, o comportamento dos circuitos elétricos de CL, e propagação da onda acústica. Esta unidade matemática permite insights de um domínio (como molas mecânicas) para iluminar fenômenos em campos completamente diferentes (como engenharia elétrica ou física molecular), exemplificando como as relações matemáticas fundamentais transcendem Os limites entre diferentes ramos da física.

[35] Exemplos modernos incluem o colapso da Ponte Tacoma Narrows 1940, onde oscilações induzidas pelo vento na ponte frequência natural causaram falha de ressonância catastrófica, e design contemporâneo de arranha-céus, onde os engenheiros devem prestar contas para a indução do vento vibrações e usar amortecedores de massa sintonizados (como o amortecedor de 660 toneladas em Taipei 101) para neutralizar efeitos de ressonância que poderiam tornar edifícios inabitáveis ou estruturalmente inseguros.

CÓPIA PARA REVISÃO

energéticos da mecânica moderna, informou o trabalho fundamental de Euler, e lançou bases essenciais tanto no fluido quanto na análise estrutural. Seu nome permanece ligado aos principais modelos teóricos através da mecânica, de vigas a fluidos para vibrações, confirmando seu lugar central na evolução da disciplina. Talvez o mais importante, a abordagem de Daniel demonstrou como a análise matemática poderia unificar fenômenos físicos aparentemente díspares sob princípios comuns, uma perspectiva que se tornaria central para a física e engenharia do século XIX[36].

6.6.10 Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707, em Basileia, então um próspero centro de aprendizagem dentro da Confederação Suíça. Seu pai, Paul Euler, era um pastor protestante que tinha estudado matemática sob Jakob Bernoulli, enquanto sua mãe, Marguerite Brucker, veio de uma família de estudiosos. Embora inicialmente destinado a uma carreira clerical, Euler demonstrou uma aptidão excepcional para matemática desde cedo. Seu pai lhe deu instrução elementar, mas logo ficou evidente que suas habilidades excederam muito o que poderia ser acomodado dentro de uma educação teológica tradicional.

De Basileia aos Tribunais da Europa: Primeiros anos e St. Petersburg Leonhard Euler[37], provavelmente o mais versátil, certamente o matemático mais prolífico de todos os tempos, filho de um pastor, nasceu perto de Basileia. Em 1720, ele entrou na Universidade de Basileia, que era na época um importante centro de pesquisa matemática devido às palestras influentes de Johann Bernoulli, que atraiu jovens matemáticos de toda a Europa. O extraordinário talento de Euler foi rapidamente reconhecido, e Bernoulli, além de suas palestras formais, forneceu-lhe semanalmente instrução privada. Aos dezesseis anos, Euler recebeu seu mestrado, e antes de completar vinte anos, ele já tinha participado de uma competição internacional patrocinada pela Academia Francesa de Ciências e publicado seu primeiro artigo científico. Este reconhecimento precoce ilustra como a emergente rede europeia de academias e competições estava começando a identificar e nutrir talento matemático através das fronteiras nacionais[38].

O *Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana* (Academia Russa de Ciências) foi fundada em 1725 em St. Petersburg Por ordem de Pedro o Grande como parte de sua campanha mais ampla para ocidentalizar a Rússia. Os filhos de Johann Bernoulli, Nicolaus e Daniel, estavam entre os primeiros professores recrutados[39]E depois de se mudarem para a Rússia, eles ajudaram Euler a garantir uma posição como membro associado. No verão de 1727, Euler mudou-se para St. Petersburg e, desengordurados por deveres de ensino ou administrativo[40], foi capaz de se concentrar exclusivamente em pesquisa matemática. Ele entrou para o Departamento de Física da Academia em 1730. Quando Daniel Bernoulli retornou a Basileia em 1733 após a morte de seu irmão

[36]Muitos fenômenos físicos seguem a forma matemática universal $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u) + s$, onde u é a variável do estado, ρ representa a capacidade de armazenamento, D é uma propriedade de transporte, e s é um termo de origem. Esta equação governa a transferência de calor (distribuição da temperatura), difusão de massa (campos de concentração), eletrostática (potencial elétrico), fluxo de água subterrânea (cabeça hidráulica), deformação elástica (deslocamento), campos eletromagnéticos (possivel magnético) e propagação de ondas acústicas (pressão). A unidade matemática permite que os mesmos métodos numéricos e técnicas de solução sejam aplicados nesses diversos domínios físicos.

[37]No início de 1783, 530 estudos dele haviam sido publicados; em 1826 o número tinha aumentado para 771. Em 1844, um bisneto descobriu mais material em manuscrito.

[38]Este padrão continua hoje, como exemplificado pelos vencedores da Medalha Nobel e Fields rotineiramente tornando-se membros estrangeiros de várias academias nacionais (como a Royal Society, Academia Nacional de Ciências, ou *Académie des Sciences*), e através de colaborações científicas internacionais modernas, bolsas visitando, e programas globais de recrutamento de talentos que transcendem as fronteiras nacionais para reconhecer e nutrir a excelência científica.

[39]Assim como os professores modernos são recrutados de todo o mundo por universidades prestigiosas.

[40]Muito parecido com os estudiosos do Instituto de Estudos Avançados em Princeton.

CÓPIA PARA REVISÃO

em 1726, Euler o sucedeu como chefe do Departamento de Matemática. Essa mobilidade entre academias europeias criou um mercado internacional de talentos matemáticos que acelerou a disseminação de ideias e métodos por todo o continente.[41]

A trajetória inicial de Euler exemplifica o surgimento da moderna academia científica: um sistema que reconheceu o talento cedo, cultivou-o através das fronteiras nacionais, e criou espaços institucionais para o trabalho intelectual focado. Ele iria se tornar indiscutivelmente o matemático mais prolífico da história, com contribuições abrangendo mecânica, cálculo, teoria dos gráficos, teoria de números e astronomia.

Mude-se para Berlim e o Nascimento do Cálculo Variacional Durante seu tempo na Academia Russa em St. Petersburg, Euler escreveu seu famoso livro sobre mecânica *Mechanica, sive motus scientia analyticale exposita* (Mecânica, ou a Ciência da Moção Analítica Demonstrada, 1736). Neste trabalho, ao invés de confiar nos métodos geométricos usados por Newton, ele introduziu métodos analíticos, marcando um ponto de viragem na formalização da mecânica. Por volta do mesmo período, Euler começou a estudar curvas elásticas, um assunto que logo levou a contribuições fundamentais. Esta mudança de métodos geométricos para analíticos representou uma mudança em como os problemas mecânicos foram atacados, enfatizando a manipulação algébrica e equações diferenciais sobre construções geométricas.

Em 1740, Frederico II - mais tarde conhecido como Frederico o Grande- subiu ao trono da Prússia. Um patrono da ciência e filosofia, ele procurou trazer eminentes estudiosos para a Academia Prussiana. Até então, Euler foi reconhecido como um dos maiores matemáticos da Europa, e Frederick fez um convite para ele se juntar à Academia de Berlim. Com a agitação política aumentando na Rússia, Euler aceitou e se mudou para Berlim no verão de 1741. Apesar da relocalização, ele manteve uma conexão com a Academia Russa e continuou publicando muitos artigos no *Commentari Academia Petropolitanae* (Memórias da Academia Russa). Essa mobilidade mostra como os estudiosos do século XVIII operavam dentro de um espaço intelectual europeu, movendo-se entre tribunais e academias conforme as oportunidades surgiam.

Em Berlim, Euler continuou sua pesquisa prolífica, publicando regularmente nos volumes anuais das academias prussianas e russas. Em 1744, ele publicou seu trabalho de referência *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu aceitati* (Um método para encontrar linhas curvadas apreciando propriedades de Maxima ou Minima, ou a solução do problema isoperimétrico no mais amplo)(Euler, 1744b). Este foi o primeiro livro sobre o cálculo das variações e incluiu, como apêndice, o primeiro tratamento sistemático das curvas elásticas. A seção de abertura do livro diz:

> Todos os maiores geometros já reconheceram há muito tempo que o método apresentado neste livro não é apenas do maior uso na análise em si, mas também que ajuda muito na solução de problemas físicos. Pois, uma vez que o tecido do universo é mais perfeito e a obra de um Criador muito sábio, nada acontece no universo em que alguma regra do máximo ou mínimo não aparece. Portanto, não há dúvida de que todos os efeitos do universo podem ser explicados igualmente felizes das causas finais pelo método de maxima e mínimos e pelas próprias causas efetivas. Há exemplos tão bons desse fato aqui e ali que dificilmente precisamos de mais para provar isso; Em vez disso, o que resta é encontrar em cada tipo de questão científica a quantidade que assume o máximo ou valor mínimo, uma questão que parece pertencer à ciência natural (filosófia) Que a matemática. Desde então, há duas maneiras de aprender os efeitos da natureza, a uma através das causas efetivas, geralmente chamada o método direto, a outra através das causa finais, o matemático usa cada um com igual sucesso.
>
> Se as causas efetivas são muito ocultas, enquanto as causas finais escapam menos facilmente, a questão

[41] Este padrão histórico de mobilidade intelectual em toda a Europa paralelo ao moderno programa Erasmus para estudantes, que desde 1987 tem facilitado o intercâmbio acadêmico entre instituições europeias, criando redes que transcendem as fronteiras nacionais e acelerar a polinização cruzada de idéias, métodos e abordagens de pesquisa em todo o continente.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

é comumente resolvida pelo método indireto; Pelo contrário, o método direto é levado a suportar sempre que o efeito pode ser determinado pelas causas efetivas. Mas, acima de tudo, é para ser mostrado que cada método abre um caminho para a solução; Então, não só um fortalece muito o outro, mas também temos o maior prazer em seu acordo. Assim, a curvatura da corda ou corrente suspensa foi descoberta por dois a priori do carregamento devido à gravidade, o outro pelo método de maxima e mínimos, já que foi reconhecido que a corda deve assumir tal curvatura a ponto de tornar seu centro de gravidade o mais baixo possível. Da mesma forma, a curvatura dos raios através de um meio transparente foi determinada tanto a priori quanto do princípio de que eles devem atingir um determinado ponto no menor tempo. Muitos outros exemplos foram apresentados pelos famosos Bernoullis e outros...

No entanto... o máximo ou mínimo é muitas vezes difícil de reconhecer, mesmo que a solução tenha [Já] Foi encontrado *A priori*.. Assim, embora a forma curva assumida por uma faixa elástica tenha sido conhecida há muito tempo, no entanto a investigação dessa curva pelo método de maxima e mínimos, isto é, pelas causas finais, ainda não foi alcançada por ninguém. Portanto, desde o mais famoso e neste tipo superior de ciência natural perspicaz Daniel Bernoulli me indicou que toda a força armazenada na curva A faixa elástica pode ser expressa por uma certa fórmula, que ele chama de força potencial, e que esta expressão deve ser um mínimo na curva elástica... Não posso deixar passar esta oportunidade mais desejada de ilustrar a utilidade do meu método, ao mesmo tempo que publico esta notável propriedade da curva elástica descoberta pelo famoso Bernoulli. Para esta propriedade envolve segundas derivadas, de modo que os métodos tratados acima para resolver problemas isoperimétricos[a] não basta para desenvolvê-lo.

Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

[a] Problemas isoperimétricos no cálculo da variação podem ser facilmente traduzidos em otimização de um funcional sob a restrição de uma integral.

Esta passagem encapsula a abordagem filosófica de Euler à mecânica: fenômenos naturais podem ser compreendidos através de análises causais e princípios de otimização, e matemática proporciona acesso a ambos.

Mais tarde, Berlim Anos e de volta à Rússia Enquanto em Berlim, Euler escreveu várias obras principais, incluindo *Introductio em analysin infinitorum* (1748). É amplamente considerado como um texto fundamental da análise matemática moderna. Nele, Euler definiu funções, introduziu notação moderna para funções exponenciais e trigonométricas, e tratou séries infinitas como objetos analíticos centrais. Sua influência se estendeu até o século XIX, moldando análises, funções complexas e até mesmo teoria de Fourier, e forneceu bases teóricas para a engenharia matemática.

Em 1759, Euler se tornou o *de fato* Chefe da Academia e estava sobrecarregado com crescentes responsabilidades executivas. Durante a Guerra dos Sete Anos, ele também foi encarregado de garantir financiamento para manter as operações. Em 1760, Berlim foi ocupada pelo exército russo invasor, e a casa de Euler foi saqueada. O comandante russo pediu desculpas e ordenou compensação. A imperatriz Elizabeth enviou um presente adicional que mais do que cobriu as perdas de Euler. Este episódio ilustra o respeito internacional que Euler comandou e o ideal de neutralidade científica que poderia transcender os conflitos nacionais.

Catarina II tornou-se Imperatriz da Rússia em 1762. Um forte defensor da ciência e iluminação, ela tentou revitalizar a Academia Russa de Ciências. As negociações começaram a trazer Euler de volta para St. Petersburg. Catarina fez uma oferta mais atraente do que Frederico II, e em 1766, depois de 25 anos produtivos em Berlim, Euler voltou para a Rússia. Ele recebeu uma calorosa recepção na corte, e Catherine lhe deu uma casa[42].. Financeiramente seguro, Euler novamente se dedicou totalmente à pesquisa.

[42] O que podemos chamar de pacote inicial

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Então Euler estava se aproximando de sessenta, e sua visão havia deteriorado severamente. Ele tinha perdido a visão em um olho em 1735, e uma catarata formada no outro, levando à cegueira quase total. No entanto, sua produção aumentou. Notavelmente, o número de trabalhos que ele produziu anualmente durante esta fase final excedeu o de qualquer período anterior[43].. Trabalhou com assistentes para quem ditava explicações completas de problemas e métodos de solução[44].. Entre 1766 e 1783, Euler produziu mais de 400 papéis. Mais de quarenta anos após sua morte, a Academia Russa de Ciências ainda publicava seu trabalho em suas memórias anuais. Essa produtividade demonstra os poderes mentais de Euler e a eficácia do trabalho científico colaborativo.

Legado e *Ópera Omnia* Sem surpresa, o trabalho de Euler permaneceu mais conhecido e apreciado na URSS do que em grande parte da Europa Ocidental bem no século XX. Em 1907, um grande projeto editorial foi lançado através da colaboração entre o Comitê suíço Euler, a Academia de Ciências da União Soviética, e a Academia das Ciências da República Democrática Alemã (que se considerava como sucessor legal para A Academia Prussiana). Esta colaboração internacional para preservar o legado de Euler reflete a importância contínua do seu trabalho.

O esforço levou à publicação do *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, a edição científica definitiva das obras completas de Euler, organizadas em três séries:

1. Matemática (29 volumes);
2. Mecânica e Astronomia (31 volumes);
3. Física e Diversos (12 volumes).

Apesar das interrupções devido a duas guerras mundiais e consequentes restrições econômicas, a edição impressa (72 volumes) está quase completa. A partir da última atualização, apenas dois volumes sobre a teoria das perturbações na astronomia permanecem inéditos (Kleinert, 2015).

Euler é universalmente considerado como um dos maiores e mais prolíficos matemáticos da história.[45] Suas contribuições estabeleceram bases de múltiplas disciplinas. Com mais de 866 trabalhos publicados e descobertas abrangendo matemática, física, astronomia e engenharia, a influência de Euler é incomparável. Como Pierre-Simon Laplace declarou: Leia Euler, leia Euler. Ele é o mestre de todos nós

Talvez mais notavelmente, Euler também esteja associado a uma das equações mais famosas da matemática, a identidade de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{6.1}$$

Esta identidade une cinco constantes: e, i, π, 1, e 0, e combina adição, multiplicação, e exponenciação em uma única declaração. Segue-se da fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, que liga funções exponenciais, trigonometria e análise complexa.

Um breve catálogo de contribuições matemáticas Suas contribuições fundacionais incluem:

Topologia e Teoria dos Gráficos (1736) Em 1735, Euler resolveu o Sete Pontes de Königsberg problema, apresentando *geometria situs* (Geometria de posição) e lançando as bases da teoria dos grafos e topologia (Euler, 1741).

[43] Assim como Beethoven compôs sua Nona Sinfonia, enquanto surdo, Euler não estava aterrorizado pela cegueira ou idade.

[44] Assim como Stephen Hawking, que confiava em assistentes para executar tarefas complexas enquanto mantinha o controle criativo.

[45] Outros matemáticos frequentemente mencionados em discussões sobre o "maior"incluem Carl Friedrich Gauss, Arquimedes, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, David Hilbert, Henri PoincarÉ, e Bernhard Riemann. A distinção de Euler está em parte na sua produtividade: seus trabalhos colecionados, o *Ópera Omnia*, compreende mais de 70 volumes.

CÓPIA PARA REVISÃO

Notação Matemática e Simbolismo (1748) Euler introduziu símbolos padronizados como e, i, π, $f(x)$, Σ, e notação trigonométrica modernasin, cos, tan). Seu uso sistemático na *Introductio em analysin infinitorum* Contribuiu decisivamente para a internacionalização da matemática (Euler, 1748).

Fundamentos da Análise Moderna (1748) Na *Introductio em analysin infinitorum*, Euler colocou a noção de função no centro da análise e tratou séries infinitas, funções exponenciais e logarítmicas, e trigonometria em uma maneira unificada (Euler, 1748).

Cálculo das Variações (1744) Euler estabeleceu o cálculo das variações em *Methodus inveniendi lineas curvas*Transformando problemas de otimização isolados em uma teoria analítica sistemática (Euler, 1744b). Isso será examinado mais adiante em §9.3.2.2.

Teoria dos números analíticos (1730s-1750s) Euler aplicou métodos analíticos para o estudo de números primos, provou sua infinitude usando argumentos divergentes, e introduziu a fórmula do produto Euler (Euler, 1748).

Mesa 6.4 resume grandes trabalhos.

Tabela 6.4: Grandes Obras de Leonhard Euler

Título (Latim)	Ano	Lugar de Composição	Conteúdo / Significado
Mechanica sive motus scientia analytical exposita	1736	St. Petersburg	Mecânica Newtoniana reformulada usando equações diferenciais; Trabalho fundamental em mecânica analítica.
Methodus inveniendi lineas curvas...	1744	St. Petersburg	Trato fundamental sobre o cálculo de variações; introduziu o que se tornaria a equação de Euler-Lagrange.
Introductio em analysin infinitorum	1748	St. Petersburg	Funções definidas analiticamente; Tratou séries infinitas rigorosamente; lançou as bases para a análise moderna.
Instituições calculam diferenciais	1755	Berlim	Exposição sistemática de cálculo diferencial, incluindo derivadas parciais e equações diferenciais.
Institutions calculi integralis (3 vols)	1768–1770	Berlim	Trabalho abrangente em cálculo integral; inclui métodos de integração e soluções para equações diferenciais.
Lettres Ùma princesa de Allemagne	1768–1772	Berlim	Cartas de ciência populares cobrindo física, astronomia e filosofia, escritas para a Princesa Friederik Charlotte da Prússia.

Euler e as Fundações Matemáticas de Mecânica estrutural Leonhard Euler (Euler, 1744b) foi o matemático mais prolífico da história e a figura que, mais do que qualquer outro, estabeleceu as bases matemáticas de mecânica estrutural. Suas contribuições abrangem praticamente todas as áreas da mecânica e matemática aplicada, e muitos de seus resultados permanecem em uso por engenheiros estruturais.

CÓPIA PARA REVISÃO

Euler's *Mechanica* (1736) foi o primeiro tratado abrangente para aplicar cálculo sistematicamente para problemas mecânicos, reformulando a mecânica newtoniana em termos analíticos e não geométricos. Onde Newton tinha apresentado dinâmica através de construções geométricas, Euler expressou princípios como equações diferenciais passíveis de tratamento sistemático. Esta reformulação, a mecânica como análise, permitiu uma solução de problemas além do alcance dos métodos geométricos e estabeleceu um quadro para analisar o movimento, força, e equilíbrio.

Euler derivação da carga crítica flambagem para pilares (1744) permanece um dos mais importantes resultados na teoria da estabilidade estrutural.. O conceito de flambagem forma modal também se origina na análise de Euler.

O trabalho de Euler na curva elástica estabeleceu a deflexão equação diferencial governando viga, ligando cargas aplicadas à deformação:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

Com o apropriado condições de contorno, esta formulação produz deflexões, rotações e esforços internos para vigas sob carga arbitrária. Grande parte da análise clássica viga deriva desta equação.

Euler também desenvolveu o cálculo de variações, permitindo métodos de energia em Castigliano, energia potencial mínima, Rayleigh Ritz e métodos que apoiam a otimização estrutural moderna.. Seu trabalho em dinâmica rígida do corpo, mecânica de fluidos e elasticidade estendeu as ferramentas matemáticas disponíveis para engenheiros.

O volume da produção de Euler é impressionante. suas obras coletadas preenchem mais de 70 volumes. Ele continuou produzindo matemática mesmo depois de perder a visão, ditando artigos sobre mecânica, análise e teoria numérica até sua morte. Praticamente todos os métodos analíticos usados pelos engenheiros estruturais traçam parte de sua linhagem para o trabalho de Euler.

6.7 Da mecânica analítica ao Continuum e à Teoria Estrutural

Esta seção une os contribuintes que estenderam *mecânica analítica* além de partículas e corpos rígidos para *Continuando*, *elasticidade*, e resposta estrutural. Princípios abstratos foram adaptados para descrever deformação e comportamento material em corpos reais. O tema unificador é a integração do formalismo matemático com a estrutura física.

6.7.1 Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

Adaptado de (Timoshenko, 1953) Charles-Augustin de Coulomb nasceu em 1736 em Angoulême, França, numa família ligada ao serviço administrativo e técnico do Estado. Ele recebeu uma sólida educação matemática em Paris antes de entrar no corpo militar de engenharia, onde treinamento avançado em geometria, mecânica e construção o preparou para serviço prático. Este caminho institucional, combinando instrução matemática com exposição imediata a problemas reais de engenharia, em forma da abordagem ao longo da vida de Coulomb: Experimentações cuidadosas guiadas pelo raciocínio analítico, sempre orientadas para aplicação prática.

Engenheiro no Campo: Martinica e as Origens de uma Memória Charles-Augustin de Coulomb foi um personagem fascinante cuja carreira ilustra a crescente conexão entre engenharia prática e mecânica teórica no século XVIII. Depois de receber sua educação preliminar em Paris, ele entrou no corpo militar

CÓPIA PARA REVISÃO

de engenheiros e estava estacionado na ilha de Martinica. Durante nove anos, ele supervisionou obras que o confrontaram com o comportamento mecânico dos materiais e as realidades do desempenho estrutural. Enquanto estava na ilha, longe do ambiente intelectualmente estimulante da metrópole, ele escreveu seu artigo seminal *Sur une Aplicação de RèGles de maximis et minimis à Quelques problèMes de Statique Relatifs à Arquitetura*, que ele submeteu à Academia Francesa de Ciências em 1773. Este trabalho exemplifica como a prática de engenharia colonial poderia impulsionar inovação teórica e avanços mecânicos. Em seu prefácio, Coulomb observou com modéstia característica:

> Esta memória, escrita há alguns anos, foi feita para meu uso individual no trabalho em que eu estava envolvido na minha profissão. Se me atrevo a apresentá-lo a esta Academia, é só porque os esforços mais fracos são gentilmente recebidos por ela quando eles têm um objetivo útil. Além disso, as Ciências são monumentos consagrados ao bem público. Cada cidadão deve contribuir para eles de acordo com seus talentos. Enquanto grandes homens serão levados para o topo do edifício onde eles podem marcar e construir os andares superiores, artesãos comuns que estão espalhados pelos andares inferiores ou estão escondidos na escuridão das fundações devem procurar apenas aperfeiçoar isso Que as mãos mais inteligentes criaram.
>
> Coulomb, 1773a *"Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture"*

Volte para a França. Fricção, Máquinas e Método Experimental Ao retornar à França, Coulomb retomou seu trabalho como engenheiro e entrou mais diretamente na vida científica da Academia. Ele compartilhou um prêmio por um trabalho sobre o design ideal de bússolas. Em 1781, ele ganhou outro prêmio da Academia por suas memórias *ThéOrie des machines simples*, em que ele apresentou resultados de experimentos extensivos sobre fricção de materiais - tanto seco e lubrificado. Estas medições sistemáticas forneceram dados cruciais para o projeto mecânico e ajudaram a estabelecer uma base empírica para Tribologia[46].

Depois de 1781, Coulomb ficou permanentemente estacionado em Paris. Lá ele foi eleito para a Academia e obteve acesso a melhores instalações de pesquisa. Ele se voltou cada vez mais para a eletricidade e magnetismo,[47] desenvolvendo um equilíbrio de torção altamente sensível para medir as forças elétricas e magnéticas. No processo, ele investigou a resistência dos fios à torção – uma área mais explorada em §10.3.2.1.

Trabalho em Torsão e Elasticidade As experiências de Coulomb em Torsão Não só aprofundou o entendimento do magnetismo, mas também estabeleceu bases para a mecânica torcional. Ele derivou relações entre torque e deformação angular, e suas medidas de resistência cisalhamento em fios definiram o palco para desenvolvimentos posteriores na elasticidade. Essas insights não eram meramente auxiliares de suas investigações elétricas; eles se tornaram uma pedra angular na caracterização de materiais elásticos. Suas experiências de torção representavam algumas das medidas mecânicas mais precisas do século XVIII e métodos estabelecidos que seriam usados por engenheiros por gerações.

Nenhum outro cientista do século XVIII contribuiu tanto quanto Coulomb para a mecânica dos corpos elásticos. Seus avanços fundamentais na elasticidade são encontrados principalmente em suas memórias de 1773, que ajudaram a ponte da prática de construção empírica com mecânica teórica emergente.

[46] Tribologia é a ciência interdisciplinar que estuda fricção, desgaste e lubrificação de superfícies interagindo em movimento relativo. Abrange o projeto de rolamentos, engrenagens e superfícies corrediças, o desenvolvimento de lubrificantes e tratamentos de superfície para minimizar perdas de energia e degradação de materiais em sistemas mecânicos, bem como atrito solo-estrutura na engenharia geotécnica e atrito concreto em aplicações de construção e infraestrutura.

[47] Curiosamente, como veremos mais tarde, sua pesquisa sobre a torção foi habilitada por um dispositivo originalmente concebido para estudos magnéticos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Influência e legado na mecânica Embora Coulomb possa não ser tão alto quanto Newton, Euler, ou os Bernoullis em termos de vastos referenciais teóricos, seu meticuloso trabalho experimental lançou bases cruciais para a mecânica aplicada. Seus estudos em fricção, torção e elasticidade influenciaram o trabalho do século XIX de Navier, Cauchy e Saint-Venant, que estendeu e formalizou a teoria de tensão e deformação. O legado de Coulomb reside em sua habilidade de transformar medidas cuidadosas em leis físicas duradouras. Talvez o mais importante, ele demonstrou como a investigação experimental sistemática poderia gerar relações quantitativas que eram tanto teoricamente significativas quanto praticamente úteis.

Traços pessoais e desafios históricos A personalidade de Coulomb era marcada pela humildade e diligência. Apesar de trabalhar por anos em isolamento colonial, longe dos centros europeus de aprendizagem, ele nunca cessou suas investigações científicas. Ele muitas vezes se descreveu como apenas um construtor na fundação da ciência, diferindo o crédito público para os outros. No entanto, sua persistência, especialmente no refinamento experimental, colocou-o na vanguarda da mecânica aplicada do século XVIII.

Embora ele seja lembrado hoje por sua lei de eletrostatismo, dentro das contribuições da mecânica Coulomb são indispensáveis: Ele forneceu dados experimentais rigorosos e modelos físicos que guiaram a maturação da ciência estrutural nos séculos vindouros. Sua carreira exemplifica o engenheiro-cientista que combinou a experiência prática com a visão teórica para avançar tanto na prática de engenharia quanto no entendimento científico[48].

6.7.2 Siméem Denis Poisson (1781-1840)

SiméEm Denis Poisson nasceu em 1781, em Pithiviers, França, com uma família de meios modestos. Seu talento matemático excepcional foi reconhecido cedo, e ele foi admitido no *École Polytechnique* logo após sua fundação, durante a reorganização pós-revolucionária da educação científica francesa. Lá ele veio sob a influência de Laplace e Lagrange, cuja abordagem analítica da mecânica moldou profundamente seu desenvolvimento intelectual. Ao contrário de muitos engenheiros-cientistas de sua geração, Poisson seguiu uma carreira predominantemente matemática, favorecendo generalidade analítica e completude formal sobre a investigação experimental.

Analista da Geração Pós-Revolucionária Siméem Denis Poisson foi um matemático e físico francês cujo nome permanece embutido em múltiplos ramos da ciência, da probabilidade à elasticidade. Estudante de Laplace e contemporâneo de Fourier, Poisson emergiu como uma figura central no período de transição entre os séculos XVIII e XIX, levando adiante a tradição analítica mecânica de Lagrange e Laplace enquanto a adaptava ao as necessidades emergentes da física e engenharia contínuas.

Sua carreira coincidiu com a consolidação institucional da educação científica e de engenharia na França, particularmente através do *ÉCole Polytechnique*, onde o rigor matemático foi sistematicamente aplicado a problemas de mecânica, materiais e ciência física. Poisson pertencia à primeira geração para quem a análise avançada não era apenas uma ferramenta da mecânica celestial, mas uma linguagem para descrever o comportamento interno da matéria.

Elasticidade e a segunda constante elástica Na mecânica, Poisson é mais conhecido por introduzir a segunda constante elástica - agora chamada *Coeficiente de Poisson*- que quantifica a contração lateral

[48] Exemplos notáveis em engenharia estrutural e mecânica incluem Gustave Eiffel, que combinou análise teórica avançada de cargas eólicas e materiais tensões com técnicas inovadoras de construção para pontes e torres; John Augustus Roebling, que desenvolveu tanto a teoria matemática do projeto de ponte suspensa quanto os métodos práticos de engenharia que permitiram a Ponte Brooklyn; e Stephen Timoshenko, que criou teorias fundamentais viga e placas enquanto resolvem problemas do mundo real em vibrações estruturais e estabilidade. Infelizmente, a especialização profissional moderna separou em grande parte a pesquisa teórica da engenharia prática, com relativamente poucos praticantes contemporâneos possuindo conhecimento científico profundo e experiência de engenharia prática Ao contrário, muitos cientistas que entendem de teoria mas carecem de experiência prática em engenharia.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

de um material submetido à extensão axial. Este conceito marcou um passo decisivo para além da proporcionalidade Hookean reconhecendo que a deformação é inerentemente tridimensional: esticar em uma direção necessariamente induz a contração nas direções transversais.

A formulação de Poisson refinou a teoria da elasticidade linear iniciada por Navier e forneceu uma maneira sistemática de relacionar longitudinal e transversal deformações dentro de um sólido isotrópico. Ao identificar a proporção de Poisson como uma propriedade material intrínseca, Poisson ajudou a transformar elasticidade de uma coleção de leis unidimensionais em uma verdadeira teoria do continuum. Este insight estabeleceu bases essenciais para os esclarecimentos posteriores de Saint-Venant e o totalmente desenvolvido Navier-Lamé equações.

Mathematização do Comportamento Continuum O trabalho de Poisson representa uma etapa crucial no *Matemática* de comportamento material. Em vez de depender apenas da intuição geométrica ou analogia experimental, ele procurou descrever a resposta elástica através de equações diferenciais parciais que governam os campos tensão, deformação e deslocamento em todo o corpo. Ao fazê-lo, ele ajudou a estabelecer o problema de valor limite como o quadro natural para elasticidade e mecânica do contínuo.

Este ponto de vista analítico também levou Poisson a resultados importantes além da elasticidade. Sua equação, agora conhecida como *A equação de Poisson*-Arosa no estudo dos potenciais gravitacionais e eletrostáticos, mas sua estrutura matemática reaparece em elasticidade, mecânica de fluidos e condução de calor. A equação exemplifica como fontes locais (forças, cargas, densidade de massa) determinam o comportamento global do campo, um conceito central para análise estrutural e física.

Relações com Navier e a questão da engenharia A carreira de Poisson foi marcada pela tensão intelectual com Claude-Louis Navier, particularmente sobre o papel da matemática abstrata na engenharia. Poisson favoreceu a completude matemática e elegância analítica, enquanto Navier enfatizava modelagem física e aplicabilidade prática. Essas discordâncias, longe de serem meramente pessoais, refletem uma divisão disciplinar mais profunda entre a teoria do continuum matematicamente impulsionada e orientada para engenharia análise estrutural.

Em retrospecto, a rivalidade se mostrou produtiva. A insistência de Poisson na consistência analítica fortaleceu os fundamentos teóricos da elasticidade, enquanto a perspectiva de engenharia de Navier garantiu relevância para estruturas reais. Juntos, seus esforços combinados moldaram a forma da teoria da elasticidade que mais tarde seria esclarecida por Lamé e Saint-Venant.

Ampla Influência e Legado Além da mecânica, Poisson fez contribuições duradouras para a teoria das probabilidades (distribuição de Poisson), dinâmica analítica (braquetes de Poison) e física matemática. Seu trabalho sobre propagação de ondas, pressão fluida e eletrostática influenciou a física do século XIX tão profundamente quanto suas teorias elásticas influenciaram a engenharia.

Dentro de mecânica estrutural, o legado de Poisson não está em fórmulas isoladas, mas em seu papel como uma figura ponte: Ele ajudou a carregar elasticidade desde a intuição mecânica inicial em uma teoria matematicamente coerente do contínuo. Os parâmetros que levam seu nome permanecem indispensáveis em modelos constitutivos modernos, formulações elemento finito e caracterização material.

Para detalhes analíticos, consultar §10.3.2.5

6.7.3 Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836)

Claude Louis Marie Henri Navier nasceu em Dijon em 1785. Quando ele tinha 14 anos, seu pai morreu, e o menino foi criado por seu tio materno, *E. Gauthey*, um renomado engenheiro de ponte e membro do *Corpo de Ponts e ChaussÉes* .. Esta conexão familiar levou Navier ao mundo da engenharia em uma idade precoce. A criação de Navier dentro do estabelecimento de engenharia francês moldou sua convicção de que a teoria matemática deveria informar a construção prática, uma perspectiva que definiria toda sua carreira.

CÓPIA PARA REVISÃO

Aos dezessete anos, Navier entrou no prestigiado *École Polytechnique*, entrando com uma classificação modesta entre a turma de 117 alunos. Apesar deste início humilde, ele rapidamente se distinguiu, subindo para o top 10 até o final de seu primeiro ano. Ele posteriormente se juntou ao *Corpo de Ponts e ChaussÉes* , onde ele passaria o resto de sua carreira equilibrando responsabilidades administrativas, acadêmicas e científicas. Este caminho institucional... de *École Politécnica* Para o Corpo de Ponts, representava o novo modelo de educação em engenharia científica que a França foi pioneira e que eventualmente se espalharia por toda a Europa.

Enquanto estiver na *École Politécnica*, Navier veio sob a influência de Joseph Fourier, cuja abordagem analítica para o calor e ondas influenciou profundamente Navier pensamento (Cannone e Friedlander, 2003). Ao contrário de muitos engenheiros do seu tempo, que dependiam de regras empíricas, Navier defendeu uma metodologia matematicamente rigorosa. Ele editou e publicou o tratado de seu tio *TraitÉ des ponts* (Gauthey, 1813), combinando insights históricos com rigor teórico.

A influência de Navier se estendeu além da pesquisa. Seus livros de engenharia apresentados Analisador! Mecânica na educação em engenharia, marcando um ponto de viragem na transição da disciplina do ofício empírico para o rigor científico. Estes textos forneceram a base para aplicar métodos matemáticos aos problemas de engenharia, particularmente na elasticidade e mecânica dos fluidos. Sua abordagem pedagógica estabeleceu o modelo para a educação moderna de engenharia, enfatizando princípios matemáticos em vez de regras empíricas.

Sua carreira não foi sem atrito institucional. A pesquisa teórica de Navier, especialmente sua derivação das equações para o movimento do fluido viscoso no início da década de 1820, foi feita discretamente, já que seus superiores priorizavam o projeto prático da ponte. Isso refletiu uma maior divisão institucional entre engenharia teórica e prática, uma dicotomia que Navier finalmente transcendeu. Sua habilidade de sintetizar a prática com teoria o ganhou aclamação dos dois *Académie des Sciences* e os engenheiros praticantes (Cannone e Friedlander, 2003).

Ele também tinha rivalidades profissionais, particularmente com SimÉon Denis Poisson, que introduziu a segunda constante elástica (Coeficiente de Poisson]) e ofereceu visões concorrentes sobre teoria da elasticidade. Embora às vezes contestáveis, seus debates estimularam o refinamento dos modelos elásticos e definiram o palco para os desenvolvimentos posteriores de Saint-Venant.

Flexura Em seu 1826 *LeçOns données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'aplication de la mécanique à L'établissement des constructions et des machines* (Palestras dadas na Escola Real de Pontes e Estradas sobre a aplicação da mecânica para a construção de estruturas e máquinas), (Navier, 1826) Navier determinou com precisão a posição do linha neutra em flexão elástica viga. Aplicando as condições de equilíbrio horizontal, vertical e momento, ele mostrou que o linha neutra passa pelo centroide da seção transversal. Seu trabalho estabeleceu vários princípios fundamentais: as seções do plano permanecem planas durante a flexão; que, para as seções retangulares, o linha neutra está em profundidade média; e que tais resultados se mantêm apenas dentro do limite elástico. Estes princípios tornaram-se a pedra angular da teoria moderna viga e permanecem fundamentais para análise estrutural hoje (§7.3).

Navier introduziu a relação de flexão linear $M = fS$, lançando uma pedra angular da teoria clássica viga. Ao contrário de seus antecessores, como Parent e Coulomb, cujas contribuições permaneceram em grande parte acadêmicas, as formulações de Navier ganharam ampla adoção no projeto de engenharia graças à sua clareza, rigor e aplicabilidade.

Elasticidade Navier é muitas vezes creditado como o fundador da moderna elasticidade Teoria. Em 1821, ele apresentou uma biografia seminal ao *Instituto*, *Mémoire sur les lois du mouvement des corps solides*, (Navier, 1827b), articulando as equações gerais de equilíbrio e movimento para um corpo elástico contínuo. Essas

CÓPIA PARA REVISÃO

equações se aplicavam não só a pontos internos, mas também às condições prescritas nos limites.[49] Esta formulação representou a primeira descrição matemática completa do comportamento elástico em meios contínuos, fornecendo a base teórica para todos os desenvolvimentos subsequentes na mecânica sólida.

Navier inicialmente empregou uma única constante elástica, que ele revisou em 1822 para incluir dois parâmetros materiais independentes, aumentando a generalidade do modelo. Estas formulações foram posteriormente refinadas por seu aluno Saint-Venant, mas Navier lançou a estrutura fundamental da teoria.

Sua publicação de 1826 *Leçons*, (Navier, 1826), permanece um marco na literatura de engenharia. Apresentou a primeira teoria geral dos sólidos elásticos e ofereceu o primeiro tratamento sistemático de mecânica estrutural. Na época, não existia nenhum limite afiado entre a teoria da elasticidade e a engenharia estrutural, e figuras como Navier estavam profundamente envolvidas em ambos.

Fluidos Viscosos O trabalho de Navier em mecânica dos fluidos culminou na formulação das equações agora conhecidas como as equações de Nainer-Stokes. Seu artigo de 1822 introduziu o conceito de fricção interna (viscosidade) e propôs que a resistência em um fluido é proporcional à taxa de deformação - uma hipótese à frente do seu tempo. Apesar de seu trabalho ter sido inicialmente negligenciado, formou a espinha dorsal conceitual para desenvolvimentos posteriores em mecânica do contínuo e permanece central na dinâmica dos fluidos hoje. Estas equações têm extensas aplicações práticas, incluindo aviões e design automotivo (aerodinâmica e redução de arrasto), previsão do tempo e modelagem climática, simulação da corrente oceânica, análise do fluxo sanguíneo na medicina cardiovascular, carga de vento cálculos para edifícios e pontes, projeto de bombas, turbinas e hélices, fluxo de oleoduto e gás, modelagem da dispersão da poluição, design do casco do navio, e otimização do sistema HVAC. Essas equações são fundamentais para o software computacional de dinâmica de fluidos (CFD) usado em disciplinas de engenharia.

Legado O legado duradouro de Navier está em sua capacidade de sintetizar a observação empírica com formulação analítica. Ele transformou a mecânica estrutural e fluida em disciplinas governadas por equações diferenciais ao invés de gráficos empíricos. Seus livros didáticos educaram gerações de engenheiros em uma nova linguagem de precisão, e suas teorias permanecem pedras angulares no estudo da elasticidade e hidrodinâmica.

Embora não tão conhecido como Newton ou Euler no cânone científico mais amplo, dentro da engenharia e mecânica aplicada Navier está entre os gigantes por seu papel em transformar a engenharia em uma ciência exata. Sua abordagem estabeleceu o paradigma da engenharia científica que continua a guiar o campo hoje: a aplicação sistemática da análise matemática aos problemas práticos.

A ponte *fiasco* Até o final dos séculos XVIII e XIX, a maioria das estruturas foram construídas com pedra. No entanto, desencadeada pela Revolução Industrial (1760-1840) e a produção de ferro em particular, novas pontes metálicas foram construídas na Inglaterra (e nos EUA). John Smeaton (1721-1792) foi o primeiro engenheiro notável a usar ferro fundido em grande medida. A primeira ponte de ferro fundido foi construída (em 1776-1779) sobre o rio Severn por Abraham Darby. Outros países seguiram a Inglaterra, e na virada do século, pontes de ferro fundido apareceram na Alemanha e França. Estas pontes foram feitas em forma de arcos. Estes novas estruturas nem sempre foram devidamente dimensionados, e muitos falharam[50].. Engenheiros concluíram que pontes de ferro fundido podem não ser seguras para grandes extensões e começaram a construir pontes suspensas (Timoshenko, 1953). Esta transição ilustra como falhas estruturais muitas vezes impulsionam a inovação em materiais e formas estruturais.

A primeira ponte foi construída na Pensilvânia em 1796 por James Finley. Finley era um engenheiro habilidoso que trabalhava em um ambiente muito diferente do de Navier em um *Grande École*, ou seja, a América rural em 1800. Finley era prático e empírico, buscando produzir projetos práticos, simples e

[49] Este sistema abrangente inclui 15 equações de campo acopladas: 3 equações de equilíbrio, 6 constitutivas Hookean tensão –deformação relações, e 6 geométricas deformação - – deslocamento equações - para 15 desconhecidos (6 tensões, 6 deformações, e 3 deslocamentos.

[50] Possivelmente falhas quebradiças.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

genéricos que poderiam ser construídos por ferreiros rurais. Uma indicação de seu sucesso é que em 1820 ele tinha várias patentes, e mais de quarenta pontes suspensas foram construídas nos EUA. As inovações de Finley foram retomadas e estendidas na Grã-Bretanha por Samuel Brown, um capitão naval aposentado, que determinou através de experimentos a forma mais eficiente para ligações de ferro em um cabo de ponte suspensa. Ele se tornou um construtor líder de pontes suspensas, incluindo em 1820 a ponte Union sobre o rio Tweed, cuja extensão de 436 FT foi quase o dobro do comprimento mais longo de qualquer ponte construída nos EUA. A Ponte Union foi logo seguida por outros feitos de engenharia na Grã-Bretanha, incluindo pontes construídas por pioneiros da Revolução Industrial como Brunel, Stevenson e Telford (Cannone e Friedlander, 2003). Esta troca transatlântica de ideias demonstra como a inovação da engenharia transcendeu as fronteiras nacionais, mesmo em uma era de comunicação limitada.

Engenheiros britânicos seguiram os americanos, e durante o primeiro quarto do século XIX um grande número dessas pontes foram construídas na Inglaterra. O mais importante deles, a Ponte Menai com um espaço central de 550 Foi projetado por Telford (1757-1834). Até lá, o tratado clássico de Pope, 1811 já tinha sido publicado. O governo francês, sentindo que eles foram deixados para trás, apelou ao *École des Ponts et Chaussées* para ajudar no desenvolvimento da tecnologia de ponte suspensa. Era natural que eles olhassem para a Grã-Bretanha. A pedido de seus superiores, Navier (que já havia publicado o trabalho do tio em pontes) foi duas vezes para a Grã-Bretanha em 1821 e 1823 para estudar pontes suspensas. Ele então apresentou o seu *Rapport et Mémoire sur les Ponts Suspendus* (Navier, 1830), que contém não apenas uma revisão histórica do campo e descrições das pontes mais importantes existentes, mas também os métodos teóricos para analisar tais estruturas.

Neste livro, Navier trouxe ao assunto pela primeira vez a abordagem analítica e abstrata do matemático. Ele procurou ilustrar o poder e desafio da abstração contra um empírico *ad hoc* Aproximem-se. Ele fez o que matemáticos aplicados fazem na construção de um modelo matemático. Como ele comentou,

> [A modelagem requer] uma arte particular que consiste em substituir as próprias questões a serem resolvidas por outras perguntas que diferem o mínimo possível e para quais matemática pode se aplicar.
>
> Navier, 1830 Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus

Navier sugeriu que os resultados fossem reformulados para especificar os limites teóricos dentro dos quais deveriam ser relevantes e que a análise matemática fosse usada para determinar as relações entre parâmetros importantes. Por 50 anos, este relatório foi um dos livros mais importantes que cobriam o projeto de pontes suspensas. Citando uma passagem (Picon, 1988):

> É provável que o uso de pontes suspensas em breve se divulgue; por este meio, criaremos ligações de comunicação em lugares onde parece atualmente impossível . . . Essas estruturas exibirão grande elegância de forma, invariavelmente determinada pelas leis naturais do equilíbrio; eles também poderiam, se projetados por um engenheiro talentoso, contribuir para o embelezamento das capitais, ou, suspensos através de vales precipícios, eles poderiam produzir os efeitos mais imponentes nos cenários pitorescos das áreas montanhosas. Estes edifícios apresentarão à imaginação uma visão do poder das artes humanas superando, para o bem público, grandes obstáculos criados pela natureza e há muito tempo considerados invencíveis.
>
> Picon, 1988 *"Navier and the introduction of suspension bridges in France"*

Chegou a hora de Navier colocar em prática suas teorias, e ele propôs um projeto para uma ponte suspensa sobre o Sena, em Paris, ao lado de Les Invalides, que ele considerou como uma aplicação de suas pesquisas

CÓPIA PARA REVISÃO

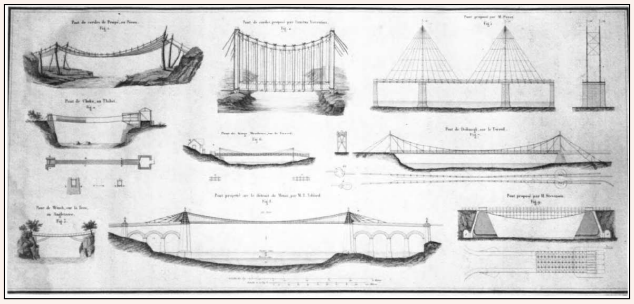


Figura 6.17: A ilustração de Navier sobre pontes suspensas de pontes primitivas de cordas de povos indígenas para a Ponte Menai de Telford (Picon, 1988)

teóricas. A ponte consistiria em cais de estilo egípcio, 3 M de diâmetro e aproximadamente 15 M de altura, espaço 170 M separados, através do qual passavam correntes, cada um formado por nove cursos de ligações oblongos forjado-ferro. As correntes apoiariam uma plataforma 9.5 M de largura, pesando quase 600 - Tântalas. Era um projeto ambicioso, cuja escala quase igualava a Ponte Menai de Telford. Foi aprovado em 1823 pela *Ponts et Chaussées* Autoridades. Navier afirmou ter resolvido definitivamente o divórcio entre teoria e prática, indigno de um corpo tão iluminado como o *Ponts et Chaussées*" (Picon, 1988).

Na verdade, não havia necessidade urgente de uma ponte neste local, como havia no leste de Paris. Em vez disso, Navier procurou grandeza e estética - um edifício que adicionaria ao *Gloire* da França e de sua amada *Corpo de Ponts et Chaussées*.. Ele queria demonstrar tanto que uma ponte de beleza poderia ser feita de ferro (em vez de pedra) e que poderia ser feito seguindo os ditames da análise teórica. Como ele escreveu,

> Não há necessidade urgente de construir uma ponte para os Campos Elísios . . . Mas se é desejado que um seja construído, deixe-o ser transformado em um monumento . . . Que sua disposição seja calculada com a idéia de formar um edifício aprovado por artistas, agradável ao público e honrado à administração.
>
> . . . este estudo (de pontes suspensas) não teria sido possível sem o progresso feito na análise matemática nos últimos tempos, e sem as instituições por meio das quais aqueles encarregados da direção de obras públicas são iniciados no mais idéias avançadas de matemática.
>
> Navier, 1823 Rapport à Monsieur le Ministre de l'Intérieur sur le projet d'un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées

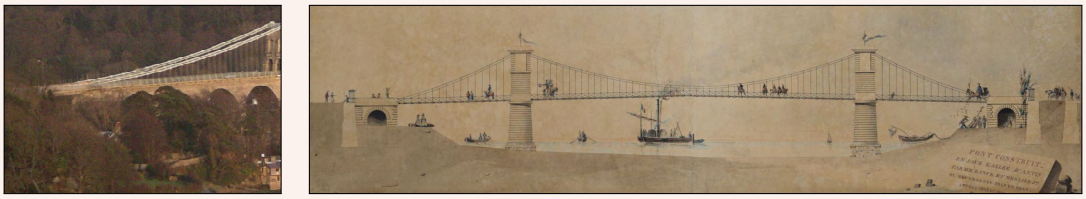
Assim, em 1823 Navier apresentou planos meticulosos para seus superiores no *Corpo de Ponts et Chaussées*.. Cada detalhe foi projetado com base em análises teóricas, e Navier tinha confiança suficiente que ele não recorreu à prática de engenharia usual de "superconstrução"(ou seja, acrescentando um fator de segurança). Tal confiança seria inimaginável hoje; Códigos modernos incorporam fatores de segurança correspondentes aos índices de confiabilidade[51].. Um comitê de especialistas relatou muito favoravelmente no projeto de Navier, convencido de que a teoria em todos os lugares ilumina a prática (Cannone e Friedlander, 2003). Este episódio ilustra tanto a promessa quanto o perigo da ciência de engenharia primitiva: *o poder da análise matemática aliado à compreensão incompleta das incertezas práticas*[52].

[51] Discutido em §36.3 pelo menos igual a 3

[52] Exemplos de engenharia estrutural incluem o colapso da ponte Tacoma Narrows 1940, o problema de vibração lateral da Ponte Millennium 2000 de Londres e o retromontamento do vento do Centro Citicorp 1978.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

A ponte estava praticamente completa quando um pequeno movimento apareceu nos poços de ancoragem da corrente. Este movimento foi agravado no lado Champs-Élysées pela fratura, durante a noite de 6-7 de setembro de 1826, de um dos conduítes de água da cidade, 0,32 Me em diâmetro. A torrente resultante de água (sob uma cabeça de 30 m) dos reservatórios de Chaillot formaram uma piscina ao lado de escavações incompletas e levaram à infiltração de terraplenagem já terminada. Andaimes foram instalados, mas marés altas, geadas de inverno e preocupações financeiras atrasaram a consolidação de emergência das ancoragens. Decidiu-se adiar os reparos até a temporada seguinte e desmontar o convés e as correntes. Em última análise, o trabalho final foi demolido (Cannone e Friedlander, 2003). A falha, portanto, não foi estrutural, mas geotécnica[53].. Este fracasso serve como um lembrete de que até mesmo o mais sofisticado análise estrutural é tão bom quanto a compreensão do sistema completo, incluindo fundações e condições ambientais.



(a) Uma ponte Telford (sobre Menai)

(b) Navier propôs Pont des Invalides

Figura 6.18: Navier e Telford (pontes)

Os artigos sarcásticos apareceram na imprensa contra o Corpo, e Navier foi referido como "aquele eminente homem da ciência cujos cálculos falham em Paris"Acidente com a *Pont des Invalides*. Críticas foram levantadas no Corpo por estarem ligados demais à teoria e por serem muito autocráticos e elitistas, em comparação com os estabelecimentos de engenharia britânicos e americanos. Foi sugerido que as correntes devem ter sido muito pesadas para os rabos, se eles não podiam suportar um "leve acidente". Em contraste, as conquistas superiores dos construtores britânicos de pontes foram elogiadas por não "matemáticar"o problema. O resultado do fracasso de Navier ilustra a tensão contínua entre abordagens teóricas e empíricas da engenharia, um debate que continua em várias formas hoje.

Na verdade, a trajetória de Navier do teórico/matemático ao construtor de pontes não pode ser contrastada com a mais prática.

6.7.4 Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Jean le Rond d'Alembert nasceu em Paris em 1717 e foi abandonado quando criança nos degraus da igreja de Saint-Jean-le-Rond, da qual ele tomou seu nome. Ele foi criado por uma família adotiva e mais tarde apoiado financeiramente, embora discretamente, pelo seu pai biológico, um oficial de artilharia. D'Alembert recebeu uma educação rigorosa no Collège des Quatre-Nations, onde foi treinado em matemática, filosofia e ciências. Embora inicialmente direcionado para a teologia e o direito, ele logo se voltou decisivamente para a matemática, perseguindo investigações científicas em grande parte fora das estruturas acadêmicas formais. Este caminho não convencional fomentou sua independência de pensamento e sua ênfase no raciocínio abstrato sobre a tradição.

[53]O caso de Navier não é único. Moiseff faleceu três anos após a conclusão e colapso da ponte de suspensão Tacoma Narrows (1940). Na França, 100 anos após o acidente da ponte de Navier, a represa Malpasset, projetada por um grande *Politécnico* Engenheira, André Coyne (que até então tinha projetado cerca de 100 represas) falhou (de novo não uma falha estrutural, mas uma rocha que desliza) matando 423 pessoas. Coyne foi profundamente afetado por este acidente e morreu seis meses depois (Londe, 1987).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Dinâmica e Redução ao Equilíbrio Jean le Rond d'Alembert era um pensador fundamental do Iluminismo cujo trabalho ajudou a transformar a mecânica de uma estrutura geométrica e forçada em uma baseada em princípios abstratos. Em sua *Traité de Dynamique*, (d'Alembert, 1743), ele apresentou o que agora é chamado Princípio de Alembert.. Este princípio afirma que a soma das forças aplicadas e as forças inerciais, tomadas com sinal oposto, devem desaparecer para todos virtualmente deslocamentos. Ao incorporar inércia como uma força fictícia, d'Alembert reformulou a segunda lei de Newton em uma condição de equilíbrio.

Para detalhes analíticos, consultar §35.3.1

Essa reframeação foi profunda. Converteu problemas de movimento em problemas formalmente equivalentes à estática, permitindo assim que os métodos de trabalho virtual e equilíbrio fossem aplicados à dinâmica. Ao fazê-lo, d'Alembert forneceu uma ponte conceitual entre a mecânica newtoniana e a mecânica analítica mais tarde formalizada por Lagrange. O *Traité de Dynamique* assim, é uma obra fundamental para o desenvolvimento de métodos trabalho virtual, coordenadas generalizadas e princípios energéticos que dominariam a mecânica do século XIX e análise estrutural.

Encyclopédie e o Programa Racionalista D'Alembert também foi um grande contribuinte para o *Encyclopédie*, servindo como co-editor (com Diderot) de seus artigos matemáticos e científicos. Neste papel, ele se tornou uma das principais vozes do racionalismo e formalismo científico na França do século XVIII. Sua insistência em clareza, abstração e estrutura matemática moldou a apresentação da mecânica como uma ciência dedutiva ao invés de uma coleção de regras empíricas. Através da *Encyclopédie*, d'Alembert ajudou a disseminar mecânica matemática para uma ampla audiência intelectual, incorporando raciocínio científico dentro do tecido cultural do Iluminismo.

Vibrações e Propagação de Ondas Além da dinâmica, d'Alembert fez contribuições seminais para a teoria das vibrações. Sua análise da corda vibratória levou à formulação da equação de onda unidimensional, uma das primeiras e mais importantes equações diferenciais parciais na física matemática. Embora inicialmente controverso, particularmente no que diz respeito a questões de condições de contorno e soluções admissíveis, seu trabalho sobre propagação de ondas estabeleceu as bases para desenvolvimentos posteriores em elasticidade, acústica e dinâmica estrutural, onde equações de onda governar a vibração das cordas, vigas, placas, e continua.

Posição no desenvolvimento da mecânica Embora o estilo de d'Alembert fosse menos sistemático e abrangente do que o de Lagrange, suas inovações conceituais o marcam como uma figura crucial de transição entre a mecânica newtoniana e a moderna mecânica analítica. Ele esclareceu o papel da inércia, formalizou a redução da dinâmica ao equilíbrio e introduziu estruturas matemáticas que se tornaram indispensáveis para teorias posteriores de elasticidade e vibração. Através de seu trabalho técnico e seu papel editorial no *Encyclopédie*, d'Alembert ajudou a estabelecer a mecânica como uma ciência racional, abstrata e universalmente aplicável.

6.7.5 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Joseph-Louis Lagrange nasceu em Turim em 1736, então parte do Reino da Sardenha. Seu pai tinha uma posição governamental que inicialmente fornecia segurança financeira, mas a fortuna da família mais tarde declinou, reforçando a confiança de Lagrange em conquista intelectual ao invés de status social. Embora inicialmente destinado a uma carreira legal ou administrativa, Lagrange se voltou decisivamente para a matemática como um jovem depois de estudar independentemente as obras de Galileu, Newton e Euler. Notavelmente, ele foi em grande parte autodidata em matemática superior, desenvolvendo suas ideias fora de qualquer escola formal ou tradição estabelecida.

Aos dezenove anos, Lagrange escreveu a Euler descrevendo seus primeiros resultados no cálculo das variações. Euler imediatamente reconheceu seu talento e se tornou mentor e defensor, ajudando a garantir

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

a rápida ascensão de Lagrange dentro da comunidade científica europeia. Esta independência inicial, combinada com o encorajamento do mais importante analista da era, moldou a preferência de Lagrange por toda a vida para raciocínio abstrato e métodos gerais sobre argumento geométrico ou experimental.

Mecânica Analítica e Eliminação da Força Joseph-Louis Lagrange fundamentalmente reestruturou a mecânica com seu trabalho de referência *Analitique Mécanique*, (Lagrange, 1788 PDF), no qual ele eliminou o conceito de força como primitivo e em vez disso construiu toda a teoria a partir de princípios de trabalho virtual e energia. Apresentando coordenadas generalizadas e métodos variacionais, Lagrange desenvolveu uma estrutura que se aplica uniformemente a complexos sistemas mecânicos, seja em estática ou dinâmica. Esta abordagem representou o máximo *Matemática* da mecânica, reduzindo todos os problemas físicos para exercícios em geometria analítica e cálculo.

Em contraste com a mecânica newtoniana, enraizada em forças, diagramas e construções geométricas, a formulação de Lagrange exigia apenas quantidades escalares, coordenadas e derivativos. Restrições, holonômicas ou não, foram incorporadas sistematicamente através de coordenadas generalizadas ao invés de resolvidas por engenhosidade geométrica. Essa abstração permitiu que problemas de complexidade sem precedentes fossem tratados com clareza conceitual e economia matemática.

***Analitique Mécanique* e seu legado** A abordagem de Lagrange elevou a mecânica para um ramo da matemática pura e lançou as bases para desenvolvimentos posteriores na física, incluindo mecânica Hamiltoniana, teoria de campo e dinâmica analítica moderna. O famoso prefácio de *Analitique Mécanique* declara que "não se encontrará nenhuma figura neste trabalho," uma declaração deliberada de método: A visão física deveria ser codificada inteiramente em equações, não diagramas.

As formulações de Lagrange continuam sendo centrais para a mecânica teórica moderna, dinâmica da engenharia e teoria do controle. Métodos de energia, coordenadas generalizadas e princípios variacionais - agora ferramentas padrão em sugerir equações de movimento e equilíbrio - tracem diretamente para seu trabalho. No século XX, este ponto de vista puramente analítico se mostraria especialmente compatível com a mecânica computacional, onde os sistemas físicos são representados e resolvidos através da manipulação numérica das equações em vez da construção geométrica.

Mais sobre as contribuições científicas de Lagrange são dadas em §10.3.2.2.

6.7.6 Cauchy (Augustin-Louis 1789–1857)

Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris em 1789, no início da Revolução Francesa. Ele recebeu sua educação matemática no recém-fundado *École Polytechnique*, uma instituição explicitamente criada para abastecer o estado com engenheiros treinados em análises avançadas. Cauchy distinguiu-se cedo por suas habilidades analíticas excepcionais e logo seguiu uma carreira acadêmica combinando matemática, mecânica e serviço público. Seus anos formativos coincidiram com uma transformação mais ampla da mecânica na França, em que análises rigorosas foram cada vez mais vistas como o fundamento adequado da teoria física.

Tensão em um ponto e a visão local da mecânica Augustin-Louis Cauchy fez contribuições profundas para a matemática e mecânica teórica, fundamentalmente reformulando as bases analíticas da elasticidade e mecânica do contínuo. Sua contribuição mecânica central foi a introdução do conceito de *tensão em um ponto*.. Antes de Cauchy, os mecânicos analisaram forças atuando em toda seção transversal, como a tensão total em uma barra ou a compressão resultante em um pilar. Cauchy substituiu este ponto de vista integral por um local, definindo tensão como a relação limitante de força para área à medida que a área encolhe até certo ponto.

Esta mudança de resultados globais para campos pontuais permitiu a formulação de equações diferenciais parciais que governam o estado esforço interno dos corpos de forma arbitrária sob carga arbitrária - as equações fundamentais da elasticidade. Assim, a mecânica foi transformada de uma coleção de argumentos de equilíbrio de força em uma disciplina teórica governada pelas leis locais.

CÓPIA PARA REVISÃO

O tensor e o equilíbrio Uma visão chave era que tensão em um ponto não pode ser representado por um único escalar ou mesmo por um vetor. Em vez disso, a tração (força por unidade de área) agindo em uma superfície através de um ponto depende da orientação dessa superfície. Cauchy demonstrou que essa dependência é linear: Se os vetores de tração em três planos perpendiculares mutuamente são conhecidos, a tração em qualquer plano pode ser determinada por transformação linear. Este resultado define o *tensão tensor*Um tensor de segunda ordem com nove componentes, seis dos quais são independentes em condições de equilíbrio.

O formalismo tensão-tensivo unificava fenômenos que antes pareciam díspares: tensão, compressão, cisalhamento, e suas combinações em estados complexos tensão. Cauchy derivou as leis de transformação que relacionavam componentes tensão em diferentes sistemas de coordenadas, identificou o principal tensões e direções principais, e estabeleceu as equações de equilíbrio local que tensão campos devem satisfazer em todo o corpo. Estes desenvolvimentos lançaram a base matemática do moderno mecânica do contínuo.

Da elasticidade à computação A estrutura de Cauchy é central para a mecânica computacional moderna. Cada análise elemento finito avalia os tensores em pontos de integração, transforma-os em coordenadas principais, e avalia-os contra leis constitutivas e critérios de falha - procedimentos que são descendentes diretos da formulação de Cauchy. Seu trabalho forneceu a linguagem e estrutura necessárias para o posterior desenvolvimento de métodos numéricos em mecânica sólida.

Rigor e legado Além de tensão, Cauchy contribuiu para a teoria deformação, relações constitutivas ligando tensão à deformação, e os fundamentos rigorosos da análise matemática, incluindo definições precisas de limites, convergência e funções complexas. Sua insistência na precisão lógica transformou a mecânica de um ramo da filosofia natural em uma ciência matemática. O aparato conceitual que ele introduziu - tensão e deformação tensores, equações de equilíbrio e compatibilidade, e relações constitutivas - permanece a base da mecânica sólida e engenharia estrutural.

Mais sobre as contribuições científicas de Cauchy são dadas em §10.3.2.4.

6.7.7 George Green (1793-1841)

George Green nasceu em 1793 em Nottingham, Inglaterra, numa família de meios modestos. Ele recebeu pouca educação formal e trabalhou a maior parte de sua vida como moleiro, auxiliando na operação do moinho de vento da família. Apesar disso, Green perseguiu matemática independentemente, estudando trabalhos analíticos avançados em grande parte por conta própria. Seu desenvolvimento científico ocorreu quase isolado das instituições acadêmicas, tornando suas contribuições posteriores ainda mais notáveis. Só no final da vida Green entrou na Universidade de Cambridge, onde seu trabalho anterior foi finalmente reconhecido e absorvido pela matemática.

A Teoria do Ensaio de 1828 e Potencial Em 1828, trabalhando fora da comunidade científica estabelecida, Green publicou um ensaio singular intitulado *Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias da Eletricidade e Magnetismo*.. Este trabalho introduziu o que agora são conhecidos como teorema de Green e as funções de Green, conceitos que se tornariam fundamentais na física matemática.

Embora enquadrado na teoria do potencial, as implicações do ensaio se estenderam muito além da eletricidade e magnetismo. Ao introduzir identidades integrais que relacionam valores de campo dentro de um domínio com valores em sua fronteira, Green forneceu um método poderoso para resolver problemas de valor limite. Essas ideias se mostraram essenciais não só na eletroestática, mas também na elasticidade, mecânica de fluidos e condução de calor, onde equações governantes compartilham uma estrutura elíptica comum.

Métodos de Energia e Perspectiva Variacional O trabalho de Green implicitamente introduziu uma perspectiva variacional e baseada em energia para resolver equações diferenciais parciais. Ao expressar soluções em termos de operadores integrais e funções do kernel, ele estabeleceu as bases para métodos posteriormente formalizados por Thomson (Lord Kelvin), Rayleigh, e outros no estudo da energia elástica,

CÓPIA PARA REVISÃO

estabilidade e vibração. Sua abordagem revelou como quantidades globais, tais como energia e trabalho, podem ser usadas para determinar o comportamento de campo local, um ponto de vista central para o moderno mecânica do contínuo.

Métodos Limites e Legado Computacional Apesar de publicar apenas um punhado de artigos durante sua vida, o legado de Green é duradouro. As funções de Green agora formam a espinha dorsal de muitas técnicas analíticas e numéricas em engenharia e física. Em particular, os modernos métodos computacionais baseados em limites - mais notavelmente o método de elementos limite (BEM) - são inteiramente sobre as identidades de Green para transformar problemas de volume em formulações de limites equivalentes. Tais métodos são amplamente usados em elasticidade linear, acústica, eletromagnética, mecânica da fratura, e dinâmica de fluidos.

Unidade da Física Matemática O trabalho de Green é uma demonstração marcante da unidade da física matemática: técnicas desenvolvidas para uma teoria física muitas vezes reaparecem, em grande parte inalteradas, em outras. Seu ensaio de 1828 exemplifica como a profunda visão matemática, mesmo quando desenvolvida isoladamente e aplicada a um problema estreito, pode moldar disciplinas inteiras. Em mecânica estrutural e análise computacional, as idéias de Green permanecem indispensáveis, quase dois séculos após sua introdução.

6.7.8 AdhÉmar Jean Claude BarrÉ de Saint-Venant (1797-1886)

AdhÉmar Jean Claude BarrÉ de Saint-Venant nasceu em 1797 em Villiers-en-BiÈre, França. Treinado como engenheiro civil, ele entrou no *École des Ponts et ChaussÉes*, onde a rigorosa instrução matemática foi explicitamente associada à educação prática em engenharia. Esta formação dupla, analítica e construtiva, definiria toda a sua carreira. Ao contrário de mecanicistas puramente acadêmicos, Saint-Venant trabalhou na interface da teoria e aplicação, buscando formulações que eram matematicamente sólidas mas utilizáveis por engenheiros praticantes.

Teoria da Elasticidade Sistematizante Saint-Venant é mais conhecido por refinar e sistematizar a teoria da elasticidade desenvolvida por seus antecessores, principalmente Navier e Cauchy. Ele melhorou a generalidade da teoria da elasticidade incorporando explicitamente forças do corpo e condições de contorno, abordando limitações nas formulações originais de Navier. Ao fazer isso, ele transformou a elasticidade de uma teoria matematicamente elegante mas incompleta em uma estrutura coerente aplicável aos problemas reais da engenharia.

Saint-Venant desempenhou um papel de mediação crucial entre abstrato mecânica do contínuo e prática de engenharia. Ao traduzir conceitos mecânicos complexos em metodologias engenheiros poderiam se aplicar diretamente, ele estabeleceu grande parte da base teórica do moderno análise estrutural - fundações que permanecem centrais para a prática de engenharia hoje.

Torção e dobra de barras prismáticas As mais célebres contribuições de Saint-Venant dizem respeito à torção e dobrando de barras prismáticas. O problema da torção, determinando a distribuição tensão e o ângulo de torção quando uma barra é submetida ao torque, resistiu à solução para seções transversais diferentes do círculo. Saint-Venant desenvolveu um método geral baseado em funções tensão que permitiam soluções para cortes retangulares, elípticos e outras seções não circulares.

Seus resultados revelaram fenômenos importantes e contraintuitivos: o máximo cisalhamento tensão em uma seção retangular ocorre no ponto médio dos lados mais longos, ao invés de nos cantos, e as seções abertas de paredes finas são extraordinariamente fracas em torção em comparação com as seções fechadas. Estas percepções permanecem diretamente relevantes para o moderno projeto estrutural.

Em curva, Saint-Venant estendeu a teoria de Navier viga para seções não simétricas, mostrando como cargas não passando pelo centro cisalhamento induzem dobra e torção combinadas. Ele analisou tensão concentrações perto de pontos de aplicação de carga e em descontinuidades geométricas, demonstrando como os campos locais tensão podem diferir significativamente das previsões da teoria elementar viga. Suas

CÓPIA PARA REVISÃO

soluções para cargas concentradas mostraram que esses efeitos locais decaem rapidamente com distância da carga.

Princípio de Saint-Venant Essas observações levaram ao princípio de Saint-Venant, indiscutivelmente sua contribuição mais influente. O princípio afirma que o campo tensão a uma distância suficiente de uma região carregada depende apenas da força e momento resultantes, não da distribuição detalhada da carga.

Este princípio tem profundas consequências práticas: permite aos engenheiros substituir complexos condições de contorno por equivalentes estaticamente, analisar estruturas sem conhecimento preciso de distribuições de carga, e confiar que detalhes locais de suportes e conexões não influenciam significativamente Longe dessas regiões. O princípio de Saint-Venant sustenta muitas suposições simplificadoras em análise estrutural e justifica o uso idealizado condições de contorno.

Trabalho Editorial e Legado Saint-Venant também editou e anotou extensivamente a terceira edição de Navier *RÉsumé* e traduziu o tratado de Clebsch sobre elasticidade, acrescentando notas volumosas que eles mesmos constituíam contribuições originais. Sua vida de trabalho transformou a elasticidade de uma teoria matematicamente refinada em uma ferramenta prática de engenharia.

As fórmulas para as distribuições torcionais rigidez, tensão em dobrados vigas, deformando seções não circulares, e o princípio que leva seu nome permanece parte da linguagem diária de trabalho dos engenheiros estruturais.

Mais sobre as contribuições científicas de Saint-Venant são dadas em §10.3.2.8.

6.8 A ascensão da engenharia estrutural como disciplina

Esta seção reflete o surgimento de *Engenharia estrutural* como uma disciplina científica e profissional distinta. Métodos de análise e desenho foram formalizados, e a relação entre teoria e prática foi esclarecida. A ênfase é na institucionalização, codificação e identidade disciplinar.

6.8.1 Karl Culmann (1821-1881)

Formação de Engenharia e Vida Primitiva Karl Culmann nasceu em 1821, em Bergzabern, na região Palatinada da Alemanha. Ele foi treinado como engenheiro na Politécnica Karlsruhe, onde recebeu uma educação rigorosa em matemática, mecânica e construção prática. Desde o início, Culmann mostrou uma forte inclinação para raciocínio geométrico e representação visual, preferindo abordagens gráficas intuitivas a cálculos puramente algébricos. Este fundo formativo, combinando treinamento matemático com exposição a obras civis de grande escala, moldou seu esforço para fazer análise estrutural tanto rigoroso e imediatamente inteligível para engenheiros praticantes.

Culmann (Culmann, 1866) Fundada estática gráfica como uma disciplina sistemática, transformando técnicas geométricas dispersas em uma metodologia abrangente para análise estrutural. Seu *Morra Graphische Statik* (Graphical Statics), publicado em Zurique em 1866 com uma segunda edição muito ampliada em 1875, estabeleceu métodos visuais para analisar as forças em treliças, pórticos, arcos, e retendo paredes que dominaram a prática de engenharia por quase um século.

Culmann treinou no Karlsruhe Polytechnic e trabalhou como engenheiro ferroviário na Baviera antes de viajar para a Grã-Bretanha e os Estados Unidos (1849-1851) para estudar engenharia de ponte. Seu relatório sobre pontes de madeira e ferro americanas introduziu engenheiros continentais a práticas inovadoras americanas. Em 1855, tornou-se professor de engenharia na recém fundada Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) em Zurique, onde construiu um dos principais programas europeus de engenharia estrutural.

CÓPIA PARA REVISÃO

A estática gráfica explora a dualidade entre força e geometria: forças podem ser representadas como vetores, E as condições de equilíbrio podem ser expressas como o fechamento dos polígonos. Culmann sistematizou essas relações através do polígono da força E o polígono funicular (representando suas linhas de ação e pontos de aplicação). A interação entre estes dois diagramas — figuras recíprocas na terminologia de Maxwell — permite a rápida solução de problemas complexos de equilíbrio sem cálculo algébrico.

Para análise treliça, os métodos de Culmann permitiram aos engenheiros determinar graficamente todas as forças dos membros, construindo um único diagrama em que cada membro corresponde a um segmento de linha cujo comprimento representa a magnitude da força. Para arcos e cabos, o polígono funicular representa diretamente a linha de impulso, permitindo aos designers visualizar como as forças fluim através de estruturas curvas. Para reter paredes, construções gráficas determinam as pressões da Terra e seus pontos de aplicação. Estes métodos, que requerem apenas bússola, borda reta e escala, foram muito mais rápidos do que o cálculo algébrico para as estruturas complexas da era industrial.

A influência de Culmann estendeu-se para além de técnicas específicas a uma filosofia da educação em engenharia que enfatizou intuição geométrica e raciocínio visual. Seus alunos e sucessores, incluindo Wilhelm Ritter, que continuou a tradição gráfica, e Maurice Koechlin, que aplicou esses métodos ao projeto da Torre Eiffel, espalharam estática gráfica por toda a Europa e o mundo. Os métodos continuaram sendo a prática padrão até que os computadores eletrônicos tornaram as abordagens algébricas mais eficientes, e mesmo hoje, o raciocínio gráfico fornece uma visão do comportamento estrutural que pura computação não pode corresponder. Culmann também contribuiu para a visualização de campos tensão; Seus diagramas de trajetórias principais em vigas inspiraram o trabalho do anatomista Julius Wolff sobre remodelação óssea e continuam aparecendo nos livros didáticos ilustrando como as forças fluem através de elementos estruturais.

6.8.2 William John Macquorn Rankine (1820-1872)

William John Macquorn Rankine nasceu em 1820 em Edimburgo, Escócia, numa família com fortes interesses técnicos e científicos. Ele não recebeu educação formal em matemática ou física. Em vez disso, ele foi em grande parte autodidata, estudando mecânica avançada, matemática e termodinâmica independentemente enquanto trabalhava como aprendiz de engenharia civil. Este caminho não convencional fomentou uma abordagem pragmática e orientada para a síntese da mecânica, na qual a formulação teórica estava sempre ligada à aplicação de engenharia. A exposição precoce de Rankine a problemas reais de construção, combinada com rigoroso auto-estudo, moldou seu esforço ao longo da vida para apresentar a mecânica como uma ciência coerente e utilizável para engenheiros praticantes.

Rankine (Rankine, 1858 PDF) foi um dos fundadores da ciência da termodinâmica e uma figura fundamental no estabelecimento da mecânica de engenharia como disciplina rigorosa no mundo inglês. Seu *Manual de mecânica aplicada*, publicado pela primeira vez em 1858 e revisado através de muitas edições, ponteou o fosso entre mecânica teórica e engenharia prática, apresentando métodos matemáticos avançados em formas acessíveis aos engenheiros praticantes.

Rankine foi em grande parte autodidata em matemática e física, mas ele fez contribuições fundamentais para a termodinâmica (o ciclo de Rankina para motores a vapor, a escala de temperatura de Rancine), mecânica do solo, e análise estrutural. Nomeado Professor Regius de Engenharia Civil e Mecânica na Universidade de Glasgow em 1855, ele combinou rigor acadêmico com experiência prática de engenharia adquirida em projetos ferroviários, marítimos e fluviais. Seus livros didáticos, abrangendo mecânica aplicada, engenharia civil, máquinas e o motor a vapor, tornaram-se referências padrão em todo o mundo de língua inglesa.

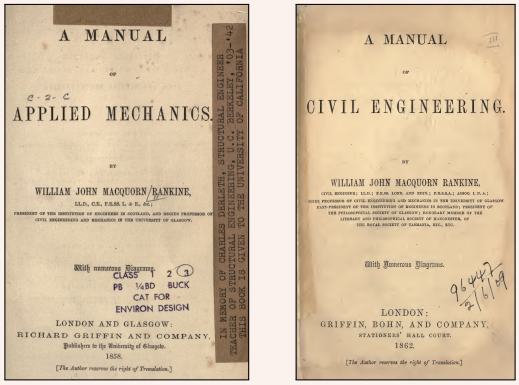
A formulação de Rankine da teoria da pressão terrestre permanece fundamental em geotécnica e projeto estrutural. Ele analisou o equilíbrio limitante das massas do solo, determinando as pressões ativas e passivas que os solos exercem na retenção de paredes sob condições idealizadas. Os coeficientes de pressão da Terra de Rankine, derivados da suposição de um solo sem coesão com superfícies planares falhantes, fornecem o ponto de partida para a manutenção do projeto da parede e análise da estabilidade da inclinação. Embora

CÓPIA PARA REVISÃO

mais tarde refinado pela teoria de cunha mais geral de Coulomb e métodos modernos de análise de limites, a abordagem de Rankine continua sendo o primeiro engenheiro de ferramentas alcançar em projeto preliminar.

O *Manual de mecânica aplicada* Resistência do material sintetizado, estabilidade estruturalE elasticidade em uma estrutura coerente para a educação de engenharia. Rankine apresentou a mecânica dos materiais, viga teoria, pilar flambagem, e a análise de pórticos e arcos com precisão matemática mantendo o foco na aplicação prática. Seu tratamento dos métodos energéticos antecipou-se aos desenvolvimentos posteriores em análise estrutural, e sua clara exposição de princípios fundamentais influenciou gerações de engenheiros treinados na tradição britânica.

Curiosamente, em um momento em que os mecânicos e engenheiros civis praticantes compartilhavam amplamente uma estrutura intelectual comum, Rankine foi autor de ambos *Um manual de mecânica aplicada* (Rankine, 1858) e.. *Um Manual de Engenharia Civil* (Rankine, 1862), Fig. 6.19.. Ao fazê-lo, ele exemplificava uma síntese de rigorosa teoria e prática de engenharia que contrasta com a fragmentação atual, onde as duas comunidades muitas vezes avançam ao longo de caminhos paralelos mas fracamente conectados.



(a) Rankine, 1858 (b) Rankine, 1862

Figura 6.19: Os manuais de Rankine conectam mecânica aplicada e engenharia civil

Rankine também contribuiu para a arquitetura naval, analisando a estabilidade e o movimento dos navios, e para a disciplina emergente da termodinâmica, onde seu trabalho sobre as propriedades do vapor e a eficiência dos motores de calor paralelou com o de Clausius e Kelvin. Sua notável amplitude, espalhando engenharia civil, mecânica e naval, ampliou o ideal vitoriano do engenheiro cientista. A síntese de Rankine ajudou a elevar a engenharia de uma arte prática para uma disciplina matemática completa, estabelecendo os fundamentos teóricos que sustentavam as grandes conquistas da engenharia na era industrial.

6.8.3 Christian Otto Mohr (1835-1918)

Christian Otto Mohr nasceu em 1835 em Wesselburen, no Ducado de Holstein. Ele recebeu uma rigorosa educação técnica na Escola Politécnica em Hannover, onde matemática, mecânica e engenharia prática foram estreitamente integrados. No início de sua carreira, Mohr trabalhou como engenheiro ferroviário, ganhando experiência em primeira mão com pontes, terraplenagens e sistemas estruturais submetidos a condições reais de carga. Esta combinação de treinamento analítico e experiência em engenharia prática moldou sua abordagem distinta da mecânica: um que buscasse clareza, generalidade e aplicabilidade direta para projeto estrutural.

Mohr (Mohr, 1874) fez contribuições fundamentais para análise estrutural que permanecem centrais na prática de engenharia, desenvolvendo ferramentas gráficas e analíticas que os engenheiros usam diariamente

CÓPIA PARA REVISÃO

mais de um século após sua introdução. Seu trabalho abrange a análise, cálculo e critérios de falha - uma amplitude da contribuição igualada por poucas outras figuras na história do mecânica estrutural.

Mohr estudou na Escola Politécnica em Hannover e trabalhou como engenheiro ferroviário antes de se tornar professor no Stuttgart Polytechnic (1867) e, mais tarde, no Dresden Polytecnic (1873), onde permaneceu até sua aposentadoria em 1900. Seu ensino e pesquisa estabeleceram Dresden como um dos principais centros de educação em engenharia estrutural na Alemanha.

O círculo de Mohr (1882) fornece uma representação gráfica elegante da transformação tensão.. Dado os componentes tensão em quaisquer dois planos perpendiculares, Mohr mostrou que o tensões em todos os planos possíveis através de um ponto pode ser representado por pontos em um círculo no σ-τ Avião. A geometria do círculo imediatamente revela o principal tensões (os pontos extremos no eixo horizontal), o máximo cisalhamento tensão (o raio do círculo), e as orientações destes planos críticos. Esta visualização, ainda ensinada em cada curso de mecânica introdutória, transforma transformações abstratas do tensor em relações geométricas intuitivas.

Talvez mais significativamente para análise estrutural, Mohr desenvolveu o método de carga unitária (também chamado de método de carga simulada ou método Maxwell-Mohr), que sistematicamente calcula deslocamentos em estruturas aplicando o princípio de trabalho virtual. Para encontrar o deslocamento em qualquer ponto, aplica-se uma carga unitária fictícia naquele ponto, determina-se a resultante esforços internos (em equilíbrio com a carga unitária mas não necessariamente compatível), e integra o produto destas forças "virtuais" com as deformações reais em toda a estrutura. Este método, aplicável a estruturas estaticamente determinadas e indeterminadas, tornou-se a base da abordagem flexibilidade para análise estrutural.

Mohr também avançou a teoria de linhas de influência- Diagramas mostrando como esforços internos, reações, ou deslocamentos em um ponto variam conforme uma carga unitária se move através de uma estrutura. Seu desenvolvimento sistemático de construção linha de influência, essencial para o projeto da ponte sob cargas móveis, permitiu uma análise racional das pontes ferroviárias e rodoviárias. O diagrama de Williot-Mohr, desenvolvido em conjunto com o engenheiro francês Williot , fornece um método gráfico para determinar treliça deflexões dos membros alongamentos - uma técnica que revela o comportamento cinemático das estruturas de maneiras que os métodos puramente numéricos não podem.

As contribuições de Mohr para a engenharia geotécnica foram igualmente significativas. O critério de falha de Mohr-Coulomb, combinando a representação de Mohr dos estados tensão com a lei de falha baseada em atrito de Coulomb para solos, permanece o modelo padrão para a resistência do solo e rocha. Sua representação gráfica dos envelopes de falha permite uma rápida avaliação se um dado estado tensão causará falha - essencial para o projeto da fundação, análise de estabilidade de inclinação, e cálculos de parede de retenção.

6.8.4 Henry Moseley (1801-1872)

Vida Primitiva e Formação Matemática Henry Moseley nasceu em 1801 em Londres e estudou no Trinity College, Cambridge, onde recebeu treinamento rigoroso em matemática numa época em que o Cambridge Mathematical Tripos dominava a educação analítica britânica. Ordenado como clérigo anglicano, Moseley ainda assim perseguia matemática e mecânica aplicadas com intensidade incomum, refletindo um período em que deveres clericais e investigações científicas frequentemente coexistiam. Sua exposição inicial a análise abstrata e raciocínio prático moldou uma carreira dedicada à tradução da mecânica matemática em formas utilizáveis por engenheiros e arquitetos.

Moseley (Moseley, 1843) foi um dos primeiros a aplicar sistematicamente a teoria da elasticidade para problemas estruturais práticos, produzindo um livro didático que treinou uma geração de engenheiros na análise matemática das estruturas. Seu *Princípios mecânicos de engenharia e arquitetura*, publicado em 1843,

CÓPIA PARA REVISÃO

representou um avanço significativo na educação de engenharia em inglês, apresentando métodos analíticos rigorosos para viga dobra, pilar flambagem, e análise de arco em forma acessível.

Os Princípios Mecânicos abordava a análise de estruturas com rigor matemático sem precedentes para um livro didático inglês. Moseley tratou a flexão usando a teoria nascente da elasticidade, derivando fórmulas de deflexão e distribuições tensão que possibilitaram a proporção racional dos membros estruturais. Sua análise da estabilidade pilar estendeu a teoria de Euler flambagem ao design prático, considerando os efeitos das imperfeições e carregamento excêntrico que o real pilares inevitavelmente exibe. Para os arcos de alvenaria, Moseley desenvolveu o princípio das menos pressões, analisando a estabilidade dos arcos dos voussoirs através da consideração da linha de impulso e sua relação com a geometria do arco.

A influência do livro era substancial e internacional. Foi reimpressa na Academia Militar dos Estados Unidos em West Point, com notas adicionais de Dennis Hart Mahan, tornando-se um texto padrão para a educação americana em engenharia. Traduções alemãs trouxeram os métodos de Moseley para o público continental. Sua clara exposição de técnicas analíticas, combinada com extensos exemplos trabalhados, estabeleceu um modelo para livros didáticos de engenharia que persiste hoje.

Os interesses de Moseley se estenderam além das estruturas para a eficiência das máquinas, a estabilidade dos navios e a mecânica das rodas d'água. Seu trabalho sobre estabilidade dinâmica, analisando as condições em que os corpos flutuantes retornam ao equilíbrio após perturbação, contribuiu para a arquitetura naval. Ao longo de sua carreira, Moseley exemplificou a aplicação da análise matemática aos problemas práticos, ajudando a transformar engenharia estrutural de um ofício guiado por regras empíricas para uma ciência aplicada baseada em mecânica. Ele não deve ser confundido com seu neto, o físico Henry Moseley (1887-1915), que estabeleceu o conceito de número atômico antes de sua morte em Gallipoli.

6.8.5 James Clerk Maxwell (1831-1879)

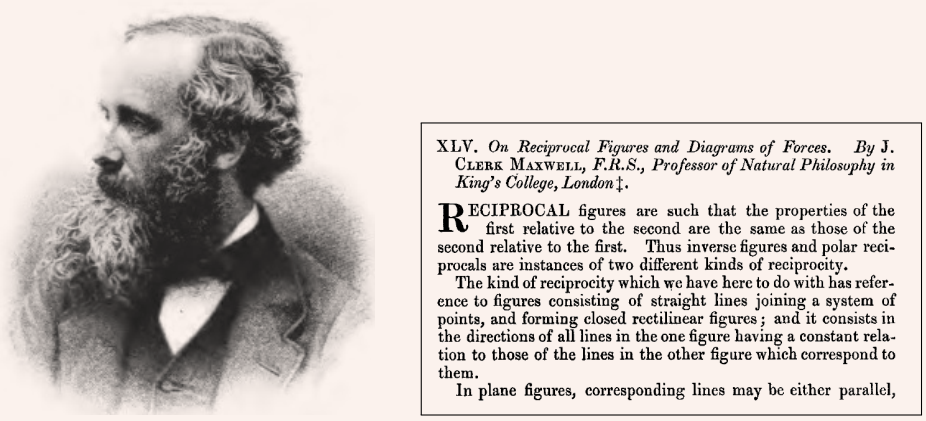
James Clerk Maxwell nasceu em 1831 em Edimburgo, Escócia, e cresceu na propriedade rural de sua família em Glenlair. Desde cedo, ele demonstrou uma aptidão incomum para geometria e raciocínio físico, produzindo investigações geométricas originais enquanto ainda era estudante. Ele foi educado na Universidade de Edimburgo e mais tarde no Trinity College, Cambridge, onde recebeu o treinamento mais forte possível em matemática e filosofia natural. Esta imersão precoce em geometria, análise e intuição física moldou o hábito de Maxwell ao longo da vida de buscar relações estruturais profundas por trás de diversos fenômenos físicos.

Maxwell (Maxwell, 1890), conhecido como um dos maiores físicos da história por sua teoria eletromagnética, também fez contribuições fundamentais para mecânica estrutural através de seu desenvolvimento de diagramas recíprocos para análise treliça. O jornal dele *Em números recíprocos e diagramas de forças* (Maxwell, 1864a) (Maxwell, 1864c) publicado em 1864, estabeleceu a base teórica para métodos gráficos que dominaram análise estrutural por décadas.

Maxwell foi educado em Edimburgo e Cambridge, onde suas habilidades matemáticas excepcionais foram imediatamente aparentes. Sua carreira abrangeu posições em Aberdeen, King's College Londres e Cambridge, onde ele se tornou o primeiro professor de Física Cavendish. Enquanto suas equações eletromagnéticas, unificando eletricidade, magnetismo e luz, constituem sua maior realização, seu trabalho em mecânica estrutural, visão de cor, termodinâmica, e a teoria cinética dos gases demonstra a notável amplitude de seu Genial.

Os diagramas recíprocos de Maxwell exploram uma dualidade fundamental entre diagramas de força e geometria estrutural. Ao analisar um treliça, constrói-se um diagrama de força no qual cada polígono corresponde a uma junta na estrutura, e cada segmento de linha representa a força em um membro conectando juntas adjacentes. Maxwell mostrou que este diagrama de força é o "reciprocal" do diagrama estrutural: linhas paralelas em uma são paralelas na outra, e as relações entre elas são regidas por regras geométricas

CÓPIA PARA REVISÃO



XLV. *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces.* *By* J. Clerk Maxwell, *F.R.S., Professor of Natural Philosophy in King's College, London*‡.

RECIPROCAL figures are such that the properties of the first relative to the second are the same as those of the second relative to the first. Thus inverse figures and polar reciprocals are instances of two different kinds of reciprocity.

The kind of reciprocity which we have here to do with has reference to figures consisting of straight lines joining a system of points, and forming closed rectilinear figures; and it consists in the directions of all lines in the one figure having a constant relation to those of the lines in the other figure which correspond to them.

In plane figures, corresponding lines may be either parallel,

Figura 6.20: James Clerk Maxwell

precisas. Esta reciprocidade permite a determinação simultânea de todas as forças membros através de uma única construção gráfica.

O significado prático era enorme. Onde os métodos algébricos exigiam sistemas de resolução simultânea de equações, tediosos e propensas a erros antes das máquinas computacionais, os diagramas de Maxwell permitiam aos engenheiros determinar forças em complexos treliças através da construção geométrica. O método era particularmente adequado para o estaticamente determinado treliças comum na construção de pontes e telhados do século 19, onde cada força membro poderia ser determinada a partir do equilíbrio sozinho.

O tratamento teórico de Maxwell foi além das técnicas práticas para estabelecer conexões profundas entre mecânica estrutural e geometria projetiva. Ele mostrou que existem figuras recíprocas sempre que uma estrutura é estaticamente determinada e desenvolveu critérios para a existência e singularidade de tais diagramas. Seu trabalho influenciou a estática gráfica de Culmann e foi estendido por Cremona, cujo procedimento sistemático para construir diagramas de força leva seu nome (o diagrama Maxwell-Cremona).

Maxwell também contribuiu com o teorema da reciprocidade deslocamentos (Teorema recíproco de Maxwell), afirmando que em uma estrutura elástica linear, o deslocamento no ponto A devido a uma carga unitária no ponto B é igual ao deslocamento no momento B devido a um carregamento unitário no momento A. Este resultado aparentemente simples tem profundas implicações: reduz o número de coeficientes de influência independentes, permite a verificação experimental de modelos analíticos, e fundamenta a simetria de rigidez e matrizes de flexibilidade no moderno análise estrutural (Maxwell, 1864c). O teorema recíproco de Maxwell é invocado, muitas vezes implicitamente, quando os engenheiros usam linhas de influência ou aplicam o método flexibilidade para estruturas indefinidas.

6.9 Grandes histórias de mecânica

As figuras reunidas aqui estão unidas por seu compromisso com o *História da mecânica* Ele mesmo. Em vez de avançarem novas teorias, sintetizaram e interpretaram desenvolvimentos anteriores, moldando como a mecânica é entendida e transmitida. Suas obras fornecem continuidade, perspectiva e estrutura crítica para a disciplina.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.9.1 Isaac Todhunter (1820-1884)

Isaac Todhunter (1820-1884) (Todhunter e Pearson, 1893) produziu o relato histórico mais abrangente já escrito sobre o desenvolvimento da teoria da elasticidade e a mecânica dos materiais. Sua monumental *Uma história da teoria da elasticidade e da força dos materiais, de Galilei para o tempo presente*, publicado postumamente em 1886 e estendido por Karl Pearson até 1893, continua sendo uma referência indispensável para qualquer um que buscasse entender como a elasticidade tornou-se uma estrutura fundamental em mecânica estrutural.

Todhunter era um matemático de Cambridge da indústria prodigiosa, autor de livros didáticos sobre cálculo, álgebra, trigonometria e estática analítica que treinou gerações de estudantes britânicos. Mas sua contribuição duradoura está em suas obras históricas: levantamentos abrangentes do cálculo das variações, da teoria de probabilidades e das teorias matemáticas da atração (teoria da gravitação e potencial), cada um documentando o desenvolvimento de ideias matemáticas com exaustiva meticulosidade. A história da elasticidade, deixada incompleta após sua morte, foi seu projeto mais ambicioso.

O trabalho documenta meticulosamente a evolução das formulações matemáticas da análise pioneira de Galileu da força viga através dos rigorosos tratamentos de Navier, Cauchy, Poisson, Green e Saint-Venant. Todhunter analisou fontes originais - muitas vezes em latim, francês, alemão e italiano - resumindo o conteúdo, métodos e conclusões de centenas de memórias e tratados. Seus relatos sobre as controvérsias em torno do número de constantes elásticas, a formulação correta de condições de contorno, e a interpretação dos resultados experimentais preservam detalhes que de outra forma seriam perdidos para a história.

Karl Pearson (1857-1936), que completou e estendeu o trabalho após a morte de Todhunter, foi ele mesmo uma figura significativa - mais tarde famosa como fundadora da estatística matemática - e trouxe tanto sofisticação matemática quanto julgamento crítico para o projeto. A história completa vai desde Galileu (1638) até Lord Kelvin e o final do século 19, preenchendo mais de 2.500 páginas em três volumes. As adições editoriais de Pearson, particularmente sobre as teorias moleculares da elasticidade e as contribuições dos físicos britânicos, complementaram o tratamento completo de Todhunter à matemática continental.

Para historiadores de mecânica e engenharia estrutural, Todhunter e Pearson continua sendo o ponto de partida para qualquer investigação séria. O trabalho documenta não só sucessos, mas também becos cegos, disputas prioritárias, e o esclarecimento gradual de conceitos que agora parecem óbvios. Revela como a teoria de tensão e deformação- agora ensinado como material elementar - emergido através de décadas de esforço pelas melhores mentes matemáticas da Europa.

6.9.2 Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972)

Stephen Prokofievich Timoshenko (Shpotivka, Ucrânia, 1878 - Wuppertal, Alemanha, 1972) foi o mecânico estrutural proeminente do século XX, cujos livros didáticos sobre a força dos materiais, elasticidade, vibrações e estabilidade treinados gerações de Engenheiros em todo o mundo. Ele estudou em St. Instituto Politécnico de Petersburg, onde ele mais tarde serviu na faculdade até tumulto político após a Revolução Russa forçou-o no exterior. Ele ensinou sucessivamente na Croácia (Zagreb) e Tchecoslováquia (Praga) antes de emigrar para os Estados Unidos em 1922. Depois de um breve período na Westinghouse Electric Corporation em Pittsburgh, ele entrou para a Universidade de Michigan (1927) e mais tarde na Universidade Stanford (1936), onde estabeleceu o programa proeminente em mecânica aplicada na América do Norte e foi mentor de um geração de estudiosos que povoariam faculdades de engenharia em todo o país. A Medalha ASME Timoshenko, premiada anualmente desde 1957 por contribuições distintas para mecânica aplicada, honra seu legado.

Livros e Contribuições Técnicas Os livros didáticos de Timoshenko tornaram-se as referências padrão em seus campos, traduzidos para dezenas de idiomas e usados por décadas: *Problemas de vibração na engenharia* (1928), *Força dos Materiais* (1930), *Teoria da elasticidade* (com Goodier, 1934), *Teoria da Estabilidade Elástica* (com Gere, 1936) e *Teoria das Placas e* (com Woinowsky-Krieger, 1940). Suas contribuições técnicas incluem a teoria

CÓPIA PARA REVISÃO

de Timoshenko, que explica a deformação em espessura e permanece essencial para uma análise precisa das estruturas profundas e sanduíches.

História da Força dos Materiais Seu *História da Força dos Materiais*, publicado em 1953 (Timoshenko, 1953), traça o desenvolvimento da ciência da mecânica sólida desde a antiguidade até os tempos modernos com a autoridade de um mestre praticante que tinha ele mesmo avançado o assunto. Ao contrário da documentação exaustiva de Todhunter e Pearson, *História* enfatiza o desenvolvimento da compreensão física e aplicação de engenharia. Ele rastreia como insights experimentais sobre a falha material, elasticidade, e estabilidade estrutural lentamente coagido em um quadro científico coerente. O livro cobre o mundo antigo e o Renascimento brevemente antes de se concentrar nos séculos XVIII, XIX e início do século XX emergiu como uma ciência de engenharia. O conhecimento pessoal de Timoshenko com muitas figuras do século XX–Prandtl, Föppl, von Kármán e outros—leva imediatamente aos seus capítulos posteriores, enquanto seus julgamentos sobre a importância relativa das contribuições, informados por uma vida inteira de ensino e Pesquisa, ter uma autoridade que contas puramente históricas não podem combinar. O *História* Também inclui mais de 200 esboços biográficos e retratos, preservando informações sobre figuras menos conhecidas que de outra forma seriam inacessíveis aos leitores de língua inglesa. Para engenheiros estruturais, o trabalho de Timoshenko fornece educação técnica e identidade profissional – um senso de pertencer a uma tradição que se estende desde a primeira análise experimental de Galileu de um cantilever viga para os sofisticados métodos computacionais de Hoje. Continua sendo a história mais acessível e legível da mecânica dos materiais.

6.9.3 René Dugas (1897-1957)

Dugas foi um mecânico francês e historiador da ciência que produziu uma das histórias mais abrangentes e filosoficamente sofisticadas de mecânica já escritas. Educado no *École Politécnica*Ele passou sua carreira lá como professor de mecânica, herdando a tradição da mecânica racional francesa que descende de Lagrange, Laplace e Poisson. Sua obra histórica reflete este pano de fundo: Meticulosa atenção às formulações matemáticas, apreciação pela interação entre ciência pura e aplicada, e sensibilidade às dimensões filosóficas dos conceitos mecânicos.

Histoire de la Mécanique Seu *Histoire de la Mécanique* (1950), traduzido para o inglês como *Uma história de mecânica* (1955) (Dugas, 1955) com um prefácio de Louis de Broglie, traça a evolução do pensamento mecânico da Grécia antiga através do século XX, iluminando como tanto as necessidades práticas quanto os avanços teóricos moldaram a ciência do movimento e equilíbrio. O trabalho começa com a estática grega e cinemáticaAs análises de alavancas de Arquimedes, as especulações cinemáticas de Aristóteles e seus sucessores... e traçam as contribuições medievais que mantiveram o conhecimento mecânico vivo e o avançaram de formas sutis. A Revolução Científica recebe tratamento prolongado: Galileu, os princípios de conservação de Descartes, a dinâmica de Huygens e a grande síntese de Newton. Dugas então segue o desenvolvimento da mecânica analítica do século XVIII através dos Bernoullis, Euler, d'Alembert e Lagrange, e a elaboração do século XIX de mecânica do contínuo, termodinâmica e física estatística.

Profundidade filosófica Dugas presta especial atenção aos fundamentos conceituais da mecânica: as definições de força, massa e inércia; O status das leis de Newton como axiomas ou generalizações empíricas; os princípios variacionais que reformulam a mecânica em termos de condições extremas. Esta profundidade filosófica distingue seu trabalho de histórias mais puramente técnicas. Ele ilumina como os conceitos que parecem óbvios em retrospecto, o caráter vetor da força, a distinção entre massa e peso, a aditividade das energias, surgiram através de prolongada luta e debate. Para engenheiros estruturais, Dugas fornece contexto essencial: os métodos das equações de equilíbrio, princípios energéticos são aplicações da mecânica geral para classes particulares de sistemas. Entender como esses princípios se desenvolveram, quais alternativas foram consideradas e rejeitadas, e que controvérsias assistiram à sua aceitação aprofunda o apreço por ferramentas agora usadas rotineiramente. A síntese de Dugas revela as profundas conexões entre mecânica estrutural e o empreendimento mais amplo da ciência física.

CÓPIA PARA REVISÃO

6.9.4 Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000)

Clifford Ambrose Truesdell III (Los Angeles, 1919 - Baltimore, 2000) foi uma figura singular na mecânica do século XX: um matemático que insistiu no rigor, um historiador que lê fontes originais em suas línguas originais, e um polemista que se deleitava em deflacionar reputações e perfurar mitos. Educado em Caltech (B.S., 1941) e Princeton (Ph.D., 1943), ele passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Indiana (1950-61) e Johns Hopkins University (1961-89). Truesdell fundou os diários *Arquivo de Mecânica Racional e Análise* (1957) e *Arquivo de História das Ciências Exatas* (1960), estabelecendo padrões exigentes de rigor para ambos os campos. Suas contribuições técnicas para mecânica do contínuo - particularmente a formulação racional de equações constitutivas e a termodinâmica dos materiais - foram influentes, mas seu trabalho histórico mostrou-se igualmente importante em remodelar como os estudiosos entenderam o desenvolvimento da física clássica. Truesdell era notoriamente excêntrico: Ele se recusou a voar, viajou por toda parte de navio ou trem, e manteve uma enorme biblioteca pessoal que ele alegou conter todos os trabalhos significativos sobre mecânica já escritos. Ele conduziu correspondência em latim com estudiosos europeus, descartou escolas inteiras de pensamento com prosa murcha, e uma vez descreveu o trabalho de um físico proeminente como ''um farrago de absurdo decorado com as habituais graças literárias' As rivalidades acadêmicas eram lendárias – ele mantinha disputas de décadas com colegas sobre pontos de rigor matemático ou interpretação histórica, muitas vezes realizadas nas páginas de revistas acadêmicas com um veneno que chocou até mesmo acadêmicos experientes.

Ensaios na história da mecânica Seu *Ensaios na história da mecânica* (1968) (Truesdell, 1968 PDF) e.. *História da mecânica clássica* (Truesdell, 1976 PDF) dissecar o desenvolvimento de mecânica do contínuo com uma acuidade crítica que revela como mal-entendidos, erros e obscuridades atrasaram a formalização da elasticidade, dinâmica de fluidos e termodinâmica. O volume coleta artigos sobre a história da mecânica clássica, elasticidade, hidrodinâmica e termodinâmica. Truesdell se aproxima de seus súditos com o olho de um cientista trabalhador: Ele está interessado não apenas em quem disse o que quando, mas em se eles acertaram, e se não, por que seus erros persistiram. Seu ensaio sobre a história de tensão e deformação traça como estes conceitos fundamentais, que parecem elementares, surgiram apenas gradualmente, através de muita confusão sobre a diferença entre força total e força por unidade de área, entre deslocamento e deformação, entre o comportamento material e deformação geométrica.

As controvérsias moleculares Truesdell é particularmente esclarecedor nas controvérsias moleculares da elasticidade do século XIX: os debates sobre se constantes elásticas poderiam ser derivadas de modelos moleculares (e, em caso afirmativo, quantas constantes independentes um material poderia possuir) versus a abordagem fenomenológica que toma as relações constitutivas como fatos empíricos para serem determinados por Experimentá-lo. Ele mostra como a abordagem molecular de Cauchy, embora frutífera ao estabelecer o conceito de tensor tensão, levou a previsões incorretas (como a teoria ''rari-constant'' requerendo apenas uma constante elástica para materiais isotrópicos) que confundiu o assunto para décadas. Os ensaios são escritos com o vigor e a inteligência característicos de Truesdell. Ele não hesita em chamar um argumento confuso de confuso ou identificar um erro que gerações subsequentes negligenciaram. Essa postura crítica, embora às vezes dura, tem um propósito valioso: lembra aos leitores que a história da ciência não é uma marcha triunfante da ignorância para o conhecimento, mas um processo propensa a parar, em que boas ideias eram muitas vezes rejeitadas e más idéias frequentemente aceitas. Para engenheiros estruturais acostumados a tratar teoria da elasticidade como verdade estabelecida, os ensaios de Truesdell fornecem uma perspectiva salutar sobre o quão duramente conquistada essa verdade foi.

Além desses trabalhos essenciais, o autor não encontrou outros tratamentos históricos de mecânica estrutural suficientemente abrangentes ou perspicazes para merecer inclusão aqui. Esta ausência é digna de nota: a história da engenharia estrutural, uma disciplina que moldou o ambiente construído da civilização humana, permanece subserviente pelos historiadores. O volume atual é uma tímida tentativa de abordar esta lacuna, para trazer a história da engenharia estrutural de uma forma palpável para uma nova geração de engenheiros que podem de outra forma saber pouco das lutas intelectuais, os falsos começos, os flashes de Perspicácia, e o acúmulo paciente de conhecimento que tornou sua profissão possível. Se estas páginas despertarem

CÓPIA PARA REVISÃO

em algum jovem engenheiro uma apreciação pelos gigantes sobre os quais todos estamos de pé, o autor considerará seu trabalho bem gasto.

6.10 Mulheres Notáveis

Seria indigno afirmar que as mulheres discutidas nesta seção fizeram contribuições para a mecânica na mesma escala que Euler, Lagrange ou Cauchy. Eles não. Mas seria igualmente indigno ignorá-los, pois suas conquistas - medidas contra as barreiras institucionais que enfrentavam - foram notáveis. Se eles fossem homens, não poderiam justificar menção especial; como as mulheres em uma época em que universidades eram fechadas para eles, quando sociedades aprendidas recusaram sua adesão, e quando a publicação muitas vezes exigia pseudônimos masculinos, sua presença no registro histórico é notável. Eu os incluo aqui não para distorcer a narrativa, mas para reconhecer que a história da mecânica, como toda a história, foi moldada por quem tinha permissão de participar.

Émilie du Châtelet (1706-1749) Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquesa du Châtelet, foi uma filósofa, matemática e física francesa. Nascido na aristocracia e com uma educação invulgarmente rigorosa, tornou-se um dos principais intérpretes da física newtoniana no continente. Sua tradução de Newton *Principia Mathematica* em francês (Newton, 1687 PDF), concluída pouco antes de sua morte e publicada postumamente, permaneceu a edição padrão francesa por mais de um século e ainda é consultada hoje. Mas Du Châtelet não era um simples tradutor. seu extenso comentário esclareceu, ampliou, e em lugares corrigiu os argumentos de Newton, incorporando desenvolvimentos da matemática continental que o próprio Newton não havia empregado.

Além da *Principia*, ela contribuiu para o *Vis viva* A controvérsia sobre se a quantidade conservada em processos mecânicos era momentâneamv) ou o que agora reconhecemos como energia cinética (mv^2). Ela *Instituições de Fisique* (Châtelet, 1740) Argumentou por este último, sintetizando idéias Leibnizian e Newtonian de maneiras que antecipavam o conceito moderno da energia. Que uma mulher poderia intervir substantivamente em uma disputa envolvendo Leibniz, o Bernoullis, e a Academia Francesa fala com a natureza excepcional de seu intelecto e posição.

Sophie Germain (1776-1831) Marie-Sophie Germain foi uma matemática francesa que fez contribuições duradouras tanto para a teoria dos números como para a da elasticidade. Negado acesso à recém-fundada École Polytechnique por causa de seu sexo, ela obteve notas de palestra através de conhecidos masculinos e submeteu seu trabalho inicial sob o pseudônimo "Monsieur LeBlanc"Correspondente anônimo, ele se tornou o mentor dela. Um endosso que emprestou credibilidade ao seu trabalho.

A contribuição mais significativa de Germain para a mecânica surgiu de seu persistente engajamento com o problema da placa vibratória colocado pela Academia de Paris em 1809, após as demonstrações dramáticas de Ernst Chladni de padrões nodais em placas de metal vibrando. A Academia ofereceu um prêmio por uma teoria matemática explicando esses padrões – um problema que havia derrotado vários matemáticos líderes. Germain apresentou inscrições em 1811, 1813, e finalmente em 1816, quando recebeu o prêmio (Germain, 1821). Sua abordagem, embora falhada em sua derivação de condições de contorno, produziu uma deflexão parcial de placa governante de quarta ordem que, uma vez corrigida por Lagrange e depois refinada por Kirchhoff, tornou-se fundamental para a teoria da placa:

$$D\nabla^4 w = q$$

Onde D é a rigidez da flexão, w A deflexão transversal, e q O carga distribuída. Esta equação, às vezes chamada de equação Germain-Lagrange em reconhecimento de sua prioridade, permanece central para análise estrutural de placas finas. Que uma mulher autodidata, trabalhando em grande parte isolada,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

poderia dar uma contribuição duradoura para um problema que envolveu Lagrange, Poisson, e Navier é um testemunho de sua habilidade e determinação.

Emmy Noether (1882-1935) Amalie Emmy Noether foi um matemático alemão cujo trabalho transformou álgebra abstrata e física matemática. Embora suas contribuições estejam principalmente fora mecânica estrutural propriamente dita, seu famoso teorema conecta simetrias às leis de conservação (Noether, 1918) fornece a base mais profunda para os princípios variacionais que permeiam a mecânica analítica, incluindo as equações de Euler-Lagrange encontradas§9.3.2.2).

O teorema de Noether afirma, em essência, que cada simetria contínua de um sistema físico corresponde a uma quantidade conservada: A simetria da tradução temporal produz a conservação de energia; A simetria da tradução espacial produz a conservação do momento; Simetria rotacional produz conservação do momento angular. Este insight, solicitado por Hilbert e Klein em conexão com a relatividade geral, uniu o que antes havia aparecido como leis físicas separadas em uma única estrutura matemática.

Como Germain antes dela, Noé enfrentou a exclusão institucional. Ela teve permissão para dar palestras em Göttingen apenas sob o nome de Hilbert, e quando os nazistas expulsaram a faculdade judaica em 1933, ela emigrava para os Estados Unidos, onde morreu dois anos depois. O obituário de Einstein no *New York Times* descreveu-a como o gênio matemático criativo mais significativo até agora produzido desde que a educação superior das mulheres começou (Einstein, 1935). Se alguém aceita ou não essa avaliação, seu teorema permanece indispensável para qualquer um que queira entender por que métodos variacionais funcionam.

6.11 Análise e contexto

6.11.1 Competição, sigilo e progresso científico

6.11.1.1 Métodos de dissimulação

O início do período moderno foi uma era de ouro não só para descobertas científicas, mas também para paranóia intelectual. Muito antes de revistas revisadas por pares e pré-impressões cronometradas, os cientistas não tinham nenhum mecanismo formal para estabelecer prioridade - então eles muitas vezes recorreram a uma estratégia incomum: publicando suas descobertas em código. Esta prática refletia ansiedades mais profundas sobre a propriedade intelectual, reputação profissional e o valor econômico do conhecimento científico em uma época em que o patrocínio e as disputas prioritárias poderiam fazer ou quebrar uma carreira.

Se por *Cifra*- um método de transformar sistematicamente uma mensagem para obscurecer seu conteúdo - ou por *anagrama*, onde as letras de uma frase são misturadas em uma nova ordem, ou por enigmas enigmáticos latinos, o objetivo era o mesmo: para plantar uma bandeira sem revelar o território. Esta prática estranha combina o medo genuíno de roubo intelectual com um toque renascentista para quebra-cabeças, mesa 6.5.

Esses cientistas não eram apenas cautelosos, eles eram competitivos, secretos, e muitas vezes profundamente desconfiados uns dos outros. O resultado foi uma curiosa mistura de brilho e suspeita: Uma época em que as maiores mentes do mundo ocultavam suas ideias em enigmas, caso alguém tentasse roubá-las.[54] Mesa 6.6.

[54]Hoje, pesquisadores usam repositórios de pré-impressão com data marcada *X1* ou ArXiv, para estabelecer prioridade sem demora, garantindo abertura e atribuição. Isso representa uma mudança dramática do sigilo codificado da cultura científica primitiva.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.5: Comparação dos métodos criptográficos usados pelos primeiros cientistas modernos

Método	Técnica	Características-chave	Exemplo & Segurança
Anagrama	Rearranjo de cartas	Contagem de letras fixa; Permutação simples; Sem chave sistemática	Hooke: *Ceiiinosssttuv* → *UT tensio, sic vis*. Bernoulli: Escondi sua solução elástica em um anagrama no final de 1690 *Espécime alterum*. Segurança: Baixo
Cifra	Substituição sistemática	Codificação baseada em regras. requer chave de decodificação; Aproximação algorítmica	Huygens e Leibniz: Trocaram cifras em correspondência de catenária. Bernoulli também usou cifras de substituição em notas privadas. Segurança: Alto
Logogriph	Quebra-cabeças multi-camadas	Combina vários métodos; inclui enigmas e jogo de palavras; Muitas vezes tem pistas	Bernoulli: posou o desafio elástico com um anagrama, uma charada e um prazo (festival da colheita de 1690). Segurança: Variável
Escondimento	Retendo ou insinuando	Sem codificação formal. Depende da omissão; Medida temporária	Descartes: referências vagas a descobertas. Galileu: Publicação atrasada, resultados mantidos em cartas. Segurança: Muito baixo

Exemplos

Hooke

`Ceiiinosssttuv`✓

Precisamos reorganizar essas 14 letras para formar um texto latino significativo que descreva um princípio científico.

Primeiro, vamos catalogar nossas cartas disponíveis:

Padrões básicos;

- Total de letras: 14
- Vogais: e(1), i(3), o(1), u(1) = 6 vogais
- Consonants: c(1), n(1), s(3), t(2), v(1) = 8 consoantes
- Mais frequente: I(3), S(3), T(2)

Aproximação de Descriptografia Sistemática:

1. Identifique palavras latinas comuns: Um estudioso do século 17 procuraria padrões latinos familiares:

2. Procure por termos técnicos: Dado o contexto científico de Hooke, procuramos termos mecânicos:
3. Tentativa de Combinações de Palavras:

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.6: Anagramas, cifras e mais

Cientista	Método	Texto codificado	Significado Decodificado
Robert Hooke § 6.6.6	Anagrama	*Ceiiinosssttuv*	*UT tensio, sic vis* "Como a extensão, então a força"
	Anagrama	*Abccddeeeeefggiiiiimmmm Nnnnnooprsssstttttuuuu uuuux*	*UT Pendet contínuo flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* ('As pendura um cabo flexível assim, invertido, ficar os pedaços de toque de um arco')
Isaac Newton §6.6.7	Anagrama de contagem de cartas	*6Accdae13eff7i3l9n4o4qrr 4s8t12ux*	*Dados aequatione quotcunque fluentes quantitates englobente, fluxiones invenire; E vice-versa* "Dando uma equação envolvendo qualquer número de quantidades fluentes, para encontrar os fluxos; e vice-versa")
Galileo Galilei § 6.6.2	Anagrama longo	*Smaismrmilmepoetaleumibu Nenugttauira*	"Altissimum planetam tergeminum observavi"("Eu observei o planeta mais distante para ter uma forma tripla ')
RenÉ Descartes	Resultados retidos	Sem cifras, só dicas veladas	Hinted em descobertas em óptica e geometria, mais tarde publicado
Jakob Bernoulli § 9.3	Anagrama	*Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipdandtt tcpgkbp aqdbkzs*	*Eixo portio applicatam inter et tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadriatum aplicatae ad consstans quoddam spatium*

(a) Julgamento 1: Começando com "ut"

Use: `ut` (u,t)
Remaining: `ceiiinosssv`

Podemos formar "tensio"? Checando: T(1), e(1), n(1), s(3), i(3), o(1)

Use: `tensio` (t,e,n,s,i,o)
Remaining: `ciissv`

(b) Julgamento 2: Continuando o padrão: De cartas restantes `Ciissv`, podemos formar:

Use: `sic` (s,i,c)
Remaining: `isv`
Use: `vis` (v,i,s)
Remaining: none

(c) A solução emerge: Organizando nossas palavras descobertas:

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.7: Cartas disponíveis no anagrama de Hooke

Carta	Contagem	Carta	Contagem	Carta	Contagem
c	1	i	3	s	3
e	1	n	1	t	2
o	1	u	1	v	1

Tabela 6.8: Palavras comuns latinas que podemos formar

Palavra	Usa letras	O que quer dizer
ut	U, t	Como/quando
est	E, s, t	É
et	E, t	e..
si	S, I	if
sic	s, i, c	Assim/assim
Em	I, n	Em
Vis	V, I, S	força/força

UT tensio, sic vis

Isto segue a clássica construção latina:

- ”ut...sic” = ”assim...’ (estrutura comparativa)
- ”tensio” = tensão, alongamento (caso ablativo)
- ”vis” = força, força (caso nominativo)

Em seguida, verificamos, verificando a contagem de letras

Finalmente, a frase descriptografada traduz-se em:

”Como a tensão, então a força”

Note que

- **1676**:. Anagrama publicado para estabelecer prioridade
- **1678**:. Solução revelada em *De Potentia Restitutiva*
- **Relevância moderna**:. Fundamento da teoria da elasticidade e engenharia mecânica

Bernoulli O desafio lançado por Jakob Bernoulli para resolver o problema Elastica (§9.3.1)

Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipdandtt tcpgkbp aqdbkzs

Bernoulli, Jakob, 1694 *“Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere*

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.9: Termos científicos possíveis nas cartas disponíveis

Palavra Potencial	Cartas necessárias	Disponível?
Tensio (tensão)	T,e,n,s,i,o	✓
Motus (moção)	M,O,T,U,S	X (Não m)
Vis (força)	V,I,S	✓

Tabela 6.10: Verificação do uso da carta

Carta	Original	Solução	Combinar
c	1	1 (*sic*)	✓
e	1	1 (*teNsio*)	✓
i	3	3 (*Dezio*, *sic*, *vis*)	✓
n	1	1 (*tensio*)	✓
o	1	1 (*Tensio*)	✓
s	3	3 (*Dezsio*, *sic*, *vis*)	✓
t	2	2 (*ut*, *tensio*)	✓
u	1	1 (*ut*)	✓
v	1	1 (*vÉ*)	✓
Total	**14**	**14**	✓

> *Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*; Logogriph

Usando a Mesa 6.11, (Alassi, 2020)

Tabela 6.11: Decifrando o logogrifo de Bernoulli, (Alassi, 2020)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y	z
1	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y
2	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
3	s	t	u	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

Remem	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	[2]	1	2	...
Cifra	Q	r	z	u	m	u	b	a	p	t	d	x	q	o	p	d	d	b	b	p	p	o	y	l	[u]	f	y	...
Texto simples	p	o	r	t	i	o	a	x	i	s	a	p	p	l	i	c	a	t	a	m	i	n	t	e	[r]	e	7	...

A cifra usa:

- Linha 1: Um turno para a direita
- Fila 2: Dois turnos para a direita
- Fila 3: Seis turnos para a direita Então repete o padrão

CÓPIA PARA REVISÃO

Isso explica porque "Qrzumu bapt..."descodifica para "eixo portio"... - está usando a tabela de substituição que você mostrou antes com um padrão repetido 1-2-3!

Anagrama de Newton :. Em 1676, Isaac Newton publicou um anagrama criptográfico para estabelecer prioridade para sua descoberta do cálculo (método de fluxos) mantendo o método em segredo, (Newton, 1960). Esta prática era comum entre matemáticos do século XVII para garantir a propriedade intelectual antes da publicação completa.

`6Accdae13eff7i3l9n4o4qr4s8t12ux`

Dados aequatione quotcunque fluentes quantitates englobente, fluxiones invenire; E vice-versa

"Dado uma equação envolvendo qualquer número de quantidades fluindo, para encontrar os fluxos; e inversamente

Newton, 1960 *"Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676"*

Isso é um.. **Anagrama de frequência** onde:

- Números indicam quantas vezes aparece a seguinte letra
- Cartas sem números aparecem uma vez
- Todas as letras são reorganizadas para formar a frase latina

Decodificação passo a passo:

Tabela 6.12: Quebrando a cifra de Newton

Cifra	O que quer dizer	Cifra	O que quer dizer
`6a`	6 letras a's	`cc`	2 letras C's
`d`	1 letra d	`a`	1 adicional a
`e`	1 letra e	`13e`	13 mais E's
`ff`	Duas letras F's	`7i`	7 letras
`3l`	3 letras	`9n`	9 letras n's
`4o`	4 letras o's	`4q`	4 letras Q's
`rr`	2 letras R's	`4s`	4 letras
`8t`	8 letras t's	`12u`	12 cartas
`x`	1 letra x		

A contagem total de letras disponíveis para o rearranjo:

A mensagem descriptografada de Newton descreve o teorema fundamental do cálculo :

- **Fluxiões** = Derivados (taxas de mudança)
- **Fluentes** = integrais (quantidades acumuladas)
- O teorema estabelece a relação inversa entre diferenciação e integração

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.13: Freqüência de letra completa

Carta	Contagem	Carta	Contagem	Carta	Contagem	Carta	Contagem
a	7	e	14	i	7	o	4
c	2	f	2	l	3	q	4
d	1	n	9	r	2	s	4
t	8	u	12	x	1		

Na notação moderna, a declaração de Newton corresponde a:

$$\text{Dado: } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
$$\text{Then: } F'(x) = f(x)$$
$$\text{Conversely: } \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Este anagrama foi a resposta de Newton à disputa prioritária emergente com Leibniz sobre a invenção do cálculo. Publicando o formulário criptografado em 1676, Newton poderia provar mais tarde que tinha descoberto os princípios fundamentais antes da publicação de Leibniz em 1684.

Para verificar a decodificação, pode-se:

1. Conte as letras no texto em latim decodificado
2. Confirme que coincidem com a frequência especificada na cifra
3. Rearranje as letras alfabeticamente para reconstruir o anagrama original

A persistência desta prática revela quanto avanço científico dependia da reputação e reconhecimento individual, ao invés das estruturas institucionais colaborativas que mais tarde emergiriam.

Nem mesmo Galileu, olhando através de seu telescópio, conseguiu resistir a transformar astronomia em um jogo enigmático de palavras. Em um mundo onde as reputações eram feitas ou quebradas por precedência, a ciência estava realmente avançando - mas muitas vezes sob bloqueio e anagrama.

Nem mesmo Galileu, olhando através de seu telescópio, conseguiu resistir a transformar astronomia em um jogo enigmático de palavras. Em um mundo onde as reputações eram feitas ou quebradas por precedência, a ciência estava realmente avançando - mas muitas vezes sob bloqueio e anagrama.

6.11.1.2 Litígios e seus impactos

Como discutido em §6.11.1.1, o início do período moderno foi marcado não só pelo brilhantismo intelectual, mas também por intensa competição, sigilo e suspeita. Cientistas muitas vezes recorrem a cifras, anagramas e outras ofuscações para garantir suas reivindicações enquanto ocultam suas percepções. Esta cultura de dissimulação não era apenas uma peculiaridade da época, refletia uma realidade mais profunda: A descoberta científica há muito está envolvida com rivalidades, disputas e questões de precedência.

A revolução científica foi impulsionada não só por gênios individuais, mas também por complexas redes de termoíndicerivalidade, colaboração e troca intelectual. Entender essas relações pessoais ajuda a explicar tanto o rápido ritmo de descoberta quanto as disputas às vezes amargas que acompanharam grandes avanços.

CÓPIA PARA REVISÃO

Mesa 6.14 documenta os maiores conflitos intelectuais que moldaram o desenvolvimento da mecânica. Essas disputas, embora muitas vezes acrimônicas, aceleraram o progresso científico forçando os participantes a desenvolver argumentos mais rigorosos e explicações mais claras.

Em vez de vermos essas disputas como distrações infelizes do progresso científico, devemos reconhecê-las como integrais à dinâmica competitiva que levou ao rápido avanço. O estabelecimento de prioridade tornou-se crucial não só para reputação pessoal, mas também para garantir o patrocínio, posições acadêmicas e apoio institucional. Neste sentido, a rivalidade científica era um poderoso motor de inovação, mesmo quando causou sofrimento pessoal para os indivíduos envolvidos.

Tabela 6.14: Grandes conflitos intelectuais no desenvolvimento da mecânica

Century	Números envolvidos	Tópico	Natureza da Disputa	Resultado/Impacto
16th	Tycho Brahe vs Kepler	Modelos celestiais	Compromisso geocêntrico (Tycho) vs elipses heliocêntricas (Kepler)	As leis de Kepler prevaleceram
16th	Galileu vs Igreja	Heliocentrismo	Galileu defendeu Copérnico; Igreja condenou heliocentrismo como heresia	Galileu tentou pela Inquisição
16th	Galileo vs Simplicio	Ciência aristotélica	Retrato satírico das visões aristotélicas em *Diálogo*	Conflito profundo com a Igreja
17th	Newton vs Hooke	Lei da gravidade	Hooke reivindicou prioridade. Newton se ressentiu disso	Newton omitiu Hooke *Principia*
17th	Newton vs Leibniz	Invenção do cálculo	Descobrimentos independentes levaram a disputa nacionalista e acadêmica	Ambos creditados eventualmente
17th	Boyle vs Hobbes	Método científico	Experimentalismo (Boyle) vs dedução racionalista (Hobbes)	Formada a prática científica moderna
18th	Briga da família Bernoulli	Cálculo de variações	Rivalidade e plágio reivindicam entre Jakob, Johann, Daniel	Avanços chave estimulados
18th	Euler vs d'Alembert	Cordas vibradoras	Discordo na formulação e interpretação da PDE	Fundamentos avançados de análise
19th	Poisson vs Navier	Teoria da elasticidade	Continuum vs pressupostos moleculares na modelagem tensão-deformação	Cauchy depois uniu ambos com mecânica tensora
19th	Cauchy vs Poisson	Rigor na mecânica	Cauchy criticou as formulações de Poisson como falta de rigor matemático	A teoria baseada em tensores de Cauchy tornou-se padrão
19th	Escolas do Reino Unido vs Continental	Mecânica	Britânico *F*luxos Vs rigor continental e funções	Criamos uma divisão cultural a longo prazo

6.11.2 A transição para a ciência moderna da engenharia

As figuras perfiladas neste capítulo orquestraram coletivamente uma transformação fundamental em como os humanos entendiam e manipulavam o mundo físico. A transição das tradições artesanais medievais para a ciência moderna da engenharia não ocorreu durante a noite, mas sim através de uma série de desenvolvimentos interligados que abrangeram três séculos.

Três mudanças-chave caracterizam esta transformação:

CÓPIA PARA REVISÃO

Formalização Matemática: Começando com as leis de escala de Galileu e culminando com equações diferenciais de Navier, os praticantes descreveram cada vez mais fenômenos mecânicos usando relações matemáticas em vez de regras empíricas. Isto *Matemática* permitiu maior precisão e generalização mais ampla.

Inovação Institucional: O estabelecimento de academias científicas, escolas de engenharia e sociedades profissionais criou novos mecanismos para gerar, validar e disseminar conhecimento. Essas instituições promoveram a colaboração, ao mesmo tempo que intensificaram a competição, ambas aceleraram o progresso científico.

Integração de Teoria e Prática: Figuras como Coulomb, Navier e os Bernoullis demonstraram que a análise matemática abstrata poderia resolver problemas reais de engenharia. Esta integração

Convenceu tanto teóricos como praticantes de que a mecânica matemática não era apenas intelectualmente satisfatória, mas praticamente valiosa.

Em 1850, as fundações estavam em vigor para o rápido desenvolvimento da engenharia estrutural moderna, com sua combinação característica de rigor matemático, validação experimental e aplicação prática.

6.11.3 A Revolução Francesa na Educação em Engenharia

O surgimento da educação sistemática em engenharia começou na França, onde as demandas de um ambicioso programa de infraestrutura do Estado criaram necessidades sem precedentes para profissionais tecnicamente treinados. A transformação começou com o *Corpo de Ponts e ChaussÉes* , criada em 1716 para gerenciar a rede de estradas, pontes e canais da França. Inicialmente contando com aprendizado e experiência prática, este corpo evoluiu para algo muito mais significativo quando o governo fundou a *École des Ponts et Chaussées* Em 1747, a primeira escola de engenharia civil do mundo.

Sob a direção de Jean-Rodolphe Perronet, *École!Ponts et Chaussées* desenvolveu um currículo revolucionário que equilibrava rigorosa instrução matemática com treinamento prático em levantamento, hidráulica e construção. Os alunos estudaram geometria, mecânica e cálculo antes de aplicar esses princípios a problemas reais de engenharia - uma abordagem pedagógica que partiu radicalmente dos aprendizados tradicionais do ofício.

O culminar desta inovação francesa veio com o *École! Politécnica*, fundada em 1794 durante o período revolucionário. Criado para treinar engenheiros para o serviço militar e civil, a Politécnica recrutou os matemáticos mais distintos da era como professores, incluindo Lagrange, Laplace, Monge, e várias figuras retratadas neste capítulo. O currículo matematicamente rigoroso da escola estabeleceu o princípio de que todas as disciplinas de engenharia devem ser fundamentadas em conhecimento teórico sistemático ao invés de tradição empírica.

Este modelo francês rapidamente se espalhou pela Europa e além. Os EUA. Academia Militar em West Point, estabelecido em 1802, foi transformado sob o Superintendente Sylvanus Thayer (1817-1833), que tinha estudado o *École! Politécnica* durante missões diplomáticas para a França. A reorganização de Thayer introduziu o *Sistema Thayer*, fazendo A primeira verdadeira escola de engenharia da América de West Point e estabelecer a abordagem matemática que dominaria o ensino técnico americano ao longo do século XIX.

As instituições europeias seguiram rapidamente o exemplo, Mesa 6.15.. A Politécnica Karlsruhe (1825) e a Politécnica de Viena (1815) adotaram métodos pedagógicos franceses, enquanto academias militares existentes em toda a Prússia, Áustria e Grã-Bretanha reformaram seus currículos para enfatizar as fundações matemáticas. Em 1850, a inovação francesa havia criado um novo padrão internacional para o ensino técnico, que incorporava a integração da teoria e prática que caracterizavam a ciência moderna da engenharia. Essas instituições não só treinaram os engenheiros que construiriam a era industrial, mas também estabeleceram a engenharia como uma profissão distinta com padrões reconhecidos, conhecimento sistemático e autoridade social.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.15: Principais Engenharias e Instituições Técnicas na Europa e Além (1740-1850)

Ano	Instituição	Localização	Tipo	Influência/Notas Francesas
1741	Academia Militar Real	Woolwich, Inglaterra	Militar	Modelo pré-francês; artilharia & Engenharia
1747	École des Ponts et Chaussées	Paris, França	Civilista	**Modelo original** para a engenharia civil
1765	Bergakademie Freiberg	Saxônia	Mineração	Treinamento técnico especializado
1783	École des Mines	Paris, França	Mineração	Educação técnica do estado francês
1794	École Politécnica	Paris, França	Militar/Civiliano	**Modelo primário** Para as reformas europeias
1799	Bauakademie	Berlim, Prússia	Arquitetura	Adaptação alemã dos métodos franceses
1802	U.S. Academia Militar	West Point, EUA	Militar	Inicialmente tradicional; Mais tarde, influência francesa
1802	Colégio Militar Real	Sandhurst, Inglaterra	Militar	Engenharia militar britânica
1809	Instituto de Engenheiros Ferroviários	St. Petersburgo, Rússia	Transporte	Escola técnica russa primitiva
1815	K.K. Instituto Politécnico	Viena, Áustria	Politécnico	Adoção direta do currículo francês
1816	Real Academia de Artilharia	Segovia, Espanha	Militar	Adoção espanhola de métodos franceses
1817	West Point (Reforma Thayer)	West Point, EUA	Militar	**Thayer estudou Politécnica; Modelo francês completo adotado**
1822	Academia Militar Imperial	Rio de Janeiro, Brasil	Militar	Adaptação colonial portuguesa
1825	Polytechnische Schule	Karlsruhe, Baden	Politécnico	**Forte influência da Politécnica**
1826	Universidade de Londres	Londres, Inglaterra	Universidade	Faculdade de Engenharia; Educação secular
1827	Polytechnische Schule	Munique, Baviera	Politécnico	Abordagem matemática francesa
1828	Polytechnische Schule	Dresden, Saxônia	Politécnico	Curso técnico sistemático
1828	Koninklijke Militaire Academia	Breda, Holanda	Militar	Escola de engenharia militar holandesa
1828	St. Instituto Petersburg	St. Petersburgo, Rússia	Tecnologia	Adoção russa de métodos ocidentais
1829	King's College Londres	Londres, Inglaterra	Universidade	Departamento de Engenharia estabelecido
1832	École Centrale des Arts et Manufactures	Paris, França	Engenharia	Engenharia industrial francesa
1842	Koninklijke Academia	Delft, Holanda	Engenharia Civil	Escola de engenharia civil holandesa
1844	École Nationale Supérieure des Mines	Saint-Étienne, França	Mineração	Escola técnica regional francesa
1847	Eidgenössische Polytechnische Schule	Zurique, Suíça	Politécnico	Universidade Técnica Federal Suíça

6.12 Conclusão: Da Filosofia Natural à Engenharia

Os séculos XVII e XVIII marcaram uma profunda transformação na história da mecânica, à medida que a disciplina evoluiu de uma busca filosófica fundamentada em observação e geometria para uma ciência rigorosamente matemática. As figuras pesquisadas neste capítulo, de Mozi e Arquimedes na antiguidade, através de Galileu, Newton, e os Bernoullis, a Cauchy, Navier e Saint-Venant, cada um desempenhou um papel fundamental na formação desta transformação. Suas idéias basearam-se não só na mecânica clássica, mas também na moderna análise estrutural, elasticidade, hidrodinâmica e princípios variacionais. Esta transformação não era inevitável nem direta; requereu a convergência de mudanças intelectuais, institucionais e culturais que alteraram fundamentalmente como o conhecimento foi criado e validado.

O que é impressionante em retrospecto não é apenas a amplitude de suas contribuições individuais, mas a

CÓPIA PARA REVISÃO

teia da linhagem intelectual que as conecta. Muitos desses cientistas foram diretamente influenciados por seus antecessores ou mentores, enquanto seu próprio trabalho moldou profundamente a próxima geração. Alguns, como Euler, ficavam como pontes entre épocas; outros, como Navier, ajudaram a inaugurar a era da engenharia científica formalizando o conhecimento prático através de estruturas matemáticas. As relações pessoais entre essas figuras... Menorships, rivalidades, colaborações e conflitos... eram tão importantes quanto suas descobertas individuais na condução do rápido avanço da ciência mecânica.

Talvez mais significativamente, este período testemunhou o surgimento de um novo tipo de praticante: O engenheiro-cientista que combinou sofisticação matemática com experiência prática. Figuras como Coulomb e Navier demonstraram que a análise matemática abstrata poderia resolver problemas reais de engenharia, enquanto os Bernoullis e Euler mostravam que desafios práticos poderiam inspirar profundos insights teóricos. Esta integração da teoria e prática tornou-se a característica definidora da engenharia moderna e permanece essencial para mecânica estrutural hoje.

A transformação foi possibilitada não só pelo gênio individual, mas por profundas mudanças institucionais. O estabelecimento de academias científicas, a Royal Society em Londres (1660), *Académie des Sciences* em Paris (1666), na Academia de Berlim (1700) e no St. Academia de Petersburg (1724)–criou novos mecanismos para validar e disseminar o conhecimento. A fundação de escolas de engenharia, da *École des Ponts et Chaussées* (1747) para o *École Politécnica* (1794), estabeleceu uma educação técnica sistemática que combinava rigor matemático com aplicação prática. Essas instituições transformaram a engenharia de um ofício aprendido através do aprendizado para uma profissão baseada em princípios científicos.

Os textos de referência pesquisados neste capítulo... de Galileu *Discorsi* Para Navier's *Leçons*Servida como os veículos através dos quais o conhecimento tácito se tornou ciência formal. Esses livros fizeram mais do que registrar descobertas; Eles treinaram gerações de praticantes, estabeleceram padrões de rigor, e criaram uma linguagem comum para o discurso da engenharia. Os grandes livros traçam uma ascensão intelectual da arte empírica ao rigor matemático e domínio computacional: da pureza dedutiva de Euclides *Elementos* para as formulações revolucionárias de Newton, desde a introdução da teoria da elasticidade em engenharia até o surgimento dos métodos matriciais e análise elemento finito.

Esses textos não são apenas documentos da história; eles são os andaimes sobre os quais as disciplinas de engenharia estrutural e arquitetura são construídas. Os problemas que resolvemos hoje – seja projetando uma ponte, um arranha-céus, ou um modelo computacional – são moldados pelas descobertas conceituais documentadas nestes trabalhos. Entendendo-os, aprofundamos nossa apreciação da profissão... não apenas como uma coleção de técnicas e fórmulas, mas como uma linhagem de raciocínio, criatividade e investigação que continua evoluindo.

À medida que avançamos para examinar os desenvolvimentos técnicos que emergiram desta fundação histórica, vale a pena lembrar que por trás de cada equação, cada princípio e cada método está uma história humana de curiosidade, persistência e coragem intelectual. O mecânica estrutural que praticamos hoje tem a marca desses indivíduos notáveis e o período extraordinário em que viveram e trabalharam.

6.12.1 Tabelas Sumárias

Para sintetizar os desenvolvimentos discutidos ao longo deste capítulo e destacar a interconexão desses principais contribuintes, as tabelas a seguir apresentam resumos concisos organizados pelo tema. Juntos, eles oferecem orientação histórica e visão sobre a linhagem intelectual que sustenta o moderno análise estrutural.

6.12.1.1 Colaboradores Principais e Sua Influência

Mesa 6.16 resume o tempo de vida, as principais conquistas, e influências mútuas das figuras maiores perfiladas neste capítulo. Esta vista tabular serve como referência para a evolução de mecânica estrutural

CÓPIA PARA REVISÃO

através da era moderna. As linhagens mostradas continuam a moldar a educação e prática de engenharia contemporânea, demonstrando a influência duradoura dessas figuras fundamentais.

Tabela 6.16: Resumo dos principais contribuintes e sua influência na mecânica

Nome (Datas)	Grandes Contribuições	Influenciado / Foi influenciado por
	Fundações e Filosofia	
Mozi (c. 470–391 a.C.	Estática precoce; Princípios da alavanca; Análise de equilíbrio na tradição chinesa.	Desenvolvimento independente; redescoberto por estudiosos ocidentais
Arquimedes (c. 287-212 a.C.)	Lei da alavanca; Hidrostáticos; Centro de gravidade; rigor matemático em mecânica.	Fundação para todas as estáticas subsequentes
Leonardo da Vinci (1452-1519)	Observação empírica; Design mecânico; Perspectivas estruturais iniciais; ponte entre abordagens medievais e modernas.	Influenciados métodos empíricos posteriores; antecipou-se a abordagem experimental de Galileu
René Descartes (1596-1650)	Geometria de coordenadas; Visão mecanicista do mundo; rejeição da física aristotélica.	Influenciado Newton, família Bernoulli
Galileu Galilei (1564–1642)	Cinemática, leis de escala, força de materiais, métodos empíricos.	Precursor de Newton; Influenciado Hooke
Blaise Pascal (1623-1662)	Hidroestática, Lei de Pascal, métodos científicos experimentais.	Torricelli, Fermat; Influenciou a estática dos fluidos
	Elasticidade, força de materiais, estruturas	
Robert Hooke (1635-1703)	Lei de Hooke; Mecânica de primavera; Ciência experimental.	Influenciado Newton, Bernoullis
Jakob Bernoulli (1654-1705)	*Elastica* Teoria; dobra e equilíbrio de vigas; Teoria da probabilidade.	Euler Inspirado, Daniel Bernoulli
Johann Bernoulli (1667-1748)	Dominância do cálculo Leibniziano; Mecânica avançada e educação.	Ensinou Euler; Influenciou Daniel Bernoulli
Daniel Bernoulli (1700-1782)	Princípios variados em elasticidade; hidrodinâmica; Teoria cinética.	Sugestão *elásticoa* Forma variacional para Euler
Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)	Leis de fricção; Mecânica de torção; estática e resistência do material.	Precedido Navier; Influenciou a ciência da engenharia
Claude-Louis Navier (1785-1836)	Viga teoria de flexão; equações de elasticidade e mecânica dos fluidos.	Estudante de Fourier; Influenciou Saint-Venant
Siméon-Denis Poisson (1781-1840)	Introduzido Coeficiente de Poisson; Teoria da elasticidade ampliada.	Debatedo Navier; Influenciou Saint-Venant
Adhémar J.C.B. de Saint-Venant (1797-1886)	Torção de barras prismáticas; Princípio de Saint-Venant; Distribuição.	Elaboração formalizada após Navier e Poisson

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.16: Resumo dos principais contribuintes e sua influência na mecânica (continuação)

Nome (Datas)	Grandes Contribuições	Influenciado / Foi influenciado por
	Mecânica Matemática	
Isaac Newton (1642-1727)	Leis de movimento; Gravitação; *Principia*; cálculo (fluxiões).	Rivalidade com Leibniz; Influenciou toda a mecânica clássica
Gottfried Leibniz (1646-1716)	Cálculo; Equações diferenciais; *Vis viva*; Visão institucional para a ciência.	Mencionado por Huygens; Ensinava Johann Bernoulli; Influenciou a matemática continental
Christiaan Huygens (1623-1695)	Teoria do pêndulo; Óptica de onda; Força centrípeta; precisão matemática em mecânica.	Mentored Leibniz; Influenciou Bernoullis; Alternativa à abordagem Newtoniana
Leonhard Euler (1707-1783)	Mecânica analítica; Cálculo de variações; *elásticoa* soluções; contribuições matemáticas prolíficas.	Estudante de Johann Bernoulli; desenvolveu as ideias variadas de Daniel; Influenciou todos os mecânicos subsequentes
Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)	Princípio de D'Alembert; equações diferenciais parciais.	Influenciado Lagrange; Euler contemporâneo
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	Mecânica Lagrangiana; Cálculo de variações; Mecânica analítica.	Unificado Newtoniano e métodos variacionais
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)	Tensão tensor; elasticidade rigorosa; Fundamentos de mecânica do contínuo.	Influenciado por Euler; precursor da elasticidade moderna
George Green (1793-1841)	Potencial teoria; Identidades e funções de Green; Métodos de energia.	Física matemática inspirada e teoria de campo

6.12.1.2 Publicações Landmark

Mesa 6.17 lista as principais obras citadas ao longo deste capítulo, organizadas cronologicamente da antiguidade ao século XX. Estes textos marcam momentos fundamentais no gradual *Matemática* de fenômenos físicos e o surgimento da engenharia como uma disciplina baseada em ciência.

Tabela 6.17: Publicações Landmark no Desenvolvimento de Mecânica estrutural

Ano	Autor	Título	Significado
		Fundações antigas e medievais	
5o C. a.C.	Mozi	*Mo Jing* (Mozi, 2013)	Compilação chinesa sobre estática, alavancas e vantagem mecânica

Continuando na próxima página

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.17: Publicações Landmark no Desenvolvimento de Mecânica estrutural (continuação)

Ano	Autor	Título	Significado
C.300 a.C.	Euclides	*Elementos* (Euclid e Heath, 1956)	Trabalho fundamental em geometria e raciocínio dedutivo
Terceiro C. a.C.	Aristóteles	*Mechanica* (Aristotle, 2000)	Análise sistemática precoce de máquinas simples e princípios de força
C.240	Apolonius	*Cônicas* (Perga, 1896)	Tratamento matemático de seções cônicas
Terceiro C. a.C.	Arquimedes	*Obras Colecionadas* (Archimedes e Heath, 1897)	Fundamento de estática, hidrostática e equilíbrio
1o C. a.C.	Vitruvius	*De Architectura* (Vitruvius e Morgan, 1914)	Tratado clássico de arquitetura: *Firmitas, utilitas, venustas*
1o C. d.C.	Herói	*Mechanica, Pneumatica* (Alexandria, 1851)	Mecânica prática e sistemas hidráulicos
11o C.	Al-Bīrūnī	*Kitab fi Tahqiq* (Al-Bīrūnī, 1910)	Estáticos, medições de densidade, hidrostáticas
11o C.	Ibn al-Haytham	*Kitab al-Manazir* (Haytham, 1989)	Modelagem matemática com verificação experimental
1121	Al-Khāzinī	*Trato de Mecânica* (Khāzinī, 2001)	Análise de equilíbrio medieval e hidrostática
		Renascimento e Moderno	
c.1452	Alberti	*De Re Aedificatoria* (Alberti, 1988)	Primeiro tratado arquitetônico renascentista abrangente
15o-16o C.	Leonardo	*Cadernos* (Vinci, 1938)	Estudos pioneiros em mecânica e força material
1543	Copérnico	*De Revolutionibus* (Copernicus, 1995)	Modelo heliocêntrico; paradigma de modelagem matemática
1570	Palladio	*Eu Quattro Libri* (Palladio, 1570)	Síntese da teoria clássica com a prática de construção
1586	Stevin	*De Beghinselen der Weeghconst* (Stevin, 1955–1966)	Transformação matemática da estática
1620	Bacon	*Novum Organum* (Bacon, 2000)	Fundação para o método empírico
1632	Galileu	*Dialogo* (Galilei, 1632)	Diálogo sobre os sistemas Copernican e Ptolemaic
1637	Descartes	*Discours de la méthode* (Descartes, 1637b)	Racionalismo cartesiano; Fundamento do método científico
1638	Galileu	*Discorsi* (Galilei, 1638)	Fundamento da força dos materiais e cinemática
		Mecânica clássica e cálculo	
1673	Huygens	*Horologium Oscillatório* (Huygens, 1986)	Dinâmica, movimento rotacional, força centrífuga

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.17: Publicações Landmark no Desenvolvimento de Mecânica estrutural (continuação)

Ano	Autor	Título	Significado
1678	Hooke	*De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)	Lei de Hooke e elasticidade linear
1687	Newton	*Principia* (Newton, 1687)	Leis de movimento e estrutura mecânica clássica
1694	J. Bernoulli	*Curvatura Laminae Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1694)	Curvatura de elástico vigas
Fim dos anos 1600	Leibniz	*Obras Colecionadas* (Leibniz, 1969)	Cálculo e métodos variacionais
1736	Euler	*Mechanica*	Mecânica Newtoniana reformulada analiticamente
1738	D. Bernoulli	*Hidrodinâmica* (Bernoulli, Daniel, 1738)	Mecânica de fluidos e teoria cinética
1743	D'Alembert	*Traité de dynamique* (d'Alembert, 1743)	Princípio de D'Alembert
1744	Euler	*Methodus inveniendi* (Euler, 1744b)	Cálculo de variações
1773	Coulomb	*Aplicação Sur une* (Coulomb, 1773b)	Métodos variados em estática estrutural
1788	Lagrange	*Analitique Mécanique* (Lagrange, 1788)	Mecânica através de princípios variacionais
19a Ciência da Engenharia do Centro de Ciências			
1826	Navier	*Leçons* (Navier, 1826)	Teoria do elástico viga e
1820s-40s	Cauchy	*Obras Colecionadas* (Cauchy, 1841)	Tensão tensor e mecânica do contínuo
1843	Moseley	*Princípios Mecânicos* (Moseley, 1843)	Teoria da elasticidade aplicada às estruturas
1850s-60s	Saint-Venant	*Obras Colecionadas* (Saint-Venant, 1855b)	Torsão, flexão, concentração tensão
1858	Rankine	*Manual de mecânica aplicada* (Rankine, 1858)	Ponte entre teoria e prática
1864	Maxwell	*Em números recíprocos* (Maxwell, 1864a)	Diagramas recíprocos para análise de treliça
1866	Culmann	*Morra Graphische Statik* (Culmann, 1866)	Estática gráfica formalizada
1874	Mohr	*Lehrbuch der Mechanik* (Mohr, 1874)	Círculo de Mohr para transformação
1886	Todhunter	*História da elasticidade* (Todhunter e Pearson, 1893)	História do desenvolvimento da elasticidade
Século XX			
1953	Timoshenko	*História da Força dos Materiais* (Timoshenko, 1953)	Clássico levantamento histórico

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 6.17: Publicações Landmark no Desenvolvimento de Mecânica estrutural (continuação)

	Ano	Autor	Título	Significado
	1955	Dugas	*Uma história de mecânica* (Dugas, 1955)	Evolução da mecânica da estática à teoria moderna
	1968	Truesdell	*Ensaios na História da Mecânica* (Truesdell, 1968)	Análise crítica de mecânica do contínuo

6.12.1.3 Instituições de Educação em Engenharia

Mesa 6.18 resume as principais instituições de engenharia estabelecidas entre 1740 e 1850, mostrando a disseminação do modelo francês de educação técnica sistemática em toda a Europa e além.

Tabela 6.18: Principais instituições técnicas e de engenharia (1740-1850)

Ano	Instituição	Localização	Tipo	Notas
1741	Academia Militar Real	Woolwich, Inglaterra	Militar	Modelo pré-francês; artilharia & Engenharia
1747	École des Ponts et Chaussées	Paris, França	Civilista	**Modelo original** para a engenharia civil
1765	Bergakademie Freiberg	Saxônia	Mineração	Treinamento técnico especializado
1783	École des Mines	Paris, França	Mineração	Educação técnica do estado francês
1794	École Politécnica	Paris, França	Misturado	**Modelo primário** Para as reformas europeias
1799	Bauakademie	Berlim, Prússia	Arquitetura	Adaptação alemã dos métodos franceses
1802	U.S. Academia Militar	West Point, EUA	Militar	Inicialmente tradicional; Mais tarde modelo francês
1815	K.K. Instituto Politécnico	Viena, Áustria	Politécnico	Adoção direta do currículo francês
1817	West Point (Reforma Thayer)	West Point, EUA	Militar	Modelo francês completo adotado
1825	Polytechnische Schule	Karlsruhe, Baden	Politécnico	Forte influência da Politécnica
1826	Universidade de Londres	Londres, Inglaterra	Universidade	Faculdade de Engenharia; Educação secular
1847	ETH Zürich	Zurique, Suíça	Politécnico	Universidade Técnica Federal Suíça

CÓPIA PARA REVISÃO

6.12.1.4 Principais Disputas Intelectuales

Mesa 6.19 documenta os principais conflitos intelectuais que moldaram o desenvolvimento da mecânica. Essas disputas, embora muitas vezes acrimônicas, aceleraram o progresso científico forçando os participantes a desenvolver argumentos mais rigorosos e explicações mais claras.

Tabela 6.19: Grandes conflitos intelectuais no desenvolvimento da mecânica

Era	Imaginei	Tópico	Natureza da Disputa	Resultado
16o C.	Galileu vs Igreja	Heliocentrismo	Galileu defendeu Copérnico; Igreja condenado heliocentrismo	Galileu tentou pela Inquisição
17o C.	Newton vs Hooke	Lei da gravidade	Hooke reivindicou prioridade. Newton se ressentiu	Newton omitiu Hooke *Principia*
17o C.	Newton vs Leibniz	Cálculo	Descobertas independentes levaram à disputa nacionalista	Ambos creditados eventualmente
18o C.	Família Bernoulli	Cálculo de variações	Rivalidade e plágio reivindicam entre Jakob, Johann, Daniel	Avanços chave estimulados
18o C.	Euler vs d'Alembert	Cordas vibradoras	Discordância na formulação de PDE	Fundamentos avançados de análise
19o C.	Poisson vs Navier	Teoria da elasticidade	Continuum vs pressupostos moleculares	Cauchy uniu ambas as abordagens
19o C.	Reino Unido vs Continental	Mecânica	Fluxos britânicos contra rigor continental	Criamos uma divisão cultural a longo prazo

6.12.1.5 Histórico Linha do tempo

Figura 6.21 coloca os cientistas perfilados neste capítulo (e outros) dentro do contexto mais amplo da história cultural e política, mostrando como o desenvolvimento da mecânica paralelou transformações na arte, música, literatura e governança.

CÓPIA PARA REVISÃO

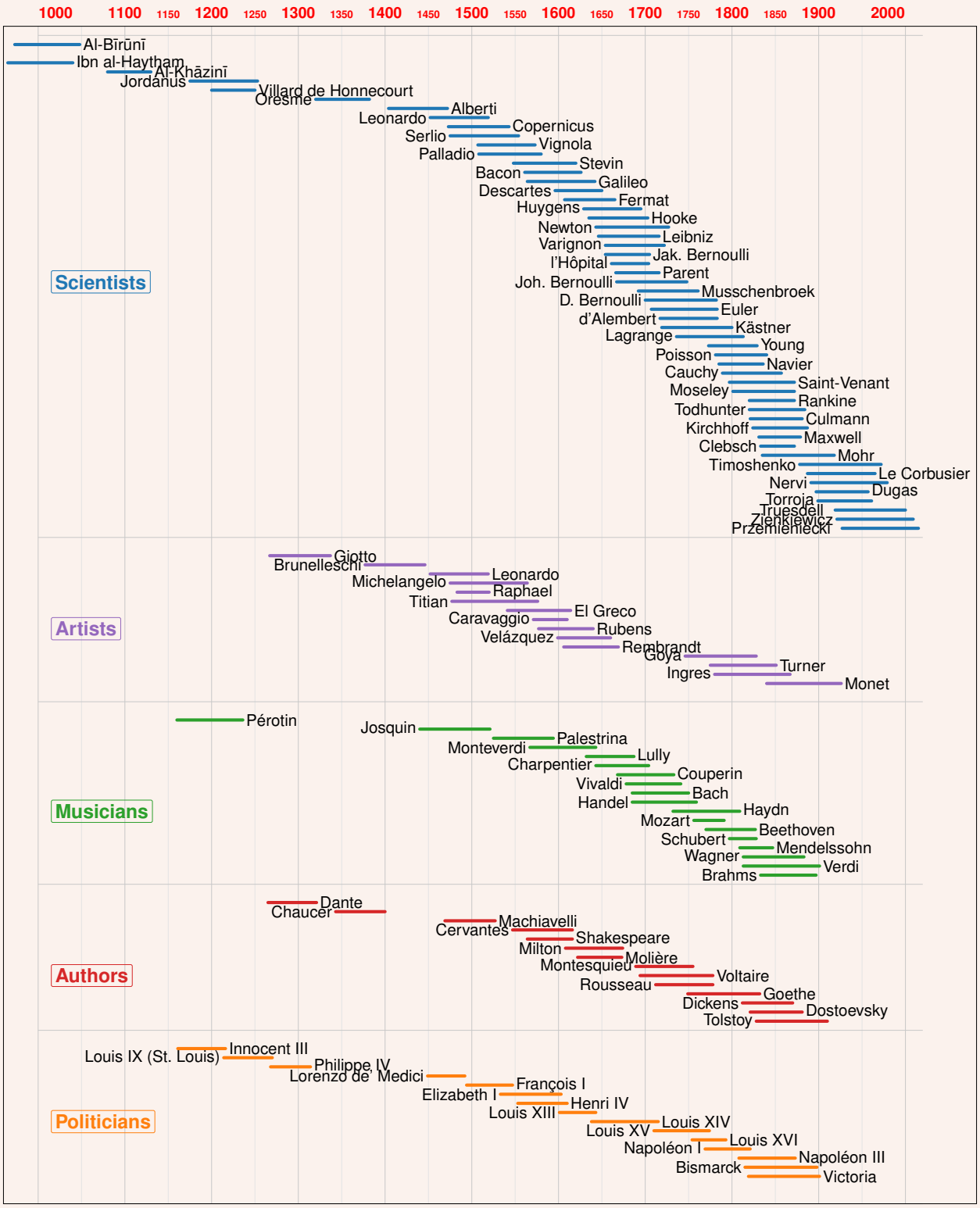


Figura 6.21: Histórico Linha do tempo: Cientistas, Artistas, Músicos, Autores e Políticos (1000-2020). Adaptado e expandido de Truesdell, 1968; note que todos os nomes na fileira dos cientistas estão cobertos neste capítulo.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



Pannini, Interior do Panteão

O interior luminoso de Pannini capta a geometria sublime: cilindro, hemisfério, e o olho da luz.

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Interlúdio II: Desde o Medieval Insights até o Moderno Mecânica estrutural: (1351-1879)

A história de mecânica estrutural e análise geométrica que emerge destes três capítulos é um conto fascinante e às vezes complicado de evolução intelectual, abrangendo mais de cinco séculos. Longe de uma progressão linear das descobertas, o desenvolvimento do nosso entendimento representa uma complexa tapeçaria tecida por dezenas de mentes brilhantes em diferentes países, séculos e tradições matemáticas. Alguns contribuintes construíram diretamente sobre o trabalho de seus antecessores; outros redescobriram princípios independentemente; ainda outros perseguiam problemas aparentemente não relacionados que mais tarde provariam ser fundamentais.

O que torna esta história particularmente convincente é como os avanços teóricos na matemática pura - contemplação de Oresme da curvatura, estudo de Huygens sobre cicloides, desenvolvimento de Newton do cálculo - repetidamente encontraram aplicações inesperadas em estruturas Engenharia. Por outro lado, os desafios práticos da engenharia - a corrente de suspensão, a haste dobrada, o flambagem pilar - conduziram avanços fundamentais na análise matemática. O resultado é uma narrativa científica onde teoria abstrata e aplicação prática estão inextricavelmente entrelaçadas.

A maturidade de mecânica estrutural como a conhecemos hoje não deve sua existência a nenhum único gênio, mas às percepções acumuladas de filósofos naturais, matemáticos, experimentalistas e engenheiros que trabalham ao longo do período medieval tardio Para a Revolução Industrial. Alguns, como Leonardo e Galileu, fizeram observações fundamentais que não seriam totalmente compreendidas por séculos. Outros, como a família Bernoulli, criaram dinastias científicas onde os insights passavam de geração em geração. Ainda outros, como Euler, sintetizaram e estenderam o trabalho de seus antecessores para criar abrangentes referenciais teóricos.

Mesa 6.20 apresenta uma síntese cronológica dos principais desenvolvimentos abordados nos capítulos 7, 8, e 9, revelando tanto a natureza interligada dessas descobertas e a notável criatividade dos indivíduos que as tornaram possíveis.

Tabela 6.20: Histórico completo Linha do tempo de Mecânica estrutural e Análise Geométrica (1351–1879)

Data	Contribuidor	Contribuição	Capítulo	Significado
1351	Nicole Oresme	Conceito qualitativo de curvatura como desvio da retidão	Ch. 8	Primeiro avanço conceitual para a compreensão da curvatura
c. 1490	Leonardo da Vinci	Experimento de cesta pendurada para força do fio	Ch. 7	O primeiro conceito de teste sistemático de força

CÓPIA PARA REVISÃO

Data	Contribuidor	Contribuição	Capítulo	Significado
c. 1500	Leonardo da Vinci	*Códice Madrid*:. Distribuição linear, conceito linha neutra	Ch. 7	Antecipa a teoria de Bernoulli em 200 anos
c. 1500	Leonardo da Vinci	Esboços de catenária (centro de estudos de gravidade)	Ch. 9	Observação precoce do problema da cadeia pendurada
1614	Isaac Beeckman	Observação da extensão das cordas: "As cordas mais longas se estendem mais"	Ch. 7	Primeira referência indireta ao conceito de deformação
1634	Simon Stevin	Prova que a cadeia de enforcamento não é parabólica	Ch. 9	Refuta a suposição de Galileu
1638	Galileo Galilei	*Discursos*:. Análise de Cantilever viga; Pressupõe que catenária é parabólica	Ch. 7, Ch. 9	Teoria Fundamental viga; Suposição catenária incorreta
1644	René Descartes	*Principia Philosophiae*:. Explicações mecânicas da coesão material	Ch. 7	Transição de Aristotelian para teorias mecânicas
c. 1646	Christiaan Huygens	Prova cadeia não parábola; Descobrir o cabo da ponte suspensa é parabólico	Ch. 9	Distinção crucial entre cabos catenários e parabólicos
1657	Christiaan Huygens	Inventa relógio pêndulo	Ch. 8	Motiva o problema do autocrono
1658–1673	Christiaan Huygens	Cycloid como taautocrono; Teoria sistemática da evolução/involuta	Ch. 8	Estabelece bases geométricas para a curvatura
1671	Isaac Newton	*Methodus Fluxionum*:. Fórmulas de curvatura analítica, centro de curvatura	Ch. 8	Primeiro rigoroso tratamento matemático da curvatura
1684	Gottfried Leibniz	Críticas da suposição inextensível de Galileu	Ch. 7	Avanço conceitual importante na teoria viga
1686	Gottfried Leibniz	Define círculo osculante por contato de quatro pontos	Ch. 8	Fundamento geométrico para curvatura
1686	Edme Mariotte	elasticidade linear em vigas; distribuição triangular tensão	Ch. 7	Primeiro modelo de flexão realista viga
1690	Jakob Bernoulli	Desafio catenário para comunidade matemática	Ch. 9	Catalisa a cultura matemática competitiva
1690	Christiaan Huygens	Envia uma solução de catenária criptografada	Ch. 9	Demonstra uma aproximação geométrica
1690	Johann Bernoulli	Submete a solução catenária com condições de publicação	Ch. 9	Mostra poder analítico de cálculo
1691	Gottfried Leibniz	Publica uma solução de catenária, reduz a logaritmos	Ch. 9	Demonstra a supremacia do cálculo
1691	Johann Bernoulli	Raio geral de derivação da curvatura	Ch. 8	Abordagem analítica sistemática da curvatura

CÓPIA PARA REVISÃO

Data	Contribuidor	Contribuição	Capítulo	Significado
1691	Jakob Bernoulli	Posa problema elástico como desafio criptografado	Ch. 9	Lança o próximo grande desafio matemático
1692	Jakob Bernoulli	Resolve a caixa de elástico retangular	Ch. 9	Primeira solução para o problema da curva elástica
1694	Jakob Bernoulli	*Curvatura Laminae Elasticae*:. Publica solução elástica	Ch. 8, Ch. 9	Teoria da elasticidade geométrica com construção evoluta
1710	Pardies Ignace	Análise de catenária adicional; Vetorial - Forçar conceitos	Ch. 9	Avanços na teoria da catenária
1713	Antoine Parent	Condições de equilíbrio total em dobra viga; linha neutra	Ch. 7	Primeira análise estática completa da flexão
1724	Anonymous ”LBC”	Desafio para um problema de corda moderadamente flexível	Ch. 9	Pontes de catenária e problemas elásticos
1728	Daniel Bernoulli	Teoria unificada de linhas flexíveis/elásticas; módulo de flexão	Ch. 9	Primeira teoria sistemática
1728	Leonhard Euler	Papel de acompanhante; Soluções de equilíbrio geral	Ch. 9	Complementa a abordagem unificada de Daniel
1729	Pieter van Musschenbroek	Lei experimental: $P \propto 1/L^2$	Ch. 9	Primeiro estudo experimental sistemático flambagem
1739	Pieter van Musschenbroek	*Elementa Physicae*:. Teste de tração sistemática	Ch. 7	Estabelece metodologia experimental
1742	Daniel Bernoulli	Propõe a minimização de energia para o elástico	Ch. 9	Apresenta princípio variacional à mecânica
1744	Leonhard Euler	*Methodus Inveniendi*:. Solução elástica completa através de cálculo de variações	Ch. 8, Ch. 9	Tratamento analítico definitivo
c. 1750	Euler & Daniel Bernoulli	Aproximação de pequena inclinação: $\kappa \approx d^2y/dx^2$	Ch. 8	Fundação de Engenharia viga teoria
1757	Leonhard Euler	Flambagem derivação de carga: $P = \pi^2 EI/L^2$	Ch. 9	Primeira fórmula de carga crítica
1758	Abraham Kästner	Definição moderna: curvatura $= d\theta/ds$	Ch. 8	Consolida o conceito de curvatura moderna
1771	Leonhard Euler	Teoria da linha geral tensão; Equações estáticas exatas	Ch. 9	Framework de teoria completa da haste
1773	Charles-Augustin Coulomb	Análise de flexão completa; $\sigma = My/I$ Formar	Ch. 7	Primeira teoria rigorosa de flexão tensão
1784	Charles-Augustin Coulomb	Teoria da torção: $T = GJ/L \cdot \phi$	Ch. 7	Estabelece uma análise torsional

CÓPIA PARA REVISÃO

Data	Contribuidor	Contribuição	Capítulo	Significado
1807	Thomas Young	Define módulo elástico; Terceira regra do meio	Ch. 7	Apresenta propriedade material fundamental
1855	Barré de Saint-Venant	Primeira derivação elástica rigorosa de $\sigma = My/I$	Ch. 7	Lugares viga teoria sobre sólida base teórica
1862	Alfred Clebsch	Teoria da elasticidade sistemática	Ch. 7	Consolida a estrutura matemática
1866	Saint-Venant	Anotações sobre Clebsch; Seções planas permanecem planas	Ch. 7	Complete a base teórica
1879	Alberto Castigliano	Teoremas de energia para cálculo de deslocamento	Ch. 9	Permite uma análise sistemática de deflexão

Padrões de Descoberta

Vários padrões notáveis emergem desta síntese cronológica:

Dinastias e Redes Científicas As contribuições multigeracionais da família Bernoulli duram quase dois séculos, com cada geração construindo e estendendo o trabalho de seus antecessores. Da mesma forma, as relações mentor-aluno - Huygens treinando Leibniz, Jakob Bernoulli aconselhando Johann, Johann ensinando Daniel e Euler - criaram linhagens intelectuais que aceleraram a descoberta.

Cultura matemática competitiva O formato de desafio público, pioneiro no problema da catenária de Jakob Bernoulli em 1690, criou um ambiente competitivo sem precedentes que levou a rápidos avanços teóricos. O uso de soluções criptografadas, corridas de publicação e disputas prioritárias revela uma comunidade matemática preocupada com reputação e precedência como com conhecimento puro.

Síntese Teoria-Pratica Desafios práticos de engenharia repetidamente impulsionaram avanços teóricos, enquanto desenvolvimentos matemáticos abstratos encontraram aplicações estruturais inesperadas. O problema da cadeia de suspensão catalisou o desenvolvimento da mecânica analítica; A haste curvada levou ao cálculo variacional; A teoria da estabilidade estabelecida.

Aglomeração geográfica e temporal Certos períodos e regiões mostram notáveis concentrações de descoberta: Os Países Baixos em meados do século XVII (Stevin, Huygens), o mundo acadêmico suíço-alemão do início do século XVIII (o Bernoullis, Euler), e as escolas de engenharia francesas do final do século XIX (Coulomb, Saint-Venant).

Desenvolvimento de ferramentas matemáticas A progressão da construção geométrica (Leonardo, Galileu) através da geometria analítica (Descartes) para o cálculo infinitesimal (Newton, Leibniz) e finalmente para métodos variacionais (Euler) revela como a sofisticação matemática permitiu cada vez mais complexa Problemas estruturais a serem resolvidos.

Esta perspectiva cronológica ilumina como os desenvolvimentos aparentemente separados em geometria, análise de força e teoria da deformação foram na verdade intimamente ligados aspectos de uma revolução intelectual maior que transformou tanto matemática e Engenharia. O mecânica estrutural que sabemos hoje não surgiu de nenhum único avanço, mas dos insights acumulados de dezenas de indivíduos brilhantes trabalhando através de vários séculos - cada edifício em cima, estendendo-se, e ocasionalmente corrigindo o trabalho de seus Predecessores.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 7

Força, Linha neutra, e Flexural Tensões

Abstract

Este capítulo traça a evolução histórica da análise de força estrutural e distribuição interna tensão desde o final do século 15 até meados do século 19.

Uma grande mudança conceitual ocorreu no início dos anos 1500 quando foi reconhecido pela primeira vez que os elementos estruturais poderiam falhar sob cargas axiais ou flexurais, indo além do foco tradicional na estabilidade do arco de alvenaria. Esta realização iniciou investigações intensivas sobre a distribuição interna da flexão tensões e a relação fundamental entre cargas aplicadas e capacidade estrutural.

O desenvolvimento se desdobra através de três linhagens distintas, mas interligadas. A tradição empírica, começando com as experiências de Leonardo pendurando cesta e continuando através da análise cantilever de Galileu, estabeleceu conceitos fundamentais de testes estruturais e avaliação capacidade-demanda. A abordagem empírico-continuum, avançada por Descartes, Mariotte, Parent e Coulomb, desenvolveu gradualmente modelos mais sofisticados de comportamento material e distribuição esforço interno. Finalmente, a linhagem analítica, exemplificada pela família Bernoulli e Euler, forneceu rigorosos quadros matemáticos ligando geometria, propriedades materiais e resposta estrutural.

Os principais marcos incluem a analogia da alavanca de Galileu para Cantilever vigas, o reconhecimento do comportamento elástico linear de Mariotte e distribuições triangulares tensão, a aplicação dos pais de condições de equilíbrio completas, o tratamento sistemático de Coulomb de flexão e Torsão, introdução do conceito de módulo elástico por Young e derivação definitiva baseada em elasticidade da relação fundamental tensão.

Significativamente, essas investigações focaram exclusivamente na força - a capacidade dos membros de resistir esforços internos sem falha - enquanto não revelavam nada sobre as formas deformadas que estruturas carregadas assumem. Esta limitação conduziria a próxima fase do desenvolvimento mecânica estrutural, onde a análise geométrica e a previsão de deformação emergiriam como preocupações igualmente fundamentais.

7.1 Introdução 224
7.2 Força 224
7.2.1 Leonardo≃ 1490) 224
7.2.2 Galileu (1564-1642) 224
7.2.3 Beeckman (1588-1637) 227
7.2.4 Musschenbroek (1692-1761) 227
7.3 Flexural Interna Tensões: Um estudo em três atos 228
7.3.1 Ato I: Linha empírica 229
7.3.2 Ato II: Empírico: linhagem contínua 234
7.3.3 Ato III: Linha analítica 245
7.4 Resumo 248
7.5 Transição 250

CÓPIA PARA REVISÃO

7.1 Introdução

Ao contrário das tradições arquitetônicas anteriores, que tratavam quase exclusivamente de alvenaria rígida e onde a falha estrutural era principalmente limitada ao colapso de arcos e vousoirs (ver Capítulo 31), uma grande mudança conceitual ocorreu no início dos 16th Século. Foi então reconhecido, talvez pela primeira vez, que os elementos estruturais também poderiam falhar sob cargas axiais ou flexurais. Esta constatação deu origem a investigações intensivas destinadas a compreender a distribuição interna da flexão tensões[1]. *Spoiler: Galileu entendeu errado.*

Assim, este capítulo aborda os primeiros esforços para determinar a força axial e flexural dos membros estruturais, juntamente com as primeiras tentativas de caracterizar a distribuição interna da flexão tensões. O estudo da deformação e o desenvolvimento da teoria da elasticidade são deixados para capítulos posteriores.

7.2 Força

O conceito de *força* estava entre as primeiras propriedades mecânicas para atrair a atenção de filósofos, arquitetos e cientistas. Muito antes das teorias de elasticidade ou deformação serem formalizadas, a necessidade de evitar quebras ou colapsos fez da força uma preocupação intuitiva e observável. Os construtores sabiam empiricamente que pilares poderia fivela e vigas poderia quebrar - mas por que eles falharam, e sob quais condições, permaneceu incerto. A força tornou-se assim o ponto de entrada natural para os primeiros mecânicos: Ele ofereceu um resultado binário visível, rutura ou sobrevivência, que convidou tanto especulação quanto quantificação. Ao contrário da elasticidade ou das distribuições internas tensão, a força poderia ser investigada usando ferramentas simples e testes, tornando-se um terreno fértil para os primeiros estudos quantitativos em mecânica.

7.2.1 Leonardo≃ 1490)

Para um esboço biográfico de Leonardo, veja a Seção 6.4.2.

Leonardo idealizou o que talvez seja o teste mecânico mais simples imaginável, uma ideia incorporada em seu conhecido experimento de ‘‘caça pendurada’’, mostrado na figura. 7.1a.. Nesta configuração, a areia é gradualmente derramada de uma tremonha em uma cesta suspensa até o fio de apoio quebrar. A carga de ruptura é então determinada pela pesagem da areia acumulada. Leonardo, sempre impulsionado pela curiosidade empírica e uma extraordinária capacidade de fazer perguntas fundamentais, acreditava que a força de ruptura variaria com o comprimento do fio - uma conclusão que a mecânica moderna mostrou ser incorreta. No entanto, a clareza conceitual do experimento marca um passo inicial para o estudo sistemático da força material.

7.2.2 Galileu (1564-1642)

Para um esboço biográfico de Galileu, veja a Seção 6.6.2.

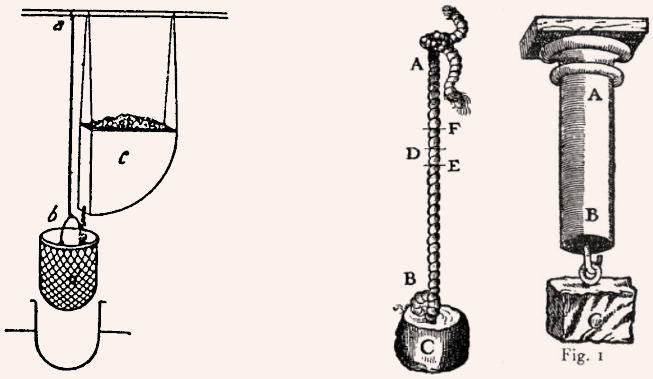
Galileu (Galilei, 1638 PDF) desafia o equívoco de Leonardo através do seguinte diálogo, Fig. 7.1b:

[1] Uma distribuição que agora é conhecida por ser triangular em relação a um linha neutra.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

> Salviati diz, "Eu temo, Simplicio..., que ... Você está cometendo o mesmo erro que muitos outros; Isto é, se você quer dizer que uma corda longa ... Não pode suportar um peso tão grande quanto um comprimento mais curto... Ele prende um peso O, Fig. 7.1b Apenas o suficiente para quebrar a corda e perguntar Simplicio onde a ruptura ocorrerá, e Simplicio responde: "Vamos dizer em D .. Salviati então, fixando a corda em F, pouco acima de D, e anexando o peso em E, aponta que em D a corda ainda está sujeita à mesma tração, e assim o segmento curto FE Vai quebrar novamente em D, pela admissão de Simplicio.
>
> Galilei, 1638

Por.. Truesdell, 1960 Este é o primeiro exemplo primitivo do princípio tensão de mecânica do contínuo. Este diálogo ilustra um conceito fundamental que mais tarde se tornaria central para a análise tensão: a ideia de que esforços internos dependem das condições de carga em vez de dimensões geométricas sozinhas.



(a) Leonardo (b) Galileu

Figura 7.1: Estudos de força axial de Leonardo e Galileu

Análise estrutural, como sabemos, começa com o tratamento de Galileu do cantilever viga nas discussões contidas nos dois primeiros "dias' de seu *Discursos e Demonstrações Matemáticas Relacionadas a Duas Novas Ciências*[2] publicado em 1638, quando Galileu tinha 74 anos.[3] Antes de prosseguir, vamos seguir as linhas de raciocínio dele (Heyman, 1998b).

No início, Galileu estava preocupado principalmente com a força de fratura dos membros estruturais. Ele considerou um pilar deitado e apoiado em ambas as extremidades, bem como no centro. Se um dos suportes finais fosse removido, ele raciocinava que o pilar quebraria no meio do espaço, já que metade dele efetivamente agiria como uma cantilever - veja Fig. 7.2a.. Ele então se virou para uma configuração diferente: um vertical pilar pendurado livremente e carregado por um peso progressivamente crescente em seu fundo até que a ruptura ocorreu, como mostrado na figura. 7.1b.

Isso levou a uma intrigante troca entre seus personagens, um que - usando linguagem moderna - evoca conceitos reminiscentes de fractais: "Uma área finita pode conter um número infinito de vazios", ou que "um sólido aparente pode consistir em um grande número de pequenas partes com força inerente,"bem como o

[2]Não se confunda com o dele antes *Diálogo sobre os dois principais sistemas mundiais*, publicado em 1632.

[3]Cinco anos antes, ele tinha sido condenado por heresia, sentenciado à prisão perpétua, e proibido de publicar mais trabalhos. Por esta razão, o *Discursos* foram publicados na Holanda, além do alcance da Inquisição, pela família Elsevier.

CÓPIA PARA REVISÃO

comportamento de cabos de aço empacotados. A explicação de Galileu, como relatado por Benvenuto, 1991a, partiu do pressuposto de que os sólidos são compostos por elementos filamentosos,

> Por isso, acho que na natureza um sólido pode ser imaginado como composto de um número infinito de placas ou filamentos extremamente finos, todos unidos e ligados de tal forma que o todo parece ser um único corpo sólido contínuo; mas na realidade a resistência oferecida por este corpo para qualquer força tendendo a desmontá-lo ou quebrá-lo não é devido à grande massa, mas à multidão e emaranhamento destes pequenos fios.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

e que se deve considerar não só o seu número, mas também o seu grau de entrelaçamento. Com referência à Fig. 7.2b,

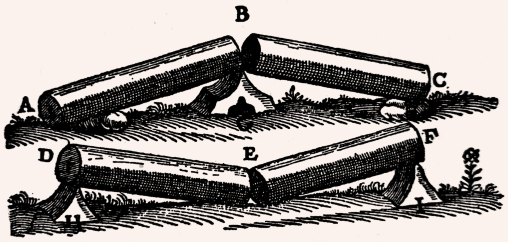
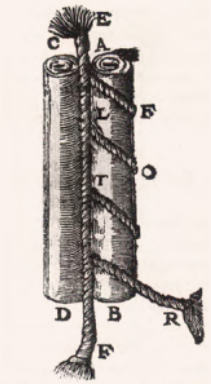


Fig. 29

(a) Quebrando de uma viga



(b) A explicação de Galileu

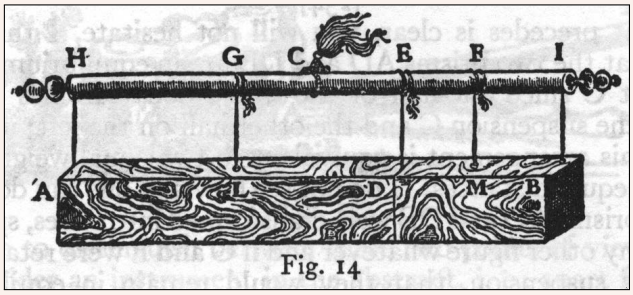


Fig. 14

(c) Lei da alavanca

Figura 7.2: Os caminhos de Galileu em direção ao seminal cantilevered viga

> Agora, se imaginarmos um filamento EF esticado entre dois cilindros pequenos contíguos AB e CD, e considerar o que acontece quando é pressionado entre eles, ou novamente quando ele desliza livremente, ou mesmo quando é ferido helicamente em torno de um deles, devemos observar muito Comportamentos diferentes. Por exemplo, quanto mais fortemente se puxa o filamento na tentativa de desenrolá-lo do cilindro, mais apertado ele pressiona contra o cilindro.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Daqui parece que o que conta não é apenas a força do material, mas seu arranjo. Assim como sabemos que a resistência de uma corda é derivada da multidão de fios de cilindrada dos quais ela é composta, assim na madeira encontramos fibras e filamentos correndo longitudinalmente o que torna mais resistente à fratura do que um cordão de cilíndrico do mesmo Comprimento. Em um cilindro de pedra ou metal, a coerência das peças parece ainda maior, embora devido a algum outro cimento do que o de fios ou fibras. Mesmo assim, até mesmo estes podem ser quebrados por força suficiente.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

7.2.3 Beeckman (1588-1637)

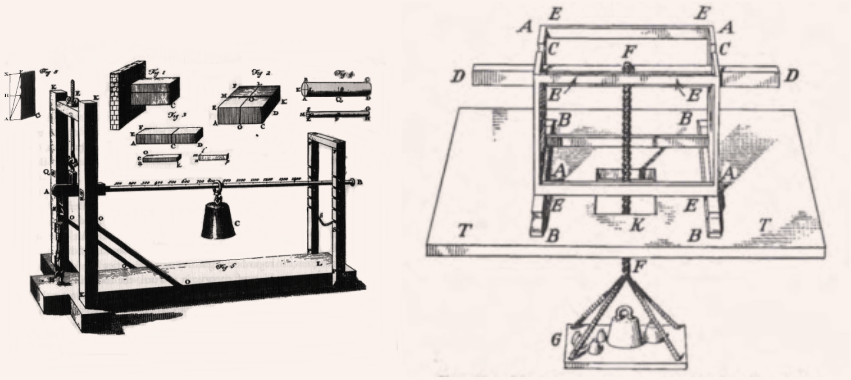
Em 1630, o filósofo e cientista holandês Isaac Beeckman fez uma observação sutil mas significativa que prefigurava um conceito fundamental na mecânica. Ele notou que quando um peso é suspenso de uma corda, ''quanto mais longa é a corda, mais o peso desce...''[4] Embora Beeckman não tenha formalizado esta observação matematicamente, sua observação constitui a primeira referência conhecida - embora indireta - ao que chamamos agora *deformação*.. Ligando intuitivamente o alongamento de uma corda à carga que carrega, Beeckman destacou uma resposta mensurável de um corpo para forçar. Sua visão precede a lei de Hooke por várias décadas e reflete a consciência empírica emergente da deformação como um fenômeno mecânico digno de estudo. O trabalho de Beeckman, embora não publicado em sua vida, influenciou contemporâneos como Descartes e agora é visto como um importante precursor da ciência moderna da elasticidade.

7.2.4 Musschenbroek (1692-1761)

Pieter van Musschenbroek foi um dos primeiros experimentalistas a investigar a resistência axial de materiais através de testes sistemáticos de tração. Em seu 1739 *Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739), ele descreveu uma série de experimentos em que pesos foram suspensos de fios longos ou hastes para determinar a carga máxima que poderiam suportar antes da ruptura. Esses testes, Fig. 7.3a, foram significativos não só porque eles produziram medidas reprodutíveis de resistência à tração final, mas também porque estabeleceram um quadro metodológico para estudar a falha do material sob carga uniaxial. Musschenbroek enfatizou a importância de uma área transversal uniforme e homogeneidade material na produção de resultados consistentes, um entendimento que prefigurava padrões modernos em testes de materiais. Ele também tabulou forças comparativas para vários materiais, incluindo metais, madeiras e fibras animais, estabelecendo assim o fundamento empírico para o desenvolvimento posterior do conceito tensão - deformação. Musschenbroek foi um excelente experimentalista, e também investigou a flexão, Fig. 7.3b, e pilar flambagem §9.5.1.2)

[4] Citado em Drake, 1970, p. 201.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Teste de tensão (b) Teste de dobra

Figura 7.3: Experimentos Musschenbroek (Musschenbroek, 1739)

7.3 Flexural Interna Tensões: Um estudo em três atos

Tensões em estruturas antigas e medievais eram baixas, pois eram sobreprojetadas (por códigos modernos). Esses arcos, cúpulas construídas com pedras foram submetidos a tensões muito mais baixo do que suas capacidades. Dada a ausência de diretrizes científicas, aquelas que não foram devidamente dimensionadas simplesmente colapsaram (assim a importância das leis de escala Vitruvius). Resumindo, o cálculo de tensão é de interesse secundário; É a forma da estrutura que governa sua estabilidade.

O desenvolvimento histórico da teoria flexural revela dois caminhos em grande parte independentes e paralelos, Fig. 7.4, —um empírico e francês, o outro matemático e suíço-alemão - que, notavelmente, permaneceu desconectado por mais de um século.

A primeira linhagem, enraizada em experimentos e intuição física, começou com **Galileu**, que colocou as perguntas iniciais sobre viga ruptura e escala. Ele continuou através **Descartes**, **Mariotte**, **Pai**E culminou com o trabalho de **Coulomb**, que em 1773 apresentou uma teoria de falha notavelmente presciente baseada na coesão interna. Este caminho atingiu seu completo refinamento analítico com **Saint-Venant** em meados do século xix, cujas memórias introduziram o conceito de distribuições tensão e corrigiram muitas das inconsistências nos modelos anteriores. Este caminho francês foi impulsionado em grande parte por considerações de ruptura, coesão e validação empírica, e permaneceu fundamentado no raciocínio geométrico e plausibilidade física.

Em contraste, um segundo desenvolvimento independente surgiu da obra de Jakob Bernoulli, que formulou uma proto-teoria de curvatura e deformação, e atingiu sua expressão matemática formal em **Euler**1744 derivação da curva elástica usando princípios variacionais. A formulação de Euler, baseada no cálculo das variações e fundamentada em suposições de elasticidade linear e pequena deformação, predava os trabalhos de Coulomb e Young. No entanto, apesar de produzir uma completa equação diferencial da forma desviada de um elástico viga, este ‘‘caminho suíço-alemão” ’esta foi claramente ausente da narrativa francesa.

Há poucas evidências de que Coulomb, Young ou até mesmo Saint-Venant tenham reconhecido as contribuições de Euler para a teoria. Essa omissão pode ser atribuída a vários fatores. Primeiro, o trabalho de Euler foi profundamente incorporado em matemática abstrata, e escrito em latim, que pode ter limitado sua circulação entre experimentalistas focado no comportamento estrutural prático. Segundo, a comunidade científica francesa do século XVIII estava principalmente preocupada com força e ruptura em vez de elasticidade e deflexão - preocupa-se mais alinhado com os interesses de Coulomb e Mariotte do que com as

CÓPIA PARA REVISÃO

suposições idealizadas de Euler. Finalmente, as divisões institucionais e linguísticas entre tradições científicas continentais podem ter impedido a polinização cruzada de ideias. O resultado foi uma linhagem bifurcada: um baseado na força empírica e falha, e o outro na elasticidade matemática, com a síntese completa ocorrendo apenas no final do século XIX.

Esta disjunção é impressionante, especialmente dada a visão moderna de que o comportamento flexural repousa diretamente na equação introduzida por Euler. O fato de que esta equação foi inicialmente ignorada pelos teóricos que formalizaram viga dobras sublinha como limites disciplinares e tradições intelectuais podem atrasar a convergência, mesmo diante de trabalhos prévios convincentes.

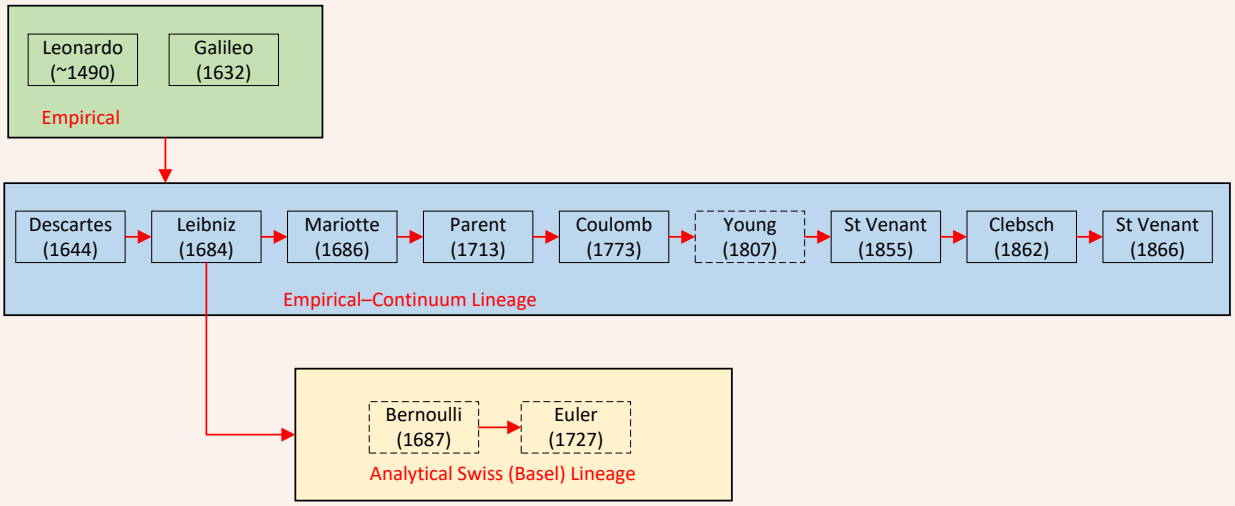


Figura 7.4: Duas linhagens paralelas à flexão tensões

7.3.1 Ato I: Linha empírica

Este primeiro ato traça o desenvolvimento da teoria viga através de observação direta, experimentação e raciocínio físico. Começando com os esboços intuitivos de Leonardo e continuando através da análise sistemática de Galileu, esta tradição empírica enfatizava preocupações práticas sobre o fracasso estrutural. A principal visão que conduzia esta linhagem foi a quebra vigas mas entender por que e prever quando necessário tanto observação cuidadosa quanto raciocínio mecânico cada vez mais sofisticado.

7.3.1.1 Leonardo≃ 1490)

Embora se suponha que Galileu foi o primeiro a abordar o problema da flexura, evidências mais recentes do chamado Códice de Madrid sugerem que ele foi na verdade precedido por Leonardo da Vinci (Zammattio, 1980).

Os esboços de Leonardo sobre flexura estão em (Da Vinci, 1490) em dois fólios separados.

fólio 9v

À primeira vista, pode-se pensar que os esboços de Leonardo, Fig. 7.5, representam registros de medições experimentais ou teoria matemática inicial. Longe disso, ele simplesmente coloca perguntas após perguntas, com poucas respostas oferecidas. Quando as respostas aparecem, elas são tipicamente especulativas e

CÓPIA PARA REVISÃO

adornadas com números redondos convenientes em proporção geométrica: 100, 20, 4, ou frações como 1/2, 1/4 e 1/8. Leonardo não era um experimentalista no sentido moderno (como Galileu mais tarde se tornaria). Seu brilhantismo estava em fazer as perguntas certas e ocasionalmente se aventurando em respostas especulativas.

No início, ele reconheceu a importância de entender os componentes básicos das estruturas - vigas, pilares, arcos e abóbadas - como a base adequada para uma ciência da construção. Nos esboços mostrados na Fig. 7.5, ele está claramente contemplando a força de vigas[5] em relação ao comprimento, seção transversal, modo de suporte e cargas aplicadas. Ele também considera a deflexão como uma função das condições de suporte e carga.

No entanto, suas investigações permaneceram qualitativas: Faltava-lhe as ferramentas matemáticas, a noção de *tensão*, e qualquer abordagem sistemática para verificação experimental. Nenhuma equação aparece em seu trabalho, nem nenhum esforço para isolar variáveis sob condições controladas. Ainda assim, o valor das contribuições de Leonardo não está em soluções, mas no enquadramento dos problemas. As perguntas que ele colocou, porém especulativas, marcaram uma mudança decisiva para tratar os elementos estruturais como sistemas mecânicos dignos de estudo racional. Eles definiriam o cenário para desenvolvimentos mais rigorosos no século vindouro.

Essa mudança começaria com Galileu, que não só fez perguntas semelhantes, mas também se arriscou a respondê-las usando diagramas de força, argumentos de escala e experimentos reais.

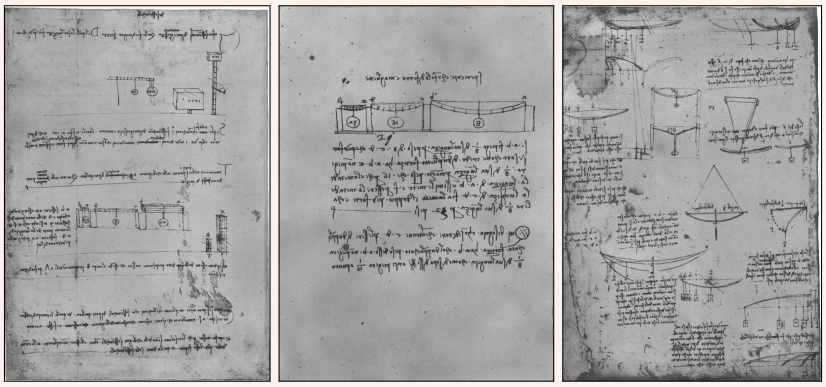


Figura 7.5: Os esboços de Leonardo, Folio 9v

fólio 20v

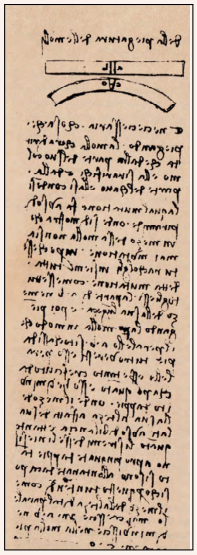
O *Códice Madrid*, escrito por volta de 1500, permaneceu desconhecido por quase 250 anos até sua redescoberta em 1965.[6] Em suas 197 páginas, Leonardo explorou temas como mecânica, estática, geometria e construção de fortificações. Os manuscritos são de considerável valor histórico, não só porque contêm aproximadamente 15% de todas as notas sobreviventes de Leonardo, mas também devido à qualidade e relevância técnica do conteúdo, que está entre os tratados de engenharia mais significativos de sua era.

Em Fólio 84, Leonardo analisou a deformação de uma barra dobrada e descreveu com precisão a resposta de suas fibras mais externas. Ele observou claramente o seguinte:

[5]Viga curvatura aparece no recentemente descoberto *Códice Madrid*, Fig. 7.6, enquanto pilar força é explorada na figura. 9.24a.

[6]O *Códice Madrid* Os manuscritos foram acidentalmente encontrados na Biblioteca Nacional da Espanha pelo historiador de arte Jules Piccus. Seu significado foi imediatamente reconhecido devido à amplitude e profundidade técnica do trabalho de Leonardo em mecânica e engenharia.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



If a straight spring is bent, it is necessary that its convex part become thinner and its concave part, thicker. This modification is pyramidal and consequently there will never be a change in the middleof the spring. You shall discover, if you consider all of the aforementioned modifications that by taking part a b in the middle of its length and then bending the spring in a way that the two parallel lines, a and b, touch at the bottom, the distance between the parallel lines has grown as much at the top as it has diminished at the bottom. Therefore, the center of its height has become much like a balance for the sides. And the ends of those lines draw as dose at the bottom as much as they draw away at the top. From this, you will understand why the center of the height of the parallels never increases in a b nor diminishes in the bent spring at c o.

Figura 7.6: Os esboços de Leonardo, Folio 20v, (Zammattio, 1980)

- O lado interno da barra (ao olhar para o centro de curvatura) encurta, significando que as fibras internas são comprimidas;
- O lado externo alonga, indicando que as fibras externas estão em tensão;
- O comprimento do eixo médio da barra permanece inalterado. e..
- A quantidade de alongamento ou encurtamento das fibras é proporcional à distância delas *linha neutra*.

Em essência, Leonardo articulou o princípio da distribuição linear deformação em curvar-se quase 200 anos antes de Bernoulli - uma percepção notável que antecipa a suposição fundamental subjacente à teoria moderna viga.

7.3.1.2 Galileu (1632)

Galileu então volta sua atenção para o antigo problema da alavanca (Fig. 7.2c), (Galilei, 1632) (segundo dia). Ele considera um sólido uniforme suspenso de um equilíbrio viga por cordas presas em cada extremidade. Por simetria, a viga balança em seu ponto médio C.. Ele assume que o sólido é cortado perpendicularmente em algum ponto intermediário D, com os dois segmentos resultantes temporariamente apoiados por uma corda comum em DE.. Cada um destes segmentos torna-se assim uma versão menor do sistema original e equilibra sobre seu próprio centro de gravidade - ponto G à esquerda e.. F À direita.

Galileu ainda mostra que se segmento AD foram apoiados em seu ponto médio por um único cabo em LGE segmento DB Por outro cordão em MF, as outras cordas de apoio poderiam ser removidas e o equilíbrio ainda seria mantido. Ele demonstra que a proporção CG/CF é igual a EI/EH, que por sua vez é igual DB/ADOs dois últimos são proporcionais aos pesos dos segmentos.

Vale a pena notar que no diagrama de Galileo[7]Nada se move, nem na verdade, nem virtualmente. Seu

[7]O raciocínio de Galileu, embora expresso em termos de equilíbrio e braços de alavanca, antecipa o conceito moderno de *linha neutra* Em dobra. Embora ele não considere explicitamente a distribuição interna tensões ou deformação, seus argumentos geométricos de decomposição e simetria refletem uma intuição

CÓPIA PARA REVISÃO

raciocínio é totalmente estático, enraizado em equilíbrio idealizado ao invés de análise cinemática ou dinâmica.

Galileu está finalmente pronto para resolver o problema seminal do cantilevered viga (Fig. 7.7Uma configuração que se tornou um ícone da aplicação da mecânica racional à teoria estrutural. Membro $ABCD$



Figura 7.7: O cantilever de Galileu

é prismático, e quando uma carga é aplicada no ponto C, é evidente que se o fracasso ocorrer, acontecerá no momento B, onde o membro está embutido na parede. O membro possui um certo *Força absoluta*[8], ou seja, a resistência à tração anteriormente discutida. No ponto da fratura, o momento desta força absoluta sobre o ponto B deve equilibrar o momento da carga aplicada sobre o mesmo ponto. Nesta análise, Galileu está efetivamente considerando o equilíbrio momento de um *alavanca manivela*[9]. Na notação moderna

$$L = \frac{Sh}{2l} \tag{7.1}$$

Na Fig. 7.8a, S é o absoluto (i.e. resistência do membro, que tem largura B e profundidade d.. (Se a viga tem uma seção cilíndrica circular, então Galileu observa que o braço da alavanca para a resistência absoluta é o raio REm termos de idéias modernas de tensão, Galileu evidentemente assumiu uma distribuição uniforme Fig. 7.8b.

Galileu não faz uso do valor numérico da força absoluta S; Sua preocupação é principalmente com o cálculo *relativo* Pontos fortes. A quantidade $S/2$ é tratado simplesmente como um dado parâmetro físico que entra na análise. Por exemplo, Galileu demonstra corretamente que a proporção de cargas T para X necessário para quebrar um cantilever viga de seção retangular - quando orientado na borda versus plana - é igual à proporção ca/cb (Fig. 7.8c). Desde que o módulo de seção foi corretamente identificado na forma kbh^2, o fator constante $k = 1/2$ Em Eq. 7.1 não tem efeito no resultado. Ele cancela na proporção, reforçando que o raciocínio de Galileu - embora sem o conceito moderno de tensão - captura o comportamento correto de escala.[10]

É importante notar que Galileu ainda não estava familiarizado com o conceito de tensão; ele ainda vislumbrava a resistência da viga como decorrente de filamentos internos (virtuais) sendo arrancados,

inicial de que certos planos dentro de um corpo curvado permanecem sem estresse - uma ideia que mais tarde seria formalizada em Teoria.

[8]Por "força absoluta", Galileu se refere à resistência inerente ou coesa do material - sua capacidade de resistir a ruptura quando submetido ao interno tensão. Isto é diferente das noções modernas de distribuição ou comportamento elástico, já que Galileu trata a força como uma força limitante constante.

[9]O termo ”mangala encravada” refere-se a um braço de alavanca curva ou angular - neste caso, a geometria

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

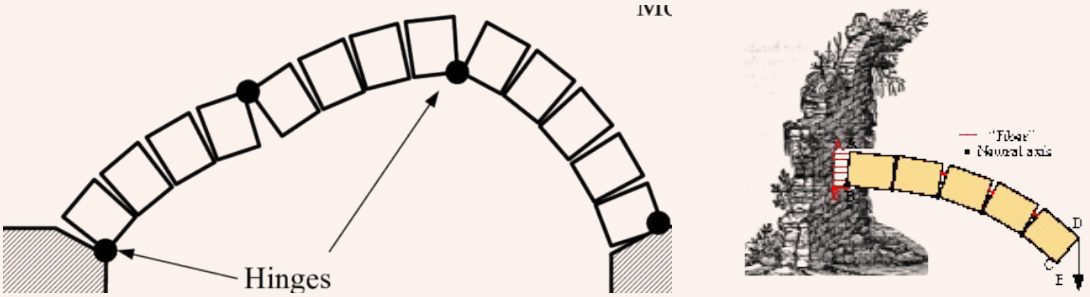


(a) Condição na fratura (b) Distribuição implícita (c) Pontos fortes comparados

Figura 7.8: As suposições de Galileu na determinação da força do cantilevered viga (a) e (b) adaptado de (Heyman, 1998b))

conforme ilustrado na figura. 7.12a.. Esta visão qualitativa seria depois refinada por Mariotte, que introduziu uma interpretação mais mecânica da tensão e compressão de fibras (§10.1.2) através da seção transversal viga - um passo inicial para a moderna teoria de dobra.

Embora possa parecer surpreendente para o leitor moderno que um cientista da estatura de Galileu poderia não identificar corretamente a localização do máximo tensão em um cantilevered viga, deve-se considerar o contexto histórico. No tempo de Galileu, arcos de alvenaria dominavam a prática estrutural. A principal preocupação com tais estruturas não era a falha de compressão, mas sim a separação dos blocos adjacentes devido às forças de tração (capítulo 31), o que poderia levar ao colapso. Influenciado pelo que mais tarde seria formalizado no trabalho de Leibniz (Fig. 7.10), Fig. 7.9 ilustra o tipo de modo de falha provavelmente previsto por Galileu, e mais tarde por Mariotte, como governado pela separação ou ruptura das fibras inferiores sob tensão.



(a) Arco de alvenaria (b) Alvenaria viga

Figura 7.9: Deflexão de uma fábrica rígida

O trabalho de Galileu é notável em muitos aspectos. Ele não foi apenas um dos primeiros a aplicar um método científico em problemas estruturais, mas também introduziu, pela primeira vez, a idéia de uma

incorporada e projetando do membro cantilevered - que muda a orientação das forças e braços momentâneas. O tratamento de Galileu simplifica a viga para uma alavanca estática sujeita ao equilíbrio rotacional.

[10] O reconhecimento de Galileu que a força depende tanto da largura quanto do quadrado da altura (bh^2) é historicamente significativo, como antecipa o módulo de seção moderna. Enquanto sua formulação não tinha o conceito formal de tensão ou deformação elástica, a visão dimensional reflete uma compreensão precoce e notavelmente precisa das leis estruturais de escala.

CÓPIA PARA REVISÃO

diagrama de corpo livre. Igualmente importante, ele articulou o conceito fundamental de comparar estrutura *Capacidade* para aplicar *Exigir*- Um princípio que permanece central para a engenharia moderna Praticar.[11]

Finalmente, o modelo de Galileu focava exclusivamente na tensão e compressão negligenciada. A idéia revolucionária de que existe uma linha - mais tarde chamado o *linha neutra*- Ao longo do qual tensão é zero, ainda não tinha sido concebido. Esta limitação levaria a próxima geração de investigadores a procurar uma compreensão mais completa da distribuição esforço interno.

A linhagem empírica estabelecida por Galileu continuaria através de investigadores que gradualmente aperfeiçoavam suas percepções, corrigindo erros enquanto se baseava em sua abordagem fundamental de tratar vigas como sistemas mecânicos sujeitos a análise de equilíbrio.

7.3.2 Ato II: Empírico: linhagem contínua

O segundo ato representa uma transição crítica: Enquanto permaneciam embasados na observação empírica, os investigadores começaram a pensar em materiais como meios contínuos ao invés de conjuntos de filamentos discretos. Esta mudança abriu novas possibilidades para entender distribuições internas tensão e marcou o início de mecânica do contínuo em análise estrutural.

7.3.2.1 Descartes (1644)

Para um esboço biográfico de Descartes, veja a Seção 6.6.3.

Em 1644, Descartes publicou seu *Principia Philosophiae*, em que dedicou muitas páginas para investigar as causas físicas e metafísicas da resistência dos sólidos. Em uma carta a Mersenne (datada de 1638), ele escreveu:

> Quanto ao Signor Galileu, ele postula duas causas para a coesão das partes dos corpos: Um é o vácuo, que ele diz que a natureza abomina; o outro é um tipo de cola ou matéria pegajosa que adere às superfícies e as liga. Mas ambos parecem estar completamente errados. Para o primeiro, não acredito que a natureza abomine um vácuo; E quanto ao segundo, se essa cola existisse, teria que ser ainda mais rígida do que as partes que ela une juntas, e a mesma questão surgiria sobre o que mantém suas próprias partes unidas.
>
> Descartes, 1897b Correspondance de René Descartes

Descartes dedicou várias seções de seu trabalho para explicar a resistência dos sólidos em termos de seu sistema filosófico mais amplo, baseado na interação das partículas e na exclusão dos vazios.[12] Um tratamento mais completo do conceito de Descartes *Solididade* está além do escopo deste capítulo.

[11] Embora Galileu não usasse notação vetorial moderna, seu raciocínio envolvia isolar partes de um sistema, identificar pontos de força e reação aplicadas, e considerar o equilíbrio rotacional – antecipando o moderno diagrama de corpo livre. Da mesma forma, suas comparações entre a força interna de um membro e a carga externa que causaria falha refletem a formulação mais precoce do que chamamos agora capacidade - avaliação da demanda. Esses avanços conceituais criaram as bases para os modernos controles de segurança estrutural.

[12] Descartes rejeitou o apelo de Galileu ao vácuo e qualquer noção de uma 'cola' interna como metafisicamente infundada. Em vez disso, ele propôs que a matéria é composta de partículas interligadas em um meio contínuo - o que ele chamou de *Plenum*, negando a existência de espaço vazio. Nesta visão, a resistência dos sólidos resulta da impenetrabilidade e arranjo geométrico dessas partículas, sempre em contato e movimento. Apesar de suas explicações serem especulativas e faltarem bases empíricas, marcaram uma importante mudança das formas aristotélicas para explicações totalmente mecânicas. Newton mais tarde se confrontaria

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Descartes *La GÉomÉTRIE* (Descartes, 1637b), foi publicado como um apêndice para o *Discours de la mÉthode* (Descartes, 1637a), a geometria analítica inaugurada unindo problemas geométricos clássicos gregos com simbolismo algébrico. Através de sua introdução de eixos de coordenadas, representação algébrica de curvas e técnicas sistemáticas de eliminação, Descartes transformou a geometria em um método geral para resolver problemas de loci e construção. Sua influência perpassava a mecânica dos séculos XVII e XVIII, fornecendo a linguagem matemática usada mais tarde por Fermat, Newton e Bernoullis.

No entanto, Descartes marca uma importante figura de transição: embora faltasse fundamentação experimental, sua insistência em explicações mecânicas e negação de formas aristotélicas levou futuros pensadores para modelos mais materiais e estruturais de coesão. Sua visão contínua da matéria se revelaria influente no eventual desenvolvimento de conceitos tensão e deformação.

7.3.2.2 Leibniz (1684)

Para um esboço biográfico de Leibniz, veja a Seção 6.6.8.

O interesse de Leibniz na mecânica dos sólidos foi influenciado pela controvérsia contemporânea entre as teorias da flexão de Galileu e Mariotte. Enquanto Galileu assumia que vigas eram perfeitamente rígidos e falhavam de repente quando sua resistência foi superada, Mariotte introduziu insights experimentais sugerindo que a deformação e deformação ocorreram antes da ruptura. Leibniz seguiu o raciocínio de Mariotte e reconheceu em seus escritos e correspondência que o modelo de Galileu negligenciava a extensibilidade dos materiais, (Leibniz, 1684).

Citando de McDonough, 2016, Leibniz observou que os resultados experimentais - especialmente aqueles conduzidos por Mariotte, com quem ele se correspondia diretamente - indicam que "um peso muito menor é suficiente para quebrar a viga do que Galileu queria"(2016, p. 321), é que ”ele considerou um perfeitamente rígido viga, que seria quebrado em um único instante uma vez que a sua resistência se tornou excessiva.” Em contraste, Leibniz sustentou que todos vigas “yield até certo ponto antes de eles podem ser arrancados, como pode ser visto pelo . . . exemplo de um bastão que se contorce antes de partir, e o exemplo de cordas, que se estendem antes de quebrar.’

Embora ele não tenha publicado um tratado abrangente sobre o assunto, Leibniz contribuiu para a evolução da teoria da flexura através de inovações conceituais. Ele sustentava que todos os corpos nojentos são, na realidade, infinitamente divisíveis. No entanto, sua divisão de uma viga em fios e segmentos elementares não era destinada a refletir estrutura física, mas para servir como uma abstração matemática. Esta decomposição, em fibras idealizadas§10.1.2) e elementos - era claramente uma construção metodológica, um prelúdio para a modelagem contínua moderna.

Leibniz imaginou essas fibras para agir como molas que mantêm os elementos viga juntos[13].. Neste modelo mental, a viga comporta-se como um sistema de blocos rígidos unidos por fibras tipo mola ao longo de suas superfícies adjacentes. Figura 7.10 ilustra um desses blocos $ABKC$, funcionando como uma alavanca de dois braços com um fulcro em A.. Está conectado à superfície adjacente DE Por elementos como $1B2B$ e.. $1H2H$, enquanto uma carga é aplicada no ponto C ao longo do braço AC.. Embora este diagrama seja especulativo, é consistente com as estratégias gerais de Leibniz e seu apelo ao raciocínio geométrico.

Embora Leibniz acrescentasse pouco que era fundamentalmente novo para a mecânica de vigas, ele estabeleceu importantes bases conceituais. Como ele mesmo observou, ele deixaria para os outros desenvolver uma teoria completa. Parece que ele não tinha interesse sustentado no problema, possivelmente porque viu

e partiria de muitas das suposições de Descartes, particularmente sua negação da ação à distância, enquanto ainda herdava o compromisso cartesiano com fenômenos físicos matemáticos.

[13] A este respeito, Leibniz poderia ser considerado um precursor conceitual do método moderno de elementos discretos (DEM), que também modela como conjuntos de blocos rígidos conectados por elementos compatíveis.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

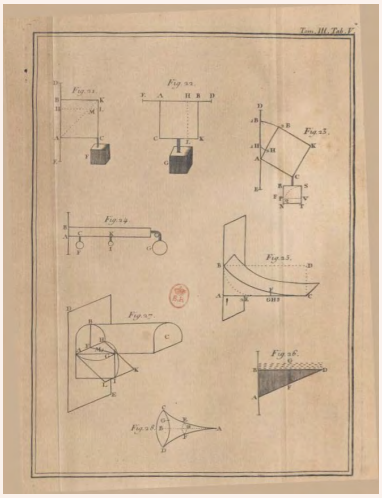


Figura 7.10: Modelo conceitual inspirado na mecânica geométrica de Leibniz (Leibniz, 1684)

profundidade matemática limitada nele. Mas suas observações finais afirmam sua fé no poder da matemática para iluminar fenômenos físicos. Ele escreve:

> ut proinde bis paucis consideratis tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicalis et mecanis unice desideratur.
>
> McDonough, 2016 *"Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years"*, p. 112

que pode ser traduzido como: Assim, por meio destas poucas considerações, todo o tratamento deste assunto é reduzido à geometria pura - que é o principal desiderato em física e mecânica[14]

Finalmente, em *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1691e), Junho de 1691, Leibniz observa que ele também pretende - através de cartas privadas - atacar *a curvatura ou flexão de vigas, de arcos esticados ou de qualquer tipo de dobra lateral* Embora tenha optado por adiar a publicação e preservar os detalhes para comunicação privada.

7.3.2.3 Mariotte (1686)

Mariotte estava investigando a força dos tubos de água e começou derivando uma expressão correta para a espessura necessária da parede de um tubo de determinado diâmetro para suportar pressão interna. No entanto, apesar de realizar numerosos testes de tensão e flexão (Fig. 7.11a), ele foi incapaz de conciliar seus resultados com a fórmula de Galileu. Ele concluiu que a suposição de inextensibilidade de Galileu estava incorreta, e que todos os materiais devem sofrer alguma extensão quando carregados. (Hooke tinha publicado recentemente sua famosa lei, *UT tensio, sic vis*.)

Mariotte, portanto, assumiu que os materiais se comportam de forma linear-elástica, exibindo comportamento idêntico em tensão e compressão, com uma extensão máxima finita antes da fratura. Mantendo a

[14] O apelo de Leibniz para *Geometria pura* ressalta o reconhecimento precoce de que o raciocínio geométrico poderia fornecer fortes insights sobre comportamento mecânico complexo. Esta perspectiva se revelaria mais tarde essencial no tratamento de problemas elásticos não lineares, como o *elásticoa*, onde a geometria governa configurações de equilíbrio além do regime linear.

CÓPIA PARA REVISÃO

suposição de Galileu de que o linha neutra está na base da seção, Mariotte deduziu que tensões deve ser distribuído em um perfil triangular (Fig. 7.11b) (Heyman, 1998b).

Quando Mariotte considerou a dobra de uma viga (Fig. 7.11af), ele observou que a soma das forças de tração é igual a $S/2$- ou seja, apenas metade da resistência à tração absoluta da viga - e seu momento sobre o ponto D É $S/2 \times 2h/3 = Sh/3$ (ver Fig. 7.11b). A carga final correspondente é então dada por:

$$L = \frac{Sh}{3l} \tag{7.2}$$

Onde L é a carga externa (denotado W na formulação de Galileu). Este resultado é apenas dois terços da carga final prevista por Galileu (Timoshenko, 1953).

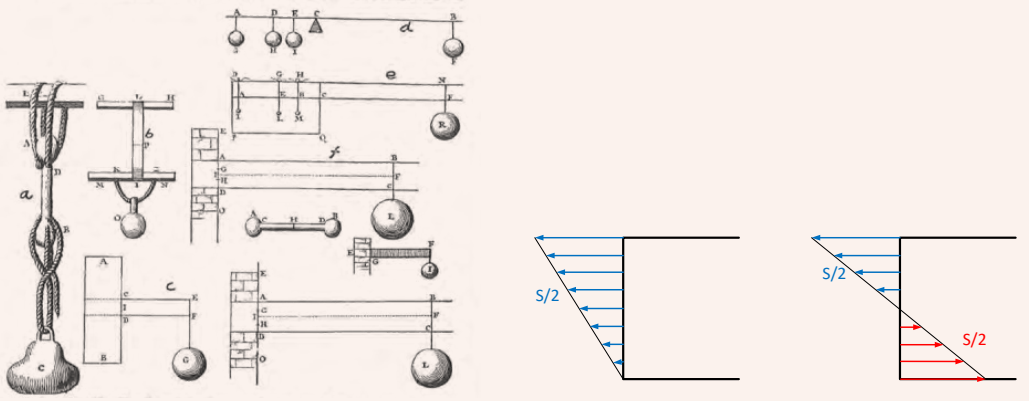
Mariotte então continuou. Referindo-se novamente à Fig. 7.11a-F, ele observou que as fibras na parte inferior ID da seção transversal estão em compressão, enquanto aqueles na porção superior IA estão em tensão (Fig. 7.11c). Para calcular a carga L necessário para superar a resistência das fibras de tração, ele reutilizou o Eq. 7.2, substituindo h com $h/2$ e dobrando o resultado, levando a:

$$L_1 = 2 \cdot \frac{S}{3l} \cdot \frac{h}{2} = \frac{Sh}{3l} \tag{7.3}$$

Enquanto sua suposição sobre a distribuição de força nas fibras estava essencialmente correta, ele fez um erro no cálculo do momento das forças de tração em relação ao ponto I.. Além de substituir $h/2$ para h Em Eq. 7.2Ele também deveria ter usado $S/2$ Em vez de.. S, o que daria o resultado correto:

$$L_2 = 2 \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{Sh}{6l} \tag{7.4}$$

Este descuido impediu Mariotte de chegar à fórmula correta para a capacidade máxima de carga de vigas (Timoshenko, 1953). O erro foi corrigido por Saint-Venant.

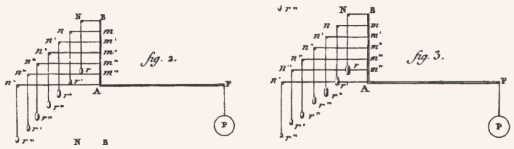


(a) Os testes de Mariotte (b) Mariotte é original (c) Mariotte está revisada

Figura 7.11: Modelos de Mariotte (Heyman, 1998b)

Novamente, o conceito de tensão ainda não tinha sido formalizado, e o raciocínio de Mariotte permaneceu intimamente ligado à idéia anterior de Galileu de filamentos carregados e paralelos resistindo a tensão dentro da viga. Esta interpretação baseada em filamentos é vividamente ilustrada por Girard, 1798 no início dos 19 anosth Século: Fig. 7.12a Reconstrui o modelo de Galileu de uma alavanca dobrada composta por fibras de tração, enquanto Fig. 7.12b retrata o refinamento do conceito de Mariotte. Embora Albert Girard tenha trabalhado muito mais tarde, seus diagramas ajudam a visualizar o pensamento transicional que precedeu o desenvolvimento completo da teoria de elasticidade baseada em tensão.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Galileu (b) Mariotte

Figura 7.12: A ilustração de Girard dos modelos de Galileu e Mariotte

7.3.2.4 Pai (1713)

Em vez de colocar arbitrariamente o linha neutra em uma posição "provável", os pais reconheceram a necessidade de satisfazer todas as condições de equilíbrio, (Parent, 1713). Na mecânica do corpo rígido bidimensional, três equações de equilíbrio devem ser atendidas. Os pais observaram que Galileu satisfez efetivamente apenas um, equiparando o momento da carga aplicada sobre o fulcro (isto é, o linha neutra na base da seção) com o momento da esforços internos fratura. Galileu aparentemente havia negligenciado as duas condições restantes: A soma das forças horizontais e verticais.

Pai, por contraste, escreve explicitamente a equação de equilíbrio horizontal. Ele assume uma distribuição linear geral deformação (Fig. 7.13), permitindo módulos elásticos desigual em tensão e compressão. Em sua formulação, a fratura é regida pela tração tensão em fibra AT, embora a compressão tensão em fibra BX Pode ser maior. Independentemente de suas magnitudes, os pais afirmam que a resistência total do triângulo compressivo CBX deve ser igual ao do triângulo de tração CAT, com as forças correspondentes agindo através de pontos I e.. D, respectivamente.

Os pais também foram os primeiros a reconhecer a possibilidade de forças agirem tangencialmente à seção transversal - o que agora chamamos de cisalhamento tensões.

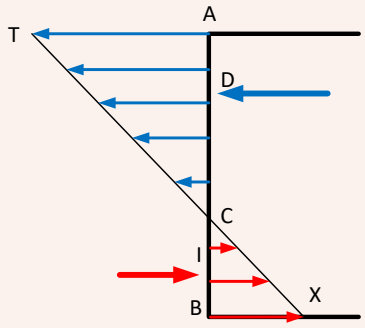


Figura 7.13: Modelo dos pais

7.3.2.5 Coulomb (1773)

Charles-Augustin Coulomb fez avanços significativos na análise da flexão. Em suas memórias de 1773 (Coulomb, 1773b)(*Essai sur une aplicação des rÈgles de maximis et minimis À quelques problÈmes de Statique Relatifs ùma arquitetura*), ele examinou a distribuição esforço interno em cantilever vigas e corretamente aplicou todas as três equações de equilíbrio - equilíbrio força em duas direções e equilíbrio momento sobre um ponto. Ele considerava a viga como composto de fibras obedecendo à lei de Hooke, e para o caso do comportamento elástico até a falha, ele estimou o momento interno resistindo como proporcional à tração máxima tensão e ao quadrado da profundidade da seção, ou seja, $\sigma h^2/6$.

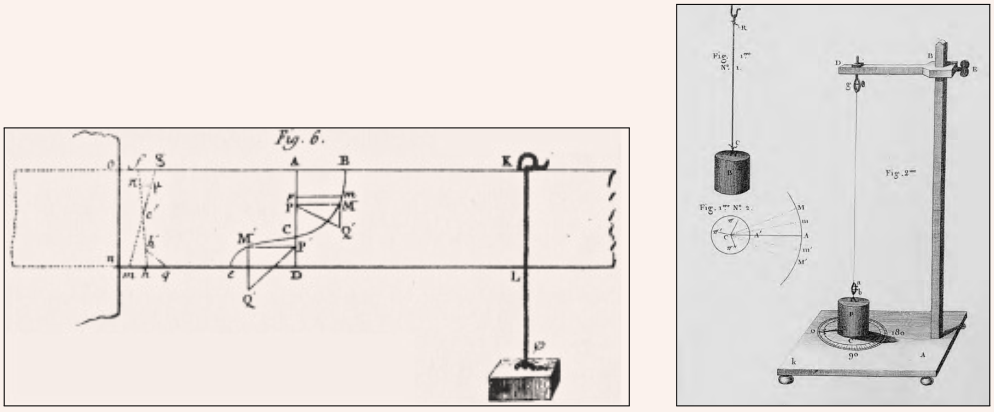
CÓPIA PARA REVISÃO

Flexura

Embora esta equação não tenha sido explicitamente escrita nesta forma por Coulomb, seus raciocínios e cálculos são equivalentes em substância. Ele claramente identificou os papéis de tensão e compressão, discutiu a mudança do linha neutra, e distinguiu entre o comportamento dos materiais elásticos e rígidos. No entanto, ele não derivava a distribuição linear completa tensão ou justificava a localização do linha neutra da teoria da elasticidade. No entanto, é importante notar que o tratamento de Coulomb foi baseado principalmente na intuição mecânica e analogia com a ruptura das fibras, não no emergente quadro matemático da elasticidade. Ele não derivava a fórmula da lei de Hooke, nem formulava condições para compatibilidade ou equilíbrio interno.

Descrevemos sua derivação (baseada em (Timoshenko, 1953 PDF))

Coulomb, 1773c PDF começa sua análise de flexão examinando a distribuição interna tensão em um cantilever retangular viga, como ilustrado na figura. 7.14a e discutiram em Timoshenko, 1953 PDF. Seu raciocínio pode ser quebrado em vários passos-chave:



(a) Equilíbrio do cantilever carregado

(b) Dispositivo para teste de vibração torsional

Figura 7.14: Experiências de Coulomb (Coulomb, 1773c PDF)

Um. Distribuição em uma Seção Coulomb considera uma seção transversal AD perto da extremidade fixa do cantilever. Ele observa que a parte superior (AC) estará em tensão, enquanto a porção inferior está em compressão. Ele decompõe as forças das fibras em componentes horizontais e verticais (representados por vetores) PQ e.. $P'Q$), e aplica as três equações da estática. A partir disso, ele conclui:

- O **soma das forças horizontais** (representado pela curva BCe Ao longo da seção) deve ser zero.
- O **soma de forças verticais** deve igualar a carga aplicada ϕ.
- O **soma de momentos** do esforços internos em relação ao ponto C deve ser igual ao momento da carga aplicada ϕ sobre o mesmo eixo.

Ele observa que essas equações são de qualquer forma, independentemente do comportamento constitutivo do material.

2. Um caso perfeitamente elástico Assumindo que a viga é feito de um material perfeitamente elástico obedecendo à lei de Hooke, Coulomb examina um elemento diferencial $ofhn$ no final fixo. Sob a

CÓPIA PARA REVISÃO

carga aplicada ϕ, o plano inicialmente horizontal fh gira para uma nova posição gm.. A distribuição tensão dentro da seção transversal é ilustrada por duas áreas triangulares: fge em tensão e emh em compressão, cada um representando deformação e tensão através das fibras.

Vamos σ ser a tração máxima tensão no ponto f.. Coulomb então calcula o momento de resistência interna (para uma viga de largura unitária) como se segue:

$$M_{\text{int}} = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{fe}{2} \cdot \frac{2}{3} fe = \frac{2}{3}\sigma(fe)^2 = \sigma\frac{(fh)^2}{6} \tag{7.5}$$

Apresentando a força de tração final do material S, e denotando o braço da carga l E a profundidade total da seção por h, ele deriva a carga final como:

$$\phi = \frac{Sh}{6l} \tag{7.6}$$

Ele conclui que forças de cisalhamento podem ser negligenciadas, particularmente quando o braço da alavanca l é muito maior do que a profundidade h.

3. **Caso de compressão absolutamente rígida** Coulomb considera um material como a pedra, que se supõe ser rígido na compressão e sem extensão na tensão. Ele postula que a fratura ocorre por rotação sobre a borda inferior hE assume uma distribuição uniforme de tração. O momento interno resultante leva a uma carga máxima mais elevada estimada:

$$\phi = \frac{Sh}{3l} \tag{7.7}$$

No entanto, comparando esta previsão teórica com dados experimentais, Coulomb descobre que a carga é superestimada. Portanto, ele propõe que o ponto de rotação real deve estar ligeiramente acima h, em um ponto h', de modo que uma pequena porção hh' da seção carrega força de compressão.

4. **Significado e Contexto** A análise de Coulomb aplica corretamente o equilíbrio estático a esforços internos e mostra uma clara compreensão conceitual da distribuição tensão dentro de um membro fletor.[15]

Curiosamente, Coulomb não faz referência às contribuições anteriores dos pais, sugerindo que ele não as conhecia. Em vez disso, ele cita Charles Bossut, que em seu tratado *La Construction la plus avantageuse des digues* recomendava que madeira vigas fosse tratada como elástica e pedra rígida.

> Coulomb usou equações de estática corretamente na análise esforços internos e teve idéias claras sobre a distribuição dessas forças sobre a seção transversal da viga.
>
> Timoshenko, 1953 History of Strength of Materials

[15]Os diagramas de Coulomb tensão e as estimativas do momento estão conceitualmente alinhados com a teoria moderna viga, mas diferem na execução. Hoje, o momento interno em um elástico viga é escrito como $M = \int_A \sigma y \, dA$ com $\sigma = E\kappa y$, levando a $M = EI\kappa$, onde E é Módulo de Young, κ é a curvatura, e I O segundo momento de área. Coulomb ignora esta derivação baseada em cálculo, raciocinando geometricamente sobre os blocos triangulares tensão. Além disso, seu tratamento da fratura usa o máximo tensão e assume redistribuição plástica completa - um conceito formalizado muito mais tarde em análise de limites e teoria do design plástico.

CÓPIA PARA REVISÃO

> A teoria de Coulomb... apesar de dar em geral resultados corretos, foi defeituoso no ponto de princípio, uma vez que a distribuição de tensão não foi obtida a partir de um conhecimento do deformação, mas foi postulado por razões empíricas.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

Foi *Não até meados do século XIX* que Saint-Venant formalizou essas ideias através da teoria da elasticidade, derivando a relação familiar $\sigma = My/I$ e estabelecendo que o linha neutra coincide com o centróide. Assim, enquanto Coulomb antecipava o essencial da teoria viga, permaneceu para Saint-Venant colocá-la em uma base teórica rigorosa.

Torção

Em 1784, Coulomb produziu suas memórias sobre a torção. Ele determinou a rigidez torsional de um fio observando as oscilações torcionais de um cilindro de metal suspenso por ele[16] Fig. 7.14b.. Coulomb assumiu que o torque resistindo de um fio retorcido é proporcional ao ângulo de torção ϕ, e descobriu que o período de oscilação independente do ângulo de torção (se não muito grande), e assim concluiu que há uma proporcionalidade do torque e do ângulo da torção. Ele então fez experimentos com fios do mesmo material, mas diferentes comprimentos e diâmetros, e estabeleceu que o torque M seria

$$M = \frac{\mu d^4}{l}\phi \tag{7.8}$$

Onde l é o comprimento, d diâmetro e μ uma constante material. Na notação moderna, este é

$$T = \frac{GJ}{L}\phi \tag{7.9}$$

Onde T, G, J e.. ϕ são o torque externo, o módulo cisalhamento, o polar momento de inércia (J=$\pi d^4/32$ para seção circular), e o ângulo de torção, respectivamente. A expressão correspondente para o máximo de tensão é $\tau = TR/J$.

Coulomb tinha realmente derivado esta equação, embora a analogia com a equação de contrapartida para a flexão tensões é simples, não está claro wo foi o primeiro uso dela.

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \tag{7.10}$$

No entanto, a equação flexural tensão é comumente atribuída a Coulomb.

7.3.2.6 Jovem (1807)

Veja §6.6.6 para uma discussão sobre as contribuições de Young na tradição iniciada por Hooke.

Interlúdio: Modulus

Em 1807, Young introduziu o conceito de um módulo elástico para caracterizar o rigidez de um material:

[16] Deve-se notar que então Coulomb já havia desenvolvido o equilíbrio torcional e usado para muitos de seus estudos quantitativos sobre eletricidade e magnetismo, bem como viscosidade

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

> Podemos expressar a elasticidade de qualquer substância pelo peso de um determinado pilar da mesma substância, que pode ser denominado o módulo de sua elasticidade, e do qual o peso é tal, que qualquer adição a ele iria aumentar na mesma proporção que o peso adicionado encurtaria, por sua pressão, uma parte da substância de igual diâmetro.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

Sua definição é um pouco confusa e difere ligeiramente da interpretação moderna. O peso do módulo de Young tem unidades de força em vez de tensão, e corresponde ao módulo elástico moderno$E$) multiplicado pela área transversal (A). Vale a pena notar que essa relação já tinha sido articulada mais cedo por Euler.

Além disso, Young se refere ao que chamamos de "cisalhamento"como *detrusão* e afirma que:

> pode-se inferir, no entanto, das propriedades de substâncias distorcidas, que a força varia na razão simples da distância das partículas de sua posição natural, e também deve ser simplesmente proporcional à magnitude da superfície para a qual é aplicado.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

Aqui, Young descreve corretamente cisalhamento deformação e o módulo cisalhamento, e também conclui (especificamente) que a força cisalhamento de um membro é proporcional à sua área transversal.

Terceira regra do meio. 1807

Voltamos agora à questão do *linha neutra*Depois de um breve interlúdio sobre a introdução do módulo elástico por Young. Young também estudou a localização do linha neutra em dobra. Ele estendeu o trabalho anterior de Parent e Coulomb para incluir os efeitos de força axial, como ilustrado na Fig. 7.15.

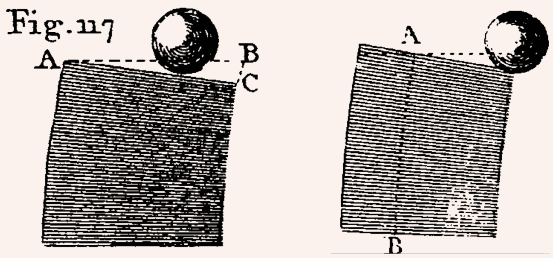


Figura 7.15: Terceira regra do meio de Young

> **320. Teoria**.. Quando uma força é aplicada a um elástico pilar, de uma forma prismática retangular, em uma direção paralela ao eixo, as partes mais próximas à linha de direção da força exercem resistência em uma direcção oposta; Essas partículas, que estão a uma distância além do eixo, igual a um terço proporcional à profundidade e doze vezes a distância da linha de direção da força, permanecem em seu estado natural; e as partes além deles agem na direção da força.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

O Teorema de Young 320, pode ser lido como uma declaração geométrica de proporcionalidade governando a extensão longitudinal e compressão de um elástico carregado excentricamente pilar. Deixe uma força F Agir

CÓPIA PARA REVISÃO

paralelo ao eixo de um prismático retangular pilar mas em um deslocamento transversal a do eixo centróide, o pilar tem profundidade b na direção de dobrar. Young argumenta que o longitudinal deformação varia proporcionalmente com a distância y da linha de ação da força, para que as fibras mais próximas dessa linha experimentem extensão em um sentido, enquanto as fibras suficientemente distantes experimentam extensão no sentido oposto. Existe uma camada intermediária, localizada à distância y_0 do eixo, para o qual a extensão desaparece, ou seja, $\varepsilon(y_0) = 0$.. Young determina este local não resolvendo uma equação algébrica tensão, mas pelo raciocínio proporcional, afirmando que y_0 é o terceiro proporcional a b e.. $12a$, de modo que $b : y_0 = y_0 : 12a$.. Em termos modernos, isso implica $y_0 \propto \sqrt{ab}$, expressando o equilíbrio entre força axial e dobra induzida pela excentricidade. O teorema codifica assim a proporcionalidade linear $\varepsilon(y) \propto y$ através da profundidade da seção, antecipa o conceito de um deslocamento linha neutra, e ilustra como Young emoldurou comportamento elástico por razões de comprimentos e forças ao invés de por equações constitutivas explícitas.

Aqui, Young descreve como a posição do linha neutra varia com excentricidade de carga e introduz o que se tornaria o celebrado *Terceira regra do meio* em design de engenharia.

Deve-se notar, no entanto, que a exposição de Young nem sempre foi clara. O material relevante apareceu como parte de uma ampla compilação de 58 palestras cobrindo diversos tópicos científicos.

> Toda a seção me parece muito obscura como a maioria dos escritos de seu autor distinto, entre suas vastas realizações em ciências e línguas que se expressam claramente no dialeto comum dos matemáticos infelizmente não foi incluído. As fórmulas da seção provavelmente eram principalmente novas no momento de sua aparência, mas eles eram pouco propensos a ganhar atenção em consequência da forma não atraente em que foram apresentados.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

Na era de Young, a linhagem empírico-contínuo tinha estabelecido a maioria dos conceitos essenciais da teoria viga - comportamento elástico, distribuições tensão, análise de equilíbrio, e até mesmo compreensão rudimentar das propriedades materiais. No entanto, uma estrutura teórica totalmente rigorosa permaneceu evasiva. A síntese final exigiria a precisão matemática que Saint-Venant forneceria meio século depois.

7.3.2.7 Saint-Venant (1855)

Saint-Venant voltou à análise de viga dobrando mais de 80 anos após o trabalho pioneiro de Coulomb. Enquanto Coulomb já tinha proposto uma formulação estaticamente correta envolvendo tração e compressão tensões - e inclusive incluiu expressões semelhantes ao momento moderno - relação tensão - ele não derivava a distribuição tensão da teoria da elasticidade. Foi deixado a Saint-Venant para fornecer o *Primeira derivação rigorosa* do campo tensão sob dobra usando a estrutura completa da elasticidade linear.

Em suas memórias seminais (Saint-Venant, 1855c), Saint-Venant assumiu pequenas deformações, um material elástico homogêneo e isotrópico obedecendo à lei de Hooke, e perfeita ligação entre fibras. Sob essas premissas, ele demonstrou que:

- O *linha neutra*- o locus de zero longitudinal tensão- passa pelo centroide da seção transversal viga.
- O normal tensão sob flexão pura varia linearmente com a distância y a partir deste eixo, levando à expressão agora fundamental:

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

Isso marcou um ponto de viragem: Pela primeira vez, a fórmula de flexão tensão foi deduzida do comportamento e compatibilidade do material interno - não apenas equilíbrio. O resultado substituiu o

CÓPIA PARA REVISÃO

raciocínio empírico ou baseado em fibras por uma abordagem contínua elástica e geometria firmemente ligada, comportamento material e distribuição interna tensão.

7.3.2.8 Clebsch (1862)

Alfred Clebsch (1833-1872) desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento matemático formal da teoria da elasticidade. Seu grande trabalho, (Clebsch, 1862b) (*Theorie der Elasticität fester KÖrper*), publicado postumamente em 1862 e posteriormente traduzido para o francês em 1866 com anotações detalhadas por Saint-Venant, ofereceu uma apresentação sistemática e rigorosa das equações de elasticidade governante.

Enquanto Clebsch não introduziu o conceito de *linha neutra*Seu tratado consolidou e ampliou os resultados de Saint-Venant, proporcionando uma derivação mais geral e formal das distribuições tensão e deformação em corpos elásticos. Em particular, seu tratamento da flexão inclui as condições sob as quais uma superfície neutra surge - definido como o locus de pontos no corpo deformado experimentando zero longitudinal deformação. Esta generalização ajuda a solidificar a base matemática da teoria viga, combinando o insight físico com a precisão analítica.

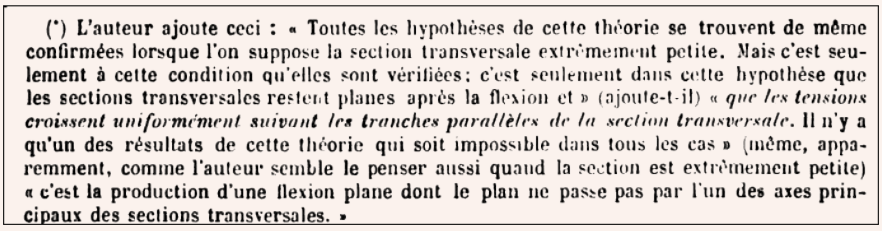
O trabalho de Clebsch marcou uma transição importante para formulações modernas, introduzindo não só expressões diferenciais claras de equilíbrio e compatibilidade, mas também antecipando tratamentos posteriores baseados em tensores de elasticidade.

> Clebsch... se expressa com notável clareza e precisão... A exposição está de acordo com os métodos da análise superior.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

7.3.2.9 Saint-Venant (1866)

Saint-Venant esclareceu e ampliou seu trabalho anterior através de anotações na tradução francesa de 1866 do tratado de Clebsch sobre elasticidade (Clebsch, 1866). Com base em informações anteriores de Galileu, Mariotte e Parent, ele corrigiu a suposição errada de Mariotte de que as seções planas permanecem planas exclusivamente baseadas na geometria. Em vez disso, ele mostrou que isso resulta naturalmente da teoria da elasticidade sob pequenas suposições.

Figura 7.16 mostra um trecho das anotações de Saint-Venant, onde ele afirma (*as tensões croissent uniformement suivant les tranches parallèles de la section transversale*) que tensões aumentam uniformemente através das fatias paralelas da seção transversal.



(*) L'auteur ajoute ceci : « Toutes les hypothèses de cette théorie se trouvent de même confirmées lorsque l'on suppose la section transversale extrêmement petite. Mais c'est seulement à cette condition qu'elles sont vérifiées; c'est seulement dans cette hypothèse que les sections transversales restent planes après la flexion et » (ajoute-t-il) « *que les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale*. Il n'y a qu'un des résultats de cette théorie qui soit impossible dans tous les cas » (même, apparemment, comme l'auteur semble le penser aussi quand la section est extrêmement petite) « c'est la production d'une flexion plane dont le plan ne passe pas par l'un des axes principaux des sections transversales. »

Figura 7.16: Extrato das anotações de Saint-Venant em (Clebsch, 1862b)

Esses esclarecimentos ajudaram a ponte da divisão histórica entre as formulações estáticas iniciais e uma teoria totalmente analítica. Como Todhunter observou:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Saint-Venant mostra com a análise mais simples que as seções transversais não mantêm seu contorno original... nem sua planicidade original... a linha neutra é o diâmetro da elipse de inércia conjugada ao traço do plano de carga no Corte transversal.
>
> Todhunter e Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

As duas contribuições de Saint-Venant, suas memórias de 1855 e as anotações de 1866, continuam sendo fundamentais. Eles estabeleceram não só o teorema linha neutra mas também o núcleo da teoria elástica viga como praticada hoje.

7.3.3 Ato III: Linha analítica

O terceiro ato representa uma abordagem fundamentalmente diferente do comportamento de compreensão. Em vez de começar com modos de falha observados ou distribuições empíricas tensão, a linhagem analítica começou com princípios matemáticos - especificamente, o pressuposto de que os materiais obedecem à lei de Hooke - e usou cálculo para derivar as equações governando Deformação elástica. Esta abordagem, pioneira por Jakob Bernoulli e formalizada por Euler, antecipou muitos resultados que a tradição empírica não alcançaria por mais um século.

7.3.3.1 Jakob Bernoulli (1687)

Em 1687, Bernoulli era professor de matemática, mas seu interesse em resolver problemas físicos Parece ter permanecido intacta. Alguns argumentaram que Bernoulli era, em última análise, um bom mecânico porque um artesão procurou seu conselho para a melhor escolha de forma para a viga de uma escala. A conversa com este artesão formou a fundação do estudo de Bernoulli sobre estruturas elásticas[17] (Alassi, 2020).

Esta conversa foi relatada a Leibniz em uma carta em dezembro de 1687.

Esta carta continha críticas do artigo de Leibniz sobre a resistência dos sólidos e relatou que

> Um artesão local que demonstra uma destreza impressionante em fazer jardas. Eu facilmente percebi que a habilidade peculiar deste homem consistia menos em estabelecer as divisões do jugo do que em ajustar sua espessura que não poderia ser facilmente dobrada pelo seu próprio peso e uma carga anexa.
>
> Bernoulli, Jakob, 1855 *"Letter to G. W. Leibniz, December 1687"*

Esta conversa com o artesão lembrou Bernoulli do artigo de Leibniz sobre a resistência dos sólidos. Bernoulli observou que ele poderia reduzir a calcular qual espessura seria necessária em qualquer jugo para garantir a força adequada, ou inversamente, para uma determinada espessura e comprimento, determinar que carga poderia suportar - tudo isso baseado em um único experimento conduzido em uma varinha do mesmo material.'

Desafiando alguns dos resultados experimentais de Leibniz, Bernoulli propôs que o alongamento depende de dois fatores fundamentais: a força de alongamento aplicada e a natureza do material. Esta carta marca a primeira instância conhecida em que as propriedades materiais foram explicitamente consideradas no estudo da elasticidade. Bernoulli foi assim o primeiro a reconhecer que a deformação deveria ser descrita

[17] Ainda hoje, alguns argumentam que bom mecânico de engenharia tem que contar com estudos experimentais sólidos. Possivelmente verdade, mas o mais conversado.

CÓPIA PARA REVISÃO

relacionando a força por unidade de área - o que chamamos agora de tensão - ao alongamento relativo por unidade, ou deformação, de uma fibra material sob tensão. Uma grande visão, de fato.

Embora Bernoulli evidentemente tenha observado a deformação plástica dependente do tempo das cordas intestinais, um material altamente sensível à umidade e temperatura, ele não foi capaz de interpretar este comportamento corretamente (Alassi, 2020 PDF).

O valor desta carta está não só em seu conteúdo histórico, mas também em seu caráter sociológico único. O artesão desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da teoria das estruturas elásticas, fornecendo a Bernoulli insights precisos e baseados em experiência. Bernoulli reconheceu esta contribuição ao referir a opinião do artesão em sua correspondência com uma figura proeminente como Leibniz. Apesar das convenções da época, o artesão não era invisível para Bernoulli. Então, como muitas vezes ainda hoje, os artisanos (ou técnicos, em termos modernos) eram vistos como meros executores de instruções, encarregados de fazer instrumentos ou realizar experimentos, mas raramente creditados como contribuintes para o conhecimento teórico. Bernoulli, no entanto, viu o artesão não como um fabricante de ferramentas precisando de direção, mas como um portador de valiosa experiência. Ele o envolveu em uma séria discussão sobre o artigo de Leibniz e deu consideração às suas objeções.

7.3.3.2 Euler (1727)

Euler, mais uma vez, assumiu uma distribuição linear das tensões axiais através da seção transversal e integrou estas para obter o total momento fletor - assim unindo o método de Leibniz (que negligenciava dobrar completamente) com o de Jakob Bernoulli, que havia falhado para explicar corretamente a variação da tensão.

Sua abordagem, adaptada de Truesdell, 1960 PDF, está delineado abaixo.

Enquanto Euler estava considerando a vibração de um anel circular (Fig. 7.17a), a flexão de um segmento infinitesimal do anel pode ser analisada da mesma forma que a de uma reta viga. Na parte esquerda da Fig. 7.17b, o raio da curvatura Ca É RE a espessura Aa É c.. À direita, o anel é mostrado em uma configuração deformada. O elemento ab, de comprimento arco ds, é selecionado para combinar com o seu homólogo não formado. O novo raio de curvatura ac É r, e o incremento resultante no comprimento da fibra AB, devido ao axial deformação, é dado por Euler, 1862 PDF:

$$d\tau = E\varepsilon = \frac{R-r}{Rr}\, c\, ds = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) c\, ds \tag{7.11}$$

Esta expressão relaciona o força axial por unidade de área $E\varepsilon$ à diferença na curvatura e forma a base do tratamento de Euler da flexão em anéis elásticos.

Na Fig. 7.17cC, Euler descreve a matéria do anel como composta de fios elásticos. As partículas unidas $AaeE$ e.. $BbeE$ são considerados como filamentos elásticos de tal forma que quanto mais esticados, maior a força que exercem para contrair. O ângulo $Ee\varepsilon$ está cheio de tais filamentos, transversalmente arranjados; Eles tentam trazer os lados Ee e.. εe Juntos. De acordo com Euler, a coesão do material do anel depende da força produzida por esses fios internos.

Euler então assume esta coesão para ser tal que um conjunto de linhas de comprimento inicial $FG = f$, estendido para $FJ = g$, pode manter um peso total P (ver Fig. 7.17cc). Isto é, a proporção

$$\frac{P}{fg}$$

dá a força por unidade de área de corte transversal e extensão por unidade - uma expressão que corresponde ao que é agora chamado Módulo de Young, e que faz sua primeira aparição aqui.

CÓPIA PARA REVISÃO

Em teorias anteriores, isso foi implicitamente explicado:

- No trabalho de Galileu e o de Leibniz, Varignon, e Pai, uma constante material K foi interpretado como ruptura tensão. Essas teorias consideraram tensão mas negligenciaram o associado deformação.
- Na teoria de Hooke, como refinado por autores posteriores, uma força elástica foi definida como a força necessária para produzir um dado deformação em um determinado corpo — mas novamente, sem uma constante material explícita.

O que é novo aqui é que Euler $P/(fg)$ é introduzida como uma constante elástica material - isto é, uma média tensão (não uma força) produzindo um elástico específico deformação (sem ruptura). Embora a existência de tal constante estivesse claramente implícita no trabalho anterior de Jakob Bernoulli, ela não foi introduzida explicitamente por ele. Sua aparência clara no tratamento de Euler deve-se ao fato de que este é o primeiro problema requerendo tal módulo para uma solução correta.

Para quantificar a distribuição dessas forças, Euler continua (ver novamente Fig. 7.17cC): Vamos $eM = x$, e $Mm = dx$; Então, a pequena região $MmnN$ está cheio de filamentos de comprimento $\frac{x}{c}d\tau$.. A força F_x Puxando Mn Para onde Nn é:

$$F_x = \frac{P}{fg} \cdot dx \cdot \frac{x}{c} d\tau \tag{7.12}$$

Portanto, o peso F que deve ser aplicado em E e.. ε para produzir o mesmo momento sobre o ponto e Como F_x Agindo à distância x é:

$$F = \frac{x}{c} F_x = \frac{P}{fgc^2} x^2 dx\, d\tau \tag{7.13}$$

Integração de $x = 0$ para $x = c$ dá a força total (ou "peso") para ser aplicada em E:

$$\text{weight} = \frac{Pc}{3fg} d\tau = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pc^2}{fg} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ds \tag{7.14}$$

Agora reconhecemos isso como o momento clássico, a relação entre curvas:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \qquad \mathfrak{B} = EI \tag{7.15}$$

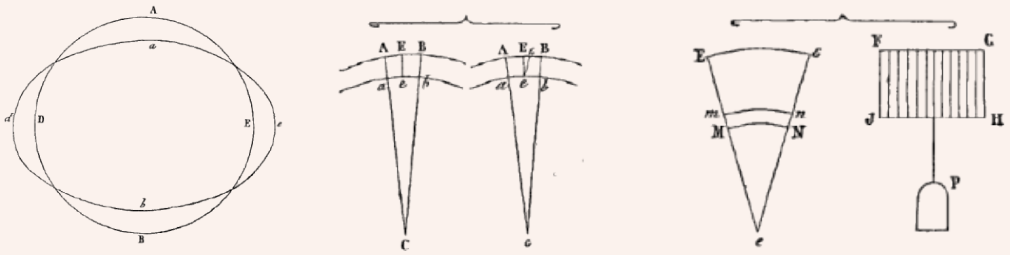
Aqui E É Módulo de Young e I é o segundo momento de área. Para uma seção retangular, e assumindo que o linha neutra está na borda côncava, $I = \frac{1}{3} AD^2$, combinando com a formulação de Euler na Fig. 7.17c-C. Isto representa a primeira derivação rigorosa do que chamamos agora de relação momento-curvatura - uma equação fundamental de mecânica estrutural.

Por isso, a introdução de Euler ao *módulo de extensão* que caracteriza um material elástico em vez de um espécime particular é hoje em dia nomeado em homenagem a Young (Truesdell, 1968 PDF).

Em artigos subseqüentes Euler, 1760 e.. Euler, 1780Euler apresentou essas ideias de forma mais compacta e explicou melhor. Em particular, ele definiu explicitamente o módulo de extensão, que tinha sido usado apenas com comentários passageiros em seu trabalho anterior.

A realização de Euler foi notável: Trabalhando puramente a partir de princípios matemáticos e da lei de Hooke, ele derivava a equação fundamental de viga dobrando décadas antes que a tradição empírica chegasse a conclusões semelhantes. No entanto, este avanço analítico permaneceu em grande parte desconectado da prática análise estrutural até que as duas tradições finalmente convergiram em meados do século XIX.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Anel oscilante investigado por Euler

(b) Diagrama para a primeira derivação de Euler da lei de Bernoulli pela lei de Hooke (1727)

(c) A primeira definição de Euler do módulo de extensão (''Módulo de Young')(1727)

Figura 7.17: Euler, Bernoulli e Hooke se reúnem (Euler, 1862)

7.4 Resumo

O desenvolvimento histórico da teoria flexural revela o caminho complexo e não linear pelo qual a compreensão científica emerge. Três linhagens distintas — as observações empíricas de Leonardo, a tradição francesa da experimentação prática e a abordagem matemática suíço-alemã - cada uma contribuiu com insights essenciais que eventualmente sintetizariam na teoria moderna viga.

Talvez o mais impressionante seja por quanto tempo as tradições analíticas e empíricas permaneceram separadas, apesar de abordarem as mesmas questões fundamentais. A rigorosa derivação matemática de Euler da relação momento-curvatura em 1727 antecipou por décadas muitos resultados que a tradição prática lutou para alcançar. No entanto, foram os investigadores empíricos - Galileu, Mariotte, Coulomb e Saint-Venant - que fizeram as perguntas que engenheiros praticantes realmente precisavam responder: Quando vigas quebram? Quanta carga eles podem carregar? Onde é que o máximo tensões ocorre?

A eventual convergência dessas abordagens no trabalho de Saint-Venant demonstra como o progresso científico muitas vezes requer rigor matemático e perspicácia prática. Moderno análise estrutural beneficia desta síntese: usamos a relação de momento-curvatura derivada matematicamente de Euler dentro da estrutura de distribuição de Saint-Venant tensão para resolver os problemas práticos que Galileu coloca.

Mesa 7.1 resume grande desenvolvimento do conceito de linha neutra.

Tabela 7.1: Grandes desenvolvimentos na força e distribuição interna tensão

Ano	Figura / Evento	Trabalho / Título	Resumo
c. 1490	Leonardo da Vinci	Experiência com cestas penduradas	Carregamento incremental de uma cesta suspensa até a ruptura do fio; uma sonda empírica precoce de força axial, porém (incorretamente) esperada dependência do comprimento.
1630	Isaac Beeckman	Nota na extensão de cordas (Drake, 1970)	Observa que cordas mais longas se estendem mais sob carga, um reconhecimento precoce e indireto de *deformação*.

CÓPIA PARA REVISÃO

Ano	Figura / Evento	Trabalho / Título	Resumo
1638	Galileo Galilei	*Discursos e Demonstrações Matemáticas Relacionadas a Duas Novas Ciências* (Galilei, 1638)	Força cantilever através de analogia alavanca; Introduz capacidade-exigência pensamento e proto livre corpo raciocínio; Falta um conceito moderno tensão.
c. 1500	Leonardo da Vinci	*Códice Madrid*, fol. 9v (Da Vinci, 1490; Zammattio, 1980)	Estudos de esboços fazendo perguntas sobre força contra viga. comprimento, seção, suportes e carregamento; problema de enquadramento sem equações.
c. 1500	Leonardo da Vinci	*Códice Madrid*, fol. 20v (Zammattio, 1980)	Antecipa distribuição linear deformação e linha neutra em curvar séculos antes de Bernoulli.
1644	René Descartes	*Principia Philosophiae*; cartas para Mersenne (Descartes, 1897b)	Passa de "cola"/ vácuo para explicações mecânicas contínuas de coesão; Ponte conceitual para tensão/deformação pensamento.
1686	Edme Mariotte	Experimentos de dobra e ruptura (Heyman, 1998b; Timoshenko, 1953)	Adota elasticidade linear, ideia triangular tensão mas coloca NA em fibra extrema; deriva $L = Sh/(3l)$; Quase errou no resultado do momento certo.
1687	Jakob Bernoulli	Carta sobre comportamento elástico (Bernoulli, Jakob, 1855; Alassi, 2020)	Apresenta relação força-elongação como propriedade material; Sementes tensão–deformação pensando de problemas formados por artesãos.
1691	Gottfried W. Leibniz	*Acta Eruditorum* Note (Leibniz, 1691e; McDonough, 2016)	Critiques Galileu é inextensível viga; Decomposição conceitual de fibra/mola como modelo matemático.
1713	Antoine Parent	Linha neutra e equilíbrio (Parent, 1713)	Força o equilíbrio total (forças e momento); Reconhece tração/compressão resultados devem equilibrar e notas tangenciais (cisalhamento) ações.
1739	P. Van Musschenbroek	*Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739)	Testes de tração (e flexão) sistemáticos; Pontos fortes comparativos; Metodologia de testes e tabulação de dados.
1773	C.-A. Coulomb	Memórias de flexibilidade (Coulomb, 1773b; Timoshenko, 1953)	Aplica todas as três equações estáticas; blocos triangulares tensão; carga final $\phi = Sh/(6l)$ para estojo elástico; Conceição clara.
1784	C.-A. Coulomb	Memórias de torção (balanço de torsão)	Estabelecimentos $T = \frac{GJ}{L}\phi$ comportamento; período independente de amplitude (ângulos pequenos); analogias com dobra esclarecidas.
1807	Thomas Young	*Palestras sobre Filosofia Natural* (Young, 1807)	Define (verbalmente) módulo elástico; discute cisalhamento (“destruição”); Terceira regra com carga axial excêntrica.

CÓPIA PARA REVISÃO

Ano	Figura / Evento	Trabalho / Título	Resumo
1855	Barré de Saint-Venant	"Memórias dobradas"(Saint-Venant, 1855c)	Primeira derivação elástica rigorosa: NA através do centróide; $\sigma = My/I$ da compatibilidade + lei de Hooke, não apenas equilíbrio.
1862	Alfred Clebsch	*Teoria der Elasticität* (Clebsch, 1862b)	Sistematiza a elasticidade com análises mais elevadas; consolida a flexão com superfície neutra como locus zero longitudinal deformação.
1866	Saint-Venant (Annot.)	Ed francês. de Clebsch (Clebsch, 1866)	Esclarece as seções planas resultantes da elasticidade; tensões variar uniformemente em fatias; aperta a ligação entre geometria e tensão.
1727	Leonhard Euler	Anel elástico/viga curvatura (Euler, 1862)	"Derivado momento-curvatura"$M = EI\kappa$; introduz módulo explícito como constante material dentro da teoria de flexão.
1760; 1780	Leonhard Euler	Seguimentos do movimento elástico/fórmula (Euler, 1760; Euler, 1780)	Refina o conceito de módulo e formulações elásticas; compacta derivações anteriores e generaliza aplicações.

7.5 Transição

As investigações cobertas neste capítulo estabeleceram os princípios fundamentais que regem a força dos membros estruturais e a distribuição interna de tensões sob carga. A partir das observações empíricas de Leonardo através da rigorosa teoria da elasticidade de Saint-Venant, rastreamos como engenheiros e matemáticos desenvolveram nossa compreensão do porquê vigas falham e onde o máximo tensões ocorre.

No entanto, essas análises baseadas em força compartilhavam uma limitação comum: Eles focaram na capacidade dos membros de resistir esforços internos sem abordar a questão igualmente importante de como esses membros se deformam sob carga. Sabendo que uma viga pode carregar um certo momento não nos diz nada sobre sua forma desviada - mas esta forma governa tudo, desde estabilidade estrutural até capacidade de manutenção.

A transição da análise de força para a análise de deformação exigiu uma revolução matemática. Onde investigadores anteriores podiam confiar no equilíbrio estático e propriedades materiais, o estudo de formas desviadas exigia conceitos geométricos sofisticados que só estavam começando a emergir no século 17. A corrente pendurada e a haste elástica dobrada, os Grandes Desafios que examinaremos no Capítulo 9, não poderiam ser resolvidos sem uma profunda compreensão da curvatura, tangentes, círculos osculantes, e as relações matemáticas entre curvas e seus evolutos.

O próximo capítulo 8 Rastreará esta revolução geométrica, a partir das percepções qualitativas de Nicole Oresme sobre curvatura através do rigoroso quadro matemático estabelecido por Newton, o Bernoullis e Euler. Esses desenvolvimentos não eram meras abstrações matemáticas - eles forneceram as ferramentas essenciais que tornariam possível a solução de problemas estruturais fundamentais que desafiaram filósofos naturais por séculos.

Entender esta fundação geométrica é crucial para apreciar a realização intelectual representada pelas soluções de catenária e elástica. Quando Jakob Bernoulli colocou seu desafio elástico em 1691, ou quando

CÓPIA PARA REVISÃO

a comunidade matemática lutou com a forma da corrente pendurada, eles não estavam simplesmente resolvendo quebra-cabeças interessantes. Eles estavam estabelecendo o referencial teórico que apoiaria todos os desenvolvimentos subsequentes em mecânica estrutural - da fórmula de Euler flambagem para a análise moderna de grande deflexão.

É a esta revolução geométrica, as ferramentas matemáticas que ele criou e os avanços conceituais que ele permitiu, que agora nos voltamos para o Capítulo 8.. Esses desenvolvimentos irão definir o cenário para o Capítulo 9, onde a geometria e mecânica convergem nas soluções elegantes para alguns dos problemas mais bonitos e praticamente importantes da história da engenharia estrutural.



Caravaggio, David com o chefe de Golias (1609-1610)

A física da funda, o braço momento do lançamento de David, e a consequência de exceder os limites materiais - força conquistando massa.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 8

Geometria Diferencial de Curvas

Abstract

Este capítulo traça as bases geométricas da curvatura desde suas primeiras raízes conceituais até suas formulações maduras do século XVIII. O material aqui apresentado é a preparação essencial para o próximo capítulo (§9.3), onde o problema elástico será tratado em detalhe - sem entender curvatura como desenvolvido aqui, a formulação mecânica de curvas elásticas não pode ser devidamente agarrada.

Antes do advento do cálculo diferencial, a curvatura era entendida através de construções geométricas tangíveis — tangentes, normais, círculos osculantes e evolutos — aplicadas a curvas físicas como cicloídeos, catenárias e hastes dobradas.

Começando com as noções qualitativas de Nicole Oresme no século XIV, a narrativa segue os refinamentos progressivos de Huygens, Newton, Leibniz e Bernoullis, culminando na formulação variacional de Euler e da pequena euler-bernoulli Aproximação. A sistematização da curvatura de Kästner como a taxa limitante de mudança do ângulo tangente em relação ao comprimento do arco marcou a consolidação da definição moderna.

O capítulo também examina o desenvolvimento entrelaçado de evolutos e involutos, tanto como construções geométricas quanto como ferramentas práticas, notadamente no pêndulo cicloidal de Huygens. Ao situar esses avanços dentro de seus contextos mecânicos e matemáticos, a discussão destaca como a tradição geométrica em curvatura forneceu base essencial para teorias analíticas, estruturais e físicas posteriores, particularmente Jakob A formulação de Bernoulli do elástico, que depende fundamentalmente dos conceitos geométricos estabelecidos aqui.

8.1 Introdução: Origens geométricas da Curvatura e da Elastica 253
8.2 Curvatura 253
8.2.1 Oresme (1351) 254
8.2.2 Newton (1671) 255
8.2.3 Leibniz (1686) 258
8.2.4 Johann Bernoulli (1691) . . . 259
8.2.5 Jakob Bernoulli; O Teorema Dourado (1694) 260
8.2.6 Kästner (1758) 264
8.2.7 Resumo 265
8.3 Evolute/Involute 266
8.3.1 Huygens (1658-1673) 267
8.3.2 Limitações Práticas e Legado 269
8.3.3 Finalizando Observações . . 269
8.4 De curvas geométricas para Mecânica estrutural 270
8.5 Olhando para frente: 272

CÓPIA PARA REVISÃO

8.1 Introdução: Origens geométricas da Curvatura e da Elastica

Antes do cálculo diferencial oferecer uma linguagem geral para curvatura, construções geométricas forneceram o único meio viável de expressar como uma curva se dobra. A teoria da curvatura surgiu não da abstração, mas da realidade física e mecânica das curvas encontradas na natureza: o caminho de um objeto lançado, a borda de uma roda giratória, a forma de uma corrente suspensa, ou o arco traçado por uma haste flexível.

Os primeiros pensadores, notadamente Nicole Oresme, exploraram a curvatura dos gráficos como formas espaciais muito antes do enquadramento cartesiano formalizar tais representações. No século XVII, ferramentas geométricas como tangentes, normais, círculos osculantes e centros de curvatura foram rigorosamente desenvolvidas por Huygens, Newton e Bernoullis, não como entidades abstratas, mas como construções enraizadas no comportamento de Curvas físicas. Huygens, em particular, ligava curvatura à dinâmica mostrando como a forma de um cicloide governava o tautrócrono e evoluído. Newton se aproximou da curvatura como um efeito de segunda ordem do movimento. Jakob Bernoulli introduziu o termo *elásticoa* para a forma de uma haste curvada e usado raciocínio geométrico para posar sua equação governante.

Embora os desenvolvimentos posteriores reformulassem essas ideias na linguagem da análise, este capítulo foca-se no estágio formativo quando curvatura e elástico ainda eram entendidos principalmente em termos geométricos. Ele examina a evolução dessas ideias, começando pela imaginação geométrica de Oresme e culminando nas construções precisas do final dos séculos XVII e XVIII. Ao longo do caminho, destaca as figuras-chave - Huygens, Newton, Leibniz, e os Bernoullis - que avançaram o entendimento da curvatura através de ferramentas como evolutos, círculos osculantes, e o cálculo geométrico dos infinitesimais.

O elástico§9), em particular, surgiu como o problema por excelência onde geometria e mecânica se encontravam. Sua solução eventualmente exigiria cálculo variacional, mas sua formulação e tratamento precoce estavam dentro da tradição geométrica. Compreender essa linhagem é essencial para entender como a moderna teoria da elasticidade e forma estrutural tomou forma.

O entendimento geométrico da curvatura desenvolvido neste período viria a provar-se mais tarde fundamental para os avanços do século XIX, incluindo o desenvolvimento de Gauss de curvatura intrínseca para superfícies, a formulação eventual da geometria Riemanniana, e moderna aplicações que vão desde computação gráfica e sistemas CAD até a estrutura geométrica subjacente à relatividade geral de Einstein.

8.2 Curvatura

Antes de abordarmos a evolução do *Elastica*, (§9.3) é necessário introduzir o conceito de curvatura - a quantidade geométrica fundamental que governa como uma curva se dobra. Curvatura descreve o grau em que uma curva se desvia de ser reta, e ela faz isso em um *local* Sentido: Mede dobrando em um ponto específico ao invés de sobre uma forma inteira.

Para um círculo, curvatura é constante e simplesmente o recíproco do raio: círculos menores se dobram mais acentuadamente e, portanto, têm curvatura maior. Este caso familiar fornece uma base natural para definir curvatura em geral. A solução moderna de um problema de elástico canônico - ou seja, a grande deflexão de um cantilevered viga - é dada mais tarde em §29.2.3, e se baseia em entender como a curvatura varia ao longo do comprimento viga.

Já na antiguidade, Euclides definiu a tangente como uma linha que toca um círculo em exatamente um ponto sem atravessá-lo, mas noções mais gerais de curvatura ainda não foram desenvolvidas. Da mesma

CÓPIA PARA REVISÃO

forma, o problema clássico da quadratura - determinando a área delimitada por curvas - esperava que as ferramentas do cálculo fossem formalizadas séculos depois.

A curvatura moderna, por contraste, é definida como a taxa de mudança do ângulo de inclinação da linha tangente em relação ao comprimento do arco. Em termos descritivos, mede a rapidez com que a curva gira. Se a curva é um círculo, esta taxa de giro é constante. Para curvas arbitrárias, o método aceito é aproximar a curva localmente por um círculo que combina tanto sua tangente quanto sua curvatura em um ponto. Este círculo mais adequado é chamado, seguindo Leibniz, o *Círculo de osculação*[1] (Fig. 8.1) (Brackenridge, 1992 PDF). Ele tem a mesma primeira e segunda derivadas da curva no ponto de contato.

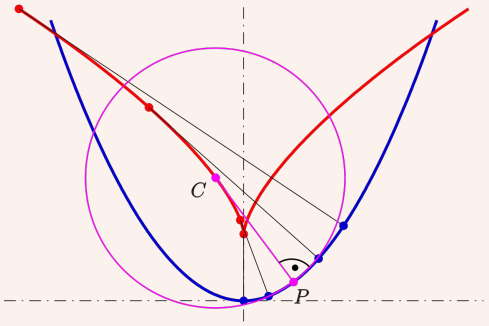


Figura 8.1: Círculos osculantes de uma parábola (azul); A posição atual mostra o círculo centrado em C e tangente em P.. Locus de centros mostrados em vermelho.

Embora a curvatura só tenha sido rigorosamente definida no final do século XVII, as primeiras insights sobre dobra aparecem até o século XIV. Além do trabalho pioneiro de Nicole Oresme (discussionado a seguir), o tratamento matemático preciso da curvatura surgiu independentemente do trabalho de Newton e Leibniz. É tradicional, no entanto, associar o desenvolvimento histórico da curvatura com o de evolutos e involutos - particularmente quando a descrição mecânica de desembrulhar um fio de uma curva (o evoluto) produz uma segunda curva (os involutos), como Discutido em.. §8.3.

8.2.1 Oresme (1351)

O conceito de curvatura está ausente da geometria euclidiana, onde pontos, linhas e círculos prevaleceram, e nenhuma noção geral de como uma curva foi formulada. Não foi até o século XIV que a idéia de curvatura, como um desvio mensurável da retidão, foi primeiro abordada - mais notavelmente por Nicole Oresme.

Em sua *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351)Oresme introduziu uma noção qualitativa de curvatura, tratando-a como uma magnitude continuamente variável. Para os círculos, ele reconheceu que a curvatura é inversamente proporcional ao raio e tentou estender esta idéia para curvas mais gerais. Embora ainda especulativo e sem formalismo, suas opiniões representam um avanço conceitual. Ele escreveu:

[1] Um **Círculo de osculação** (do latim *Oscularí*É o círculo que melhor se aproxima de uma curva em um determinado ponto. Ele tem a mesma tangente e curvatura que a curva naquele ponto, tornando-o o círculo único que "beijos" a curva mais próxima. O raio deste círculo é igual ao raio da curvatura, e seu centro está no normal à curva no ponto de contato. Na era de Bernoulli, este conceito forneceu o método geométrico primário para medir a curvatura antes que as definições analíticas fossem desenvolvidas.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Não sabemos com o que, ou em relação ao quê, a intensidade da curvatura é medida. Por enquanto, parece-me que só existem dois [possível] - Não, não [para falar da medida de curvatura].. A primeira é que o aumento da curvatura é uma função de sua saída da retidão, ou seja, de sua distância da retileza. Isso é.. [A ser medido] pela quantidade do ângulo constituído de uma linha reta e uma curva, por exemplo, um ângulo de contingência ou talvez outro ângulo também construído a partir de uma reta e de uma curva.
>
> Serrano e Suceavă, 2017 *"A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas"*

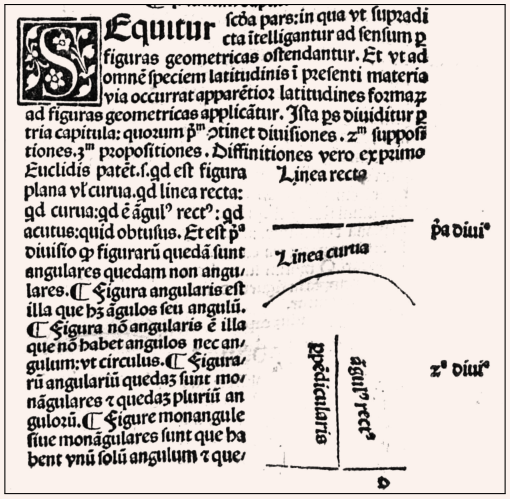


Figura 8.2: A curvatura de Oresme

Oresme não era um erudito comum. Ele foi retrospetivamente creditado com propostas de ideias que se assemelham à Lei de Gresham, geometria analítica, a lei da queda livre, teorias estruturais da matéria, e até mesmo a rotação da Terra. Embora nenhuma dessas alegações sejam estritamente escrutínio moderno, cada uma reflete a amplitude e originalidade de seu pensamento (Clagett, 1964).

Uma nota interessante: Acredita-se que Oresme introduziu a matemática + símbolo para adição.[2]

Em muitos aspectos, Oresme pode ser visto como um precursor da revolução científica (ver §5.3). É notável que ao longo de três séculos passaria entre a conceituação pioneira de Oresme (1351) e a formulação analítica de Newton (1671) - um testamento tanto para o quão revolucionárias foram as idéias de Orisme quanto para quanto tempo levou para as ferramentas matemáticas É necessário formalizar para que se desenvolvam.

8.2.2 Newton (1671)

O trabalho inicial de Newton sobre curvatura aparece em 1671, em seu tratado seminal *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736), onde ele abordou os problemas dos normais, tangentes e curvatura. Em maio de 1665, Newton já havia desenvolvido a fórmula geral para o raio da curvatura para uma função $y = f(x)$, e no inverno de 1670-71, ele começou a elaborar o que ficou conhecido como *Métodos de Séries e Fluxiões*.

Neste trabalho, ele posou, entre outros, o seguinte:

[2] O símbolo de multiplicação "x" foi introduzido por William Oughtred em 1618, o sinal da divisão div por Johann Rahn em 1659, e o símbolo infinito ∞ por John Wallis em 1655.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- Problema 5: "Determinação da curvatura de uma curva em qualquer ponto".
- Problema 6: "A qualidade da curvatura em um ponto".

Derivou a fórmula geral para curvatura em coordenadas cartesianas e, notavelmente, também expressou-a na forma polar. No Problema 5, Newton listou cinco condições definidoras que servem para determinar o raio ou centro de curvatura (Bardini e Gianella, 2014):

- Uma linha reta não tem curvatura.
- A curvatura de um círculo é constante e inversamente proporcional ao seu raio ($k = 1/R$).
- Se um círculo é tangente a uma curva em seu lado côncavo, e nenhum outro círculo pode ser inscrito dentro do ângulo de contato, ele compartilha a mesma curvatura que a curva naquele ponto.
- O centro da curvatura é o centro de um círculo tangente à curva em um ponto, deitado no lado côncavo, com a mesma curvatura. Para localizá-lo, é preciso intersectar os normais em dois pontos infinitamente próximos.

Newton ilustrou esta construção usando uma configuração geométrica em que os normais DH e.. dh Intersect em um ponto d, e como D Aproxime-se P, o ponto limitante torna-se o centro da curvatura C (Fig. 8.3).

> O mesmo círculo tem em todos os lugares a mesma curvatura, e em diferentes círculos é reciprocamente proporcional aos seus diâmetros.
>
> Se um círculo tocar qualquer curva em seu lado côncavo, em qualquer ponto dado, e se for de tal magnitude que nenhum outro círculo tangente seja inscrito no ângulo de contato desse ponto, esse círculo será da mesma curvatura que a curva é de, no Ponto de Contato.
>
> Portanto, o centro de Curvatura para qualquer ponto da Curva é o Centro do Círculo igualmente curvado, e assim o Raio ou Semi-diâmetro de Curvada é parte do Perpendicular para a Curva que é terminado no centro.
>
> E a Proporção da Curvatura em diferentes Pontos será conhecida pela Proporcção da Curvada dos Círculos de Curva Aqui-curva, ou pela Reciproca Proportion do Raio de Curvas.
>
> Uma outra explicação vem agora:
>
> Mas há vários sintomas ou propriedades deste ponto C que pode ser usado em sua determinação.
>
> Coolidge, 1952 *"The unsatisfactory story of curvature"*
>
> 1. É a interseção das perpendiculares com o arco em ambos os lados do ponto, tomada em intervalos infinitamente pequenos.
> 2. If DC é imaginado se mover enquanto permanece perpendicular à curva, então C experimentará o menor movimento e servirá como seu centro de rotação.
> 3. Se um círculo é desenhado com centro C e raio DC, nenhum outro círculo pode ficar entre este e a curva.
> 4. Se outro centro H de um círculo tangente se aproxima gradualmente C, eventualmente os pontos de contato coincidirão.
> 5. Cada uma destas propriedades fornece um método para resolver o problema, mas o primeiro é o mais simples e é escolhido.

Como Huygens, Newton assumiu que se um ponto (não uma inflexão) é fixado em uma curva, e outro

CÓPIA PARA REVISÃO

ponto próximo aproxima-se de ambos os lados, a interseção de seus normais converge para um centro bem definido de curvatura. Este é o centro de um círculo tangente à curva com curvatura correspondente - nenhum outro círculo pode estar entre ele e a curva.

Ele pegou x como variável independente, com $\dot{x} = l$ e.. $z = dy/dx$, resultando na fórmula bem conhecida para o raio de curvatura em coordenadas cartesianas:

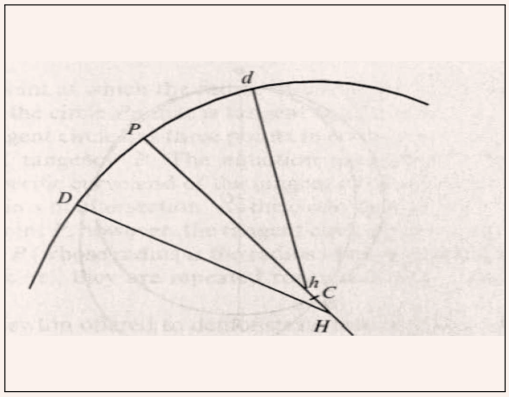


Figura 8.3: A derivação da curvatura de Newton

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{8.1}$$

Newton forneceu numerosos exemplos aplicando esta fórmula em várias curvas. Ele concluiu a seção com a seguinte declaração:

> Desde que todas as curvas geométricas... Pode ser referido a coordenadas em ângulo direito, eu acredito que já fiz o suficiente. Qualquer um que desejar mais irá fornecer sem dificuldade por seus próprios esforços, especialmente se, como um bônus, em ilustração do ponto eu adicionar um método para espirais.
>
> Newton, 1736 Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam

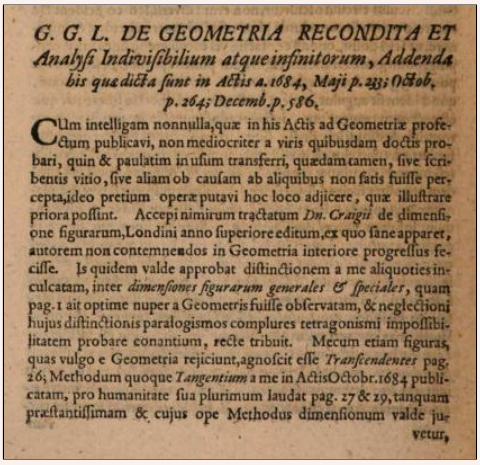
Apesar desses avanços fundamentais na teoria da curvatura, a abordagem de Newton à descoberta matemática diferiu marcadamente da tradição do desafio público que emergiria no continente. Seu trabalho sistemático na classificação de curvas, incluindo a identificação de 72 das 78 espécies de curvas cúbicas nos anos 1660 e 1670, permaneceu praticamente inédito durante sua vida (Whiteside, 1969). Enquanto Newton possuía as ferramentas matemáticas necessárias para analisar formas curvas complexas, incluindo aquelas que mais tarde seriam centrais para a teoria da elasticidade, ele nunca formulou o problema físico específico das curvas elásticas que Jakob Bernoulli posaria como Um desafio público duas décadas depois§9.3). Este contraste entre as investigações matemáticas privadas de Newton e as competições matemáticas abertas dos irmãos Bernoulli reflete diferenças mais amplas nas abordagens Continental versus Inglês para pesquisa matemática e disseminação.

CÓPIA PARA REVISÃO

8.2.3 Leibniz (1686)

Para um esboço biográfico de Leibniz, veja a Seção 6.6.8.

Enquanto Newton formalizava a expressão analítica para curvatura, Gottfried Wilhelm Leibniz contribuiu com importantes insights geométricos. Em seu artigo de 1686, "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum", publicado no *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1686b), Fig. 8.4[3] Leibniz discutiu o conceito de osculação, observando que uma cônica oscilante em um vértice, quando considerada sobre um arco suficientemente pequeno, não difere sensatamente da própria curva.



G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586.

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogiſmos complures tetragonismi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde juvetur,

G. G. L. SOBRE A GEOMETRIA OCULTA E A ANÁLISE DOS INDIVISÍVEIS E DOS INFINITOS, adendo ao que foi dito na Acta de 1684, maio, p. 233; outubro, p. 264; dezembro, p. 586.

Como entendo que várias coisas que publiquei nessa Acta para o avanço da Geometria foram consideravelmente aprovadas por certos homens eruditos e vêm gradualmente sendo postas em uso, mas que algumas, seja por falha do autor ou por outra razão, não foram suficientemente percebidas por alguns, julguei conveniente acrescentar aqui elementos que possam esclarecer os anteriores.

Recebi, de fato, o tratado do Sr. Craig sobre a medição das figuras, publicado em Londres no ano passado, do qual se vê claramente que o autor fez progressos consideráveis na Geometria interior. Ele aprova muito a distinção que repetidamente salientei entre dimensões gerais e especiais das figuras, a qual, na página 1, diz ter sido excelentemente observada recentemente pelos geômetras; e atribui corretamente ao desprezo dessa distinção vários paralogismos daqueles que tentam provar a impossibilidade da quadratura [do círculo].

Ele também reconhece comigo que as figuras comumente rejeitadas da Geometria são Transcendentes [transcendentais], p. 26; e, por sua cortesia, elogia em altíssimo grau, nas páginas 27 e 29, meu Método das Tangentes publicado na Acta de outubro de 1684, como excelentíssimo e como meio pelo qual o método das dimensões avança consideravelmente..."

Figura 8.4: Leibniz *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b)

Mais significativamente, este trabalho introduziu a notação diferencial de Leibniz (usando dx e.. dy) e demonstrou sua aplicação a problemas geométricos, incluindo aqueles envolvendo curvas transcendentais. Leibniz mostrou como seu método de infinitesimal poderia tratar problemas tangentes e quadraturas em uma estrutura unificada, escrevendo equações como $pdy = xdx$ e introduzindo o sinal integral $\int$ (escrito como f no original).

Enquanto este trabalho em particular se concentra mais na maquinaria analítica do que nas definições geométricas de curvatura per se, a abordagem de Leibniz enfatizou que as propriedades geométricas poderiam ser entendidas através da análise infinitesimal. Sua notação - particularmente o d/dx A forma se revelaria especialmente versátil para expressar relações de curvatura, tornando-se o padrão em geometria diferencial.

As diferentes abordagens de Newton e Leibniz para ambos os cálculos e problemas geométricos provocariam sua famosa disputa prioritária. Enquanto a notação fluvial de Newton era elegante para dinâmica, a notação diferencial de Leibniz se mostrou mais adaptável para as expressões complexas que surgem em fórmulas de curvatura e análise geométrica. Esta diferença metodológica influenciaria o desenvolvimento matemático por gerações, com a notação de Leibniz eventualmente dominando na Europa continental e tornando-se o padrão moderno.

O trabalho de Leibniz neste artigo, particularmente seu tratamento das curvas transcendentais e sua afirmação de que a geometria não deve excluir as curvas que só podem ser construídas através de processos

[3] Note que Leibniz assina simplesmente como G. G. L. (Latinizado: *Gottfridus Guilielmus Leibnitius*).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

limitantes, bases estabelecidas para desenvolvimentos posteriores na geometria diferencial Pelos Bernoullis, Euler e outros.

8.2.4 Johann Bernoulli (1691)

Johann Bernoulli primeiro deriva uma fórmula geral para o raio da curvatura em um manuscrito de 1691 (Bernoulli, Johann, 1691a). A derivação é descrita por Bos, 1974, pp. 36–37 e ilustrado na figura. 8.5.

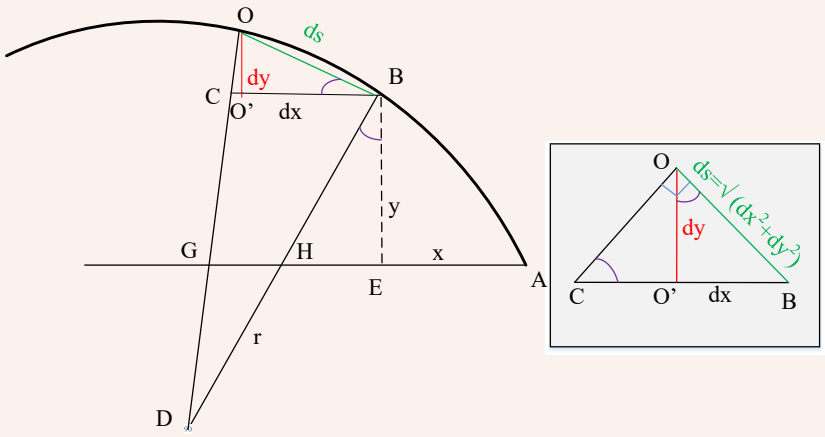


Figura 8.5: A derivação da curvatura de Johann Bernoulli

O objetivo é calcular o raio de curvatura r no ponto B, expresso como:

$$r = BH + HD \tag{8.2}$$

1. Desde então $\angle O'BD = \angle HBE$, triângulos $O'BO$ e.. EBH são semelhantes, assim:

$$BH = BE \cdot \frac{BO}{BO'} = y \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \tag{8.3}$$

$$AH = AE + EH = AE + OO' \cdot \frac{EB}{O'B} = x + y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{8.4}$$

2. Próximo, para HD:

$$HD = r \cdot \frac{BC}{HG} \tag{8.5}$$

3. HG é o diferencial de AH:

$$HG = d(AH) = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = dx + dy \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{ddy}{dx} = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx} \tag{8.6}$$

4. De triângulos semelhantes$\angle BCO = \angle BOO'$Nós temos:

$$BC = \frac{BO^2}{BO'} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \tag{8.7}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

5. Substituindo Eqs. (8.3), (8.5), (8.6), e (8.7) Eq. (8.2), nós obtemos:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \cdot ddy} \tag{8.8}$$

Simplificando o uso $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$:

$$r = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy} \tag{8.9}$$

que corresponde a:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{8.10}$$

8.2.5 Jakob Bernoulli; O Teorema Dourado (1694)

Contexto Em sua 1694 *Acta Eruditorum* Memórias, (Bernoulli, Jakob, 1694) Jakob Bernoulli fez duas contribuições distintas, mas interligadas.

- Primeiro, no que ele chamou de *Teorema Aureum* Ele apresentou uma expressão analítica geral para o raio do círculo osculante - e, portanto, curvatura - em termos mais simples, por exemplo. $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ De modo que $\kappa = 1/R$.. Isto é tratado aqui.
- Em segundo lugar, ele usou esta curvatura invariante para resolver o *elásticoa*:. modelando uma tira fina e inextensível em equilíbrio estático, ele acoplou um momento-lei curvatura (na forma moderna $M \propto \kappa$) com as relações cinemáticas $dx/ds = \cos\theta$, $dy/ds = \sin\theta$, e $\kappa = d\theta/ds$, convertendo assim o equilíbrio mecânico em um solucionável equação diferencial para a curva. Isso está coberto de §9.3.2.1.

Deve-se enfatizar que este trabalho foi sua solução para um desafio que ele havia lançado antes (§9.3.1), (Bernoulli, Jakob, 1690a). Então, ele começa o jornal dizendo:

> ...relationem fili evoluntis seus raios circuni osculatoris (não quomodocunque, ut factum em A. Lábios. Homens. Jan. 1691. P. 22, sed) em terminis simplicissim & Exhibeat puro diferencial. Hæc nobis jam eo tempore, quo especulationi funis vacabamus, innoturat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit Frater; Interea dum immensa inventi utilitas em resoluta Velaria, & Hac quam præ manibus habemus Elaterum Curvatura, aliisque sublimioribus, quotidie magis magisque sese mihi explicuit, effecitque tandem, ut non possim publico aureum Theorema diutius invidere..
>
> apresentar nos termos mais simples e puramente diferenciais a relação do evoluente (corda) ou raio do círculo osculante. Isso já me havia conhecido quando eu estava estudando a catenária, e meu irmão logo o comunicou a alguns durante nossas viagens; enquanto isso, como a imensa utilidade desta descoberta na solução da velaria, na curvatura das molas (elástica) que tratamos aqui, e em outras questões mais reconditas tornou-se cada dia mais clara para mim, finalmente me levou ao ponto de que eu não poderia mais tempo negar ao público o Teorema Dourado.
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

Derivação do Teorema Dourado

CÓPIA PARA REVISÃO

Priusquam itaque ad institutum pergo, sunto em figo. Eu, portiúncula Curvae cujuspiam infinita parvae ab, bc, quibus perpendiculariter insistent raios circuli osculatoris af, bf, concorrentes em puncto Evolutae f, angulo faciente afb Aequalem angulo gbc, quem producta portio ab altera cum bc Eficiência; Tum abscindatur $bh = bc$, ductaeque intelligatur paraleloae al, bn, co, nec non bl, hom, gcn; quarum illae abscissarum, hae applicatarum elementara dx, dy, ddx, etc.) indigitado. Dico,

α.. Quod positis Curvae elementis ab, bc, hoc est, ipsis ds Aequalibus, raio circuli osculatoris seu longo fili evoluentis af, Nempe

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{item} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

Nam $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (ob similitud. $\triangle$Rum bmh, hoc, item hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$.. Sed $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$; quare $ddy : ds :: dx : z$.. Eodem modo ostendetur $ddx : ds :: dy : z$.. Q.E.D.

Coroll. Em Omni Curva, positis ejus elementis aequalibus, differentiae secundae coordinatarum primis reciproce propantantur: cum enim $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$, erit $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$Adeoque $ddx : ddy :: dy : dx$; Quod ipsum quoque ex sola similitudina $\triangle$Rum bmh, hoc, liquet; ubi co Sim ddx EST ad oh Sim ddy, ut hm ad bm, vel bl ad al, seu dy ad dx.

β.. Positis vero abscissae elementis al, bn, hoc est, ipsis dx Aequalibus, raio de erit osculantis circuli af Sim

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

Quoniam $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (ob similit. $\triangle$Rum bng, chg, nec non hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; Atque $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$; Erit $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$.. Q.E.D. Haud absiliter ostendetur, quod positis dy Aequalibus, futurum est $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.

Sua adovação nova, de quibus nec Fratri adhuc consstat, Theoremata...

Antes que eu continue com o assunto em questão, que haja figo. Eu, uma pequena parte de alguma curva, infinitamente pequena, ab, bc, sobre o qual perpendicularmente estão os raios do círculo osculante af, bf, reunião em um ponto do Evolute f, e fazendo ângulo afb igual ao ângulo gbc, que a porção estendida ab faz com o outro bc; Então deixe $bh = bc$ ser cortado, e deixar paralelos al, bn, co, bem como bl, hom, gcn ser entendida como sendo desenhada; dos quais os primeiros indicam elementos de abscissas, o último de coordenadas (nomeadamente dx, dy, ddx, etc.). Eu digo:
α.. Que quando os elementos da curva ab, bc são tomados iguais, isto é, quando ds são iguais, o raio do círculo osculante ou o comprimento da linha em evolução af, ou seja

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{also} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

Por.. $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (por semelhança de triângulos bmh, hocTambém hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$.. Mas.. $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, e $bc = ds$; Portanto, $ddy : ds :: dx : z$.. Da mesma forma que será mostrado que $ddx : ds :: dy : z$.. Q.E.D.
Corolário. Em cada curva, quando seus elementos são tomados iguais, as segundas diferenças das coordenadas são mutuamente proporcionais ao primeiro: Pois desde então.. $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$, haverá

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$, e por isso $ddx : ddy :: dy : dx$; que também vem da semelhança de triângulos bmh, hoc; Onde co ou ddx é para oh ou ddy, como hm para bm, ou bl para al, ou dy para dx.
β.. Quando os elementos da abscissa al, bn são tomados iguais, isto é, quando dx são iguais, o raio do círculo osculante af Vai ser

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

Desde então $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (por semelhança de triângulos bng, chg, e também hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; e.. $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, e $bc = ds$; Portanto, $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$.. Q.E.D. Da mesma forma, será mostrado que quando dy são iguais, nós temos $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.
A estes eu acrescento novos teoremas, dos quais nem mesmo meu irmão ainda sabe...
Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 264

A derivação da solução é simplificada pela falta de uma suposição pequena. No entanto, o resultado equação diferencial para a curva elástica não é solúvel em termos de funções elementares. Foi Daniel Bernoulli que mais tarde introduziu esta suposição e foi capaz de simplificar a equação analiticamente (ver §9.4.1.3).

Com referência à Fig. 8.6, Bernoulli set:

$$ab = bc; \quad af \perp ab; \quad bf \perp bc; \quad bh = bc; \quad \Rightarrow al = bm \tag{8.11}$$

e os seguintes triângulos são (quase) semelhantes:

$$\triangle bmh \sim \triangle hoc \quad \text{e} \quad \triangle hcb \sim \triangle abf \tag{8.12}$$

Por isso podemos escrever:

$$\frac{ho}{bc} = \frac{ho}{hc} \cdot \frac{hc}{bc} = \frac{bm}{bh} \cdot \frac{ab}{bf} = \frac{al}{ab} \cdot \frac{ab}{bf} \tag{8.13}$$

Para constante ds, isso simplifica para $\frac{ho}{bc} = \frac{al}{bf}$. Agora:

$$bf = r; \quad al = dx; \quad bc = ds; \quad ho = hm - nc = bl - nc = ddy \tag{8.14}$$

(ignorando convenções de sinais). Daí:

$$\frac{dx}{r} = \frac{ddy}{ds} \tag{8.15}$$

E finalmente:

$$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy} \tag{8.16}$$

para constante ds.

A suposição de uma constante ds corresponde a tomar s como a variável independente.

Da Fig. 8.6, AED é o elástico, e GLM é a sua evolução. Assim, a frase *Evolutione describitur* Parece denotar tomar o *involute* da curva GLM para construir a elástica AED.. Ponto L no evoluto corresponde ao ponto E na elástico. L Tem coordenadas cartesianas (p, z); E Tem coordenadas (x, y).. Bernoulli claramente usa o evoluto como uma ferramenta geométrica para definir curvatura - central à teoria da elasticidade. Por definição, o segmento EL é o raio de curvatura no ponto E "Continuando"AED.

Enquanto a formulação de Jakob Bernoulli era profundamente geométrica e não linear, ela estabeleceu o palco para seu sobrinho Daniel (§9.3.2.1.2.4) e Euler (§9.4.1.2Abordar a elástica de uma perspectiva mais analítica, levando a uma simplificação crucial.

CÓPIA PARA REVISÃO

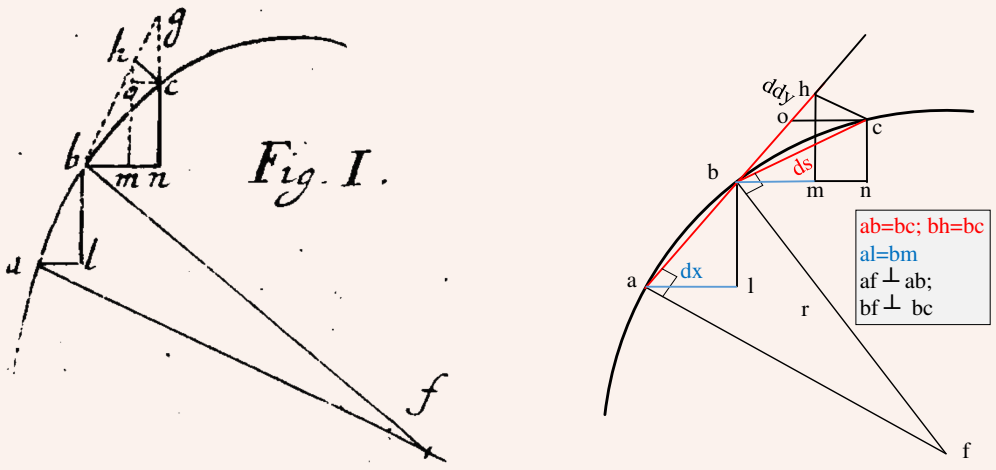


Figura 8.6: A derivação da curvatura de Jakob Bernoulli

Tabela 8.1: Comparação das fórmulas de curvatura originais e modernas de Bernoulli

Formulação de Bernoulli (1694)	**Formulação Moderna**
Assume elementos de arco iguais ds constante)	Assume a função $y(x)$ com x como parâmetro
$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$
Usa diferenças finitas (infinitesimais)	Usa derivados baseados em limites
Construção geométrica com evolução	Diferenciação analítica
Funciona com qualquer parametrização	Tipicamente para explicitar $y(x)$
Baseado em triângulos semelhantes	Baseado na taxa de mudança do ângulo tangente

Comparação: Bernoulli (1694) vs. Formulação Moderna Para conectar a fórmula de Bernoulli à moderna: Começando de.. $z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$ e usando $ds^2 = dx^2 + dy^2$, podemos escrever: $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Portanto: $R = \frac{dx \cdot ds}{d^2y} = \frac{dx^2\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y}$

Dividindo numerador e denominador por dx^2: $R = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y/dx^2}$

No entanto, a fórmula moderna inclui um fator adicional. A discrepância surge porque Bernoulli ddy (segunda diferença tomada com ds constante) difere sutilmente do moderno d^2y/dx^2 (segunda derivada em relação a x). Quando se explica adequadamente a mudança de variáveis e a relação entre diferenciais, obtém-se:

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{8.17}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

O fator adicional de $[1 + (dy/dx)^2]$ no numerador, o fato de que à medida que a curva se inclina, os efeitos da projeção devem ser devidamente incorporados.

Impacto Histórico Este teorema tornou-se a ferramenta chave de Bernoulli para resolver o problema elástico. Ele se refere a isso como seu "Teorema de Ouro"', não porque ele descobriu o conceito de curvatura ou o círculo osculante, mas porque ele forneceu o método computacional prático – a "chave perdida" – que finalmente permitiu que matemáticos trabalhassem com sucesso com curvas elásticas. Como ele afirma na página 263, tentativas anteriores (incluindo uma publicada em janeiro de 1691) tinham abordado círculos osculantes, mas não numa forma adequada para resolver problemas de mecânica transcendental. A dependência do método em relações diferenciais ao invés de construções puramente geométricas marcou uma mudança fundamental para métodos analíticos na física matemática, presidindo ao desenvolvimento sistemático do cálculo das variações.

8.2.6 Kästner (1758)

Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), professor da Universidade de Göttingen, era conhecido como um expositor prolífico de matemática ao invés de pesquisador original. No entanto, seu livro de vários volumes *Anfangsgründe der Mathematik* ('Fundações da Matemática'), (Kästner, 1786) ajudou a sistematizar e popularizar muitos conceitos em geometria diferencial e análise.

No volume de 1758, Kästner deu o que é essencialmente a definição moderna de curvatura, descrevendo-a como a relação limitante entre o ângulo $\Delta\theta$ entre duas tangentes próximas e o comprimento do arco Δs entre eles:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{8.18}$$

Isso expressa curvatura como a taxa de rotação da tangente ao longo da curva, uma definição que mais tarde seria adotada em geometria analítica e geometria diferencial moderna.

A frase original de Kästner é a seguinte:

> Man kann die Krümmung einer Linie in einem Punkte durch das Verhältnis des Winkels mesen, den zwei sehr nahe Tangenten machen, zu dem zwischen ihnen liegenden Bogen, wenn dieser unendlich klein wird.
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

Traduzido:

> Pode-se medir a curvatura de uma linha em um ponto pela razão do ângulo formado por duas tangentes muito próximas ao arco entre elas, à medida que o arco se torna infinitamente pequeno.
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

Esta definição formaliza o que matemáticos anteriores como os Bernoullis e Huygens se aproximaram geometricamente, fundamentando-o na estrutura de cálculo diferencial que havia amadurecido em meados do século XVIII.

CÓPIA PARA REVISÃO

Na geometria analítica moderna, esta ideia é formalizada ainda mais. Para uma curva planar dada por $y = f(x)$A curvatura pode ser escrita como:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

que liga a percepção geométrica de Kästner com a fórmula baseada em cálculo usada hoje.

Esta definição moderna de curvatura seria fundamental para os avanços do século XIX. Isso permitiu o desenvolvimento de Gauss do *Teorema Egregium*[4] (1827), que mostrou que a curvatura gaussiana é uma propriedade intrínseca das superfícies. Este insight eventualmente levaria ao desenvolvimento da geometria de Riemannian e forneceria o quadro matemático para a relatividade geral de Einstein, demonstrando mais uma vez como conceitos geométricos nascidos de problemas práticos evoluem em profundos teóricos Ferramentas.

8.2.7 Resumo

[4](Latim para "Teorem notável") é um grande resultado da geometria diferencial, que diz respeito à curvatura das superfícies. O teorema diz que a curvatura gaussiana pode ser determinada inteiramente medindo ângulos, distâncias e suas taxas de mudança em uma superfície, sem referência à maneira particular em que a superfície está inserida no espaço euclidiano tridimensional ambiente. Em outras palavras, a curvatura gaussiana de uma superfície não muda se alguém dobra a superfície sem esticá-la. Assim, a curvatura gaussiana é uma invariante intrínseca de uma superfície.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 8.2: Marcos no Desenvolvimento da Curvatura

Nome	Data	Contribuição	Fórmula representativa	Trabalho Principal / Fonte
Nicole Oresme	1351	Ligação conceitual entre curvatura e desvio da retidão; descrição qualitativa	Nenhum (qualitativo)	*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*
Isaac Newton	1671	Fórmula analítica para curvatura em coordenadas cartesianas e polares; centro geométrico de curvatura via normais	$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$	*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*
G. W. Leibniz	1686	Definição de círculo osculante como o limite de um círculo intersectando uma curva em quatro pontos coalescentes	Nenhum (geométrico)	*Acta Eruditorum* (1686 artigo)
Johann Bernoulli	1691	Derivação algébrica do raio geral de curvatura via diferenciais	$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	Manuscrito não publicado (1691)
Jakob Bernoulli	1694	Construção geométrica via evolute/involute; Curvação central para teoria elástica	$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	*Curvatura Laminae Elasticae*, *Acta Eruditorum* (1694)
Leonhard Euler	1744	Estrutura de cálculo variacional para elástico; Equação Euler-Lagrange para otimização de curvas	$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietário Gaudentes*
Colaboração Euler-Bernoulli	ca. 1750	Aproximação de pequena inclinação levando à teoria linear viga	$\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}$	A estrutura variacional de Euler + o princípio da energia de Daniel
A. G. Kästner	1758	Definição moderna de curvatura como taxa de mudança de ângulo tangente em relação ao comprimento do arco	$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$	*Anfangsgründe der Mathematik*

8.3 Evolute/Involute

Os conceitos de evoluto e involuto em geometria diferencial, introduzidos pela primeira vez por Christiaan Huygens, são críticos para entender a subsequente cobertura da curvatura, elástico e catenária. Estes conceitos representam um culminar do pensamento geométrico que une matemática pura com mecânica prática.

Para colocar as coisas em perspectiva histórica e cultural, em 1691, Huygens expressou o espírito de seu tempo:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Muitas vezes tenho considerado que as curvas que a natureza frequentemente apresenta à nossa vista, e que ela mesma descreve, por assim dizer, todas possuem propriedades muito notáveis. Como o círculo que se encontra em toda parte. A parábola, que é descrita por correntes de água. A elipse e a hipérbole, que a sombra da ponta de um gnomo atravessa e que também se encontra em outro lugar. O cicloide que um prego na circunferência de uma roda descreve. E finalmente nossa catenária, que se nota há tantos séculos sem examiná-la. Tais curvas merecem, na minha opinião, que as selecionemos para estudar, mas não aquelas [Curvas] Recém-inventados apenas para usar o cálculo geométrico sobre eles.
>
> Blasjo, 2017 Transcendental curves in the Leibnizian calculus ([Capítulo 8])

Em geometria diferencial, a evolução de uma curva é o lócus de todos os seus centros de curvatura. A involução de uma curva é o locus de um ponto em um pedaço de corda esticada como a corda é ou desembrulhada ou enrolada ao redor da curva. A evolução de um involuto é a curva original.

Matematicamente, para uma curva paramétrica $\vec{c}(t)$, a evolução é dada por:

$$\vec{E}(t) = \vec{c}(t) + \rho(t)\vec{n}(t) \tag{8.19}$$

Onde $\rho(t)$ é o raio da curvatura e $\vec{n}(t)$ é a unidade vetor normal. O involuto pode ser expresso como:

$$\vec{C}_a(t) = \vec{c}(t) - \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|}\int_a^t |\vec{c}'(w)|\,dw \tag{8.20}$$

onde a integral representa o comprimento do arco da corda desembrulhada da curva.

Um exemplo simples ilustra estes conceitos: a evolução de um círculo é um único ponto em seu centro (onde todos os normais se encontram), enquanto o involuto de um circulo forma uma curva espiral. Embora muitas vezes confundido com uma espiral arquimedeana, o involuto de um círculo é na verdade uma curva distinta com suas próprias propriedades únicas – uma distinção que se revelaria crucial no desenvolvimento do desenho dos dentes de engrenagem séculos depois.

8.3.1 Huygens (1658-1673)

Enquanto Apolonius tinha discutido evoluções no Livro V de sua *Cônicas* (c. 200 a.C.), foi Huygens quem primeiro desenvolveu uma teoria sistemática e a aplicou para resolver um problema mecânico prático. Huygens, um matemático holandês, físico e astrônomo cujo trabalho exigia uma medição precisa do tempo, inventou o relógio de pêndulo em 1657 e posteriormente descobriu como torná-lo realmente isocrônico. Suas descobertas foram publicadas em sua obra-prima *Horologium Oscillatório* (1673)(Huygens, 1673), que é considerado como uma das três obras mais importantes sobre mecânica no século XVII, as outras duas sendo Galileu *Discursos e Demonstrações Matemáticas Relacionadas a Duas Novas Ciências* (1638)(Galilei, 1638) e Newton's *Filosofoæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687).[5]

O período de movimento de um pêndulo simples (com ângulo inferior a 5°) é aproximadamente:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{8.21}$$

[5]Esta avaliação dos três mais importantes trabalhos mecânicos do século XVII é amplamente aceita na história da literatura científica.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

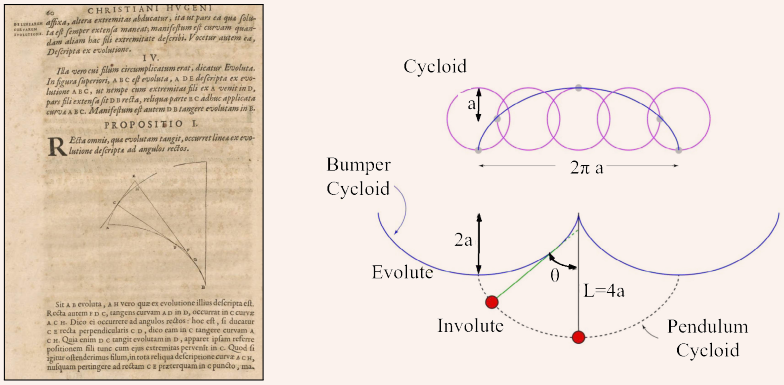


Figura 8.7: Pêndulo isocrônico de Huygens (Huygens, 1673)

Embora aproximadamente isocrônico para pequenas amplitudes, o pêndulo simples ainda exibe erros de tempo que aumentam com a amplitude. Huygens foi o primeiro a descobrir essa limitação e a criar uma solução (Zixuan, Jixun e Zhigang, 2018). Através da análise geométrica, ele descobriu que a curva de taautocrono—ao longo da qual uma partícula descerá ao ponto mais baixo no mesmo tempo independentemente da posição inicial– é um cicloide[6].

A propriedade crucial que faz do cicloide a curva tautrócrona é que o quadrado do comprimento do arco de qualquer ponto para o fundo é proporcional à diferença vertical da altura:

$$s^2 = 8ar \cdot h \tag{8.22}$$

Onde s é o comprimento do arco, a é o raio do círculo gerador, e h é a altura. Esta relação, combinada com a conservação de energia, garante que o tempo de descida é independente da posição inicial, dando um período constante.

Para fazer com que o pêndulo siga um caminho cicloidal, Huygens introduziu o conceito de evolução e involução. Sua notável descoberta foi que a involução de um cicloide é outro cicloide. Colocando duas bochechas simétricas em forma de cicloidal no topo do pêndulo, a corda se enrolaria parcialmente ao redor dessas bochechas enquanto balançava. O pêndulo bob iria então traçar um caminho cicloidal – o involuto das bochechas cicloidais – assim, alcançando estrito isocronismo.

O período do pêndulo cicloidal de Huygens é:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{8.23}$$

Onde a é o raio do círculo gerador do cicloide (notando que o comprimento do arco de um cicloide completo é $8a$E o comprimento do pêndulo é igual $4a$).

A derivação de Huygens era puramente geométrica, baseada em proporções e redutio ad absurdum na forma de Arquimedes, antecipando técnicas que mais tarde seriam formalizadas através do cálculo. Sua teoria dos evolutos, desenvolvida para resolver este problema prático de cronometragem, tornou-se fundamental para o estudo da geometria diferencial.

[6]Um cicloide é uma curva traçada por um ponto em um círculo enquanto ele rola em linha reta.

CÓPIA PARA REVISÃO

8.3.2 Limitações Práticas e Legado

Apesar de sua elegância teórica, o pêndulo cicloidal de Huygens enfrentou desafios práticos: fricção da corda curvando-se ao redor das bochechas, desgaste nos pontos de contato, e a fabricação precisa necessária para as formas cicloidais. Estas questões foram posteriormente contornadas pela invenção do escape da âncora (por volta de 1670), que permitiu que pêndulos oscilassem através de arcos menores onde o erro circular se torna insignificante, tornando o complexo mecanismo cicloidal desnecessário para a maioria Aplicações de cronometragem.

A estrutura matemática que Huygens desenvolveu para evoluir, no entanto, provou ser muito mais influente do que seu design específico de relógio. Sua abordagem geométrica à curvatura e a relação entre curvas e seus evolutos estabeleceu bases para:

- O estudo da cáustica na óptica (o envelope de raios refletidos ou refratados)
- O problema da braquistocrona (Johann Bernoulli, 1696)—encontrando a curva de descida mais rápida
- A teoria geral dos envelopes de famílias de curvas
- Aplicações modernas em design de engrenagens, onde as engrenagens involutas mantêm taxas de velocidade constantes
- O desenvolvimento da geometria diferencial como uma disciplina matemática

Os conceitos introduzidos por Huygens seriam essenciais para entender a curvatura das curvas, incluindo a elasticidade e catenária – curvas que, como Huygens observou, a natureza nos apresenta e que possuem propriedades muito notáveis

8.3.3 Finalizando Observações

A história de evolutos e involutos exemplifica um tema recorrente na história da geometria: problemas práticos impulsionando avanços teóricos que, em última análise, transcendem suas aplicações originais. Huygens procurou construir um relógio melhor, mas em vez disso deu à matemática uma estrutura fundamental para entender como as curvas se relacionam entre si através de suas propriedades curvatura. Esta interação entre o prático e o teórico, entre necessidade mecânica e beleza geométrica, caracteriza grande parte do desenvolvimento da geometria a partir do século XVII.

Como vimos ao longo deste capítulo, a geometria não é meramente um exercício abstrato, mas uma lente através da qual podemos entender tanto o mundo natural quanto os artefatos que criamos. Desde os antigos problemas de esquadrinhar o círculo até as aplicações modernas de engrenagens involutas, princípios geométricos continuam a moldar nossa compreensão do espaço, movimento e forma. O evoluto e involuto, nascido da necessidade prática de um tempo preciso, lembra-nos que até mesmo os conceitos matemáticos mais abstratos têm suas raízes nos desafios tangíveis da experiência humana.

Mesa 8.3 resume grandes eventos/livros mencionados neste capítulo.

Tabela 8.3: Curvatura & Elastica: Grandes eventos e livros

Ano	Autor	Título do livro / Evento	Resumo
1351	Nicole Oresme	*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351)	Noção qualitativa inicial ligando curvatura à saída da retidão; precursora de definições analíticas posteriores.

CÓPIA PARA REVISÃO

Ano	Autor	Título do livro / Evento	Resumo
1657	Christiaan Huygens	O relógio de pêndulo foi inventado	Problema prático de cronometragem que motiva a isocronia; Prepara o palco para a solução de cicloidal (tautocrono).
1658–1673	Christiaan Huygens	Pêndulo ciclóide & Construção evolute/involute (evento)	Usa involução de cicloide via bochechas cicloidais para impor isocronia; Evolute/Involute formalizado geometricamente.
1671	Isaac Newton	*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736)	Fórmulas de curvatura analítica (Cartesiana/polar); centro de curvatura através de intersecção normal.
1673	Christiaan Huygens	*Horologium Oscillatório* (Huygens, 1673)	Trabalho de mestre em dinâmica do pêndulo; cycloid como taautocrono; Uso sistemático de evolutos/involutos.
1686	G. W. Leibniz	Circulo osculando através de contato de quatro pontos (evento)	Define círculo osculante como limite de um círculo com contato em 4 pontos. Fundamento geométrico para curvatura.
1691	Johann Bernoulli	Raio geral de curvatura (manuscrito não publicado)	Derivação diferencial de r; Rota algébrica para o moderno $r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$.
1694	Jakob Bernoulli	*Curvatura Laminae Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1744a)	Esquema geométrico via evolute/involute; Raio de curvatura central para construção da curva elástica.
1744	Leonhard Euler	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietário Gaudentes* (Euler, 1744b)	Cálculo de variações; Equação Euler-Lagrange; exato (não linear) elástico formulado variavelmente.
ca. 1750	Euler & Daniel Bernoulli	Aproxime-se (Euler–Bernoulli)	Linearia a curvatura $\kappa \approx y''$; Rende-se $EI\,y'' = M(x)$-fundação da teoria clássica.
1758	A. G. Kästner	*Anfangsgründe der Mathematik* (Kästner, 1786)	Curvação moderna como $d\theta/ds$ (taxa de mudança de ângulo tangente com comprimento do arco); consolidação do conceito.

8.4 De curvas geométricas para Mecânica estrutural

Os desenvolvimentos geométricos traçados neste capítulo, a partir das percepções qualitativas de Oresme através da rigorosa definição de curvatura de Kästner, não foram meramente abstrações matemáticas. Eles forneceram a linguagem quantitativa essencial necessária para formular e resolver uma nova classe de problemas físicos: **Como estruturas flexíveis e elásticas se deformam sob carga?**

CÓPIA PARA REVISÃO

A visão crítica: Para qualquer estrutura carregada que se dobra, uma corrente pendurada, uma haste flexionada, uma curva viga a forma deformada é fundamentalmente caracterizada por sua **curvatura em cada ponto**.. Sem a máquina matemática para descrever e calcular curvatura, mecânica estrutural não poderia avançar além de aproximações brutas.

Considere os dois grandes desafios que ocupam o Capítulo 9:

A Catenária (§9.2): Uma corrente de suspensão assume uma forma onde, em cada ponto, o **força de tensão equilibra o peso** da corrente abaixo. Mas escrever este equilíbrio matematicamente requer expressar a geometria da corrente - especificamente, a relação entre o comprimento do arco, ângulo de inclinação θ, e posição vertical. As percepções geométricas de Huygens§8.3.1) e o cálculo de Newton (§8.2.2) e Leibniz (§6.6.8) tornou isso possível. O resultado equação diferencial relaciona a curvatura da corrente diretamente com a distribuição de tensão ao longo do seu comprimento.

O Elastica (§9.3): O trabalho de Jakob Bernoulli 1691-1694 epítomiza a conexão entre geometria e mecânica. Seu problema de desafio pergunta: *Que forma uma haste elástica assume sob carga?* Seu método de solução explora diretamente os conceitos geométricos desenvolvidos neste capítulo:

1. Usa o dele **Teoria Dourada** (§8.2.5) para expressar curvatura geometricamente: $\kappa = d\theta/ds$, onde a construção evolute (§8.3) fornece a fundação geométrica
2. Invoca a **Princípio físico**:. momento fletor M é proporcional à curvatura ($M \propto \kappa$A primeira declaração explícita ligando esforços internos à deformação geométrica
3. Aplica-se **equilíbrio mecânico**:. momento deve equilibrar cargas aplicadas em cada ponto ao longo da curva
4. Resultados em um **equação diferencial** Relacionando curvatura geométrica ao carregamento mecânico, solucionável através das técnicas de cálculo

Esta síntese, onde a curvatura geométrica se torna a ponte entre deformação e esforço interno não poderia ter ocorrido sem os três séculos anteriores de desenvolvimento geométrico documentados neste capítulo.

A construção evoluta de Huygens, inicialmente desenvolvida para o pêndulo cicloidal (§8.3.1), provou ser essencial quando Jakob Bernoulli usou evolutos para derivar a equação elástica. A evolução fornece o locus dos centros de curvatura - precisamente a informação geométrica necessária para expressar como a forma de um curvado viga varia ao longo de seu comprimento. O círculo osculante de Newton (§8.2.2) e Leibniz (§6.6.8), inicialmente um conceito geométrico puro, tornou-se a manifestação física de como um curvado quer curvar em cada ponto - a aproximação circular local governa o local. A taxa de mudança do ângulo tangente $d\theta/ds$ que Kästner formalizou (§8.2.6) tornou-se a curvatura mecânica κ que aparece em cada equação viga

A ponte da geometria à mecânica: Mesa 8.4 resume como cada conceito geométrico desenvolvido neste capítulo encontrou aplicação direta em mecânica estrutural:

O legado: A fórmula baseada em curvatura estabelecida por Jakob Bernoulli, refinada por Euler no cálculo de variações (§9.4.1.2... e simplificada através da aproximação de Euler... Bernoulli, pequena curva§9.4.1.3", tornou-se a fundação de **Todos** Teoria estrutural. Cada equação moderna viga - a partir de simples $EIy'' = M(x)$ para complexas formulações elemento finito — traça sua linhagem aos conceitos geométricos desenvolvidos neste capítulo. A aproximação de pequenas pistas $\kappa \approx d^2y/dx^2$ que permite teoria elementar viga é simplesmente uma linearização da fórmula exata de curvatura $\kappa = d\theta/ds$ derivado geometricamente pelos Bernoullis.

A história da curvatura ilustra assim um padrão profundo na física matemática: **abstraídos insights geométricos, desenvolvidos para seu próprio bem, mais tarde se mostram indispensáveis para descrever a realidade física**.. Os círculos osculantes de Newton, os evolutos de Huygens, e a geometria diferencial dos Bernoullis não foram criados para resolver problemas estruturais - mas sem eles, a teoria moderna das estruturas não poderia existir. Huygens desenvolveu evoluções para construir um relógio melhor; Jakob Bernoulli reconheceu que a mesma máquina geométrica poderia descrever como vigas curvar.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 8.4: De conceitos geométricos a aplicações mecânicas

Conceito Geométrico	**Aplicação mecânica**
Círculo Osculante (Newton, Leibniz)	Aproximação local de desvio viga; determina os requisitos locais de dobra rigidez
Raio de curvatura $\rho = 1/\kappa$	Inversamente proporcional a momento fletor: $M = EI\kappa$
Evoluir como locus de centros de curvatura	Método de construção geométrica para encontrar formas elásticas
Taxa de volta $d\theta/ds$ (Kästner)	Relação cinemática ligando ângulo de inclinação ao comprimento do arco na teoria viga
Teoria Dourada (Jakob Bernoulli)	Ferramenta computacional para resolver elásticos

Esta fertilização cruzada entre a cronometragem e mecânica estrutural exemplifica como as ferramentas matemáticas transcendem suas aplicações originais.

8.5 Olhando para frente:

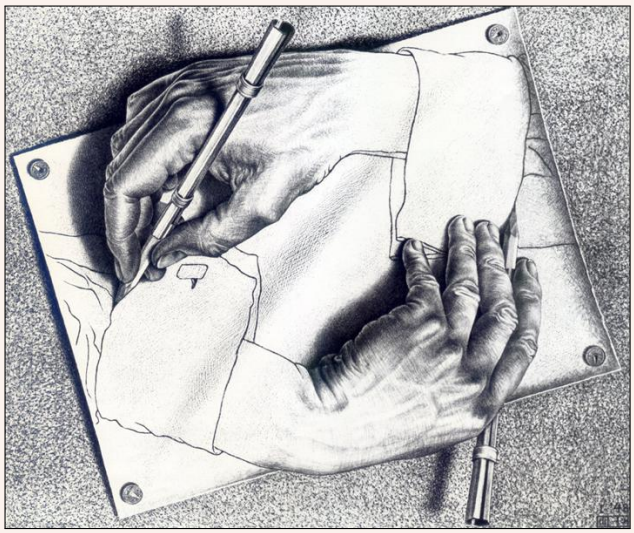
No Capítulo 9, vamos ver como essas ferramentas geométricas permitiram a solução de dois problemas que definiram mecânica estrutural: A catenária e a elástica. Estes marcam uma mudança decisiva da construção geométrica para a solução analítica, do entendimento das curvas no resumo para prever o comportamento de elementos estruturais carregados. Aqui, os insights geométricos estabelecidos neste capítulo encontram a realidade física de correntes penduradas e hastes de flexão, levando a alguns dos resultados mais elegantes e praticamente importantes da história de mecânica estrutural.

O problema da catenária mostrará como a curvatura se relaciona com a distribuição de tensão interna em um cabo flexível. A elasticidade demonstrará como a curvatura governa a relação entre as cargas aplicadas e a forma deformada resultante de uma haste elástica. Ambos os problemas compartilham uma estrutura matemática comum: A equação diferencial que relaciona a propriedade geométrica da curvatura com quantidades mecânicas (tensão, momento, carga). Esta estrutura, reconhecida pela primeira vez por Jakob Bernoulli e formalizada por Euler, permanece no coração de análise estrutural até hoje.

Esses desafios também revelarão por que o estudo de formas deformadas, construindo sobre os princípios de força dos capítulos anteriores e as fundações geométricas recém estabelecidas, tornou-se essencial para a compreensão completa do comportamento estrutural. Sabendo que uma estrutura pode resistir a uma determinada carga é insuficiente, devemos também prever o quanto ela se deformará, e se essa deformação permanece aceitável para sua função pretendida.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



M.C. Escher, mãos de desenho (1948)

Curvas auto-referenciais e geometrias impossíveis. Matemática tornada visível através do paradoxo artístico.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 9

Os Grandes Desafios: Catenária, Elastica, e o nascimento da mecânica analítica

Abstract

Este capítulo examina a evolução dos chamados "grandes desafios" da mecânica que estimularam avanços decisivos na matemática e engenharia durante os séculos XVII e XVIII. Começando com o Problema catenário da década de 1690 Jakob Bernoulli, mas resolvido por Leibniz, Johann Bernoulli, e Huygens, ele destaca como a aplicação de cálculo para um problema físico real demonstrou o poder da nova análise. O subsequente desafio elástico de Jakob Bernoulli marcou um novo ponto de viragem, empurrando a matemática para o cálculo de variações, primeiro formulado por Daniel Bernoulli e depois refinado por Euler. O desafio anônimo de 1724 ampliou o campo de investigação exigindo soluções para linhas flexíveis e elásticas sob forças gerais, novamente atraindo contribuições de Daniel Bernoulli e Euler. Finalmente, as memórias de Euler em 1759 pilar flambagem transformou uma curiosidade geométrica em um resultado central para estabilidade estrutural.

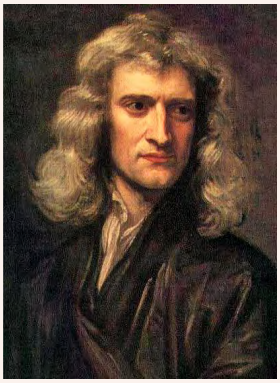
O capítulo culmina com o tratado de Euler de 1771 Genuina Principia, onde ele uniu estas diferentes vertentes em uma teoria abrangente de linhas deformáveis. Ao introduzir o "Problema Geral"do equilíbrio de linhas, Euler formalizou os conceitos de força tangencial e normal resultantes e momento fletor, e distinguiu leis de equilíbrio mecânico das relações constitutivas. Sua síntese não só subsumiu os problemas clássicos da cadeia, haste, e pilar mas também antecipou o quadro governante de mecânica do contínuo. A narrativa mostra como os desafios originalmente colocados como competições entre os geometros, em última análise, rendeu uma metodologia universal que continua a sustentar análise estrutural, de pontes e torres para materiais e sistemas biológicos.

De todos os capítulos deste livro, este provou ser o mais exigente e complicado para escrever, mas também o mais intelectualmente gratificante e agradável.

9.1 Fundações Matemáticas: Da Geometria ao Cálculo 275
9.1.1 O legado grego: De Euclides à Divisão Geométrica-Mecânica 275
9.1.2 Revolução de Descartes: Coordenadas e Álgebra 276
9.1.3 A Revolução do Cálculo . . . 276
9.1.4 Das Curvas à Mecânica: A Ponte 277
9.1.5 A Transformação Completa . 278
9.1.6 Notação Matemática 278
9.2 O Desafio da Catenária (Maio de 1690-Junho de 1691) 278
9.2.1 Primeiros Estudos 279
9.2.2 Desafios 283
9.2.3 As três principais soluções . 287

CÓPIA PARA REVISÃO

9.2.4 Epílogo 292
9.3 O Desafio Elastica (1690-1744) 294
9.3.1 O desafio de Jakob Bernoulli (1690) 294
9.3.2 Soluções 298
9.3.3 Resumo Cronológico dos dois primeiros desafios . . . 335
9.4 Um desafio anônimo: Uma ponte entre problemas (1724) 337
9.4.1 A Colaboração Bernoulli-Euler: Primeira Unificação (1728) 338
9.5 Teoria: De observação a cargas críticas 347
9.5.1 Trabalho matinal 347
9.5.2 Euler (1759) 349
9.6 Teoria Geral de Euler: Unificação completa (1771) 353
9.7 Conclusão 356



(a) IsaacNewton (1643-1727)



(b) Christiaan Huygens (1629-1695)



(c) RenÉ Descartes (1596–1650)

Figura 9.1: Os protagonistas de Elastica

9.1 Fundações Matemáticas: Da Geometria ao Cálculo

Antes de nos voltarmos para os grandes problemas de correntes penduradas, varas dobradas, e flambagem pilares, devemos definir a cena do século XVII: uma mudança fundamental da construção geométrica para o cálculo analítico que tornou essas curvas mecânicas tratáveis.

9.1.1 O legado grego: De Euclides à Divisão Geométrica-Mecânica

A tradição matemática herdada por investigadores do século XVII remonta à de Euclides *Os Elementos* (c. 300 a.C.), que estabeleceu a geometria como a ciência das figuras construível por Orla reta e bússola. Abordagem de Euclides.. Tangency como uma linha tocando um círculo em exatamente um ponto sem atravessá-lo - forneceu métodos poderosos para linhas, círculos e suas interseções, mas não ofereceu nenhuma abordagem geral para curvas mais complexas.

Desde a antiguidade, os matemáticos gregos distinguiram *geométrico* Curvas, construíveis por Orla reta e bússola e tipicamente representável por relações algébricas simples - de *Mecânica* Curvas geradas por

CÓPIA PARA REVISÃO

movimento ou dispositivos (cicloide, espiral, quadratrix).[1] Este último era frequentemente visto como fora da geometria "pura", admissível para resolver problemas específicos, mas excluído do cânone teórico.

Contexto Histórico Este trabalho baseia-se no anagrama 1691 de Bernoulli em *Acta Eruditorum*, que estabeleceu prioridade ao esconder seu método. O anagrama decodificado afirma que a relação geométrica precisa foi revelada mais tarde, não o momento inverso da flexãoA lei da curvatura erroneamente citada em algumas publicações (§6.11.1.1).

Esta fronteira persistiu por quase dois milênios. As curvas que dominariam mecânica estrutural - catenária, elástica, evolutos - pertenciam firmemente à categoria mecânica, tornando-as resistentes aos métodos geométricos clássicos.

9.1.2 Revolução de Descartes: Coordenadas e Álgebra

A primeira rachadura nesta fundação veio quando Descartes, 1637b argumentou que, se a geometria mede magnitudes em geral, não há razão para excluir curvas mais complexas.[2]

Geometria analítica - coordenadas e álgebra - fez manipulação algébrica a linguagem de trabalho dos loci. De repente, curvas poderiam ser tratadas como soluções para equações $F(x, y) = 0$, e propriedades geométricas poderiam ser derivadas através da computação algébrica. Isto desfocou o antigo limite entre curvas geométricas e mecânicas, mas um método geral para tangentes, áreas e complexas curvas transcendentais ainda aguardava um avanço mais profundo.

9.1.3 A Revolução do Cálculo

Em meados do século XVII, os indivisíveis de Cavalieri, as quadraturas de Torricelli, os produtos infinitos de Wallis, Barrow dualidades de área tangente, Os métodos tangentes de Fermat, preparem o palco. O salto decisivo veio com o cálculo diferencial de Leibniz e Newton, refinado pelos Bernoullis, Huygens e Euler.

Leibniz capturou o alcance desta transformação em sua polêmica *Historia et Origo Calculi Diferencialis* (Leibniz, 1858), Fig. 9.2.. Deixando de lado as disputas prioritárias com Newton, sua reivindicação técnica foi revolucionária:

> Agora, pelo cálculo de Leibniz toda a geometria é submetida à computação analítica, e as linhas transcendentes que Descartes chamou mecânica também são reduzidas às equações escolhidas para se adequarem a elas, considerando as diferenças dx, ddx, etc., e as somas que são os inversos dessas diferenças, como funções do xÉ... e isso, introduzindo apenas o cálculo, enquanto que antes disso nenhuma outra função era admissível mas x, xx, x^3, $\sqrt{x}$, etc., isto é, poderes e raízes.
>
> Leibniz, 1858, traduzido por Child, 1920

Seu relato, enquanto partidário na disputa de Newton prioridade, captura com precisão a revolução matemática que tornou as curvas transcendentais analiticamente tratáveis.

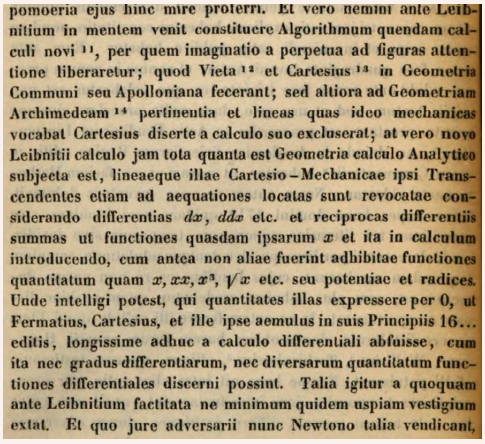
Leibniz e Newton, através de diferentes abordagens (diferenciais vs. *Fluxos*, alcançou o mesmo avanço:

[1] Esta divisão geométrico-mecânica não se refere a uma separação entre geometria e mecânica como disciplinas, mas à classificação grega de curvas como pertencentes à teoria geométrica pura (construível pelos métodos euclidianos) ou prática resolução de problemas (requer dispositivos mecânicos ou movimento).

[2] Ironicamente, os exemplos de Descartes ainda favoreciam curvas algébricas de baixo grau; cf. Palomo, 2017.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.


pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,

Transcrição latina:
"pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,"

Tradução para o português:
"...seus limites podem assim ser maravilhosamente ampliados. E, de fato, antes de Leibniz nunca ocorreu a ninguém estabelecer certo algoritmo do novo cálculo [11], pelo qual a imaginação se libertasse da atenção perpétua às figuras; algo que Vieta [12] e Descartes [13] haviam realizado na Geometria Comum ou Apoloniana. Contudo, Descartes excluíra expressamente de seu cálculo as questões superiores pertencentes à Geometria Arquimediana [14] e as linhas que por isso chamava mecânicas. Pelo novo cálculo de Leibniz, porém, toda a Geometria, por mais extensa que seja, fica agora submetida ao cálculo analítico; e aquelas linhas Cartesiano-Mecânicas, inclusive as Transcendentes, são reduzidas a equações determinadas, considerando-se as diferenças dx, ddx etc. e as somas recíprocas às diferenças como certas funções dos próprios x, introduzindo-as assim no cálculo, ao passo que antes não se empregavam outras funções das quantidades além de x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ etc., isto é, potências e raízes. Daí se pode compreender que aqueles que exprimiram tais quantidades por 0, como Fermat, Descartes e aquele mesmo rival em seus Principia publicados em 16..., ainda estavam muito distantes do cálculo diferencial, pois desse modo não se podem distinguir nem os graus das diferenças nem as funções diferenciais das diversas quantidades. Portanto, não existe em parte alguma o menor vestígio de que tais procedimentos tenham sido praticados por alguém antes de Leibniz. E com que direito os adversários agora reivindicam tais coisas para Newton..."

Figura 9.2: Leibniz sobre o escopo do cálculo (Leibniz, 1858, p. 2–3).

Curvas transcendentais, anteriormente acessíveis apenas através de construção geométrica ou aproximação numérica, tornaram-se sujeitos para tratamento analítico exato.

9.1.4 Das Curvas à Mecânica: A Ponte

Através do século XVIII, particularmente através de Euler's *Introductio em analysin infinitorum*O conceito moderno de *função* amadureceu ao lado da parametrização sistemática de curvas. Para uma curva plana $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$Nós temos:

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{(arc-length speed)} \tag{9.1}$$

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{(signed curvature)} \tag{9.2}$$

O curvatura κ é a recíproca do raio de círculo osculante e representa o 11 local dobrando da curva. Esta quantidade geométrica torna-se a ligação crucial com a mecânica através de leis constitutivas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Para uma haste elástica, a relação fundamental ligando geometria à força é:

$$M = EI\kappa \tag{9.3}$$

Onde M é o momento fletor, E o módulo material, I o segundo momento de área (geometricamente determinado), e κ A curvatura. Historicamente, isso apareceu como $M = \mathfrak{B}/R$ ou $M = Ek^2\kappa$, com várias notações para o módulo de dobra

Esta equação enganosamente simples transforma a teoria da curva geométrica em mecânica estrutural. A catenária emerge quando $EI \to 0$ (corda perfeitamente flexível); O elástico quando EI é finita (dobrável, mas inextensível vara); flambagem quando as cargas axiais interagem com a flexão rigidez.

9.1.5 A Transformação Completa

A revolução matemática foi profunda:

- **Álgebra vs. Curvas transcendentais**:. As curvas algébricas satisfazem as relações polinomiais $F(x, y) = 0$ (círculos, elipses, parábolas). As catenárias, elásticas e suas evoluções são transcendentais. Precisamente as curvas que o cálculo tornou passíveis de serem tratáveis.
- **Da construção à análise**:. Onde gregos e matemáticos medievais usavam construção geométrica com bússola e borda reta, a nova análise resolveu problemas através equações diferenciais e integração.
- **Unificação de puros e aplicados**:. As mesmas ferramentas matemáticas que revelaram propriedades de curvas abstratas também resolveram problemas de engenharia, correntes penduradas, deflexões viga, estabilidade.

Com esta fundação, podemos apreciar por que a catenária, elástica e problemas flambagem se tornaram os "grandes desafios"da matemática do final do século XVII e início do século XVIII. Não eram apenas exercícios abstratos, mas testes de se o novo cálculo poderia realmente dominar as curvas mecânicas que resistiram à análise por milênios.

Como veremos, as soluções para estes problemas de Jakob e Johann Bernoulli, Euler, e seus contemporâneos fizeram mais do que resolver questões específicas de engenharia - eles estabeleceram as bases matemáticas da moderna mecânica estrutural e demonstraram o Poder sem precedentes de métodos analíticos em física matemática.

9.1.6 Notação Matemática

A evolução de *notação matemática* Em paralelo com os desenvolvimentos conceituais. Diferentes pioneiros desenvolveram sistemas simbólicos competitivos, e entender sua notação ajuda na leitura de fontes primárias, Tabela 9.1.

9.2 O Desafio da Catenária (Maio de 1690-Junho de 1691)

A história do catenária estudos no final do século XVII é fascinante para o leitor moderno (acadêmico). Trata-se de competitividade de três figuras imponentes (Leibniz, Huygens e os irmãos Bernoulli), ego (Leibez querendo provar a supremacia do cálculo ”sua”), comunicações secretas (uso extensivo de cifras), comunicações privadas (entre Leibniz e Huygens), ciúme (entre os Jakob e Johann Bernoulli), pressão de publicação (pelo editor do *Acta Eruditorium*E muito mais.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 9.1: Diferenciação & símbolos de integração

	Diferenciação	Integração (antidiferenciação)
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$	$\int y\,dx$
Lagrange	$f'(x)$, $f''(x)$, ...	$\int \cdot\,dx$
Euler	$D_x y$, $D_x^2 y$	$\int \cdot\,dx$
Newton	$\dot{x}$, $\ddot{x}$ (taxas de tempo)	"Fluente"de $\dot{x}$ (integral do tempo); Newton não usou $\int$ em sua notação

Notas: (i) Lagrange rotineiramente usado primes e $\int$ para quadratura; um operador inverso-derivado formal (D^{-1}É mais tarde. (ii) Euler usou ambos Leibnizian $\int$ e operadores diferenciais D_x em vários contextos. (iii) Os fluxos/fluentes de Newton foram baseados no tempo; Mapa para o moderno $\frac{d}{dt}$ e.. $\int dt$ Quando mecânica de referência cruzada.

A catenária representava um desafio fundamental: Foi o primeiro Curva transcendental para exigir solução analítica, tornando-se um caso de teste crucial para o novo cálculo versus métodos geométricos tradicionais. Ao contrário de curvas algébricas construíveis por bússola e reta, a infinidade da cadeia pendurada significava que nenhuma construção geométrica simples poderia determinar sua forma. O problema exigia forças de equilíbrio ao longo de uma curva de forma desconhecida - exatamente o tipo de desafio que exigia os métodos diferenciais sendo desenvolvidos por Leibniz e Newton.

Para os Bernoullis, Fig. 6.16Foi um caso de família, pois todos os protagonistas estão conectados. Huygens era o mentor de Leibniz, que foi conselheiro de Jakob Bernoulli, que era irmão de Johann Bernouli, que é pai de Daniel Bernouilli e conselheiro de Euler.

Por isso, é uma história que vale a pena conhecer.

9.2.1 Primeiros Estudos

Antes do trabalho de Bernoulli e Euler, o problema da cadeia pendurada já tinha pego o Atenção de muitos.

9.2.1.1 Leonardo

Acredita-se que o problema apareceu pela primeira vez quando Leonardo da Vinci desenhou algumas correntes penduradas em seus cadernos, Fig. 9.3.. No entanto, é mais provável que ele tenha procurado seu centro de gravidade ao invés da forma. Mas, novamente, nós muitas vezes gostamos de dar crédito a Da Vinci com muitas descobertas imerecidas. Mais tarde, o problema foi resolvido por Galileu que pressupunha que a forma seria uma parábola. Essa suposição foi "destruída"por Stevin, Huygens e outros. No entanto, enquanto todos eles mostraram que a curva não é uma parábola, eles não foram capazes de dizer qual a forma da corrente pendurada realmente é. Isso teria que esperar pelo desafio de Jakob Bernoulli.

9.2.1.2 Galileu

Em 1614, o matemático flamengo Isaac Beeckman (1588-1637) observou em seu caderno uma corda pendurada ("Deixe-se pendurar de uma viga uma corda... presa nas extremidades para que fique solta e livremente"), juntamente com um esboço; Ele também fez a pergunta para Descartes. Nos papéis de Descartes há uma

CÓPIA PARA REVISÃO

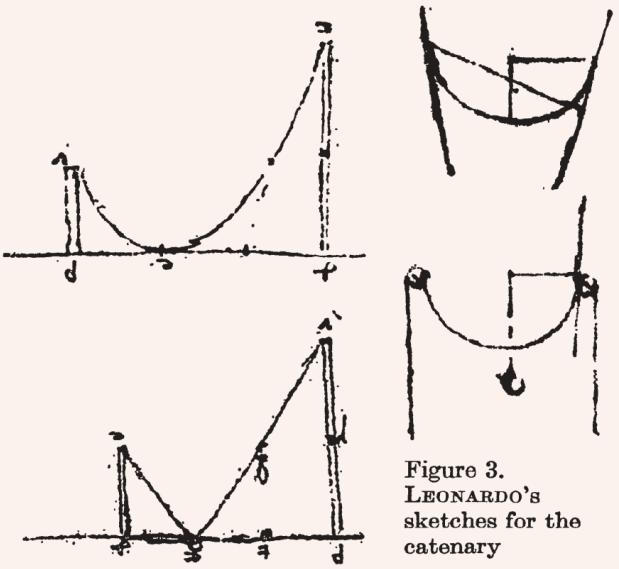


Figure 3. LEONARDO'S sketches for the catenary

Figura 9.3: Os esboços de Leonardo para a catenária de (Truesdell, 1960)

nota marginal referindo-se a "Isaacus Middelburgensis"[Beeckman]Perguntando se um cordão fixado por pregos poderia descrever parte de uma cônica. No entanto, não há indicação de que Descartes tenha buscado uma solução ou discutido com Beeckman.[3].

Mais tarde em 1638 Galilei, 1638 investigou o problema também e sem qualquer análise formal declarou:

> Induzir dois pregos em uma parede numa altura conveniente e no mesmo nível; Faça a distância entre estas unhas duas vezes a largura do retângulo sobre o qual se deseja traçar o semiparabola. Sobre estes dois pregos penduram uma corrente leve de tal comprimento que a profundidade da sua fenda é igual ao comprimento do prisma. Esta cadeia assumirá a forma de uma parábola, de modo que se esta forma for marcada por pontos na parede nós teremos descrito uma parábola completa que pode ser dividida em duas partes iguais desenhando uma linha vertical através de um ponto no meio do caminho entre as duas unhas
>
> Galilei, 1638 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

Note-se que Galileu, tendo já mostrado que a trajetória de um projétil é parabólica, considerou que a catenária teria a mesma forma.

9.2.1.3 Stevin; (1634)

Este problema também apareceu nas obras de Stevin (1548-1620), cujo *Les Oeuvres Mathématiques* foi publicado postumamente em 1634 com anotações do matemático Albert Girard. No material estático, Stevin trata de problemas envolvendo cordas; Em uma nota marginal Girard afirma:

[3]Veja Bukowski, 2008; cf. Truesdell, 1960. Para fontes primárias, consulte Beeckman *Diário* (ed. de Waard) e *Oeuvres de Descartes* (ed. Adam-Tannery) (Beeckman, 1939), (Descartes, 1897a)

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

> *... Porque outras cordas são linhas parabólicas (como no passado provei por volta do ano 1617), como provarei depois disso no final do seguinte corolário.*
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508

Nenhuma prova anterior de 1617 é existente. Depois do corolário de Stevin, Girard, (Girard, 1634) acrescenta mais uma promessa (muitas vezes notada na literatura secundária) de publicar o argumento completo depois:

> Para satisfazer a minha promessa anterior que precedeu o último corolário, e não ter no momento o lazer de inserir aqui uma cópia de toda a minha prova, eu vou torná-la pública em outro momento junto com as minhas outras obras, se Deus quiser, quando o estudo das ciências será mais favoravelmente recebido do que agora.
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508 *(parafrase do francês de Girard)*

Não apareceu tal prova, e Girard mesmo tinha morrido no momento em que a edição de 1634 foi emitida.[4] [5]

9.2.1.4 Huygens (c. 1646

Huygens (Constantijn) pai era um conhecido de Girard (que tinha anotado o trabalho de Stevin) e trocou correspondência com o monge francês Marin Mersenne (1588-1648) (Bukowski, 2008). Mersenne é muitas vezes referido como um centro de limpeza para idéias matemáticas e científicas, como ele correspondia com muitos dos melhores pensadores em toda a Europa. Como um pai orgulhoso, Constantijn Huygens teve o prazer de contar a Mersenne sobre seu brilhante filho de 17 anos Christiaan.

Na década de 1640, os jovens Huygens (então na adolescência) escreveram para Mersenne (Huygens, 1888b, p. 28):

> Enviarei outra carta uma prova de que uma corda ou corrente pendurada não faz uma parábola, e qual deve ser a pressão no cabo matemático ou um sem gravidade para fazer uma; Encontrei uma prova assim há pouco tempo.
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1, p. 28

De fato, Huygens escreveu para Mersenne:

> *Nulla ergo catena pendet secundum lineam parabolicam.* (Portanto, nenhuma corrente pendura de acordo com a linha parabólica.)
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1

No entanto, ele não foi capaz de determinar a verdadeira forma da curva.

[4] Veja (Bukowski, 2008) e.. (Truesdell, 1960) para discussão.

[5] Na comparação frequente com a margem muito estreita de Fermat: A nota de Fermat data de *c.* 1637 e foi impresso postumamente na edição de 1670 de Diophantus, não em 1630.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Como a própria corrente de enforcamento não é uma parábola, Huygens afirma que descobriu como fazer da cadeia a forma de uma parábola com a ajuda de algumas forças externas. Intrigado pela alegação de Huygens sobre a cadeia pendurada, Mersenne respondeu em 16 de novembro desejando ver a prova

> ... que a corrente, ou corda esticada, pendurada sob seu próprio peso no meio, não faz uma parábola, como foi feito por Galileu...

Ele também afirma seu desejo de ver a prova adicional de Huygens, enquanto levando isso um passo mais longe, como ele diz a Huygens que ele quer ver o que

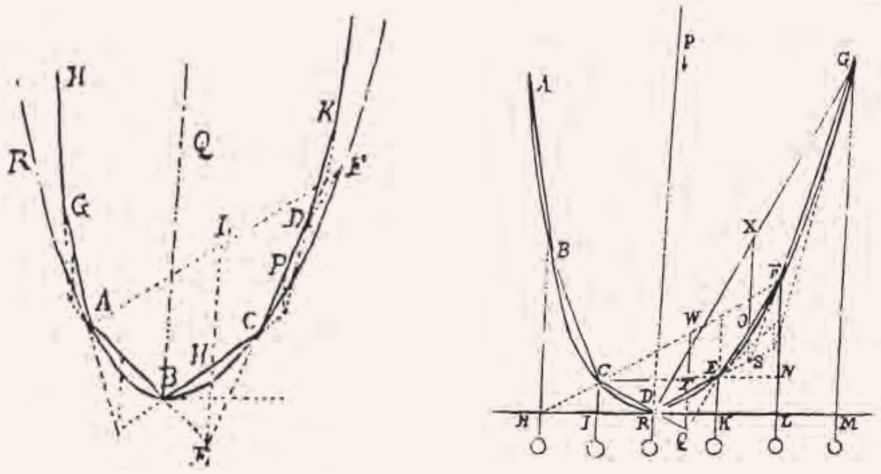
> Deve ser a pressão para que ela faça a parábola acima mencionada, e se você adicionar, como é necessário, a pressão por ele para fazer uma hipérbole e uma elipse, então você vai superar a si mesmo.

Mais tarde naquele mês, Huygens responde a Mersenne com uma prova completa de suas reivindicações sobre a cadeia pendurada.

A solução de Huygens é puramente geométrica, Fig. 9.4a (Huygens, 1888b). Curiosamente, ele forçou a cadeia pendurada a ser uma parábola suspendendo pesos iguais em intervalos iguais ao longo da projeção horizontal (ao contrário de intervalos iguais na própria corda). Isto representa uma distinção crucial: uma catenária (cadeia uniforme sob seu próprio peso) difere de um cabo parabólico da ponte suspensa (carga uniforme distribuída horizontalmente). Huygens tinha descoberto ambas as formas e compreendido suas diferentes origens físicas. Esta pode ser a primeira descoberta de que os cabos de apoio de uma ponte suspensa são parabólicos!

Uma explicação detalhada da solução de Huygens é encontrada em (Bukowski, 2008).

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Formulação do problema da cadeia pendurada (Proposição 8)

(b) Forçando uma corrente a ser pendurada como uma parábola (Proposição 11)

Figura 9.4: Catenária; Christiaan Huygens (Huygens, 1888b)

Huygens deixou de estudar a catenária por 45 anos até o desafio de Bernoulli§9.2.2.2)

9.2.2 Desafios

Mesa 9.2.2.1 é um resumo cronológico desta história, que (como o resto desta seção) baseia-se em grande parte no excelente estudo recente de Alassi, 2020.

9.2.2.1 Interlúdio: terminologia

Antes de enfrentarmos o desafio de Bernoulli, esclarecemos os termos-chave que usaremos.

Tabela 9.2: Terminologia para curvas na família 'Funicularia' (depois Alassi, 2020).

Termo	Modelo físico	Suposições-chave / carga	Relação canônica (indicativa)
Funicularia	Termo da guarda-chuva: Forma um fio flexível ou folha pode assumir sob determinadas cargas (inclui catenária, elástica, velaria, lintearia).	Comportamento constitutivo e carga variam conforme o caso. Gol: Determinar curvatura $\kappa(s)$ do equilíbrio.	Problema principal: equilíbrio de forças/momentos $\Rightarrow$ Lei da curvatura; Especializações abaixo.

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Mesa 9.2 (continuação)

Termo	Modelo físico	Suposições-chave / carga	Relação canônica (indicativa)
Catenária (catenário)	Pendurado inextensível, perfeitamente flexível corrente / cabo sob seu próprio peso; Endpoints fixos.	Sem dobra rigidez ou cisalhamento; Peso uniforme por unidade de comprimento w.	$y = a\cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + C$; Equivalentemente $H\,y'' = w\sqrt{1+(y')^2}$; curvatura $\kappa = \frac{w}{H}\frac{1}{1+(y')^2}$.
Elastica	Vara esbelta inextensível com flexão B "absoluta elasticidade).	Lei constitutiva $M = B\,\kappa$; Forças/momentos externos set BCs.	Euler form (planar): $B\,\theta'' + P\sin(\theta - \theta_P) = 0$; soluções via integrais elípticas (por exemplo, elástico retangular).
Velaria	Curva de uma vela retangular fixa em seus cantos e inflada pelo vento (membrana pressurizada).	Folha flexível sob (aproximadamente) pressão uniforme; Fios inextensíveis (idealização de Bernouli).	Membro da *Funicularia*; curvatura governada por resultados de pressão na membrana; A construção geométrica de Bernoulli.
Lintearia	Curva de um pano retangular cujos dois lados opostos são apoiados horizontalmente e carregados por um fluido contido.	Membrana flexível; A carga transversal varia com a profundidade (hidrostática).	Membro da *Funicularia*; Perfil distinto da catenária devido ao carregamento não uniforme.

9.2.2.2 Jakob Bernoulli *Funicularia* Desafio; 1690

O problema da catenária, determinando a curva matemática formada por uma corrente suspensa, tornou-se um caso de teste fundamental para o cálculo emergente na década de 1690. Este desafio demonstraria a superioridade dos métodos analíticos sobre as abordagens geométricas tradicionais.

No final do século XVII, o cálculo (cortesia de Newton e Leibniz) era nascente e sua supremacia sobre os métodos "tradicionais" (geométricos) estava prestes a ser demonstrada resolvendo o problema catenário[6].

Assim, a época estava madura em maio de 1690 para Jakob Bernoulli desafiar a comunidade matemática para resolver o problema catenária[7] (Bernoulli, Jakob, 1690b).

Mesa 9.3 fornece um resumo cronológico desta história, em grande parte baseado no excelente estudo recente de Alassi, 2020.

A ideia era que os matemáticos pudessem apresentar soluções para serem publicadas simultaneamente, garantindo uma comparação justa dos métodos. As soluções apareceriam no *Acta Eruditorum*, (Bernoulli, Jakob, 1690b)[8].

[6] Pode-se demonstrar que, ao rolar uma parábola sobre uma linha reta, seu foco descreve uma catenária.

[7] Propor questões matemáticas como concursos já era popular entre os matemáticos renascentistas e dos primeiros-modernos, incluindo Huygens e Leibniz. Geralmente, uma pergunta matemática foi proposta para ser resolvida, e o desafiante convidou explicitamente alguns matemáticos para resolver o problema em um determinado período de tempo (Alassi, 2020).

[8] *Acta Eruditorum* (Latim para "Atos do Erudita"') foi o primeiro periódico científico das terras de língua alemã da Europa, publicado entre 1682 e 1782. Foi apoiado pelo próprio Leibniz que contribuiu com 13 artigos. Jakob Bernoulli e Euler também publicaram nele. Ele desempenhou um papel fundamental na "guerra do cálculo"(onde Newton e Leibniz reivindicaram cada crédito para o desenvolvimento de cálculo diferencial. O *Acta* Ao lado de Leibniz, enquanto as Transações Filosóficas estavam ao lado de Newton.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 9.3: Desenvolvimento cronológico da solução catenária (baseada em (Alassi, 2020))

Data	De..	Para	Assunto
Século XV	Leonardo		Observação casual de correntes penduradas
1638	Galileu	—	Diz que é uma parábola
1600 final	Huygens, Pardies		Não, não é uma parábola
Maio de 1690	Jakob B.	Leibniz	É um desafio para Leibniz & Tschirnhaus
Jul 1690	Leibniz	Jakob B.	Aceita o desafio; Afirma uma solução; Fixa o prazo
9 de outubro de 1690	Huygens	Leibniz	Envia uma solução (cifrada); pede para ver Leibniz's (cifrado)
13 de outubro de 1690	Leibniz	Huygens	Anota semelhanças; Menciona pequenas diferenças
18 de novembro de 1690	Huygens	Leibniz	Pede para ver a solução criptografada para verificação
Dec 1690	Johann B.	Editor AE	Submete uma solução com condições
31 de dezembro de 1690			**Prazo (sem solução publicada por Leibniz)**
6 de janeiro de 1691	Editor AE	Leibniz	Confirma a recepção da solução de Johann B
27 de janeiro de 1691	Leibniz	Huygens	Pós-escrito: aceita a solução de Huygens mas observa outra curva
20 de fevereiro de 1691	Leibniz	Huygens	Johann conseguiu. Ele usou meu cálculo
23 de fevereiro de 1691	Huygens	Leibniz	Outros geômetros podem resolver este problema fácil
26 de março de 1691	Huygens	Leibniz	Admite um deslize em sua cifra; pede para verificar com Johann B.
Mar 1691	Jakob B.	Editor AE	Adenda: estende a solução de seu irmão
21 de março de 1691	Editor AE	Leibniz	Informa sobre a solução de Jakob
20 de abril de 1691	Leibniz	Huygens	Relatórios de pressão do AE para submeter sua solução
5 de maio de 1691	Huygens	Leibniz	Solução em envelope selado
Maio de 1691	Leibniz	Editor AE	Submete as soluções dele e de Huygens
Junho de 1691	Editor AE	—	Publicação das três soluções
Jul 1691	Leibniz	Huygens	Envia sua opinião sobre várias submissões
Set 1691	Huygens	Leibniz	Responda
21 de setembro de 1691	Leibniz	Huygens	Defende-se contra acusações de plágio
16 de Nov, 1691	Huygens	Leibniz	Reconciliação; estudará o novo cálculo infinitesimal em profundidade

Ele convidou especificamente Leibniz e Tschirnhaus[9] para tentar seus novos métodos para resolver este problema. Com seu desafio de 1690, Jakob Bernoulli estendeu esta prática propondo a pergunta para toda a comunidade matemática e especialmente pediu Leibniz e Tschirnhaus para considerar o problema. Inicialmente, Jakob não estabeleceu nenhum prazo específico, refletindo a dificuldade do problema. Ele descreveu o problema como segue, Fig. 9.5:

> E agora que este problema seja proposto: Para encontrar a curva assumida por um fio solto pendurado livremente de dois pontos fixos. Presumo também que o fio é uma linha que é facilmente flexível em todas as suas partes.
>
> Bernoulli, Jakob, 1690b *"Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)"*

[9]Tschirnhaus era um matemático alemão que Leibniz também conheceu em Paris. Interessante Veja o 1696 abaixo em 1696 foi o irmão de Jakob, Johann Bernoulli para colocar um problema (brachistochrone) para os leitores de *Acta Eruditorum*E Tschirnhaus foi um dos cinco matemáticos a submeter uma solução. Bernoulli publicou estas contribuições (incluindo Tschirnhaus ') juntamente com as suas próprias no diário em maio do ano seguinte.

CÓPIA PARA REVISÃO

9.2.2.3 Resposta de Leibniz e modificação do desafio; Fim de 1690

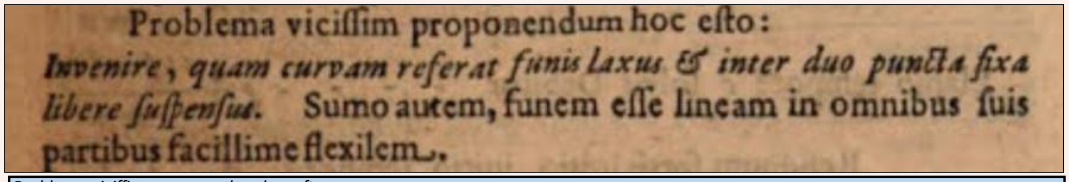
Leibniz, embora treinado em direito, estudou matemática com Huygens em Paris entre 1672 e 1676. Então, Leibniz aceitou o desafio e respondeu no final de 1690, efetivamente modificando o desafio aberto de Jakob em uma competição mais estruturada:

> Supõe-se também que a corda permanece do mesmo comprimento, como uma corrente, em vez de ser esticada ou contraída como um fio. Este problema, proposto por Galileu e famoso desde seu tempo, ainda não se rendeu à solução... Portanto, eu deveria ser dispensado do fardo imposto, especialmente porque estou muito atraído para outros assuntos. Mas a humanidade daquele homem mais iluminado é tal que eu não deveria querer falhar em sua primeira convocação. Por isso eu ataquei [o problema], que até agora eu não tinha tentado, e com a minha chave [Ou seja... Cálculo diferencial] alegremente abriu suas abordagens secretas. No entanto, este problema é um pouco mais envolvido do que o meu anterior e mostra um certo uso singular de nosso método; Assim, achei que valeria a pena, antes de publicar minha solução, dar tempo também aos outros para exercer suas habilidades. Assim como pela pedra de Lídia, conheceremos os melhores métodos. que tem muito a ver com o aperfeiçoamento da ciência; Especialmente porque aqui não é uma questão de cálculo elaborado, mas sim de artifício. Primeiro de tudo, o mais nobre D. T. [Conde Tschirnhausen], que promete coisas esplêndidas deste tipo, deve ser perguntado se ele deseja tentar a força de seu método aqui também. Mas se ninguém indicar antes do fim do ano que ele encontrou uma solução, eu darei a minha, se Deus quiser.
>
> Leibniz, 1690 *"Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio"*

Essencialmente, Leibniz realizou duas modificações importantes:

- Ele simplificou o *Funicularia* problema assumindo uma cadeia inextensível (o *Catenária*)
- Ele estabeleceu um prazo (final de 1690) e prometeu revelar sua solução se nenhum outro emergiu
- Ele desafiou especificamente Tschirnhaus para demonstrar seus novos métodos matemáticos

De agora em diante, a maioria dos participantes se concentraram no *Catenária* Em vez de Jakob mais geral *Funicularia* Problema.


Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Seja este, por sua vez, o problema proposto:
Determinar qual curva é descrita por uma corda frouxa, livremente suspensa entre dois pontos fixos. Suponho, além disso, que a corda seja uma linha perfeitamente flexível em todas as suas partes.

Figura 9.5: Jakob Bernoulli *Funicularia* Desafio (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219)

CÓPIA PARA REVISÃO

9.2.3 As três principais soluções

O uso de cifras (soluções criptografadas) nas seguintes trocas refletiu tanto a natureza competitiva da descoberta matemática e o desejo de estabelecer prioridade, ao mesmo tempo que permite aos colegas tempo para trabalhar em problemas.

9.2.3.1 Johann Bernoulli; (apresentada em dezembro de 1690, publicada em junho de 1691)

Enquanto isso, Bernoulli, Johann, 1691c Também resolveu o problema da catenária e enviou sua solução diretamente para o editor do AE em dezembro de 1690 e estabeleceu uma condição para a publicação de sua solução: Ele queria que fosse publicado ao mesmo tempo que a solução de Leibniz. Johann tinha apresentado sua solução antes do prazo de Leibniz expirar, mas Leibniz não publicou sua análise; Em vez disso, ele continuou sua correspondência com Huygens.

Durante o inverno e primavera de 1691, a correspondência entre Leibniz e Huygens continuou. Em um post-script de uma carta enviada a Huygens em 27 de janeiro de 1691 sem incluir qualquer cifra de sua própria análise, Leibniz aceitou que a curva auxiliar de Huygenes também poderia ser usada para a construção geométrica da catenária. Ele também sugeriu mais uma curva auxiliar, que se mostrou útil para representar a curva catenária. A disponibilidade de muitas escolhas para uma curva auxiliar representar a catenária deve ter convencido Huygens que o problema não era difícil de resolver. Em 23 de fevereiro de 1691 ele escreveu para Leibniz:

> Eu acho que haverá muitos outros geometros que resolverão este problema porque, para dizer a verdade, não parece muito difícil, exceto que você pede por algo mais do que eu encontrei
>
> Bernoulli, Johann, 1691b *"Letter to Leibniz"*

Em sua carta de 2 de março de 1691, Leibniz informou Huygens que Johann Bernoulli tinha resolvido com sucesso o problema e se orgulhado da ideia de que seu cálculo poderia ter ajudado Johann. Admitindo que seu tom em nomear Tschirnhaus não era apenas exigente, mas também deliberadamente provocativo, Leibniz também expressou sua decepção por Tsquirnhau não ter aceitado o desafio:

> Senhor. Tschirnhaus não mordeu, embora eu deliberadamente falei de modo a atraí-lo para dentro, para dar-lhe uma oportunidade de usar seu método, já que ele tinha nos prometido que isso faria tanto, e até mesmo indiretamente me repreendeu por dizer essa análise comum Não seria suficiente nestes casos.
>
> Leibniz, 1691d *"Letter to Huygens"*

Em 26 de março de 1691, Huygens, que havia visto um escorrego da caneta em sua primeira cifra, enviou a Leibniz uma segunda versão corrigida e estendida do primeiro. Huygens sugeriu que Leibniz poderia comunicar esta segunda cifra a Johann e pedir-lhe o seu em troca. Além disso, Huygens expressou seu espanto no silêncio de Tschirnhaus apesar de ser particularmente indicado por Leibniz. Esquecendo que o prazo já tinha expirado, Huygens esperava que Tschirnhaus chegasse a algo no tempo restante. Além disso, nesta carta, Huygens expressa sua opinião sobre a necessidade de trocar cifras para garantir prioridade e evitar disputas.

CÓPIA PARA REVISÃO

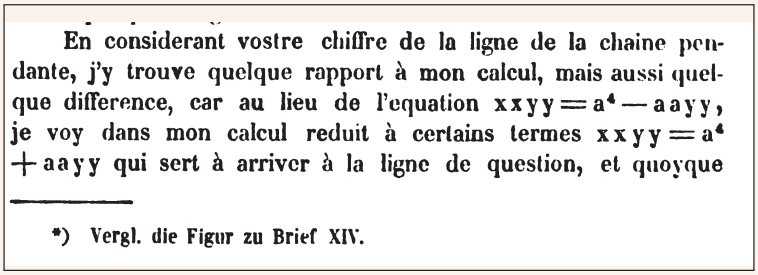
9.2.3.2 Huygens; (apresentada em outubro de 1690, publicada em maio de 1691)

Solução de Cifra Inicial (Outubro 1690) A primeira resposta à versão modificada de Leibniz do desafio de Jakob veio de Christiaan Huygens, seu antigo mentor, em 9 de outubro de 1690. Esta troca marcou o início de uma correspondência estendida entre os dois gigantes na catenária. Em sua carta, Huygens fechou sua solução em forma de cifra, observando que na sua juventude ele já tinha se correspondido com o padre Mersenne (§9.2.1.4) sobre o problema e tinha estabelecido que a curva de uma cadeia pendurada não é uma parábola, ao contrário do pressuposto de Galileu. Huygens, por sua vez, esperava que Leibniz retribuísse enviando sua própria solução em cifra, observando que entre eles poderiam encurtar o prazo[10] Leibniz tinha pedido em casamento. A cifra que ele enclausurou continha a equação da curva geradora para sua construção geométrica da catenária:

$$xxyy \propto a^4 - a^2y^2 \tag{9.4}$$

Intercâmbio matemático e refinamentos (Outubro de 1690 - Março de 1691) Em 13 de outubro de 1690, sem incluir qualquer cifra, Leibniz respondeu[11] que ele tinha encontrado algumas semelhanças com seus cálculos e uma diferença, Fig. 9.6:

> Em consideração, vostre chiffre de la chaine pendante, j'y trouve quelque relaport à mon calcul, mais aussi quelquque difference, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reducit para certos termos $xxyy = a^4 + aayy$, qui sert à chegada à la ligne de question, et quoyque cette ligne soit du nombre des transcendentes, je ne laisse pas (suposita ejus constructione) d'en pouvoir doner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide De sa rotation et la dimension de l'espace compris de la courbe et del'axe; e o cálculo m'offre tout cela comme de soy meme.
>
> Considerando sua cifra para a cadeia pendurada, acho que concordo com meus próprios cálculos, mas também alguma diferença. Para em vez da equação $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, Eu chego, quando meu cálculo é reduzido a certos termos, $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$, que serve para alcançar a curva necessária. E embora esta curva esteja entre as transcendentais, eu sou capaz (uma vez que sua construção é assumida) de fornecer não só as tangentes, mas também a medida da própria curva, a superfície do sólido gerada por sua rotação, e o volume do espaço delimitado pela curva e pelo eixo; E o cálculo me oferece tudo isso, por vontade própria.
>
> Leibniz, 1901 *"Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690"*


En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation xxyy = a⁴ — aayy, je voy dans mon calcul reduit à certains termes xxyy = a⁴ + aayy qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

Figura 9.6: Leibniz responde a Huygens, oct, 1690 (Leibniz, 1923)

[10] Huygens inicialmente entendeu mal a linha do tempo, acreditando que Leibniz tinha estabelecido um período mais longo do que o prazo de fim de ano.

[11] Huygens e Leibniz se comunicavam em francês como sua linguagem acadêmica comum do período de Leibniz.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

A diferença que Leibniz aponta está na equação da curva auxiliar; Ele afirma que, com seu cálculo, acaba sendo:

$$xxyy \propto a^4 + a^2y^2 \tag{9.5}$$

Como nenhuma demonstração foi enviada, Huygens verificou seus cálculos e não encontrou nenhum erro nele, e ficou desconfiado da precisão dos cálculos de Leibniz (Alassi, 2020). Em 18 de novembro de 1690, Huygens alegou que uma vez que a única diferença entre seus resultados era um sinal, certamente foi causada por seus diferentes métodos[12].. Ele insistiu novamente que Leibniz lhe enviasse sua solução completa (Leibniz, 1901, Vol. 9).. No entanto, Leibniz manteve silêncio até 2 de março de 1691, no qual confirmou a Huygens que Johann Bernoulli também tinha encontrado sua própria solução e que o cálculo infinitesimal certamente deveria tê-lo ajudado (Leibniz, 1901, Vol. 9).

Correção de cifras e Submissão Final (Março-Maio 1691) Em 26 de março de 1691, Huygens, que tinha visto um escorregão da caneta em sua primeira cifra, enviou Leibniz uma versão corrigida e estendida. Huygens sugeriu que Leibniz poderia comunicar esta segunda cifra a Johann e pedir-lhe o seu em troca. Além disso, Huygens expressou seu espanto no silêncio de Tschirnhaus apesar de ser particularmente indicado por Leibniz. Esquecendo que o prazo já tinha expirado, Huygens esperava que Tschirnhaus chegasse a algo no tempo restante. Nesta carta, Huygens também expressou sua opinião sobre a necessidade de trocar cifras para garantir prioridade e evitar disputas.

Huygens escreveu Leibniz mais duas cartas insistindo em ver sua solução, mas Leibniz não concordou (Alassi, 2020). Finalmente, em 5 de maio de 1691, Huygens enviou sua solução definitiva para Leibniz em um envelope selado junto com uma carta solicitando que sua solução fechada fosse transmitida ao EA. Isso marcou o fim de quase oito meses de correspondência e refinamento de sua abordagem ao problema da catenária.

Publicação (Junho 1691) A solução de Huygens foi publicada em junho de 1691 ao lado das de Johann Bernoulli e Leibniz no *Acta Eruditorum*, representando o culminar de seu compromisso prolongado com o desafio catenária de outubro de 1690 a maio de 1691.

9.2.3.3 Leibniz; (apresentada em maio de 1691, publicada em junho de 1691)

Enquanto mantinha extensa correspondência com Huygens durante o inverno e primavera de 1691, Leibniz estava desenvolvendo simultaneamente sua própria abordagem sistemática do problema da catenária. Sua solução, finalmente publicada como "De linea em quam flexile se pondera proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque media proporcionais & Logarithmos' (Leibniz, 1691a), representou o tratamento mais abrangente e teoricamente profundo das três soluções.

Abordagem analítica usando cálculo diferencial O método de Leibniz exemplificou o poder do seu cálculo diferencial. Ao contrário da abordagem geométrica de Huygens, Leibniz tratou a catenária como um problema puramente analítico, estabelecendo equações diferenciais baseadas nas forças físicas que atuam em cada elemento da cadeia suspensa. Sua abordagem começou com o princípio fundamental de que em cada ponto, a cadeia deve estar em equilíbrio sob as forças do tensão e gravidade.

Considerando um elemento infinitesimal da cadeia e aplicando o equilíbrio de forças, Leibniz derivava a característica equação diferencial da catenária. Seu uso sistemático de diferenciais permitiu-lhe expressar a relação entre as coordenadas da curva diretamente em termos dos parâmetros físicos do problema.

Conexão com logaritmos e Quadraturas Hiperbólicas Talvez mais significativamente, Leibniz reconheceu que o problema catenário estava fundamentalmente ligado à quadratura da hipérbole - essencialmente, às funções logarítmicas. Como escreveu a Huygens em 24 de julho de 1691, ele descobriu que tanto o catenário quanto outros problemas transcendentais exigem apenas a quadratura da hipérbole para ser construída e que ele tinha reduzido tudo aos logaritmos."

[12]Foi nesta troca que Huygens cunhou o nome *catenaria* (Leibniz, 1901, Vol. 9).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Essa visão foi revolucionária. Leibniz mostrou que a catenária poderia ser expressa usando o que agora reconhecemos como funções hiperbólicas, estabelecendo uma conexão direta entre a curva geométrica e as expressões analíticas envolvendo exponenciais e logaritmos. Esta redução aos logaritmos forneceu não só a descrição matemática mais elegante, mas também o método mais prático para computação numérica.

Tratamento Matemático abrangente A solução de Leibniz foi além de encontrar a equação da curva. Seu trabalho demonstrou como a catenária poderia ser usada adinveniendas quotcunque media proporcionais & logaritmos' (para encontrar qualquer número de proporcionais médias e logartmos), mostrando aplicações práticas da curva na resolução de outros problemas matemáticos. Ele forneceu métodos para:

- Encontrando tangentes para a catenária em qualquer momento
- Calculando o comprimento do arco de qualquer parte da curva
- Determinando a área sob a catenária
- Computando a área de superfície e volume do sólido da revolução formado pela rotação da catenária

Metodologia sistemática O que distinguiu Leibniz da abordagem foi sua generalidade sistemática. Enquanto Huygens e Johann Bernoulli tinham encontrado soluções específicas para o problema da catenária, Leibniz desenvolveu uma estrutura analítica abrangente que poderia ser aplicada a toda uma classe de problemas similares. Seu método forneceu o que ele chamou de "o melhor de todas as construções possíveis, para transcendentes", estabelecendo cálculo diferencial como a ferramenta preferida para resolver tais problemas.

Leibniz submeteu sua solução ao *Acta Eruditorum* em maio de 1691, e apareceu na edição de junho ao lado das soluções de Huygens e Johann Bernoulli, completando o triunvirato de soluções que estabeleceriam a catenária como uma conquista marcante na aplicação do cálculo aos problemas físicos.

9.2.3.4 Publicação e Resolução Final; Junho de 1691

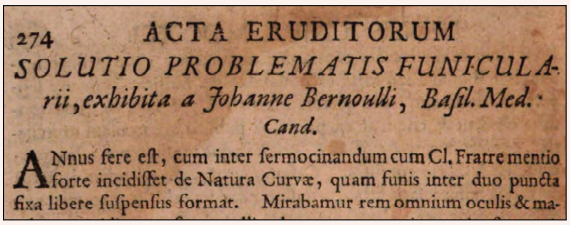
Em 21 de março de 1691, Mencke informou Leibniz sobre o artigo de Jakob Bernoulli e seu *Additamentum ad Problema Funicularium*.. Uma vez que publicar o artigo de Jakob teria violado o pedido de Johann, eles decidiram publicá-lo na mesma edição que iria conter as soluções para o problema da catenária. Em 20 de abril de 1691, Leibniz notificou Huygens que estava sendo pressionado pelos editores do AE para apresentar sua resposta. Leibniz também explicou o arranjo de Johann para a publicação de sua solução e afirmou que ele mesmo não tinha visto. Ele também se absteve de pedir a Johann uma cifra porque Johann tinha transmitido diretamente sua resposta aos editores da AE, e pedindo por uma cifra poderia ter levantado suspeitas. Lembrando que o prazo do concurso tinha expirado há muito, ele informou Huygens que iria submeter sua análise para publicação em breve e instou Huygens a fazer o mesmo. Leibniz garantiu a Huygens que os editores sabiam que Huygens tinha resolvido o problema mais cedo e que eles tratariam sua solução confidencialmente.

Em 5 de maio de 1691, Huygens enviou sua solução para Leibniz em um envelope selado junto com uma carta solicitando que sua solução fosse transmitida ao AE. Juntamente com ele, Leibniz submeteu sua própria solução para publicação em maio de 1691. Em junho de 1691, AE publicou todas as principais soluções, Fig. 9.7, juntamente com um prefácio que descreveu a ordem ea data em que o editor tinha recebido as respostas. O editor colocou o artigo de Jakob Bernoulli logo após as três soluções.

9.2.3.5 Análise Pós-Publicação e Legado

Uma vez que todas as soluções foram publicadas, Leibniz deu a Huygens sua opinião sobre as semelhanças e diferenças de cada uma das descrições matemáticas. Em uma carta para Huygens em 24 de julho de 1691 (Leibniz, 1691c), ele fez referência ao uso de seu novo método por Johann Bernoulli, reduzindo o problema para a quadratura da hipérbole através de sua equivalência matemática:

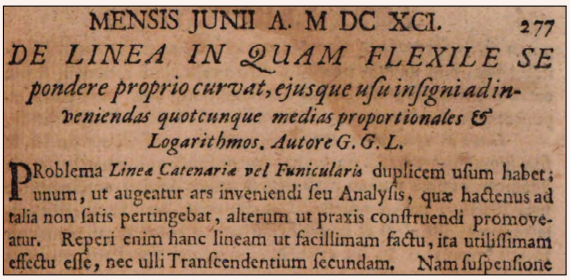
CÓPIA PARA REVISÃO


274 ACTA ERUDITORUM

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULARII, exhibita a Johanne Bernoulli, Basil. Med. Cand.

ANnus fere est, cum inter sermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvæ, quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur rem omnium oculis & ma-

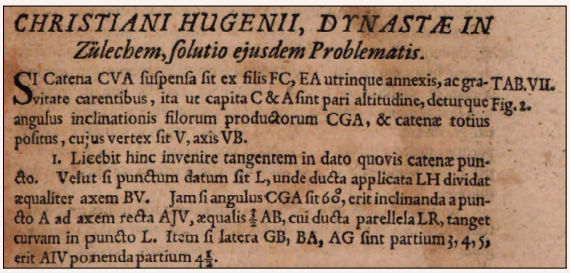
(a) Johann Bernoulli


MENSIS JUNII A. M DC XCI. 277

DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos. Autore G. G. L.

PRoblema Linea Catenaria vel Funicularis duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione

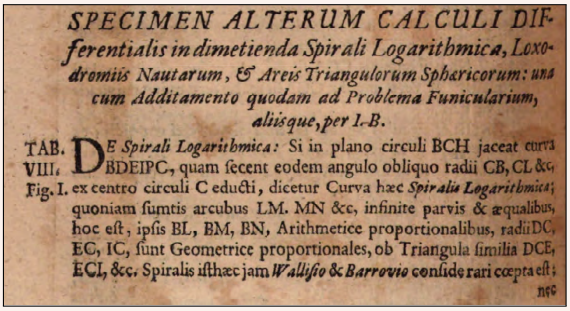
(b) Leibniz


CHRISTIANI HUGENII, DYNASTÆ IN Zülechem, solutio ejusdem Problematis.

SI Catena CVA suspensa sit ex filis FC, EA utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque angulus inclinationis filorum productorum CGA, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis VB. TAB. VII. Fig. 2.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata LH dividat æqualiter axem BV. Jam si angulus CGA sit 60, erit inclinanda a puncto A ad axem recta AJV, æqualis ½ AB, cui ducta parellela LR, tanget curvam in puncto L. Item si latera GB, BA, AG sint partium 3, 4, 5, erit AIV ponenda partium 4½.

(c) Huygens


SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Arcis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c. ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam Wallisio & Barrovio conside rari cœpta est; nec

(d) Jakob Bernoulli

Figura 9.7: Junho de 1691 *Atua erudite* soluções para o desafio catenário de Jakob Bernoulli

> [C]Omme les Equations communices pures se solunt par la seule extraction des racines; De mim les Equações puras Transcendentes sont reduites aux sommes ou quadratures. Et comme on n'a pas encor perfectionné l'Analyse des Equations; De mim n'ay je pas encor tellement perfectionnée ma methode que je puisse tousjours reduire tous ces problemes Transcendans aux seules quadratures. Cependant j'en ay ouvert le chemin, et meme je suis assez avancé. Aussi les deux problemes, que vous m'avés proposés, Monsieur, qui donnent d'abord une Equação Transcendente Affectée, se peuvent tous deux reduire aux quadratures; em mim je trouve qu'ils ne sument que la quadrature de l'Hyperbole pour estre construits. Et quand je puis reduire ces problemes aux quadratures, je crois alors d'avoir surmonté la plus grande duffité. Cependant verte perfeccionista cette Methodé il faut aussi achever la doutrina de quadraturas.
>
> Assim como equações puras comuns são resolvidas pela simples extração de raízes; da mesma forma que equações transcendentais puras são reduzidas a somas ou quadraturas. E assim como a análise das equações ainda não foi aperfeiçoada; da mesma forma que ainda não aperfeiçoei meu método, que posso sempre reduzir todos esses problemas transcendentais a quadraturas sozinha. No entanto, eu abri o caminho, e estou até mesmo bastante avançado. Também os dois problemas que você me propôs, senhor, que imediatamente dão uma equação transcendental afetada, podem ser reduzidos a quadraturas; E eu até acho que eles exigem apenas a quadratura da hipérbole para ser construída. E quando posso reduzir esses problemas a quadraturas, acredito que superarei a maior dificuldade. No entanto, para aperfeiçoar este método também é necessário completar a doutrina das quadraturas.
>
> Leibniz, 1691c *"Letter to Christiaan Huygens"*

A precisão do cálculo de Leibniz o levou a suspeitar que outros poderiam plagiar seus métodos. No entanto, quando tais suspeitas surgiram sobre as soluções da catenária, Leibniz defendeu-se em uma carta

CÓPIA PARA REVISÃO

de 21 de setembro de 1691, alegando que os editores da Acta Eruditorum lidaram com a contribuição de Johann Bernoulli com estrita confidencialidade. Além disso, Leibniz apontou vários erros cometidos por Huygens. Ele publicou no Acta Eruditorum de junho de 1688 um artigo chamado "De Angulo contactus et osculi", em que ele reduziu a catenária à soma dos secantes do arco; Ele deveria ter relacionado a catenária com a quadratura da hipérbole. A resposta de Huygens em uma carta em 16 de novembro de 1691, serviu como a reconciliação desta disputa. Ele afirmou que era seu desejo estudar profundamente o novo cálculo infinitesimal para finalmente entender a relação entre a catenária e a quadratura da hipérbole.

Apesar disso, e mesmo após a resolução do desafio de Jakob Bernoulli, Huygens continuou defendendo a adequação de seus métodos geométricos em comparação com a abordagem analítica de Leibniz. Isso reflete a transição geracional na metodologia matemática - enquanto Huygens, representando a antiga tradição geométrica, gradualmente passou a apreciar o poder do cálculo Leibniziano, ele permaneceu mais confortável com suas técnicas estabelecidas. Embora Huygens tenha aprendido a aplicar o novo cálculo em certos casos, ele nunca abandonou totalmente sua preferência por métodos geométricos clássicos. A resolução do desafio da catenária marcou um momento divisor de águas na história matemática. A solução de Leibniz serviu como uma demonstração convincente para seus contemporâneos, especialmente Huygens, do poder e utilidade do cálculo infinitesimal. Com esta solução, ele foi capaz de apresentar um método geral para encontrar a descrição matemática das curvas mecânicas - uma abordagem que forneceu uma forma sistemática de lidar com problemas envolvendo infinito matemático (Palomo, 2017), estabelecendo cálculo diferencial como a ferramenta analítica dominante para os séculos que se seguiram.

Resposta de Huygens (Huygens, 1888a) Foi adiada até 1 de setembro de 1691, quando admitiu que não tinha ligado a catenária à quadratura da hipérbole. Aparentemente ele suspeitava que Leibniz e Johann Bernoulli poderiam ter compartilhado suas soluções antes da publicação no *Acta Eruditorum*.. Isso poderia explicar a enorme semelhança entre seus procedimentos, como ele expressou para Leibniz em um tom não muito afável. Embora Johann Bernoulli reconhecesse que a quadratura da hipérbole poderia ser usada para desenhar a catenária, Leibniz foi mais longe, reduzindo tudo aos logaritmos, e ao fazê-lo, determinando como a matemática futura se desenvolveria:

> Eu até adicionei à minha solução o centro de gravidade desta última figura, isto é, da sua área. M. Huyghens dá a construção da curva supondo o seguinte quadrado: $xxyy = a^4 - aayy$Enquanto M. John Bernoulli, e eu, relacionamos a catenária com a quadratura da hipérbole; Este último faz um uso absolutamente criterioso da quadratura de uma curva parabólica, enquanto pela minha parte, reduzi tudo a logaritmos; Eu determinei desta forma o tipo de expressão, assim como o melhor de todas as construções possíveis, para transcendentes. Na verdade, tudo que você precisa saber é uma proporção constante única, o que lhe permitirá descobrir um infinito de pontos, usando apenas geometria comum, e sem mais necessidade de quadratura ou retificação.
>
> Huygens, 1888a *"Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691"*

9.2.4 Epílogo

9.2.4.1 A unificação esquecida

A bolsa de estudos moderna revelou que Jakob Bernoulli uniu com sucesso os problemas da catenária e elástica através de sua derivação de um general equação diferencial, alcançando o objetivo estabelecido ao lançar seu desafio original de 1690 (Alassi, 2020). Esta notável conquista permaneceu enterrada em seus cadernos privados e foi irreconhecida tanto por seus contemporâneos quanto por historiadores posteriores. Embora Nicolaus (I) Bernoulli (Fig. 6.16) incluiu este trabalho em Jakob *Varia Posthuma* em 1744, (Bernoulli, 1744) seu significado foi ignorado.

CÓPIA PARA REVISÃO

A natureza esquecida da contribuição de Jakob tornou-se evidente quando um matemático anônimo usando as iniciais LBC reviveu o desafio catenário na edição de agosto de 1724 *Acta Eruditorum* (Anonymous, 1724). Esta nova formulação exigia análise de correntes que eram "moderadamente flexíveis"e "real"ao invés das cadeias perfeitamente flexíveis idealizadas do problema original. O desafio do LBC reformulou essencialmente o problema mais amplo da funicularia de Jakob, demonstrando como completamente a interpretação mais estreita de Leibniz tinha deslocado a visão original de Jacob na memória matemática.

Leonhard Euler respondeu a este desafio em 1728 com uma solução que poderia derivar tanto catenária e elástica curvaturas de uma abordagem unificada. Consequentemente, historiadores matemáticos têm tradicionalmente atribuído Euler, não Jakob Bernoulli, com a primeira unificação destes dois problemas – uma atribuição que negligencia o trabalho pioneiro de Jakobe em mais de três décadas (Alassi, 2020). Esta supervisão histórica representa um dos casos mais significativos de uma descoberta matemática sendo perdida para a memória acadêmica, apenas para ser redescoberta independentemente anos depois.

9.2.4.2 O legado matemático

Enquanto o desafio catenário de 1690-1691 tinha sido triunfantemente resolvido por Leibniz, Huygens e Johann Bernoulli, suas reverberações intelectuais continuaram muito depois das soluções aparecerem em Acta Eruditorum. No silêncio de seu estudo por volta de 1692, Jakob Bernoulli - o desafiante original que não tinha sido capaz de resolver seu próprio problema - embarcou numa meditação matemática mais profunda (Bernoulli, Jakob, 1677–1705). Trabalhando em seu caderno particular, os Meditationes, ele começou a ver conexões que transcenderam a única corrente pendurada. A catenária não estava sozinha. pertenceu a uma família que incluiu as velaria (curvas de vela), lintearia (torres de linha) e elástica (curras elásticas). Jakob reconheceu estas como manifestações de um princípio matemático unificado, desenvolvendo um general equação diferencial que governava todos eles. Essa visão privada, escondida em seus cadernos por séculos, antecipava por mais de trinta anos o que Leonhard Euler formalizaria depois como uma pedra angular do cálculo das variações. Assim, o desafio catenário, que começou como uma competição entre rivais matemáticos, evoluiu para algo muito maior - uma janela na unidade subjacente das curvas da natureza, revelando como uma simples cadeia de suspensão poderia iluminar as estruturas matemáticas governando tudo, desde o elástico vigas até as velas.

9.2.4.3 Paradoxo de Jakob

O desafio catenário apresenta uma das ironias mais pungentes da matemática: Jakob Bernoulli, o distinto professor que lançou confiantemente o desafio de encontrar a curva de uma corrente pendurada, tornou-se o único grande matemático de sua era incapaz de resolver seu próprio problema. Jakob Bernoulli não forneceu uma solução para o problema da cadeia pendurada que ele tinha colocado - um ponto mencionado muitas vezes por seu irmão mais novo Johann em uma rivalidade às vezes-bitter que durou além da morte de Jakobe em 1705 (Deakin, 2007; Alassi, 2020). Enquanto Leibniz, Huygens, e mais embaraçoso, seu próprio irmão Johann publicaram soluções elegantes em junho de 1691 *Acta Eruditorum*Jakob permaneceu conspícuamente silencioso. Johann, que tinha sido aluno de Jakob em matemática, tomou conta deste fracasso com alegria indisfarçada, vangloriando-se

> Os esforços de meu irmão foram sem sucesso; Por minha parte, tive mais sorte, pois encontrei a habilidade (disse sem me gabar, por que esconderia a verdade?) para resolvê-la na íntegra.
>
> s.d. Jakob Bernoulli

O desafio que Jakob tinha projetado para mostrar o poder do novo cálculo em vez disso tornou-se uma demonstração pública de que o estudante havia superado o mestre. Talvez, mais claramente, foi apenas na privacidade de seu *Meditação* Cadete (Bernoulli, Jakob, 1677–1705), longe do escrutínio público, que Jakob

CÓPIA PARA REVISÃO

mais tarde desenvolveria suas profundas insights sobre a família unificada de curvas (Alassi, 2020)Como se os deuses matemáticos tivessem reservado seus segredos mais profundos para o próprio homem que havia falhado em seu teste inicial.

Para detalhes analíticos, consultar §30.3.3

9.3 O Desafio Elastica (1690-1744)

9.3.1 O desafio de Jakob Bernoulli (1690)

Prelúdio: Diálogo com um artesão

Antes de apresentar o famoso desafio elástico de Jakob Bernoulli, vale a pena pausar em um texto pequeno, mas revelador, às vezes rotulado seu diálogo com um artesão (Bernoulli, Jakob, 1691)[13].. Em alguns parágrafos breves, Bernoulli encena uma troca fictícia com um mecânico experiente que descreve, da prática de oficinas, como finas tiras de madeira se curvam - o papel das garras, os limites de rigidez, e a inevitável primavera uma vez que uma carga DANIEL Removido. Bernoulli escuta, mas gentilmente desafia estas observações de regra-de-humb, sugerindo que a figura "bent"deve obedecer a uma lei matemática precisa derivada dos primeiros princípios em vez de experiências sem fim. Ele fecha, anunciando que uma demonstração completa seguirá, efetivamente convidando o mundo aprendido para resolver o problema da elástico variacional em breve aparecer no *Acta Eruditorum* (1691–1694).

Este dispositivo literário foi deliberado. A escolha de Bernoulli de um formato conversacional ecoa o celebrado por Galileu *Dialogo*, cujos debates animados entre Salviati, Sagredo e Simplicio se tornaram um modelo para apresentar filosofia natural a estudiosos e leitores leigos, §6.6.2 e.. §6.6.2.. Como Galileu, Bernoulli usou o diálogo para dramatizar o encontro de saber-fazer empírico e abstração matemática.

A peça não contém equações e não introduz cálculo de variações; Seu valor está em ilustrar a transição da intuição artesanal para uma teoria rigorosa. Para os leitores modernos serve menos como fonte técnica do que como prelúdio cultural, destacando o engajamento de Bernoulli com a mecânica prática, reconhecendo a tradição galileu de discurso científico acessível, e sinalizando a simplificação Suposições, suaves, sem peso, inextensíveis varas sob as quais ele logo representaria seu famoso desafio.

Contexto

Até 1690, as investigações de Galileu, Descartes, Mariotte e outros filósofos naturais tinham focado principalmente em questões de força - quebrando cargas, distribuições tensão e modos de falha - tratando membros estruturais como corpos essencialmente rígidos. A publicação 1690 de Bernoulli marcaria uma mudança profunda na mecânica dos materiais. Ao invés de perguntar apenas quando uma estrutura falhava, ele procurava entender como ela se dobra e se deforma, introduzindo o contínuo jogo de elasticidade no estudo da mecânica.

[13] De uma perspectiva estritamente científica, este diálogo pouco acrescenta à matemática da elástica. Sua importância reside em mostrar como um matemático líder do século XVII buscou a visão de um artesão praticante. Infelizmente, essa troca recíproca é rara hoje em dia: pesquisadores contemporâneos raramente procuram artesãos qualificados para inspiração em enquadrar problemas ou em aplicar seus próprios avanços teóricos. Mais detalhes sobre o contexto histórico desta troca podem ser encontrados em (Alassi, 2019).

CÓPIA PARA REVISÃO

Papel Principal

O artigo de Jakob Bernoulli (Bernoulli, Jakob, 1690a)[14], intitulado *Especimen alterum calculi diferencialis em dimetienda espirali logaritmica, loxodromis naturarum, & Areis triangulorum sphaericorum*, ocupa um lugar singular no início da história da análise[15].

Na época, o cálculo diferencial de Leibniz ainda estava em sua infância, e seu poder para resolver problemas concretos tinha que ser demonstrado a uma comunidade matemática cética. Nesta publicação, a contribuição de Bernoulli ofereceu exatamente tal demonstração. Aplicou os novos métodos a três problemas interligados:

Espiral logarítmica: Jakob examina as propriedades das espirais logarítmicas, calculando seus comprimentos de arco, tangentes e áreas, e destacando sua impressionante propriedade da auto-similaridade. Mais especificamente, ele mostra que os raios extraídos do centro cruzam a espiral em ângulos constantes e que esses raios formam uma progressão geométrica quando os comprimentos de arco correspondentes estão em progressão aritmética.

Loxodromes: Dirigindo-se à navegação em uma esfera, Bernoulli analisa curvas que cruzam todos os meridianos em ângulos constantes - os caminhos que as naves seguem ao segurarem uma bússola constante. Essas linhas, traçadas por constantes bússolas na esfera, ligaram o cálculo com as necessidades práticas de navegação e cartografia. Ele desenvolve métodos para calcular distâncias e diferenças de longitude ao longo dessas rotas.

Áreas de Triângulos Esféricos: Ele apresenta construções geométricas e fórmulas analíticas para determinar as áreas de triângulos esféricos, com aplicações em astronomia e cartografia. Este trabalho revelou como métodos infinitesimais poderiam interagir com trigonometria esférica clássica.

As conexões entre esses tópicos são metodológicas e não atuais. Cada problema exige aplicações sofisticadas do cálculo diferencial recentemente desenvolvido: a espiral logarítmica ilustra técnicas para análise de curvas definidas por relações diferenciais; a análise do loxodrome envolve integrações complexas em superfícies curvas; e o triângulo esférica combina raciocínio geométrico com computação analítica. Estas ferramentas matemáticas naturalmente guiaram Bernoulli para o problema elástico - outro desafio de equação diferencial envolvendo formas curvas sob restrições físicas, mas que exigiria o desenvolvimento de métodos variacionais ainda não totalmente formulada.

Em essência, o papel mostra a potência e versatilidade do novo cálculo em diversos domínios matemáticos, culminando no exigente problema elástico anunciado em sua adenda.

Desafio no Apêndice

Em 1690, enquanto Jakob colaborava com Leibniz sobre o problema da funicularia, ele encontrou o que se tornaria um dos problemas mais significativos na física matemática.

> Occasiona Problematis funicularii moz em Aliud non menos illustre delapsi sumus

[14] Bolsa de estudos moderna (Alassi, 2020) estabeleceu que o adenda e o anagrama pertencem ao artigo de 1690, publicado em junho daquele ano. Referências a 1691 em bibliografias antigas estão erradas.

[15] Leitores que não conhecem os fundamentos geométricos da curvatura, incluindo os conceitos de círculos osculantes, evoluem e a taxa de mudança do ângulo tangente, são fortemente encorajados a consultar primeiro o Capítulo 8, que desenvolve esses conceitos essenciais de suas origens históricas através de suas formulações maduras. O material apresentado lá é pré-requisito para entender a formulação mecânica do problema elástico que se segue.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Por ocasião do problema funicular, logo nos deparamos com outro não menos ilustre [Problema]
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*

> Occasiona Problematis funicularii moz in aliud non menos illustre delapsi sumus, preocupa suas curvas de trabalho, arcuum tensorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut plaia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum Leibnitium em privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, literais digitum opportume intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hipotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, além de aliquanto dificultatis envolver a priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem em præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi; Verum ut ad impressionem Viri Excelenteissimi & Aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho ocultabo, clavem cum demonstratione in nundinis outonalibus comunicaturus.
>
> Enquanto trabalhamos no problema Funicularia, nós [Jakob Bernoulli e Leibniz] Eu me deparei com outro problema incrível. Trata-se de dobrar ou a curvatura de vigas, arcos desenhados, ou bandas elásticas arbitrárias, que é causada pelo seu próprio peso ou por um peso suspenso ou por qualquer outra força de flexão. O famoso Sr. Leibniz dirigiu minha atenção para este problema em uma carta. Se por causa do Região de Confiança Da hipótese ou da variedade de casos, parece ser mais difícil de resolver do que o problema anterior. Aqui, um cálculo diligente em vez de um tedioso é necessário. Mas felizmente, através da solução do caso mais simples (pelo menos sob o pressuposto mencionado de que as extensões são proporcionais às forças de alongamento), os portões para resolver este problema foram abertos para mim. Como o homem muito famoso [Leibniz] Já fez, também vou dar a outros algum tempo para tentar analisar este assunto. Portanto, eu vou reter a solução por enquanto e vou escondê-la em um Logogriph. No festival da colheita, publicarei a solução e as provas.
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*

O desafio, publicado no *Acta Eruditorum*, efetivamente sinalizou a mudança da estática dos corpos rígidos para a teoria matemática das curvas elásticas. Embora Newton tivesse explorado formas relacionadas em particular na década de 1670 (§8.2.2), foi a formulação pública de Bernoulli que estabeleceu as bases para o desenvolvimento sistemático do campo.

Bernoulli usou uma estratégia sofisticada: ele anunciou que possuía uma solução que esconderia em um *Logogriph* (§6.11.1.1, Mesa 6.6):

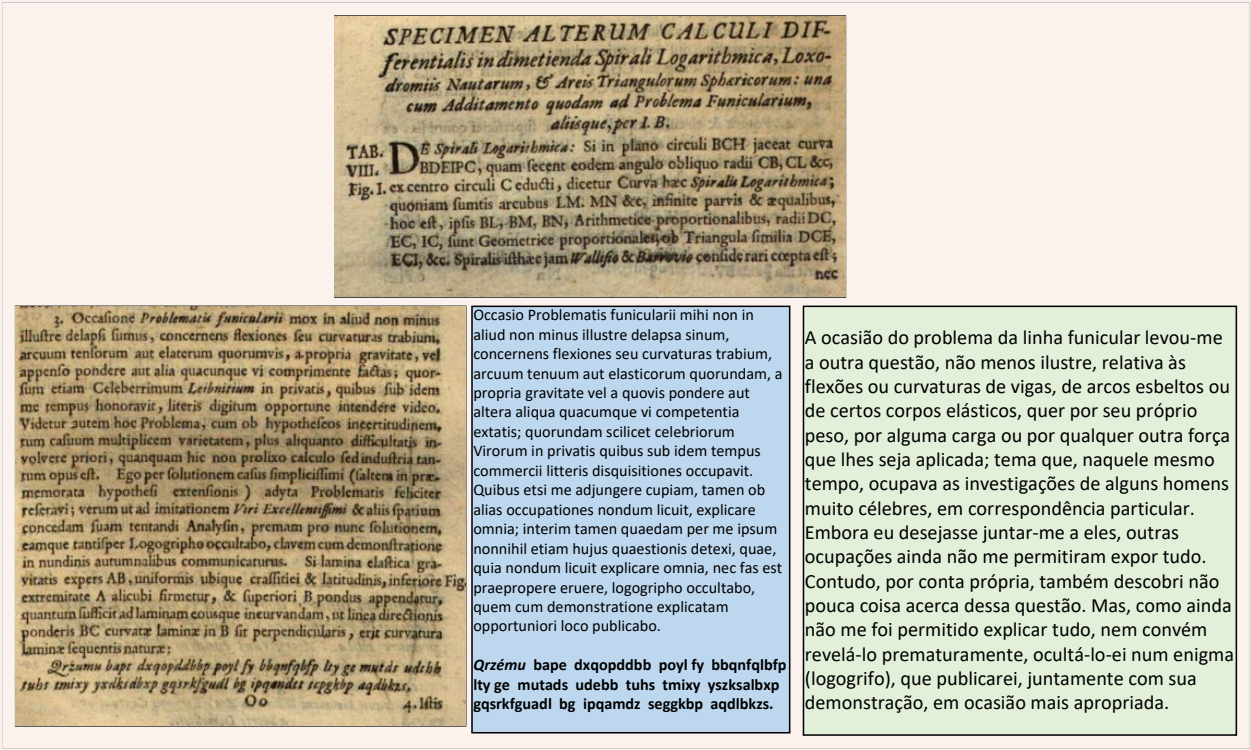
> Qrzumu bapt dxqopddbbp poylfy bbqnfqbfp ltyge murds udıbb tubstmixyxdksdbxpgqsrkfgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs
>
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*; Logogriph

Ele prometeu revelar a cifra e sua solução pela Festival da colheita de Basileia em outubro de 1690[16].. Esta abordagem estratégica serviu a vários propósitos: estabeleceu sua prioridade sobre a descoberta, concedeu

[16] A Basel *Herbstmesse* (A feira da colheita), estabelecida em 1471 pelo privilégio imperial, tradicionalmente começa no último sábado de outubro e dura duas semanas.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

tempo aos contemporâneos para tentar o problema de forma independente, e lhe permitiu tempo adicional para refinar seu tratamento matemático.



SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc *Spiralis Logarithmica*; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis istiusmodi jam *Wallisio* & *Barrovio* conside rari cœpta est; nec

3. Occasione *Problematis funicularii* mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tensorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum *Leibnitium* in privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis felsciter reseravi; verum ut ad imitationem *Viri Excellentissimi* & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gravitatis expers AB, uniformis ubique crassitiei & latitudinis, inferiore Fig. extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B sit perpendicularis, erit curvatura laminæ sequentis naturæ:

Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutds udebb tuhs tmixy yszksdbxp gqsrkfguadl bg ipqamdzt seggkbp aqdlbkzs.

Oo 4. Istis

Occasio Problematis funicularii mihi non in aliud non minus illustre delapsa sinum, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuum aut elasticorum quorundam, a propria gravitate vel a quovis pondere aut altera aliqua quacumque vi competentia extatis; quorundam scilicet celebriorum Virorum in privatis quibus sub idem tempus commercii litteris disquisitiones occupavit. Quibus etsi me adjungere cupiam, tamen ob alias occupationes nondum licuit, explicare omnia; interim tamen quaedam per me ipsum nonnihil etiam hujus quaestionis detexi, quae, quia nondum licuit explicare omnia, nec fas est praepropere eruere, logogripho occultabo, quem cum demonstratione explicatam opportuniori loco publicabo.

Qrzému bape dxqopddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs.

A ocasião do problema da linha funicular levou-me a outra questão, não menos ilustre, relativa às flexões ou curvaturas de vigas, de arcos esbeltos ou de certos corpos elásticos, quer por seu próprio peso, por alguma carga ou por qualquer outra força que lhes seja aplicada; tema que, naquele mesmo tempo, ocupava as investigações de alguns homens muito célebres, em correspondência particular. Embora eu desejasse juntar-me a eles, outras ocupações ainda não me permitiram expor tudo. Contudo, por conta própria, também descobri não pouca coisa acerca dessa questão. Mas, como ainda não me foi permitido explicar tudo, nem convém revelá-lo prematuramente, ocultá-lo-ei num enigma (logogrifo), que publicarei, juntamente com sua demonstração, em ocasião mais apropriada.

Figura 9.8: O desafio de Bernoulli, (Bernoulli, Jakob, 1690a)

Quando o prazo de outubro de 1690 chegou, nenhuma solução havia sido apresentada por outros matemáticos. Em vez de revelar imediatamente sua resposta como prometido, Bernoulli escolheu continuar desenvolvendo sua solução em particular. Em 1692, ele tinha completado sua análise do caso retangular em seu diário científico privado, *Meditação CLXX*, intitulado *Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura* (Quadratura de uma curva, pela evolução da qual é traçada a curva de uma lâmina dobrada) (Bernoulli, Jakob, 1692).

Mesa 9.4 fornece uma visão geral das respostas do desafio

Tabela 9.4: Linha do tempo do Desafio Elastica

Data	Evento
Junho de 1690	Jakob Bernoulli coloca problema elástico em *Espécime alterum* (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690	Bernoulli codifica solução em anagrama (logogrifo) (Bernoulli, Jakob, 1690a).
Outubro de 1690	(Festival da colheita de Basel) passa; Nenhuma solução submetida.
1692	Jakob completa a solução em particular *Meditação* CLXX (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
Junho de 1694	Jakob publica *Curvatura laminae elásticae* com solução decodificada (Bernoulli, 1694).
1694	Huygens publica crítica identificando múltiplas configurações elásticas (Bernoulli, 1694).
1694	Jakob responde a Huygens, defendendo generalidade de seu método (Bernoulli, 1694).
1696	Johann Bernoulli representa desafio de brachistochrone (Bernoulli, Johann, 1696).

CÓPIA PARA REVISÃO

Data	Evento
Maio de 1697	Johann publica solução de braquistocrona usando analogia óptica (Bernoulli, Johann, 1697a).
1724	Desafio anônimo (LBC) estende o problema para linhas moderadamente flexíveis (Anonymous, 1724).
1728	Daniel Bernoulli & Euler publica a teoria da linha flexível-elástica unificada (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1732	Euler publica *Solutio problematis* com uma estrutura geométrica geral unificando curvas elásticas e flexíveis (Euler, 1732).
Outubro de 1742	Daniel escreve para Euler propondo o princípio da minimização de energia (**DanielBernoulli1742toEuler**).
1744	Euler publica *Methodus inveniendi* com solução variacional sistemática (Euler, 1744b).
1744	O trabalho de elástico completo de Jakob compilado em póstuma *Ópera Omnia* (Bernoulli, Johann, 1713).

9.3.2 Soluções

O próprio Bernoulli forneceu a solução à qual ele se referiu em seu desafio através de um anagrama (duas versões das quais existiam). Huygens reagiu imediatamente, tendo problemas com a solução de Bernoulli. Euler forneceu uma solução geométrica em 1732, seguida pelo sobrinho de Jakob, Daniel, que em 1742 plantou a semente para o cálculo variacional que Euler posteriormente formalizou em 1744, fig. 1. 9.10c.

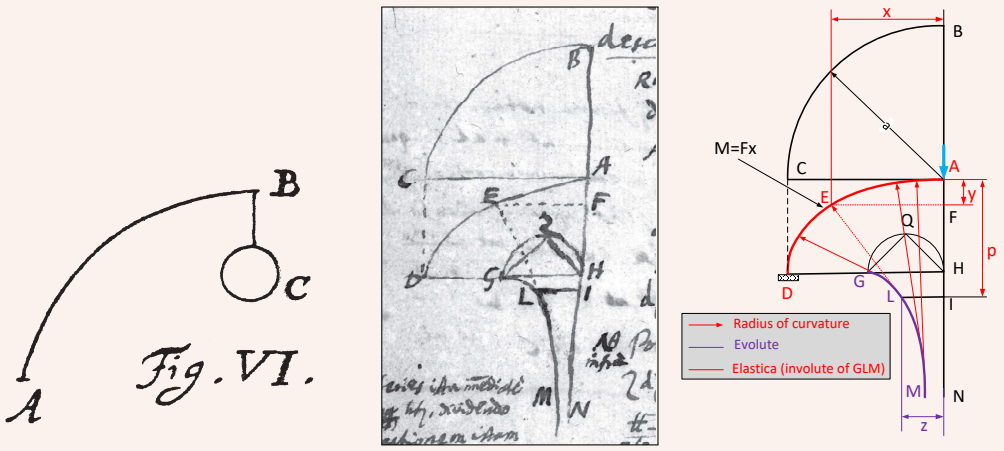
9.3.2.1 Solução de Jakob Bernoulli (1694)

Contexto Histórico A solução de Bernoulli, (Bernoulli, Jakob, 1694), Fig. 9.11, o trabalho se baseia em seu anagrama de 1691 em *Acta Eruditorum*, que estabeleceu prioridade ao esconder seu método. O anagrama decodificado afirma que a relação geométrica precisa mais tarde revelada, não a lei inversa do momento/curvatura erroneamente citada em alguma literatura (§6.11.1.1).

> Depois de trienal siltium promissi tandem fidem libero, sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo foenore compensem, dum Elaterum curvaturam non in una sola, (ut initio fueram policitus,) sed generaliter in quacunque Extensionum hypothesi construcham exhibeo... Extigit enim jam inde a Galilei quoque temporibus celebrare, qui Curvam hanc, per inde ut Funiculariam, Parabolam esse suspicatus erat.
>
> Após três anos de silêncio, finalmente cumpri minha promessa, mas compensando o atraso com considerável interesse, exibindo a curvatura dos corpos elásticos não apenas em um caso (como inicialmente prometido), mas geralmente sob qualquer hipótese de Extensões...
> Pois este problema já se havia tornado famoso desde o tempo de Galileu, que suspeitava que esta curva, como a catenária, era uma parábola.
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

Bernoulli posiciona seu trabalho contra tentativas fracassadas por Galileu e outros, enfatizando sua conquista de resolver o problema sob qualquer hipótese de extensões - um quadro geral em vez de casos especiais. Os Leitores são referidos pela primeira vez §8.2.5 Pela derivação da curvatura por Bernoulli.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Desenho de Jakob Bernoulli (Bernoulli, Jakob, 1692)

(b) Reconstrução moderna (baseada em (Levien, 2008 PDF))

Figura 9.9: O elástico de Jakob Bernoulli



(a) Jakob Bernoulli (1655-1705)

(b) Daniel Bernoulli (1700-1782)

(c) Leonhard Euler (1707-1783)

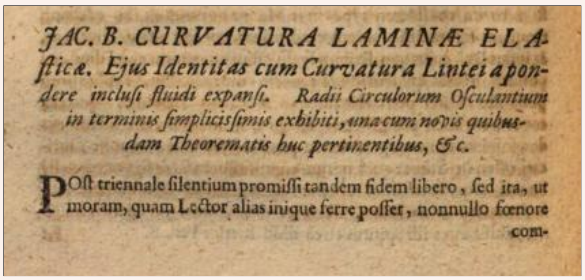
Figura 9.10: Os arquitetos da teoria elástica: Os luminários matemáticos de Basel (Wikipedia)

A Caracterização de Elastica

[Mantenha toda a tradução latina e inglesa exatamente como você tem]

Bernoulli, Jakob, 1694 PDF *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 272

CÓPIA PARA REVISÃO



JAC. B. CURVATURA LAMINAE ELASTICAE. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

Jakob Bernoulli. Curvatura da lâmina elástica. Sua identidade com a curvatura de um tecido expandido pelo peso do fluido contido. Raios dos círculos osculadores expressos nos termos mais simples, juntamente com certos novos teoremas pertinentes a este assunto etc.

Figura 9.11: A Curvatura Laminae Elasticae de Jakob Bernoulli... (Bernoulli, Jakob, 1694)

CORRETO

Isto representa a solução de Bernoulli para o elástico rectangular**—um caso específico onde um elástico viga fixado em uma extremidade é dobrado por um peso até que a tangente na extremidade carregada se torne perpendicular à direção da força. Embora não seja uma solução completa para todos os problemas elásticos, este trabalho precede o desenvolvimento sistemático de cálculos de variações e fornece notável visão sobre abordagens matemáticas do século XVII para problemas transcendentais.

A abordagem de Bernoulli centra-se em uma sofisticada construção geométrica que transforma o problema da elasticidade física em um problema de geração de curvas. Seu método pode ser resumido da seguinte forma:

1. Comece com uma determinada curva AFC Representando a lei da "tensão-– a relação entre forças aplicadas AE e as tensões resultantes EF
2. Construir um círculo quadrante GKL com área igual à área sob curva AFC
3. Para cada ponto E na base AB, encontrar a tensão correspondente EF E construir a curva auxiliar AN através de um procedimento geométrico específico
4. A curva elástica AQR é então gerado através da intersecção de linhas desta construção

A visão crítica é que Bernoulli reconheceu o elástico como fundamentalmente relacionado com o que chamamos de integrais elípticas, mas resolveu-o através da retificação geométrica em vez de integração analítica.

Bernoulli afirma sua relação geométrica chave como:

> Eixo portio applicatam inter & Tangentem eft ad ipfam tangentem, ficut quatratum aplicatæ ad confitans quoddam fpatium.
>
> A parte do eixo entre a coordenada e tangente é para a tangente em si, como o quadrado da ordenada é para alguma área constante.
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 272

No entanto, esta afirmação deve ser entendida dentro do quadro geométrico específico de Bernoulli. O

CÓPIA PARA REVISÃO

eixo "portio"refere-se a um segmento particular em sua construção, não simplesmente ao subtangente na terminologia moderna. Especificamente, se denotarmos:

- Q como um ponto na curva elástica
- P como o pé da ordenada de Q para o eixo AB
- p como o ponto onde a tangente em Q cruza o eixo

Então a propriedade de Bernoulli diz:

$$\frac{Pp}{Qp} = \frac{QP^2}{C}$$

Onde C é uma área constante relacionada à rigidez de flexão e carga aplicada.

Perspectiva Moderna De um ponto de vista moderno (desenvolvido muito mais tarde por Euler na década de 1740), o problema elástico busca uma curva $y(x)$ que minimiza a energia de flexão:

$$I = \int_0^L \frac{\kappa^2}{2EI}\, ds$$

sujeito a condições de contorno, onde $\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ é a curvatura.

O A equação Euler-Lagrange para este problema variacional produz:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{(1+(y')^2)^{1/2}}\right) = \frac{P}{EI}$$

Onde P é a carga aplicada. Isso leva ao equação diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\sin\theta$$

Onde θ é o ângulo que a tangente faz com a horizontal. Isto é equivalente à equação de um pêndulo e produz integrais elípticas em sua solução – as mesmas integrais que Bernoulli encontrou através de seu método geométrico.

Reconhecimento da Natureza Transcendental Bernoulli reconheceu explicitamente que sua solução envolvia curvas transcendentais. Ele observa que a curva elástica não pode ser construída pela quadratura de qualquer seção cônica e requer o que agora entendemos como integrais elípticas da forma:

$$s = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2\phi}}$$

Seu método geométrico efetivamente realiza esta integração através da rectificação de curvas – uma realização notável dada as ferramentas matemáticas disponíveis em 1694.

Significado Histórico Este trabalho representa várias primeiras em matemática:

- Primeira solução para um caso específico de um problema de mecânica transcendental
- Tratamento sistemático precoce do que se tornaria teoria da função elíptica
- Pioneer trabalha no que mais tarde seria formalizado como o cálculo de variações
- Ponte entre métodos geométricos clássicos e técnicas analíticas emergentes

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A solução geométrica de Bernoulli para a elástica retangular permaneceu importante até o tratamento analítico abrangente de Euler usando o cálculo das variações em 1744, que resolveu o problema geral da elásticoa para arbitrário condições de contorno. Os insights geométricos, no entanto, continuam a fornecer intuição valiosa para entender a estrutura matemática profunda subjacente aos problemas de deformação elástica.

A elegância da solução puramente geométrica de Bernoulli para este problema inerentemente transcendental é um dos melhores exemplos da engenhosidade matemática do século XVII, demonstrando como o raciocínio geométrico poderia desbloquear problemas que não se renderiam a Ataque analítico direto por décadas.

Conexão com o problema do pano

[Mantenha toda a tradução latina e inglesa exatamente como você tem]

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 275-276

A dualidade física Além do problema da elasticidade primária, Bernoulli identificou uma notável dualidade física que demonstra a profunda estrutura matemática subjacente à sua solução geométrica. Ele observou que a mesma curva elástica também descreve a forma de equilíbrio de uma membrana flexível ou saco de pano cheio de líquido e fixado em dois pontos.

Esta conexão representa mais do que curiosidade matemática – revela que dois sistemas fisicamente distintos (um rígido viga dobrando sob carga, e uma membrana flexível contendo fluido) podem ser governados por relações geométricas idênticas. Este foi um primeiro vislumbre do que se tornaria um princípio fundamental na física matemática: diferentes mecanismos físicos podem produzir descrições matemáticas idênticas quando as restrições geométricas subjacentes são equivalentes.

A Equivalência Física A visão de Bernoulli pode ser entendida através das condições de equilíbrio que regem cada sistema:

Elastica: Um rígido viga sofre deformação de flexão sob cargas aplicadas, com curvatura κ proporcional a momento fletor M através do relacionamento $\kappa = M/(EI)$, onde EI representa rigidez da flexão.

Membrana cheia de fluidos: Um pano flexível e inextensível contém líquido sob pressão hidrostática, com curvatura local determinada pelo equilíbrio entre a tensão da membrana T e diferença de pressão Δp através da interface curva.

A equivalência matemática surge porque ambos os sistemas satisfazem a mesma relação fundamental entre curvatura e uma distribuição de força (momento fletor na elasticidade, pressão hidrostática na membrana). A construção geométrica de Bernoulli captura esta estrutura comum.

Análise de Força e Relacionamentos-chave A análise detalhada da força de Bernoulli revela várias relações quantitativas que distinguem as duas realizações físicas apesar de sua equivalência geométrica:

Princípio de tensão uniforme: A membrana mantém **tensão constante** T Ao longo de seu comprimento, igual ao peso total do líquido fechado. Isto contrasta acentuadamente com o elástico viga, onde a flexão tensão varia ao longo do comprimento, sendo mais fraco perto da extremidade livre (pontos mais próximos de R em sua notação).

Direção de força resultante: Quando a membrana é subitamente liberada de suas restrições, a força hidrostática resultante atua em ângulo θ Para a horizontal, onde $\tan\theta = EF/Ei$ Na notação geométrica de Bernoulli. Para a caixa retangular específica, todo o tecido é expulso em um ângulo reto.

CÓPIA PARA REVISÃO

magnitude da força: A força hidrostática total impulsionando a membrana relaciona-se com o peso absoluto do fluido contido na proporção 2 : 1.. Isso vem da distribuição de pressão hidrostática integrada sobre a superfície curvada da membrana.

Localização do eixo do equilíbrio: O eixo do equilíbrio passa por um ponto determinado pelo corte Ao De.. AB De tal forma que.. $Ao : AB = 1 : \sqrt{2}$.. Notavelmente, este eixo faz **Não** passar pela interseção de linhas tangentes nos terminais – uma sutileza geométrica que Bernoulli explicitamente observa.

Otimidade Geométrica Bernoulli observa uma impressionante propriedade extremista: dentre todas as curvas de perímetro igual (curvas isoperimétricas) que abrangem os mesmos objetivos, a curva elástica maximiza a distância do centroide da linha de base. Isto representa um exemplo inicial de otimização isoperimétrica – problemas que seriam sistematicamente abordados através do cálculo das variações décadas depois.

Ele faz uma analogia explícita com a catenária, observando a "notável afinidade"(*Afinitatem miram*) entre dois pares de problemas fisicamente relacionados:

- Catenária (corrente pendurada) e Velaria (curva de vela)
- Elastica (dobra viga) e a curva de membrana cheia de fluidos

Em cada par, um problema envolve peso próprio (catenária, vela) enquanto o outro envolve carga externa (elástica, pressão hidrostática), mas as estruturas matemáticas exibem semelhanças profundas.

Significado Histórico Esta dualidade demonstra a profunda intuição física de Bernoulli. Ele reconheceu que sua construção geométrica tinha capturado algo fundamental sobre estados de equilíbrio em mecânica do contínuo, transcendendo o contexto específico do elástico vigas. Isso foi conseguido inteiramente através do raciocínio geométrico, sem as ferramentas analíticas que posteriormente tornariam tais conexões mais sistemáticas.

A dualidade pano-elástica antecipa vários desenvolvimentos importantes em mecânica e física matemática:

- **Teoria da membrana:** A estrutura matemática para analisar estruturas finas e flexíveis sob cargas de pressão, desenvolvida sistematicamente no século 19
- **Princípios variados:** O reconhecimento de que diferentes sistemas físicos podem compartilhar estruturas matemáticas comuns quando minimizam ou maximizam o mesmo funcional (energia, ação, etc.)
- **Analogias físicas:** O uso de equivalências matemáticas para transferir métodos de solução entre diferentes domínios físicos, uma técnica que se tornou central para a física matemática do século 19

O reconhecimento de Bernoulli desta dualidade, alcançado através do raciocínio puramente geométrico em 1694, fornece uma visão sobre por que sua solução elástica permaneceu o tratamento definitivo do problema por mais de meio século. Seu método geométrico tinha implicitamente capturado a estrutura variacional que Euler mais tarde explicitaria através do cálculo de variações em 1744. A dualidade física serviu como evidência empírica de que sua abordagem matemática havia identificado algo genuinamente fundamental sobre a mecânica dos corpos deformáveis.

9.3.2.1.1 Reação de Huygen (1694)

Christiaan Huygens tinha expressado ceticismo mesmo antes da solução de Bernoulli aparecer. Em uma carta para Leibniz datada de 16 Novembro 1691, ele escreveu:

> Mal posso esperar para ver o que o Sr. Bernoulli, o mais velho, produzirá sobre a curvatura da primavera. Eu não ousei esperar que alguém saísse com algo claro ou elegante aqui, e portanto eu nunca tentei.

CÓPIA PARA REVISÃO

Huygens, 1691 Lettre à G.W. Leibniz

Quando Bernoulli *Curvatura Laminae Elasticae* Apareceu em junho de 1694, Huygens rapidamente publicou uma crítica formal no mesmo diário (Fraser, 1991). Em correspondência privada com Leibniz, Huygens foi ainda mais apontado:

> Mr. Os três anos de trabalho de Bernoulli são consideráveis, desde que tudo o que ele alega seja verdade; Ele também se gaba muito disso. Quanto ao princípio da primavera, eu acho que ele a usou bem, e que é verdade que os raios que medem a curvatura estão na relação inversa das forças que dobram a mola, embora, em minha opinião, não seja apenas a superfície exterior que estende-se, mas também o interior encurta simultaneamente. Se este princípio não fosse o único e verdadeiro, mas sim a linha AFC eram uma curva dependendo de infinitas experiências, eu deveria achar todas as suas pesquisas muito vagas e pouco dignas de tempo gasto. E mesmo agora tudo o que ele encontrou me parece inútil, mas apenas passatempos tão bonitos e sutis quanto se encontra quando não há nada sobre o qual empregar matemática mais frutíferamente.
>
> É uma suposição estranha para tomar as quadraturas de cada curva como dado, e se a construção de um problema termina com isso (além da quadratura do círculo e da hipérbole), eu deveria pensar que nada realizado, já que mesmo mecanicamente alguém faz Não sei como fazer nada. Senhor. Bernoulli determinou a curvatura do arco A Só no caso das tangentes nas extremidades E, F são paralelos, que eu considero unidos pela corda EF.. Restaria dar a forma do verdadeiro arco B; De novo, de C, cujas extremidades apontam uma para a outra; de D, onde eles se juntam; e de G, onde eles passam além e são mantidos por uma vara HI.
>
> Huygens, 1694 Lettre à G.W. Leibniz

Na verdade, Huygens reagiu com uma característica de rigidez, tendo problemas com a integralidade da solução de Bernoulli. Embora reconhecendo a sofisticação matemática do trabalho de Bernoulli, Huygens argumentou que resolveu apenas um caso particular - o que ele chamou de "rectangular elástico" (curva A em figura 9.12)-onde a faixa elástica forma aproximadamente um ângulo reto. Com precisão metódica, Huygens demonstrou que múltiplas configurações de curva elástica eram possíveis dependendo das forças aplicadas e condições de contorno, como mostrado em seu diagrama de 1694 retratando várias formas elásticas (curvas A a G). Ele argumentou que o método geométrico de Bernoulli estava incompleto porque não conseguiu explicar os casos em que a tira poderia formar laços (curvas C e D), sofrer deformações mais complexas (curva G), ou exibir diferentes orientações de endpoint. Esta crítica frívola provou-se presciente: A solução geométrica de Euler 1732 abordou algumas dessas limitações, seguidas pelo sobrinho de Jakob, Daniel, que em 1742 plantou a semente para o cálculo variacional que Euler posteriormente formalizou em 1744, finalmente fornecendo a classificação completa de todos possíveis configurações elásticas que os padrões rigorosos de Huygens exigiram.

Bernoulli reconheceu essas críticas graciosamente. Em uma nota de acompanhamento publicada mais tarde em 1694 (Bernoulli, 1694), explicou que seu método geométrico não se limitava ao caso "rectangular", já que várias formas elásticas poderiam ser geradas escolhendo diferentes constantes de integração. Ele sustentou que sua solução era geral e completa, enquanto honrava gentilmente Huygens e Leibniz por estimularem mais esclarecimentos.

> Desde o que publiquei nos últimos anos... Os ilustres geometros, Sr. Huygens e o Sr. Leibniz se dignaram a submeter-se a um exame especial, onde algumas partes que aprovaram, outras, mais ocultas em declarações, aumentaram por conjecturas, enquanto aqui levantaram escrúpulos e lá expressaram seu desentendimento aberto, Decidiram adicionar alguns pensamentos posteriores aos

CÓPIA PARA REVISÃO

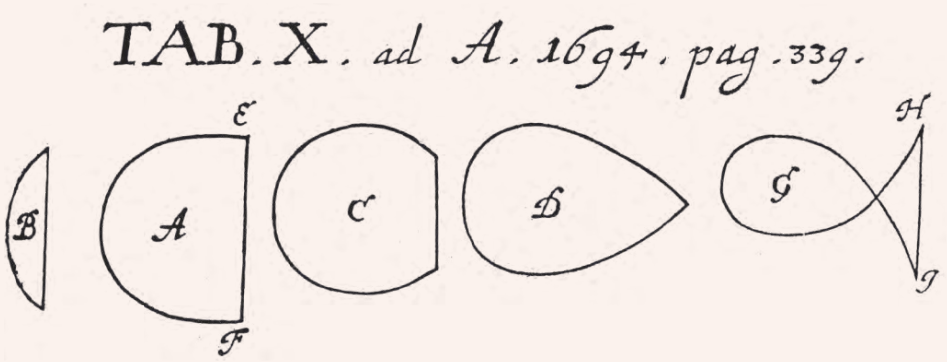


Figura 9.12: A objeção de Huygens 1694 à solução de Bernoulli.

> anteriores, e explicar com ordem e franqueza os vários assuntos como eles parecem para mim, de modo a satisfazer os desejos daqueles homens mais famosos e também trazer as faíscas mais puras da verdade do oculto Recessos da natureza cada vez mais na luz do dia...
>
> Que os raios da curvatura são inversamente como as forças de alongamento (mais verdadeiramente, como as elongações), que tanto aqueles homens muito famosos me consideram ter usado como um começo, é aprendido com a equação descoberta pela primeira vez e é uma conclusão ao invés de Começando...
>
> Assim, se o Sr. Huygens sentiu algumas dúvidas sobre isso, pensando que não só a superfície exterior é estendida, mas também o interior contraído, ele deveria ter feito esta objeção ao Sr. Leibniz não para mim, que só adotou isso dez anos depois do autor do princípio. Mas eu admito que quando pensei sobre este assunto a mesma objeção veio à mente, uma vez que qualquer coisa suscetível de extensão deve ser susceptível também de compressão.
>
> Bernoulli, 1694 "*Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae*"

9.3.2.1.2 Interlúdios

9.3.2.1.2.1 Leibniz's *Vis Viva* E a Evolução dos Conceitos de Energia O desenvolvimento do cálculo variacional não pode ser compreendido sem compreender a evolução conceitual do pensamento energético nos séculos XVII e XVIII. Central para esta evolução foi a introdução de Gottfried Wilhelm Leibniz *Vis viva* (literalmente "força viva'), um conceito que iria fundamentalmente remodelar a filosofia mecânica e fornecer a base conceitual para abordagens posteriores baseadas em energia para problemas de otimização.

Esta seção estabelece as bases para os desenvolvimentos subsequentes por Daniel Bernoulli (§9.3.2.1.2.4) e Euler (§9.3.2.2- Discutimos lá embaixo.

1686: Leibniz's *Vis Viva* (Desafio à Mecânica cartesiana) Em 1686, Leibniz publicou Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii'"(Uma breve demonstração de um notável erro de Descartes) em *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1686a)[17], fundamentalmente desafiando a mecânica cartesiana.

René Descartes tinha formulado seu princípio de conservação em *Principia Philosophiae* (Descartes, 1644),

[17]Título completo: *Brevis demonstratio erro é memorizabilis CArtesii et aliorum circa legem naturae, secundum quam volunt a DEo eandem semper quantificatem motus conservari, qua et in re mechana abutuntur*, ou breve demonstração do notável erro de Descartes e outros sobre a lei da natureza segundo a qual eles desejam

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

propondo que a quantidade de movimento no universo - medido como a soma escalar $\sum mv$...permanecia constante através da preservação divina. Ao contrário da conservação do momento moderno, a formulação de Descartes ignorou propriedades direcionais e se baseou em argumentos teológicos que Deus, sendo perfeito e imutável, preservaria a mesma quantidade total de movimento que Ele originalmente havia transmitido ao universo.

Leibniz alvou tanto a inadequação matemática das regras de colisão de Descartes e suas fundações filosóficas através de experimentos cuidadosamente construídos. Ele considerou dois corpos iguais colidindo elásticamente - um se movendo, um em repouso. Enquanto as regras de Descartes previam que a quantidade total escalar mv Leibniz demonstrou que isso violava observações empíricas e levou a absurdos físicos. Mais fundamentalmente, ele mostrou que a lei de conservação de Descartes falhou em explicar a capacidade dos corpos para realizar o trabalho. Um corpo caindo de altura h - Adquira velocidade $v = \sqrt{2gh}$ e a capacidade de levantar outro corpo à mesma altura. Essa capacidade, que Leibniz chamou de *Vis viva*-era proporcional a mv^2, não mv.

Através de tais exemplos, Leibniz estabeleceu que enquanto Descartes tinha identificado um importante princípio de conservação, ele havia mal identificado a quantidade conservada. Em vez disso, Leibniz propôs que a verdadeira quantidade conservada era *Vis viva*, definido como $\sum mv^2$.. Ele argumentou que esta "força viva"representava a medida genuína da capacidade de um corpo produzir efeitos, sua capacidade de superar resistência, levantar pesos ou comprimir molas. Ao contrário da quantidade cartesiana mv, que poderia ser conservado mesmo quando os corpos individuais perderam completamente seu movimento, *Vis viva* capturou o poder ativo inerente aos corpos em movimento.

A terminologia de Leibniz refletiu seu programa filosófico mais amplo. Ele distinguiu entre *vis mortua* (força morta), representando pressão estática ou tensão, e *Vis viva* (força viva), representando o poder dinâmico do movimento. Esta distinção incorporava seu compromisso metafísico com a compreensão da natureza em termos de forças e atividades, ao invés de relações meramente geométricas entre partículas.

A controvérsia Vis Viva e sua resolução A proposta de Leibniz despertou o que ficou conhecido como a controvérsia "vis viva", um debate acalorado que dominou a filosofia natural européia por décadas. Os cartesianos defenderam a conservação do momento$\sum mv$), enquanto Leibnizians defendia a conservação vis viva ($\sum mv^2$). A controvérsia envolvia muitos pensadores líderes, incluindo a família Bernoulli, que geralmente apoiavam a posição Leibniziana.

A relação matemática entre a vida de Leibniz e a energia cinética moderna é simples: Leibniz's mv^2 Difere do nosso $\frac{1}{2}mv^2$ Só pelo fator constante de metade. Este fator se mostrou irrelevante para os argumentos de conservação, uma vez que multiplicar uma quantidade conservada por uma constante produz outra quantidade conservada. O que importava era a visão de Leibniz de que v^2, não v, capturou a relação essencial entre movimento e efeito mecânico.

A controvérsia não foi totalmente resolvida até o século XIX, quando ficou claro que tanto o momento quanto a energia representam princípios distintos de conservação. Momentum (mv) é conservado em todas as interações, enquanto a energia cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) é conservado apenas em colisões elásticas. Ambas as quantidades se mostraram essenciais para entender sistemas mecânicos, mas servem a diferentes propósitos em análise.

Da cinética ao potencial: A Extensão dos Conceitos de Força A estrutura conceitual estabelecida pelo vis viva de Leibniz provou-se extremamente fértil para os desenvolvimentos subsequentes. Se corpos em movimento possuíssem "força viva"proporcional a mv^2, filósofos naturais começaram a perguntar se corpos estacionários sob tensão poderiam possuir "força potencial"análoga ou capacidade armazenada para produzir movimento.

Esta extensão conceitual foi crucial para entender sistemas elásticos. Uma mola comprimida ou dobrada

que Deus sempre mantenha a mesma quantidade de movimento, o que eles também abusam em questões mecânicas.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

viga claramente possuía a capacidade de produzir movimento quando liberada, mas esta capacidade não podia ser descrita usando o vis viva original de Leibniz, que se aplicava apenas aos corpos já em movimento. A comunidade matemática gradualmente desenvolveu a noção de que a deformação elástica armazenava um tipo de potencial vis viva que poderia ser convertido de volta em cinética vis vivo após liberação.

Nos anos 1740, pensadores sofisticados como Daniel Bernoulli usavam termos como "vis viva potencialis"para descrever esta capacidade armazenada. Isto representava uma ponte conceitual entre o foco cinético original de Leibniz e o que agora reconhecemos como energia potencial. A forma matemática $\int \frac{ds}{R^2}$ que Daniel iria propor para A energia elástica representava a extensão natural do pensamento Leibniziano para problemas de deformação e restrição.

Vis Viva e Conceitos de Energia Moderna A relação entre os conceitos do século XVIII e a terminologia energética moderna pode ser resumida da seguinte forma:

- **Leibniz está vivo** (mv^2) = Energia cinética moderna ($\frac{1}{2}mv^2$), diferindo apenas por um fator constante
- **Vis viva potencialis** = Energia potencial moderna, representando capacidade armazenada para produzir movimento
- **Total vis viva** = Energia mecânica total moderna (cinética + potencial)
- **Vis mortua** = Forças estáticas e pressões, análogas aos conceitos de força na estática moderna

A evolução conceitual de vis viva para o pensamento energético moderno exigiu várias percepções cruciais que emergiram gradualmente ao longo do século 18. Primeiro, o reconhecimento de que vis viva poderia ser armazenado em sistemas elásticos deformados e configurações gravitacionais. Segundo, o entendimento de que o total vis viva (cinético + potencial) permaneceu constante em muitos sistemas mecânicos. Terceiro, as técnicas matemáticas para calcular vis viva em sistemas complexos envolvendo restrições e forças variáveis.

Implicações para o Cálculo Variacional A estrutura vis viva provou ser essencial para o desenvolvimento de cálculo variacional de várias maneiras. Primeiro, proveu uma quantidade fisicamente significativa que poderia ser otimizada — sistemas naturalmente evoluídos para minimizar o potencial vis viva ou conservar total vis vivo. Em segundo lugar, ofereceu uma perspectiva unificadora que poderia lidar com diversos problemas mecânicos através de considerações de energia em vez de análise de força. Terceiro, estabeleceu o precedente matemático para trabalhar com formas quadráticas (v^2, κ^2) que se revelaria central para funções variáveis.

Mais tarde, quando Daniel Bernoulli formulará seu princípio de energia elástica usando "vis viva potencialis" (§9.3.2.1.2.4Ele estará estendendo uma estrutura conceitual bem estabelecida para novos domínios. Sua percepção de que o equilíbrio elástico correspondia ao potencial mínimo vis viva representava uma aplicação natural do pensamento Leibniziano para problemas de otimização. Esta fundação conceitual seria essencial para a posterior sistematização matemática de Euler dos métodos variacionais (§9.3.2.2).

A importância histórica de vis viva se estende além de seu papel como precursora dos conceitos modernos de energia. Representava uma mudança fundamental do pensamento geométrico para o dinâmico na mecânica, de ver a natureza como um conjunto de partículas movendo-se de acordo com as leis geométricas para entendê-la como uma rede de forças e transformações energéticas. Esta mudança de perspectiva seria essencial para a revolução matemática que permitiu cálculo variacional sistemático.

9.3.2.1.2.2 O Desafio da Brachistochrone (1696) A comunidade matemática do final do século XVII foi caracterizada por intensa competição intelectual, com os principais matemáticos regularmente colocando problemas desafiadores para testar os métodos uns dos outros e estabelecer suas reputações. Entre os competidores mais proeminentes estavam os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann (§6.6.9), cuja relação profissional combinava colaboração com rivalidade enquanto eles empurravam os limites do cálculo diferencial recém-desenvolvido.

Ambos os irmãos fizeram contribuições significativas para a matemática: Jakob através de seu trabalho

CÓPIA PARA REVISÃO

em séries infinitas e teoria da probabilidade, e Johann através do seu desenvolvimento de técnicas em cálculo diferencial e mecânica. Sua relação era complexa, marcada pelo respeito mútuo pelas habilidades um do outro ao lado da competição profissional para reconhecimento como principais matemáticos de sua geração. Esta dinâmica competitiva seria crucial para impulsionar a inovação matemática durante este período fundamental, particularmente como matemáticos europeus continentais procuraram demonstrar a superioridade de seus métodos de cálculo durante o emergente Leibniz-Newton Briga de prioridade.

Johann começa seu tratado no primeiro diário matemático da era, *Acta Eruditorum*, com uma proclamação ousada sobre o poder transformador do cálculo diferencial (Bernoulli, Johann, 1696):

> Quantum Geometriae increaseum acceserit, ex quo variae infinitorum Methodi, inter quas Diferencialis Cálculo nemine invidente primas tenebit, inclaruerunt, mille inventorum exemplifica comprobant, quae, si verum dicere fas est, nostro hoc aevo, ut superiora Taceam, etiamnum pro desperatis habebantur..."
>
> Quanta geometria avançou desde que vários métodos de infinitos se tornaram claros, entre os quais o Cálculo Diferencial, sem ninguém a repreender, será o primeiro lugar - mil exemplos de descobertas provam. Estas descobertas, se é permitido falar a verdade, ainda eram consideradas sem esperança em nossa idade (para não dizer nada de tempos anteriores)..."
>
> Bernoulli, Johann, 1696 *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"*

Escrevendo em latim, a linguagem científica franca da época, Johann aborda sistematicamente vários tópicos matemáticos que demonstram o poder desses novos métodos analíticos:

1. Crítica das Limitações da Geometria cartesiana
2. Propriedades do Círculo e Generalizações
3. Propriedades da hipérbole
4. Problemas Geométricos de Construção
5. Comentário sobre Leibniz e Tschirnhaus
6. Problemas na área de superfície

Depois de estabelecer metodicamente a superioridade do cálculo diferencial sobre as abordagens geométricas tradicionais, Bernoulli conclui seu tratado com o que se tornaria sua contribuição mais famosa e influente. O O problema da braquistocrona aparece quase como um desafio final, mas que iria fundamentalmente remodelar a paisagem matemática, Fig. 9.13:

> Problema novum ad cujus solutionem Matematici invitantur.
>
> Datis em plano verticali duobus punctis A & B (video Fig. 5) atribuir a Mobili M, viam AMB, por quam gravitate sua deficendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.
>
> Ut harum rerum amatores instigentur & Propensiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consistare in nuda especulatione, ut quidem videtur, ac si nulum haberet usum; Habet enim maximum etiam em Aliis scientiis quam em Mecanis, quod nemo facile crediderit. Interino (ut forte quorundam praecipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB sit brevissima inter terminos A & B, non tamen illa brevissimo tempore percurritur; Sed est curva AMB Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo alius eam nominaverit.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Um novo problema para cuja solução os matemáticos são convidados.
> Dado dois pontos A e B em um plano vertical (ver Fig. 5), para atribuir a um celular [partícula] M o caminho AMB ao longo do qual, descendo por sua própria gravidade e começando a se mover do ponto A, pode chegar ao outro ponto B no menor tempo.
> Para que os amantes destas coisas possam ser incitados e levados com espírito mais favorável para tentar este problema, deixá-los saber que não consiste em mera especulação, como parece, como se não tivesse uso; porque tem o maior [Aplicação] Mesmo em outras ciências além da mecânica, que ninguém acreditaria facilmente. Enquanto isso (para que eu possa talvez evitar o julgamento precipitado de alguns) embora a linha reta AB seja a mais curta entre os terminais A e B, no entanto, não é atravessada no menor tempo; Mas há uma curva AMB muito bem conhecida pelos geometros, que eu vou nomear, se até o final deste ano ninguém mais a nomeou
>
> Bernoulli, Johann, 1696 *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"*

O desafio e seu significado matemático O problema da brachistochrone[18], colocado por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio público para a comunidade matemática, pergunta: Dado dois pontos em alturas diferentes, qual é a curva que os conecta ao longo da qual uma partícula desliza sob gravidade (começando do repouso) irá viajar no tempo mínimo? Esta questão enganosamente simples esconde profunda complexidade matemática porque ela busca não um número ou função que optimize alguma quantidade, mas sim uma inteira *Curva*Um objeto geométrico definido por infinitamente muitos pontos.

O caráter revolucionário do problema está em sua exigência de otimizar o espaço de todas as curvas possíveis, não apenas sobre o espaço dos números reais ou parâmetros de dimensão finita. Isso representa um tipo fundamentalmente diferente de desafio matemático dos problemas de otimização algébrica que dominaram a matemática do século XVII. Onde a otimização tradicional buscava valores de variáveis que maximizam ou minimizam funções, o problema da braquistocrona exigia encontrar funções próprias que otimizassem integrais – o que agora reconhecemos como otimização funcional.

A simplicidade enganosa do problema mascarava profundos insights físicos. Embora a intuição possa sugerir que o caminho mais curto (uma linha reta) também seria o mais rápido, a visão de Johann, com base nas investigações anteriores de Galileu sobre corpos caindo, reconheceu que uma partícula poderia ganhar velocidade mais rapidamente por inicialmente Descendo mais íngreme, mesmo que isso signifique viajar uma distância maior. Este princípio mais tarde encontraria conexões profundas com O princípio de Fermat de menos tempo na óptica, estabelecendo princípios de otimização que se tornariam fundamentais para a física.

O problema atraiu soluções dos matemáticos mais distintos da época, incluindo Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hôpital, e Jakob Bernoulli Cada matemático abordou o desafio usando diferentes técnicas, demonstrando tanto a diversidade de métodos matemáticos disponíveis quanto a necessidade de abordagens mais sistemáticas para tais problemas de otimização. Newton o resolveu em uma única noite, depois de retornar de seus deveres na Casa da Moeda Real, submetendo sua solução anonimamente. Enquanto a anedota popular afirma que Bernoulli imediatamente reconheceu a autoria de Newton, declarando que ele poderia *identificar o leão pela sua garra*, Esta citação colorida parece ser um embelezamento histórico posterior, ao invés de fato documentado. A competição revelou que, embora os problemas individuais pudessem ser resolvidos através de métodos engenhosos, a comunidade matemática não tinha uma estrutura geral para lidar com otimização funcional.

Por sugestão de Leibniz, Bernoulli estrategicamente estendeu o desafio até a Páscoa de 1697 através de

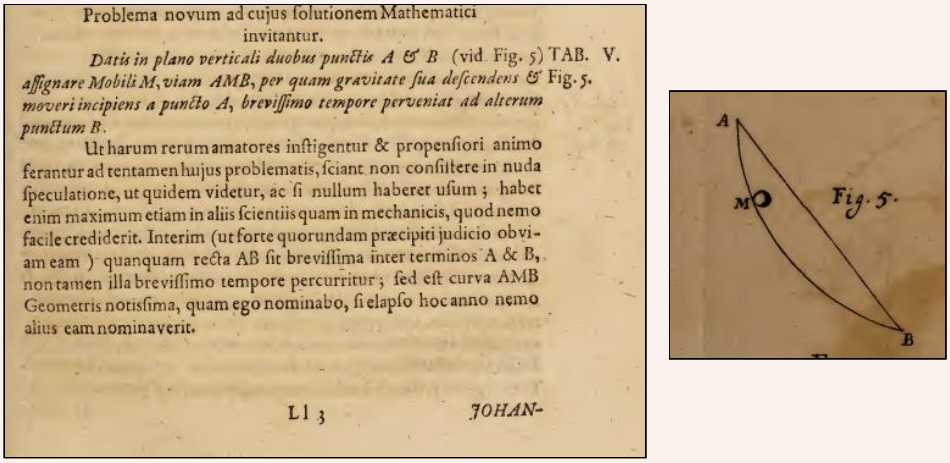
[18] O termo "brachistochrone" (do grego *Brachistos*, mais curto, e *cronos*, o tempo) foi cunhado pelo próprio Johann Bernoulli quando ele colocou este problema como um desafio para a comunidade matemática em 1696. O problema pede a curva ao longo da qual uma partícula desliza de um ponto para outro em tempo mínimo sob gravidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

uma folha impressa chamada "Programa", publicada em Groningen. Datado de 1 de janeiro de 1697 no Calendário Gregoriano, esta versão mais grandiosa começou com um desafio direto para a elite matemática (Bernoulli, Johann, 1697b):

> Eu, Johann Bernoulli, dirijo-me aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente para pessoas inteligentes do que um problema honesto e desafiador, cuja possível solução irá conferir fama e permanecer como um monumento duradouro.
>
> Bernoulli, Johann, 1697b Programma [extending the brachistochrone challenge]

O problema da braquistocrona marcou um momento de divisa em matemática, estabelecendo o que se tornaria conhecido como cálculo de variações. A solução, que a curva ideal é um cicloide, demonstrou o poder dos métodos analíticos europeus continentais em um momento crucial na disputa prioridade Leibniz-Newton. Mais profundamente, a resolução do problema estabeleceu princípios de otimização que mais tarde floresceriam na mecânica lagrangiana, com a braquistocrona servindo como um exemplo paradigmático de como a natureza parece seguir caminhos que otimizam certas quantidades. Este princípio, em última análise, contribuiria para algumas das mais fundamentais insights na física teórica, do princípio da menor ação à teoria moderna de campo.



Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V. *aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens &* Fig. 5. *moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Ut harum rerum amatores inſtigentur & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, ſciant non conſiſtere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum etiam in aliis ſcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notiſſima, quam ego nominabo, ſi elapſo hoc anno nemo alius eam nominaverit.

L l 3 JOHAN-

Figura 9.13: Desafio de brachistochrone de Johann Bernoulli (Bernoulli, Johann, 1696)

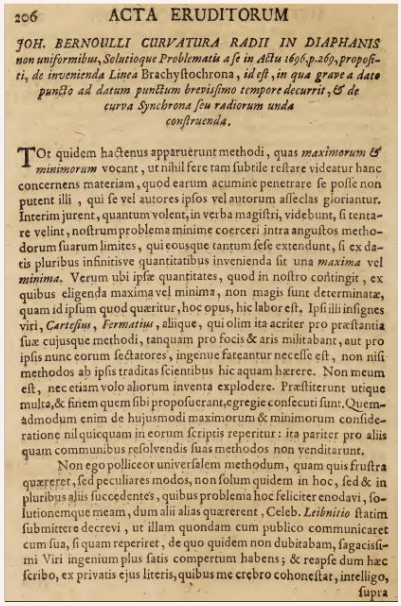
9.3.2.1.2.3 A solução de Johann Bernoulli (1697) O papel de Johann Bernoulli em 1697, *Curvatura raios em diaphanis non uniformeibus: Solutio problematis brachistochrona* [19] (Bernoulli, Johann, 1697a) emergiu deste ambiente competitivo, representando um momento divisor de águas na história da matemática. Publicado em *Acta Eruditorum* em maio de 1697, este trabalho forneceu uma solução engenhosa para o que seria reconhecido como o problema fundador do cálculo variacional. O artigo estabeleceu o precedente

[19] Título completo: *CURVATURA RADII EM DIAPHANIS non uniformeibus, Solutioque Problematis a se em Actis 1696, p.269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, em qua grave a dato puncto ad datum puncm brevissimo tempore decurrit, & Sincronia* ou Curvatura de Raios em Mídia Transparente Não-Uniforme, e Solução do Problema proposto por ele em Acta 1696, p.269 sobre encontrar a Linha Brachystochrona, isto é, em que um corpo pesado corre de um determinado ponto para um dado ponto no menor tempo, e sobre a construção da curva sincrônica ou onda de raios

CÓPIA PARA REVISÃO

matemático para problemas de otimização envolvendo funcionais em vez de funções – um salto conceitual que não seria totalmente sistematizado até Euler monumental 1744 tratado.

Mas vamos começar com a primeira página, Fig. 9.14 Esta abertura notável revela a consciência aguda de


206 ACTA ERUDITORUM

JOH. BERNOULLI CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actu 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda.

TOt quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *maximorum & minimorum* vocant, ut nihil fere tam subtile restare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare se posse non putent illi, qui se vel autores ipsos vel autorum assecias gloriantur. Interim jurent, quantum volent, in verba magistri, videbunt, si tentare velint, nostrum problema minime coerceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eousque tantum sese extendunt, si ex datis pluribus infinitisve quantitatibus invenienda sit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipsæ quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatæ, quam id ipsum quod quæritur, hoc opus, hic labor est. Ipsi illi insignes viri, *Cartesius*, *Fermatius*, aliique, qui olim ita acriter pro præstantia suæ cujusque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipsis nunc eorum sectatores, ingenue fateantur necesse est, non nisi methodos ab ipsis traditas scientibus hic aquam hærere. Non meum est, nec etiam volo aliorum inventa explodere. Præstiterunt utique multa, & finem quem sibi proposuerant, egregie consecuti sunt. Quemadmodum enim de hujusmodi maximorum & minimorum consideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur: ita pariter pro aliis quam communibus resolvendis suas methodos non venditarunt.

Non ego pollicear universalem methodum, quam quis frustra quæreret, sed peculiares modos, non solum quidem in hoc, sed & in pluribus aliis succedentes, quibus problema hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. *Leibnitio* statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicaret cum sua, si quam reperiret, de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens; & reapse dum hæc scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohonestat, intelligo, supra

JOH. BERNOULLI. CURVATURA DOS RAIOS EM MEIOS TRANSPARENTES NÃO UNIFORMES, e solução do problema por ele proposto em Acta 1696, p. 269, relativo à determinação da linha braquistócrona, isto é, aquela na qual um corpo pesado vai de um ponto dado a outro no menor tempo, e à construção da curva síncrona ou onda dos raios

"É certo que os métodos chamados de máximos e mínimos chegaram a tal ponto que parece não restar nada tão sutil nesta matéria que aqueles que se vangloriam de ser seus autores ou seguidores não julguem poder penetrar com sua perspicácia. Enquanto isso, que jurem quanto quiserem pelas palavras de seu mestre; verão, se quiserem tentar, que nosso problema de modo algum se encerra nos estreitos limites de seus métodos, os quais só chegam a encontrar um máximo ou mínimo entre diversas ou infinitas quantidades dadas. Mas quando as próprias quantidades — como ocorre em nosso caso — dentre as quais se deve escolher o máximo ou o mínimo, não estão mais determinadas do que aquilo mesmo que se procura, eis a obra, eis o trabalho. Aqueles homens tão ilustres, Descartes, Fermat e outros, que outrora combateram com tanta veemência pela excelência de seus respectivos métodos, como por seus lares e altares, ou seus seguidores que hoje ocupam seu lugar, devem confessar honestamente que quem conhece apenas os métodos por eles transmitidos fica aqui sem saída. Não me cabe, nem sequer desejo, desacreditar as invenções alheias. Eles certamente realizaram muito e atingiram com excelência o fim a que se haviam proposto. Pois, assim como em seus escritos nada se encontra sobre a consideração de máximos e mínimos dessa espécie, também não apresentaram seus métodos para resolver problemas que não fossem os ordinários.
Não prometo um método universal, que qualquer um procuraria em vão, mas modos particulares, eficazes não só neste caso como em vários outros, pelos quais resolvi felizmente este problema. E, enquanto outros buscavam outras soluções, decidi enviar imediatamente a minha ao célebre Leibniz, para que algum dia a comunicasse ao público juntamente com a sua, caso encontrasse uma — do que eu não duvidava, tendo já reconhecido suficientemente o engenho daquele homem tão perspicaz. E de fato, enquanto escrevo estas coisas, compreendo por suas cartas particulares, com as quais frequentemente me honra..."

Figura 9.14: Johann Bernoulli's 1697 solução do desafio braquistochrone (Bernoulli, Johann, 1697a)

Johann Bernoulli que ele estava enfrentando um tipo fundamentalmente novo de problema matemático. Sua distinção entre a otimização tradicional, encontrando um máximo ou mínimo de quantidades plurais ou infinitas dadas, e o desafio da braquistocrona, onde as próprias quantidades não são mais determinadas do que aquela mesma coisa que é busca-se, " captura precisamente o salto conceitual da dimensão finita para a otimização de dimensões infinitas. Johann reconheceu que os métodos existentes de Descartes, Fermat, e seus seguidores poderiam lidar com problemas onde o espaço de busca estava bem definido, mas falhou quando a otimização em si teve que determinar não apenas valores ótimos, mas funções ótimas. Este insight demonstra notável sofisticação matemática para 1697, antecipando por décadas a distinção formal entre otimização de parâmetros e otimização funcional que se tornaria central em cálculo variacional.

A passagem também ilumina a cultura intelectual e dinâmica competitiva da matemática do final do século XVII. A crítica apontada por Johann aos seus antecessores, aqueles que juram pelas palavras de seu mestre e se encontram "empenho"ao enfrentar desafios novos, reflete tanto sua confiança em sua abordagem inovadora quanto as intensas rivalidades matemáticas do período. No entanto, seu reconhecimento simultâneo de que esses matemáticos anteriores certamente realizaram muito e seu tom deferencial em relação a Leibniz revelam uma compreensão nuance do progresso matemático como colaborativo e competitivo. Sua modesta denúncia de que ele oferece apenas modos particulares, em vez de um método universal, prova ser profética, como sua analogia óptica, enquanto brilhante para a braquistocrona, exigiria de fato uma generalização sistemática que emergiria na Depois de décadas[20].

[20]A crítica de Johann aos estudiosos que juram pelas palavras do seu mestre e resistem a enfrentar problemas que ultrapassam os limites dos métodos estabelecidos ressoa notavelmente com dinâmica

CÓPIA PARA REVISÃO

O desafio da braquistochrone atraiu soluções dos matemáticos mais distintos da era, incluindo Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hôpital e Jakob Bernoulli. Cada um abordou o problema usando diferentes técnicas, mas a solução de Johann seria particularmente influente devido à sua nova metodologia e profundos insights físicos.

Analogia óptica e método de solução de Johann Bernoulli A solução de Johann Bernoulli demonstra notável percepção física combinada com engenho matemático. Incapaz de confiar em métodos variáveis sistemáticos (que ainda não existiam), ele empregou uma elegante analogia óptica baseada no princípio de Fermat de menos tempo. Sua visão chave era tratar o campo gravitacional como um meio estratificado, onde o índice de refração varia com a altura, transformando assim um problema mecânico em óptico.

A formulação matemática trata o tempo de viagem como $\int \frac{ds}{v(y)}$, onde $v(y) = \sqrt{2gy}$ representa a velocidade da partícula na altura y.. Aplicando A lei de refração de Snell e considerando a velocidade crescente da partícula conforme ela desce, Johann demonstrou que o caminho ideal deve ser um *cicloide*A curva traçada por um ponto na borda de um círculo rolando em linha reta. Johann imediatamente reconheceu este resultado notável, observando que ''hanc ipsissimam Cycloidem seu tautocronam Hugenianan, esse nosstram Brachystochronam quaesitam'' (esta mesma curva autocrônica de Cycloide ou Huygens é nossa procurada-depois Brachystonochrina). Esta solução revela o resultado profundo contra-intuitivo de que o caminho da descida mais rápida não é nem a menor distância (uma linha reta) nem a descida inicial mais íngreme, mas sim uma curva que balanceia otimizadamente aceleração inicial rápida com o conjunto Comprimento do caminho.

A elegância matemática da abordagem de Johann está em seu reconhecimento que princípios de otimização da óptica poderiam ser transferidos para a mecânica, antecipando o princípios de ação que mais tarde se tornariam fundamentais para a física teórica. No entanto, seu método, embora engenhoso, permaneceu específico do problema e não tinha a generalidade necessária para lidar com outros problemas variacionais sistematicamente. A solução foi brilhante, mas não facilmente generalizada. Uma limitação que motivaria o desenvolvimento de abordagens mais sistemáticas.

Limitações matemáticas e a necessidade de métodos gerais Apesar de seu avanço conceitual, a solução 1697 de Johann revela as restrições matemáticas enfrentadas pelos matemáticos do início do século 18 quando lidam com problemas de otimização envolvendo curvas. Sua analogia óptica, embora bem sucedida para a braquistocrona, não forneceu nenhuma estrutura sistemática para atacar outros problemas variacionais. Cada novo problema de otimização envolvendo funcionais exigiria sua própria abordagem engenhosa, tornando o campo mais arte do que ciência sistemática.

Esta lacuna metodológica tornou-se cada vez mais aparente quando matemáticos encontraram desafios adicionais de otimização. A solução de braquistocrona destacou uma necessidade crucial na metodologia matemática: não existia uma técnica geral para derivar as equações diferenciais que curvas ótimas devem

acadêmica contemporânea. Esta atitude tem historicamente forçado a adesão aos paradigmas estabelecidos, desde a resistência da filosofia natural aristotélica às descrições matemáticas do movimento que eventualmente cederia à mecânica galileu e newtoniana, até exemplos mais recentes. Engenheiros estruturais contemporâneos ocasionalmente se viram limitados por tradições metodológicas ao enfrentar problemas como análise de colapso progressivo ou comportamento dinâmico não linear de estruturas sob carga extrema. A ampla dependência na análise elástica linear e modelos simplificados viga-pilar, enquanto computacionalmente eficiente e bem estabelecida, provou ser insuficiente para entender os complexos mecanismos de falha observados em eventos como o World Trade Center colapso (National Institute of Standards and Technology (NIST), 2005)Necessitando o desenvolvimento de novas abordagens elemento finito e técnicas de modelagem multi-escala que desafiavam filosofias de design convencionais. O processo de revisão por pares, embora essencial para manter padrões, pode às vezes perpetuar o conservadorismo intelectual que Johann criticou - favorecendo avanços incrementais dentro de paradigmas aceitos sobre abordagens revolucionárias que poderiam render métodos existentes obsoletos.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

satisfazer. O sucesso de Johann com o cicloide foi notável, mas não ofereceu um caminho claro para resolver outros problemas variacionais, como a elástico, Problema isoperimétrico, ou o problema geral de curvas minimizando integrais arbitrárias.

Esta limitação metodológica estendeu-se às questões de existência e singularidade das soluções. Enquanto Johann demonstrou que o cicloide resolve o problema da braquistocrona, a estrutura matemática para provar que ele fornece o mínimo global único, ou para determinar quando problemas variacionais admitem soluções, permaneceu ausente. Essas questões fundamentais exigiriam a abordagem sistemática que emergiria décadas depois.

Influência no Desenvolvimento do Quadro de Variação O problema da braquistocrona influenciou profundamente o pensamento posterior sobre otimização e motivaria diretamente o desenvolvimento de métodos variáveis sistemáticos. O reconhecimento de que enquanto a analogia óptica de Johann tinha resolvido um problema específico brilhantemente, a matemática precisava de princípios gerais capazes de lidar com qualquer problema de otimização envolvendo funcionais tornou-se cada vez mais claro para a comunidade matemática.

A visão revolucionária que eventualmente surgiria foi o desenvolvimento de um método sistemático para derivar as equações diferenciais que curvas ótimas devem satisfazer, independentemente do funcional específico ser otimizado. Este "método de valores diferenciais" forneceria a estrutura geral que estava faltando na abordagem de Johann – uma maneira de transformar qualquer problema variacional em um equação diferencial cuja solução produziu a curva ideal.

A conexão entre a braquistocrona 1697 e as soluções elásticas posteriores é mais profunda do que uma mera sequência histórica. Ambos os problemas buscam curvas que otimizem quantidades integrais: A brachistochrone minimiza o tempo de viagem $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$, enquanto o elástico minimiza deformação energia $\int \kappa^2 ds$.. O gênio dos desenvolvimentos posteriores estava em reconhecer que ambos os problemas - e na verdade todos os problemas variacionais - poderiam ser resolvidos usando a mesma abordagem sistemática.

O problema elástico eventualmente representaria uma aplicação direta do general princípios variacionais que o problema da braquistocrona tinha sugerido, mas não podia explorar sistematicamente. Onde Johann precisava de uma visão física específica do problema (a analogia óptica), o método sistemático forneceria um procedimento universal aplicável a qualquer problema de otimização funcional. O elástico se tornaria não apenas outro problema resolvido, mas uma demonstração do poder de cálculo variacional sistemático.

O nascimento de uma nova disciplina matemática A solução de Johann Bernoulli em 1697 é assim o momento fundamental quando os matemáticos encontraram pela primeira vez o desafio conceitual de otimizar espaços de funções infinitamente dimensionais. Enquanto as técnicas específicas empregadas, a analogia óptica e a lei de Snell, não generalizariam, o insight fundamental que curvas poderiam ser encontradas por princípios de otimização seria revolucionário.

O problema da braquistocrona estabeleceu que muitas questões fundamentais na mecânica e geometria poderiam ser reformuladas como problemas de variação. Esta visão seria crucial não só para o trabalho posterior sobre a elástica, mas para todo o desenvolvimento subsequente da física matemática. De.. O princípio de Hamilton em mecânica para as teorias modernas de medição na física, o reconhecimento de que os fenômenos naturais muitas vezes correspondem a princípios de otimização traçam suas origens para Johann's 1697 avanço.

O jornal de Johann Bernoulli, apesar da brevidade, tinha inadvertidamente aberto um ramo inteiramente novo da matemática. O desenvolvimento sistemático desse ramo esperaria as contribuições conceituais cruciais dos anos 1740, mas a fundação conceitual – o reconhecimento de que a otimização poderia determinar não apenas números, mas funções inteiras – tinha sido decisivamente estabelecida. A braquistocrona transformou-se de um único problema desafiador no exemplo fundador do que se tornaria um dos mais poderosos referenciais teóricos da matemática.

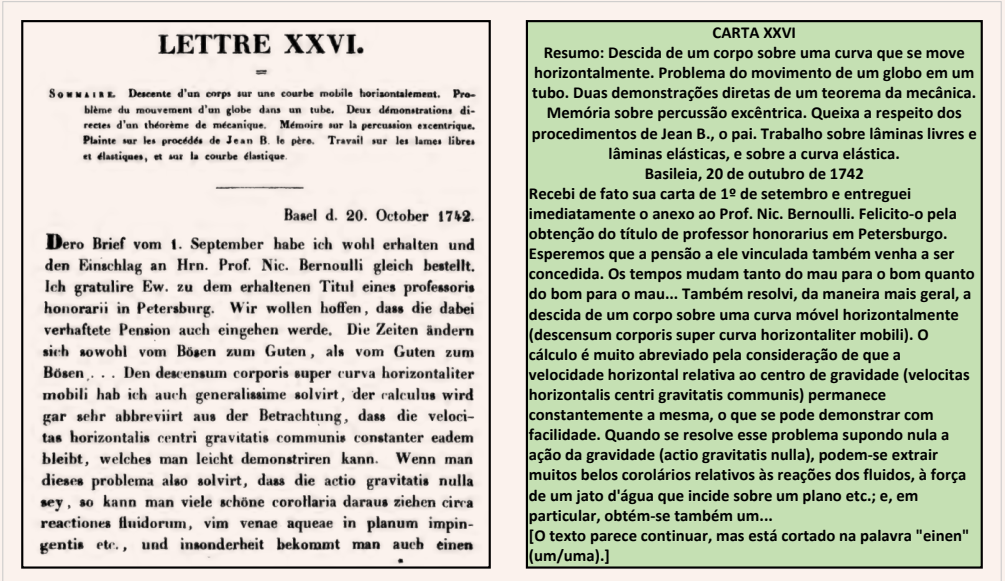
CÓPIA PARA REVISÃO

A Gap Matemática: De 1697 a 1740 O período seguinte à descoberta de Johann foi marcado por tentativas esporádicas de resolver problemas individuais variáveis usando métodos ad hoc. Os matemáticos encontraram o problema isoperimétrico, perguntas sobre correntes penduradas (catenárias) e vários desafios de otimização de curvas, mas cada um precisou de sua própria abordagem engenhosa. A comunidade matemática gradualmente reconheceu que uma estrutura sistemática era desesperadamente necessária.

Durante estas décadas, vários desenvolvimentos cruciais estabeleceram as bases para futuros avanços. A compreensão das equações diferenciais aprofundou-se, os métodos de manipulação condições de contorno melhoraram, e a relação conceitual entre otimização e equações diferenciais tornou-se mais clara. No entanto, a visão fundamental que uniria todos os problemas variacionais sob uma única abordagem sistemática permaneceu evasiva.

Foi contra este pano de fundo matemático que Daniel Bernoulli faria sua contribuição fundamental em 1742, reconhecendo que os princípios físicos da minimização da energia poderiam fornecer a ponte conceitual entre a analogia óptica problema-específica de Johann Um quadro variacional verdadeiramente geral. Essa visão seria essencial para o desenvolvimento sistemático de cálculo variacional que logo se seguiria.

9.3.2.1.2.4 A solução de Daniel Bernoulli (1742) Esta seção examina uma notável carta de Daniel Bernoulli para Leonhard Euler datado de 20 de outubro de 1742, (**DanielBernoulli1742toEuler**) que representa uma transição crucial no desenvolvimento de Métodos de variação, fig. 9.15.. O problema técnico a que Daniel se refere, o movimento de um globo dentro de um tubo em movimento, representa uma evolução direta do desafio original da braquistocrona, mas com camadas adicionais de complexidade que expôs as limitações dos métodos existentes. Enquanto o problema de Johann 1696 (Bernoulli, Johann, 1696) Pedido para a curva de descida mais rápida sob gravidade sozinho, o problema do tubo de Daniel introduz restrições dinâmicas e referência em movimento pórticos: A bola deve seguir o caminho prescrito pelo tubo enquanto o próprio tubo se move de acordo com algum movimento especificado. Isso cria um constrangimento Problema de otimização onde o movimento ideal depende não apenas da gravidade, mas da interação entre a inércia da bola, o movimento do tubo e as forças de restrição.



LETTRE XXVI.

Sommaire. Descente d'un corps sur une courbe mobile horizontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen, . . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

CARTA XXVI

Resumo: Descida de um corpo sobre uma curva que se move horizontalmente. Problema do movimento de um globo em um tubo. Duas demonstrações diretas de um teorema da mecânica. Memória sobre percussão excêntrica. Queixa a respeito dos procedimentos de Jean B., o pai. Trabalho sobre lâminas livres e lâminas elásticas, e sobre a curva elástica.

Basileia, 20 de outubro de 1742

Recebi de fato sua carta de 1º de setembro e entreguei imediatamente o anexo ao Prof. Nic. Bernoulli. Felicito-o pela obtenção do título de professor honorarius em Petersburgo. Esperemos que a pensão a ele vinculada também venha a ser concedida. Os tempos mudam tanto do mau para o bom quanto do bom para o mau... Também resolvi, da maneira mais geral, a descida de um corpo sobre uma curva móvel horizontalmente (descensum corporis super curva horizontaliter mobili). O cálculo é muito abreviado pela consideração de que a velocidade horizontal relativa ao centro de gravidade (velocitas horizontalis centri gravitatis communis) permanece constantemente a mesma, o que se pode demonstrar com facilidade. Quando se resolve esse problema supondo nula a ação da gravidade (actio gravitatis nulla), podem-se extrair muitos belos corolários relativos às reações dos fluidos, à força de um jato d'água que incide sobre um plano etc.; e, em particular, obtém-se também um...

[O texto parece continuar, mas está cortado na palavra "einen" (um/uma).]

Figura 9.15: A carta de Daniel Bernoulli para Euler, (**DanielBernoulli1742toEuler**)

As abordagens geométricas tradicionais, que exigiram a engenhosa analogia óptica de Johann para resolver até mesmo a braquistocrona mais simples, tornaram-se insípidas quando confrontadas com tais problemas de

CÓPIA PARA REVISÃO

restrição. Os princípios baseados na energia de Daniel, no entanto, poderiam lidar com essas complexidades elegantemente tratando toda a energia do sistema como uma quantidade unificada em vez de tentar rastrear componentes de força individuais através da mudança de sistemas de coordenadas. A mistura linguística na carta de Daniel reflete este momento mais amplo de transição em matemática. Assim como a linguagem matemática evoluía de descrições puramente geométricas para expressões mais analíticas, a linguagem literal da matemática estava mudando do latim universal para uma comunicação vernácula mais acessível. A alternância contínua de Daniel entre explicações alemãs e termos técnicos latinos reflete seu avanço metodológico: ele estava desenvolvendo princípios de variação baseados em energia que poderiam lidar sistematicamente com toda a classe de problemas de otimização restritos que incluíam tanto braquistocrona original de Johann e essas dinâmicas mais complexas como casos especiais.

A principal visão metodológica de Daniel aparece em sua declaração:

> ich aber ganz andere principia gebrauche, muss ic auch ganz annehmen
>
> Já que uso princípios completamente diferentes, também devo adotar denominações completamente diferentes
>
> **DanielBernoulli1742toEuler**

Isto revela uma mudança fundamental de paradigmas geométricos e cinemáticos para abordagens baseadas em energia que se revelariam historicamente transformadoras.

A Rede de Correspondência A correspondência Euler-Bernoulli representa um dos mais importantes intercâmbios científicos do século XVIII. Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782) mantiveram extensa comunicação ao longo de suas carreiras, discutindo problemas em mecânica, matemática e física[21].

A expressão de energia elástica e intuição física Na carta de outubro de 1742, Daniel Bernoulli apresenta uma das primeiras formulações explícitas de energia elástica:

$$\int \frac{ds}{R^2} \tag{9.6}$$

Onde ds é o elemento comprimento do arco, R é o raio de curvatura, e $\frac{1}{R^2}$ representa o quadrado da curvatura.

Esta expressão representa a energia de flexão de uma haste elástica ou viga, mas a formulação de Bernoulli foi baseada em intuição física, ao invés de derivação rigorosa. Seu raciocínio seguiu vários passos intuitivos: Reconhecendo que a energia elástica deve ser concentrada onde a viga dobra mais severamente (sugerindo dependência da curvatura $\kappa = 1/R$), intuindo que esta energia deve escalar quadricamente com deformação seguindo analogias com outros sistemas físicos, e entendendo que a energia total deve ser obtida integrando densidade de energia local ao longo do comprimento da viga.

Daniel afirma que ele assume ("ich annehme") que

> Morra *Vis viva* Potencialmente, as lâminas elásticas insita müsse minima seyn'
>
> O potencial de vida inerente à placa elástica deve ser mínimo.
>
> **DanielBernoulli1742toEuler**

[21] Para uma edição digital abrangente da correspondência Euler-Bernoulli, veja o Bernoulli–Euler Online (BEOL) projeto, O, o Euler Archive, e o Early Modern Letters Online (EMLO) Banco de dados, que fornecem textos pesquisáveis, metadados e varreduras de alta resolução das letras originais

CÓPIA PARA REVISÃO

Isto representa um exemplo notável de intuição física que precede a rigorosa derivação matemática por mais de um século Cauchy é mecânica do contínuo (Cauchy, 1823), A teoria elástica de Poisson (Poisson, 1829), e Teoria da placa de Kirchhoff em 1859 (Kirchhoff, 1859).

Métodos Variacionais e Framework Matemático Bernoulli menciona explicitamente usando o método isoperimetricorum Problemas isoperimétricos) para resolver o problema da curva elástica, envolvendo otimização restrita de funcionais e encontrando curvas que minimizem a energia sujeita a restrições geométricas. Ele relata obter ''eine aequationem diferencialem 4ti ordinis" (a De sua abordagem variacional, significativa porque a equação de Euler-Bernoulli é de fato de quarta ordem, demonstrando a conexão entre princípios variacionais e equações diferenciais dois anos antes de euler O desenvolvimento sistemático do Euler..Equação de Lagrange.

A carta discute o problema geral de uma lâmina elástica de determinado comprimento fixada em dois pontos com instruções tangentes prescritas nos terminais, representando uma das primeiras formulações de Problemas de valor limite na teoria da elasticidade.

Inovações conceituais A carta demonstra vários desenvolvimentos cruciais: a formulação da energia elástica como uma integral de curvatura, a aplicação de técnicas isoperimétricas aos problemas físicos, a ideia de que configurações naturais minimizam a energia e a conexão entre física e cálculo avançado. Esta correspondência de 1742 é anterior à de Euler *Methodus inveniendi* (Euler, 1744b), O trabalho de Alembert em cordas vibratórias (D'Alembert, 1747), e Lagrange *Analitique Mécanique* (Lagrange, 1788).

Configurando o palco para o desenvolvimento sistemático A formulação de Daniel de 1742 dos princípios da energia elástica e sua aplicação de métodos isoperimétricos criou tanto uma oportunidade quanto um desafio para a comunidade matemática. Seus insights físicos eram profundos - o reconhecimento de que configurações naturais minimizam a energia seria fundamental para toda a física teórica. No entanto, sua abordagem permaneceu ligada a problemas específicos e não tinha o quadro sistemático necessário para lidar com todo o escopo de problemas variacionais.

A lacuna matemática era clara: Enquanto Daniel poderia formular expressões de energia como $\int ds/R^2$ e aplicar técnicas isoperimétricas para derivar equações diferenciais de quarta ordem, não existia nenhum método geral para transformar problemas variacionais arbitrários em suas equações diferenciais correspondentes. Cada nova energia funcional exigia sua própria abordagem engenhosa, assim como a braquistocrona de Johann tinha exigido a analogia óptica 50 anos antes.

Essa limitação metodológica conduziria a investigação sistemática de Euler. Tendo absorvido as idéias de Daniel sobre minimização da energia e testemunharam o poder de abordagens variacionais através de sua correspondência, Euler reconheceu a necessidade de um quadro universal - um método sistemático que poderia lidar com qualquer problema de otimização funcional, seja envolvendo energia elástica, geodésica, ou princípios físicos totalmente novos ainda por serem descobertos. A transição da intuição física sobre os princípios energéticos para sua formulação matemática rigorosa representa um dos avanços mais significativos na ciência do século XVIII, e a carta de Daniel fornece uma janela única para essa transição crucial como o A fase foi definida para a síntese revolucionária que emergiria em 1744.

9.3.2.1.2.5 Problemas Isoperimétricos vs. Cálculo das Variações Antes de estudarmos a abordagem variacional de Euler, precisamos contextualizar os termos ceretain.

Problemas isoperimétricos representam uma classe específica de desafios de otimização que surgiram das antigas questões geométricas, mais famosamente o problema de Dido: entre todas as curvas fechadas de perímetro fixo, que encerra a área máxima? Esses problemas são caracterizados pela necessidade de otimizar uma quantidade geométrica ou física, mantendo uma restrição em outra quantidade.

Cálculo de variações, em contraste, é o quadro matemático abrangente que se desenvolveu para lidar com problemas isoperimétricos sistematicamente, juntamente com muitos outros tipos de otimização funcional. Enquanto os problemas isoperimétricos proporcionavam motivação crucial para o desenvolvimento de métodos variacionais, particularmente através das disputas dos irmãos Bernoulli no início da década de

CÓPIA PARA REVISÃO

1700, a teoria matemática resultante se estende muito além da otimização restrita para abranger qualquer Problema envolvendo a otimização de funcionais.

Tabela 9.5: Problemas Isoperimétricos vs. Cálculo das Variações

Aspect	Problemas isoperimétricos	Cálculo das Variações
Definição	Problemas de otimização com restrições geométricas (por exemplo, perímetro fixo)	Framework matemático geral para otimizar funcionais
Escopo	Tipo específico de otimização restrita	Campo amplo que abrange toda otimização funcional
Período Histórico	Origens antigas (problema de Dido), soluções caso a caso até 1700	Desenvolvimento sistemático de 1696 (brachistochrone) a 1744 (Euler)
Estrutura matemática	Optimize $I[y]$ subject to $J[y] =$ constant	Optimize $I[y] = \int F(x, y, y')dx$ (constrangido ou desenfreado)
Método de Solução	Multiplicadores Lagrange: $\delta(I - \lambda J) = 0$	Equação Euler-Lagrange: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
Exemplos Clássicos	Círculo (área máxima, perímetro fixo), problema de Dido, braquistochrone restrito	Brachistochrone, elástica, geodésica, superfícies mínimas, princípio de Fermat
Contribuidores-chave	Jakob & Johann Bernoulli (disputas 1697-1701), Lagrange (método multiplicador)	Johann Bernoulli (1696), Euler (1744), Lagrange (1788)
Relacionamento Moderno	Subconjunto de cálculo de variações (problemas restritos)	Teoria geral incluindo problemas isoperimétricos como casos especiais

Na matemática contemporânea, os problemas isoperimétricos constituem o ramo restrito do cálculo variacional. Enquanto historicamente impulsionavam o desenvolvimento de métodos variacionais sistemáticos, eles representam agora uma categoria importante dentro do campo mais amplo da otimização funcional que engloba tanto problemas limitados quanto irrestritos.

9.3.2.2 Solução de Euler (Cálculo das Variações) (1744)

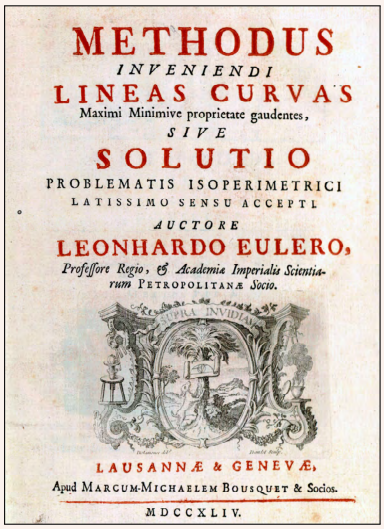
Euler's 1744 *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Euler, 1744b), Fig. 9.16a, representa uma conquista marcante na análise matemática, tanto para o seu desenvolvimento sistemático do cálculo de variações e suas aplicações inovadoras. O trabalho consiste em

- Seis capítulos principais, entregues ao editor em julho de 1743
- Dois apêndices entregues em dezembro de 1743, o primeiro tratando curvas elásticas, o segundo abordando o princípio da menor ação.

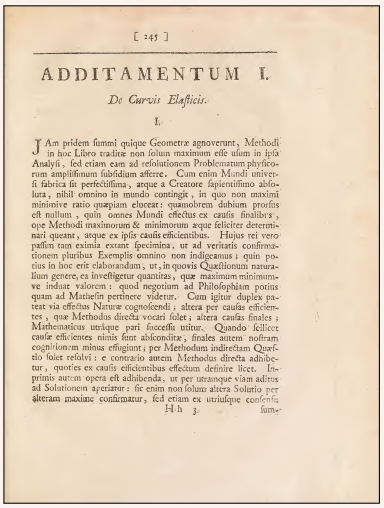
Esta estrutura reflete a abordagem metódica de Euler: o corpo principal estabelece os fundamentos teóricos

CÓPIA PARA REVISÃO

do que se tornaria conhecido como cálculo clássico de variações, incluindo o Euler equação diferencial (agora a equação Euler-Lagrange), enquanto os apêndices demonstram o poder destes novos Métodos através de aplicações desafiadoras, com Additamentum I apresentando sua solução para o problema elástico. Publicado em setembro de 1744, este tratado fez Euler o principal criador da primeira fase do cálculo das variações e estabeleceu-o como o maior matemático vivo de sua era. A colocação estratégica da solução elástica em um apêndice, ao invés do texto principal, sublinha como Euler a via como uma aplicação sofisticada de seus princípios variacionais recém-desenvolvidos, em vez de uma contribuição teórica fundamental em seu -Direito próprio.


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

(a) *Methodus Iveniendi Lineas...* (Euler, 1744b)


[245]
ADDITAMENTUM I.
De Curvis Elasticis.
I.
JAm pridem summi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non solum maximum esse usum in ipsa Analysi, sed etiam eam ad resolutionem Problematum physicorum amplissimum subsidium afferre. Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat: quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus; ope Methodi maximorum & minimorum æque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. Hujus rei vero passim tam eximia extant specimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quæstionum naturalium genere, ea investigentur quantitas, quæ maximum minimumve induat valorem: quod negotium ad Philosophiam potius quam ad Mathesin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturæ cognoscendi; altera per causas efficientes, quæ Methodus directa vocari solet; altera causas finales; Mathematicus utrâque pari successu utitur. Quando scilicet causæ efficientes nimis sunt absconditæ, finales autem nostram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quæstio solet resolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex causis efficientibus effectum definire licet. Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque conjunctis
Hh 3 sum-

(b) *Additamentum I: De curvis elásticos* (Euler, 1744a)

Figura 9.16: O tratado de Euler 1744 sobre o cálculo das variações (Euler, 1744b)

Corpo Principal: Fundação de Cálculo Variacional Os seis capítulos da obra principal estabelecem as bases sistemáticas do cálculo variacional. A contribuição revolucionária de Euler[22] foi o seu método sistemático para encontrar curvas que otimizam funções integrais. Isto representava um tipo fundamentalmente novo de problema matemático - em vez de encontrar valores que otimizassem as funções, o objetivo era encontrar funções que otimizem os funcionais.

Para uma função geral da forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} Z(x, y, p, q, r, \ldots)\, dx \tag{9.7}$$

Onde $p = dy/dx$, $q = dp/dx = d^2y/dx^2$, $r = dq/dx = d^3y/dx^3$Euler introduz o conceito revolucionário do valor diferencial

Ele escreve o diferencial total de Z como:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots \tag{9.8}$$

[22]Esta seção baseia-se principalmente na autoritária tradução em inglês e comentário de Oldfather, Ellis e Brown, 1933.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

onde:

$$M = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p} \tag{9.9}$$

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad R = \frac{\partial Z}{\partial r} \tag{9.10}$$

A visão crucial é que para o funcional I Para ter um extremo, seu valor diferencial deve desaparecer.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots \right) \delta y \, dx = 0 \tag{9.11}$$

Já que isso deve ser usado para variações arbitrárias δy, o integral deve desaparecer, dando o que chamamos agora a equação Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots = 0 \tag{9.12}$$

Este método sistemático para derivar equações diferenciais dos princípios de otimização era completamente novo e iria revolucionar não só a mecânica, mas toda a física matemática. Ao longo dos seis capítulos, Euler aplicou esta estrutura para problemas clássicos incluindo a braquistocrona, problemas isoperimétricos e vários desafios de otimização geométrica, demonstrando a generalidade e poder de sua abordagem.

Euler enfatiza a importância da dupla verificação em sua abordagem metodológica:

> Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus Ad Solutionem aperiatur: Sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque conssensu Summam Percipimus Voluptatem.
>
> Mas devemos fazer um esforço especial para ver que ambas as formas de abordagem da solução do problema sejam abertas; pois assim não só uma solução é fortalecida pela outra, mas, mais do que isso, pelo acordo entre as duas soluções nós garantimos a máxima satisfação.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Seção 1

Este princípio de verificação dupla seria central para o tratamento do problema elástico no apêndice.

Apêndice I: Aplicação para o Elastica Tendo estabelecido o quadro geral de cálculo variacional nos capítulos principais, Euler volta-se para sua aplicação mais desafiadora no primeiro apêndice, *Additamentum I: De curvis elásticos* (Euler, 1744a), Fig. 9.16b.. Esta aplicação não foi meramente ilustrativa; foi motivado por uma visão física crucial de Daniel Bernoulli e representou uma das demonstrações mais elegantes do poder de sua nova estrutura matemática.

Daniel Bernoulli e Correspondência Em uma carta de 1742 para Euler, Daniel Bernoulli sugeriu que a equação da elástica poderia ser obtida assumindo que uma certa expressão - o que chamamos agora de deformação energia - é minimizada em equilíbrio:

> Ich möchte wissen, ob Ew. Morra curvaturam laminae elásticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixe sey, também dass die Tangentes in istis punctus auch posicionate datae seyen... Dieseses ist die idea generalissima elásticos; Hab aber sub hac facie noch keine Solution gefunden, als per methodum isoperimetricorum, da ic

CÓPIA PARA REVISÃO

annehme, dass die vis viva potencialis laminae elásticae insta müsse minima seyn, wie ich Ew. Schon Einmal Gemeldet. Auf diee Weise bekomme ich eine aequationem diferencialem 4ti ordinis, Welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequaltio ordinaria elástico general sey.

Eu gostaria de saber se você pode não resolver a curvatura da lâmina elástica sob esta condição, que uma lâmina de determinado comprimento é fixado em dois pontos com posições dadas, e que as tangentes nestes pontos também são dadas na posição ... Esta é a idéia mais geral de elásticos; No entanto, eu ainda não encontrei uma solução sob esta condição pelo método isoperimétrico, dado o meu pressuposto de que o potencial vis viva inerente à lâmina elástica deve ser mínimo, como já mencionei antes. Desta forma, recebo uma 4a ordem equação diferencial, que eu não tenho sido capaz de reduzir o suficiente para mostrar que a equação comum para o elástico geral mantém.

DanielBernoulli1742toEuler

Observe que.. *lamina* refere-se a uma tira fina, plana, flexível ou viga - essencialmente o que os engenheiros modernos chamariam de elástico viga ou cantilever. Euler assume que a lâmina é esbelta ≫ largura ≫ Espessura), sem peso em comparação com cargas aplicadas, inextensíveis ao longo de seu comprimento, e elástica (voltando à sua configuração reta original quando descarregada). Pense em uma régua segurada numa ponta e dobrada por uma força na outra, ou uma prancha de mergulho. O termo latino "lamina" (significando "plata fina'") era terminologia padrão do século XVIII para qualquer elemento estrutural esbelto que se dobra principalmente através da curvatura ao invés de alongamento.

ich annehme, dass die vis viva potencialis laminae elásticae insita müsse minima seyn

---

Presumo que o potencial de vida inerente à placa elástica deve ser mínimo
Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

"Sonsten exprimire ich die vim vivam potencialem lâminas elásticas naturaliter rectae et incurvatae durch $\int(ds/R^2)$"

Expresso o potencial vis viva de uma placa elástica, naturalmente reta mas curvada, através $\int(ds/R^2)$
Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

A correspondência também revela o estado precário do St. A Academia de Petersburg, em meio às transições políticas de 1742, forçando os estudiosos a estrategizar sobre onde (e quando) publicar, e reflete a dura realidade da vida acadêmica do século XVIII, na qual os estudiosos se apropriaram frequentemente do trabalho de seus Júniores.

Formulação Variacional da Elastica Construindo diretamente na visão crucial de Daniel Bernoulli em 1742 sobre o mínimo de energia, Euler formula o problema elástico como um Princípio variacional. Euler afirma o problema com precisão característica:

UT, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quae non solum per puncta A & B transeant, sed etiam em seu punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea em qua sit valor hujus expressionis $\int \frac{ds}{R^2}$ Mínimos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Que entre todas as curvas do mesmo comprimento que não só passam por pontos A e.. B mas também são tangentes a dar linhas retas nestes pontos, que curva ser determinada em que o valor de $\int \frac{ds}{R^2}$ é o mínimo.
Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Seção 2

O principal avanço conceitual é reconhecer que curvas elásticas correspondem a configurações que minimizam o funcional de energia total:

$$I = \int \left[\frac{1}{2} EI\kappa^2 + V(x, y) \right] ds \tag{9.13}$$

onde o primeiro termo representa energia elástica deformação (proporcional ao quadrado da curvatura) e $V(x, y)$ representa Energia potencial de forças externas.

Para o elástico puro (sem forças externas), isso reduz-se a:

$$I = \int \kappa^2 \, ds = \int \frac{1}{R^2} \, ds \tag{9.14}$$

Esta formulação de energia fornece uma visão física imediata que estava faltando nas abordagens anteriores. Isso explica:

- **Por que soluções específicas são selecionadas**:. A natureza escolhe configurações que minimizam a energia total
- **Múltiplos ramos de solução**:. Diferentes condições de contorno levam a diferentes mínimos da energia funcional
- **Estabilidade**:. As configurações mínimas de energia são inerentemente estáveis
- **Capacidade de generalização**:. O mesmo princípio se aplica a todos os problemas elásticos

O princípio da energia explica imediatamente a observação de Huygens em 1694 sobre múltiplas formas possíveis de curva elástica: diferentes condições de contorno e parâmetros de carga levam a diferentes mínimos da energia funcional, cada um representando uma configuração fisicamente realizável.

Derivação Direta e Verificação Fiel ao seu princípio de dupla verificação, Euler deriva a mesma equação por princípios mecânicos conhecidos, estabelecendo assim a validade do procedimento variacional. Nas seções de abertura do apêndice, Euler verificou a conjectura de Daniel usando métodos do cálculo das variações. A maior parte do apêndice é então dedicada a uma investigação por métodos diretos, não ligados à matemática variacional, da mecânica das lâminas elásticas.

Em sua derivação direta, Euler considera uma lâmina AB que é construído em um suporte na B, Fig. 9.17.. Ambos B e a tangente à lâmina em B são considerados como fixos. No outro lado A Uma haste sem peso está presa e do final C da vara uma força P Atuações[23].. O peso da lâmina é considerado negligenciável em comparação com P.

Euler emprega um sistema cartesiano de coordenadas com origem em A e orientado para que o eixo y coincida com a direção da força P.. Vamos M ser um ponto na lâmina com coordenadas x e.. y.. O momento exercido pela força externa sobre M É $\mathfrak{M} = P(x + c)$, onde c É a distância de A Ao ponto C.. A resistência à

[23] Deve-se notar que na abordagem de Euler a curva elástica fornece um modelo unificado e o sistema de coordenadas é orientado de uma vez por todas com relação à direção da força externa P.. Presumivelmente, é por isso que usamos o termo Euleriano (vs. Sistema de coordenadas Lagrangian que é usado em grande deslocamentos ou mecânica de fluidos.

CÓPIA PARA REVISÃO

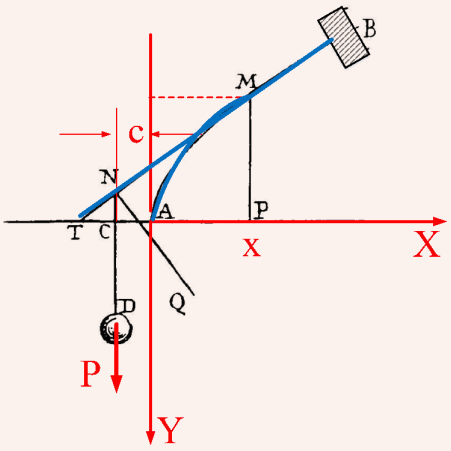


Figura 9.17: O método direto de Euler ''diagrama de corpo livre"
Compare com Fig. 9.28 para posterior generalização de Euler (1771) deste diagrama elástico 1744.

força elástica (que hoje chamamos de momento fletor) da lâmina em M é considerado por Euler como dado pela expressão Ek^2/R, onde Ek^2 é uma quantidade que mede o "rigidez' da lâmina e R é o raio de curvatura da lâmina em M.. Em equilíbrio, essas duas expressões devem ser iguais:

$$\mathfrak{M} = P(c+x) = \frac{\mathfrak{B}}{R} \tag{9.15}$$

Onde $\mathfrak{B} = Ek^2$ é referido como o módulo de dobra

A expressão do raio de curvatura já tinha sido derivada por Jakob Bernoulli (Eq. 8.17)

$$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

Substituindo esta expressão por R Eq. 9.15 E integrando, Euler obtém:

$$dy = \frac{-P\left(\frac{1}{2}x^2+cx+f\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}x^2+cx+f\right)^2\right)}}dx \tag{9.16}$$

Onde f é uma constante de integração. Euler prefere reexpressá-lo em termos da forma geral que ele tinha obtido anteriormente através do procedimento variacional:

$$dy = \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{\sqrt{\left(a^4 - (\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2\right)}}dx \tag{9.17}$$

Onde as quantidades a, α, β e.. γ estão conectados com os da Eq. 9.16 Pelas relações:

$$P = \frac{-2Ek^2\gamma}{a^2}; \qquad c = \frac{\beta}{2\gamma}; \qquad f = \frac{\alpha}{2\gamma} \tag{9.18}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

A direção da força P é determinado pelo sinal da constante γ; para positivo γ aponta na direção do eixo positivo y, para negativo γ Ele aponta na direção do eixo Y negativo.

Euler reconheceu os componentes fundamentais do comportamento elástico mesmo sem a moderna teoria de análise. Como ele observa em sua discussão sobre o módulo de flexão:

> Haec autem elásticos absoluta Ekk Pendet primum ab Natura materiae, ex qua lamina est fabrefacta; inde pseudônimo, materia Magis, pseudônimo menos elatere prodita dici solet. Secundo quoque ita pendet a latitudine laminado, ut expressio Ekk Ubique Latitudini laminae debeat esse proporcionalis, si cetera sint paria. Tertio vero crassities laminae plurimum confere ad valorem ipsius Ekk determinandum, quae ita comparata esse videtur, ut, Ceteris paribus, Ekk Sente-se crassitiei quatratum. Conjuntim Ergo tenebit expressio Ekk Racionem compositam ex ratione Elateris materiae, latitudinis laminae simplici, ac duplicata crassitiei Lâminas.
>
> Agora essa elasticidade absoluta Ek^2 dependerá em primeiro lugar do caráter do material de que a fita foi feita... Além disso, em segundo lugar, depende da largura da fita que a expressão Ek^2 deveria ser proporcional à amplitude, outras coisas serem iguais. Mas em terceiro lugar, a espessura da fita contribui muito para determinar o valor de Ek^2, que parece ser composto de tal forma que, outras coisas sendo iguais, Ek^2 é proporcional ao quadrado da espessura.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Seção 40

Esta notável visão antecipou-se ao que agora entendemos como o momento de inércia da seção transversal de uma viga, demonstrando a profunda intuição física de Euler. O acordo perfeito entre suas abordagens variacionais e diretas forneceu exatamente o tipo de verificação dupla que Euler valorizou tão altamente, confirmando tanto a validade de seus novos métodos matemáticos quanto a exatidão física de Daniel Bernoulli Princípio da energia.

9.3.2.2.1 Classificação das Espécies Elastica

Historicamente, matemáticos tendem a classificar objetos matemáticos.[24] Euler, na seção *Número de curvarum elástico*Ele começou com Eq. 9.17 e traduz a origem dos eixos à distância $\beta/2\gamma$, sets $\gamma = 1$, e reduz a equação para:

$$dy = \frac{\alpha + x^2}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}} dx$$

Notando isso $a^4 - (\alpha + x^2)^2 = (a^2 - \alpha - x^2)(a^2 + \alpha + x^2)$ E ajustando $\alpha = a^2 - c^2$, ele obtém:

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.19}$$

Esta equação forma a base para o estudo gráfico de Euler da curva elástica ou lâmina[25] (os dois termos são usados intercambiavelmente). Na figura 6 da Fig. 9.18A é a origem do sistema de coordenadas e AE e.. AB

[24] Consulte §3.2.3 Para os gregos, as curvas planas agrupadas de Descartes, Newton enumerava formas cúbicas, etc.

[25] Neste contexto, *lamina* refere-se a uma tira fina, plana, flexível ou viga - essencialmente o que os engenheiros modernos chamariam de elástico viga ou cantilever. Euler assume que a lâmina é esbelta ≫ largura ≫ Espessura), sem peso em comparação com cargas aplicadas, inextensíveis ao longo de seu comprimento, e elástica (voltando à sua configuração reta original quando descarregada). Pense em uma régua segurada numa ponta e dobrada por uma força na outra, ou uma prancha de mergulho. O termo latino "lamina" (significando "plata fina'") era terminologia padrão do século XVIII para qualquer elemento estrutural esbelto que se dobra principalmente através da curvatura ao invés de alongamento.

CÓPIA PARA REVISÃO

são as direções do positivo x e.. y eixos, respectivamente. M é um ponto típico na curva AMC.. A força externa P Atua de forma positiva y-Direção em A.. Euler imagina que os pontos A e.. B pode ser considerado como sendo unido por um fio de tensão P Para que uma força igual e oposta a P Atua em.. B.

As duas quantidades significativas que ele associa com a curva são a força P E o seno do ângulo $\angle PAM$ formado pela tangente em A e o x-eixo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2Ek^2}{a^2} \\ \sin(\angle PAM) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \end{aligned}$$

Onde esta expressão para P é obtido da Eq. 9.18 e.. $\sin(\angle PAM)$ é derivado de $\tan(\angle PAM) = (a^2 - c^2)/c\sqrt{2a^2 - c^2}$ Obtidos por ajuste $x = 0$ Em Eq. 9.19.

Euler observa o valor da classificação sistemática:

> Cum igitur videamus non solum Circulum in curvarum Elasticarum classe contineri, sed etiam em ipsis infinitam varietatem Locum Habere; Operae pretium erit hic enumerationem omnium Variarum specierum em curvarum genere contentarum Instituere. Hoc enim moda non solum indoles harum curvarum Penitius perspicietur; Sed etiam, casu quocunque oblato, Ex sola figura dijudicare piolho, ad quamnam speciem curva Formatar uma referência desbota.
>
> Como, portanto, observamos que não só o círculo está incluído na classe de curvas elásticas, mas mais do que isso, há uma infinita variedade dessas curvas elástica, valerá a pena enumerar todos os diferentes tipos incluídos nesta classe de Curvas. Pois desta forma não só o caráter dessas curvas será mais profundamente percebido, mas também, em qualquer caso oferecido, será possível decidir da mera figura em que classe a curva formada deve ser colocada.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Seção 14

Euler apresenta uma classificação sistemática de curvas elásticas através de duas abordagens complementares:

1. **Espécie Matemática**:. Nove categorias fundamentais (Espécie I-IX) definidas pelo parâmetro c^2/a^2 e derivada de análises matemáticas rigorosas (seções 25-33 do tratado)
2. **Figuras ilustradas**:. Vinte e oito diagramas através de Tabula III, IV e V mostrando várias manifestações e aplicações desta espécie

As diferentes espécies são obtidas considerando o ângulo PAM como ele muda de valor a partir $90°$ para $-90°$, como mostrado na tabela 9.6 E Fig. 9.18.

Cada espécie é caracterizada por:

1. O parâmetro de força: $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$
2. O ângulo inicial: $\sin(\angle PAM) = \frac{a^2-c^2}{a^2}$
3. A distribuição da curvatura ao longo da curva

Os 28 números não são distribuídos uniformemente entre as 9 espécies. Em vez disso, refletem a importância prática de certas configurações, a complexidade matemática de casos particulares, e a necessidade de ilustrar condições de contorno e limitar comportamentos.

A multiplicidade (confusa) de figuras serve a vários propósitos:

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 9.6: Euler tem nove espécies elásticas com parâmetros definidores

Espécie	Seção	Intervalo de Parâmetros	Descrição Física
I	§25	$c \to 0$	Linha reta (estado natural)
II	§26	$0 < c^2/a^2 < 1$	Curvas simples, sem inflexão
III	§27	$c^2/a^2 = 1$	Esquema retangular
IV	§28	$1 < c^2/a^2 < 1.652$	Curvas inflexíveis
V	§29	$c^2/a^2 = 1.652$	Configuração auto-tocante
VI	§30	$1.652 < c^2/a^2 < 2$	"Loops de auto-cruzamento"
VII	§31	$c^2/a^2 = 2$	Curvas assintóticas
VIII	§32	$c^2/a^2 > 2$	Múltiplos ciclos periódicos
IX	§33	Limite especial	Círculo

Tabela 9.7: Distribuição das 28 figuras entre as 9 espécies

Espécie	Descrição	Número de números
I	Linha reta	1 (Fig. 1)
II	Curvas simples	6 (Figs. 2, 3, 4, 6, 23, 26)
III	Esquema retangular	Três (Figs. 5, 24, 25)
IV	Curvas inflexíveis	4 (Figs. 7, 8, 16, 19)
V	Auto-toque	1 (Fig. 9)
VI	Auto-cruzamento	4 (Figs. 10, 11, 12, 20)
VII	Assintótica	2 (Figs. 12, 15)
VIII	Múltiplos laços	6 (Figs. 17, 18, 22, 27, 28)
IX	Círculo	1 (Fig. 21)
Casos especiais/aplicados		2 (Figs. 13, 14)

Parâmetros Variações Dentro das Espécies Cada espécie engloba uma gama contínua do parâmetro c^2/a^2.. Múltiplas figuras mostram como a forma da curva evolui dentro de uma única espécie, conforme este parâmetro varia.

Condição de contorno Efeitos As mesmas espécies matemáticas podem se manifestar de forma diferente sob vários condições de contorno:

- Endpoints fixos
- Configurações livres de fixação (cantilever)
- Conexões fixas
- Momentos aplicados contra forças de pontos

Aplicações de Engenharia Figuras 13 e 14 demonstram aplicações práticas:

- Figura 13: Peso suspenso (comportamento tipo catenária)
- Figura 14: Cantilever montado na parede

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 9.8: 28 figuras de Euler mapeadas para suas 9 espécies elásticas

Figura	Tabula	Espécie	Descrição	Características-chave	Seçã
1	III	I	Linha reta	Estado natural, sem curvatura	25
2	III	II	Uma simples vara curvada	Tangente horizontal na base	26
3	III	II	Cantilever carregado por força	Peso no final livre	26
4	III	II	Cantilever curvado	Curva uniforme	26
5	III	III	Esquema retangular	90° tangente no ponto final	27
6	III	II	Simples arco curvo	Deformação básica	26
7	III	IV	Curva com inflexão	Abordagem inicial	28
8	IV	IV	Formação da figura oito	Circuitos simétricos se aproximando	28
9	IV	V	Loop de auto-toque	Contato em $\angle PAM = 4041'$	29
10	IV	VI	Auto-cruzamento loop	Interseção única	30
11	IV	VI	Cruzamento assimétrico	Lobos desiguais	30
12	IV	VII	Aproximando-se de assíntota	Quase-vertical tangente	31
13	IV	Caso especial	Peso suspenso	Aplicação prática	-
14	IV	Caso especial	Montado na parede	Aplicação de engenharia	-
15	IV	VII	Comportamento assintótico	Extensão infinita	31
16	V	IV	Múltiplas inflexões	Padrão periódico	28
17	V	VIII	Ondulação confinada	Preso entre paralelos	32
18	V	VIII	Multi-laop complexo	Múltiplos cruzamentos	32
19	V	IV	Curva S estendida	Grande amplitude	28
20	V	VI	Circuito triangular	Ângulo afiado no nó	30
21	V	IX	Caso limitador circular	Raio uniforme	33
22	V	VIII	Onda periódica	Múltiplos períodos	32
23	V	II	Arco raso	Pequena deformação	26
24	V	III	Arco profundo	Grande curvatura	27
25	V	III	Forma parabólica	Carregamento simétrico	27
26	V	II	Variação de curva simples	Limite diferente	26
27	V	VIII	Periódico complexo	Múltiplas restrições	32
28	V	VIII	Configuração extrema	Deformação máxima	32

Casos transitórios e limitantes Várias figuras capturam as transições críticas entre espécies, mostrando como uma forma se deforma continuamente em outra à medida que o parâmetro de carga muda.

***** Significado Matemático

A classificação de Euler representa vários avanços matemáticos:

1. **Primeira taxonomia sistemática**:. O nove espécies fornecem uma classificação completa de todas as possíveis deformações elásticas sob os pressupostos dados.
2. **Conexão com Integrais elípticas**:. As soluções exatas requerem integrais elípticas, tornando esta uma

CÓPIA PARA REVISÃO

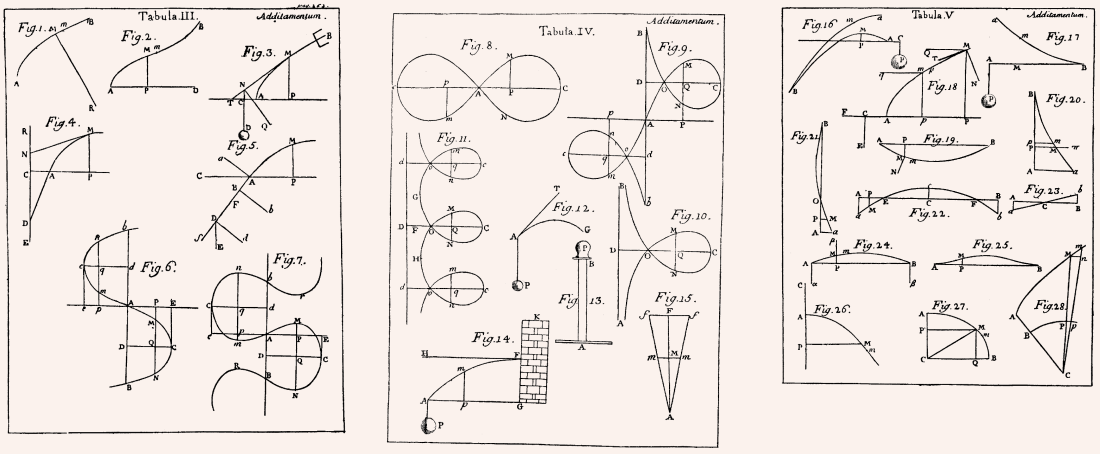


Figura 9.18: Euler's elástico "espécie" em termos do parâmetro de carga c^2/a^2

das primeiras aplicações físicas dessas funções especiais. O comprimento do arco para a espécie II até IV pode ser expresso como:

$$s = \int_0^x \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \tag{9.20}$$

Esta integral não pode ser avaliada em termos de funções elementares.

3. **Princípio variacional**:. A classificação emerge da minimização do potencial funcional de energia:

$$\int \frac{ds}{R^2} = \text{minimum} \tag{9.21}$$

Onde R é o raio da curvatura.

A seguinte tabela apresenta as equações matemáticas e propriedades geométricas para cada uma das nove espécies de Euler:

* Propriedades Chave e Clarificações

Vários pontos importantes sobre a estrutura matemática:

- **Espécie I**:. A linha reta é o caso limitante como $c \to 0$, representando o estado natural (indeformado) da elástica.
- **Espécie III**:. O elástico retangular tem a propriedade especial de que o eixo é tangente à curva no ponto A.. Euler descobriu a notável relação de área: O produto das projeções horizontais e verticais é igual a $\pi a^2/4$.
- **Espécie V**:. O valor do parâmetro crítico $c^2/a^2 = 1.651868$ corresponde a.. $\sin(\angle PAM) = 0.651868$, produzindo a primeira configuração auto-toque.
- **Espécie VII**:. Em.. $c^2/a^2 = 2$, a curva torna-se assintótica para a linha de base. O nó (ponto de auto-interseção) ocorre em $x = 0.2884c$ com um ângulo nodal de 112°57′.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 9.9: Espécie de elásticos de Euler: propriedades geométricas e equações curvas

Espécie	Nome	Equação da curva ou comprimento do arco	Características geométricas
I	Linea recta	$y = 0$ (linha reta)	Estado natural; $R = \infty$; $c \to 0$
II	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	Curva simples. Sem inflexão; $0 < c^2/a^2 < 1$; Convexo; Trócodes para pequenos c
III	Elastica rectangula	$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{128} + \cdots\right)$	Eixo tangente em A; $c^2/a^2 = 1$; Relação de área: $4AD \cdot AC = \pi a^2$
IV	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	Ponto de inflexão; $1 < c^2/a^2 < 1.652$; lóbulos podem se auto-intersectar
V	–	$c^2/a^2 = 1.651868$	Auto-toque; As extremidades se encontram; $AD = 0$; Ângulo nodal 81°22′; $\sin(\angle PAM) = 0.651868$
VI	–	Similar à Espécie IV	Auto-cruzamento; extensão além do contato; $1.652 < c^2/a^2 < 2$; Alcance do ângulo nodal: 81°22′ – 112°57′
VII	–	$y = c\sqrt{c^2 - x^2} - \dfrac{c}{2}\ln\dfrac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x}$	Assintótico para a linha de base AB; $c^2/a^2 = 2$; Ângulo nodal 112°57′; Node at $x = 0.2884c$ do centro
VIII	–	$dy = \dfrac{(x^2 - c^2 + g^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(x^2 - g^2)}}$	Múltiplos loops; $c^2/a^2 > 2$; limitado entre limites paralelos em $x = \pm c$ e.. $x = \pm g$; Sem inflexões
IX	Circulus	$R = \text{constant} = a^2/(hq)$	Círculo; Caso limitante; curvatura uniforme

Victor E. Saouma
Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- **Espécie VIII**:. Por.. $c^2/a^2 > 2$, a curva exibe múltiplos laços confinados entre os limites paralelos em $x = \pm c$ e.. $x = \pm g$.

* Relacionamento entre espécies e números

As 28 figuras nas placas de Euler ilustram várias manifestações destas 9 espécies matemáticas. A distribuição não é uniforme porque:

- Algumas espécies (como II e VIII) exibem maior variedade em suas realizações físicas
- Aplicações práticas de engenharia favorecem certas configurações
- Casos transitórios entre espécies requerem múltiplas ilustrações

A classificação matemática 9.9) fornece a base teórica, enquanto as 28 figuras demonstram a realidade física dessas abstrações matemáticas.

Soluções Matemáticas e Classificação Completa Para o elástico puro com curvatura κO método de Euler produz a quarta ordem:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$$

Onde λ é um parâmetro determinado por condições de contorno. Esta equação pode ser escrita mais elegantemente em termos de curvatura e comprimento do arco como:

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} = \lambda\kappa$$

As soluções dependem do sinal e da magnitude de λ:

Por.. $\lambda > 0$:

$$\kappa(s) = A\cosh(\sqrt{\lambda}s) + B\sinh(\sqrt{\lambda}s)$$

Por.. $\lambda < 0$:

$$\kappa(s) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}s) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}s)$$

Por.. $\lambda = 0$:

$$\kappa(s) = A + Bs$$

Através de análise sistemática dos parâmetros, Euler identificou as nove espécies distintas de curvas elásticas descritas acima, cada uma correspondente a diferentes faixas do parâmetro λ e diferentes configurações físicas, desde linhas retas através de várias formas curvas até completar círculos.

Soluções Integrais Elípticas A análise de Euler revela que as soluções exatas envolvem integrais elípticas, tornando o elástico um dos primeiros exemplos de um problema físico exigindo estas funções especiais avançadas. A representação paramétrica das curvas elásticas assume a forma:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{sn}(u, k)\, du$$

Onde cn e.. sn São Jacobi funções elípticas com módulo k determinado pelo condições de contorno.

CÓPIA PARA REVISÃO

Para o elástico retangular (o desafio original de Jacob Bernoulli), Euler mostra que o comprimento da curva pode ser expresso como:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

Onde $K(k)$ é a completa integral elíptica do primeiro tipo. A relação entre a força aplicada e a deformação resultante envolve:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

Esta conexão entre teoria elástica e integrais elípticas foi revolucionária, fornecendo soluções exatas para problemas anteriormente intratáveis enquanto conduzia desenvolvimento matemático significativo.

Da classificação para soluções exatas Enquanto a classificação das nove espécies de Euler fornece uma compreensão qualitativa completa do comportamento elástico, obter soluções quantitativas requer ferramentas matemáticas sofisticadas. As equações diferenciais que governam cada espécie, particularmente a relação fundamental na Eq. 9.19, não pode ser resolvido usando funções elementares. Em vez disso, suas soluções exatas exigem o uso de integrais elípticas - funções especiais que ainda estavam sendo desenvolvidas durante o tempo de Euler. Este desafio matemático tornou o problema elástico uma força motriz na análise do século 18, empurrando os limites do que era matematicamente possível.

Soluções Integrais Elípticas A análise de Euler revela que as soluções exatas envolvem integrais elípticas, tornando o elástico um dos primeiros exemplos de um problema físico exigindo estas funções especiais avançadas. A representação paramétrica das curvas elásticas assume a forma:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \mathrm{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \mathrm{sn}(u, k)\, du$$

Onde cn e.. sn são funções elípticas de Jacobi com módulo k determinado pelo condições de contorno.

Para o elástico retangular (o desafio original de Jacob Bernoulli), Euler mostra que o comprimento da curva pode ser expresso como:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

Onde $K(k)$ é a completa integral elíptica do primeiro tipo. A relação entre a força aplicada e a deformação resultante envolve:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

Esta conexão entre teoria elástica e integrais elípticas foi revolucionária, fornecendo soluções exatas para problemas anteriormente intratáveis enquanto conduzia desenvolvimento matemático significativo.

Pilar Flambagem: A Primeira Fórmula Euler Euler 1744 *Methodus inveniendi* (Euler, 1744b) continha mais do que a célebre teoria das curvas elásticas: Escondido na Seção 37 estava o germe de sua mais famosa contribuição para a estabilidade estrutural. Pronto *Quase de passagem*, ele escreveu a relação que mais tarde ficou conhecida como a fórmula Euler flambagem. Nesta seção revisitamos essa aparência precoce e reconstruímos uma derivação moderna de sua espécie I elástica. Em §9.5.2, então vamos voltar para sua memória de 1759 (Euler, 1759), onde Euler finalmente reconheceu o verdadeiro significado da fórmula e a colocou no centro de uma teoria geral de estabilidade pilar.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Nisi ergo ônus geftandum P Majus cabem em quam $\pi^2 Ekk/a^2$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; Contra vero si pondus P Fuerit Majus, coluna incurvationi resistir não poterit. Manente autem elástico colunae, atque adeo ejus crassitie eadem, pondus P, quod sene periculo gestare valet, erit reciproce ut quadritum altitudinis columnae: colunacaque Duplo altior quartam tantum oneris partem gestare poterit.
>
> Portanto, a menos que a carga P Ser suportada é maior do que $\frac{E\pi^2 k^2}{a^2}$, não haverá absolutamente nenhum medo de dobrar; por outro lado, se o peso P Seja maior, o pilar será incapaz de resistir à flexão. Agora, quando a elasticidade do pilar e da mesma forma sua espessura permanecer o mesmo, o peso P que pode carregar sem perigo será inversamente proporcional ao quadrado da altura do pilar; E um pilar duas vezes mais alto será capaz de suportar apenas um quarto da carga.
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Seção 37

Esta fórmula, $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ em notação moderna (onde Euler's Ekk corresponde a.. Rigidez da flexão EI e.. a até pilar comprimento L), representa um dos resultados mais importantes em mecânica estrutural e permanece fundamental para o projeto de engenharia hoje. Este trabalho marca o nascimento da teoria da estabilidade estrutural, transformando engenharia de prática empírica em disciplina científica.

Uma interpretação moderna desta declaração segue:

A Fórmula Escondida na Espécie I (1744)

Euler's 1744 *Methodus inveniendi* continha uma classificação completa de curvas elásticas em nove espécies distintas (§9.3.2.2.1), mas enterrado dentro da Espécie I - representando configurações quase retas - lay uma visão profunda que Euler inicialmente não conseguiu reconhecer. Seguindo Fraser, 1991 Nós examinamos esta descoberta negligenciada.

Para a espécie I, a relação de parâmetros c^2/a^2 é infinitamente pequeno, significando o ângulo $\angle PAM \simeq 90$ e o segmento ACB é apenas ligeiramente curvado. Desde então c é pequeno com respeito a a, equação elástica geral de Euler (9.19(repetido aqui)

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.22}$$

Onde a e.. c são parâmetros determinados pelo condições de contorno e cargas aplicadas, com a relação c^2/a^2 caracterizando as diferentes espécies de curvas elásticas.

Passo 1: Aplique a Condição Espécie I: Para a espécie I, a característica definidora é que a razão de parâmetros c^2/a^2 é infinitamente pequeno. Matematicamente, isso significa $c^2 \ll a^2$, que nos permite fazer as seguintes aproximações:

$$a^2 - c^2 \approx a^2$$
$$2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2$$

Substituindo essas aproximações em Eq. 9.22:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 + x^2)}} dx$$

Passo 2: Simplifique o Denominador: Já que estamos considerando pequenas deformações em uma quase reta pilar, x^2 Continua pequeno em comparação com a^2.. Portanto:

$$\sqrt{2a^2 + x^2} \approx \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Isso nos dá:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx$$

Passo 3: Mais aproximação para pequenas deformações Para a configuração quase reta característica do incipiente flambagem, a coordenada x permanece pequeno em comparação com o parâmetro a.. Neste limite:

$$a^2 + x^2 \approx a^2$$

Substituindo esta aproximação:

$$dy = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx$$

Passo 4: Forma Final Faccionando a constante sob a raiz quadrada:

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \tag{9.23}$$

Esta equação simplificada descreve a forma de um pilar à beira de flambagem. As aproximações matemáticas correspondem aos pressupostos físicos:

- $c^2/a^2 \ll 1$:. O pilar permanece quase reto
- Pequeno x:. As deformações são infinitas
- $\angle PAM \simeq 90$:. A tangente na base é quase vertical

Integrar esta expressão produz $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c}$.. Por um pilar de meio comprimento f, o condições de contorno levar a $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$.. Substituindo o parâmetro de força $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$ Dá:

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \tag{9.24}$$

Este resultado continha uma notável implicação que Euler mencionou apenas de passagem: uma força finita é necessária para produzir até mesmo uma curva infinitesimal do pilar. O significado físico, que isso representa um limiar crítico para a estabilidade estrutural, permaneceria desconhecido por treze anos.

Conclusão A classificação elástica de Euler opera em dois níveis: o referencial teórico de 9 espécies matemáticas e a ilustração prática através de 28 figuras. Essa abordagem dupla, combinando rigorosa análise matemática com documentação visual abrangente, estabeleceu um padrão metodológico que influenciou a classificação científica entre as disciplinas, desde cristalografia até taxonomia biológica. A aparente discrepância entre 9 espécies e 28 figuras não reflete uma contradição, mas a riqueza do comportamento elástico dentro da estrutura matemática de Euler.

Mais fundamentalmente, este trabalho representa uma das primeiras classificações completas em física matemática, demonstrando como a variação sistemática de parâmetros pode gerar todo o espectro de comportamentos possíveis em um sistema físico. A síntese de Euler de princípios variacionais, equações diferenciais e integrais elípticas estabeleceu a elasticidade como um problema fundamental que continua informando mecânica computacional moderna e dinâmica não linear.

CÓPIA PARA REVISÃO

9.3.2.3 O Quadro Variacional Moderno

Forma forte: Clássico Euler-Lagrange O desenvolvimento histórico do cálculo de variações, das investigações elásticas de Jakob Bernoulli através do tratamento sistemático de Euler em seu *Methodus Inveniendi*, estabeleceu os princípios fundamentais e demonstrou o poder dos métodos variacionais. A estrutura matemática que usamos hoje baseia-se nestas fundações clássicas, ao incorporar conceitos modernos que proporcionam maior rigor e aplicabilidade mais ampla. Para apreciar plenamente a elegância e utilidade prática dos métodos variacionais, é instrutivo examinar a equação Euler-Lagrange de uma perspectiva matemática contemporânea. A análise variacional moderna emprega definições precisas de espaços de função admissíveis, formulações sistemáticas fracas que estendem o escopo dos métodos clássicos, e classificações rigorosas de natural versus essencial condições de contorno que esclarecem o próprio tratamento de restrições. Estas ferramentas contemporâneas não só iluminam a estrutura matemática subjacente mais claramente do que era possível para os pioneiros primitivos, mas também permitem a aplicação sistemática de princípios variacionais à engenharia complexa e problemas científicos através de métodos computacionais como o método dos elementos finitos. Uma apresentação rigorosa do método é dada no Capítulo 47.

Em engenharia estrutural (e mecânica) pode ser abordado de dois ângulos diferentes:

Newtonian aproximação, equilíbrio do momento (equilíbrio).

Lagrangian Abordagem: Equilíbrio de energia (termodinâmica).

O problema fundamental do cálculo da variação, por outro lado, é encontrar uma função $u(x)$ De tal forma que..

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{9.25}$$

E que está parado

$$\delta\Pi = 0$$

Onde δ indica que o *operador de variação* (Não confundir com derivativo)

Nós definimos $u(x)$ para ser uma função de x no intervalo (a, b), e F para ser uma função real conhecida (como a densidade de energia), e nós definir o *Domínio* de um funcional como a coleção de funções admissíveis pertencentes a uma classe de funções no espaço de função em vez de uma região no espaço coordenadas (como é o caso de uma função).

Procure a função $u(x)$ Que extremiza Π.. Então, vamos lá $\tilde{u}(x)$ ser uma família de caminhos vizinhos da função extremizadora $u(x)$ e assumir que no final $x = a, b$ Eles coincidem. Defina $u(\tilde{x})$ como a soma do caminho extremizador e alguma variação arbitrária, Fig. 9.19.

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x)$$

Onde ε é um pequeno parâmetro, e $\delta u(x)$ é o *Variação* de $u(x)$ Isso leva a

$$\underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x = a, b)} = 0 \tag{9.26}$$

Cada termo deve ser zero.

1. A primeira parte nos dará o *Equação de Euler*.
2. A segunda parte nos permitirá definir o *condições de contorno*.

CÓPIA PARA REVISÃO

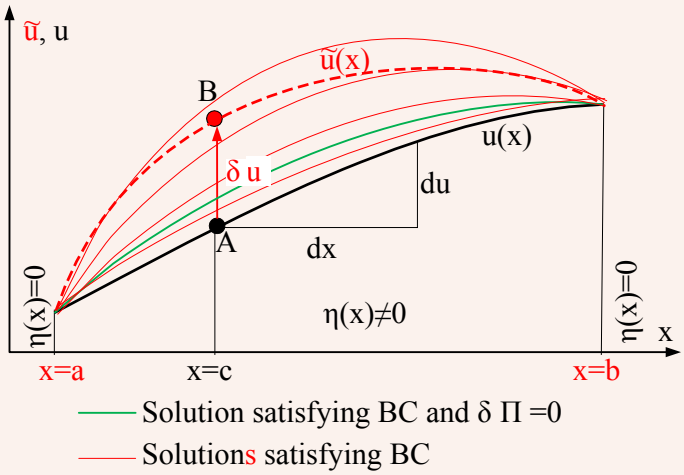


Figura 9.19: Operadores diferentes e diferenciais

Parte I em Eq. 9.26 Rende a Forma Forte.

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{9.27}$$

Este equação diferencial é chamado de *Equação Euler-Lagrange* associada a Π e é uma condição necessária para $u(x)$ Para extremizar Π.

Revisitando a segunda parte da Eq. 9.26, nos permite definir o condições de contorno, Fig. 9.19.

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{9.28}$$

Isso pode ser alcançado através das seguintes combinações

$$\begin{array}{llllll}
\eta(a) = 0 & \text{e} & \eta(b) & = 0 & \text{Essencial} & \Gamma_u \\
\eta(a) = 0 & \text{e} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Mista} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{e} & \eta(b) & = 0 & \text{Mista} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{e} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Natural} & \Gamma_t
\end{array}$$

Como exemplo: A energia potencial total de uma viga suportando uma carga uniforme p é dado por

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right) dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F} dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Nós procuramos derivar a primeira variação de Π. Integrando por parte duas vezes

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w \right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w \right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p \right]}_{\text{Euler Eq.}} \delta w dx = 0
\end{aligned}$$

Ou

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{for all x}$$

que é o governo equação diferencial de vigas e os condições de contorno são dados por

Essencial		Natural
$\delta w' = 0$	ou	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	ou	$(EIw'')' = -V = 0$

Forma Fraca: Métodos Residuais de Galerkin/Peso Note que o processo pode ser aplicado ao contrário através do método Galerkin 52) que transforma uma forma forte equação diferencial em uma forma fraca multiplicando a equação governante por uma função de teste $v(x)$ e integrando-se sobre o domínio. A integração por partes é então aplicada para reduzir a ordem dos derivados, distribuindo-os entre as funções de teste e teste enquanto naturalmente incorpora condições de contorno. Este processo produz uma declaração variacional onde a solução é procurada em um subespaço de dimensão finita, envolto por funções de base.

Para a flexão de uma viga, considere a forma forte dada pela quarta ordem equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2} \right) = q(x), \quad x \in [0, L] \tag{9.29}$$

Onde $w(x)$ é a deflexão, EI é a rigidez da flexão, e $q(x)$ é o carga distribuída. Multiplicando por uma função de teste $v(x)$ e integrando:

$$\int_0^L v(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx = \int_0^L v(x)q(x)dx \tag{9.30}$$

Aplicando integração por partes duas vezes para transferir derivados de w para v, e incorporando apropriado condições de contorno, produz a forma fraca:

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx = \int_0^L v(x)q(x)dx + \text{boundary terms} \tag{9.31}$$

Esta formulação fraca requer apenas C^1 continuidade em vez de o C^3 continuidade exigida pela forma forte, tornando-a adequada para elemento finito discretização.

9.3.3 Resumo Cronológico dos dois primeiros desafios

O problema elástico se desenvolveu ao longo de cinco décadas, tabela 9.10 resume este desenvolvimento cronológico.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 9.10: Desenvolvimento cronológico do trabalho de Jakob Bernoulli sobre cálculo diferencial e o problema elástico, desde as primeiras publicações até a conclusão póstuma.

Ano/Período	Publicação/Fonte	Conteúdo e Significado
1670s	Newton (não publicado)	Estudei curvas elásticas em particular, mas não publiquei resultados§8.2.2)
1689	*Espécime de cálculo primário diferencial* (Bernoulli, 1689) (*Acta Eruditorum*)	A primeira demonstração de Bernoulli do cálculo Leibnizian; aplicações para problemas elementares; Uma apresentação programática do método.
1690 Junho	*Espécime alterum calculi differencialis* (Bernoulli, 1690) (*Acta Eruditorum*)	O corpo principal trata a espiral logarítmica, loxodrome e triângulos esféricos. O ponto central *Additamentum de Problema Funiculario* coloca o problema elástico codificado em um famoso anagrama (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690 Outubro	O prazo passou. Nenhuma solução apresentada por outros matemáticos.	
1692	*Meditação CLXX* (Bernoulli, 1677-1705) (Diário privado)	Bernoulli completou sua solução elástica em seu caderno científico (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 Junho	*Curvatura laminae elásticae* (*Acta Eruditorum*)	Solução elástica completa publicada com descriptografia cifrada, prova matemática e "teorema dourado sobre curvatura- uma ferramenta analítica chave para problemas de curva elástica (Bernoulli, 1694).
1694	Huygens critica e resposta de Bernoulli	Publiquei uma troca *Acta Eruditorum* esclarecendo múltiplas configurações elásticas (Bernoulli, 1694).
Fim da década de 1690, início da década dos 1700	Documentos variados e isoperimétricos	Desenvolvimentos relacionados pelos Bernoullis e Leibniz estendendo métodos de curvatura e minimização.
1744	*Ópera Omnia* (Jakob Bernoulli, póstumo, editado por G. Cramer)	Compilação do trabalho elástico completo de Bernoulli da *Meditação* e manuscritos (Bernoulli, Johann, 1713).
1744	Euler, *Methodus inveniendi*	Tratamento sistemático definitivo usando cálculo de variações, construindo na fundação de Bernoulli (Euler, 1744b).

Este linha do tempo ilustra a evolução da elástica do desafio geométrico ao problema fundamental na física matemática, demonstrando como os avanços matemáticos muitas vezes exigem décadas de refinamento em

CÓPIA PARA REVISÃO

várias gerações de estudiosos. A resolução do problema estabeleceu tanto as bases matemáticas de mecânica estrutural como os princípios variacionais que se tornariam centrais para a física teórica.

9.4 Um desafio anônimo: Uma ponte entre problemas (1724)

`Adaptado de (Truesdell, 1960 )`

Em agosto de 1724, uma nota provocativa apareceu no *Acta Eruditorum*, Fig. 9.20, intitulado "O famoso O problema da catenária propôs novamente aos geometros, especialmente àqueles que são membros das sociedades reais de Londres e Paris (Anonymous, 1724). O desafio, assinado misteriosamente como "LBC[26]',' posou o seguinte problema:

> Deixe ADB ser uma corda ou pequena corrente, não infinitamente mas moderadamente flexível, Não imaginário, mas real. Que pregos em A e B seguram fixo, de modo que Pelo seu próprio peso desce em direção à terra em D e assume a curva figura ADB. Este número, que não parece ser investigado por meros hipóteses mas por fatos reais, é para o seu julgamento, homens ilustres.
>
> Suponhamos que os pontos extremos A e B desta corrente se aproximem ou recuem de Um ao outro, de tal forma que as tangentes nesses pontos são paralelas a um outro, e portanto normal para o horizonte (isto é, vertical). Isso Este caso é possível é facilmente demonstrado, e sem dúvida não é desconhecido para você. No entanto, nesse caso a curva parece ser oval, como o A figura indica o suficiente. Mas esse caso inclui todos os outros: para Se, por exemplo, a corrente ou corda for mantida fixa em qualquer ponto E e G, As partes intermediárias AE, BG sendo removido, você acha que a figura de A parte restante do EDG foi alterada? Adeus.
>
> Anonymous, 1724 *"Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum"*, pg. 366

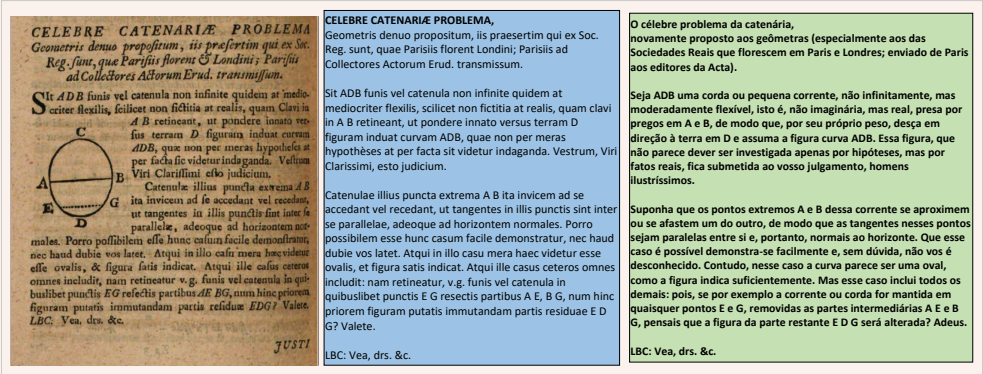


Figura 9.20: O desafio anônimo de 1724 em *Acta Eruditorum*, assinado misteriosamente como "LBC" (Anonymous, 1724)

[26]Apesar de cuidadosa investigação acadêmica, a identidade deste O signatário nunca foi estabelecido. Como diz Truesdell, "LBC, quem quer que seja foi, teve que esperar vários anos por uma resposta (Truesdell, 1960). Até hoje, o autor permanece desconhecido.

CÓPIA PARA REVISÃO

Este desafio difere fundamentalmente do problema clássico da catenária introduzindo o elemento finito rigidez - uma característica que Conecta o fosso entre correntes perfeitamente flexíveis e hastes elásticas. O A dificuldade da unificação estava em reconciliar duas mecânicas distintas Formulações: o problema catenário, expresso em termos de forças de tensão, e o problema elástico, expresso em termos de momentos fletores (Truesdell, 1960). Jakob Bernoulli tinha posado precisamente isso Pergunta em seus papéis elásticos originais, pedindo para investigar o tipo de curvas engendradas quando a faixa elástica é dobrada pelo seu próprio peso em Mas o problema permaneceu intacto por mais de três décadas. Enquanto este desafio de 1724 parecia passar despercebido inicialmente, sua solução forneceria o assunto de Daniel Bernoulli e As primeiras publicações de Euler sobre teoria unificada em 1728.

9.4.1 A Colaboração Bernoulli-Euler: Primeira Unificação (1728)

Em 1728, St. Petersburg, Daniel Bernoulli e Leonhard Euler dominaram a teoria emergente de: Ambos foram.. influenciado pelo trabalho pioneiro de Jakob Bernoulli, e como membros júnior do A Academia Imperial de Ciências, eles se engajaram em competição amigável para Resolver os mesmos problemas. Daniel Bernoulli, então 28 anos, já era um cientista célebre, enquanto Euler, aos 21 anos, tinha publicou apenas três artigos.

Como o próprio Euler relatou mais tarde, "Recentemente, o distinto Sr. Bernoulli e eu nos deparamos com esta pergunta, e considerando-a não ser inelegante, Nós o atacamos, e obtivemos soluções ao mesmo tempo que concordam Excelentemente um com o outro (Euler, 1728, pg. 70).. Em Fevereiro 1728, cada um comunicou uma teoria unificada de flexível e elástico linhas, seus papéis aparecendo consecutivamente no mesmo volume do *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Fig. 9.21 (Bernoulli, Daniel, 1744, pg. 57-63) (Euler, 1728, pg. 64-77).. Esta publicação simultânea marcou a primeira unificação bem sucedida das teorias da catenária e elástica muito problema LBC tinha posado quatro anos antes.

9.4.1.1 Daniel Bernoulli (Estabelecendo o Princípio do Momento-Curvatura) 1728

Em 1728, St. Petersburg, Daniel Bernoulli publicou um trabalho inovador que estabeleceria a base teórica para toda teoria subsequente viga. O jornal dele (Bernoulli, Daniel, 1744), intitulado *Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observatibus extensi* (Método universal para determinar a curvatura de um fio esticado por forças que seguem qualquer lei entre si), introduziu a relação momento-curvatura fundamental que leva seu nome de família, Fig. 9.22.

A contribuição revolucionária de Bernoulli foi reconhecer que A resistência elástica deve ser proporcional à curvatura. Trabalhando com uma viga submetido tanto ao seu próprio peso e cargas aplicadas, ele estabeleceu que o total momento fletor em qualquer ponto deve igualar a resistência elástica do material.

Para um elemento viga submetido ao auto-peso, Bernoulli mostrou que o momento contribuição do peso do segmento de comprimento s é:

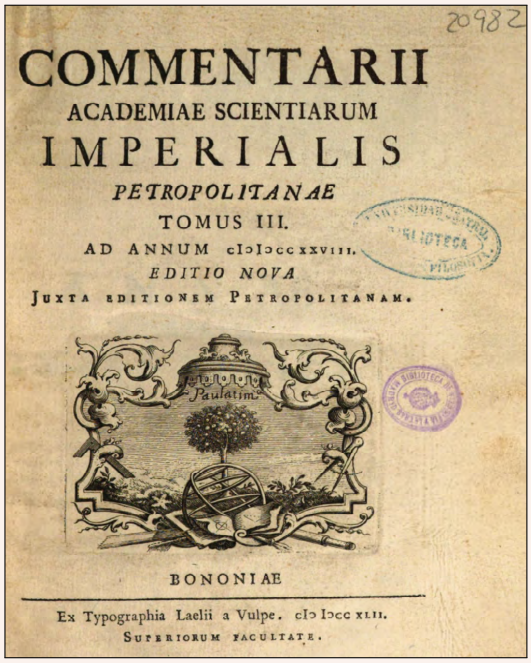
$$g\sigma s(x - x_e) = g\sigma s\left(x - \frac{1}{s}\int_0^s x\, ds\right) = g\sigma \int_0^s s\, dx$$

Onde g é aceleração gravitacional, σ é o peso da viga por unidade de comprimento, e x_e representa a localização centróide do segmento.

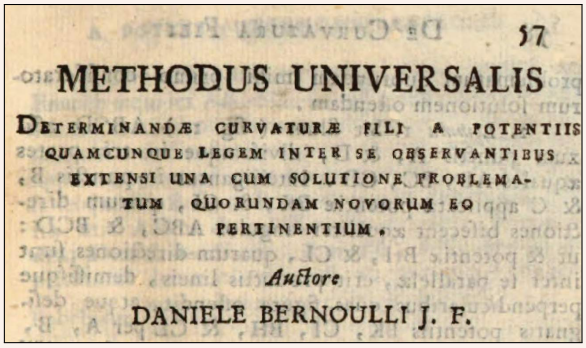
Adicionando o momento de um peso aplicado PA visão crucial de Bernoulli era que este momento total deve ser equilibrado pela resistência elástica do material:

$$\mathcal{M} = \frac{B}{r} \tag{9.32}$$

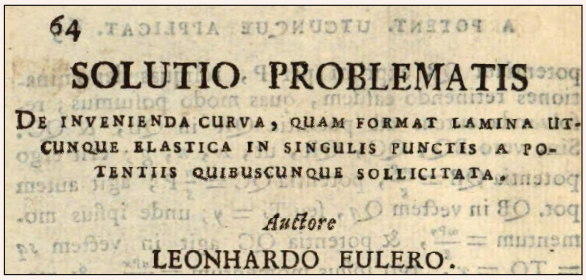
CÓPIA PARA REVISÃO



Uma edição especial



Daniel Bernoulli (Bernoulli, Daniel, 1744)



Leonhard Euler (Euler, 1728)

Figura 9.21: Daniel Bernoulli e Leonhard Euler, o inovador 1728 publicações (Euler, 1728).

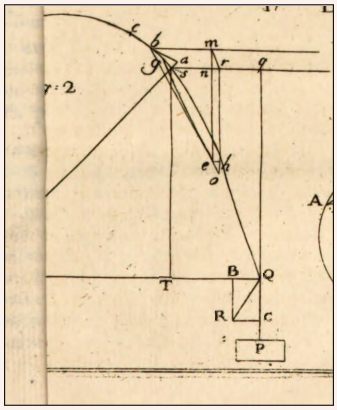


Figura 9.22: A análise de Bernoulli mostra os efeitos de carga auto-pesados e aplicados

Onde B representa o que Bernoulli chamou de "módulo da dobra"e r é o raio da curvatura. Esta é a primeira declaração explícita da relação momento-curvatura - o fundamento de toda teoria viga.

Assim, a equação de equilíbrio de Bernoulli torna-se:

$$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r} \tag{9.33}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

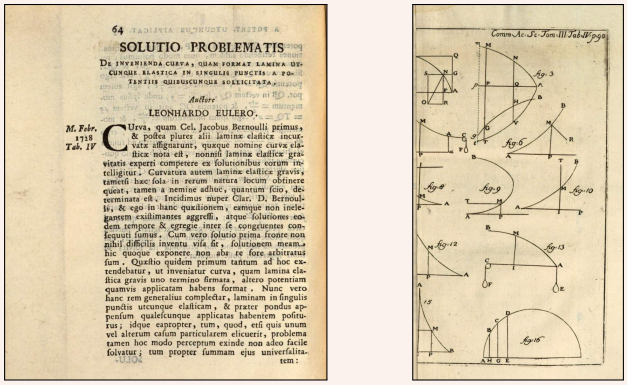

64
SOLUTIO PROBLEMATIS
De invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis functis a potentiis quibuscunque solicitata.
Auctore
LEONHARDO EULERO.
M. Febr. 1728
Tab. IV
Curva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus, & postea plures alii lamine elastice incurvatæ affignarunt, quæque nomine curvæ elasticæ nota eſt, nonnifi lamine elaſticæ gravitatis experti competere ex ſolutionibus eorum intelligitur. Curvatura autem lamine elaſticæ gravis, tametſi hac ſola in rerum natura locum obtinere queat, tamen a nemine adhuc, quantum ſcio, determinata eſt. Incidimus nuper Clar. D. Bernoulli, & ego in hanc quæſtionem, eamque non inelegantem exiliantes aggreſſi, atque ſolutiones eodem tempore & egregie inter ſe congruentes conſequuti ſumus. Cum vero ſolutio prima fronte non nihil difficilis inventu viſa ſit, ſolutionem meam hic quoque exponere non alie re fore arbitratus ſum. Quidlio quidem primum tantum ad hoc extendebatur, ut inveniatur curva, quam lamina elaſtica gravis uno termino fixata, altero potentiam quamvis applicatam habens format. Nunc vero hanc rem generaliius completar, laminam in ſinguliis punctis utcunque elaſticam, & præter pondus appenſum qualeſcunque applicatas habentem poſituras; idque eatropter, tum, quod, etſi quis unum vel alterum caſum particularem elicuerit, problema tamen hoc modo perceptum exinde non adeo facile ſolvatur; tum propter ſummam ejus univerſalitatem:

Figura 9.23: Euler, 1732 *Solutio problematis de invenienda curva*

O trabalho de Bernoulli em 1728 estabeleceu a base conceitual para mecânica estrutural ao introduzir o princípio da Curva do Momento. No entanto, sua abordagem manteve-se geométrica e caso específico, sem o quadro matemático sistemático necessário para lidar com as condições gerais de carga e restrições de fronteira.

As técnicas matemáticas disponíveis para Bernoulli em 1728 o limitaram a casos de carregamento relativamente simples. Problemas complexos envolvendo arbitrário cargas distribuídas, variáveis propriedades materiais, ou geral condições de contorno permaneceram além do alcance de seus métodos. Esta limitação seria crucial para motivar os desenvolvimentos matemáticos subsequentes.

A contribuição de Bernoulli em 1728 forneceu o essencial insight físico - que a resistência elástica é proporcional à curvatura - mas faltava a maquinaria matemática para explorar essa visão completamente. A equação fundamental $\mathcal{M} = B/r$ estava correto, mas aplicá-lo sistematicamente a problemas complexos exigia métodos matemáticos que ainda não existiam.

Essa lacuna entre compreensão física e capacidade matemática seria crucial para motivar os desenvolvimentos subsequentes. O desafio enfrentado pelos matemáticos depois de 1728 foi claro: como construir métodos analíticos sistemáticos sobre a visão fundamental de Bernoulli para lidar com condições arbitrárias de carga, geometrias complexas e restrições gerais de limites.

A relação de 1728 com a curva do momento de Bernoulli permanece inalterada no moderno análise estrutural. Cada cálculo hoje emprega o princípio que ele primeiro articulou: $M = EI\kappa$, onde EI corresponde ao seu "módulo de dobra" B.. Esta continuidade ao longo de quase três séculos demonstra a natureza fundamental de sua visão e seu significado duradouro para mecânica estrutural.

9.4.1.2 Euler (Da Perspectiva Geométrica à Revolução Matemática) (1732)

Quatro anos depois de Bernoulli ter estabelecido o princípio da Curvatura do Momento, Euler se levantou para enfrentar o desafio matemático em seu trabalho de 1732 *Solutio problematis de invenienda curva*, (Euler, 1732), Fig. 9.23, representa um momento divisor de águas na mecânica, estabelecendo três contribuições fundamentais: (1) a primeira teoria geral unificando curvas elásticas e flexíveis sob uma única estrutura matemática, (2) a hipótese elástica fundamental $M = v\kappa$ que fundamenta toda a teoria moderna viga, e (3) métodos geométricos sistemáticos que revelaram tanto o poder quanto as limitações das técnicas matemáticas do século XVIII, motivando em última análise o desenvolvimento de cálculo variacional.

Contexto Histórico e Visão Revolucionária de Euler Quando Euler abordou o problema elástico em 1732 (Euler, 1732), ele estava respondendo ao desafio de Jacob Bernoulli 1691 com escopo dramaticamente expandido. As palavras iniciais de Euler revelam sua profunda visão:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Curva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus et postea plures alii laminae elásticae incurvatae atribui arunt... Nonnisi laminae elásticae gravitatis experti competere ex solutionibus eorum intelligitur.
>
> A curva que o célebre Jacob Bernoulli primeiro atribuiu a lâminas elásticas curvas aplica-se apenas a lâminas elásticos sem peso, enquanto na natureza, todos os corpos elásticos têm peso.
> Euler, 1732 "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*"

Esta observação identificou uma limitação fundamental: Todas as soluções anteriores aplicadas apenas em tiras elásticas sem peso, enquanto corpos elásticos reais sempre têm peso. O objetivo de Euler era resolver o problema geral de *Lâminas elásticas pesadas* sob condições arbitrárias de carga.

A Hipótese Plástica Fundamental A contribuição mais revolucionária de Euler foi reconhecer que *Resistência elástica é proporcional à curvatura.*. Ele propôs que quando os elementos elásticos são girados pela força, o momento elástico é proporcional tanto à resistência elástica quanto ao ângulo de rotação:

$$M = \frac{v}{r} = v\kappa$$

Onde v é a força elástica e $\kappa = 1/r$ é a curvatura. Esta é precisamente a relação fundamental da teoria moderna, escrita hoje como $M = EI\kappa$ Onde EI corresponde ao parâmetro de Euler v.. Este insight, óbvio em retrospecto, foi revolucionário para o início do século 18 e forma a fundação para todos os subseqüentes mecânica estrutural.

A Equação Mestre e Análise Geométrica Através de uma análise geométrica sistemática envolvendo dois lemas fundamentais sobre resolução de forças e cálculos de momento, Euler derivava sua equação mestre:

$$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$$

Veja isso na Fig. 9.23:

- Fig. Três. Mostra a configuração geométrica básica para resolução de força
- Fig. 6:00h. Parece ilustrar cálculos de momentos em torno de diferentes pontos
- Figos. 8-10: Mostre várias configurações de curva (prováveis catenárias e curvas elásticas)
- Fig. 12-13: Demonstrar diferentes cenários de carga e condições de contorno
- Fig. 15: Mostra o que parece ser uma vela ou membrana carregada pelo vento
- Fig. 16:00h. Mostra uma configuração semicircular

onde:

- v = resistência elástica (rigidez da flexão)
- r = raio de curvatura
- E, F = cargas finais aplicadas em direções verticais e horizontais
- P, Q = cargas distribuídas por unidade de comprimento
- x, y = Coordenadas cartesianas

Interpretação Moderna da Equação Mestre de Euler A equação mestre de Euler é essencialmente o *Equação de equilíbrio do momento* para uma viga, expresso em termos de curvatura. Sua formulação de 1732 representa a primeira declaração geral de equilíbrio temporal para curvas elásticas.

CÓPIA PARA REVISÃO

A moderna relação Moment-Curvature:

$$M = EI\kappa = \frac{EI}{R} \tag{9.34}$$

onde:

- M = interno momento fletor
- EI = rigidez da flexão (módulo elástico × momento de inércia)
- $\kappa = 1/R$ = curvatura
- R = raio de curvatura

O equivalente contemporâneo é o **equação diferencial da curva elástica**:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.35}$$

Para uma viga com cargas distribuídas $q(x)$ (vertical) e $p(x)$ (horizontal), e forças de fim V e.. H:

$$M(x) = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.36}$$

Combinando equações (9.35) e.. (9.36) Obtemos a equação de contrapartida moderna:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.37}$$

$$\text{Euler's } \frac{v}{r} \leftrightarrow \text{Modern } \frac{EI}{R} = EI\kappa \tag{9.38}$$

$$\text{Euler's } v \leftrightarrow \text{Modern } EI \tag{9.39}$$

$$\text{Euler's } Ex + Fy \leftrightarrow \text{Modern } Vx + Hh \tag{9.40}$$

$$\text{Euler's } \int P\,dx + \int Q\,dy \leftrightarrow \text{Modern } \int q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.41}$$

A notável visão é que a abordagem geométrica de Euler, 1732, capturou exatamente a mesma física que expressamos hoje através da equação fundamental viga, demonstrando a validade duradoura de seu quadro matemático apesar de quase três séculos de desenvolvimento posterior.

Princípio de Unificação Revolucionária Além de estabelecer a equação do equilíbrio fundamental, A visão mais profunda de Euler foi reconhecer que corpos perfeitamente flexíveis poderiam ser descritos pela mesma estrutura, configurando $v = 0$:

$$0 = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy \tag{9.42}$$

Este tratamento unificado revelou uma visão fundamental: catenárias, curvas elásticas e outras curvas mecânicas não eram entidades matemáticas separadas, mas membros da mesma família, diferindo apenas no valor do parâmetro elástico. Isso demonstrou a excepcional capacidade de Euler de perceber a unidade matemática subjacente em fenômenos físicos díspares.

CÓPIA PARA REVISÃO

Demonstrando o Poder Framework: A Solução Catenária Para demonstrar a versatilidade de seu framework, Euler mostrou como sistematicamente recuperou resultados conhecidos. Para a catenária comum (corda perfeitamente flexível sob carga vertical uniforme com $dP = a\,ds$, $Q = 0$, e $E = 0$), configuração $v = 0$ Em sua equação unificada dá:

$$0 = Fy + \int_A^M P\,dx \tag{9.43}$$

Através da análise geométrica sistemática usando as relações $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$ e técnicas de integração apropriadas, isso reduz à equação catenária familiar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Fy}{\sqrt{a^2y^2 - F^2}} \tag{9.44}$$

Esta derivação ilustrou como o quadro geral recupera sistematicamente os resultados conhecidos ao mesmo tempo que fornece uma visão geométrica mais profunda da mecânica subjacente. A natureza sistemática da abordagem de Euler contrastava acentuadamente com os métodos ad hoc anteriormente usados para tipos individuais de curvas.

O Desafio Intratável: Laminae elástica pesada Quando Euler tentou seu objetivo primário - resolver lâminas elásticas pesadas sob seu próprio peso - ele encontrou um desafio matemático fundamentalmente diferente. Para uma viga com densidade de peso a por unidade de comprimento, o carregamento distribuído cria uma distribuição de momento proporcional ao comprimento do arco, levando a:

$$\frac{v}{r} = \int as\,dx \tag{9.45}$$

Onde s representa o comprimento do arco de um ponto de referência para o local em consideração.

Esta equação apresenta uma dependência matemática circular que se mostrou intratável com os métodos do século 18. A dificuldade fundamental é que tanto o comprimento do arco s e o raio de curvatura r são funções da forma de curva desconhecida $y(x)$.. Especificamente:

Comprimento do arco: $s = \int_0^x \sqrt{1 + (dy/d\xi)^2}\,d\xi$

Curvatura: $\frac{1}{r} = \frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}$

Substituir essas relações transforma a equação de Euler em uma Integro-equação diferencial envolvendo a função desconhecida $y(x)$ e seus derivados de uma forma altamente não linear. Como o próprio Euler observou, tais equações não podem ser facilmente trabalhadas usando as técnicas matemáticas disponíveis em 1732, criando dependências matemáticas que resistiram a todos os métodos de solução elementar.

Limitações Matemáticas e Sementes da Revolução As limitações de Euler em 1732 revelaram a necessidade de ferramentas matemáticas mais poderosas:

1. **Dificuldades de integração**:. Casos de importância física não permitiram avaliar as integrais com técnicas disponíveis
2. **Métodos ad hoc**:. Cada problema exigia construções geométricas específicas, sem caráter sistemático
3. **Desaparecido Princípio de otimização**:. Nenhum princípio físico subjacente governava a seleção de soluções das possibilidades matemáticas

CÓPIA PARA REVISÃO

Estas limitações, particularmente o caso da lâmina elástica pesada, indicavam claramente que os problemas mecânicos fundamentais exigiam ferramentas matemáticas que ainda não existiam - motivando finalmente o desenvolvimento de Euler Cálculo variacional em 1744.

Conexão com a Teoria Moderna e Impacto Histórico Euler's hipótese elástica estabeleceu a base conceitual para o moderno análise estrutural. Hoje é.. Euler-Bernoulli viga teoria descende diretamente deste trabalho, com a relação fundamental $M = EI\kappa$ não se alterando em forma. O módulo elástico E e momento de inércia I Na notação moderna corresponde exatamente ao parâmetro de força elástica de Euler v.. Esta continuidade demonstra como as insights geométricos de Euler em 1732 identificaram corretamente a física essencial que permanece central na engenharia estrutural.

A abordagem geométrica sistemática, ao passo que eventualmente substituída por métodos variacionais, estabeleceu o modelo para a mecânica analítica: identificar princípios físicos fundamentais, desenvolver estruturas matemáticas expressando esses princípios, e aplicar técnicas de solução sistemática. Esta metodologia tornou-se o padrão para a física matemática.

Legado e Ponte para Revolução Analítica O trabalho de Euler em 1732 representa um momento crucial onde a percepção geométrica revelou tanto o poder quanto as limitações dos métodos matemáticos existentes. Ao demonstrar claramente que importantes problemas físicos excederam a capacidade das técnicas atuais, este trabalho forneceu motivação crucial para desenvolver cálculo variacional - a revolução matemática que permitiria uma solução sistemática de otimização Problemas em mecânica.

A unificação das curvas elásticas e flexíveis sob uma única estrutura exemplificava o gênio de Euler para perceber a unidade matemática subjacente. Esta abordagem tornou-se característica da física matemática do século 18: buscando princípios gerais que expliquem diversos fenômenos através de estruturas matemáticas comuns.

Mais significativamente, a identificação de Euler da hipótese elástica $M = v\kappa$ proveu a base conceitual sobre a qual toda a teoria subsequente viga foi construída. Cada moderno análise estrutural finalmente remonta a esta visão fundamental sobre a relação entre curvatura e resistência elástica.

O trabalho de 1732 é, portanto, tanto uma conquista culminante da mecânica geométrica quanto uma demonstração clara da necessidade de métodos matemáticos mais poderosos - posicionando-o perfeitamente como uma ponte entre a tradição geométrica do século XVII e o Revolução analítica do século XVIII.

9.4.1.3 Teoria Euler-Bernoulli

O termo moderno "Teoria Euler-Bernoulli"reflete uma cuidadosa atribuição histórica que reconhece as contribuições complementares de ambos Daniel Bernoulli 1728 e Euler 1732. Esta dupla designação, enquanto padrão na literatura contemporânea de engenharia, merece exame de sua precisão histórica e da evolução da própria terminologia.

Bernoulli: O componente "Bernoulli" da designação honra principalmente o estabelecimento de Daniel Bernoulli 1728 do fundamental relação momento-curvatura $\mathcal{M} = B/r$.. Isto representa o primeiro reconhecimento explícito de que a resistência elástica é proporcional à curvatura, a visão fundamental sobre a qual repousa toda a teoria subsequente. No entanto, a atribuição também reconhece implicitamente o legado mais amplo da família Bernoulli, particularmente A formulação 1691 de Jakob Bernoulli do problema elástico original que motivou todo o campo de investigação.

A contribuição de Daniel Bernoulli foi fundamentalmente conceitual: reconhecendo que o momento interno em uma curva viga deve igualar a resistência elástica do material, expressa como rigidez da flexão dividida pelo raio de curvatura. Este insight forneceu o princípio físico que governa a deformação elástica, mas faltava a maquinaria matemática necessária para aplicação sistemática em cenários complexos de carga.

Euler: O trabalho de Euler em 1732 elevou a visão física de Bernoulli em uma teoria matemática

CÓPIA PARA REVISÃO

abrangente. Enquanto Euler construía o princípio da Curvatura do Momento estabelecido por Daniel Bernoulli, suas contribuições eram transformadoras ao invés de meramente incrementais:

1. **Metodologia sistemática**:. Euler desenvolveu métodos geométricos que poderiam ser aplicados sistematicamente em diversas condições de carga
2. **Equação geral de equilíbrio**:. Sua equação mestre englobava propriedades elásticas arbitrárias, cargas distribuídas, e condições de contorno dentro de uma estrutura unificada
3. **Unificação teórica**:. Euler demonstrou que curvas elásticas e curvas perfeitamente flexíveis pertenciam à mesma família matemática

A sofisticação matemática de Euler permitiu a aplicação prática do princípio físico de Bernoulli, transformando uma visão isolada em uma teoria funcional de mecânica estrutural.

A designação composta "Teoria Euler-Bernoulli"não surgiu imediatamente após a publicação desses artigos fundamentais. A evolução terminológica reflete o reconhecimento gradual dentro da comunidade de engenharia dos papéis essenciais das duas contribuições:

Período inicial (1732-1800): As referências contemporâneas creditaram contribuições individuais separadamente, com o trabalho de Euler ganhando destaque devido à sua abrangência matemática e aplicabilidade prática.

Desenvolvimento do século 19: À medida que a teoria se sistematizava dentro da educação e prática de engenharia, a natureza fundamental do princípio da curva temporal de Bernoulli recebeu reconhecimento crescente ao lado dos métodos matemáticos de Euler.

Padronização Moderna: A designação "Euler-Bernoulli"hifenizada tornou-se padrão na literatura de engenharia do século XX, refletindo consenso acadêmico que ambas as contribuições eram essenciais para a teoria completa.

A dupla atribuição reflete com precisão o desenvolvimento histórico da teoria viga, reconhecendo que nem a visão física de Bernoulli, nem apenas a estrutura matemática de Euler constituíam uma teoria completa do elástico vigas:

- **A limitação de Bernoulli**:. Enquanto estabeleceva o princípio fundamental, seu trabalho de 1728 não tinha métodos sistemáticos para lidar com problemas complexos
- **Dependência de Euler**:. Apesar de desenvolver técnicas matemáticas sofisticadas, a abordagem de Euler fundamentalmente dependia da relação momento-curvatura de Bernoulli
- **Necessidade complementar**:. A teoria completa exigia o entendimento físico e a maquinaria matemática

A equação moderna viga $M = EI\kappa$ combinado com a relação de equilíbrio $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ Corpora diretamente ambas as contribuições históricas:

$$\text{Bernoulli's insight:} \quad \mathcal{M} = \frac{B}{r} \rightarrow M = EI\kappa \tag{9.46}$$

$$\text{Euler's framework:} \quad \frac{v}{r} = f(\text{loading}) \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.47}$$

Essa continuidade demonstra que a designação de 'Euler-Bernoulli' representa mais do que uma convenção histórica, identifica com precisão as origens conceituais das relações matemáticas que continuam governando o moderno análise estrutural.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Alguns relatos históricos enfatizam diferentes aspectos do desenvolvimento teórico:

- **Jakob Bernoulli ênfase**:. Reconhecendo o desafio elástico de 1691 como a afirmação do problema fundamental
- **Euler primacy**:. Focando no tratamento matemático abrangente de Euler como o avanço teórico decisivo
- **Desenvolvimento coletivo**:. Olhando viga teoria como emergente da comunidade mais ampla do século 18 de físicos matemáticos

No entanto, o padrão de designação ”Euler-Bernoulli” permanece historicamente defensável e pedagógicomente valioso, identificando claramente os dois componentes essenciais: Princípios físicos e estrutura matemática.

Em resumo, o termo "Teoria Euler-Bernoulli"representa uma atribuição histórica precisa que reconhece tanto a visão física fundamental fornecida pela relação momento-curvatura de Daniel Bernoulli e a matemática sistemática Framework desenvolvido pela análise geométrica de Euler em 1732. Esta dupla designação reflete a natureza complementar de suas contribuições e a realidade histórica que completa viga teoria requer tanto compreensão física e sofisticação matemática.

A persistência desta terminologia ao longo de quase três séculos de desenvolvimento da engenharia atesta o significado duradouro das contribuições fundamentais e a precisão da atribuição histórica que representam.

Tabela 9.11: Análise Comparativa: Bernoulli 1728 vs Euler 1732 Contribuições para Viga Teoria

Aspect	Bernoulli 1728	Euler 1732
Inovação Primária	Primeiro momento explícito, relação de curva: $\mathcal{M} = B/r$	Hipótese elástica fundamental: $M = v\kappa$ com estrutura geométrica sistemática
Abordagem Matemática	Análise geométrica de casos de carregamento específicos com cálculos de momento	Método geométrico sistemático usando dois lemas fundamentais e princípios gerais de equilíbrio
Escopo da Aplicação	Vigas com auto-peso e aplicado cargas concentradas	Propriedades elásticas arbitrárias, carga distribuída$P$, Q), e general condições de contorno
Equação Governante Chave	$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r}$	$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$
A conquista da unificação	Limitado a problemas com carregamento combinado	Curvas elásticas unificadas, corpos perfeitamente flexíveis (catenárias) e todos os casos intermediários
Visão física	Resistência elástica é proporcional à curvatura	Corpos flexíveis emergem como casos limitantes quando $v = 0$; Compreensão física completa
Problemas resolvidos com sucesso	• Viga sob o peso próprio • Carga concentrada aplicações • Forças em ângulos arbitrários	• Derivação de catenária comum • Casos de carga parabólica • Aplicações de força normais • Forças combinadas normais e tangenciais • Todos os problemas perfeitamente flexíveis

CÓPIA PARA REVISÃO

Aspect	Bernoulli 1728	Euler 1732
Principais Limitações	• Métodos ad hoc para cada caso • Limitado ao carregamento simples • Sem estrutura sistemática • Não pode lidar com limites complexos	• Lâminas elásticas pesadas intratáveis • Dificuldades complexas de integração • Sem princípio de otimização • Métodos geométricos não têm generalidade
Ferramentas Matemáticas	Análise geométrica básica, equilíbrio de momentos, cálculo do centro de gravidade	Lemas geométricos avançados, teoria de momentos sistemáticos, equações diferenciais gerais, métodos paramétricos
Caráter Metodológico	Construções geométricas específicas de problemas	Abordagem sistemática: Identificar princípios → Equação geral → Se aplica a casos específicos
Tratamento de Carregamento	Peso próprio mais forças aplicadas discretas	Carga distribuída geral: vertical (P), horizontal (Q), mais cargas finais (E, F)
Contexto Histórico	Construindo o trabalho de elástico do tio Jakob	Respondendo ao desafio de 1691 de Jakob Bernoulli com escopo ampliado
O que provou	Momento... relação curva é fundamental para o comportamento elástico	Esta relação pode ser aplicada sistematicamente para resolver diversos problemas mecânicos
O que permaneceu por resolver	Geometrias complexas, problemas de otimização	Lâminas elásticas pesadas, problemas variacionais que exigem princípios extremos
Legado Moderno	Momento, relação de curva inalterada: $M = EI\kappa$ (300+ anos)	Euler... Fundação da teoria de Bernoulli viga, motivou o desenvolvimento do cálculo das variações
Relacionamento	Desde que o princípio físico fundamental	Construiu métodos matemáticos sistemáticos na fundação de Bernoulli

9.5 Teoria: De observação a cargas críticas

Ao contrário da catenária e elástica, o problema pilar flambagem não se originou em um concurso, mas como extensão criativa de Euler do trabalho anterior.

9.5.1 Trabalho matinal

9.5.1.1 Leonardo (ca. 1490s)

Leonardo escreveu o que equivale a um tratado curto sobre pilares, vigas, cordas, e arcos, oferecendo regras definidas em vez de tendências vagas (Truesdell, 1960, p. 20).. Truesdell discute a notável e avançada compreensão qualitativa do comportamento estrutural de Leonardo da Vinci. Ele observa que Leonardo examinou os pilares tanto experimentalmente quanto conceitualmente, (Fig. 9.24a) buscando entender por que alguns falham dobrando enquanto outros falham esmagando. De acordo com Truesdell, Leonardo reconheceu o papel crítico da geometria de carga: quando a linha de ação vertical da carga passa pelo eixo centróide do pilar, o membro age puramente em compressão. Sob tais condições Leonardo acreditava, corretamente em um sentido qualitativo, que o elemento encurta sem deflexão lateral. Truesdell então contrasta esta visão inicial com os tratamentos analíticos posteriores de Galileu, Mariotte e Euler, ilustrando como a intuição renascentista gradualmente cedeu a uma teoria matemática completa de flexão e estabilidade

CÓPIA PARA REVISÃO

A observação de Leonardo para destacar o início, Prereconhecimento matemático do que é agora entendido como carregamento excêntrico eInclinação induzida.

A partir de observações dispersas, Leonardo propôs regras proporcionais para o final Carregar P de uma pilar área A, diâmetro d, e comprimento L, como

$$P \propto \frac{\sqrt{A}}{L}, \qquad P \propto d^2. \tag{9.48}$$

Literalmente, essas regras sobreviventes são *mutuamente inconsistentes* (desde que $A \sim d^2$ faria a primeira relação prever $P \sim d/L$). Dada a incerteza paleográfica, uma interpretação cautelosa é que Leonardo afirmava apenas as tendências qualitativas: A força diminui com comprimento e aumenta com o tamanho transversal, mas ele não possuía um Lei de estabilidade elástica coerente (Timoshenko, 1953). Em termos modernos, ele Eu percebi que.. *flambagem tendência* de longas e finas hastes sob axial Compressão.

9.5.1.2 Pieter van Musschenbroek (1729)

Um líder experimentalista, Van Musschenbroek atacou explicitamente os problemas de coesão e estabilidade por *Experimento*.. Usando o aparelho na Fig. 9.24b, ele estabeleceu que a carga limite na compressão de espécimes prismáticos esbeltos varia inversamente com o *Quadrado* Ele propôs uma regra empírica para seções retangulares:

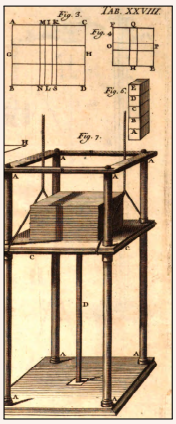
$$P \propto \frac{h^2\, B}{L^2}, \tag{9.49}$$

Onde h é a espessura do lado que se torna curva (o lado "bent"') e B é o outro lado (Van Musschenbroek, 1729). O L^{-2} Escalar é o ponto historicamente decisivo (preveem a dependência funcional que mais tarde aparecerá na teoria de Euler). Os expoentes seccionais (h^2 ao invés do elástico $EI \sim Bh^3$) indicam que o limite observado reflete efeitos de flexão/fratura no caminho para a falha em vez de uma instabilidade elástica limpa. Mesmo assim, este é o *Primeiro estudo sistemático* de membros comprimidos exibindo deflexão lateral e precede a análise de Euler por aproximadamente 15 anos.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Esboços de Leonardo relacionados com flambagem



(b) Aparelho de van Musschenbroek (1729)

Figura 9.24: Os primeiros estudos de compressão focaram em fenômenos de instabilidade axial.

9.5.2 Euler (1759)

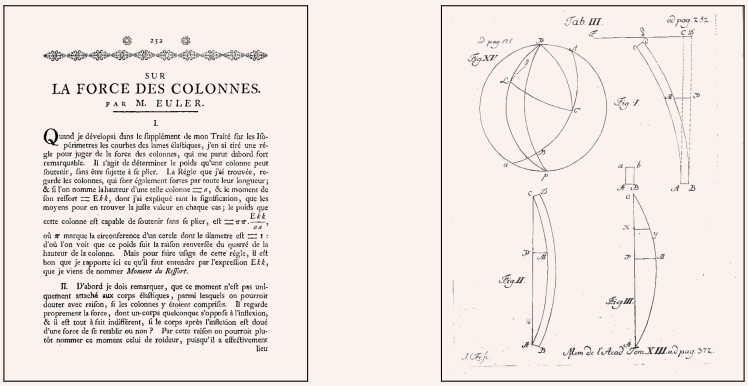
Enquanto as experiências de Van Musschenbroek tinham estabelecido o empírico L^{-2} Lei de escala para falha pilar, a base teórica para compreensão flambagem instabilidade emergiu de uma fonte inesperada: Euler trabalha em curvas elásticas. O que começou como um exercício matemático em cálculo variacional forneceria a primeira teoria rigorosa da estabilidade estrutural.

Em 1759, Euler enviou um trabalho para a Academia de Berlim (Euler, 1759) que representou um exame crucial de seu trabalho elástico em 1744, Fig. 9.25.. O parágrafo inicial, traduzido por Euler, 1759, revela seu reconhecimento tardio:

> Lorsque j'ai traiteé des courbes élastiques dans le supplément de mon traité des isopérimètres, j'en ai tiré une conséquence, touchant la force des colonnes, qui m'a paru fort remarquable. Elle consiste em dans la charge qu'une colonne peut porter sans se courber. J'ai trouvé une règle qui a lieu pour les colonnes d'une épaisseur égale dans toute leur hauteur; E aí, e aí a O hauteur de la colonne, et par Ekk O momento de rodieur, a carga qu'une telle colonne peut porter sans se courber sera = $\frac{\pi\pi \cdot Ekk}{aa}$, π Signifiant le périmètre d'un cercle de diamètre = 1. Em concluo que a cette cobra está em razão inversa do carro de la hauteur de la colonne.
>
> Quando desenvolvi curvas elásticas no suplemento do meu Tratado sobre Isoperímetros, tirei delas uma conclusão a respeito da força de pilares que me parece muito notável. Diz respeito às cargas que um pilar pode suportar sem flambagem. A regra que encontrei aplica-se a pilares de área transversal constante; E se nós designarmos a altura do pilar = a, e o momento resistindo = Ekk, a carga que um tal pilar pode suportar sem flambagem é = $\pi\pi.Ekk/aa$, onde π significa a circunferência de um círculo de diâmetro = 1. A partir disso concluímos que a carga é inversamente proporcional ao quadrado da altura do pilar.

CÓPIA PARA REVISÃO

Euler, 1759 “*Sur la force des colonnes*”



SUR
LA FORCE DES COLONNES.
PAR M. EULER.

Figura 9.25: Papel Seminal de Euler em flambagem (Euler, 1759)

Isto representa a primeira articulação clara do que sabemos agora como fórmula de Euler: $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ em notação moderna.

O trabalho de Euler em 1757 generalizou o conceito para além dos corpos puramente elásticos, enfatizando que o "momento resistindo"Ek^2 se aplica mais amplamente:

> Trata-se, em essência, de uma força através da qual qualquer corpo resiste a uma mudança na curvatura, e é totalmente imaterial se tal corpo após a flexão é dotado com uma força para restabelecer sua forma original ou não. Por esta razão, poderíamos preferencialmente designar este momento como rigidez momento *Momento de roideur*Porque ocorre em todos os corpos que resistem à flexão, sejam eles elásticos ou não.
>
> Euler, 1759 “*Sur la force des colonnes*”

Tanto Euler (1759) como a moderna "Espécie I"(§9.3.2.2.1) A aproximação começa a partir da mesma Quadratura elástica, que expressa a curva de uma linha elástica comprimida:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}\, dx. \tag{9.50}$$

Esta relação surge do equilíbrio da flexão rigidez EI (Euler Ekk), Carga axial P, e curvatura, e constitui o ponto de partida compartilhado.

CÓPIA PARA REVISÃO

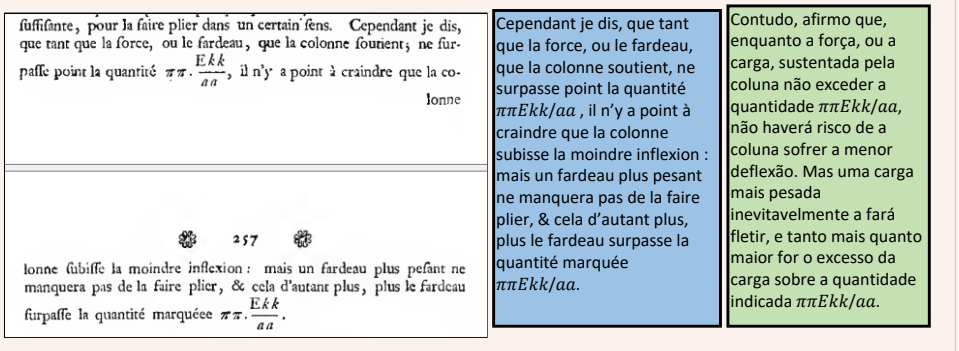
Deduzido da Espécie I (Euler, 1744a)

1. Comece diretamente da EQ. (9.50).
2. Assuma $c^2 \ll a^2$ (Espécie I condição). Aproximado:
$$a^2 - c^2 \approx a^2, \quad 2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2.$$
3. Para o pequeno x, ainda mais simplificar:
$$dy \approx \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx.$$
4. Integre:
$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{x}{c}.$$
5. Aplicar condição de contorno no topo: $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ por meio comprimento f.
6. Com $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$, obter
$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$
7. Por toda a extensão $L = 2f$ e.. $Ek^2 = EI$,
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}.$$

(Euler, 1759) (Original)

1. Apresenta Eq. (9.50) de sua teoria elástica anterior.
2. Para o caso quase reto, reduz-lo para a ODE linearizada:
$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + P\,y = 0.$$
3. Solução:
$$y(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right).$$
4. Com dobradiças, pontas tortas: $y(0) = 0$, $y(a) = 0$.
5. Solução não trivial $\Rightarrow$ E o que é isso?
$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,a = \pi.$$
6. Daí a carga crítica:
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2}}$$

A rota de Euler passa pelo equilíbrio equação diferencial e interpreta a bifurcação como um limiar de estabilidade. A abordagem da Espécie I usa assintóticos explícitos na quadratura elástica para atingir a mesma condição. Ambos revelam a mesma lei física: A carga crítica flambagem varia inversamente com o quadrado do comprimento. Fig. 9.26


suffisante, pour la faire plier dans un certain sens. Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$, il n'y a point à craindre que la colonne

257

colonne subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$.

Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi Ekk/aa$, il n'y a point à craindre que la colonne subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi Ekk/aa$.

Contudo, afirmo que, enquanto a força, ou a carga, sustentada pela coluna não exceder a quantidade $\pi\pi Ekk/aa$, não haverá risco de a coluna sofrer a menor deflexão. Mas uma carga mais pesada inevitavelmente a fará fletir, e tanto mais quanto maior for o excesso da carga sobre a quantidade indicada $\pi\pi Ekk/aa$.

Figura 9.26: Euler, 1759 declaração da carga crítica flambagem

CÓPIA PARA REVISÃO

Apesar desse avanço, a análise de Euler continha limitações significativas que só seriam resolvidas através de desenvolvimentos posteriores:

Faltando o conceito de instabilidade: Euler não reconheceu aquele Eq. 9.24 representou um ponto de bifurcação onde pequenas cargas aumentam acima do valor crítico, levando a grandes deformações e potenciais falhas. O conceito de cargas críticas e instabilidade estrutural não seria totalmente desenvolvido até muito mais tarde trabalhar na teoria da estabilidade.

Propriedades Cruzais Incorretas: Apesar de Euler reconhecer corretamente que Ek^2 medido rigidez, ele erroneamente conjecturou que para um retangular viga de largura b e espessura h, o módulo de flexão foi proporcional a Ebh^2.. A relação correta envolve $Ebh^3/12$, mas o conceito da momento de inércia e análise de distribuição adequada tensão não emergiria até o trabalho de Coulomb (1773) e desenvolvimentos posteriores na teoria viga.

Impacto e legado

A derivação de Euler da carga crítica flambagem é uma das realizações mais significativas em mecânica estrutural. A fórmula $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ Confirmado o experimento de Van Musschenbroek L^{-2} Escalar enquanto fornece o referencial teórico para entender por que tal comportamento ocorre.

Mais fundamentalmente, este trabalho introduziu o conceito de cargas críticas em análise estrutural - a idéia de que as estruturas podem falhar não através da ruptura do material, mas através da instabilidade geométrica. Esta visão seria revolucionária, estabelecendo a base para todo o trabalho subsequente em estabilidade estrutural e transformando engenharia de uma arte empírica em uma ciência baseada em princípios matemáticos.

O caminho da derivação matemática de Euler para a aplicação de engenharia também demonstra como os avanços teóricos muitas vezes precedem sua interpretação prática. Enquanto os métodos variacionais de 1744 forneciam a relação matemática correta, entender suas implicações físicas exigia uma investigação contínua e o desenvolvimento de teorias complementares no comportamento material e análise estrutural.

Conclusão

A derivação da carga crítica flambagem representa o culminar de uma tradição matemática que começou com o desafio elástico de Jakob Bernoulli. Como Fraser, 1991 Observado, Euler realmente estava sobre os ombros de gigantes: Jakob Bernoulli derivou a equação elástica, Huygens formulou o problema de determinar formas dobradas, Newton originou o tema da classificação sistemática, e Daniel Bernoulli sugeriu a abordagem variacional. A conquista distinta de Euler estava na determinação e visão analítica com que ele perseguiu e desenvolveu essas ideias em uma teoria unificada.

A abordagem de Euler, tratando as equações básicas da elasticidade como postulados físicos sujeitos à determinação experimental e desenvolvimento matemático, antecipou desenvolvimentos posteriores na física matemática. No entanto, ao contrário de abordagens positivistas posteriores que enfatizavam a matemática como meramente uma ferramenta operacional, Euler conseguiu uma integração fundamental da concepção matemática e física. Esta síntese é evidente não só em sua conceituação do problema elástico, mas em seu reconhecimento de que a classificação matemática poderia revelar o espectro completo do comportamento físico.

A fórmula flambagem $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ Assim, representa mais do que um resultado prático de engenharia. Estabeleceu o conceito de cargas críticas e instabilidade estrutural, transformando a engenharia da prática empírica em uma ciência baseada em princípios matemáticos - uma transformação cuja influência se estende à mecânica computacional moderna e estabilidade Análise.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

9.6 Teoria Geral de Euler: Unificação completa (1771)

No início dos anos 1770, os principais desafios das linhas deformáveis tinham sido todos emitidos e resolvidos.

A sequência de grandes desafios se desdobrava quase como um drama em etapas. A catenária, colocada pela primeira vez por Jakob Bernoulli, foi determinada por Leibniz, Johann Bernoulli, e Huygens - embora ironicamente, não pelo próprio Jakob (§9.2). Logo depois, Jakob novamente colocou o problema da elástico, que ele mesmo parcialmente resolveu e que Euler trouxe à conclusão em 1744 (§9.3), auxiliado por um importante interlúdio no qual o cálculo das variações foi concebido primeiramente por Daniel Bernoulli e depois rigorosamente refinado por Euler. O desafio anônimo de 1724 (§9.4) acrescentou mais impulso, sendo tomado e resolvido por Daniel Bernoulli e Euler. Finalmente, o clímax chegou com as célebres memórias de Euler de 1759 no flambagem de pilares, que transformou uma curiosidade matemática em um resultado central de mecânica estrutural.

Em 1771, Euler estava pronto para juntar esses fios. Tendo visto a catenária, o elástico, o desafio anônimo, e o problema pilar-flambagem cada resolvido por sua vez, ele agora procurou nada menos do que tecê-los em um único tecido analítico. Em sua *Genuina principia* (Euler, 1771), ele apresentou o que pode ser justamente chamado de *Grande teoria unificadora* de linhas deformáveis,[27] Equilíbrio de fundição e movimento sob um conjunto de equações governantes, Fig. 9.27.

> *"Genuina principia doctrinae de statu aequilibibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elásticorum."*
>
> "Os princípios genuínos da doutrina do equilíbrio e movimento dos corpos, sejam eles perfeitamente flexíveis ou elásticos."
> Euler, 1771 " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 1

Com esta ousada linha de abertura, Euler declarou sua intenção de estabelecer uma mecânica universal de linhas deformáveis, subsumindo os grandes desafios em um único sistema teórico.

Esta declaração expressa a intenção de Euler: para estabelecer a primeira mecânica verdadeiramente universal de linhas flexíveis e elásticas.

O problema geral e o princípio Tensão

No tratado de 1771, Euler estabeleceu o que ele chamou de "Problema Geral"do equilíbrio da linha: Uma curva plana BMA sujeito a forças arbitrárias distribuídas, Fig. 9.28. Cortando imaginativamente a curva em um ponto M e isolando o segmento, ele substituiu a parte cortada por equivalente tensão resultados — uma força tangencial T, uma força normal V, e um interno momento fletor $\mathfrak{M}$. Esta construção é a semente conceitual da análise de resultados moderna.

[27] Na física moderna, a busca por uma teoria unificada que une forças fortes, fracas e eletromagnéticas ecoa a ambição de Euler de subsumir os problemas da catenária, elástica e flambagem em um sistema analítico.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

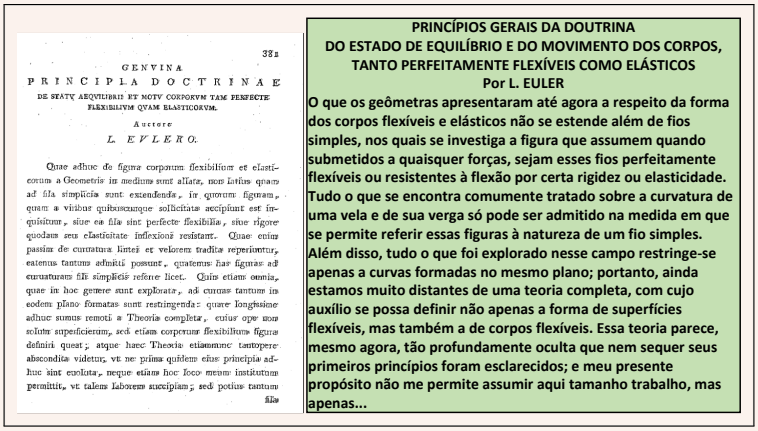


Figura 9.27: Euler "grand-unifying" papel, (Euler, 1771 PDF)

Expresso aqui na notação intrínseca moderna (a derivação latina de Euler usa símbolos diferentes e uma convenção de sinais ligeiramente diferente), as equações de equilíbrio lidas

$$\frac{dT}{ds} + V\frac{d\phi}{ds} = -F_t, \tag{9.51}$$

$$\frac{dV}{ds} - T\frac{d\phi}{ds} = -F_n, \tag{9.52}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} - V = 0, \tag{9.53}$$

Onde $r^{-1} = d\phi/ds$ é a curvatura e ϕ Denota o ângulo tangente (na convenção de Euler, muitas vezes o complemento do ângulo da inclinação).

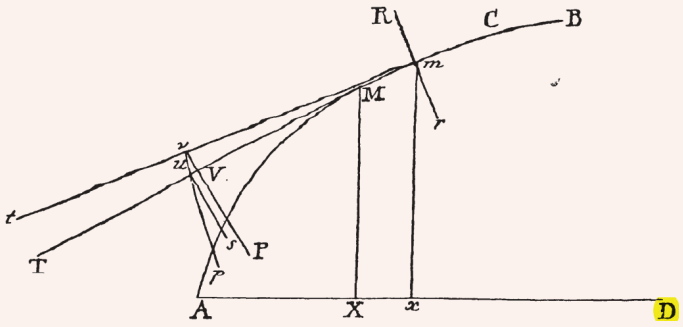


Figura 9.28: O diagrama de Euler para o equilíbrio geral de uma linha (Euler, 1771 PDF).

Unificação e generalização dos grandes desafios

As equações gerais de Euler abrangem, como casos especiais, os problemas clássicos das linhas deformáveis:

Catenária: If $\mathfrak{M} = 0$ (sem dobra rigidez) e $F_t = 0$, $F_n = g\sigma$ (auto-peso por unidade de comprimento), as equações reduzem para o problema catenária resolvido por Leibniz, Johann Bernoulli e Huygens.

CÓPIA PARA REVISÃO

Elastica (Roda elástica): Com $F_t = F_n = 0$ (sem carga distribuída) e a lei constitutiva $\mathfrak{M} = EI/r$, recupera-se a equação elástica colocada pela primeira vez por Jakob Bernoulli e totalmente desenvolvida por Euler em 1744.

Pilar Flambagem (1759): Aplicado a um prismático carregado axialmente, o mesmo quadro produz a condição de estabilidade linearizada. Euler tinha mais cedo (1759) deduzido a carga crítica $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ para pontas dobradiças; no cenário mais amplo de 1771, este aparece como um problema particular de autovalor (bifurcação) dentro da teoria geral.

> *''...terminar $d^3\phi$ ad diferencialia quarti gradus assurget.'*
>
> "... o terceiro termo derivado sobe para uma quarta ordem equação diferencial.'
> Euler, 1771 " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum"*, p. 12

Esta passagem destaca como o método de Euler produz naturalmente a equação elástica de alta ordem, um marco em análise estrutural.

Equilíbrio geral de uma linha (1771): Mais importante, o tratado de 1771 mostra que as mesmas equações governam *Qualquer* linha sob distribuição tangencial arbitrária e normal de carga, com ou sem dobra rigidez. O próprio Euler enfatizou a adaptabilidade de sua solução:

> *"Não é difícil erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare..."*
>
> "Não será difícil adaptar nossa solução também a outros casos..."
> Euler, 1771 " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum"*, p. 13

Este novo nível de generalidade elevou a análise de casos especiais para um princípio universal de equilíbrio de linha e, em seções companheiras das memórias, para problemas de movimento (cordas vibratórias e hastes elásticas), assim ligando estática e dinâmica dentro Um método.

Perspectiva de encerramento

Tomados juntos, esses trabalhos marcam a conclusão do programa de Euler em linhas deformáveis. O elástico de 1744 forneceu a base matemática; As memórias de 1759 em pilares demonstraram seu poder na resolução de um problema central de engenharia; e o tratado de 1771 elevou o sujeito a uma teoria universal do equilíbrio e movimento para linhas flexíveis e elásticas. Nesta progressão, Euler transformou os desafios isolados de correntes, varas, e pilares em facetas de um único quadro analítico - uma realização que não só unificou a mecânica de seu século, mas também antecipou os princípios governantes dos modernos tensão-resultantes e formulações contínuas.

A Síntese: Dos Desafios à Ciência

A evolução de desafios individuais para uma teoria unificada marca uma transformação fundamental na ciência mecânica. O problema catenário da década de 1690 demonstrou o novo poder do cálculo em otimização. O desafio elástico de Jakob Bernoulli levou a matemática para métodos variacionais. O problema flambagem revelou como a teoria abstrata poderia antecipar fenômenos críticos em estruturas de engenharia.

A teoria geral de Euler, de 1771, sintetizou essas conquistas em uma estrutura abrangente que:

CÓPIA PARA REVISÃO

- **Geometria e mecânica unificadas**:. Curvação e deformação ligadas diretamente com os resultados esforço interno;
- **Estabeleceu o princípio tensão**:. Apresentado T (tangencial), V (normal), e $\mathfrak{M}$ (momento) como quantidades fundamentais;
- **Desde a metodologia geral**:. formularam equações de equilíbrio independentes das leis materiais, com relações constitutivas que fornecem o fechamento;
- **Distinto cinemática do comportamento material**:. Descrição geométrica claramente separada das suposições constitutivas;
- **Classificação sistemática ativada**:. mostrou como linhas perfeitamente flexíveis e elásticas emergem como casos especiais da estrutura geral.

A jornada de As observações qualitativas de Galileu sobre a força viga para as equações diferenciais de Euler abrangeram quase dois séculos de desenvolvimento matemático e mecânico. Os grandes desafios agiam como catalisadores, impulsionando avanços no cálculo, análise variacional e raciocínio físico. Sua unificação final sob a teoria geral de Euler demonstrou como problemas específicos e bem-postos podem descobrir princípios universais.

O legado vai muito além dos problemas originais. Moderno análise estrutural — de arranha-céus a pontes suspensas, de materiais micro-escala a moléculas de DNA — repousa em fundações estabelecidas pela primeira vez através da resolução dessas perguntas "simples" sobre correntes penduradas, varas dobradas e compactadas pilares. Neste sentido, os grandes desafios cumpriram seu maior propósito: Transformando a engenharia de naves empíricas em uma ciência matemática.

> *"Não é difícil erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare..."*
>
> "Não será difícil adaptar nossa solução também a outros casos..."
> Euler, 1771 " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum"*, p. 13

O comentário final de Euler capta o espírito de suas memórias de 1771: uma estrutura não restrita a problemas especiais, mas de ponta aberta, adaptável e duradoura.

9.7 Conclusão

O caminho das reflexões qualitativas de Galileu sobre a força viga§7.2.2) para as equações universais de Euler de linhas deformáveis que abrangeram quase dois séculos e transformaram a mecânica de uma nave guiada por analogia e experiência em uma ciência matemática. Cada desafio teve um papel decisivo: a catenária revelou a potência do cálculo na resolução de problemas de otimização; a matemática elástica pressionada em direção aos métodos variacionais e equações diferenciais de alta ordem; O problema anônimo de 1724 estendeu essas informações para leis mais gerais de força; e a fórmula de Euler flambagem estabeleceu o poder preditivo da teoria para estabilidade estrutural.

A síntese de Euler em 1771 marcou o ponto culminante desta progressão. Ao enquadrar o "Problema Geral"do equilíbrio de linha, ele introduziu a maquinaria conceitual dos resultados tensão - força tangencial, força normal, e momento fletor - e separou o equilíbrio cinemático da resposta material. Ao fazê-lo, ele antecipou os princípios de mecânica do contínuo e forneceu uma metodologia sistemática em que casos específicos como a cadeia, a haste, e o pilar surgiram como especializações de um único quadro.

CÓPIA PARA REVISÃO

O legado desses grandes desafios é profundo. O que começou como disputas intelectuais entre os principais geometros da Europa redefiniu a mecânica das estruturas e lançou as bases para análises modernas de engenharia. Hoje, do projeto de pontes e arranha-céus à modelagem de microestruturas e biomoléculas, as equações forjadas pela primeira vez no estudo de correntes, barras e pilares permanecem fundamentais. A história desses problemas demonstra como a busca de desafios específicos, às vezes lúdicos, pode revelar princípios universais que regem os fenômenos naturais, e como a matemática, quando se casa com o insight físico, pode elevar a engenharia do empírico Pratique a ciência preditiva.

Tabela 9.12: cronológico unificado linha do tempo dos três grandes desafios: Catenária, Elástica e Desafio Anônimo

Data	Desafio	Evento
c. 1490s	Estudos iniciais	Leonardo da Vinci esboça correntes penduradas em seus cadernos.
1614	Estudos iniciais	Isaac Beeckman anota o problema da corda pendurada e discute com Descartes.
1634	Estudos iniciais	Stevin *Oeuvres Mathématiques* publicado postumamente, com as anotações de Girard afirmando uma catenária parabólica.
1638	Estudos iniciais	Galileu investiga a catenária, mas incorretamente assume que seja parabólica (Galilei, 1638 PDF).
c. 1646	Estudos iniciais	O jovem Huygens (17 anos) prova a Mersenne que a catenária não é parabólica.
1670s	Estudos iniciais	Newton estuda curvas elásticas em particular, mas não publica seus resultados.
1690 Maio	Catenária	Jakob Bernoulli emite o *Funicularia* Desafie-se *Acta Eruditorum*(Bernoulli, Jakob, 1690b PDF).
1690 Junho	Elastica	Jakob Bernoulli coloca o problema elástico em *Espécime alterum*, codificado como um anagrama (Bernoulli, Jakob, 1690a PDF).
1690 Atrasado	Catenária	Leibniz aceita o desafio e reformula-o com foco no *catenaria*.
1690 9 de outubro	Catenária	Huygens responde com uma solução cifrada.
1690 13 de outubro	Catenária	Leibniz responde a Huygens sem usar cifra.
1690 Out	Elastica	O prazo limite do festival de colheita de Basileia passa; Nenhuma solução submetida.
1690 Dez	Catenária	Johann Bernoulli submete sua solução aos editores de *Acta Eruditorum* (Bernoulli, Johann, 1691c PDF).
1691 27 de janeiro	Catenária	Leibniz reconhece o método auxiliar de Huygens.
1691 23 de fevereiro	Catenária	Huygens expressa confiança sobre a dificuldade do problema.
1691 2 de março	Catenária	Leibniz informa Huygens sobre a solução bem sucedida de Johann.
1691 21 de março	Catenária	Jakob se submete *Additamentum ad Problema Funicularium*.
1691 26 de março	Catenária	Huygens envia uma cifra corrigida.
1691 5 de maio	Catenária	Huygens e Leibniz apresentam soluções finais (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a).

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Mesa 9.12 (continuação)

Data	Desafio	Evento
1691 Jun	Catenária	As três soluções (Huygens, Leibniz, Johann Bernoulli) publicadas simultaneamente em *Acta Eruditorum* (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a; Bernoulli, Johann, 1691c).
1692	Elastica	Jakob Bernoulli completa a solução elástica em particular *Meditação CLXX* (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 Jun	Elastica	Jakob publica *Curvatura laminae elásticae*, decodificando o anagrama e revelando o "teorema dourado"(Bernoulli, Jakob, 1694).
1694	Elastica	Huygens publica uma crítica identificando múltiplas configurações elásticas (curvas A-G).
1694	Elastica	Jakob responde graciosamente a Huygens, defendendo a generalidade de seu método geométrico (Bernoulli, 1694).
1696	Relacionado	Johann Bernoulli coloca o desafio da brachistochrone em *Acta Eruditorum* (Bernoulli, Johann, 1696).
1697 Jan	Relacionado	Johann estende o prazo de brachistochrone através de um impresso *Programa*.
1697 MAIO	Relacionado	Johann publica a solução de brachistochrone usando analogia óptica; Newton, Leibniz, L'HôPital, e Jakob também resolve isso (Bernoulli, Johann, 1697a).
1724 Ago	Anônimo	Um desafio anônimo (assinado "LBC") aparece em *Acta Eruditorum* sobre correntes "moderadamente flexíveis" (Anonymous, 1724).
1724–1727	Anônimo	O desafio passa despercebido. Sem respostas imediatas.
1728 Fev	Anônimo	Daniel Bernoulli e Euler submetem soluções de linha flexível-elástica unificadas (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	Anônimo	Ambas as soluções publicadas consecutivamente em *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. 3 (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	Anônimo	Daniel estabelece a relação fundamental momento-curvatura $\mathcal{M} = B/r$ (Bernoulli, Daniel, 1744).
1729	Relacionado	Pieter van Musschenbroek publica estudos experimentais mostrando $P \propto L^{-2}$ Escalando (Van Musschenbroek, 1729).
1732	Elastica/Anônimo	Euler publica *Solutio problematis*- Uma estrutura geométrica geral unificando curvas elásticas e flexíveis: $M = v\kappa$ (Euler, 1732).
1742 20 de outubro	Elastica	Daniel Bernoulli escreve para Euler propondo o princípio da minimização de energia: "Viva Potencial"deve ser mínimo (**DanielBernoulli1742toEuler**).
1742	Elastica	Daniel expressa energia elástica como $\int ds/R^2$ e deriva a quarta ordem equação diferencial (**DanielBernoulli1742toEuler**).
1744 Jul	Elastica	Euler entrega os capítulos principais de *Methodus inveniendi* para o editor (Euler, 1744b).
1744 Dez	Elastica	Euler entrega dois apêndices: Additamentum I (elástica) e II (menos ação) (Euler, 1744b).
1744	Elastica	*Methodus inveniendi lineas curvas* publicado, apresentando o primeiro tratamento sistemático do cálculo variacional (Euler, 1744b).
1744	Elastica	Euler classifica nove espécies de curvas elásticas (Espécie I–IX) com caracterização matemática completa (Euler, 1744a).
1744	Elastica	O trabalho de elástico completo de Jakob aparece postumamente em *Ópera Omnia*, editado por Gabriel Cramer (Bernoulli, Jakob, 1744b).
1759	Flambagem	Euler publica sua fórmula pilar-flambagem $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$, reconhecendo o significado de 1744 Espécie I (Euler, 1759).

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Mesa 9.12 (continuação)

Data	Desafio	Evento
1771	Unificação	Euler publica *Genuina principia* Unindo todos os três desafios em uma teoria geral de linhas deformáveis (Euler, 1771).
1771	Unificação	Euler apresenta o "Problema Geral"com os resultados: Força tangencial T, força normal V, e momento fletor $\mathfrak{M}$ (Euler, 1771).

Tabela 9.13: Publicações referenciadas na cronológica unificada linha do tempo

Autor(es)	Ano	Citação	Título	Descrição
Galileo Galilei	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e dimostrazioni matematiche*	Incorretamente propõe que a curva catenária é parabólica; Providencia trabalho de fundação sobre a força viga e mecânica estrutural
Jakob Bernoulli	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690b)	*Problema funicular*	Emite o desafio catenário para a comunidade matemática em *Acta Eruditorum*, pedindo a curva formada por uma corrente pendurada
Jakob Bernoulli	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690a)	*Espécime alterum calculi diferencialis*	Posiciona o problema elástico com solução codificada em um anagrama; Promete revelar a solução pelo festival de colheita de Basileia em outubro
Johann Bernoulli	1691	(Bernoulli, Johann, 1691c)	*Solutio problematis funicularii*	A solução catenária de Johann, submetida aos editores em dezembro de 1690 e publicada em junho de 1691 ao lado de Leibniz e Huygens
Christiaan Huygens	1691	(Huygens, 1888a)	*Solutio problematis catenarii*	A solução geométrica da catenária de Huygens usando curvas auxiliares; desenvolvido através de correspondência cifra com Leibniz
Gottfried W. Leibniz	1691	(Leibniz, 1691a)	*De Linea em quam flexile se pondere proprio curvat*	A solução catenária de Leibniz estabelecendo conexões com logaritmos e funções hiperbólicas; tratamento mais abrangente
Jakob Bernoulli	1692	(Bernoulli, Jakob, 1677–1705)	*Meditação CLXX*	O caderno científico particular de Jakob contendo sua solução elástica completa; permaneceu inédito durante sua vida
Jakob Bernoulli	1694	(Bernoulli, Jakob, 1694)	*Curvatura Laminae Elasticae*	Primeira solução elástica publicada com o "teorema dourado"relacionando curvatura a momento fletor; Decodifica o anagrama de 1690
Jakob Bernoulli	1694	(Bernoulli, 1694)	*-Responsio ad Dn. Huminium*	Reação graciosa à crítica de Huygens, defendendo a generalidade do seu método geométrico para o problema elástico

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Mesa 9.13 (continuação)

Autor(es)	Ano	Citação	Título	Descrição
Johann Bernoulli	1696	(Bernoulli, Johann, 1696)	*Problema novum*	Poses o desafio de brachistochrone em *Acta Eruditorum*; torna-se o problema fundador do cálculo das variações
Johann Bernoulli	1697	(Bernoulli, Johann, 1697a)	*Curvatura raios em diaphanis non uniformibus*	Solução de Brachistochrone usando analogia óptica e princípio de Fermat; Prova que o cicloide é a curva de descida mais rápida
Anonymous (LBC)	1724	(Anonymous, 1724)	*Celebre catenariae problema*	Desafio anônimo para cadeias "moderadamente flexíveis", superando a distância entre catenárias puramente flexíveis e curvas elásticas rígidas
Daniel Bernoulli	1728	(Bernoulli, Daniel, 1744)	*Methodus universalis determinandae curvaturae fili*	Estabelece a relação fundamental momento-curvatura $\mathcal{M} = B/r$ que se torna a base de toda teoria
Leonhard Euler	1728	(Euler, 1728)	*Solutio problematis de invenienda curva*	Primeira teoria unificada de linhas flexíveis e elásticas; publicado consecutivamente com o trabalho de Daniel Bernoulli em resposta ao desafio de 1724
Pieter van Musschenbroek	1729	(Van Musschenbroek, 1729)	*Físicos experimentais*	Estudos experimentais que estabelecem o $P \propto L^{-2}$ dimensionando a lei empiricamente, trinta anos antes da teoria de Euler
Leonhard Euler	1732	(Euler, 1732)	*Solutio problematis de invenienda curva*	Quadro geométrico geral com hipótese elástica $M = v\kappa$ Unificando problemas de curva elástica e flexível sob teoria única
Daniel Bernoulli	1742	(**DanielBernoulli1742toEuler**)	(20 de outubro)	Propõe princípios de minimização da energia para elásticos; expressa energia elástica como $\int ds/R^2$ e deriva de quarta ordem equação diferencial
Leonhard Euler	1744	(Euler, 1744b)	*Methodus inveniendi lineas curvas*	Desenvolvimento sistemático de cálculo variacional incluindo a equação Euler-Lagrange; Tradicional de referência estabelecendo o campo
Leonhard Euler	1744	(Euler, 1744a)	*Additamentum I: De curvis elásticos*	Solução elástica completa com classificação de nove espécies distintas (I-IX) usando métodos sistemáticos variacionais
Jakob Bernoulli	1744	(Bernoulli, Jakob, 1744b)	*Ópera Omnia* (póstumo)	Obras colecionadas completas, incluindo manuscritos elásticos inéditos do *Meditação*; editado por Gabriel Cramer
Leonhard Euler	1759	(Euler, 1759)	*Sur la force des colonnes*	Deriva a fórmula pilar flambagem $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$; Reconheça tardiamente o significado da espécie I de 1744

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Mesa 9.13 (continuação)

Autor(es)	Ano	Citação	Título	Descrição
Leonhard Euler	1771	(Euler, 1771)	*Genuina principia doctrinae de statu aequilibiri*	Grande unificação apresentando teoria geral de linhas deformáveis com resultados tensão (força tangencial, força normal, momento fletor)

Contexto Cultural (1670-1790)

Este período une o Barroco tardio, Rococó, e as primeiras eras clássicas... uma era de absolutismo gradualmente dando lugar ao racionalismo iluminista. Ciência, arte e filosofia todos compartilhavam um fascínio com harmonia, ordem e proporção, posteriormente enriquecido pela expressividade emocional que prefigurava o romantismo.

Itália

Compositores: Antonio Vivaldi (1678-1741) exemplificava vitalidade barroca; Domenico Scarlatti (1685-1757) virtuosidade avançada do teclado; Giovanni Battista Pergolesi (1710-1736) e Giovanni Paisiello (1740-1816) ajudaram a moldar a primeira ópera cômica.
Nota: Os tribunais fragmentados da Itália e o patrocínio das igrejas sustentavam as artes, mesmo quando a liderança científica migrava para o norte.

França

Compositores: Jean-Baptiste Lully (1632-1687), François Couperin (1668-1733), e Jean-Philippe Rameau (1683-1764) moldaram o barroco francês; Christoph Willibald Gluck (1714-1787), ativo em Paris, ópera reformada.
Escritores e filósofos: Voltaire, Montesquieu, Diderot, e Rousseau – também um compositor – encorpado o *Filósofos* do Iluminismo. Racine e Molière fizeram uma ponte entre a grandeza clássica e o drama moderno.
Pintores: Antoine Watteau (1684-1721) refinada elegância Rococó; François Boucher (1703-1770) e Jean-Honoré Fragonard (1732-1806) epitomizaram sua sensualidade; Jacques-Louis David (1748-1825) anunciou o Neoclassicismo e a Revolução vindoura.
Nota: Paris emergiu como capital intelectual da Europa; O, o *Encyclopédie* refletiu o espírito científico de sistematizar todo o conhecimento.

Alemanha

Compositores: Johann Sebastian Bach (1685-1750), George Frideric Handel (1685–1759) e Georg Philipp Telemann (1681–1767) dominaram o início do século; Joseph Haydn (1732–1809) e Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791, austríaco mas central para a cultura alemã) lideraram a transição clássica.
Escritores e filósofos: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) transportou ciência e metafísica; Gotthold Ephraim Lessing (1729-1781) foi pioneiro no drama alemão moderno; Klopstock e Herder anteciparam o romantismo; Goethe (1749-1832) e Schiller (1759-1805) encerraram o período.
Artistas: Anton Raphael Mengs (1728-1779) e Johann Zoffany (1733-1810) promoveram um estilo neoclássico refinado.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nota: A patchwork de cortes do Sacro Império Romano apoiou diversos patronatos, paralelos a novas academias científicas em Berlim e Göttingen.

Suíça

Escritores e pensadores: Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) de Genebra transformou o pensamento europeu e a estética musical;
Nota: A vida intelectual suíça encarnou o cosmopolitismo iluminista, produzindo polimaths na fronteira da ciência e arte.

Síntese

Em toda a Europa, as artes e ciências compartilhavam uma busca comum por ordem e proporção, mais tarde equilibradas pela individualidade e sentimento. O mesmo racionalismo que guiou Newton, o Bernoullis e Euler encontraram expressão visual no Neoclassicismo e personificação intelectual na filosofia do Iluminismo - uma unidade de pensamento e arte que definiu a Europa antes da virada romântica.



Caravaggio, Judith decapitando Holofernes (1599-1602)

O momento crítico da ação decisiva, grandes desafios exigem resolução no ponto de máxima tensão.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 10

Mecânica do contínuo: A Fundação de Análise estrutural

Abstract

Este capítulo examina a mudança de paradigma das teorias moleculares para as contínuas da elasticidade que ocorreu durante o século 19, estabelecendo as bases matemáticas sobre o qual repousam os modernos análise estrutural. A revolução intelectual começou com o reconhecimento de que o comportamento elástico não poderia ser adequadamente explicado por modelos moleculares simples baseados em forças centrais entre os pontos materiais. O fracasso desses modelos, particularmente sua previsão de que Coeficiente de Poisson deve ser igual a 1/4 para todos os materiais - promped uma reconceptualização fundamental da matéria como um meio contínuo governado por equações de campo.

O capítulo traça as contribuições da escola matemática francesa, particularmente de Cauchy introdução do tensor tensão, Navier's síntese de teoria e prática, e Green's formulação revolucionária baseada em potencial.. Esses desenvolvimentos, concentrados no período notável de 1820-1860, transformaram a elasticidade de uma coleção de regras empíricas em uma ciência matemática rigorosa.

Além da narrativa histórica, o capítulo apresenta as leis fundamentais do equilíbrio-Conservação de massa, momento, e energia- que formam a fundação universal de mecânica do contínuo. O tratamento da teoria constitutiva demonstra como o comportamento material-específico é caracterizado por princípios de objetividade, simetria material, e consistência termodinâmica.. O quadro contínuo que surgiu, especialmente sua variante baseada em energia, forneceu a infraestrutura teórica para os métodos práticos de análise estrutural que os engenheiros desenvolveriam nas décadas seguintes.

Central para esta narrativa é a tensão metodológica entre abordagens mecânicas reducionistas e formulações fenomenológicas contínuas, refletindo compromissos filosóficos mais profundos sobre a relação entre estrutura microscópica e macroscópica Comportamento. A resolução deste debate, favorecendo mecânica do contínuo ao mesmo tempo que reconhece as limitações de ambas as abordagens, exemplifica como evidências empíricas e elegância matemática podem guiar conjuntamente o progresso científico.

10.1 Molecular *vs* Teorias contínuas da elasticidade 364
10.1.1 Visão geral 365
10.1.2 De Galileu à Escola Molecular Francesa 365
10.1.3 A ascensão da aproximação do contínuo 366
10.1.4 Tabela de comparação 366
10.1.5 Que teoria prevalecia? 366
10.1.6 Referências Históricas 367
10.2 Mecânica do contínuo 370
10.3 Introdução 370

CÓPIA PARA REVISÃO

10.3.1 Revoluções francesas e o nascimento da elasticidade moderna . . . 370
10.3.2 Fundamentos da Teoria da Elasticidade . . . 371
10.4 A estrutura matemática completa . . 382
10.4.1 Euler e a Conservação da Missa . . . 383
10.4.2 Cauchy (1789-1857) e o equilíbrio do momento linear . . 383
10.4.3 Equilíbrio do momento angular . . . 384
10.4.4 Clausius (1822-1888), Thomson (1824-1907) e Duhem (1861-1916) leis termodinâmicas) . . . 385
10.4.5 Segunda Lei (Entropia Inigualável): . . . 385
10.4.6 Desenvolvimento histórico e síntese moderna . . . 386
10.5 Teoria constitutiva: Comportamento material . . . 387
10.5.1 O Quadro Geral . . . 387
10.5.2 Noll (1925-2017) e Objetividade: O Princípio da Indiferença Material . . . 388
10.5.3 Verde (1793-1841) e hiperelasticidade . . . 388
10.5.4 Voigt (1850-1919) e Simetria Material . . . 390
10.5.5 Coleman (1930-1992) e Noll: Restrições termodinâmicas . 390
10.5.6 Perspectiva histórica: Do Empirismo à Teoria . . . 391
10.5.7 Conexão com Análise estrutural . . . 392
10.5.8 O que há em um nome? A Evolução da Mecânica e Seus Praticantes . . . 392
10.6 Conclusão . . . 401

10.1 Molecular *vs* Teorias contínuas da elasticidade

No início do século XIX, os princípios variacionais e a mecânica analítica desenvolvidos por Euler, Lagrange, e os Bernoullis forneceram poderosas ferramentas matemáticas para entender sistemas mecânicos. No entanto, uma questão fundamental permaneceu por resolver: *Qual é a natureza da deformação elástica em corpos sólidos?* Duas respostas concorrentes surgiram, cada uma refletindo profundamente diferentes compromissos filosóficos sobre a relação entre estrutura microscópica e comportamento macroscópico.

O debate entre molecular e contínuo aproxima-se da elasticidade Não era meramente técnico, representava uma divisão metodológica mais profunda na física matemática.. A elasticidade deve ser derivada dos primeiros princípios, construindo-se a partir de suposições sobre a constituição microscópica da matéria? Ou deve ser formulado fenomenologicamente, descrevendo corpos contínuos através de equações de campo sem referência à estrutura atômica subjacente? Esta questão animou grande parte da mecânica do início do século 19 e moldou o desenvolvimento do que agora reconhecemos como mecânica do contínuo.

A resolução deste debate teve profundas consequências para análise estrutural.. A formulação contínua que eventualmente prevaleceu, particularmente sua variante baseada em potencial Baseada em princípios energéticos—fornecia a base teórica sobre a qual Navier, Clapeyron e engenheiros posteriores construiriam métodos práticos para analisar vigas, placas, e pórticos. Compreender essa mudança de paradigma é essencial para apreciar por que as contribuições francesas para mecânica do contínuo, que examinamos em seções subsequentes, tomou a forma particular que eles fizeram.

Começamos descrevendo os dois referenciais teóricos concorrentes e a crise experimental que forçou uma reavaliação da abordagem molecular.

CÓPIA PARA REVISÃO

10.1.1 Visão geral

A teoria da elasticidade evoluiu historicamente através de dois grandes paradigmas:

1. **Teoria molecular ou mecânica**:. que busca explicar a elasticidade por modelar matéria como composta de partículas discretas (átomos ou moléculas) interagindo através de forças mecânicas (frequentemente centrais).
2. **Teoria do Continuum**:. que trata a matéria como um meio contínuo e descreve a resposta elástica através de variáveis de campo como tensão e deformação.

Dentro da teoria do continuum, duas formulações distintas surgiram:

- **Formulação geral contínua**:. Tensão é expresso em função de deformação, sem assumir que deriva de um potencial.
- **Formulação baseada em potencial**:. Tensão é derivado de uma função escalar deformação densidade de energia W, ou seja, $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$.. Este subconjunto também é conhecido como hiperelasticidade.

Essas estruturas refletem filosofias diferentes: A teoria molecular está enraizada na mecânica Newtoniana e reducionismo; A teoria do continuum (especialmente a forma baseada no potencial) está fundamentada em princípios variacionais e consistência termodinâmica.

10.1.2 De Galileu à Escola Molecular Francesa

Galileu introduziu a ideia de materiais compostos por filamentos fibrosos§7.3.1.2), uma suposição que dominava os primeiros modelos de força e deformação. Esta visão lançou as bases para interpretações corpusculares da elasticidade.

No início do século 19, os mecânicos franceses - notavelmente Navier (1821), Cauchy (1822-1823) e Poisson (1829) - formularam elasticidade assumindo que a matéria é feita de pontos materiais interagindo através das forças centrais. Navier foi o primeiro a derivar equações contínuas de suposições moleculares em 1821, predando o desenvolvimento mais sistemático de Cauchy, embora Cauchi tenha posteriormente fornecido uma estrutura mais geral e rigorosa para tensão e deformação teoria. Esta abordagem, firmemente enraizada na mecânica molecular e primeiros princípios newtonianos, teve forte apelo para a escola francesa analítica.

No entanto, um problema fundamental surgiu: a teoria molecular previu que Coeficiente de Poisson - a relação entre transverso e axial deformação sob carga uniaxial - deve ser igual precisamente $1/4$ para todos os materiais isotrópicos. Esta foi uma consequência matemática direta de assumir forças centrais entre os pontos materiais. Experimentos contradizem decisivamente esta previsão, mostrando que Coeficiente de Poisson varia significativamente entre os materiais (corco exibe valores próximos de 0, enquanto borracha se aproxima de 0,5). Esta discrepância, juntamente com a previsão do modelo de apenas uma única constante elástica independente onde dois eram necessários, lançou profunda dúvida sobre a validade dos modelos moleculares de força central (Capecchi, Ruta e Trovalusci, 2010; Todhunter e Pearson, 1893).

A falha central da teoria molecular foi assim sua previsão de que Coeficiente de Poisson deve ser igual a $1/4$ para todos os materiais isotrópicos - uma consequência de assumir forças centrais entre pontos materiais. Experimentos mostraram que esta relação varia significativamente (cork) ≈ 0, borracha ≈ 0.5), refutando decisivamente a estrutura molecular e revelando que a natureza exigia duas constantes elásticas independentes em vez da constante única prevista pela teoria molecular.

CÓPIA PARA REVISÃO

10.1.3 A ascensão da aproximação do contínuo

Para superar as limitações dos modelos moleculares, formulações contínuas de elasticidade gradualmente ganharam destaque durante a década de 1830-1850.

Cauchy lançou as bases de tensores tensão e deformação dentro de um corpo contínuo, formulando o que se tornaria o modelo geral continuum. No entanto, mesmo quando desenvolveu o quadro matemático de mecânica do contínuo, ele inicialmente manteve analogias mecânicas baseadas em interações moleculares, tentando conciliar as duas abordagens.

George Green, em sua notável série 1837-1839 de artigos sobre luz e elasticidade, introduziu uma abordagem inovadora baseada no potencial. Reconhecendo que as verdadeiras leis moleculares que governam a matéria permaneceram desconhecidas - e talvez inconhecíveis naquela época - ele ousadamente postulava que o comportamento elástico poderia ser descrito por uma função potencial escalar sem referência aos mecanismos moleculares subjacentes. Seu modelo, baseado no cálculo de variações e princípios energéticos, produziu duas constantes elásticas independentes - combinando resultados experimentais e marcando a primeira formulação completa do que agora é chamado de hiperelasticidade (Green, 1839a; Green, 1839b).

Apesar de seu sucesso empírico, a abordagem de Green encontrou resistência inicial, especialmente na França, onde interpretações mecanicistas enraizadas em princípios newtonianos eram filosoficamente preferidas. Até mesmo teóricos brilhantes como Lamé, Clapeyron e o jovem Saint-Venant lutaram durante a década de 1840 para identificar precisamente por que a teoria molecular tradicional falhou, relutante em abandonar o ideal reducionista.[1]

O ponto de viragem veio gradualmente. **Saint-Venant**, inicialmente um defensor das abordagens moleculares, tornou-se por volta da década de 1850 um dos defensores mais eficazes da teoria contínua. Seu desenvolvimento do método semi-inverso para resolver problemas de elasticidade e sua validação experimental sistemática das previsões contínuas ajudou a estabelecer a credibilidade da teoria. Os estudos cristalográficos de Bravais, 1866 mais iluminou a questão, mostrando que a estrutura molecular envolve arranjos geométricos muito mais complexos do que interações pontuais simples, ajudando a preencher o espaço conceitual entre descrições atomísticas e contínuas.

10.1.4 Tabela de comparação

10.1.5 Que teoria prevalecia?

No final do século 19, o **Teoria do contínuo** a elasticidade tinha prevalecido decisivamente na engenharia e mecânica aplicada. A falha dos modelos moleculares em prever os principais resultados experimentais, particularmente a restrição da razão de Poisson e a necessidade de duas constantes elásticas, combinadas com o aumento de poderosos métodos analíticos e computacionais baseados em formulações contínuas, levaram a Uma mudança fundamental no consenso teórico.

[1] Isso revela um contraste metodológico mais profundo entre a busca francesa pela elegância analítica fundamentada nos primeiros princípios e o empirismo britânico mais pragmático que enfatizava adequação fenomenológica e ajuste experimental. A tradição francesa, exemplificada pela École Polytechnique, valorizou rigor matemático e derivação de leis mecânicas fundamentais. A abordagem britânica, influenciada pela tradição matemática tripos de Cambridge (o tradicional e altamente rigoroso sistema de exame na Universidade de Cambridge, originalmente denotando tanto o curso de estudo quanto seus exames finais, especialmente famoso por ranqueando os alunos de matemática como "Wranglers"), estava mais disposto a postular relações fenomenológicas, como a função energética de Green, se concordassem com a observação, mesmo sem justificação mecanicista. Esta divisão filosófica continuaria influenciando o desenvolvimento da mecânica ao longo do século XIX, com os franceses gradualmente vindo a apreciar o poder das abordagens fenomenológicas quando mecanismos fundamentais permaneceram obscuros.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Aspect	Teoria molecular	Teoria do Continuum
Ontologia	Partículas discretas	Meio contínuo
Tensão derivação	De forças interatômicas	Da lei constitucional
Forma constitutiva	Baseado em forças centrais	**(a)** Geral: $\sigma = f(\varepsilon)$ **(b)** Potencialmente baseado em: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$
Filosofia	Reducionista, mecanicista	Fenomenológico, variacional
Principais proponentes	Hooke, Navier, Poisson, Cauchy, Kelvin, Maxwell	Cauchy (general), Green (potencial), Lamé, Saint-Venant, Piola, Kirchhoff
Constantes elásticas	Previdência um (Razão de Poisson = 1/4)	Permite duas constantes independentes
Tratamento da anisotropia	Da estrutura de treliça	Imposto por simetria de W ou f
Dominância histórica	1820 até 1840	De 1850 em diante
Papel moderno	Base de dinâmica molecular, modelagem multiescala	Núcleo da FEM e mecânica sólida; Modelos potenciais chave na hiperelasticidade e deformação finita

Tabela 10.1: Contrastando teorias moleculares e contínuas de elasticidade, com duas formulações contínuas.

Entre as formulações contínuas, o *Modelo baseado em potencial* ganhou destaque especial para modelagem de materiais elásticos (reversíveis), especialmente após o desenvolvimento de teorias constitutivas termodinamicamente consistentes no século 20 (por exemplo, Truesdell e Noll, Coleman e Nol). A estrutura também se mostrou essencial para grande deformação e elasticidade não linear através do trabalho de Rivlin, Mooney, e outros. Modelos contínuos gerais, não exigindo um potencial, fornecidos flexibilidade para modelar comportamento inelástico, dissipativo e dependente do tempo.

No entanto, as teorias moleculares experimentaram um notável renascimento no século 20 através da mecânica estatística e, mais tarde, da dinâmica molecular computacional. Hoje, eles complementam modelos contínuos em abordagens multiescala, com simulações atomísticas informando relações constitutivas contínuas - uma síntese que teria agradado tanto as escolas moleculares e contínuas do século 19.

10.1.6 Referências Históricas

Fontes Primárias do Contribuidor

Autor	Ano	Citação	Título	Descrição
Navier				

CÓPIA PARA REVISÃO

Autor	Ano	Citação	Título	Descrição
Navier	1821	(Navier, 1821)	*Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	Primeira derivação de equações contínuas a partir de suposições moleculares
Navier	1827	(Navier, 1827a)	*Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	Versão ampliada com desenvolvimento matemático completo
Cauchy				
Cauchy	1822	(Cauchy, 1822)	*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps*	Formulação inicial do conceito tensão
Cauchy	1823	(Cauchy, 1823)	*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps*	Desenvolvimento sistemático do tensor tensão
Cauchy	1828	(Cauchy, 1828)	*"Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur"*	Equações gerais de equilíbrio para corpos elásticos
Cauchy	1829	(Cauchy, 1829)	*Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels*	Teoria molecular da elasticidade com forças centrais
Poisson				
Poisson	1829	(Poisson, 1829)	*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*	Teoria molecular abrangente; Apresenta
Poisson	1831	(Poisson, 1831)	*Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques*	Onda propagação em meios elásticos
Verde				
Verde	1828	(Green, 1828)	Um ensaio sobre a aplicação da análise matemática à eletricidade e ao magnetismo	Apresentando potencial abordagem de função
Verde	1837	(Green, 1837)	Na Reflexão e Refração da Luz	Aplicação precoce à elasticidade óptica
Verde	1839	(Green, 1839a)	Sobre as Leis de Reflexão e Refração da Luz	Desenvolvimento da função de energia deformação
Verde	1842	(Green, 1842)	Na Propagação da Luz na Mídia Cristalizada	Extensão para materiais anisotrópicos
Ferrers (ed.)	1871	(Ferrers, 1871)	Documentos matemáticos de George Green	Coleta de trabalhos com comentários
Lamé e Clapeyron				
Lamé & Clapeyron	1831	(Lamé e Clapeyron, 1831)	*Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes*	Trabalho conjunto em equilíbrio interior de sólidos
Lamé & Clapeyron	1833	(Lamé e Clapeyron, 1833)	*Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide*	Aplicação da elasticidade aos problemas de resfriamento
Lamé	1852	(Lamé, 1852)	*Leçons sur la théorie matemática de l'élástica*	Trato abrangente. Constantes de Lamé

CÓPIA PARA REVISÃO

Autor	Ano	Citação	Título	Descrição
Clapeyron	1857	(Clapeyron, 1857)	*Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis*	Teoria de três momentos para contínua vigas
Saint-Venant				
Saint-Venant	1855	(Saint-Venant, 1855b)	*"Mémoire sur la torsion des prismes"*	Método semi-inverso; Teoria da torção
Saint-Venant	1856	(Saint-Venant, 1855c)	*"Mémoire sur la flexion des prismes"*	Extensão para flexão de barras prismáticas
Saint-Venant	1864	(Saint-Venant, 1864)	*"Mémoire sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs"*	Plasticidade além do limite elástico
Bravais				
Bravais	1850	(Bravais, 1850)	*"Mémoire sur les ssystèmes formés par des points distribués régulièrement"*	Distribuição regular de pontos; Teoria da estrutura
Bravais	1866	(Bravais, 1866)	*Études cristallographiques*	Estrutura de cristal e arranjos moleculares
Fundações anteriores				
Galilei	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*	Força de materiais; viga teoria cantilever
Hooke	1678	(Hooke, 1678)	*De Potentia Restitutiva, ou da Primavera*	Primeira formulação da lei de elasticidade (Lei Hooke)
Euler	1744	(Euler, 1744b)	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas* (Apêndice: *De curvis elásticos*)	Cálculo variacional; Curvas elásticas
Outros contribuintes importantes				
Piola	1833	(Piola, 1833)	*La meccanica de' corpi naturalmente estesi*	tensão tensor Piola; Formulação variacional
Kirchhoff	1850	(Kirchhoff, 1859)	*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*	Teoria da placa com dobra e alongamento

Fontes secundárias e históricas

Autor	Ano	Citação	Título	Descrição
Todhunter & Pearson	1886–1893	(Todhunter e Pearson, 1893)	Uma história da teoria da elasticidade e da força dos materiais	História autoritária da era vitoriana
Timoshenko	1953	(Timoshenko, 1953)	História da Força dos Materiais	Perspectiva de engenharia sobre desenvolvimento
Truesdell	1960	(Truesdell, 1960)	A Mecânica Racional dos Corpos Flexíveis ou Elastic 1638-1788	Análise abrangente do século XVII-18
Truesdell & Noll	1965	(Truesdell e Noll, 1965)	Teorias não-lineares do campo da mecânica	Estrutura moderna mecânica do contínuo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Autor	Ano	Citação	Título	Descrição
Szabó	1977	(Szabó, 1977)	*Geschichte der mechanischen Principien*	História abrangente (em alemão)
Grattan-Guinness	1990	(Grattan-Guinness, 1990)	Convoluções em Matemática Francesa, 1800-1840	Análise detalhada da escola de francês
Benvenuto	1991	(Benvenuto, 1991a)	Uma Introdução à História de Mecânica estrutural	História de dois volumes
Amor	1927	(Love, 1927)	Um tratado sobre a teoria matemática da elasticidade	Tratado clássico com notas históricas
Capecchi	2010	(Capecchi, Ruta e Trovalusci, 2010)	História das leis Trabalho virtual	Perspectiva moderna sobre a história da mecânica

10.2 Mecânica do contínuo

Este capítulo marca uma transição para o quadro analítico de mecânica do contínuo, no qual os corpos materiais são modelados como meios contínuos governados por variáveis de campo tais como deslocamento, deformação, e tensão. A ênfase é colocada nos desenvolvimentos conceituais e matemáticos que alcançaram a maturidade no século XIX, quando a mecânica evoluiu de raciocínio em grande parte discreto e geométrico para uma teoria sistemática fundamentada na análise. Atenção é direcionada para a formulação de equações governantes, relações constitutivas e critérios de estabilidade, através das quais a intuição física foi transformada em uma estrutura matemática coerente e preditiva.

O material aqui apresentado foca nesta consolidação de idéias em fase tardia, destacando como conceitos fundamentais – esforços internos, deformação, equilíbrio e estabilidade - foram rigorosamente definidos e interligados dentro do quadro contínuo. O tratamento é intencionalmente conciso, mas matematicamente completo, ilustrando como mecânica do contínuo forneceu a base sobre a qual moderna análise estrutural e teoria de engenharia foram finalmente construídas.

10.3 Introdução

10.3.1 Revoluções francesas e o nascimento da elasticidade moderna

Os séculos 16-18 foram dominados pelos ingleses, holandeses, alemães, italianos e suíços filósofos naturais ou cientistas. Claro, houve algumas intrusões de Mariotte e Coulomb

CÓPIA PARA REVISÃO

entre outras, mas as contribuições francesas eram mínimas (embora Paris providencie um local de encontro para Leibniz e Huygens).

No entanto, no século 19, a França liderou o mundo na aplicação de princípios científicos para problemas práticos, tendo estabelecido o famoso *ÉCole des Ponts et Chaussées* e o *ÉCole Polytechnique* em 1747 e 1794, respectivamente. Este último, fundado por Gaspard Monge durante a Revolução, foi militarizado sob Napoleão I em 1804. Eles forneceram um cadinho dentro do qual muitos eminentes engenheiros ensinavam ou estudavam. A lista inclui Cauchy, Clapeyron, FourierLagrange, Lamé (1795-1870), Monge, Poisson para o primeiro; Cauchy (1789-1857), Darcy, Navier, Freyssinet, Saint-Venant(1797-1886), para o segundo. Em alguns casos, ambas as instituições alegaram o mesmo que os ex-alunos (Navier, e Saint-Venant).

O trabalho teórico de Navier sobre flexura e contínua, publicado pela primeira vez em 1826 *Leçons*, forneceu a base teórica que influenciou a engenharia estrutural subsequente. A teoria geral viga, incluindo o que ficou conhecido como a hipótese de Bernoulli-Navier (que as seções planas permanecem planas e normais para o linha neutra), sustentava grande parte do século 19 projeto estrutural. No entanto, grandes projetos como a Ponte Britânica de Robert Stephenson (1850) dependiam fortemente em extensos testes experimentais por William Fairbairn e fórmulas empíricas por Eaton Hodgkinson, ao invés de métodos puramente analíticos. O projeto tubular da ponte foi validado através de testes elaborados em escala na Millwall Iron Works de Fairbairn, representando um casamento de teoria emergente com verificação pragmática experimental (Clark e Stephenson, 1850; Charlton, 1982).

10.3.2 Fundamentos da Teoria da Elasticidade

10.3.2.1 Coulomb (1736-1806) e a Fundação de Engenharia

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) superou a lacuna entre mecânica teórica e engenharia prática. Um engenheiro militar que serviu extensivamente nas colônias francesas, Coulomb combinou rigorosa análise matemática com cuidadosa experimentação. Suas memórias *Essai sur une aplication des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* (1773) (Coulomb, 1773b) marca uma bacia hidrográfica na abordagem científica para projeto estrutural. Ao contrário de seus contemporâneos que se concentravam em princípios mecânicos abstratos, Coulomb abordou problemas diretamente relevantes para a construção:

1. **Teoria da Pressão Terrestre**:. Coulomb desenvolveu a primeira teoria racional para calcular a pressão lateral da terra sobre paredes de retenção. Usando o princípio de trabalho virtual combinado com a suposição de uma superfície de falha do avião, ele deriva:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 K_a$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Onde K_a é o coeficiente de pressão da terra ativa. Este trabalho lançou as bases para a engenharia geotécnica moderna e permanece conceitualmente válido hoje.

2. **Teoria da fricção**:. Através de experimentos extensivos, Coulomb estabeleceu que a força de atrito é proporcional à força normal e independente da área de contato - a lei $F = \mu N$ que leva o nome dele. Ele distinguiu entre atrito estático e cinético e reconheceu o papel da coesão em solos, formulando:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

Esta lei de atrito tornou-se fundamental para a análise das estruturas com interfaces de contato e interação solo-estrutura.

3. **Teoria**:. Coulomb investigou a resistência de vigas sob flexão, propondo que a falha ocorre quando a tração tensão atinge um valor crítico. Sua análise de pilar flambagem, embora menos sofisticada do que Euler, abordou aspectos práticos como carregamento excêntrico e imperfeições materiais que a teoria idealizada por Euler negligenciava.

O legado de Coulomb não está apenas em fórmulas específicas, mas em sua metodologia: Combinando mecânica analítica com validação experimental e raciocínio geométrico. Seu trabalho demonstrou que a mecânica racional poderia ser aplicada a problemas reais de engenharia, influenciando na orientação prática da École Polytechnique e estabelecendo a mecânica de engenharia como uma disciplina distinta da matemática pura.

O século XIX testemunhou uma transformação notável no tratamento matemático da mecânica, passando da análise discreta de partículas e corpos rígidos para o tratamento contínuo de sólidos deformáveis. Esta revolução foi quase inteiramente uma conquista francesa, emergindo do fértil ambiente intelectual da recém-criada *École Politécnica* e.. *École des Ponts et Chaussées*.. Dentro de algumas décadas, uma constelação de matemáticos e engenheiros brilhantes estabeleceu as bases teóricas sobre as quais repousam todos os modernos análise estrutural.

10.3.2.2 Lagrange (1736-1813) e a Fundação Analítica

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), (§6.7.5Embora treinado em Turim, passou seus anos mais produtivos em Paris e tornou-se professor na École Polytechnique em sua fundação. Seu *Analitique Mécanique* (1788) (Lagrange, 1788 PDF) Mecânica revolucionada substituindo o raciocínio geométrico por métodos puramente analíticos. De particular importância para mecânica estrutural foram:

Para detalhes analíticos, consultar §24.2.3

1. **O Princípio de Trabalho virtual**:. A elegante formulação de Lagrange de trabalho virtual forneceu a base para métodos energéticos em análise estrutural. Ele demons-

CÓPIA PARA REVISÃO

trou que para um sistema em equilíbrio, o trabalho virtual feito por todas as forças através de qualquer virtual compatível deslocamento é zero:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Este princípio se tornaria mais tarde fundamental para a análise método dos deslocamentos e elemento finito.

2. **Coordenadas Generalizadas**:. A introdução de coordenadas generalizadas por Lagrange libertou a mecânica das restrições geométricas, permitindo a análise de sistemas complexos através de coordenadas mínimas.
3. **O Cálculo das Variações**:. Embora desenvolvido mais cedo por Euler, os métodos variacionais sistematizados de Lagrange, que se revelariam essenciais para formular problemas de valor limite na elasticidade.

A abordagem analítica de Lagrange influenciou profundamente a próxima geração de matemáticos franceses, estabelecendo a metodologia pela qual mecânica do contínuo seria desenvolvida.

10.3.2.3 Fourier's (1768-1830) Métodos matemáticos

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), outro luminário na École Polytechnique, fez sua principal contribuição através de seu *Theorie Analytique de la Chaleur* (1822) (Fourier, 1822). Enquanto focado na condução de calor, o trabalho de Fourier teve profundas implicações para a mecânica:

1. **Equações Diferenciais Parciais**:. Fourier demonstrou como os fenômenos físicos poderiam ser descritos por equações diferenciais parciais com uma metodologia apropriada que seria transferida diretamente para problemas de elasticidade.
2. **Série Fourier**:. Seu método de representar funções como infinita série de funções trigonométricas forneceu ferramentas poderosas para resolver problemas de valor limite em elasticidade.
3. **Análise Dimensional**:. A abordagem sistemática de Fourier às dimensões físicas influenciou como constantes elásticas e propriedades materiais foram formuladas.

Embora Fourier não trabalhasse diretamente na elasticidade, sua estrutura matemática se mostrou indispensável para desenvolvimentos subsequentes em mecânica do contínuo.

10.3.2.4 Cauchy (1789-1857) e o conceito de Tensão

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)§6.7.6) é o principal arquiteto da teoria matemática da elasticidade. Durante seu mandato na École Polytechnique (1816-1830), ele produziu uma série de memórias que estabeleceram a elasticidade como uma ciência matemática rigorosa

CÓPIA PARA REVISÃO

(Cauchy, 1827; Cauchy, 1828). Sua contribuição mais profunda foi a introdução do tensor tensão – um salto conceitual que resolveu dois séculos de confusão sobre a natureza de esforços internos em sólidos.

A Pré-História: Força Sem Tensão

Antes de Cauchy, filósofos naturais e engenheiros trabalharam com *forças em seções* sem um conceito claro de tensão como uma quantidade intensiva em um ponto. Galileu, em sua análise do cantilever viga (1638), falou da ''resistência absoluta' de uma seção transversal — uma força total, não uma intensidade distribuída. Mariotte (1686) e Pai (1713) refinada teoria de Galileu viga reconhecendo que as "fibras" em um lado do linha neutra estão em tensão enquanto aqueles no outro estão em compressão, mas eles ainda concebeu a resistência como uma propriedade da seção como um todo.

Coulomb (1773), em sua análise de vigas e retendo paredes, fez o passo crucial de considerar o *Distribuição* de forças através de uma seção e introduziu a idéia de que o fracasso ocorre quando uma intensidade crítica é alcançada. Mesmo assim, mesmo Coulomb não possuía uma estrutura geral para descrever o estado de esforço interno em um ponto arbitrário em um plano arbitrario através de um sólido.

A dificuldade fundamental era esta: Ao contrário das forças externas, que agem em pontos definidos ou sobre superfícies definidas, dependem de *Que corte imaginário* um faz através do corpo. A força transmitida através de um plano horizontal por um ponto difere, em geral, da força transmitida por um plano vertical pelo mesmo ponto. Como se pode caracterizar o estado de esforço interno em um ponto quando a resposta depende de qual avião considerar?

Resolução de Cauchy: O tensor Tensão

Para detalhes analíticos, consultar §O.2.2

O gênio de Cauchy era reconhecer que esta aparente complexidade oculta uma simplicidade subjacente. Em suas memórias de 1822-1827 (Cauchy, 1822; Cauchy, 1823), ele introduziu o conceito de *Vetor de tração* $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$:. a força por unidade de área transmitida através de uma superfície imaginária com unidade normal $\mathbf{n}$.. O vetor de tração depende tanto do ponto em questão quanto da orientação da superfície.

Cauchy então provou, por um belo argumento envolvendo o equilíbrio de um tetraedro infinitesimal, que o vetor de tração sobre *Qualquer* O plano pode ser calculado a partir dos vetores de tração em apenas *Três* Planos mutuamente perpendiculares. Especificamente, se soubermos as traçãos em planos perpendiculares ao x, y, e z Eixos, podemos encontrar a tração em qualquer plano por uma operação linear simples.

CÓPIA PARA REVISÃO

Figura 10.1: O argumento do tetraedro de Cauchy. Um tetraedro infinitesimal é cortado do corpo, com três faces perpendiculares aos eixos de coordenadas e uma face inclinada com unidade normal **n**.. Equilíbrio do tetraedro, à medida que seu tamanho diminui para zero, produz a relação $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

O Argumento de Tetraedro Cauchy

Considere um tetraedro infinitesimal cortado do interior de um corpo 10.2). Três faces são perpendiculares aos eixos de coordenadas, com áreas dA_x, dA_y, dA_z; A quarta face é um plano oblíquo com unidade normal $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ e área dA.. Por geometria:

$$dA_x = n_x\, dA, \quad dA_y = n_y\, dA, \quad dA_z = n_z\, dA$$

Os vetores de tração nas três faces de coordenadas são $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$ (negativo porque os normais externos apontam nas direções de coordenadas negativas para essas faces). A tração no rosto inclinado é $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$.

Equilíbrio de força requer forças do corpo negligentes, que escalam como volume $\sim dA^{3/2}$ e se tornar insignificante comparado com as forças da superfície $\sim dA$ Como o tetraedro encolhe:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} dA_x - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} dA_y - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)} dA_z = \mathbf{0}$$

Substituindo as relações geométricas e dividindo por dA:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = n_x \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} + n_y \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} + n_z \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$$

Isso é.. **Teorema de Cauchy**:. A tração em qualquer avião é um *Função linear* da unidade

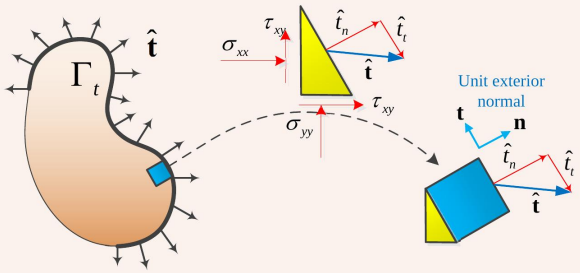


Figura 10.2: Forças de superfície

normal. Definindo o *tensão tensor* $\boldsymbol{\sigma}$ como a matriz cuja pilares são os vetores de tração nos planos de coordenadas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

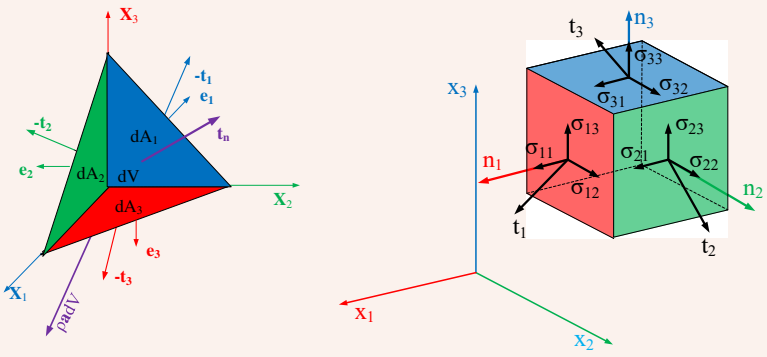
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

equação (10.3.2.4) torna-se:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Esta única equação encapsula a resolução de Cauchy do quebra-cabeça do século dois. A prova depende do *argumento de tetraedro* (Fig. 10.3): Considere um tetraedro infinitesimal com três faces alinhadas com os planos de coordenadas, cada uma carregando os componentes correspondentes tensão σ_{ij}E um rosto oblíquo ABC com unidade externa normal $\boldsymbol{n}$ e área dA.. Como o tetraedro encolhe a um ponto, equilíbrio de forças em cada direção coordenada requer que a tração $\boldsymbol{t}$ Na face oblíqua, é expressível apenas em termos de tração nas três faces coordenadas... cedendo precisamente a relação linear (10.3.2.4).. O tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ caracteriza completamente o estado de esforço interno em um ponto; A tração em qualquer plano através desse ponto é obtida pela operação linear (10.3.2.4).. Tensão não é nem um escalar nem um vetor, mas um *Tensor*Um mapa linear de vetores normais $\boldsymbol{n}$ para vetores de tração $\boldsymbol{t}$.



(a) Tetraedro (b) Tensões

Figura 10.3: Cauchy: tetraedro para tensão

Simetria da tensão Tensão

Ao considerar o equilíbrio de momento do tetraedro infinitesimal (ou, equivalentemente, um cubo infinitesimal), Cauchy demonstrou que o tensor tensão é simétrico:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Isso reduz o número de componentes independentes tensão de nove para seis. A simetria tem profundas consequências: Garante a existência de três perpendiculares *Principais direções* ao longo do qual a tração é puramente normal (não cisalhamento, com correspondente *Diretor tensões* σ_1, σ_2, σ_3.

CÓPIA PARA REVISÃO

As Equações Fundamentais

Com o tensor tensão na mão, Cauchy derivava as equações fundamentais de mecânica do contínuo:

1. **Equações do equilíbrio** (Na ausência de forças do corpo):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

   com equações análogas para o y e.. z - Direções. Em notação compacta: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.
2. **Deformação-Deslocamento Relações** (para pequenas deformações):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3. **Relações Constitutivas**:. Cauchy inicialmente propôs uma teoria molecular relacionando tensão com deformação, embora sua formulação seria refinada por pesquisadores subsequentes.

Representação gráfica de Mohr (1882)

O tensor tensão, por toda sua elegância, permaneceu um tanto abstrato para os engenheiros praticantes. Em 1882, Christian Otto Mohr forneceu uma interpretação gráfica brilhante que tornou o conceito de tensor acessível (Mohr, 1882b). **O círculo de Mohr** representa todas as combinações possíveis normais e cisalhamento tensão em planos através de um ponto como pontos em um círculo (ou, em três dimensões, em 3 círculos).

Dado o diretor tensões $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, o normal tensão σ E cisalhamento tensão τ em qualquer avião satisfazer:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

O máximo cisalhamento tensão ocorre em aviões em 45 Para as direções principais e iguais $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.. O círculo de Mohr tornou-se uma ferramenta indispensável para os engenheiros, permitindo rápida determinação gráfica de tensões em planos arbitrários e formando a base para critérios de falha na plasticidade e mecânica da fratura.

Significado Histórico

A introdução de Cauchy do tensor tensão representou uma ruptura completa da abordagem do século 18. Em vez de estudar elementos estruturais específicos (vigas, pilares, ele formulou equações gerais de campo aplicáveis a qualquer meio elástico contínuo. O salto

CÓPIA PARA REVISÃO

conceitual - reconhecendo que tensão é um tensor, não um vetor - foi talvez o único avanço mais importante na história de mecânica do contínuo.

Como Truesdell observou, o trabalho de Cauchy transformou mecânica a partir de uma ciência do *forças* para uma ciência de *Campos*.. O estado de um corpo contínuo é caracterizado não por forças discretas em pontos discretos, mas por campos tensores que variam continuamente através do espaço. Este ponto de vista teórico-campo, alcançado pela primeira vez para tensão, seria mais tarde estendido a deformação, temperatura, velocidade, e todas as outras quantidades de física contínua.

O tensor tensão permanece a fundação de todos os modernos análise estrutural. Quer se use métodos analíticos, elementos finitos, ou dinâmica molecular, o tensor Cauchy tensão fornece a linguagem para descrever esforços internos. Dois séculos depois de sua introdução, é uma das realizações intelectuais mais conseqüentes na história da mecânica.

10.3.2.5 Razão de Poisson (1781-1840) e simplificação de Cauchy

Siméon Denis Poisson (1781-1840) (§6.7.2), um colega de Cauchy na École Polytechnique, fez várias contribuições cruciais para a teoria da elasticidade (Poisson, 1829):

Coeficiente de Poisson:

Poisson descobriu que quando uma barra elástica é esticada longitudinalmente, ela se contrai lateralmente, e a proporção de lateral para longitudinal deformação é uma constante material:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{lateral}}}{\varepsilon_{\text{longitudinal}}}$$

Ele inicialmente previu (incorretamente, baseado em modelos moleculares) que $\nu = 1/4$ para todos os materiais. Embora esse valor específico estivesse errado, o conceito de Coeficiente de Poisson tornou-se fundamental para a teoria da elasticidade.

Equações para Materiais Isotrópicos:

Poisson simplificou as equações de Cauchy para materiais isotrópicos, reduzindo o número de constantes elásticas independentes para dois. Para um material isotrópico, as relações tensão-deformação assumem a forma:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

Onde λ e.. μ são as constantes de Lamé (embora esta notação veio mais tarde).

Teoria da placa:

Poisson também desenvolveu a teoria das placas elásticas, estendendo viga teoria para duas dimensões e derivando o governante equação diferencial para deflexão da placa.

CÓPIA PARA REVISÃO

Para detalhes analíticos, consultar Capítulo 33

10.3.2.6 Navier (1785-1836) Síntese e Aplicação

Claude-Louis-Marie-Henri Navier (1785-1836)§6.7.3 ocupa uma posição única como um teórico rigoroso e engenheiro prático. Depois de se formar na École Polytechnique, ele tornou-se professor na École des Ponts et Chaussées, onde lecionou desde 1819 até sua morte.

As Equações Navier:

Independente de Cauchy e usando diferentes métodos, Navier derivava as equações fundamentais da elasticidade. Sua abordagem, baseada em forças moleculares entre os pontos materiais, levou às equações de equilíbrio em termos de deslocamentos (as equações de Navier):

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Onde $\mathbf{u}$ é o vetor deslocamento e $\mathbf{f}$ representa as forças do corpo.

Ponte entre teoria e prática:

A grande conquista de Navier foi traduzir a matemática abstrata de Cauchy e Poisson em aplicações práticas de engenharia. Seu *Résumé des Leçons* (Navier, 1826) tornou-se o texto padrão para estudantes de engenharia, apresentando:

- Viga teoria derivada das equações gerais de elasticidade
- Métodos para calcular tensões e desvios em estruturas práticas
- Análise contínua e integrada vigas (discussiva em detalhes na seção 11.3.1)
- Aplicações para pontes, edifícios e máquinas

Navier demonstrou que a matemática sofisticada de mecânica do contínuo poderia produzir fórmulas práticas de design. Sua famosa equação de viga:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

tornou-se uma ferramenta padrão para engenheiros estruturais - um descendente direto das equações de campo de Cauchy, mas simples o suficiente para cálculos práticos.

10.3.2.7 Lamé's (1795-1870)

Gabriel Lamé (1795-1870), professor da École Polytechnique e mais tarde École des Ponts et Chaussées, trouxe rigor matemático e percepção física à teoria da elasticidade (Lamé, 1852).

CÓPIA PARA REVISÃO

As Constantes de Lamé:

Lamé reformulou as equações constitutivas para materiais isotrópicos em termos de duas constantes elásticas agora com seu nome, λ e.. μ.. A lei de Hooke generalizada se torna:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e a convenção de somação de Einstein se aplica.

Essas constantes se relacionam com parâmetros de engenharia mais familiares:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Métodos de solução:

Lamé desenvolveu métodos sistemáticos para resolver problemas de elasticidade, particularmente para corpos com simetria geométrica (esferas, cilindros). Seu trabalho em cilindros de paredes grossas sob pressão continua sendo uma solução clássica, amplamente usada no projeto do vaso de pressão.

10.3.2.8 Saint-Venant (1797-1886) e o método semi-inverso

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) (§6.7.8) representa o culminar da teoria de elasticidade francesa do século 19. Formado na École Polytechnique, passou a maior parte de sua carreira na École des Ponts et Chaussées, onde editou e anotou extensivamente a terceira edição da Navier *Résumo* (Navier, 1864 PDF).

O Método Semi-Inverso:

A grande inovação de Saint-Venant foi o método semi-inverso para resolver problemas de elasticidade. Em vez de resolver o sistema completo de equações diferenciais com condições de contorno (muitas vezes impossível), ele iria:

1. Assumir uma forma para o campo tensão ou deslocamento baseado na intuição física
2. Verifique se esta suposição satisfaz o equilíbrio e compatibilidade
3. Determine as incógnitas restantes de condições de contorno

Essa abordagem pragmática trouxe soluções para problemas anteriormente intratáveis.

Princípio de Saint-Venant:

Talvez sua contribuição mais influente foi o princípio que leva seu nome:

CÓPIA PARA REVISÃO

Santo-venente1855memoire

Se as forças que atuam em uma pequena parte da superfície de um corpo elástico são substituídas por outro sistema de forças estaticamente equivalente agindo na mesma porção da superfície, essa redistribuição do carregamento produz mudanças substanciais no tensões localmente, mas tem um efeito negligenciável sobre o tensões a distâncias que são grandes em comparação com as dimensões lineares da superfície na qual as forças são alteradas.

Este princípio justificou o uso de simplificado condições de contorno em problemas práticos e tornou-se fundamental para a análise da engenharia.

Soluções Clássicas:

As memórias de Saint-Venant forneceram soluções definitivas para:

- **Torção de Eixos Não Circulares** (Saint-Venant, 1855a):. Ele mostrou que as seções transversais não permanecem planas durante a torção, derivando as equações e soluções governantes para várias formas transversais.
- **Dobrando de Vigas**:. Ele refinou a teoria viga, contabilizando deformação cisalhamento e fornecendo correções à teoria elementar.
- **Flexão, tensão e compressão de barras prismáticas**:. Seu tratamento abrangente uniu várias condições de carga sob uma estrutura matemática comum.

Para detalhes analíticos, consultar §23.2

10.3.2.9 Clapeyron's (1799-1864)

Benoît-Paul-Émile Clapeyron (1799-1864), embora mais conhecido pelos termodinamistas, fez contribuições fundamentais para mecânica estrutural através de seu trabalho sobre métodos energéticos (Clapeyron, 1834).

Teorema de Clapeyron:

Seu teorema sobre energia elástica (discussado em detalhes na Seção) 48.1.6.1) afirma que a energia deformação em um corpo elástico é igual a metade do trabalho feito por forças externas:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV$$

Este resultado tornou-se fundamental para os métodos de energia em análise estrutural.

CÓPIA PARA REVISÃO

Equação de três momentos:

Clapeyron mais tarde trabalho (Clapeyron, 1857) em contínuo vigas (Seção 11.3.2) forneceram ferramentas práticas que preencheram a lacuna entre teoria da elasticidade abstrata e prática de engenharia estrutural.

10.3.2.10 A conquista francesa em perspectiva

As contribuições desses matemáticos e engenheiros franceses, concentradas em um período notavelmente breve (aproximadamente 1820-1860), estabeleceram mecânica do contínuo e teoria da elasticidade como ciências matemáticas rigorosas. Vários fatores possibilitaram esta extraordinária conquista:

1. **Apoio institucional**:. A École Polytechnique forneceu um ambiente único onde matemáticos e engenheiros trabalhavam lado a lado, com pesquisas explicitamente valorizadas ao lado do ensino.
2. **Sofisticação Matemática**:. A tradição francesa de análise matemática, derivada de Lagrange, forneceu as ferramentas necessárias para formular e resolver as equações diferenciais parciais da elasticidade.
3. **Motivação de Engenharia**:. As exigências práticas da engenharia civil, particularmente a construção de ferrovias e pontes, forneceram motivação e validação para desenvolvimentos teóricos.
4. **Continuidade Intelectual**:. Cada geração construída sistematicamente sobre o trabalho de seus antecessores, com os alunos se tornando professores e estendendo o trabalho dos mentores.

Em 1860, os fundamentos teóricos de mecânica do contínuo estavam essencialmente completos. O desafio para o resto do século seria traduzir esta estrutura matemática em métodos práticos para métodos acessíveis a engenheiros praticantes sem exigir domínio da física matemática avançada.

10.4 A estrutura matemática completa

Tendo examinado o desenvolvimento histórico e os principais contribuintes para mecânica do contínuo, apresentamos agora as bases matemáticas sobre as quais repousa toda a teoria. As leis fundamentais do equilíbrio — conservação da massa, momento, e energia- Transcender qualquer material em particular e representar princípios físicos universais. Essas leis, combinadas com relações constitutivas materiais específicas (discussivas na próxima seção), fornecem um quadro matemático completo para descrever o comportamento da mídia contínua.

CÓPIA PARA REVISÃO

A formulação dessas leis de equilíbrio em sua forma moderna ocorreu gradualmente ao longo do século XIX, embora seu conteúdo físico tenha sido compreendido antes. O trabalho de Cauchy na década de 1820 estabeleceu o equilíbrio do momento linear da forma que reconhecemos hoje. As leis termodinâmicas, embora formulado na década de 1840-1850 por Clausius, Thomson (Lorde Kelvin), e outros, não foram incorporados sistematicamente em mecânica do contínuo até o trabalho do século 20 de DuhemTruesdellE Coleman.

10.4.1 Euler e a Conservação da Missa

O princípio da conservação da massa afirma que a massa não pode ser criada nem destruída dentro de um continuum, (Euler, 1757b) (Euler, 1757a). Para um volume material $V(t)$ limitado pela superfície $S(t)$ Movendo-se com o material, este princípio é expresso como:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

Onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade de massa na posição $\mathbf{x}$ e o tempo t.

Aplicando o teorema de transporte Reynolds e observando que a integral deve desaparecer para qualquer volume material arbitrária produz a forma local:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidade. Este é o *equação de continuidade**.

Para um material incompressível (ρ = constant), isso simplifica para:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Na descrição lagrangiana, seguindo partículas de material, a conservação da massa assume uma forma particularmente elegante:

$$\rho_0 \, dV_0 = \rho \, dV$$

Quando o subscrito 0 denota quantidades de configuração de referência, ou equivalentemente:

$$\rho_0 = \rho J$$

Onde $J = \det(\mathbf{F})$ é o Jacobiano do tensor de deformação $\mathbf{F}$.

10.4.2 Cauchy (1789-1857) e o equilíbrio do momento linear

O equilíbrio do momento linear representa a segunda lei de Newton aplicada a um contínuo. Para um volume material, a taxa de mudança de momento é igual à soma das forças aplicadas:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{S(t)} \mathbf{t} \, dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \, dV$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde **t** é o vetor de tração (força por unidade) na superfície, e **b** representa forças do corpo por unidade de massa (como gravidade).

A visão fundamental de Cauchy era reconhecer que o vetor de tração em um ponto depende linearmente da unidade externa normal **n** Para a superfície:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor Cauchy tensão.. Esta relação, conhecida como *Princípio de Cauchy tensão*, é uma das pedras angulares de mecânica do contínuo.

Aplicando o teorema da divergência e localizando a forma integral produz Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

Onde D/Dt Denota a derivada do tempo material. Em forma de componente (usando a soma de Einstein):

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i$$

Para problemas em elastóstase (sem aceleração), isso reduz a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

as equações de equilíbrio que Cauchy, Navier e seus contemporâneos derivaram na década de 1820.

10.4.3 Equilíbrio do momento angular

O equilíbrio do momento angular afirma que a taxa de mudança do momento ângulo de um volume material é igual aos momentos aplicados:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{S(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, dS + \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \, dV$$

Na ausência de um casal distribuído, este princípio leva a um resultado notavelmente simples, mas profundo: O tensor Cauchy deve ser simétrico.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{or} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Esta condição de simetria, reduzindo os nove componentes independentes do tensor tensão para seis, foi reconhecido por Cauchy e é fundamental para todos os desenvolvimentos subsequentes na teoria da elasticidade. Isso implica que o estado tensão em um ponto pode ser completamente descrito por três normais tensões e três cisalhamento tensões.

A simetria do tensor tensão tem profundas implicações. Garante a existência de três direções ortogonais mútuas em cada ponto, alinhado com os autovetores de $\boldsymbol{\sigma}$, ao longo do qual apenas normal tensões agir.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

10.4.4 Clausius (1822-1888), Thomson (1824-1907) e Duhem (1861-1916) leis termodinâmicas)

10.4.4.1 Primeira lei:

Rudolf Clausius (Clausius, 1850; Clausius, 1854; Clausius, 1879) e William Thomson (Thomson, 1848; Thomson, 1851; Thomson, 1855) e Duhem (Duhem, 1891; Duhem, 1911; Duhem, 1893).

A primeira lei da termodinâmica estende o balanço de energia mecânica para incluir efeitos térmicos. Para um volume material, a taxa de mudança da energia total (cinética mais interna) é igual à taxa de trabalho feito mais a taxa do fornecimento de calor:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+e\right) dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\, dS + \int_{V(t)} \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\, dV - \int_{S(t)} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_{V(t)} \rho r\, dV$$

Onde e é a energia interna específica por unidade de massa, $\mathbf{q}$ é o vetor de fluxo de calor, e r é o fornecimento de calor por unidade de massa.

Usando o princípio de Cauchy tensão e aplicando o teorema da divergência produz a forma local:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r$$

Onde $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$ é a taxa de deformação do tensor (a parte simétrica do gradiente de velocidade).

O termo $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ representa a potência tensão - a taxa em que tensões funcionam por volume unitário. Para materiais elásticos submetidos a deformações reversíveis, este trabalho é armazenado como energia elástica deformação e pode ser totalmente recuperado.

Para problemas puramente mecânicos onde os efeitos térmicos são insignificantes, a primeira lei reduz-se a uma declaração sobre energia mecânica. Em elastostática, onde a energia cinética é zero e os processos são quase-estáticos, o trabalho feito por forças externas é armazenado como energia deformação:

$$W_{\text{ext}} = U$$

Este balanço energético sustenta o teorema de Clapeyron e os princípios variacionais que se tornaram centrais para análise estrutural.

10.4.5 Segunda Lei (Entropia Inigualável):

Clausius formulou a segunda lei da Termodinâmica (Desigualdade de Entropia)

A segunda lei da termodinâmica impõe restrições fundamentais ao comportamento material através da desigualdade Clausius-Duhem.. Em sua forma local, isto afirma que a taxa de produção de entropia deve ser não negativa:

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} - \frac{\rho r}{\theta} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) \geq 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Onde η é a entropia específica por unidade de massa e θ é a temperatura absoluta.

Usando a primeira lei para eliminar r e termos em expansão produzem a desigualdade dissipação:

$$\rho\left(\frac{D\psi}{Dt}+\eta\frac{D\theta}{Dt}\right)-\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}+\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta\leq 0$$

Onde $\psi = e - \theta\eta$ é a energia livre Helmholtz.

Para materiais elásticos submetidos a processos isotérmicos (θ = constant), a segunda lei exige que o tensão trabalho igual à taxa de mudança de energia livre:

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}=\rho\frac{D\psi}{Dt}$$

Esta restrição termodinâmica fornece a base teórica para o postulado de Green que materiais elásticos admitem uma função deformação densidade energética - uma relação que os teóricos moleculares lutaram para derivar dos primeiros princípios. A abordagem termodinâmica elegantemente evita detalhes de nível molecular, afirmando que o armazenamento de energia e reversibilidade são suficientes para garantir a existência de um potencial.

10.4.6 Desenvolvimento histórico e síntese moderna

A formulação destas leis de equilíbrio evoluiu ao longo de mais de um século:

- **1820 (Cauchy, Navier)**:. Estabeleceu o equilíbrio do momento linear para sólidos elásticos, derivando as equações de equilíbrio tensão. Reconheceu a simetria do tensor tensão.
- **1840s-1850s (Clausio, Thomson, Rankine)**:. Formulou a primeira e segunda leis de termodinâmica para sistemas macroscópicos, inicialmente no contexto de motores de calor e ciclos termodinâmicos.
- **1850s-1860s (São Venant, Thomson)**:. Começou incorporando conceitos termodinâmicos em mecânica do contínuo, embora principalmente para fluidos e condução térmica.
- **1900s-1910s**:. Formulou-se de forma sistemática a termodinâmica da mídia contínua, introduzindo o conceito de variáveis internas para processos dissipativos.
- **Anos 60 (Truesdell, Coleman, Noll)**:. Estabeleceu o moderno quadro termomecânico, mostrando como a segunda lei restringe as relações constitutivas através da desigualdade Clausius-Duhem e do procedimento Coleman-Noll.

A síntese moderna, desenvolvida no século 20, demonstrou que estas leis de equilíbrio, combinadas com relações constitutivas devidamente formuladas (Seção 10.5), fornecer uma estrutura completa e consistente para mecânica do contínuo. As leis de equilíbrio

CÓPIA PARA REVISÃO

são universais, aplicam-se a todos os meios contínuos, enquanto as relações constitutivas capturam o comportamento material específico.

Para a teoria da elasticidade, o principal é que as leis de equilíbrio são insuficientes para determinar a resposta de um corpo. Três equações de equilíbrio do momento fornecem apenas três equações para os seis componentes independentes de tensão (devido à simetria). A lacuna é fechada por relações constitutivas que conectam tensão à deformação, o assunto da próxima seção.

10.5 Teoria constitutiva: Comportamento material

As leis de equilíbrio apresentadas na seção anterior aplicam-se universalmente a todos os meios contínuos - eles expressam princípios físicos fundamentais que transcendem o tipo material. No entanto, essas leis por si só não podem prever como um material específico responderá às forças aplicadas. Aço e borracha satisfazem as mesmas equações de equilíbrio, mas se comportam radicalmente diferente sob condições idênticas de carga. Este comportamento específico do material é capturado por *Relações constitutivas*Expressões matemáticas que conectam quantidades cinemáticas (deformação), deformação taxa) para quantidades cinéticas (tensão, fluxo de calor).

O desenvolvimento da teoria constitutiva representa uma das grandes conquistas intelectuais de mecânica do contínuo. O debate do século XIX entre abordagens moleculares e fenomenológicas levou a princípios gerais que guiam a modelagem constitutiva em todos os materiais. Esses princípios... Objetividade, simetria material, consistência termodinâmica- emergiu gradualmente do raciocínio teórico e observação experimental (Truesdell e Noll, 1965).

10.5.1 O Quadro Geral

Uma relação constitutiva para um material elástico expressa tensão em função da deformação. Em sua forma mais geral:

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

Onde $\mathbf{F}$ é o tensor do gradiente de deformação, $\mathbf{X}$ Denota o ponto material, e $\hat{\sigma}$ é a função constitutiva.

Esta afirmação aparentemente simples esconde questões profundas:

- Que forma deve ser a função $\hat{\sigma}$ Tomar?
- Que restrições a física impõe nesta função?
- Como a simetria material limita a resposta?
- Quando tensão pode ser derivado de uma função potencial (deformação energia)?

CÓPIA PARA REVISÃO

As respostas a essas perguntas emergiram de uma combinação de análise teórica, observação experimental e raciocínio termodinâmico. Agora examinamos os princípios-chave que governam as relações constitutivas.

10.5.2 Noll (1925-2017) e Objetividade: O Princípio da Indiferença Material

Um requisito fundamental para qualquer relação constitutiva é *objetividade* ou *Indiferença do material pórtico*:. A resposta material deve ser independente do observador. Se rodarmos o laboratório ou sobrepormos um movimento rígido do corpo, o esforços internos dentro do material não deve mudar. Este princípio, formulado sistematicamente por Walter Noll em 1958 (Noll, 1958), fornece restrições essenciais sobre a forma de relações constitutivas.

Matematicamente, considere dois observadores relacionados por uma rotação dependente do tempo $\mathbf{Q}(t)$ e tradução $\mathbf{c}(t)$:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$$

O princípio da objetividade requer que o Cauchy tensão se transforme como:

$$\sigma^* = \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T$$

Este requisito aparentemente inócuo tem profundas implicações. Isso implica que tensão não pode depender diretamente do gradiente de deformação $\mathbf{F}$ (o que não é objetivo), mas apenas em medidas objetivas de deformação. A medida adequada é o tensor de deformação Cauchy-Green certo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

ou seu inverso $\mathbf{C}^{-1}$, ou o tensor Verde-Lagrange deformação:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Para pequenas deformações, onde $\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, isso reduz ao familiar infinitesimal deformação tensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

O princípio da objetividade, assim, fornece um guia fundamental para a formulação de relações constitutivas: Use apenas medidas cinemáticas objetivas.

10.5.3 Verde (1793-1841) e hiperelasticidade

Um *material elástico* é um dos quais a corrente tensão depende apenas da deformação atual, independentemente da história ou taxa de deformação:

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}) \quad \text{or} \quad \sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{C})$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Uma classe mais restritiva é *hiperelástica* ou *Materiais de plástico verde*, para o qual tensão deriva de uma função escalar deformação densidade de energia W:

$$W = W(\mathbf{C})$$

O tensão é então determinado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{J}}\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T$$

Onde $J = \det(\mathbf{F})$.

Para pequenas deformações, isso simplifica dramaticamente. Sim $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$, então:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Este é precisamente o postulado de Green de 1839 (Green, 1839a)Esse elástico tensão pode ser derivado de uma função potencial. O que Green introduziu fenomenologicamente foi mais tarde justificado termodinamicamente: para deformações elásticas isotérmicas, a energia livre Helmholtz serve como função energética deformação, e a segunda lei garante sua existência.

A distinção entre materiais elásticos e hiperelásticos é crucial:

- **Plástico geral**: $\sigma = \mathbf{f}(\varepsilon)$ com $\mathbf{f}$ Arbitrário
- **Hiperelástico**: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$ com W uma função escalar

Materiais hiperelásticos têm uma propriedade especial: As relações são simétricas. Se escrevermos:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Então, a hiperelasticidade requer:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

Esta simetria, conhecida como *relações recíprocas*-reduz o número de constantes elásticas independentes. Para um material elástico anisotrópico geral, pode haver $6 \times 6 = 36$ Componentes independentes de C_{ijkl}.. Simetria de ambos tensão e deformação reduz isso para 21, mas hiperelasticidade (existência de W) reduz para 21 constantes independentes para o caso mais geral.

CÓPIA PARA REVISÃO

10.5.4 Voigt (1850-1919) e Simetria Material

Materiais de verdade possuem estrutura interna, orientação de fibra, camadas - que torna sua resposta direção-dependente. *Simetria material* caracteriza esta dependência direcional. A classificação sistemática dos sistemas de cristais e suas simetrias elásticas foi estabelecida por Woldemar Voigt em seu abrangente tratado sobre física cristalina (Voigt, 1910).

Uma simetria material é uma rotação $\mathbf{G}$ da configuração de referência que deixa a resposta material inalterada:

$$W(\mathbf{G}^T\mathbf{C}\mathbf{G}) = W(\mathbf{C})$$

O conjunto de todas essas rotações forma o *Grupo de simetria do material*.. Diferentes grupos de simetria caracterizam diferentes classes de materiais:

- **Triclínica** (sem simetria): 21 constantes independentes
- **Monoclínica** (Um plano de simetria): 13 constantes independentes
- **Ortotrópico** (três planos de simetria ortogonal): 9 constantes independentes
- **Transversamente isotrópico** (um eixo de simetria rotacional): 5 constantes independentes
- **Isotrópico** (Todas as rotações são simetrias): 2 constantes independentes

Para materiais isotrópicos, aqueles sem direções preferenciais..W pode depender apenas dos invariantes de $\mathbf{C}$ (ou equivalentemente, de $\boldsymbol{\varepsilon}$). Para pequenas deformações, a forma mais geral é:

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

Onde $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, $I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)]$, $I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$.

Para elasticidade linear com pequeno deformações, mantendo apenas termos quadráticos em deformação:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

Que rende:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

Esta é precisamente a lei generalizada de Hooke com constantes de Lamé λ e.. μA relação constitutiva que Lamé formulou em 1852 e que domina a teoria da elasticidade linear. As duas constantes independentes (λ, μ) ou equivalentemente (E, ν) são o mínimo necessário para a resposta elástica isotrópica, precisamente a conclusão de que contradições experimentais da teoria molecular forçadas à escola contínua.

10.5.5 Coleman (1930-1992) e Noll: Restrições termodinâmicas

A segunda lei da termodinâmica coloca restrições fundamentais nas relações constitutivas além daquelas impostas pela objetividade e simetria material. A desigualdade de Clausius-

CÓPIA PARA REVISÃO

Duhem, quando aplicada a materiais elásticos submetidos a deformações isotérmicas, produz vários requisitos críticos. A exploração sistemática das restrições termodinâmicas para restringir as relações constitutivas foi desenvolvida por Coleman e Noll em seu jornal seminal de 1963 (Coleman e Noll, 1963).

Um. Existência de energia deformação: Para processos isotérmicos, a segunda lei exige que o trabalho tensão seja um diferencial perfeito. Isso equivale a exigir que tensão deriva de um potencial - justificando o postulado de Green dos princípios termodinâmicos.

2. Convexidade da energia deformação: A função de energia deformação $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ Deve ser convexo para a estabilidade do material. Matematicamente:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \xi_{ij} \xi_{kl} > 0 \quad \text{for all non-zero } \xi$$

Isso garante que a matriz rigidez tangente é positiva definitiva, uma condição necessária para configurações de equilíbrio estáveis.

3. Restrições nas constantes elásticas: Para elasticidade linear isotrópica, a estabilidade termodinâmica requer:

$$\mu > 0 \tag{10.1}$$
$$3\lambda + 2\mu > 0 \tag{10.2}$$

Estes se traduzem em requisitos familiares de engenharia:

$$E > 0 \quad \text{(positive Young's modulus)} \tag{10.3}$$
$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad \text{(bounds on Poisson's ratio)} \tag{10.4}$$

O limite superior $\nu < 1/2$ corresponde ao limite de incompressibilidade, enquanto $\nu > -1$ garante energia positiva deformação. Materiais reais satisfazem esses limites, com a maioria dos materiais de engenharia tendo $0 < \nu < 0.5$.

O limite inferior exclui a previsão da teoria molecular de $\nu = 1/4$ Sendo universal, experimentos mostram cortiça perto de 0, enquanto borracha se aproxima de 0,5. O quadro termodinâmico acomoda essa variação naturalmente, onde a teoria molecular não poderia.

10.5.6 Perspectiva histórica: Do Empirismo à Teoria

O desenvolvimento da teoria constitutiva ilustra a interação entre experiência, teoria e abstração matemática:

Séculos XVII e XVIII (Hooke, Euler):. Observação empírica da proporcionalidade entre força e deformação. Lei de Hooke para molas, generalizada por Euler a vigas e pilares.

CÓPIA PARA REVISÃO

1820s-1840s:. Tentativas de derivar relações constitutivas de modelos moleculares. Levado a previsões incorretas (constante elástica única, $\nu = 1/4$) mas estabeleceu a estrutura matemática.

1837-1839 (Verde):. postulado fenomenológico da função de energia deformação. Previsimos duas constantes elásticas, experimento correspondente. Resistência de mecanistas franceses que queriam derivação dos primeiros princípios.

1850s-1860s (São Venant, Thomson, Bravais):. Reconhecimento de que a estrutura molecular é mais complexa do que se supõe. A aceitação crescente da abordagem contínua.

1960-1970 (Truesdell, Noll, Coleman):. Moderna termomecânica racional. Formulação sistemática de objetividade, simetria material e restrições termodinâmicas.

A compreensão moderna sintetiza estas vertentes históricas: relações constitutivas devem satisfazer a objetividade (pórtico indiferença), deve respeitar a simetria material, deve ser termodinamicamente admissível, e para materiais elásticos, idealmente deve derivar de uma função potencial. Esses princípios, em vez de detalhes moleculares, governam a modelagem constitutiva.

10.5.7 Conexão com Análise estrutural

Para engenheiros estruturais no século 19, a teoria constitutiva forneceu a ligação crucial entre as equações de campo abstratas de Cauchy e cálculos práticos. Uma vez que a relação tensão-deformação para um material foi estabelecida - seja através da função energética de Green ou constantes de Lamé - os engenheiros poderiam:

1. Combinar relações cinemáticas$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$)
2. Com relações constitutivas ($\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$)
3. E equações de equilíbrio$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$)

para derivar equações diferenciais governando em termos de deslocamento. As equações de Navier representam precisamente esta combinação para elastodinâmica. Para vigas, a mesma abordagem produziu a equação familiar $EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$.

Assim, as relações constitutivas entre a teoria abstrata do contínuo e os métodos práticos dos métodos que Navier, Clapeyron e seus sucessores desenvolveriam para analisar estruturas indeterminados, o tema de Capítulos subsequentes.

10.5.8 O que há em um nome? A Evolução da Mecânica e Seus Praticantes

O que há em um nome? O que chamamos de rosa Por qualquer outro nome cheiraria tão doce-mas nas ciências mecânicas, os nomes importam profundamente. Os termos *mecânica do contínuo*, *elasticidade*, *Mecânica dos sólidos*, e *Mecânica de materiais* são frequentemente usados de forma intercambiável na literatura moderna, criando considerável confusão. Esta ambiguidade

CÓPIA PARA REVISÃO

terminológica reflete não apenas a história intelectual, mas a transformação da própria identidade profissional: De onde *Filosofos naturais* e.. *arquiteto-engenheiros* do século XVII, através da emergência do profissional *engenheiro* e.. *Mecânico* no século XIX, para as disciplinas acadêmicas especializadas do século XX.

10.5.8.1 A identidade em mudança do analista estrutural

Antes que possamos entender a evolução dos nomes disciplinares, devemos apreciar quão radicalmente os próprios praticantes se transformaram.

A Era da Aprendizagem Universal (1600-1790) No século XVII e início do XVIII, aqueles que estudaram a força das estruturas não tinham identidade profissional unificada. Galileu Galilei (1564-1642) foi um *Filósofo natural*- um termo que engloba o que agora nos separamos em física, astronomia, matemática e mecânica. Suas investigações de força viga (ver §7.2.2) apareceu ao lado de observações astronômicas e experimentos em corpos caindo, todos unificados sob o guarda-chuva da compreensão das leis da natureza.

Robert Hooke (1635-1703) Exemplificou este universalismo ainda mais impressionante: Ele era simultaneamente curador de experimentos para a Royal Society, arquiteto (projetando edifícios após o Grande Fogo de Londres), microscopista e teórico mecânico. Seu famoso *UT tensio sic vis* (ver §6.6.6) apareceu não em um tratado sobre mecânica estrutural mas em uma obra sobre molas e corpos elásticos de todos os tipos.

Na França, os interessados em construção tinham o título *arquiteto* ou *Ingénieur*Mas essas ainda não eram as profissões especializadas que conhecemos hoje. Edme Mariotte (1620-1684, ver §7.3.2.3) realizaram experimentos sobre pressão de água, fisiologia da planta e ruptura com instalações iguais. Philippe de La Hire (1640-1718) Moveu-se fluidamente entre posições como professor de matemática no Collège Royal, arquiteto, e conselheiro na construção da ponte. A distinção moderna entre matemática pura, ciência aplicada e prática de engenharia ainda não existia.

Até mesmo Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806, veja §10.3.2.1), escrevendo no final do século XVIII, tinha o título *Ingénieur militaire*- um engenheiro militar cujas funções englobavam o projeto da fortificação, levantamento e tarefas administrativas ao lado de suas investigações teóricas. Suas memórias sobre a pressão da Terra e força viga foram submetidas à Académie des Sciences não como um exercício acadêmico, mas como orientação prática para a construção militar.

Não havia nenhum campo chamado *Mecânica de materiais* ou *elasticidade*- Só havia.. *Mecânica* E sua aplicação para problemas práticos de construção. Os livros têm títulos como *La Science des Ingénieurs* (Bélidor, 1729) ou *Arquitetura Hydraulique* (Bélidor, 1737-1739), refletindo a fusão do conhecimento teórico com a arte prática.

O nascimento do engenheiro profissional (1790-1850) A Revolução Francesa e a era napoleônica precipitaram uma transformação decisiva. A fundação da École Politécnica (1794) e a École des Ponts et Chaussées (reorganizado 1795) criou, pela primeira vez, uma formação profissional sistemática para engenheiros - não mais aprendida através

CÓPIA PARA REVISÃO

do aprendizado ou auto-estudo, mas através de treinamento matemático rigoroso. Os graduados dessas instituições foram *Ingénieurs des ponts et chaussées* (Engenheiros de pontes e estradas) ou *Ingénieurs Militares*, profissionais com carreiras definidas, conhecimento padronizado e identidade corporativa.

Crucialmente, esta geração trouxe sofisticação matemática sem precedentes para problemas estruturais. Claude-Louis Navier (1785-1836, ver §6.7.3Embora treinado como engenheiro, possuía habilidades matemáticas rivalizando com matemáticos puros. Seu 1826 *Résumé des Leçons* representou uma nova síntese: rigorosa derivação matemática em serviço de aplicação de engenharia. Navier e seus contemporâneos chamavam de campo deles *mécanique appliquée* (mecânica aplicada), distinguindo-o de *mécanique rainelle* (Mecânica racional)- a teoria matemática abstrata desenvolvida por Lagrange e outros.

O termo *Élasticité* (elasticidade) surgiu durante este período para descrever a teoria matemática da deformação reversível em sólidos. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857, ver §6.7.6 e.. §10.3.2.4), embora principalmente um matemático, intitulado suas memórias fundamentais sobre *o equilíbrio e movimento de corpos elásticos sólidos ou fluidos.*. Por volta de 1830, *Corpo elástico* tinha adquirido significado técnico: um sólido contínuo cujo tensão depende de deformação através de relações matemáticas definidas.

Mas a identidade profissional permaneceu fluida. Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886, ver §6.7.8) tinha o título *Ingénieur des ponts et chaussées* mas passou sua carreira em grande parte na pesquisa teórica ao invés de projetos de construção. Ele era engenheiro? Um mecânico? Um físico matemático? Seus contemporâneos usaram todos esses termos, refletindo o fato de que as fronteiras disciplinares permeáveis permaneceram.

Cristalização disciplinar (1850-1900) O século XIX testemunhou a cristalização de distintas identidades profissionais e disciplinares. Na Grã-Bretanha, *Engenheiro civil* tornou-se uma profissão reconhecida, institucionalizada através da Instituição de Engenheiros Civis (carta 1828). *Engenheiro mecânico* surgiu como uma identidade separada com a Instituição de Engenheiros Mecânicos (1847). As cadeiras universitárias foram estabelecidas em *Mecânica aplicada* (Cambridge, 1875) e *Engenharia* (instituições diversas).

O termo *Teoria da elasticidade* tornou-se padrão em inglês através do trabalho de **George Gabriel Stokes** (1819-1903) e William Thomson, Lorde Kelvin (1824-1907), ambos professores de filosofia natural que contribuíram extensivamente para a teoria elástica. **Augustus Edward Hough Love** (1863-1940) consolidou esta tradição com sua monumental *Um tratado sobre a teoria matemática da elasticidade* (1892-1893) (Love, 1927 PDF), estabelecendo *elasticidade* como uma disciplina matemática reconhecida distinta da pura mecânica e prática de engenharia.

Na Alemanha, as universidades técnicas (*Technische Hochschulen*) desenvolveu um sistema paralelo produzindo *Diplom-Ingenieure*- Engenheiros de graduação com formação teórica profunda. Christian Otto Mohr (1835-1918, ver §11.4.2), professor no Dresden Polytechnikum, encarnado esta tradição: Seu livro didático *Technische Mechanik* (1860) mecânica teórica unificada com aplicação de engenharia.

CÓPIA PARA REVISÃO

No final do século, um consenso áspero tinha surgido: *Mecânica* se referia à ciência geral das forças e movimento; *Teoria da elasticidade* Ou simplesmente *elasticidade* à teoria matemática dos sólidos elásticos; *resistência dos materiais* (*RESISTÊNCIA DES matériaux*, *Festigkeitslehre*) para as aplicações de engenharia; e.. *Mecânica aplicada* para a aplicação mais ampla dos princípios mecânicos aos problemas de engenharia.

20a Especialização do Centurio (1900-1970) O século XX trouxe crescente especialização e multiplicação de nomes subdisciplinares. **Stephen P. Timoshenko** (1878-1972), treinado na Rússia, trabalhando nos Estados Unidos, literalmente escreveu os livros didáticos que definiram terminologia moderna. Seu *Força dos Materiais* (1930) (Timoshenko e Gere, 1976) estabeleceu esse termo para a graduação, enquanto seu *Teoria da elasticidade* (1934, com J.N. Bom (Timoshenko e Goodier, 1970) Codificado *elasticidade* para o estudo de pós-graduação. O seu mais tarde *Teoria da Estabilidade Elástica* (1936) esculpiu estabilidade como um campo semi-autônomo.

O termo *mecânica sólida* surgiu gradualmente, aparentemente primeiro nas escolas de engenharia americanas durante os anos 1940-1950, para abranger elasticidade, plasticidade, viscoelasticidade e outros fenômenos inelásticos sob um guarda-chuva. A Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos estabeleceu uma Divisão de Mecânica Aplicada (1927), evoluindo mais tarde em divisões separadas para diferentes especialidades. Em meados do século, alguém poderia identificar profissionalmente como um *Mecânico sólido* ou *elástico*, com revistas distintas, conferências e comunidades de pesquisa.

O desenvolvimento mais dramático do século XX foi o surgimento de *mecânica do contínuo* como uma disciplina matemática abstrata. Clifford Truesdell (1919-2000), trabalhando na Johns Hopkins e mais tarde Universidade de Indiana, promovido mecânica do contínuo como uma teoria de campo unificada englobando todos os comportamentos materiais. Seu diário *Arquivo de Mecânica Racional e Análise* (fundado em 1957) e seu tratado com Walter Noll (1925-2017), *Teorias não-lineares do campo da mecânica* (1965) (Truesdell e Noll, 1965), estabelecido mecânica do contínuo como uma rigorosa teoria axiomática, apelando principalmente para matemáticos aplicados e físicos teóricos.

Em 1970, a moderna paisagem disciplinar estava essencialmente completa. Departamentos universitários ofereceram cursos em *Mecânica de materiais* (graduado), *Força avançada de materiais* ou *Teoria da elasticidade* (licenciado no primeiro ano), *mecânica do contínuo* (graduado avançado), e vários tópicos especializados em *mecânica sólida*.. A identidade profissional estava cada vez mais ligada a esses campos específicos: um era mecânico contínuo, um elástico, um analista estrutural, ou um mecânico computacional.

10.5.8.2 Da identidade profissional ao conteúdo disciplinar

Neste contexto de evolução da identidade profissional, podemos agora entender como o conteúdo intelectual e as metodologias do mecânica estrutural cristalizaram-se nos quatro campos distintos mas sobrepostos que criam a confusão terminológica atual.

CÓPIA PARA REVISÃO

Mecânica de Materiais: Os Empiristas de Engenharia (1600-1790) O que chamamos agora *Mecânica de materiais* emergiu das investigações práticas da força de Galileu (viga, veja §7.2.2), Mariotte (correção dos erros de Galileu, veja §7.3.2.3), e Coulomb (pressão da terra, atrito, viga teoria, veja §10.3.2.1). Esses pioneiros estabeleceram uma disciplina de engenharia caracterizada por:

- Modelos unidimensionais simplificados (vigas, pilares, eixos)
- Observações fenomenológicas de testes
- Raciocínio geométrico usando polígonos de força e equilíbrio do momento
- Aplicabilidade direta aos problemas de projeto
- Ferramentas matemáticas elementares (cálculo básico no máximo)

Essa abordagem era fundamentalmente pragmática: cada elemento estrutural requeria seu próprio tratamento especializado, sem pretensão à teoria geral de campo. A metodologia persiste hoje na graduação em engenharia, tipicamente sob títulos como *Mecânica de Materiais*, *Força dos Materiais*, ou *Engenharia Mecânica de Sólidos*.. Os livros modernos da Cerveja & Johnston, Hibbeler ou Gere & Timoshenko segue essencialmente a mesma abordagem pedagógica estabelecida há 300 anos, atualizada com exemplos modernos e fatores de segurança.

Elasticidade: A Escola Matemática Francesa (1820-1850) O termo *elasticidade* (*théorie de l'elástica*) cristalizado durante o notável florescimento da física matemática francesa nas décadas seguintes à Revolução. Três figuras definiram o campo:

Navier (ver §6.7.3) abordava a elasticidade das fundações moleculares, derivando equações diferenciais parciais para sólidos elásticos a partir de interações de força central entre partículas. Suas memórias de 1821 e suas palestras de 1826 estabeleceram a elasticidade como um ramo da física matemática.

Cauchy (ver §6.7.6) tomou o caminho complementar, desenvolvendo elasticidade como teoria de campo contínuo sem referência à estrutura molecular. Sua introdução do tensor tensão, deformação-deslocamento relações, e equações de equilíbrio diferencial (1822-1828) criou a estrutura matemática ainda usada hoje.

Saint-Venant (ver §10.3.2.8) sintetizaram essas abordagens e demonstraram como os problemas de valor limite poderia ser resolvido por corpos de interesse prático em engenharia - suas memórias de torção (1855) e estudos de flexão estabeleceram os problemas canônicos da elasticidade.

A escola francesa criada *Élasticité* como uma disciplina matemática caracterizada por:

- Formulação contínua tridimensional usando quantidades de tensor
- Leis constitutivas lineares (lei de Hooke) generalizada a 3D)
- Equações diferenciais parciais com condições de contorno
- Compromisso com soluções analíticas exatas, sempre que possível

CÓPIA PARA REVISÃO

- Aplicação de matemática avançada (variáveis complexas, teoria potencial, séries infinitas)

Esta tradição atingiu sua apoteose no amor *Teoria Matemática da Elasticidade* (1892-1893), que permaneceu a referência definitiva em inglês por mais de meio século. Livros de elasticidade modernos, Timoshenko & Goodier, Sokolnikoff, Barber, continuam com essa ênfase nos métodos analíticos de solução, embora agora complementados por abordagens numéricas.

Mecânica de Sólidos: A Síntese Alemão-Russo-Americana (1850-1960) Universidades técnicas alemãs, institutos politécnicos russos e escolas de engenharia americanas desenvolveram uma tradição paralela enfatizando:

- Validação experimental ao lado do desenvolvimento teórico
- Inclusão do comportamento inelástico (plasticidade), arrepiante, fadiga)
- Métodos gráficos e aproximados para aplicação prática
- Teoria da estabilidade e análise dinâmica
- Métodos energéticos e princípios variacionais

As figuras-chave incluíam Mohr (métodos gráficos, tensão círculo, veja §11.4.2), August Föppl (1854-1924) e seu filho Ludwig Prandtl (1875-1953), que foi pioneiro na teoria da plasticidade, e crucialmente Timoshenko, cujos livros definem o campo por gerações.

O termo *Mecânica dos sólidos* (ou *mecânica sólida*) surgiu gradualmente em meados do século XX para abranger este escopo mais amplo - a elasticidade estendeu-se para incluir qualquer comportamento mecânico de materiais estruturais. Mecânica sólida moderna inclui:

- Plástico linear e não linear
- Plasticidade e análise de limites
- Viscoelasticidade e rastejar
- Mecânica da fratura E danos
- Estabilidade e flambagem
- Dinâmica estrutural
- Métodos Computacionais (FEM)

Este é o conteúdo dos modernos programas de pós-graduação em engenharia civil e mecânica, refletidos em livros didáticos como Fung's *Fundamentos da Mecânica Sólida*, Malvern's *Introdução à Mecânica de um Meio Contínuo*, ou Boresi & Schmidt *Mecânica Avançada de Materiais*.

Finalmente, a etimologia do termo *motor estrutural eirng* é discutido em §11.2.

CÓPIA PARA REVISÃO

Mecânica do contínuo: A Abstração Axiomática (1945-1970) Após a Segunda Guerra Mundial, matemáticos procuraram uma estrutura unificada que transcendesse a distinção sólido-fluido. **Truesdell** E Noll, em seu tratado *Teorias não-lineares do campo da mecânica* (1965), formulada *mecânica do contínuo* como teoria de campo axiomática caracterizado por:

- General cinemática de corpos contínuos (deformação, movimento)
- Equilíbrio das leis (massa, impulso, energia) independente da constituição
- Teoria constitutiva através de funcionais satisfazendo princípios gerais
- Pórtico-indiferença e simetria material como axiomas
- Restrições termodinâmicas na resposta constitutiva
- Extrema generalidade matemática e abstração

Dentro deste quadro, elasticidade, viscosidade, plasticidade todos se tornam casos especiais de teoria constitutiva. Moderno mecânica do contínuo, como apresentado em livros didáticos como Gurtin *Uma Introdução a Mecânica do contínuo* Ou Holzapfel's *Mecânica Sólida Não-linear*, fornece a base teórica para a mecânica computacional e o estudo de materiais complexos (tecidos biológicos, polímeros, meios granulares).

No entanto, essa generalidade veio ao custo da acessibilidade. Mecânica do contínuo na tradição Truesdell-Noll apela principalmente para matemáticos aplicados e físicos teóricos. A maioria dos currículos de engenharia continuam ensinando as formulações mais antigas, mais concretas de elasticidade e mecânica sólida, reservando mecânica do contínuo para estudos avançados de pós-graduação ou pesquisa especializada.

10.5.8.3 A paisagem disciplinar hoje

Estas trajetórias históricas cristalizaram-se em campos distintos, mas sobrepostos, resumidos na Tabela 10.4.

Tabela 10.4: Comparação das Teorias Mecânicas: Perspectivas históricas e técnicas

Aspect	Mecânica de Materiais	Elasticidade	Mecânica de Sólidos	Mecânica do contínuo
Figuras de fundação	Galileu, Mariotte, Coulomb, Pai	Navier, Cauchy, Saint-Venant, Love	Timoshenko, Prager, Hill, Drucker	Truesdell, Noll, Ericksen
Período Histórico	1638-1850 (pré-matemática)	1820-1900 (formulação matemática)	1900-1960 (Síntese de engenharia)	1945-1970 (abtração axiomática)
Escolas Nacionais	Italiano, francês empírico	Politécnica Francesa	Alemão TH, russo, americano	Americano, italiano
Identidade Profissional	Arquiteto, engenheiro militar	Ingénieur, filósofo natural	Professor de Engenharia	Matemático aplicado
Escopo	Elementos estruturais simplificados (1D)	Sólidos elásticos (continuum 3D)	Todos comportamentos sólidos	Toda a matéria contínua
Nível Matemático	Cálculo elementar, geometria	PDEs, cálculo vetorial, variáveis complexas	PDEs, tensores, cálculo variacional	Análise abstrata do tensor, análise funcional
Leis Constitutivas	elástico linear (implicidade)	elástico linear (explicável lei de Hooke)	Elástico, plástico, visco-elástico, danos	Qualquer funcional constitutivo
Deformação	Pequeno deformação apenas	Normalmente pequeno deformação; Algum grande	Pequeno ou grande; não linear	Arbitrário; Não linearidade geométrica total

CÓPIA PARA REVISÃO

Aspect	Mecânica de Materiais	Elasticidade	Mecânica de Sólidos	Mecânica do contínuo
Filosofia	Empirismo pragmático	Exatidão matemática	Realismo de engenharia	Rigor axiomático
Problemas Típicos	Viga deflexão, pilar flambagem, torção do eixo	Tensão concentração, contato, cilindros grossos	Falha estrutural, colapso plástico, fratura	Fundamentos teóricos, teoremas de existência
Métodos de Solução	Fórmulas do manual, tabelas	Analítico (Airy tensão, variáveis complexas)	FEM, análise de limite, aproximada	Princípios gerais de variação
Livros-chave	Gere & Timoshenko; Cerveja & Johnston; Hibbeller	Amor; Sokolnikoff; Timoshenko & Bom	Timoshenko (vários); Fung; Malvern	Truesdell & Noll; Gurtin; Holzapfel
Contexto Educacional	Segundo ano, junior	Licenciatura em primeiro ano	Graduado (MS/PhD)	Graduado avançado (PhD)
Uso atual	Universal em currículos de engenharia	Declínio nos EUA; forte na Europa	Dominante em pesquisa	Especializado (Matemática Aplicada, Biomecânica)

10.5.8.4 Convenções Terminológicas e Relações

As relações entre esses campos podem ser entendidas através de uma descida histórica e contenção lógica:

Descendência histórica:

Mecânica de Materiais → Elasticidade → Mecânica de Sólidos → Mecânica do contínuo

Cada campo emergiu generalizando, matematizando ou abstraindo seu antecessor. A elasticidade formalizou e generalizou a análise tensão da mecânica dos materiais. Mecânica de sólidos estendeu a elasticidade para incluir fenômenos inelásticos descobertos através da pesquisa do século XX (plasticidade, fluência, fratura). Mecânica do contínuo abstraiu a estrutura matemática comum a todas as teorias de campo da matéria deformável.

Contenção lógica:

Mecânica do contínuo ⊃ Mecânica de Sólidos ⊃ Elasticidade ⊃ Mecânica de Materiais

Em termos de escopo, cada campo é uma especialização do seu sucessor. Mecânica do contínuo aplica-se a toda a matéria contínua; Mecânica de sólidos restringe-se a materiais sólidos; A elasticidade se restringe ainda mais à deformação reversível; mecânica de materiais faz suposições adicionais simplificando sobre distribuição tensão e geometria do problema.

A confusão na terminologia decorre do fato de que esses campos compartilham problemas e métodos sobrepostos. Um problema de flexão pode ser tratado em quatro níveis:

- **Mecânica de materiais**:. Usando $\sigma = My/I$ e teoria elementar viga
- **Elasticidade**:. Resolvendo a equação biharmônica $\nabla^4\phi = 0$ com apropriado condições de contorno
- **Mecânica de sólidos**:. Incluindo plasticidade em suportes, resíduos tensões, ou efeitos dependentes do tempo
- **Mecânica do contínuo**:. Como exemplo de formulação restrita do problema de valor limite demonstrando princípios gerais

CÓPIA PARA REVISÃO

A mesma situação física, diferentes níveis de sofisticação matemática, suposições diferentes, insights diferentes.

10.5.8.5 Convenções adotadas neste livro

Para clareza e consistência, adotamos a seguinte terminologia ao longo deste trabalho:

- **Mecânica do contínuo**:. A estrutura matemática geral para a matéria contínua, incluindo conceitos fundamentais (tensão, deformação, leis de equilíbrio) independente do comportamento constitutivo. Usado quando se discute conceitos fundamentais ou formulações abstratas modernas.
- **Elasticidade** (ou *Teoria da elasticidade*): A teoria matemática dos sólidos linearmente elásticos, enfatizando soluções exatas ou semi-analíticas para problemas de valor limite. Usado para discutir a tradição francesa do século XIX e métodos clássicos de solução.
- **Mecânica de Sólidos** (ou *Mecânica sólida*): A ciência mais ampla da engenharia do comportamento de material sólido, incluindo plasticidade, viscoelasticidade, danos e fratura. Usado para discutir desenvolvimentos do século XX e pesquisas modernas.
- **Análise estrutural** (ou *Teoria das Estruturas*): A aplicação de mecânica sólida em sistemas estruturais reais (pórticos, treliças, cascas, incluindo métodos analíticos e numéricos. Usado quando se fala de engenharia prática e design.
- **Mecânica de Materiais** (ou *Força dos Materiais*): A abordagem simplificada, de engenharia unidimensional usada em cursos introdutórios e projeto preliminar. Usado quando se discute tratamentos elementares ou trabalhos históricos predando formulações contínuas rigorosas.

Ao discutir os desenvolvimentos históricos, usamos a terminologia do período e autor em questão, reconhecendo que escritores do século XIX usaram *elasticidade* para o que agora podemos distinguir como mecânica do contínuo, *resistência dos materiais* era quase universal antes de 1900, e que *mecânica sólida* é em grande parte uma moeda do século XX. O leitor deve sempre interpretar a terminologia histórica em contexto, entendendo que as fronteiras disciplinares eram muito menos rígidas no período formativo do que aparecem no currículo acadêmico especializado de hoje.

A evolução do filósofo natural ao mecânico sólido especializado, das demonstrações geométricas de Galileu ao rigor axiomático de Truesdell, representa não apenas o progresso intelectual, mas uma transformação fundamental na forma como organizamos o conhecimento e Identidade profissional. O que há em um nome? Neste caso, uma história inteira de como chegamos a entender o comportamento mecânico da matéria e estruturar nossa abordagem para sua análise.

CÓPIA PARA REVISÃO

10.6 Conclusão

Este capítulo traçou a notável jornada intelectual desde as teorias moleculares da elasticidade até o quadro contínuo abrangente que domina o moderno mecânica estrutural. A mudança de paradigma examinada aqui, das tentativas reducionistas de derivar comportamento material de forças intermoleculares para formulações fenomenológicas baseadas em equações de campo e princípios energéticos, representa um dos momentos fundamentais da história do mundo Mecânica.

A falha das teorias moleculares, epitomizadas por sua predição incorreta de Coeficiente de Poisson e constantes elásticas insuficientes, forçaram uma reconceptualização fundamental de como modelamos sólidos deformáveis. A escola matemática francesa-particularmente Cauchy, Navier, Lamé e Saint-Venant - estabeleceram o aparato matemático de tensores tensão, medidas deformação e relações constitutivas que formam a fundação de mecânica do contínuo. O postulado audacioso de Green de uma função energética deformação, embora inicialmente resistida, acabou por se revelar presciente quando justificado termodinamicamente no século 20.

As leis do equilíbrio universal-Conservação de massa, impulso e energia, juntamente com a desigualdade da entropia, fornecer o quadro dentro do qual todas as teorias contínuas devem operar. Essas leis transcendem o tipo de material, aplicando-se igualmente a fluidos, sólidos e materiais mais complexos. No entanto, as leis de equilíbrio por si só não podem prever a resposta material; Eles devem ser complementados por relações constitutivas que capturam o comportamento específico do material.

Os princípios que regem a formulação constitutiva — objetividade, simetria material, admissibilidade termodinâmica — emergiram gradualmente da interação do raciocínio teórico e observação experimental. Para materiais elásticos, a formulação baseada em potencial (hiperelasticidade)) provou-se particularmente poderoso, garantindo a conservação de energia e fornecendo uma estrutura sistemática para modelagem de materiais. As duas constantes elásticas independentes necessárias para materiais isotrópicos (Lamé's λ e.. μ, ou equivalentemente Módulo de Young e Coeficiente de Poisson) representam a complexidade mínima exigida pela realidade experimental - uma conclusão que os teóricos moleculares não poderiam alcançar dos primeiros princípios.

A síntese alcançada em 1860 foi notável: uma estrutura matemática completa capaz de descrever o comportamento mecânico da mídia elástica contínua sob carga arbitrária e condições de contorno. Tensor de Cauchy tensão, combinado com compatibilidade cinemática, relações constitutivas e equações de equilíbrio, produziu sistemas de equações diferenciais parciais que poderiam – em princípio – prever a resposta de qualquer corpo elástico.

Ainda assim, um desafio crítico permaneceu. A teoria geral da elasticidade, por toda a sua elegância matemática, aplicava-se mais naturalmente aos corpos contínuos de geometria

CÓPIA PARA REVISÃO

simples. Estruturas reais, arcos, pontes suspensas, compostas de membros discretos conectados em juntas, com condições de carregamento muito mais complexas do que aquelas passíveis de solução analítica. Como poderiam os engenheiros aproveitar o poder de mecânica do contínuo para prático análise estrutural sem resolver equações diferenciais parciais complexas em cada ponto?

A resposta estava em métodos especializados que exploravam a geometria particular e carga de elementos estruturais: viga teoria, o método dos deslocamentos, os método das forças, princípios de energia para estruturas indeterminadas. Navier foi pioneiro nesta tradução com sua análise de contínua vigas, derivando a equação governante $EId^4y/dx^4 = q(x)$ da teoria tridimensional geral. Os métodos de energia de Clapeyron, o teorema de três momentos, e mais tarde desenvolvimentos por Maxwell e Castigliano representam sucessivos refinamentos deste programa: extraindo da teoria do continuum geral as ferramentas específicas que os engenheiros precisam para análise estrutural.

É para estes métodos práticos - trabalho de Navier em estruturas estaticamente indeterminadas, teoremas de Clapeyron, e o subsequente desenvolvimento de procedimentos de análise sistemática - que agora giramos. Esses métodos representam as primeiras aplicações bem sucedidas de mecânica do contínuo para problemas de importância central para engenheiros estruturais, superando o hiato entre teoria abstrata de campo e cálculo prático. O quadro contínuo estabelecido neste capítulo fornece a base rigorosa; os métodos estruturais do próximo capítulo demonstram sua fruição de engenharia.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Caravaggio, O Entombment de Cristo (1603-1604)

Corpos carregados com carga distribuída, peso transferido através de contato contínuo - uma meditação em campos na forma humana.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 11

Análise estrutural Finalmente: Síntese & Aplicação

Abstract

Este capítulo final traça a síntese de mecânica do contínuo em prática análise estrutural - a transformação da teoria abstrata da elasticidade em métodos sistemáticos para analisar estruturas reais de engenharia. Começando com o tratamento de Navier, estaticamente indeterminado vigas na década de 1820, seguimos o desenvolvimento através do teorema recíproco de Maxwell, dos métodos geométricos de Mohr, dos princípios energéticos de Castigliano, dos Müller-Breslau método das forças, dos métodos deslocamento de Maney e Bendixen, e distribuição do momento de Hardy Cross – métodos que dominaram a engenharia estrutural por mais de um século.

O capítulo então examina como a revolução computacional dos anos 1950-1960 transformou esses métodos clássicos em formulações de matriz. O método da rigidez direta de Turner e colegas, e Clough método dos elementos finitos emergiu não como afastamentos da teoria clássica, mas como implementações sistemáticas de princípios estabelecidos habilitados pela computação digital.

Este capítulo completa o arco histórico iniciado com as experiências de Galileu sobre força e movimento, mostrando como dois séculos de desenvolvimento teórico encontraram expressão prática em métodos que alcançaram fechamento entre teoria matemática, computacional Capacidade e design de engenharia.

11.1 Introdução 405
11.2 Engenharia estrutural, etimologia . 407
11.3 Primeiros desenvolvimentos: Estaticamente indeterminado Vigas 408
11.3.1 Navier (1785-1836): O primeiro tratamento sistemático 408
11.3.2 Clapeyron (1799-1864): A Equação de Três Momentos . 409
11.4 Transição para métodos gerais . . . 410
11.4.1 Maxwell (1831-1879): O Teorema Reciproco 410
11.4.2 Mohr (1835-1918): Métodos Geométricos e Analógicos . 411
11.4.3 Castigliano (1847-1884): Métodos de Energia 411
11.4.4 Müller-Breslau (1851-1925): Sistematização e Linhas de influência 412
11.4.5 O Método das forças: Compatibilidade e Flexibilidade . 413
11.4.6 Conceitos e Procedimentos Fundamentais 414
11.4.7 O Método das forças: Resumo e legado 415
11.5 O Método dos deslocamentos: Da Teoria à Prática 416

CÓPIA PARA REVISÃO

11.5.1 Fundações teóricas: Formulações Cedo Rigidez 416
11.5.2 Método de Deflexão de Inclinação: Formulação sistemática 417
11.5.3 Hardy Cross (1885-1959): O Método de Distribuição do Momento 419
11.5.4 Extensões e Variações 422
11.5.5 O Método dos deslocamentos: Resumo e legado 424
11.6 Linhas de influência e Cargas em Movimento 424
11.6.1 Winkler (1835-1888): Primeiros desenvolvimentos 425
11.6.2 Princípio de Müller-Breslau . 425
11.6.3 Aplicações e legado 425
11.7 Em direção à Formulação Matricial: A Ponte Conceitual para a Computação 426
11.7.1 A estrutura matricial dos métodos clássicos 426
11.7.2 Da Iteração à Solução Matrix 427
11.7.3 Os limites do cálculo da mão: Preparando o palco para computação 427
11.7.4 Conclusão: Continuidade e Transformação 428
11.8 Requisitos fundamentais de Análise estrutural 428
11.9 Resumo Cronológico dos Contribuintes 432
11.9.1 Conclusão 434

11.1 Introdução

Sete mil anos depois das primeiras tábuas cuneiformes registraram o conhecimento de engenharia, e dois séculos após as fundações de mecânica do contínuo foram lançadas, chegamos ao culminar da nossa jornada histórica: a síntese da teoria matemática e prática estrutural na análise computacional moderna.

Os volumes anteriores traçaram o surgimento gradual de mecânica estrutural como uma ciência matemática. Nós testemunhamos as experiências de Galileu estabelecendo que a força material era quantificável e governada por leis racionais. Seguimos a transformação de Newton em uma disciplina matemática. Observamos o desenvolvimento da teoria de Cauchy, as equações de campo de Navier, transformando nossa compreensão de como os materiais respondem à carga. Cada avanço estendeu o reino do calculável, mas um desafio crítico permaneceu: como aplicar essas teorias abstratas a estruturas reais cuja complexidade excedeu o alcance da solução analítica.

Este capítulo examina como esse desafio foi enfrentado através do desenvolvimento de análise estrutural como uma disciplina distinta de engenharia. Baseando-se nos fundamentos matemáticos da teoria da elasticidade estabelecidos no capítulo anterior, a mecânica entrou em uma nova e decisiva fase - um cada vez mais impulsionado pelas necessidades da engenharia estrutural. As formulações abstratas de tensão, deformação, e elasticidade (Chap. 10) que amadureceu através do trabalho de matemáticos no início do século XIX agora encontrou expressão concreta na análise das estruturas reais: pontes, pórticos, e arcos cuja complexidade desafiava a simplicidade de sistemas estaticamente determinados. O desafio não era mais definir as leis da matéria, mas aplicá-las sistematicamente a

CÓPIA PARA REVISÃO

assembleias de membros cujos esforços internos não poderiam ser deduzidos apenas pelo equilíbrio.

É nessa transição, do contínuo ao discreto, da teoria geral da elasticidade para a ciência específica das estruturas, que uma nova geração de pensadores surgiu. Engenheiros franceses (Navier e Clapeyron), o Maxwell britânico, o Castigliano italiano, e professores alemães (Mohr e Müller-Breslau) transformaram a mecânica em análise estrutural, introduzindo poderosos teoremas de energia e compatibilidade que renderizaram o *indeterminado* Não é insolúvel, mas *Elegantemente quantificáveis.*

A transformação ocorreu em duas fases, separadas por computação digital. A primeira fase, que se estende entre 1820 e 1950, viu o desenvolvimento de métodos de cálculo manual: Procedimentos sistemáticos para analisar estruturas estaticamente indeterminadas. Este capítulo traça a evolução destes métodos analíticos que ponteam teoria da elasticidade e projeto estrutural — métodos que mais tarde formariam a fundação do deslocamento e rigidez aproxima-se central para o século XX análise estrutural. Desde o trabalho pioneiro de Navier em contínuo vigas até a equação de Clapeyron de três momentos, do teorema recíproco de Maxwell aos princípios energéticos de Castigliano, dos teoremas de Mohr para a distribuição de momento de Hardy Cross - a narrativa segue como A visão conceitual foi gradualmente destilada em métodos gerais, culminando em uma estrutura unificada para analisar estruturas complexas.

A segunda fase, a partir da década de 1950, testemunhou que esses métodos clássicos evoluem em formulações matriciais passíveis de implementação computacional, culminando no método dos elementos finitos. O que torna esta narrativa convincente é a revelação da continuidade sob aparente revolução. O método dos elementos finitos surgiu não como uma ruptura da teoria clássica, mas como sua extensão sistemática. O elemento matrizes de rigidez, os procedimentos de montagem, e os princípios energéticos rastreiam diretamente os conceitos desenvolvidos por Maxwell, Castigliano, e seus contemporâneos. O computador mudou o que podia ser calculado, não o que estava sendo computado.

O capítulo continua assim em duas seções principais. O primeiro examina os métodos de cálculo manual, do contínuo vigas de Navier através de princípios energéticos e condições de compatibilidade, culminando com a distribuição momento Hardy Cross - o apogeu do cálculo mão. O segundo examina como os computadores digitais possibilitaram a reformulação em métodos matriciais: O método da rigidez direta na Boeing, a extensão de Clough para mídia contínua como o método dos elementos finitos, e a rápida maturação do computacional análise estrutural no paradigma dominante da prática contemporânea.

Ao fazê-lo, este capítulo traz à conclusão o arco histórico que começou com as experiências de Galileu sobre força e movimento, passou através das grandes formulações de mecânica do contínuo, e culmina no nascimento da moderna estrutura computacional Análise: uma disciplina que finalmente conseguiu o fechamento entre teoria, computação e design.

Vamos agora examinar como esta síntese foi realizada. Mas primeiro, vamos examinar a origem do termo "engenharia estrutural".

CÓPIA PARA REVISÃO

11.2 Engenharia estrutural, etimologia

O moderno conteúdo técnico da engenharia estrutural é muito anterior ao nome moderno. Durante grande parte do século XVIII e início do XIX, o que agrupamos agora sob "análise estrutural"e "Engenharia Estrutural"foi distribuído entre engenharia civil, arquitetura, estática, resistência de materiais, e (mais tarde) elasticidade. Durante o século XIX, escala estrutural crescente, novos materiais (ferro, então aço), e a expansão do conjunto de ferramentas analíticas (estabilidade, teoria elástica, métodos energéticos, estática gráfica, e finalmente métodos matriciais) incentivaram uma especialização mais clara dentro da engenharia civil. Em inglês, esta especialização não se reflete em um único ato de "coining", mas numa estabilização gradual da terminologia no uso profissional e publicado.

Para uso inglês, as datas ancoradas mais defensáveis vêm do Dicionário Inglês de Oxford. Ele grava a frase do substantivo *Engenharia estrutural* com as primeiras evidências em 1859 (*structural engineering, n.* n.d.) e o substantivo profissional *Engenheiro estrutural* com as primeiras evidências em 1867 (*structural engineer, n.* n.d.). A ordem é historicamente plausível: O rótulo de atividade se torna comum antes do título profissional. No início do século XX, o título está consolidado institucionalmente; no Reino Unido, o corpo agora conhecido como a Instituição de Engenheiros Estruturais rastreia sua origem até 1908 e relata adoção do seu nome atual em 1922 (*Our history* 2026). A adoção institucional não é a primeira ocorrência das palavras, mas é um importante marcador de estabilização profissional.

A prática francesa e alemã mostram a mesma especialização subjacente, mas com diferentes caminhos linguísticos. Em francês, o trabalho que o inglês mais tarde rotularia de "engenharia estrutural"foi historicamente enquadrado através de frases como *cálculo das construções*, *Resistência des materiaux*, e *Teoria das construções*A identidade profissional também foi moldada fortemente pelo contexto institucional (notoriamente, os grandes ecoles e o corpo), com papéis de engenharia expressos através Engenharia civil e títulos de construção. Em contextos de língua alemã, uma designação distinta e amplamente utilizada é *Baustatik* (literalmente ”construindo estática”’), que funciona como um termo guarda-chuva abrangendo teoria, métodos de cálculo, e sua aplicação para construções reais carregando carga (Kurrer, 2008 PDF). Kurrer enfatiza tanto a amplitude do campo quanto o problema de linguagem: diferentes línguas lutam para nomear, rigorosamente e sucintamente, um domínio que inclui teoria, computação e prática; em alemão, *Baustatik* tornou-se o termo amplamente aceito (Kurrer, 2008 PDF).

O termo *análise estrutural* é melhor entendido como um rótulo metodológico em vez de um título profissional. Historicamente, a mesma atividade aparece sob títulos antigos (por exemplo, "estática"ou "teoria das estruturas", e só mais tarde se torna uma frase padronizada que explicitamente nomeia o ato analítico: determinando esforços internos, deformações, e estabilidade dos sistemas de carga. Assim, "engenheiro estrutural"e "análise estrutural"devem ser tratados como produtos da diferenciação profissional do século XIX

CÓPIA PARA REVISÃO

e início do século XX: o primeiro nomeando uma identidade profissional em inglês, e o último nomeando um conjunto cada vez mais formalizado de procedimentos analíticos cujas raízes intelectuais são muito mais antigas do que a terminologia moderna.

11.3 Primeiros desenvolvimentos: Estaticamente indeterminado Vigas

Enquanto as teorias da flexura dominavam a paisagem científica no século XVIII (Chap. 7), foi a análise de estaticamente indeterminada vigas que dominou o 19. Este desenvolvimento foi estimulado diretamente pelo surgimento da era ferroviária e construção de metal, que naturalmente levou ao uso generalizado de suportes contínuos vigas e fixos (encastré).

O desafio fundamental de estruturas estaticamente indefinidas é que equações de equilíbrio são insuficientes para determinar todas as forças e reações desconhecidas. Equações adicionais devem ser derivadas de condições de compatibilidade. Requisitos que a estrutura deformada permanece contínua e devidamente suportada. O reconhecimento desta distinção, e o desenvolvimento sistemático de métodos para explorá-la, representa uma das grandes conquistas intelectuais do século XIX mecânica estrutural.

11.3.1 Navier (1785-1836): O primeiro tratamento sistemático

O surgimento da construção de ferro e a expansão das redes ferroviárias na década de 1820 criaram problemas práticos urgentes que a mecânica clássica não tinha abordado. Pontes de ferro e viadutos ferroviários muitas vezes empregavam múltiplos suportes contínuos, configurações que não podiam ser analisadas apenas por equações de equilíbrio. Foi nesse contexto que Claude Louis Navier, professor da École des Ponts et Chaussées, estendeu seu trabalho anterior sobre elástico vigas para abordar o que pode ter sido o primeiro tratamento explícito da indeterminação estrutural.

Na edição de 1826 da sua *Leçons* (Navier, 1826, p. 33)Navier tornou-se o primeiro a analisar sistematicamente uma estática indeterminada viga - especificamente, uma viga em três suportes. Sua segunda edição de 1833 (Navier, 1833) Este tratamento se estendeu para *encastré* E configurações contínuas mais complexas.

O reconhecimento de Navier do problema fundamental é evidente em sua declaração:

> Quando uma carga é suportada por mais de duas barras inclinadas no mesmo plano vertical ou por mais que três barras inclinada não no mesmo avião, as condições de equilíbrio deixam indeterminados, entre certos limites, as forças impostas na direção de cada um dos bares.

CÓPIA PARA REVISÃO

Navier, 1826 Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines

A abordagem de Navier combina equações de equilíbrio com condições geométricas de compatibilidade derivadas da equação diferencial da curva elástica. Para um contínuo viga sobre múltiplos suportes, ele reconheceu que a deflexão em cada suporte intermediário deve desaparecer, fornecendo as equações adicionais necessárias para determinar as reações redundantes. Seu método, embora específico para contínua vigas, estabeleceu o princípio fundamental que guiaria todos os desenvolvimentos subsequentes no século XIX: *indeterminação estática é resolvida invocando compatibilidade de deformações*.

11.3.2 Clapeyron (1799-1864): A Equação de Três Momentos

Para detalhes analíticos, consultar §25.3

.

Um grande avanço veio em 1857, quando Benoît Clapeyron publicou seu célebre "teorem de três momentos"(Clapeyron, 1857). Este resultado elegante forneceu uma relação direta entre o momentos fletores em três suportes consecutivos de um contínuo viga, eliminando a necessidade de trabalhar diretamente com o equação diferencial da curva elástica.

Para um contínuo viga com comprimento de extensão ℓ_1 e.. ℓ_2 entre três suportes consecutivos com momentos M_1, M_2, e M_3A equação de Clapeyron assume a forma:

$$M_1\ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3\ell_2 = -6\left(\frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2}\right)$$

Onde A_1 e.. A_2 representar as áreas do M/EI diagramas para o biapoiado se estende sob a carga aplicada.

A equação de três momentos representou um avanço conceitual. Em vez de resolver equações diferenciais com múltiplos condições de contorno, os engenheiros agora poderiam escrever equações algébricas diretamente para os momentos de suporte desconhecidos. Para um contínuo viga mais n Isso é o que eu quero dizer $n-2$ equações lineares simultâneas, um problema facilmente solucionável pelos métodos computacionais disponíveis em meados do século XIX (Timoshenko, 1953).

O teorema de Clapeyron tornou-se o método padrão para análise contínua vigas e foi amplamente ensinado em escolas de engenharia por quase um século. Sua influência se estende muito além de sua aplicação imediata: demonstrou-se que métodos algébricos sistemáticos poderiam substituir a análise caso a caso, apontando o caminho para os métodos matriciais gerais do século xx.

CÓPIA PARA REVISÃO

11.4 Transição para métodos gerais

Enquanto o teorema de Clapeyron resolveu elegantemente o problema contínuo viga, ele permaneceu específico para esse tipo estrutural. A questão mais ampla persistiu: poderia ser concebido um método geral, aplicável a qualquer estrutura estaticamente indeterminada – pórticos, arcos, treliças - independentemente da configuração? A resposta surgiria através do desenvolvimento de métodos energéticos e do princípio de trabalho virtual, conceitos que unificariam o tratamento de estruturas indeterminados sob um referencial teórico comum.

11.4.1 Maxwell (1831-1879): O Teorema Reciproco

Para detalhes analíticos, consultar §24.2.2

.

A base teórica para o método das forças foi lançada por James Clerk Maxwell em seu notável artigo de 1864 *Sobre o cálculo do equilíbrio e Rigidez de Pórticos* (Maxwell, 1864c). Embora Maxwell seja lembrado principalmente por suas contribuições revolucionárias para a teoria eletromagnética, seu trabalho em mecânica estrutural foi igualmente profundo. Seu interesse em problemas estruturais surgiu de sua abordagem característica: buscando unidade matemática através de fenômenos físicos aparentemente díspares.

O teorema recíproco de Maxwell afirma que para uma estrutura elástica linear, o deslocamento no ponto i devido a uma carga unitária no ponto j é igual a deslocamento no ponto j devido a uma carga unitária no ponto i:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Este resultado aparentemente simples tem profundas implicações. Isso implica que as forças matriz de flexibilidade (relativas a deslocamentos) devem ser simétricas, uma propriedade que se tornou fundamental para análise estrutural. Maxwell usou este princípio para derivar procedimentos sistemáticos para calcular deflexões em treliças e pórticos. Seu teorema permitiu o cálculo sistemático de coeficientes flexibilidade, transformando a análise indeterminada de uma arte dependente da intuição em uma ciência baseada no método.

O artigo de 1864 de Maxwell também introduziu o que agora é chamado teorema de Maxwell para calcular deflexões usando cargas manequins - uma técnica que seria independentemente redescoberta e generalizada por outros. Sua notação e abordagem sistemática antecipavam os métodos matriciais que emergiriam quase um século depois (Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

CÓPIA PARA REVISÃO

11.4.2 Mohr (1835-1918): Métodos Geométricos e Analógicos

Christian Otto Mohr, professor da Politécnica de Dresden e mais tarde da Politécnico Stuttgart, fez inúmeras contribuições fundamentais para mecânica estrutural entre 1868 e 1906. Seu trabalho em métodos gráficos e interpretação geométrica do comportamento estrutural forneceu aos engenheiros ferramentas práticas poderosas para análise.

Círculo de Mohr para Tensão Apesar de não estar diretamente relacionado com estruturas indeterminadas, o círculo de Mohr (1882) para representar tensão estados tornou-se uma das ferramentas mais utilizadas na mecânica (Mohr, 1882a). A construção geométrica elegante permite visualização imediata do principal e máximo conceito essencial para a compreensão da falha estrutural.

Teorias da Área do Momento

Para detalhes analíticos, consultar §22.3.4

Os teoremas da área do momento de Mohr (1868) forneceram um método geométrico para calcular declives e deflexões em vigas (Mohr, 1868):

Primeiro Teorema: A mudança na inclinação entre dois pontos em uma curva elástica é igual à área sob o M/EI diagrama entre esses pontos.

Segundo Teorema: O desvio vertical de um ponto da tangente em outro ponto é igual ao primeiro momento do M/EI área do diagrama sobre o primeiro ponto.

Estes teoremas, derivados da equação fundamental viga $d^2y/dx^2 = M/EI$, permitiu que os engenheiros ignorassem a integração e trabalhassem diretamente com áreas e centróides - cálculos prontamente realizados graficamente ou com aritmética simples.

O Método Analógico

Para detalhes analíticos, consultar §22.3.4.7

Mohr também desenvolveu o *carga elástica* ou *Conjugar viga* analogia, que transformou problemas de deflexão em problemas de momento equivalentes. Tratando o M/EI diagrama como um carregamento em um conjugado viga, deflexões e inclinações do real viga poderia ser encontrado a partir de tesouras e momentos no conjugado viga - uma transformação elegante que simplificava grandemente cálculos (Timoshenko, 1953 PDF).

11.4.3 Castigliano (1847-1884): Métodos de Energia

Para detalhes analíticos, consultar §48.5

Alberto Castigliano, engenheiro ferroviário italiano, fez suas contribuições fundamentais enquanto ainda estudante do Instituto Politécnico de Turim. Sua tese de doutorado, publicada em 1873 e posteriormente ampliada em seu tratado de 1879 (Castigliano, 1879 PDF),

CÓPIA PARA REVISÃO

métodos de energia estabelecidos como uma ferramenta poderosa para análise estrutural. O trabalho de Castigliano foi diretamente motivado pelas necessidades práticas do projeto da ponte ferroviária, onde a análise rápida de configurações estruturais complexas era essencial.

Primeiro Teorema de Castigliano A derivada parcial da energia total deformação em relação a uma deslocamento é igual à força aplicada correspondente:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

Este teorema, embora teoricamente importante, encontrou menos aplicação prática do que seu segundo teorema.

Segundo Teorema de Castigliano A derivada parcial da energia total deformação em relação a uma força é igual à correspondente deslocamento:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

Este resultado, às vezes chamado de teorema da carga unitária, tornou-se o cavalo de obra dos cálculos de deflexão. Para uma estrutura com energia deformação

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{N^2}{2EA}\,dx + \int \frac{V^2}{2GA}\,dx$$

a deflexão em qualquer ponto em qualquer direção poderia ser encontrada diferenciando-se com relação a uma carga aplicada (ou dummy) nessa direção.

Para estruturas estaticamente indeterminadas, o teorema de Castigliano forneceu um método direto: as forças redundantes poderiam ser tratadas como desconhecidas, e as condições de compatibilidade (que as deflexões em certos pontos devem desaparecer) desde que as equações necessárias. Esta abordagem, conhecida como o método do menos trabalho, afirmou que as forças redundantes se distribuem para minimizar a energia total deformação. Os engenheiros ferroviários valorizaram particularmente este método por sua aplicabilidade sistemática a configurações complexas de ponte (Charlton, 1982).

11.4.4 Müller-Breslau (1851-1925): Sistematização e Linhas de influência

Para detalhes analíticos, consultar §28.3

Heinrich Müller-Breslau, professor da Technische Hochschule em Berlim Charlottenburg, sintetizava e sistematizava as várias abordagens de estruturas indeterminadas em seu tratado monumental *Morra neueren Methodeen der Festigkeitslehre* (Müller-Breslau, 1886).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Formulação geral Müller-Breslau apresentou o método das forças em sua forma mais geral. Para uma estrutura com n graus de indeterminação estática, o procedimento é:

Passo 1: Selecionar n Forças redundantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e remover as restrições correspondentes, criando uma estrutura estaticamente determinada

Passo 2: Calcule deslocamentos δ_{ij} na localização do redundante i Devido ao valor unitário de redundante j, mais deslocamentos δ_{i0} devido a cargas aplicadas.

Passo 3: Forçar compatibilidade - o deslocamentos nos locais redundantes deve corresponder às condições reais de suporte:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Onde Δ_i são o apoio conhecido deslocamentos (muitas vezes zero).

Este sistema de n Equações dentro n O desconhecido determina todas as forças redundantes. O método é sistemático, geral e aplicável a qualquer estrutura.

Linhas de influência Müller-Breslau também desenvolveu a teoria de linhas de influência - diagramas mostrando como uma determinada força ou momento varia conforme uma carga unitária atravessa a estrutura (Müller-Breslau, 1887). Seu princípio para construir linhas de influência afirmava que o linha de influência para uma determinada força ou momento tem a mesma forma que a curva de deflexão que resulta quando essa força ou o momento é dado um valor unitário e a estrutura é autorizada a se deformar.

Esta interpretação geométrica forneceu aos engenheiros métodos gráficos poderosos para analisar estruturas sob cargas movente - críticos para o projeto da ponte ferroviária, o desafio de engenharia dominante do final do século XIX (Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

11.4.5 O Método das forças: Compatibilidade e Flexibilidade

Para detalhes analíticos, consultar Capítulo 25

As contribuições de Maxwell, Mohr, Castigliano e Müller-Breslau, embora desenvolvidos de forma independente, formaram os componentes essenciais do que se tornaria uma estrutura analítica unificada. Maxwell tinha estabelecido o teorema recíproco e o conceito de coeficientes flexibilidade; Mohr forneceu métodos geométricos para computação de deflexões; Castigliano tinha demonstrado o poder dos princípios energéticos para determinar deslocamentos e condições de compatibilidade; E Müller-Breslau tinha começado o trabalho de sistematização. O que emergiu dessas insights díspares foi um método geral aplicável a qualquer estrutura estaticamente indeterminada, um método que viria a ser conhecido como o método das forças, ou alternativamente, o método flexibilidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

Esta seção apresenta o método das forças não como a invenção de um único indivíduo, mas como a síntese dos desenvolvimentos teóricos descritos acima. Na virada do século XX, este método se cristalizou em um procedimento sistemático ensinado em todas as escolas de engenharia. Antes de examinar seu legado e limitações, é essencial entender os conceitos fundamentais e a estrutura lógica que unificou as percepções desses pioneiros em um quadro analítico coerente.

11.4.6 Conceitos e Procedimentos Fundamentais

Antes de examinar o desenvolvimento histórico, é essencial entender a lógica fundamental do método das forças, que inverte a sequência normal de análise estrutural.

Graus de indeterminação estática

Para detalhes analíticos, consultar §19.1.4

Uma estrutura é estaticamente indeterminada quando as equações de equilíbrio são insuficientes para determinar todas as forças desconhecidas. O grau de indeterminação estática, n, representa o número de equações adicionais necessárias além do equilíbrio. Por exemplo:

- A biapoiado viga: Determinar$n = 0$)
- Um final fixo viga: indeterminada com $n = 3$ (Reações de dois momentos e uma reação vertical são redundantes)
- Um contínuo viga mais m Suportes: indeterminada com $n = m - 2$
- Um fechado pórtico ou treliça: indeterminação depende do número de membros, articulações e condições de apoio

O Procedimento Método das forças O método das forças trata certas forças ou reações como incógnitas primárias - especificamente, o n Forças redundantes. O procedimento sistemático é:

Passo 1: Selecione Redundants. Escolha n forças (reações ou esforços internos) como redundantes. A escolha é arbitrária, mas afeta a eficiência computacional. Denote estes como $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Passo 2: Crie a estrutura primária. Remova as restrições correspondentes aos redundantes, criando uma estrutura primária estaticamente determinada que pode ser analisada apenas pelo equilíbrio. Isso muitas vezes significa remover suportes, cortar membros, ou introduzir dobradiças.

Passo 3: Analise a estrutura primária. Calcule deslocamentos nos locais redundantes devido a:

- Cargas aplicadas: deslocamentos δ_{i0} em local redundante i

CÓPIA PARA REVISÃO

- Valores unitários de cada redundante: flexibilidade coeficientes δ_{ij} = deslocamento no local i devido à força da unidade no local j

Passo 4: Forçar compatibilidade. A estrutura real deve ser contínua e devidamente suportada. Portanto, o deslocamentos em locais redundantes (computados como sobreposição de efeitos de carga e efeitos redundante) deve igualar as condições reais de restrição:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Onde Δ_i são o apoio conhecido deslocamentos (normalmente zero para suportes rígidos).

Passo 5: Resolva para Redundants. Este sistema de n Equações dentro n O desconhecido determina todas as forças redundantes X_j.

Passo 6: Superposição. Uma vez que redundantes são conhecidos, todas as outras forças e momentos seguem da superposição da solução de estrutura primária e dos efeitos redundante.

Por que o método 11? O método é chamado de método flexibilidade porque funciona com coeficientes flexibilidade δ_{ij}, que se relacionam com as forças deslocamentos. O matriz de flexibilidade $\mathbf{F} = [\delta_{ij}]$ é central para a formulação. Para estruturas elásticas lineares, esta matriz é simétrica (como Maxwell provaria) e positiva definitiva.

Interpretação Física O método das forças incorpora um princípio fundamental: *A natureza distribui forças para satisfazer o equilíbrio e compatibilidade*.. Equilíbrio é satisfeito em cada estágio (através da escolha da estrutura primária), enquanto compatibilidade fornece as restrições adicionais que determinam como as forças se distribuem entre caminhos redundantes. Assim, o método separa os dois requisitos fundamentais do equilíbrio e compatibilidade, tratando-os sequencialmente ao invés de simultaneamente.

Os fundamentos teóricos para esta abordagem foram estabelecidos principalmente através do trabalho de Maxwell, Mohr, Castigliano e Müller-Breslau, cujas contribuições agora examinamos.

11.4.7 O Método das forças: Resumo e legado

Em 1900, o método das forças foi totalmente desenvolvido e amplamente ensinado. Suas vantagens eram claras: sistemática e geral (aplicável a qualquer estrutura estaticamente indeterminada), baseada em princípios físicos sólidos (compatibilidade de deformações), produzindo soluções exatas para estruturas elásticas lineares, e implementáveis com as ferramentas computacionais disponíveis na era pré-computador.

A principal limitação era computacional: os coeficientes flexibilidade δ_{ij} requereu cálculos extensos, e resolver sistemas de mais do que algumas equações foi tedioso. Para estruturas altamente redundantes (grande pórticos, contínuas vigas com muitos vãos), o método tornou-se impraticável. Um contínuo viga mais de dez suportes necessários para

CÓPIA PARA REVISÃO

resolver oito equações simultâneas; um multi-story pórtico poderia facilmente gerar vinte ou mais desconhecidos.

Esta restrição prática conduziria o desenvolvimento de abordagens alternativas - o método dos deslocamentos e sua prole, o método rigidez, que dominaria o século XX análise estrutural por fundamentalmente reconcetualizar quais quantidades deveriam sejam tratados como desconhecidos.

11.5 O Método dos deslocamentos: Da Teoria à Prática

O método dos deslocamentos representa uma mudança fundamental na perspectiva do método das forças. Em vez de tratar as forças como desconhecidas e satisfatória compatibilidade, o método dos deslocamentos trata deslocamentos (especificamente, rotações conjuntas e traduções) como desconhecidos e satisfaz equilíbrio. Esta inversão, embora conceitualmente sutil, provou ser computacionalmente revolucionária.

O principal insight foi que a escolha de desconhecidos afeta fundamentalmente a eficiência computacional. Considere um portal simples pórtico: O método das forças requer resolução para reações redundantes em suportes (forças externas), enquanto o método dos deslocamentos resolve diretamente para rotações conjuntas (interna deslocamentos). Para um pórtico com juntas rígidas, esta abordagem baseada em deslocamento normalmente envolve menos desconhecidos - muitas vezes dramaticamente menos.

O desenvolvimento do método dos deslocamentos se desdobrou em várias fases, abrangendo a década de 1860 à década de 1930, culminando no método de distribuição momento Hardy Cross que dominaria análise estrutural por três décadas.

11.5.1 Fundações teóricas: Formulações Cedo Rigidez

As sementes conceituais do método dos deslocamentos apareceram em várias obras de meados do século XIX, embora não florescessem totalmente até o início do século XX.

Clebsch (1862): Análise por Rigidez Em 1862, Alfred Clebsch, professor de física teórica em Göttingen, apresentado em seu influente tratado *Theorie der Elasticitïo fester KÖrper* (Clebsch, 1862a) Um algoritmo elegante para analisar o pino tridimensional articulado. Para cada articulação, Clebsch introduziu três componentes cartesianos desconhecidos. Uma barra típica ligando dois nós conecta seis componentes deslocamento, e para uma estrutura estável, o sistema completo de equações segue a partir do equilíbrio, geometria, e da lei de Hooke.

A formulação de Clebsch era, em essência, uma forma inicial do método da rigidez direta - ele trabalhou com rigidezes de membros ao invés de flexibilidades, e montou-as através da compatibilidade geométrica e equilíbrio. Quando Barré de Saint-Venant publicou uma

CÓPIA PARA REVISÃO

tradução francesa com extenso comentário em 1883 (Saint-Venant, 1855c), ele observou que esta abordagem rastreou as notas de palestra de Navier 1826, onde Navier tinha analisado a decomposição de uma força ao longo de três barras coplanar considerando deformações (Navier, 1826, p. 33).

Saint-Venant alegou que em suas próprias notas de palestra de 1838 ele tinha apresentado *o princípio geral desse método para a determinação das intensidades e momentos das reações,* e que em 1843 ele tinha mostrado que *Para estes tipos de problemas há sempre o mesmo número de equações que desconhecidos quando os membros da estrutura são dobrados, estendidos ou comprimidos e torcidos.* Enquanto a prioridade histórica permanece um pouco obscura, o quadro conceitual estava claramente emergindo em meados do século.

Manderla (1880): Soluções Iterativas Heinrich Manderla, um jovem assistente em Munique, apresentou em 1880 um método para analisar pórticos com juntas rígidas que trabalharam diretamente com rotações conjuntas como desconhecidos (Kurrer, 2003). Manderla não só formulou as equações de equilíbrio em termos de rotações, mas também propôs um procedimento de solução iterativa - uma antecipação presciente dos métodos que dominariam análise estrutural cinquenta anos depois. Seu trabalho recebeu reconhecimento imediato limitado, mas formou uma importante ligação conceitual no desenvolvimento. Por suas contribuições inovadoras, Manderla recebeu um prêmio especial do Politécnico de Munique.

Mohr (1892): Difusão e Desenvolvimento Otto Mohr, em seu artigo de 1892 sobre secundário tensões em treliças (Mohr, 1892), apresentou uma versão modificada da abordagem de Manderla que trouxe o método para maior atenção entre os engenheiros alemães. O tratamento de Mohr esclareceu a interpretação física: As rotações articulares foram as naturais graus de liberdade para estruturas com conexões rígidas, e o equilíbrio nas articulações forneceu as equações governantes. O cálculo dos momentos secundários em treliças, enquanto uma aproximação (assumindo efeitos de flexão não afetam significativamente nodal deslocamentos em direções coordenadas), demonstrou a utilidade prática da formulação baseada em deslocamento.

11.5.2 Método de Deflexão de Inclinação: Formulação sistemática

Para detalhes analíticos, consultar §27.2

O método de deflexão da inclinação surgiu no início do século XX como a primeira abordagem completa e sistemática deslocamento baseada em análise estrutural. O método expressou os momentos finais dos membros diretamente em termos de rotações conjuntas e equilíbrio forçado em cada articulação, produzindo um sistema de equações para as rotações desconhecidas.

Bendixen (1914): Desenvolvimento Europeu Axel Bendixen, engenheiro alemão, publicou uma das primeiras apresentações sistemáticas do que se tornaria o método de deflexão em

CÓPIA PARA REVISÃO

1914 (Bendixen, 1914). Por um prismático de comprimento L com rotações finais θ_A e.. θ_B E fim relativo deslocamento Δ, Bendixen derivados expressões para os momentos finais:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^{FEM} \tag{11.1}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^{FEM} \tag{11.2}$$

Onde $\psi = \Delta/L$ é a rotação de acordes e M_{AB}^{FEM}, M_{BA}^{FEM} São os momentos fixos devido ao carregamento do membro.

Essas equações de deflexão da inclinação forneceram uma relação direta entre os momentos finais dos membros (que devem satisfazer o equilíbrio) e a articulação deslocamentos (os desconhecidos). Escrevendo equações de equilíbrio em cada junta, que a soma dos momentos finais de membros reunidos numa junta deve ser igual a qualquer momento conjunto aplicado, um sistema de equações para as rotações articulares desconhecidas resultou.

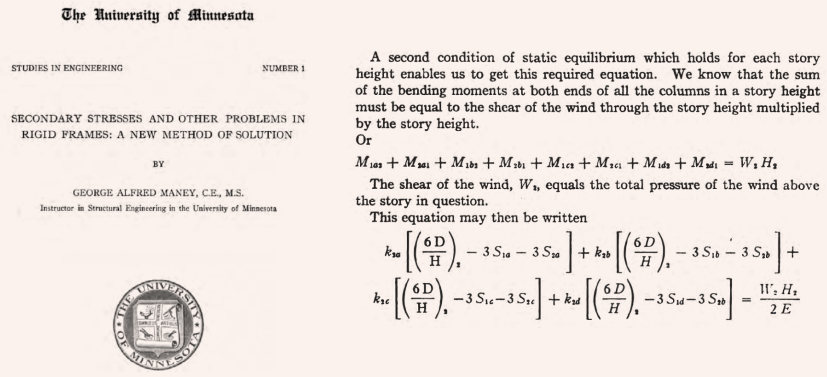
Maney (1915): Sistematização Americana George A. Maney, professor da Universidade de Minnesota, desenvolveu e sistematizou independentemente o método de deflexão em seu papel marco 1915 (Maney, 1915 PDF). Seu trabalho começou com uma clara declaração da necessidade prática (Fig. 11.1):

> Com o aumento do tamanho e complexidade das estruturas modernas, tanto de aço como de concreto, a relativa importância prática da teoria do indeterminado tensões aumentou muito, e particularmente tornou-se importante desenvolver métodos viáveis que se elogiarão ao designer de escritório. Visto de um ponto de vista puramente teórico, o campo da indeterminada tensões tem sido por muitos anos um campo bastante bem trabalhado, mas muitos dos métodos padrão de análise deixam muito a desejar como métodos de trabalho para design de escritório, e é Acreditava que qualquer sistema de ataque que encurtasse o trabalho detalhado e diminuisse as dificuldades puramente matemáticas seria bem-vindo pela profissão.
>
> Maney, 1915 PDF *"Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution"*

O método expressa os momentos de cada lado de um suporte em termos do elemento adjacente rigidez e (desconhecido) ângulos de rotação. Equações de equilíbrio (incluindo ações finais fixas) são escritas para cada articulação, resultando em um sistema de equações lineares em termos de rotações articulares desconhecidas $\boldsymbol{\theta}$.. Uma vez que a rotação de cada membro é determinada, pode-se facilmente substituir e obter os momentos. É claramente um método dos deslocamentos, antecipando as formulações matriciais que emergiriam décadas depois.

A apresentação clara de Maney e exemplos trabalhados tornaram o método acessível para engenheiros praticantes. Ele reconheceu que para muitas estruturas, traduções conjuntas poderiam ser negligenciadas ou tratadas separadamente, simplificando a análise para resolver apenas para rotações conjuntas. Isto *Deflexão de inclinação sem lado* A versão se

CÓPIA PARA REVISÃO



The University of Minnesota

STUDIES IN ENGINEERING NUMBER 1

SECONDARY STRESSES AND OTHER PROBLEMS IN RIGID FRAMES: A NEW METHOD OF SOLUTION

BY

GEORGE ALFRED MANEY, C.E., M.S.
Instructor in Structural Engineering in the University of Minnesota

A second condition of static equilibrium which holds for each story height enables us to get this required equation. We know that the sum of the bending moments at both ends of all the columns in a story height must be equal to the shear of the wind through the story height multiplied by the story height.
Or

$$M_{1a_2} + M_{2a_1} + M_{1b_2} + M_{2b_1} + M_{1c_2} + M_{2c_1} + M_{1d_2} + M_{2d_1} = W_2 H_2$$

The shear of the wind, W_2, equals the total pressure of the wind above the story in question.
This equation may then be written

$$k_{2a}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1a} - 3S_{2a}\right] + k_{2b}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1b} - 3S_{2b}\right] +$$
$$k_{2c}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1c} - 3S_{2c}\right] + k_{2d}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1d} - 3S_{2b}\right] = \frac{W_2 H_2}{2E}$$

Figura 11.1: Maney, formulação de 1915 do método de deflexão da inclinação (Maney, 1915 PDF)

mostrou particularmente eficiente para contínua vigas e história única pórticos (Maney, 1915 PDF).

Vantagens e Limitações O método de deflexão da inclinação ofereceu vantagens significativas sobre o método das forças: menos desconhecidos para típicos pórticos (apenas rotações conjuntas versus todas as forças redundantes), formulação sistemática onde as propriedades dos membros são combinadas via equilíbrio em vez de compatibilidade, extensão natural a estruturas com juntas rígidas, e direta Determinação de momentos em todos os locais críticos.

No entanto, ainda precisava resolver um sistema de equações simultâneas - uma carga computacional significativa para grandes estruturas. Uma dez história pórtico submetida ao carregamento de vento pode exigir rotações conjuntas 40-50 como desconhecidos, com tempos de solução de 2-3 dias para um engenheiro hábil. Isso motivou a busca por métodos de solução iterativa que poderiam evitar a resolução explícita de equações.

11.5.3 Hardy Cross (1885-1959): O Método de Distribuição do Momento

Para detalhes analíticos, consultar §27.3

O método de distribuição do momento, introduzido por Hardy Cross em 1930 (Cross, 1932 PDF), revolucionado análise estrutural. Transformou a solução de equações simultâneas em um processo iterativo que poderia ser realizado com cálculo mínimo, muitas vezes à mão em uma única folha de papel. Se consultarmos os procedimentos originais, ficaremos impressionados com o grande número de comentários apresentados pelos leitores[1].

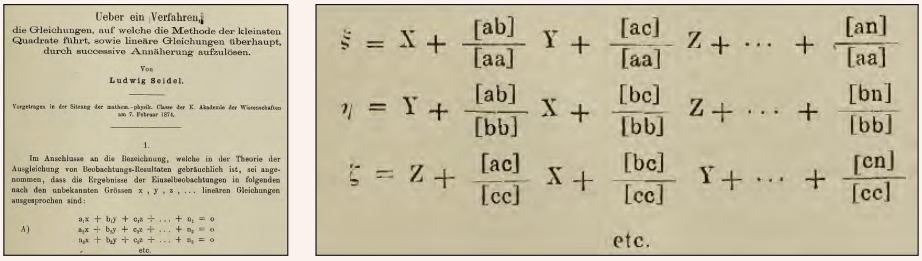
Contexto Histórico: A Busca pela Iteração Em 1930, a análise de vários andares pórticos submetidos a cargas laterais (vento ou sísmico) tornou-se um problema prático urgente,

[1] Em contraste com os tempos modernos, os primeiros leitores de engenharia estudaram artigos técnicos em detalhes e regularmente enviavam comentários e críticas aos autores.

CÓPIA PARA REVISÃO

particularmente nos Estados Unidos onde aço pórticos com conexões rígidas eram construção padrão. O método de deflexão da inclinação, enquanto sistematizado, exigia resolver grandes sistemas de equações. Para uma história de dez pórtico com juntas rígidas, isso poderia envolver trinta ou mais equações simultâneas - uma tarefa computacional assustadora na era antes dos computadores eletrônicos.

Curiosamente, os matemáticos há muito possuíam métodos iterativos para resolver sistemas lineares. Carl Friedrich Gauss descreveu uma abordagem iterativa para seu aluno Gerling em 1823, e Philipp Ludwig von Seidel formalizou o método em 1873 (Seidel, 1873 PDF) (Fig. 11.2). O método Gauss-Seidel resolveu um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por repetidas iterações, usando valores atualizados assim que eles se tornaram disponíveis. No entanto, esses métodos exigiam atenção cuidadosa aos critérios de convergência e ofereciam aos engenheiros pouca visão física sobre o comportamento estrutural sendo analisado.



Ueber ein Verfahren,
die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von
Ludwig Seidel.

Vorgetragen in der Sitzung der mathem.-phys. Classe der K. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

1.

Im Anschlusse an die Bezeichnung, welche in der Theorie der Ausgleichung von Beobachtungs-Resultaten gebräuchlich ist, sei angenommen, dass die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen in folgenden nach den unbekannten Grössen x , y , z , ... linearen Gleichungen ausgesprochen sind:

A) $a_0x + b_0y + c_0z + \ldots + v_0 = o$
$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + v_1 = o$
$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + v_2 = o$
etc.

$$\xi = X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \frac{[ac]}{[aa]} Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$
$$\eta = Y + \frac{[ab]}{[bb]} X + \frac{[bc]}{[bb]} Z + \cdots + \frac{[bn]}{[bb]}$$
$$\zeta = Z + \frac{[ac]}{[cc]} X + \frac{[bc]}{[cc]} Y + \cdots + \frac{[cn]}{[cc]}$$
etc.

Figura 11.2: O método de 1873 de Seidel de sucessivas aproximações para resolver sistemas lineares (Seidel, 1873 PDF). Embora matematicamente sadio, faltava-lhe a interpretação física que os engenheiros procuravam.

Hardy Cross, professor de engenharia estrutural da Universidade de Illinois, abordou o problema sob a perspectiva de um engenheiro. Sua visão chave era reinterpretar a iteração matemática como um processo físico: Ao invés de satisfazer todas as equações de equilíbrio, por que não executá-las sequencialmente, juntas por juntas? Os desequilíbrios temporários criados pela liberação de uma junta seriam corrigidos quando juntas adjacentes fossem liberadas e o processo convergisse para a solução correta.

O Processo de Distribuição do Momento O método de Cross começa com todas as articulações artificialmente fixas, impedindo rotação. Os momentos finais fixos devido ao carregamento são calculados para cada membro. Então, juntos por conjunto, as restrições são *Soltem-no*, e o momento desequilibrado em cada conjunto é distribuído aos membros da reunião proporcionalmente às suas rigidezes. Esta distribuição cria desequilíbrios nas juntas adjacentes, que são então liberados e equilibrados por sua vez. O processo se repete iterativamente, com os desequilíbrios diminuindo rapidamente para valores insignificantes.

Os conceitos-chave são:

CÓPIA PARA REVISÃO

Fator: Para um membro de momento de inércia I e comprimento L com o final fixo:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

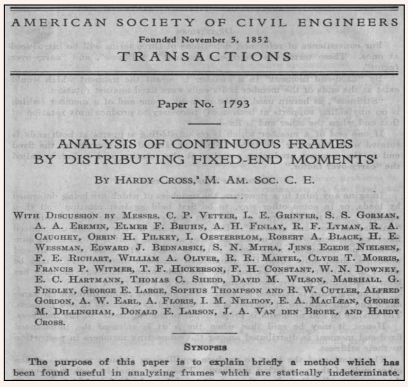
Fator de Distribuição: Para uma reunião com vários membros, a fração de um momento desequilibrado atribuído ao membro i é:

$$DF_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

Carregar o fator: Quando um momento M é aplicado em uma extremidade de um final fixo viga, um momento de $M/2$ é induzido no extremo. Este fator de transição é fundamental para o processo iterativo.

Impacto e adoção O método de distribuição foi imediatamente reconhecido como transformador. Cruzar os papéis no processo ASCE (Cross, 1932) (Cross e Morgan, 1932) tornou-se um dos mais citados na história da engenharia estrutural. Em poucos anos, o método foi ensinado em praticamente todas as escolas de engenharia do mundo. Engenheiros de treino poderiam analisar estruturas que antes necessitavam de especialistas em consultoria.

O sucesso do método se estendeu além de análise estrutural. Cross demonstrou sua aplicabilidade mais ampla, aplicando a mesma filosofia iterativa para analisar a distribuição de fluxo em redes de tubos e circuitos elétricos (Cross, 1936), reconhecendo que esses sistemas compartilhavam a mesma estrutura matemática do equilíbrio de rede, Fig. 11.3.


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1793

ANALYSIS OF CONTINUOUS FRAMES
BY DISTRIBUTING FIXED-END MOMENTS[1]

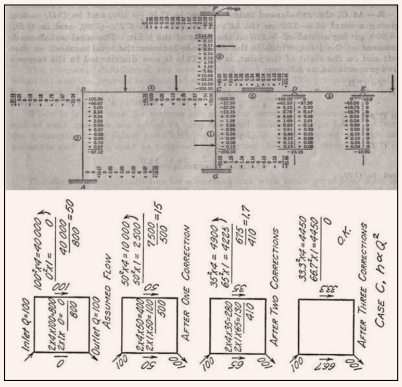
By Hardy Cross,[2] M. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. C. P. Vetter, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. A. Eremin, Elmer F. Bruhn, A. H. Finlay, R. F. Lyman, R. A. Caughey, Orrin H. Pilkey, I. Oesterblom, Robert A. Black, H. E. Wessman, Edward J. Bednarski, S. N. Mitra, Jens Egede Nielsen, F. E. Richart, William A. Oliver, R. R. Martel, Clyde T. Morris, Francis P. Witmer, T. F. Hickerson, F. H. Constant, W. N. Downey, E. C. Hartmann, Thomas C. Shedd, David M. Wilson, Marshall G. Findley, George E. Large, Sophus Thompson and R. W. Cutler, Alfred Gordon, A. W. Earl, A. Flores, I. M. Nelidov, E. A. MacLean, George M. Dillingham, Donald E. Larson, J. A. Van den Broek, and Hardy Cross.

Synopsis

The purpose of this paper is to explain briefly a method which has been found useful in analyzing frames which are statically indeterminate.

(a) O papel de referência da Cross em 1930 (Cross, 1932)



(b) Aplicações para pórticos e redes de tubos (Cross, 1936)

Figura 11.3: Hardy Cross papéis transformadores

O sucesso do método decorreu de sua clareza física - engenheiros entenderam o que cada passo realizado. Era necessário apenas operações aritméticas sem solução de equações, era autocorreção (erros em um ciclo foram corrigidos em iterações subsequentes), permaneceu

CÓPIA PARA REVISÃO

flexível (o analista poderia parar com qualquer precisão desejada), e provou-se igualmente aplicável a pequenos ou pequenos Grandes estruturas.

A distribuição do momento dominava análise estrutural de 1930 a 1960, quando os computadores digitais começaram a permitir os métodos matriciais que o suplantariam.

11.5.4 Extensões e Variações

Goldberg (1934): Análise de Carga Lateral Enquanto a distribuição do momento de Cross revolucionou a análise de pórticos sem lado, carga lateral apresentou um desafio mais complexo. A determinação da lateral deslocamentos na formulação original de Cross exigiu um procedimento iterativo complicado que frustrou muitos engenheiros, particularmente na Califórnia onde a análise sísmica tornou-se crítica após o devastador 1906 São Francisco terremoto e seus inúmeros tremores.

Joseph E. Goldberg enfrentou este desafio em 1934 (Goldberg, 1934 PDF) com um método que distribuiu encostas conjuntas (rotações) em vez de momentos. A abordagem de Goldberg foi análoga ao método de Cross, mas fez sucessivas aproximações em encostas desconhecidas, em vez de momentos desconhecidos (Fig. 11.4). Para pórticos com sidesway, o método de Goldberg forneceu um caminho mais direto para a solução, distribuindo encostas em torno do pórtico até que o desequilíbrio tornou-se aceitávelmente pequeno. Após a distribuição, foi possível encontrar rapidamente as deflexões laterais de cada piso, então calcular momentos finais em cada viga e pilar.

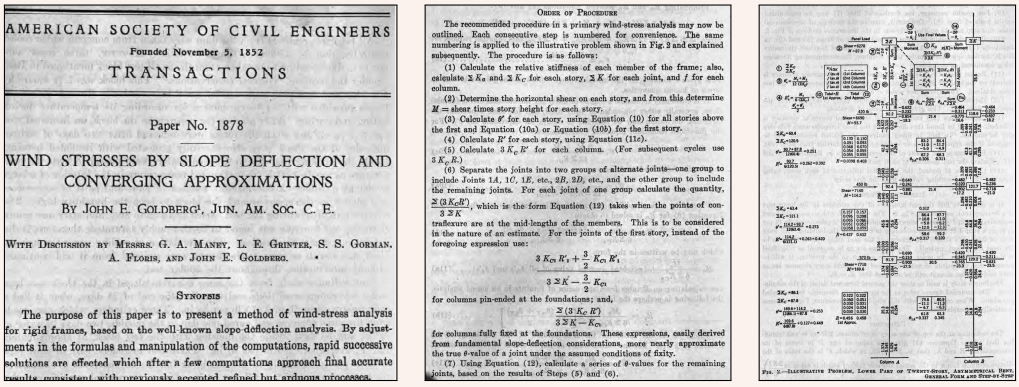

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS
Paper No. 1878
WIND STRESSES BY SLOPE DEFLECTION AND CONVERGING APPROXIMATIONS
By John E. Goldberg[1], Jun. Am. Soc. C. E.
With Discussion by Messrs. G. A. Maney, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. Floris, and John E. Goldberg.
Synopsis
The purpose of this paper is to present a method of wind-stress analysis for rigid frames, based on the well-known slope-deflection analysis. By adjustments in the formulas and manipulation of the computations, rapid successive solutions are effected which after a few computations approach final accurate results consistent with previously accepted refined but arduous processes.
Order of Procedure
The recommended procedure in a primary wind-stress analysis may now be outlined. Each consecutive step is numbered for convenience. The same numbering is applied to the illustrative problem shown in Fig. 2 and explained subsequently. The procedure is as follows:
(1) Calculate the relative stiffness of each member of the frame; also, calculate ΣK_s and ΣK_c for each story, ΣK for each joint, and f for each column.
(2) Determine the horizontal shear on each story, and from this determine M = shear times story height for each story.
(3) Calculate θ' for each story, using Equation (10) for all stories above the first and Equation (10a) or Equation (10b) for the first story.
(4) Calculate R' for each story, using Equation (11c).
(5) Calculate $3K_c R'$ for each column. (For subsequent cycles use $3K_c R$.)
(6) Separate the joints into two groups of alternate joints—one group to include Joints 1A, 1C, 1E, etc., 2B, 2D, etc., and the other group to include the remaining joints. For each joint of one group calculate the quantity, $\frac{\Sigma(3K_c R')}{3\Sigma K}$, which is the form Equation (12) takes when the points of contraflexure are at the mid-lengths of the members. This is to be considered in the nature of an estimate. For the joints of the first story, instead of the foregoing expression use:
$$\frac{3K_{c1}R' + \frac{3}{2}K_{c1}R'}{3\Sigma K - \frac{3}{2}K_{c1}}$$
for columns pin-ended at the foundations; and,
$$\frac{\Sigma(3K_c R')}{3\Sigma K - K_{c1}}$$
for columns fully fixed at the foundations. These expressions, easily derived from fundamental slope-deflection considerations, more nearly approximate the true θ-value of a joint under the assumed conditions of fixity.
(7) Using Equation (12), calculate a series of θ-values for the remaining joints, based on the results of Steps (3) and (6).
Fig. 2.—Illustrative Problem, Lower Part of Twenty-Story, Asymmetrical Rigid Frame and Step-by-Step

Figura 11.4: Adaptação de Goldberg 1934 da inclinação-deflexão para análise da carga do vento (Goldberg, 1934 PDF)

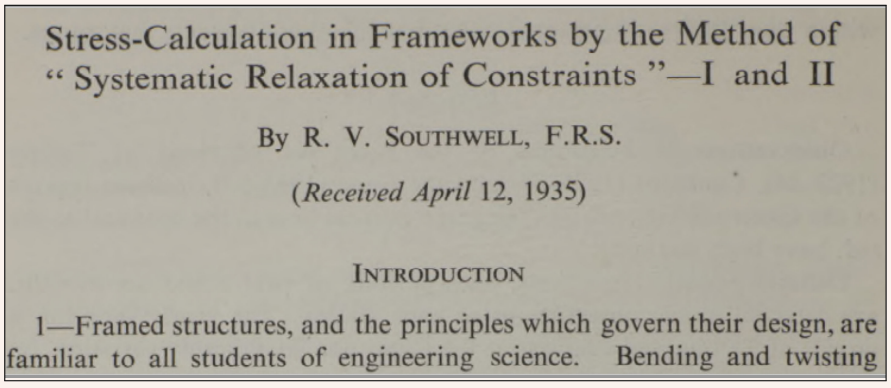
O trabalho de Goldberg gerou ampla discussão entre professores de engenharia estrutural, com debate centrado na eficiência computacional e interpretação física. A seção de discussão, abrangendo dez páginas, incluía comentários dos principais acadêmicos da época. Algum debate centrou-se no tempo de cálculo - aproximadamente 500 minutos contra 1800 minutos de cálculo manual para um multistório pórtico. Curiosamente, alguns comentaristas questionaram se o *assim chamado método de distribuição do momento* era apenas

CÓPIA PARA REVISÃO

uma maneira de *Aliviando o deformação na imaginação que é necessária para visualizar as distorções físicas da estrutura.*. Em contraste, um comentarista elogiou o método Maney-Goldberg: *a simplicidade, rapidez e precisão que podem ser obtidas na análise de um pórtico é realmente surpreendente.*

A principal vantagem foi sua rápida computação de primeiras aproximações das rotações finais em vigas e pilares, e consequentemente estimativas iniciais precisas dos momentos finais. Esta aproximação física de rotações formou o coração do método Maney-Goldberg, provando-se valioso para o projeto de edifícios submetidos a cargas de vento. Apesar de sua promessa, o método foi rapidamente ofuscado por refinamentos na abordagem de Cross e mais tarde por métodos de computador. Uma implementação moderna na MATLAB é fornecida por Saliklis e Parker, 2014 .

Southwell (1935): O Método de Relaxamento Richard Southwell, trabalhando independentemente em Oxford, desenvolveu o método de relaxamento em 1935 (Southwell, 1935). A interpretação física de Southwell foi elegante: Imagine uma estrutura inicialmente descarregada com restrições conjuntas impedindo qualquer deslocamento. Quando as cargas externas são aplicadas, a estrutura permanece sem estresse - toda carga é suportada pelas restrições. Gradualmente *Relaxando* Estas restrições transferem carga para o framework. Se em cada estágio a restrição que carrega a maior carga está relaxada, as forças residuais de restrição diminuem para zero. É fisicamente evidente que mais da carga externa será transferida para a estrutura, até que as forças residuais suportadas por restrições se tornem menos do que o Região de Confiança nas cargas aplicadas (Fig. 11.5).



Stress-Calculation in Frameworks by the Method of
"Systematic Relaxation of Constraints"—I and II

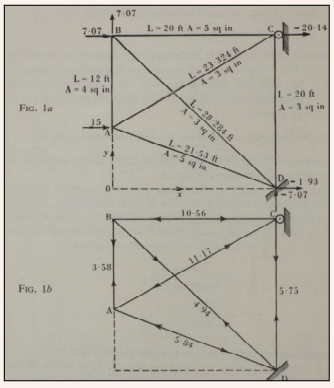
By R. V. Southwell, F.R.S.

(*Received April* 12, 1935)

Introduction

1—Framed structures, and the principles which govern their design, are familiar to all students of engineering science. Bending and twisting

(a) O jornal de 1935 de Southwell



(b) Aplicação para juntas de pinos treliças

Figura 11.5: Método de relaxamento de Southwell (Southwell, 1935)

Southwell, sem saber do artigo de 1930 de Cross quando desenvolveu seu método, mais tarde reconheceu que as duas abordagens eram *em essência precisamente equivalente*.. No entanto, Southwell notou uma vantagem importante: enquanto a distribuição do momento era particularmente adequada para rígido pórticos (comum na prática americana), o método de relaxamento aplicado igualmente bem para pinos unidos treliças (mais comum na

CÓPIA PARA REVISÃO

prática britânica). A formulação mais geral de Southwell influenciaria o desenvolvimento de métodos numéricos para resolver grandes sistemas de equações.

O método de distribuição do momento dominava a prática análise estrutural até o advento dos métodos elemento finito nos anos 1960. O método de relaxamento, embora menos proeminente em análise estrutural, encontrou extensa aplicação na mecânica computacional, onde os solucionadores iterativos baseados em relaxação permanecem amplamente usados para resolver grandes sistemas esparsos de equações.

11.5.5 O Método dos deslocamentos: Resumo e legado

O método dos deslocamentos, tanto em sua deflexão de inclinação quanto em suas encarnações de distribuição de momento, representou um avanço conceitual além do método das forças. Ao trabalhar com deslocamentos como desconhecidos primários e equilíbrio satisfatório, reduziu o número de incógnitos para estruturas típicas, forneceu uma formulação mais natural para estruturas com articulações rígidas, levou a eficientes procedimentos de solução iterativa (particularmente distribuição de momento), e estabeleceu o quadro intelectual para o método rigidez.

Mais significativamente, a filosofia do método dos deslocamentos - montar relações de membro rigidez e impor equilíbrio - se tornaria a base para matriz análise estrutural e, em última análise, o método dos elementos finitos. As abordagens iterativas de Cross, Goldberg e Southwell evoluiriam para o relaxamento moderno e métodos de solução iterativos para análise computacional em grande escala.

11.6 Linhas de influência e Cargas em Movimento

Enquanto o método dos deslocamentos transformou a análise de estruturas fixas sob carga estática, engenheiros civis enfrentaram um desafio adicional: estruturas submetidas a cargas móveis. Pontes ferroviárias, em particular, exigiam engenheiros para determinar não apenas as forças sob uma única posição de carga, mas a força máxima possível como um trem atravessou a estrutura. Para fins de design, a questão crítica era: Onde uma carga móvel deve ser posicionada para criar o momento máximo, cisalhamento, ou reação em um determinado local?

Este problema exigia uma estrutura analítica diferente, que capturasse como uma quantidade estrutural varia conforme uma carga unitária se move através da estrutura. A resposta veio através do desenvolvimento da teoria linha de influência, que se tornaria indispensável para o projeto de ponte ferroviária, o desafio dominante na engenharia estrutural final do século XIX.

CÓPIA PARA REVISÃO

11.6.1 Winkler (1835-1888): Primeiros desenvolvimentos

Emil Winkler, professor da Politécnica Alemã em Praga, fez contribuições iniciais para a teoria das estruturas sob cargas móveis. Seu tratado de 1868 (Winkler, 1875) introduziu o conceito de representar a variação de uma quantidade estrutural (reação, momento, cisalhamento) como uma carga unitária atravessa a estrutura.

Winkler reconheceu que o linha de influência para qualquer força ou momento em uma estrutura estaticamente determinada poderia ser construído puramente a partir da estática, tratando a posição de carga unitária como um parâmetro desconhecido. Para estruturas indeterminadas, no entanto, o linha de influência incorporou as deformações estruturais - exigindo tanto métodos energéticos ou os coeficientes flexibilidade desenvolvidos por Maxwell e outros (Timoshenko, 1953 PDF).

11.6.2 Princípio de Müller-Breslau

Como mencionado anteriormente (§11.4.4), a contribuição fundamental de Müller-Breslau foi reconhecer que linhas de influência tem uma interpretação geométrica direta: *o linha de influência para uma determinada força ou momento tem a mesma forma que a curva de deflexão que resulta quando essa força ou o momento é dado uma unidade deslocamento ou rotação, e a estrutura é permitida a se deformar em conformidade* (Müller-Breslau, 1887).

Este princípio transformou a construção linha de influência de um cálculo tedioso para uma elegante construção gráfica. Um engenheiro poderia esboçar a forma deformada qualitativamente e assim determinar onde a carga em movimento produzia o máximo efeito – invaluável para o projeto preliminar e para a compreensão do comportamento estrutural.

11.6.3 Aplicações e legado

Linha de influência teoria tornou-se essencial para determinar as forças máximas sob cargas de trem em movimento, analisando séries de cargas concentradas (cargas de rodas), otimizando formas estruturais para minimizar os efeitos máximos, e compreensão do comportamento estrutural sob vários Em posição de carga.

Embora menos proeminente na prática moderna (onde a análise computacional pode avaliar vários casos de carga eficientemente), linhas de influência permanecem conceitualmente importantes para entender o comportamento estrutural e ainda são usados para análise de envelopes e posicionamento da carga Estudos.

CÓPIA PARA REVISÃO

11.7 Em direção à Formulação Matricial: A Ponte Conceitual para a Computação

Os métodos de cálculo da mão desenvolvidos entre 1826 e 1930, da equação de Clapeyron para a distribuição do momento de Cross, representavam mais que atalhos computacionais engenhosos. Eles continham, muitas vezes implicitamente, a estrutura conceitual que mais tarde seria formalizada como matriz análise estrutural e métodos elemento finito. Entender esta conexão ilumina como a revolução do computador em análise estrutural não foi uma ruptura dos métodos clássicos, mas sua extensão natural.

11.7.1 A estrutura matricial dos métodos clássicos

Considere as equações de deflexão para um contínuo viga ou pórtico. Para cada membro ligando juntas i e.. j, os momentos finais podem ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^{FEM} \\ M_j^{FEM} \end{Bmatrix}$$

Esta é precisamente uma relação de membro rigidez da forma $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{f}_0^e$, onde $\mathbf{k}^e$ é o membro matriz de rigidez, $\mathbf{d}^e$ o vetor membro deslocamento, e $\mathbf{f}_0^e$ As forças fixas do fim.

Quando Maney montou as equações de deflexão da inclinação para uma estrutura inteira, forçando o equilíbrio em cada junta:

$$\sum M_i = 0 \quad \text{at each joint}$$

Ele estava implicitamente construindo um global $\mathbf{K}$ através da montagem de rigidez dos membros, produzindo o sistema:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$$

Onde $\boldsymbol{\theta}$ representa todas as rotações conjuntas e $\mathbf{M}$ Todos os momentos aplicados. Esta é precisamente a estrutura rigidez equação que seria formalizada na década de 1950 (Turner et al., 1956 PDF).

Da mesma forma, coeficientes de Mohr flexibilidade δ_{ij}- O deslocamento no local i devido à carga da unidade no local j- Formar um matriz de flexibilidade $\mathbf{F}$.. Müller-Breslau método das forças montou sistematicamente este matriz de flexibilidade e o inverteu (conceitualmente, resolvendo as equações de compatibilidade) para encontrar forças redundantes. O método das forças estava trabalhando com:

$$\mathbf{FX} = \boldsymbol{\Delta}$$

Relacionando forças redundantes $\mathbf{X}$ à compatibilidade deslocamentos $\boldsymbol{\Delta}$.

A dualidade entre os métodos de força e deslocamento - entre as formulações flexibilidade e rigidez - era inerente aos métodos clássicos, mas só seria totalmente reconhecida e explorada com as formulações matriciais da idade do computador.

CÓPIA PARA REVISÃO

11.7.2 Da Iteração à Solução Matrix

O método de distribuição do momento de Hardy Cross fornece talvez a ponte mais clara dos métodos clássicos para os computacionais. Cross reconheceu que as equações de deflexão, quando escritas na forma:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \sum_j C_{ij} M_j$$

Poderia ser resolvido iterativamente ao invés de simultaneamente. Sua distribuição e transporte de operações foram, em termos matriciais, uma iteração Gauss-Seidel aplicada ao sistema $\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$.

O que fez o método revolucionário de Cross não foi o princípio matemático (a iteração Gauss-Seidel era conhecida) mas a interpretação física: Os engenheiros podiam visualizar cada iteração como um processo físico de liberação e restrição de juntas. Essa visão física tornou o método acessível e confiável.

Na era do computador, esta mesma visão informaria os solucionadores iterativos para grandes sistemas elemento finito. A escolha entre solução direta (analógica à resolução de equações de deflexão de inclinação) e solução iterativa (distribuição analógica ao momento) dependeria do tamanho do problema, estrutura esparsidade, e precisão necessária - considerações antecipadas pela clássica Métodos.

11.7.3 Os limites do cálculo da mão: Preparando o palco para computação

Em 1950, os métodos de cálculo das mãos alcançaram seus limites práticos. Um 10-story pórtico submetido ao carregamento de vento pode exigir 40-50 rotações conjuntas como desconhecidos (método de deflexão) 5-10 ciclos de distribuição do momento com contabilidade cuidadosa, 2-3 dias de cálculo por um engenheiro qualificado, e verificação por Recalculamento independente para pegar erros de aritmética.

Para estruturas ainda mais complexas tridimensionais pórticos, cascas, ou estruturas com centenas de membros - métodos manuais tornaram-se impraticáveis, independentemente do quão inteligente a formulação.

O fator limitante não era conceitual, mas computacional: formando e resolvendo grandes sistemas de equações, mesmo com todos os insights de métodos energéticos, teoremas recíprocos e procedimentos iterativos, excedeu a capacidade humana dentro de escalas de tempo práticas de engenharia.

O computador digital, emergindo na década de 1950, removeria essa limitação. Mas criticamente, o quadro conceitual estava pronto: Relações para membros individuais, montagem através da compatibilidade e equilíbrio, solução por métodos diretos ou iterativos. A transformação do cálculo manual para análise computacional seria de escala e velocidade, não metodologia fundamental.

CÓPIA PARA REVISÃO

11.7.4 Conclusão: Continuidade e Transformação

A história dos métodos de cálculo manual revela uma poderosa verdade sobre engenharia científica: Os grandes avanços muitas vezes representam o refinamento e a sistematização das ideias existentes em vez de quebras revolucionárias. O método dos elementos finitos, quando emergiu na década de 1950, seria apresentado por alguns como uma inovação radical. No entanto, suas fundações conceituais — a montagem das propriedades dos membros através do equilíbrio e compatibilidade, princípios energéticos e dualidade de força e formulações deslocamento — estavam todas presentes no trabalho de Navier, Maxwell, Mohr, Castigliano, Müller-Breslau, Maney, e Cross.

O que mudou foi a capacidade de trabalhar em escala: para montar matrizes de rigidez para milhares de elementos, resolver sistemas de milhares de equações, visualizar e pós resultados de processos para estruturas tridimensionais complexas. O computador permitiu que engenheiros aplicassem princípios estabelecidos a problemas de complexidade sem precedentes.

A ponte do cálculo da mão para a análise elemento finito não era, portanto, um abismo que exigia um salto, mas um caminho contínuo de desenvolvimento. A próxima seção examina como este caminho se desdobra, como os métodos aperfeiçoados na era das regras de slides e folhas de cálculo transformados em métodos computacionais que definem o moderno análise estrutural.

11.8 Requisitos fundamentais de Análise estrutural

Para detalhes analíticos, consultar §17.1.2.2

Da Física às Equações de Campo

Tendo traçado o desenvolvimento histórico de análise estrutural do primeiro de Navier tratamento sistemático através das formulações matriciais de meados do século XX, paramos para destilar o princípio essencial que unifica todos os métodos encontrados Até agora... e todos os métodos ainda estão por vir. [2] (§10.5.7):

1. **Equilíbrio**:. Esforços internos deve equilibrar cargas externas. Nenhum elemento da estrutura pode experimentar forças desequilibradas; em cada ponto, o campo tensão deve satisfazer as equações de equilíbrio estático (ou dinâmico).

[2] Em estruturas estaticamente determinadas, equações de equilíbrio produzem a distribuição completa da força. As leis constitutivas e as condições de compatibilidade tornam-se necessárias apenas para cálculos deslocamento ou quando a estrutura é estaticamente indeterminada.

CÓPIA PARA REVISÃO

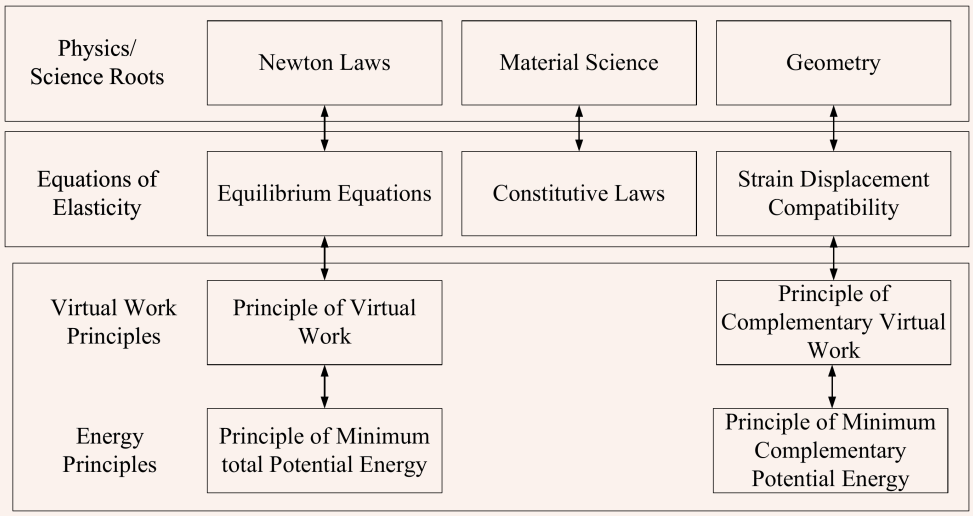


Figura 11.6: Da física newtoniana (topo) através de equações de campo (média) até princípios variacionais lagrangianos (baixo).

2. **Leis Constitutivas**:. Tensões deve se relacionar com deformações de acordo com as propriedades mecânicas do material. O material nos diz como força e deformação são conectadas, seja linearmente elásticas, plásticas ou não.
3. **Compatibilidade de Deslocamentos**:. As deformações devem ser geometricamente consistentes. A estrutura permanece contínua; Não se separa nem se sobrepõe. Deformações deve derivar de um único valor, campo contínuo deslocamento que respeita as condições de suporte e mantém a conectividade entre os membros.

Uma solução que viola qualquer um desses requisitos não é apenas aproximada... - É errado. Um campo tensão em perfeito equilíbrio é sem sentido se implica um material que não existe. Um campo deslocamento que é perfeitamente contínuo não nos diz nada se o resultado tensões violar o equilíbrio. Os três requisitos não são opções independentes das quais podemos escolher; Eles são demandas simultâneas que qualquer solução fisicamente realizável deve atender. Este princípio, simples como parece, é a pedra de toque contra a qual cada método de análise estrutural deve ser julgado.

Três Níveis de Formulação

Figura 11.6 mostra a arquitetura lógica de mecânica estrutural em três níveis descendentes, cada um representando um modo distinto de expressar a mesma realidade física subjacente.

No topo está o *Fundações físicas*A ciência crua da qual tudo mais deriva. As leis de Newton governam o equilíbrio das forças; A ciência do material caracteriza como as substâncias respondem ao carregamento; e a geometria limita como os corpos contínuos podem se

CÓPIA PARA REVISÃO

deformar. Estas não são construções matemáticas, mas verdades empíricas sobre o mundo físico, estabelecidas através da observação e experiência ao longo de séculos.

A fileira do meio representa o *Formulação Newtoniana ou vetorial*. Aqui as fundações físicas são lançadas na linguagem de equações diferenciais e campos vetoriais. As equações de equilíbrio expressam as leis de Newton como a divergência que desaparece do tensor tensão – um equilíbrio pontual de forças em cada local no contínuo. As leis constitutivas traduzem o comportamento material em relações algébricas entre tensores tensão e deformação. As equações deformação-deslocamento codificam a consistência geométrica como relações diferenciais entre o campo vetorial deslocamento e o tensor deformação. Esta formulação, desenvolvida principalmente por Cauchy, Navier e Saint-Venant no século XIX, trata as forças como as quantidades primárias e prossegue através de operações vetoriais e equações diferenciais parciais. É a "forma forte"da elasticidade... direta, intuitiva e ligada explicitamente à física do equilíbrio de força.

As fileiras de baixo representam o *Lagrangiano ou formulação de energia*.. Aqui o mesmo conteúdo físico é reformulado na linguagem das funções de energia escalar e princípios variacionais. Em vez de impor equilíbrio em sentido pontual através de equações diferenciais, caracterizamos a solução como a configuração que minimiza o potencial total de energia - ou equivalentemente, a configuração para a qual trabalho virtual desaparece. Esta profunda reformulação, originada por Lagrange e refinada por Green, Castigliano, entre outros, substitui vetores por escalares, equações diferenciais com declarações integrais, e equilíbrio de forças com estacionalidade energética. A abordagem Lagrangiana revela a profunda dualidade de mecânica estrutural e fornece o quadro natural para métodos aproximados e computacionais.

As duas formulações, Newtonian e Lagrangian, são matematicamente equivalentes. Cada solução obtida resolvendo as equações diferenciais da linha média pode igualmente ser obtida extremizando os funcionais de energia da linha inferior. No entanto, diferem profundamente em caráter: A formulação newtoniana fala de forças e seu equilíbrio; A formulação Lagrangiana fala de energia e sua minimização. O desenvolvimento histórico de análise estrutural pode ser lido como o reconhecimento gradual desta equivalência e a exploração de qualquer formulação que seja mais conveniente para o problema em questão.

A Dualidade da Formulação Lagrangeana

Dentro do próprio quadro Lagrangiano encontra-se uma outra dualidade, mostrada nos dois pilares no fundo da Figura 11.6.. Esta dualidade reflete a distinção entre deslocamento e força, entre quantidades cinemáticas e estáticas.

Do lado esquerdo, o Princípio de.. Lagrange, 1788 em sua *MéCanique Analitique* Para a estática de Bernoulli, Johann, 1725 E seu equivalente energético, o Princípio da Energia Potencial Mínima Total, fornece declarações variáveis enraizadas em deslocamento. Estes princípios afirmam que entre todos os campos cinematicamente admissíveis deslocamento, a

CÓPIA PARA REVISÃO

verdadeira solução minimiza o potencial total de energia, ou equivalentemente, que trabalho virtual desaparece para qualquer virtual compatível deslocamento. Começando com suposições deslocamento que satisfazem automaticamente a compatibilidade, invocando leis constitutivas para obter tensões, e então forçando o equilíbrio através da minimização de energia, esta abordagem garante que todos os três requisitos sejam cumpridos. Esta formulação tornou-se a base teórica da método dos deslocamentos e, em última análise, da moderna elemento finito análise.

Do lado direito está a formulação complementar. O Princípio do Complementar Trabalho virtual e o Princípio da Energia Potencial Mínima Complementativa fornecem declarações variacionais enraizadas em vigor. Estes princípios, desenvolvidos através do trabalho de Crotti, 1888 e.. Engesser, 1889, asseverar que entre todos os campos estaticamente admissíveis tensão, a verdadeira solução minimiza a energia complementar. Começando com as suposições tensão que satisfazem automaticamente o equilíbrio, invocando leis constitutivas para obter deformações, e então forçando a compatibilidade através da minimização de energia, esta abordagem dual também garante que todos os três requisitos são cumpridos - mas Os atravessa na ordem oposta. Esta formulação sustenta as abordagens método das forças e flexibilidade que dominaram análise estrutural antes da idade do computador. Castigliano, 1879 teoremas, que relacionam os derivados de energia a deslocamentos e forças respectivamente, forneceram as ferramentas práticas pelas quais engenheiros exploraram esses princípios.

O papel central das leis constitutivas

As leis constitutivas ocupam a posição central em todos os níveis desta arquitetura. Na formulação newtoniana, eles fornecem a ligação algébrica entre tensores tensão e deformação. Na formulação Lagrangiana, eles definem a densidade de energia deformação da qual todas as quantidades energéticas derivam. Sem o comportamento do material para conectar força e deformação, os dois lados de qualquer formulação permaneceriam desconectados—equilíbrio não diria nada sobre deslocamento, e compatibilidade não diriam nada sobre (tensão.

A estrutura simétrica da Figura 11.6, com suas vias duplas no nível Lagrangiano, explica por que o método rigidez e o método (flexibilidade devem produzir resultados idênticos quando corretamente aplicados. Eles são diferentes atravessais da mesma física subjacente – um começando com deslocamentos (satisfando compatibilidade primeiro) e trabalhando em direção ao equilíbrio, o outro começando com forças (sagradando equilíbrio primeiro) E trabalhando em busca de compatibilidade. Ambos invocam as leis constitutivas para preencher a lacuna. Nenhum método pode escapar dos três requisitos fundamentais; Eles apenas diferem na sequência de sua execução.

CÓPIA PARA REVISÃO

11.9 Resumo Cronológico dos Contribuintes

Tabela 11.1: Contribuidores para Análise estrutural: Um Resumo Cronológico

Autor	Data	Citação	Contribuição Principal
Fundações Variacionais			
Leonhard Euler (1707-1783)	1744		Cálculo de variações; Princípios variacionais subjacentes à FEM
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1788		Mecânica analítica; Formulação variacional de mecânica
Lorde Rayleigh (1842-1919)	1870s		Métodos de energia para vibração; precursor do método Rayleigh-Ritz
Walther Ritz (1878-1909)	1909	(Ritz, 1909)	Método de aproximação variacional; Modelo conceitual para deslocamento baseado em elementos finitos
Boris Galerkin (1871-1945)	1915	(Galerkin, 1915)	Método de resíduos ponderados; Liberação da FEM de princípios variacionais
Richard Courant (1888-1972)	1943	(Courant, 1943)	Funções de teste sobre subdomínios triangulares; Matrizes esparsas através de suporte compacto
Métodos de Cálculo da Mão: Método das forças			
Claude-Louis Navier (1785-1836)	1826	(Navier, 1826)	Primeiro tratamento sistemático de indeterminado estático vigas
Benoît Clapeyron (1799-1864)	1857	(Clapeyron, 1857)	Equação de três momentos para contínua vigas
Alfred Clebsch (1833-1872)	1862	(Clebsch, 1862a)	Cedo método dos deslocamentos para 3D pinos unidos treliças
James Clerk Maxwell (1831-1879)	1864	(Maxwell, 1864c)	Teorema reciproco; flexibilidade coeficientes
Christian Otto Mohr (1835-1918)	1868	(Mohr, 1868)	Teoremas de área do momento; conjugar analogia viga; O círculo de Mohr
Emil Winkler (1835-1888)	1868	(Winkler, 1875)	Teoria antecipada para mover cargas

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Mesa 11.1 Continuado da página anterior

Autor	Data	Citação	Contribuição Principal
Philipp von Seidel (1821-1896)	1873	(Seidel, 1873)	Método iterativo para sistemas lineares (Gauss-Seidel)
Alberto Castigliano (1847-1884)	1879	(Castigliano, 1879)	Métodos de energia; Teoremas relacionando deformação energia às forças e deslocamentos
Heinrich Manderla	1880		Análise iterativa usando rotações conjuntas como desconhecidos
Barré de Saint-Venant (1797-1886)	1883	(Saint-Venant, 1855c)	Comentário ligando Clebsch ao trabalho anterior de Navier
Heinrich Müller-Breslau (1851-1925)	1886	(Müller-Breslau, 1886)	Sistematização de método das forças; linha de influência princípio
Métodos de Cálculo da Mão: Método dos deslocamentos			
Axel Bendixen (1881-1946)	1914	(Bendixen, 1914)	Equações de deflexão inclinada (desenvolvimento europeu)
George A. Maney	1915	(Maney, 1915)	Método de deflexão de inclinação (Sistematização Americana)
Hardy Cross (1885-1959)	1930	(Cross, 1932)	Método de distribuição do momento
Joseph E. Goldberg	1934	(Goldberg, 1934)	Distribuição de inclinação para análise lateral de carga
Richard Southwell (1888-1970)	1935	(Southwell, 1935)	Método de relaxação
Diferenças finitas			
Karl Pearson (1857-1936)	1905	(Pearson, 1905)	Investigações experimentais em barragens
Lewis Fry Richardson (1881-1953)	1911	(Richardson, 1911)	Diferença finita método para análise tensão
Métodos Matrix e Elementos finitos			
John Argyris (1913-2004)	1954	(Argyris e Kelsey, 1960)	Matrix análise estrutural; Princípios energéticos; Bases de análise não lineares
M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp	1956	(Turner et al., 1956)	Método da rigidez direta; Plano triangular tensão elementos

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Mesa 11.1 Continuado da página anterior

Autor	Data	Citação	Contribuição Principal
Michael J. Turner (1909-1985)	1959	(Turner, 1959)	Exposição formal de método da rigidez direta
Ray W. Clough (1920-2016)	1960	(Clough, 1960)	Coined "método dos elementos finitos'; extensão para mídia contínua
Edward L. Wilson (1931-2024)	1960	(Wilson, 1960)	Primeira análise não linear elemento finito
Nathan M. Newmark (1910-1981)	1959		Método de tempo-passo para análise dinâmica
E.L. Wilson & R.W. Clough	1962	(Wilson e Clough, 1962)	Primeira análise dinâmica elemento finito (formulação matriz do método Newmark)
O.C. Zienkiewicz (1921-2009) & Y.K. Cheung	1965	(Zienkiewicz, 1967)	Primeiro livro elemento finito
J.S. Przemieniecki (1924-2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	Manual sistemático sobre matriz análise estrutural
Gilbert Strang & George Fix	1973	(Strang e Fix, 1973)	Teoria da Convergência Matemática para a FEM

11.9.1 Conclusão

Este capítulo traçou a evolução de análise estrutural do trabalho pioneiro de Navier em contínuo vigas através do desenvolvimento de métodos gerais para estruturas estaticamente indeterminadas, culminando com os métodos da matriz e análise elemento finito que dominam a prática contemporânea.

Vários temas emergem deste arco histórico:

De Específico para Geral: Métodos iniciais (vigas contínuos de Navier, os três momentos de Clapeyron) abordavam formas estruturais específicas. Aos poucos, surgiram métodos mais gerais, o teorema recíproco de Maxwell, os métodos energéticos de Castigliano, a sistemática de Müller-Breslau método das forças. Esta progressão para a generalidade atingiu seu ponto culminante em métodos matriciais, que tratam todas as estruturas (e finalmente todos continuam) dentro de uma estrutura unificada.

Complementaridade da força e métodos: O século XIX desenvolveu ambas as abordagens - método das forças (Maxwell, Mohr, Castigliano) e método dos deslocamentos (desvio de inclinação, distribuição do momento). Cada um oferecia vantagens dependendo da estrutura e das preferências do analista. Os métodos Matrix unificaram essas abordagens mantendo as vantagens computacionais do método dos deslocamentos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Teoria e computação: Cada grande avanço foi ativado pela tecnologia computacional disponível. As equações de Clapeyron podem ser resolvidas à mão. A distribuição do momento tornou prática a análise da história multi pórticos. Os métodos de matriz exigiam computadores digitais. A interação entre o insight teórico e a capacidade computacional levou ao progresso.

Visão física e rigor matemático: Os melhores métodos combinaram compreensão física (interpretações geométricas de Mohr, equilíbrio iterativo de Cross) com rigor matemático (teorema recíproco de Maxwell, princípios energéticos). Esta combinação fez métodos confiáveis e ensináveis.

Continuidade com Mecânica do contínuo: Ao longo de todo, análise estrutural permaneceu em terra no mecânica do contínuo estabelecido por Cauchy, Navier, e seus contemporâneos. Princípios energéticos, condições de compatibilidade, relações constitutivas, tudo remonta à teoria fundamental desenvolvida no início do século XIX.

O analista estrutural moderno, trabalhando com sofisticado software elemento finito, está no final de uma longa cadeia de desenvolvimento intelectual. O elemento matrizes de rigidez calculado automaticamente pelo software incorpora os mesmos princípios de elasticidade que Navier derivava dos primeiros princípios. O processo de montagem ecoa o teorema recíproco de Maxwell. Os algoritmos de solução implementam a filosofia método dos deslocamentos desenvolvida por Bendixen, Maney e Cross.

Entender esse desenvolvimento histórico fornece mais do que perspectiva histórica, ele oferece visão de por que os métodos funcionam como eles, quando são apropriados, e como eles podem ser estendidos. Os métodos clássicos permanecem valiosos para o ensino (fornecendo intuição física), para a análise preliminar (ofertando estimativas rápidas) e para validação (verificando os resultados do computador contra cálculos manuais).

Como análise estrutural continua a evoluir - para análise não linear, resposta dinâmica, otimização, Região de Confiança A quantificação se baseia em bases lançadas por dois séculos. A síntese alcançada pelos pioneiros do século XIX, transformando a matemática abstrata de mecânica do contínuo em métodos práticos de análise estrutural, criou uma disciplina que continua crescendo enquanto permanece fiel às suas raízes.

CÓPIA PARA REVISÃO



Vermeer, O Astrónomo (1668)

A mão do estudioso chega ao globo celestial: teoria finalmente entendendo a estrutura da realidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 12

Métodos Computacionais

Abstract

Este capítulo traça o desenvolvimento de métodos computacionais em métodos que requerem fundamentalmente a solução de sistemas discretizados de equações e, assim, tornou-se prático apenas com computação digital. Começando com o método de Richardson diferença finita para análise tensão (1911), seguimos o surgimento da matriz análise estrutural através das formulações energéticas de Argyris e a colaboração Boeing-Berkeley que produziu o método da rigidez direta. O capítulo culmina com a nomeação de Clough do método dos elementos finitos (1960), as primeiras aplicações para análise de represas, e o rápido desenvolvimento de capacidades não lineares e dinâmicas. A decisão NASTRAN (1969) de abandonar o método das forças marca o triunfo das formulações baseadas em deslocamento que definem a mecânica computacional moderna.

12.1 Métodos para continuar 438
12.1.1 Pearson e Richardson: Dam Tensão Análise (1905-1911) . 438
12.1.2 Métodos de Solução Iterativa 440
12.2 Matrix Análise estrutural 441
12.2.1 Kron: Análise de Redes e Análises Estruturais 441
12.2.2 Johann H. Argyris (1913-2004) 441
12.2.3 O Contexto Aeroespacial (Alas Delta): Anos 50 442
12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy . . 443
12.2.5 Boeing; Turner e o Método da rigidez direta 445
12.3 O Método dos elementos finitos . . 449
12.3.1 Fundações Matemáticas . . . 449
12.3.2 Prioridade e Terminologia: O que é (e não é) o Método dos elementos finitos 453
12.3.3 Ray Clough (1920-2016) . . . 454
12.3.4 Primeiros computadores e o Programa Berkeley 455
12.3.5 Norfork Dam: A primeira grande aplicação 455
12.3.6 Análise não linear e dinâmica (1960-1962) 456
12.4 Consolidação e disseminação 458
12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921-2009) 458
12.4.2 Conferência Wright-Patterson (1965) 458
12.4.3 Richard Gallagher (1927-1997) 459
12.4.4 O Debate Metodológico . . . 459
12.4.5 A Decisão NASTRAN (1969) 460
12.4.6 Generalização 461
12.4.7 Livros e Adoção Mundial . . 461
12.4.8 Impacto atual e Aplicações . 462
12.5 Resumo e Contribuições-chave . . . 463
12.6 Conclusão 465

CÓPIA PARA REVISÃO

12.1 Métodos para continuar

Os métodos de cálculo manual do Capítulo 11 Endereçado sistemas estruturais discretos – pórticos, treliças, contínuo vigas – mas enfrentou limitações fundamentais da escala computacional. Mesmo um multi-história moderada pórtico poderia envolver 40-50 deslocamento desconhecidos; Formando as equações e realizando eliminação e substituição manual poderia consumir vários dias de trabalho concentrado. Procedimentos iterativos reduziram esse fardo, mas permaneceram intensivos e não ofereceram nenhum caminho sistemático para problemas de complexidade arbitrária.

Paralelamente a estes desenvolvimentos em análise estrutural, uma linha separada de investigação procurou resolver as equações diferenciais parciais que governam a mídia contínua. O método diferença finita, que substitui os derivados por diferenças algébricas em uma malha, ofereceu um caminho numérico para problemas de elasticidade intratáveis por meios analíticos – abrindo possibilidades que os métodos manuais nunca poderiam abordar.

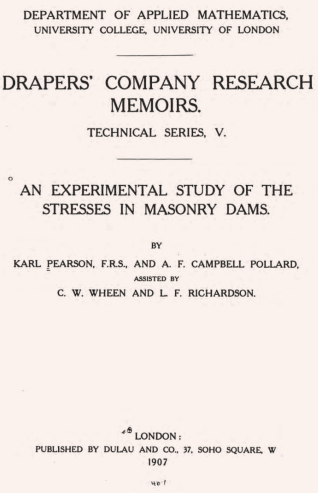
12.1.1 Pearson e Richardson: Dam Tensão Análise (1905-1911)

Karl Pearson (1857-1936), professor da University College London e uma figura fundadora de estatísticas matemáticas, foi confiada para completar o monumental trabalho de Todhunter e Pearson, 1893 quando ele ainda não tinha 40 anos. Curiosamente para um matemático, ele posteriormente se tornou atraído a problemas de elasticidade aplicados no início dos anos 1900. Entre eles estavam a distribuição tensões e cisalhamento em barragens de alvenaria, que ele investigou através de experimentos modelo e acompanhamento teórico trabalho (Pearson, 1905; Pearson et al., 1907), Fig. 12.1.

Pearson e colaboradores foram sinceros sobre os limites do que alcançaram. A introdução de suas memórias de 1907 enfatiza que foi gasto muito tempo buscando soluções aproximadas para contornos realistas de represas:

> O presente relatório sobre o trabalho em modelos de barragens conduzido durante os últimos três anos no Departamento de Matemática Aplicada na University College, Londres, contém, como deve ser frequentemente o caso em pesquisas semelhantes, um relato de quase nenhum dízimo do investigações, experimentais e teóricas, que foram realizadas ou tentadas. Muitas semanas, não seria exagero dizer que muitos meses, foram gastos na tentativa de obter soluções não exatas, mas aproximadas da Equação (iii) adequada (a) para os atuais tipos de contorno de represa, e (b) para o que temos verificado experimentalmente ser a forma geral de distribuição cisalhamento sobre a base. Se não fomos bem sucedidos até agora nestas tentativas, não se segue que o sucesso pode não atender mais tarde nossos ou provavelmente os esforços dos outros.

CÓPIA PARA REVISÃO



DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,
UNIVERSITY COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON

DRAPERS' COMPANY RESEARCH MEMOIRS.

TECHNICAL SERIES, V.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRESSES IN MASONRY DAMS.

BY

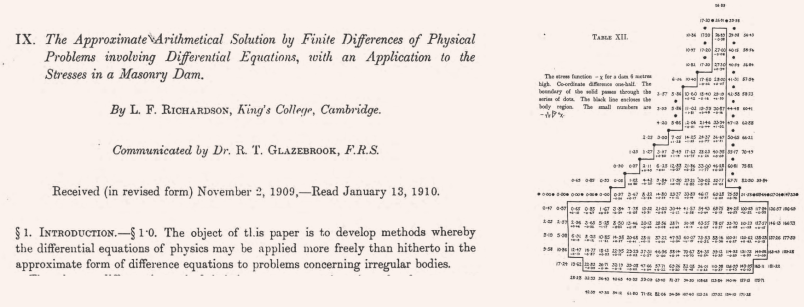
KARL PEARSON, F.R.S., AND A. F. CAMPBELL POLLARD,
ASSISTED BY
C. W. WHEEN AND L. F. RICHARDSON.

LONDON:
PUBLISHED BY DULAU AND CO., 37, SOHO SQUARE, W
1907

Figura 12.1: O trabalho experimental de Pearson em barragens (Pearson et al., 1907)

Pearson et al., 1907 An experimental study of the stress in Masonry Dams

Um dos assistentes reconhecidos neste trabalho foi Lewis Fry Richardson (1881-1953). Embora Pearson reconhecesse que seus esforços analíticos não foram bem sucedidos, ele reconheceu que o sucesso poderia ser alcançado mais tarde por outros – e na verdade foi Richardson que, em poucos anos, produziu uma das primeiras engenharia sistemática aplicações de substituição das equações diferenciais parciais de elasticidade por *Equações de diferença finita em uma malha*, com atenção prática para *Limites irregulares* E à realidade computacional de resolver o sistema algébrico resultante (Richardson, 1911), Fig. 12.2. [1]



IX. *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam.*

By L. F. Richardson, *King's College, Cambridge.*

Communicated by Dr. R. T. Glazebrook, *F.R.S.*

Received (in revised form) November 2, 1909,—Read January 13, 1910.

§ 1. Introduction.—§ 1·0. The object of this paper is to develop methods whereby the differential equations of physics may be applied more freely than hitherto in the approximate form of difference equations to problems concerning irregular bodies.

Table XII.

Figura 12.2: Análise de diferenças finitas de Richardson para um problema de represa tensão (Richardson, 1911)

A contribuição de Richardson neste contexto pode ser resumida como:

[1] O artigo de Richardson é frequentemente citado pelo seu volume anual (1911); O trabalho foi recebido em 1909 e lido no início de 1910.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

1. Lançando o problema contínuo em um conjunto finito de equações de ponto de malha através de diferenças centrais
2. Gerenciando a complexidade geométrica através de tratamento especial dos pontos limite
3. Resolvendo o sistema linear resultante por aproximação sucessiva – um método de solução semi-iterativa agora amplamente conhecido como *Richardson, método*Suplementado por ideias de malha e extrapolação que mais tarde se tornaram fortemente associadas com seu nome

A técnica de extrapolação, usando soluções em malhas sucessivamente refinadas para estimar a solução exata, é agora universalmente conhecida como *Richardson! Extrapolação* e continua sendo uma pedra angular da análise numérica.

Posição na computação estrutural. Para geometrias complexas, diferenças finitas para a discretização espacial seria mais tarde suplantado pela método dos elementos finitos. No entanto, diferença finita *O tempo está passando* (por exemplo, esquemas de diferença central, método de Newmark) permanece essencial na dinâmica estrutural, e muitas implementações de elementos finitos combinam a discretização espacial pela FEM com a integração temporal por diferenças finitas.

12.1.2 Métodos de Solução Iterativa

A discretização diferença finita de PDEs elípticas produz grandes sistemas de equações lineares com matrizes de coeficiente estruturadas esparsas. Richardson reconheceu que a solução direta (eliminação gaussiana) era impraticável para grandes sistemas e desenvolveu abordagens iterativas.

A conexão Gauss-Seidel. O método iterativo que Richardson empregou estava intimamente relacionado com o que Philipp Ludwig von Seidel tinha descrito em 1874 (Seidel, 1873 PDF) para resolver os sistemas que surgem de problemas mínimos quadrados (§L.2.3.1). O método, atualizando cada desconhecido em sequência usando os valores mais recentes de todos os outros desconhecidos, aparentemente tinha sido comunicado antes por Gauss para seu aluno Gerling (1823), embora Seidel possa ter sido inconsciente disso. A técnica ficou conhecida como *Gauss - método de Seidel*.§27.4 fornece um exemplo marcante da correspondência entre o método Moment-Distribution e o procedimento de análise iterativa Gauss-Seidel.

Sucessiva sobre-relaxação (SOR). Uma aceleração significativa foi alcançada introduzindo um parâmetro de sobre-relaxamento $\omega > 1$:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Onde $r_i^{(k)}$ é o resíduo do iA equação. A escolha ideal de ω depende das propriedades espectrais do problema; Para casos favoráveis, a SOR pode acelerar drasticamente a convergência em comparação com Gauss básico–Iteração de Seidel.

Estas técnicas iterativas se revelariam essenciais não só para problemas diferença finita mas mais tarde para os sistemas esparsos que surgem de discretizações elemento finito.

12.2 Matrix Análise estrutural

Os métodos de cálculo manual do Capítulo 11Deflexão, distribuição do momento... Contido implicitamente todos os ingredientes da matriz análise estrutural. O que era necessário era: (1) uma notação de matriz sistemática para organizar os cálculos, e (2) máquinas de computação capazes de lidar com os sistemas resultantes. Ambos surgiram na década seguinte à Segunda Guerra Mundial.

O computador não mudou o que análise estrutural calcula; mudou o que análise estrutural poderia calcular.

12.2.1 Kron: Análise de Redes e Análises Estruturais

Gabriel Kron (1901-1968), trabalhando na General Electric, desenvolveu métodos tensores para analisar redes elétricas que tiveram profunda influência sobre análise estrutural. Seu trabalho de 1944 sobre Análise Tecnorial e Circuitos Equivalentes de Estruturas Elásticas (Kron, 1944) demonstrou profundas analogias entre redes elétricas e sistemas estruturais.

O método de Kron de rasgar um grande sistema em subsistemas, analisando cada um separadamente, então reconectando-se através de condições de compatibilidade... antecipadas técnicas modernas de subestruturação em análise elemento finito. Sua notação tensor, embora inicialmente desconhecida para engenheiros estruturais, forneceu uma estrutura matematicamente rigorosa para a transformação entre sistemas de coordenadas.

12.2.2 Johann H. Argyris (1913-2004)

John Argyris (1913-2004), Fig. 12.14a, publicou uma série de artigos em quatro números de *Engenharia de Aeronaves* durante 1954-1955 que representam um marco importante na formalização da matriz análise estrutural. Estes foram recolhidos e expandidos em Argyris e Kelsey, 1960 .

Argyris se baseou explicitamente nos teoremas de energia de Castigliano e nos princípios recíprocos de Maxwell, lançando-os em notação matricial adequada para computação sistemática. Ele enfatizou a dualidade entre as formulações de força (flexibilidade) e deslocamento (rigidez:

CÓPIA PARA REVISÃO

> A analogia entre os desenvolvimentos para as flexibilidades e rigidezes... mostra claramente que paralelo à análise de estruturas com forças como desconhecidas deve haver uma teoria correspondente com deformações como incógnitas.
>
> Argyris e Kelsey, 1960 Energy theorems and structural analysis

A apresentação lado a lado em sua mesa II (Fig. 12.7a) demonstraram que o clássico método das forças e método dos deslocamentos passaram por passos exatamente análogos – um esclarecimento conceitual que ajudou os engenheiros a entender a unidade matemática subjacente às diferentes abordagens.

As contribuições de Argyris incluíam:

- Notação de matriz sistemática para análise estrutural
- Exposição clara de princípios energéticos em forma de matriz
- Framework conectando métodos clássicos à implementação computacional
- Fundação para análise não linear através de formulações incrementais

12.2.3 O Contexto Aeroespacial (Alas Delta): Anos 50

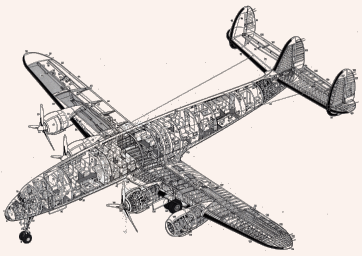
Contexto histórico A rápida transição, durante o final dos anos 1940 e início dos 1950, de asas retas convencionais para configurações varridas e delta-asa criou problemas análise estrutural para os quais métodos clássicos viga não eram mais adequados. Asas Delta combinaram baixas proporções de aspecto, folhas finas de cobertura, spars não paralelos, e caminhos de carga altamente redundantes, produzindo forte acoplamento entre dobra em tempo real, flexão em acordes e torção. Os padrões de deformação resultantes tensão e não poderiam ser capturados com segurança usando idealizações unidimensionais simplificadas, particularmente na região da raiz e em layouts multiespaciais. Essas deficiências não eram meramente teóricas: Eles limitaram diretamente a precisão e eficiência do projeto de aeronaves em um momento em que as margens de desempenho estavam diminuindo e a iteração experimental era cara.

O impulso para a computação análise estrutural veio em grande parte da indústria aeroespacial. No início dos anos 50, pressurizou aviões comerciais e militares (Fig. 12.3) tornaram-se complexos conjuntos de costelas, esparsos e painéis finos formando configurações altamente redundantes viga- e casca-como.

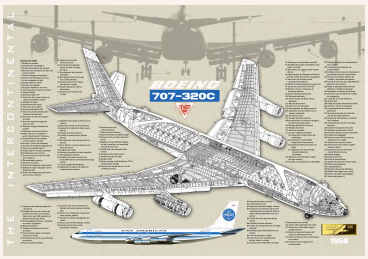
Para tais estruturas, o clássico método das forças-construído sobre as obras de MaxwellMohrE CastiglianoEra adequado quando painéis podiam ser modelados conservadoramente como porta-aviões. Com seleção criteriosa de sistemas de força redundantes e validação experimental, até mesmo asas varridas de alta proporção poderiam ser acomodadas (Felippa, 2001). O clássico método dos deslocamentos Também encontrou aplicação em vibração e análise aeroelástica, onde cálculos exatos deslocamento eram essenciais.

No entanto, os requisitos militares das aeronaves estavam mudando. Asas em forma de

CÓPIA PARA REVISÃO



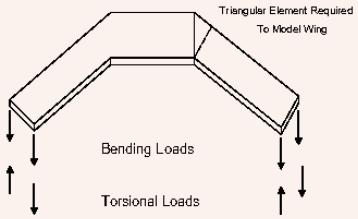
(a) Lockheed Constellation (1943-1958)



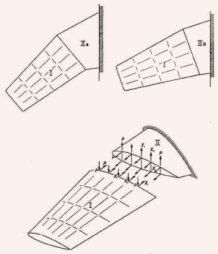
(b) Boeing 707 (1958-1979)

Figura 12.3: Aeronaves comerciais da década de 1950

Delta para vôo supersônico requeriam elementos bidimensionais de geometria arbitrária, triangular e quadrilátero, que não podiam mais ser idealizados como membros unidimensionais (Fig. 12.4a). Este 'desafio delta-asa' impulsionaram o desenvolvimento de novas abordagens analíticas e computacionais.



(a) Estrutura de teste da asa delta (Clough e Wilson, 1999)



(b) Flexibilidade-based soluções tentativas (Argyris e Kelsey, 1960)

Figura 12.4: O problema da asa delta e tentativas de solução precoce

12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy

Durante o início da Guerra Fria, o National Bureau of Standards (NBS, antecessor do NIST) manteve uma estreita e sustentada colaboração de pesquisa com o Bureau of Aeronautics dos EUA. Marinha. Requisitos navais para configurações de alta velocidade, varridas e delta-asa colocaram exigências sem precedentes em métodos análise estrutural, particularmente para estruturas de ar altamente redundantes, de paredes finas onde pressupostos clássicos simplificadores quebraram. Através de programas de pesquisa patrocinados conduzidos na NBS e financiados pela Marinha, grupos especializados - como o Grupo de Estruturas Aeronaves liderado por Samuel Levy - desenvolveram formulações analíticas avançadas explicitamente projetadas para equipamentos de computação digital emergentes.

CÓPIA PARA REVISÃO

Levy, 1953 é um papel de referência, infelizmente raramente citado fora da literatura aeroespacial. Representa uma das primeiras tentativas sistemáticas de formular o problema da asa delta de uma forma computacionalmente tratável, orientada para a matriz e anterior ao trabalho da Boeing discutido abaixo.

> O método de análise é um de deformações consistentes. A carga transportada pela asa é considerada a soma de (1) que carregava pelos espaçamentos e folha de cobertura em dobra temporal, (2) que transportava pelas costelas e chapa de cobertura na flexão entre acordes, e (3) que levava pela folha de tampa em torção. A carga transportada por cada um desses três mecanismos é determinada em termos de deflexões nas junções das costelas e esparsas. A soma dessas cargas, expressa em termos de deflexões, é igualada às forças externas aplicadas nas junções. As equações que resultam são resolvidas para as deflexões nas junções. Das deflexões, a flexão e torção tensões são por sua vez determinadas, dando assim uma completa deformação e análise da asa.
>
> Levy, 1953 *"Structural analysis and influence coefficients for delta wings"*

O método é baseado no princípio de *Deformações consistentes*, em que a resposta estrutural da asa é expressa inteiramente em termos de um conjunto limitado de variáveis deslocamento, ou seja, as deflexões nas junções das costelas e esparsas. A asa é decomposta conceitualmente em mecanismos de carga interagindo: Curva de spars e folhas de cobertura, dobra de cordas de costelas e lençóis de cobertura e torção transportada principalmente pelas folhas de tampa (Fig. 12.5). Cada mecanismo contribui esforços internos expressa em termos da mesma deflexão de junção, assim forçando a compatibilidade cinemática.

Equilíbrio é imposto por igualar, em cada junção, a soma do esforços internos às cargas aplicadas externamente,

$$P_r = L_r^S + L_r^R + L_r^T,$$

que leva, em conjunto sobre todas as junções, para a relação global

$$\{P\} = [A]\{y\},$$

Onde $[A]$ é um composto matriz de rigidez obtido pela sobreposição dos três mecanismos. As deflexões são então obtidas de

$$\{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

após o qual esforços internos e tensões são recuperados por substituição.

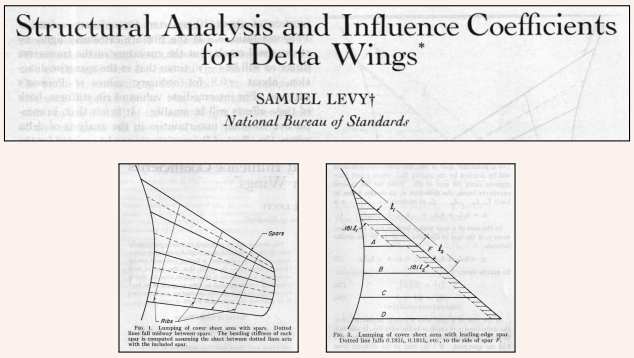
No nível de membros individuais, Levy também escreve relações locais de conformidade $\{y\} = [\delta]\{L\}$ e a forma equivalente rigidez $\{L\} = [\delta]^{-1}\{y\}$.. Visualizado historicamente, a formulação de Levy é centrada em matriz e baseada em deslocamento, mas permanece específica do problema: a decomposição em mecanismos estruturais é adaptada para asas delta, e a abstração do elemento ainda não é universal. Seu trabalho é, portanto, melhor entendido como um passo crucial de transição para a análise baseada em rigidez, ao invés de como um método dos elementos finitos no sentido moderno.

CÓPIA PARA REVISÃO

Levy (1953): Método de Deformações Consistentes

$$\{P\} = [A]\{y\}, \qquad \{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

onde o equilíbrio nodal é escrito diretamente em termos de deflexões de junção, e o composto matriz de rigidez $[A]$ é obtida por sobreposição de contribuições com base em mecanismos rigidez (flexão, dobra de costelas, torção).


Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*

SAMUEL LEVY†

National Bureau of Standards

Figura 12.5: Detalhes de.. Levy, 1953

12.2.5 Boeing; Turner e o Método da rigidez direta

Em junho de 1952, Ray W. Clough (1920-2016), então um jovem professor assistente da UC Berkeley, juntou-se à Boeing como membro da Faculdade de Verão sob a supervisão de M. Jonathan Turner (Clough, 2004). Atribuídos à Unidade de Dinâmica Estrutural, Clough foi encarregado de analisar as características de vibração e deflexão de um modelo estrutural grande delta-asa. As tentativas iniciais de representar a asa como uma assembleia de elementos unidimensionais viga mostraram-se inadequadas, confirmando as limitações das idealizações clássicas já identificadas em pesquisas contemporâneas delta-asa.

A principal jogada conceitual de Turner, articulada explicitamente em Turner et al., 1956, foi para pórtico análise estrutural inteiramente em termos de nodal deslocamentos ao invés de esforços internos. Duas condições foram impostas como fundamentais: equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações. Quando Nodal deslocamentos são tomados como desconhecidos, a determinação estática torna-se irrelevante; O campo correto deslocamento é aquele para o qual o equilíbrio está satisfeito.

O método é introduzido lembrando a relação elementar para uma mola elástica linear,

$$F = k\,\delta,$$

E estendendo-o para sistemas de liberdade multi-grau usando notação matriz,

$$\{F\} = [K]\{\delta\}.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

O Global matriz de rigidez $[K]$ é obtido por soma direta do matrizes de rigidez de unidades estruturais individuais - vigas, esparsas, costelas, endurecimentos e placas - cada uma se refere a um sistema comum de coordenadas nodais.

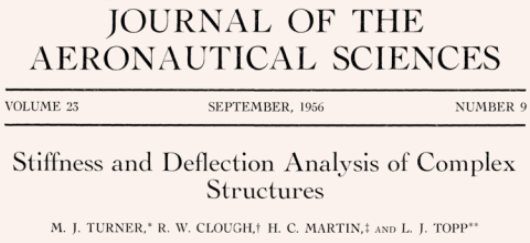
Em operações, Turner define a construção de $[K]$ pilar-por-pilar: Enquanto todos os nodais graus de liberdade são mantidos fixos, um único componente deslocamento é imposto em um nó; As forças necessárias para fazer cumprir esse deslocamento povoam o correspondente pilar. Antes da imposição de condições de contorno, a matriz é singular, refletindo modos rígidos do corpo. As condições de suporte são impostas eliminando componentes prescritos, produzindo um sistema reduzido não-singular.

Turner (1956-1959): Método da rigidez direta

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \qquad [K] = \sum_e K^e,$$

onde cada elemento matriz de rigidez K^e contribui para o global rigidez por superposição. Deslocamentos são resolvidos primeiro; esforços internos e tensões seguir por substituição.

Turner apresentou a primeira exposição formal deste procedimento em uma reunião do Painel de Estruturas e Materiais AGARD em Aachen (Turner, 1959), enfatizando a natureza algorítmica da montagem e sua adequação para computação digital. Ele observou ainda que problemas não lineares, decorrentes de grandes deflexões ou efeitos térmicos, poderiam ser tratados através da linearização incremental com atualizações rigidez, antecipando desenvolvimentos posteriores em análises não lineares.


JOURNAL OF THE
AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23 SEPTEMBER, 1956 NUMBER 9

Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP**

Figura 12.6: Matrix análise estrutural (Turner et al., 1956 PDF)

A consolidação final do método da rigidez direta ocorreu não através de um novo avanço conceitual, mas através de sua codificação sistemática. Este papel foi cumprido por Przemieniecki em seu livro de referência *Teoria da Matriz Análise estrutural* (Przemieniecki, 1968 PDF). Com base nos desenvolvimentos da Boeing e na formulação de Turner AGARD, Przemieniecki apresentou o método rigidez como uma estrutura unificada baseada em elementos aplicável a treliças, vigas, pórticos, grades e placas. Ao padronizar a notação, esclarecer o particionamento e eliminação de restrições da matriz, e enfatizar a implemen-

CÓPIA PARA REVISÃO

tação algorítmica, o livro transformou o que havia sido uma metodologia avançada de pesquisa em uma ferramenta de engenharia ensinável e amplamente adotável. Através deste trabalho, o método da rigidez direta tornou-se a fundação da matriz moderna análise estrutural e o precursor imediato de formulações elemento finito.

Para detalhes analíticos, consultar §42.2.2

As principais inovações do método foram:

- **Elemento Matrizes de rigidez:** Cada membro estrutural é caracterizado por um matriz de rigidez $[k]$ forças finais do elemento para acabar deslocamentos: $\{f\} = [k]\{d\}$
- **Transformação para coordenadas globais:** As matrizes de elementos, naturalmente expressas em coordenadas locais, são transformadas em um sistema comum de coordenadas globais
- **Montagem por Superposição:** A estrutura global $[K]$ é montado somando contribuições de todos os elementos, respeitando a conectividade
- **Particionamento e Solução:** A equação mestre rigidez $\{F\} = [K]\{D\}$ é dividido para separar conhecido e desconhecido deslocamentos, em seguida, resolvido por desconhecidos
- **Substituição de volta:** Forças finais do elemento são recuperadas do elemento matrizes de rigidez e calculadas deslocamentos

O termo "direto"distingue este método dos métodos anteriores que exigia determinar quais forças eram redundantes. O método rigidez funciona diretamente com deslocamentos como desconhecidos, não exigindo identificação de despedimentos. Cada estrutura, determinada ou indeterminada, é tratada uniformemente (Przemieniecki, 1968 PDF).

O poder do método da rigidez direta está em seu caráter algorítmico sistemático:

1. Defina elementos e nós
2. Gerar elemento matrizes de rigidez (de fórmulas padrão)
3. Transforme-se em coordenadas globais
4. Reúna-se globalmente
5. Aplique condições de contorno
6. Resolva $[K]\{D\} = \{F\}$ Por deslocamentos
7. Recupere forças de elementos

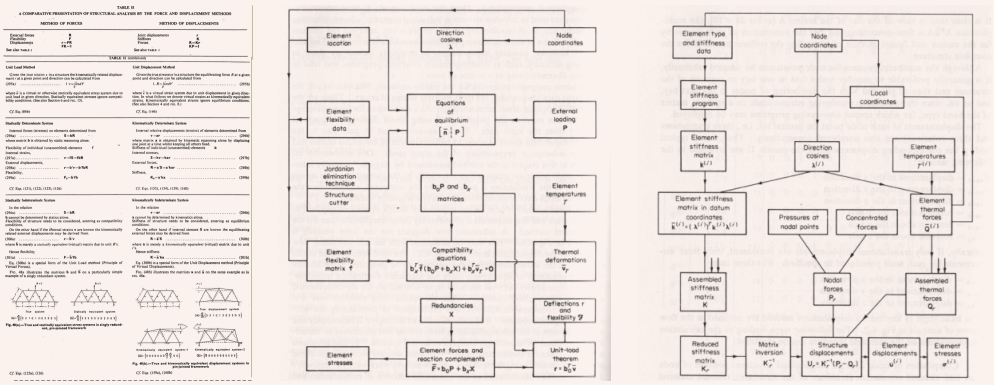
Cada passo segue regras determinísticas, tornando o método ideal para a implementação do computador. Em 1960, essa abordagem estava sendo codificada em programas análise estrutural.

CÓPIA PARA REVISÃO

12.2.5.1 Flexibilidade versus Rigidez: Um Debate Continuado

Desde meados da década de 1950, houve um debate em curso sobre a supremacia do método flexibilidade versus o método rigidez.

A apresentação lado a lado da tabela II em Argyris e Kelsey, 1960, Fig. 12.7, tentou mostrar que o clássico método das forças e método dos deslocamentos estavam passando exatamente pela mesma sequência de passos. Mais tarde, Przemieniecki, 1968[2] publicou seu livro seminal comparando os dois métodos com numerosos exemplos.



(a) A comparação tabular de Argyris (b) Método das forças (c) Método dos deslocamentos

Figura 12.7: Comparação de força e aproxima-se (Argyris e Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968)

Alguns engenheiros, eventualmente capazes de escrever programas Fortran, concluíram que os métodos tinham capacidades semelhantes e selecionar um ou outro era uma questão de gosto. A maioria dos grupos de estruturas, sustentando a tradição, optou pelo clássico método das forças. Mas os poucos engenheiros que tentaram implementar ambos notaram uma diferença significativa. E isso foi antes do método da rigidez direta, que não tem equivalente duplo sob a decomposição, apareceu (Felippa, 2001).

Códigos clássicos do legado método das forças continuaram a ser usados em muitas empresas aeroespaciais. A divisão lembra a resposta de Einstein quando perguntado sobre a reação do velho guarda à nova física: Não os convencemos. "Engenheiros estruturais contratados nos anos 1940 e 1950 estavam frequentemente em cargos gerenciais na década de 1960, favorecendo o clássico método das forças. Afinal, tudo que era necessário eram algoritmos para ter o computador selecionado bons redundantes automaticamente. Um esforço substancial foi gasto com aqueles cortadores estruturais durante os anos 60.

[2] Que introduziu muitos conceitos e anotações atualmente usados hoje. Continua sendo um dos melhores livros sobre o assunto.

CÓPIA PARA REVISÃO

12.3 O Método dos elementos finitos

Transição: De direto Rigidez a Elementos finitos. No final da década de 1950, o método da rigidez direta tinha atingido uma forma algorítmica madura e totalmente geral. As estruturas foram idealizadas como conjuntos de componentes discretos, elemento matrizes de rigidez foram montados em um sistema global, condições de contorno foram impostas pela eliminação da restrição, e deslocamentos foram resolvidos primeiro com forças recuperadas por Substituição. O que permaneceu não resolvido não foi o procedimento computacional, mas sua interpretação e escopo. Em particular, o método da rigidez direta tinha sido desenvolvido em grande parte no contexto de estruturas esqueléticas e enrijecidas casca, onde os elementos correspondiam naturalmente a membros físicos identificáveis.

O passo conceitual decisivo para o método dos elementos finitos consistiu em reconhecer que a mesma estrutura baseada no rigidez poderia ser aplicada sistematicamente ao *mídia contínua* introduzindo subdivisão artificial em elementos dotados de campos assumidos deslocamento. Este passo matriz unificada análise estrutural com variações e teorias de aproximação desenvolvidos independentemente em matemática e mecânica. O método dos elementos finitos assim emergiu não como uma substituição do método da rigidez direta, mas como sua extensão natural de assembleias estruturais discretas para continuar de geometria arbitrária.

12.3.1 Fundações Matemáticas

Os métodos de matriz desenvolvidos na Boeing continham todos os ingredientes do que se tornaria o método dos elementos finitos. O que faltava era a estrutura conceitual unificadora ligando a prática de engenharia à teoria matemática. Esta estrutura se desenvolveu em paralelo através do trabalho de matemáticos.

Ritz (1878-1909). Walther Ritz (1878-1909) desenvolveu uma técnica de aproximação para problemas variacionais: Expressar a função desconhecida como uma combinação linear de funções admissíveis, com coeficientes determinados através da minimização de energia (Ritz, 1909).[3]

Galerkin (1871-1945). Boris Galerkin (1871-1945) métodos de aproximação estendidos além de problemas variacionais através do método dos resíduos ponderados (Galerkin, 1915):. Exige que o resíduo da equação governante seja ortogonal para funções de peso escolhidas.

Em computação mecânica estrutural, o método de Galerkin não é meramente uma generalização histórica das técnicas variacionais; é o princípio unificador que liga diferenças finitas, os métodos de energia, e elementos finitos. Ao aplicar o equilíbrio em um sentido integral através da ortogonalidade do resíduo ao espaço de variações admissíveis, Galerkin fornece a forma fraca usada na prática. Quando as funções de teste e peso são escolhidas

[3] Lorde Rayleigh Reivindicou prioridade, levando ao nome "Rayleigh– método Ritz.'

CÓPIA PARA REVISÃO

idênticas (a escolha Bubnov-Galerkin), a formulação resultante é precisamente aquela empregada na análise padrão deslocamento baseada em elemento finito. Neste sentido, o método dos elementos finitos é melhor visto não como uma invenção separada, mas como uma discretização Galerkin específica aplicada em espaços de aproximação polinomial por partes.

Para detalhes analíticos, consultar §52.3.4

Alexander Hrennikoff (1941). Alexander Hrennikoff (1896 - 1984), um engenheiro estrutural russo-canadense, apresentou o *analogia de treliça* para resolver problemas de elasticidade (Hrennikoff, 1941). Seu método "framework"' substituiu uma placa ou membrana contínua por uma rede equivalente de elementos de barras unidimensionais, cujo comportamento coletivo aproximado do contínuo. Embora limitado a domínios retangulares e incapaz de lidar com geometrias arbitrárias, a abordagem estabeleceu o conceito fundamental de discretizar um domínio contínuo em uma assembleia de elementos mais simples – o núcleo conceitual da análise elemento finito.

Richard Courant (1888-1972). Richard Courant (1888-1972), trabalhando independentemente de Hrennikoff e abordando o problema sob uma perspectiva puramente matemática, introduziu funções experimentais por partes definidas sobre sub-regiões triangulares em seu discurso de 1943 ao Mathematical americano Sociedade (Courant, 1943 PDF).

Courant começou revisando o clássico método Rayleigh-Ritz, no qual se busca minimizar um funcional $I(\phi)$ Aproximando a solução através de combinações lineares de funções coordenadas $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, Fig. 12.8:

$$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n \tag{12.1}$$

Os coeficientes c_i são determinados substituindo esta expressão no problema variacional e resolvendo o sistema resultante de equações lineares decorrentes da condição de minimização:

$$I(\phi_n) = F(c_1, \ldots, c_n) = \min . \tag{12.2}$$

Embora teoricamente sólido, Courant observou as limitações práticas desta abordagem:

Ritz's construction proceeds as follows: We start with an arbitrarily chosen system of "*coordinate functions*"

(13) $$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots,$$

which should satisfy the two conditions:

(a) Any linear combination

(14) $$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$$

of them is admissible in the variational problem.

(b) They should form a complete system of functions in the sense that *any* admissible function ϕ and its relevant derivatives may be approximated with any degree of accuracy by a linear combination of coordinate functions and of their corresponding derivatives, respectively.

If we begin with such a system of coordinate functions, it is clear that for n sufficiently large and for a suitable choice of the coefficients $c_1, c_2, \cdots, c_n$ of (14) we can find admissible functions ϕ_n for which $I(\phi_n)$ differs arbitrarily little from d. In other words, it is possible to find a minimizing sequence $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$ as a sequence of linear combinations of the coordinate functions. In order to obtain such a minimizing sequence we choose the c_i in the following manner. We consider any function ϕ_n defined by (14) and substitute it in our variational problem. $I(\phi_n)$ then becomes a function $F(c_1, \cdots, c_n)$ of the n parameters c_i which we may now determine from the ordinary minimum problem of the calculus

(15) $$I(\phi_n) = F(c_1, \cdots, c_n) = \min.$$

Figura 12.8: Courant apresenta *Funcreções de teste* (Courant, 1943 PDF)

CÓPIA PARA REVISÃO

> A dificuldade que desafia a habilidade inventiva do matemático aplicado é encontrar funções de coordenadas adequadas e estimar a precisão do resultado. De um ponto de vista prático, quase todo sucesso depende da seleção das funções coordenadas. Se essas funções forem escolhidas sem considerar a individualidade do problema, a tarefa da computação se tornará inútil.
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

Para detalhes analíticos, consultar §48.6

Courant então se voltou para os métodos diferença finita, observando sua superioridade em muitos casos porque "diferenças finitas estão ligados diretamente aos valores da própria função sem um meio de interceder, como a coordenação mais ou menos arbitrária Esta observação levou-o a propor uma reinterpretação crucial que se tornaria o fundamento conceitual do método dos elementos finitos:

> Se os problemas variacionais contêm derivados não superiores à primeira ordem o método de diferença finita pode ser subordinado ao método Rayleigh-Ritz considerando na competição apenas funções ϕ que são lineares nas malhas de uma subdivisão da nossa rede em triângulos formados por diagonais dos quadrados da rede. Para tais funções poliédricas as integrais se tornam somas expressas pelo número finito de valores de ϕ nos pontos de rede e as condições mínimas tornam-se nossas equações diferentes.
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

A visão chave aqui é profunda: Em vez de selecionar funções globais coordenadas que abrangem todo o domínio, pode-se usar simples *linear em partes* Funções definidas localmente sobre sub-regiões triangulares. Sobre cada triângulo, a função ϕ Varia linearmente, e a continuidade é imposta nas bordas compartilhadas entre triângulos adjacentes. As quantidades desconhecidas tornam-se simplesmente os valores de função ϕ_i nos vértices da triangulação. Quando tais funções lineares (poliédricas) são substituídas em uma integral variacional, como a integral de Dirichlet

$$D(v) = \iint_B \left(v_x^2 + v_y^2 \right) dx\, dy, \tag{12.3}$$

a integral reduz-se a uma soma finita envolvendo apenas os valores nodais, e as condições variacionais produzem um sistema de equações algébricas lineares para esses desconhecidos.

Courant reconheceu imediatamente a generalização que esta interpretação oferecia:

> Tal interpretação sugere uma ampla generalização que proporciona grande flexibilidade e parece ter considerável valor prático. Em vez de começar com uma rede quadrática ou retangular podemos considerar desde o início quaisquer superfícies poliédricas com bordas sobre uma rede arbitrariamente

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

> escolhida (de preferência triangular). Nossas integrais novamente se tornam somas finitas, e a condição mínima serão equações para os valores de ϕ nos pontos de rede. Embora essas equações pareçam menos simples do que as equações de diferença originais, nós ganhamos a enorme vantagem de melhor adaptabilidade aos dados do problema e assim podemos obter bons resultados com muito pouco cálculo numérico.
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

No apêndice de seu endereço, Courant demonstrou o método sobre o problema da torção Saint-Venant para uma seção transversal multi-conectada - um quadrado pórtico com um buraco quadrado. Explorando simetria para reduzir o domínio computacional a um oitavo da seção transversal, ele aplicou tanto o método clássico Rayleigh-Ritz com funções de teste polinomial e sua nova abordagem triangular. Para este último, ele relatou:

> Nos triângulos de rede nossas funções foram escolhidas como lineares, de modo que o problema variacional resulta em equações lineares para o u_i.
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

Os resultados mostraram rápida convergência da torção rigidez S:. Caso a) com duas incógnitas rendeu $S = 0.344$; Caso b) com três incógnitas dadas $S = 0.352$; Caso c) com cinco desconhecidos produzidos $S = 0.353$; e caso d) com nove desconhecidos – correspondente ao método comum diferença finita – também deu $S = 0.353$.. Notavelmente, até mesmo a triangulação mais grosseira com apenas dois valores nodais desconhecidos capturou o rigidez para dentro de 3% do resultado convergente.

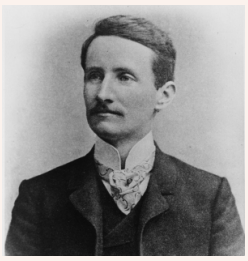
Courant concluiu com uma avaliação da ampla aplicabilidade do método e uma declaração voltada para o futuro:

> Estes resultados mostram em si mesmos e por comparação que o método generalizado de redes triangulares parece ter vantagens. . . É obviamente adaptável a qualquer tipo de domínio, muito mais do que o procedimento de Rayleigh-Ritz em que a construção de funções admissíveis normalmente ofereceria obstáculos decisivos. Em uma publicação separada será mostrado como o método pode ser estendido também para problemas de placas e outros problemas envolvendo derivados mais elevados.
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

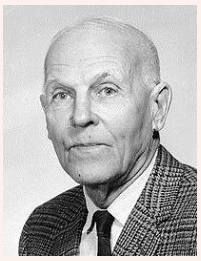
Esta promessa de extensão para problemas de placa –requerendo C^1 continuidade para equações de quarta ordem – seria muito mais desafiador do que Courant talvez antecipado, e ocuparia elemento finito pesquisadores por décadas vindouras. No entanto, a estrutura conceitual essencial estava agora em vigor: soluções aproximadas para os problemas de valor limite poderiam ser construídas subdividindo o domínio em elementos geométricos simples, definindo funções de teste polinomial sobre estes elementos, e determinando os parâmetros nodais desconhecidos através do Princípio variacional.

Levada em isolamento, a formulação de Courant tem sido frequentemente citada - retros-

CÓPIA PARA REVISÃO


(a) Walther Ritz (1878-1909)


(b) Boris Galerkin (1871-1945)


(c) Hrennikoff (1896-1984)


(d) Richard Courant (1888-1972)

Figura 12.9: Fundamentos matemáticos do método dos elementos finitos

pectivamente - como a primeira aparição da idéia elemento finito. Alegações semelhantes foram feitas, de diferentes perspectivas disciplinares, para vários dos desenvolvimentos apenas revistos. Para evitar confusão decorrente de tal rotulagem retrospectiva, é útil esclarecer explicitamente como terminologia e prioridade são usadas no presente relato histórico.

12.3.2 Prioridade e Terminologia: O que é (e não é) o Método dos elementos finitos

Na literatura histórica, as disputas prioritárias em torno do método dos elementos finitos muitas vezes surgem de diferentes usos da terminologia ao invés de discordância substantiva sobre a matemática subjacente ou algoritmos. Muito antes do termo "elemento finito" ser introduzido, matemáticos haviam desenvolvido poderosas técnicas de aproximação baseadas em princípios variacionais (Ritz), resíduos ponderados (Galerkin) e funções experimentais por partes sobre subdomínios (Corante). Essas contribuições formam fundações matemáticas essenciais, mas não constituem por si mesmas um método computacional geral para análise de engenharia.

Por outro lado, as formulações de matriz rigidez desenvolvidas na engenharia aeroespacial durante os anos 1950 forneceram um procedimento algoritmo completo para montagem e resolução de grandes sistemas de equações de equilíbrio, mas foram inicialmente enquadradas em termos de estrutura Componentes em vez de contínua discretizada. O método dos elementos finitos emergiu quando estas duas linhas de desenvolvimento foram unificadas: os meios contínuos foram discretizados em sub-regiões finitas dotadas de campos assumidos deslocamento, e seu comportamento era regido pelos mesmos princípios de montagem baseados em rigidez usados anteriormente para estruturas discretas.

Neste relato, o método dos elementos finitos é portanto entendido não como uma única invenção atribuível a um indivíduo, mas como a convergência da teoria da aproximação matemática, matriz análise estrutural, e computação digital. As reivindicações prioritárias

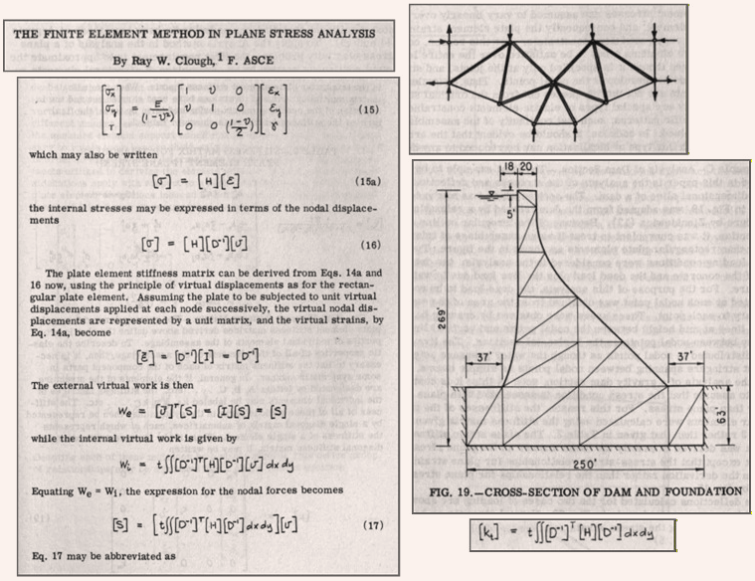
CÓPIA PARA REVISÃO

dependem de qual aspecto, matemático, algorítmico ou terminológico, é enfatizado; A clareza é melhor servida distinguindo esses papéis explicitamente.

12.3.3 Ray Clough (1920-2016)

A 2a Conferência da ASCE sobre computação eletrônica, realizada em Pittsburgh em setembro de 1960, proporcionou a Clough a oportunidade de apresentar o método à comunidade de engenharia civil. O desafio principal era selecionar um nome adequado. Na Boeing, ''método da rigidez direta' descreveu o procedimento de montagem, mas não a inovação essencial de discretizar mídia contínua em elementos com campos assumidos deslocamento.

Observando a analogia com diferenças finitas–mas reconhecendo que equações de elasticidade foram aplicadas independentemente em regiões discretas–Clough decidiu que esses blocos de construção deveriam ser chamados de "elementos finitos' em Avião Tensão Análise " (Clough, 1960), Fig. 12.10.



THE FINITE ELEMENT METHOD IN PLANE STRESS ANALYSIS

By Ray W. Clough,[1] F. ASCE

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma\end{bmatrix} \quad (15)$$

which may also be written

$$[\sigma] = [H][\epsilon] \quad (15a)$$

the internal stresses may be expressed in terms of the nodal displacements

$$[\sigma] = [H][D'][v] \quad (16)$$

The plate element stiffness matrix can be derived from Eqs. 14a and 16 now, using the principle of virtual displacements as for the rectangular plate element. Assuming the plate to be subjected to unit virtual displacements applied at each node successively, the virtual nodal displacements are represented by a unit matrix, and the virtual strains, by Eq. 14a, become

$$[\epsilon] = [D'][I] = [D']$$

The external virtual work is then

$$W_e = [\bar{v}]^T[S] = [I][S] = [S]$$

while the internal virtual work is given by

$$W_i = t\iint[D']^T[H][D'][v]\,dx\,dy$$

Equating $W_e = W_i$, the expression for the nodal forces becomes

$$[S] = \left[t\iint[D']^T[H][D']dx\,dy\right][v] \quad (17)$$

Eq. 17 may be abbreviated as

FIG. 19.—CROSS-SECTION OF DAM AND FOUNDATION

$$[k_i] = t\iint[D']^T[H][D']dx\,dy$$

Figura 12.10: O jornal de Clough 1960 nomeando o método dos elementos finitos (Clough, 1960)

O jornal concluiu com observações que permanecem relevantes:

> Os exemplos anteriores demonstraram a aplicabilidade da abordagem elemento finito para análise de problemas do plano tensão em geral. Os resultados parecem indicar que o método é muito eficaz desde que a variação linear tensão assumida dentro dos elementos seja razoavelmente representativa da variação real tensão. Assim, onde tensões realmente variam de forma não linear, é necessário que os elementos sejam tomados suficientemente pequenos para que a não-linearidade possa ser

CÓPIA PARA REVISÃO

> representada por variações lineares em elementos adjacentes. Exceto por esta restrição, parece que uma aproximação de malha muito grossa pode dar bons resultados em muitos problemas.
>
> Uma vantagem importante deste método de análise é que ele é completamente compatível com a análise de outros tipos de sistemas estruturais, como pórticos, treliças, etc. Assim, não é problema analisar um sistema composto por combinações de tais elementos. É necessário apenas estabelecer o matrizes de rigidez dos vários tipos de elementos...
>
> Clough, 1960 *"The finite element method in plane stress analysis"*

Quando apresentado, o papel teve pouco impacto imediato – o método necessário "computadores digitais automáticos" ainda não disponível para engenheiros estruturais típicos.

12.3.4 Primeiros computadores e o Programa Berkeley

Em 1957, Clough iniciou um curso em Berkeley intitulado "Análise Matrix de Estruturas", com 4K de memória de 16 bits, tinha sido instalado na Faculdade de Engenharia. Poderia resolver no máximo 40 equações; Apenas malhas grossas eram viáveis.

Um estudante de pós-graduação, Edward L. Wilson (1931-2024), estava insatisfeito com o esforço necessário para resolver problemas elemento finito usando programas de álgebra de matriz disponíveis. Em 1958, ele começou a desenvolver um programa automatizado baseado em elementos de plano retangular. Depois de meses aprendendo a programar o IBM 701, Wilson produziu um programa semi-automatizado com capacidade limitada.

Em 1959, o IBM 704 foi instalado 32K de memória de 32 bits com aritmética de ponto flutuante, aproximadamente 100 vezes mais rápido do que o IBM 701. Isso permitiu a análise de estruturas práticas com malhas finas, transformando elementos finitos de uma curiosidade de pesquisa em uma ferramenta prática de engenharia.

Os esforços de programação de Wilson culminaram no programa SAP (Análise estrutural), que ele distribuiu livremente para universidades e empresas de engenharia em todo o mundo. Esta estratégia de disseminação aberta acelerou a adoção do método dos elementos finitos e estabeleceu uma tradição de desenvolvimento compartilhado de software em Berkeley que influenciou gerações de códigos análise estrutural.

12.3.5 Norfork Dam: A primeira grande aplicação

UC Berkeley tinha uma longa tradição de pesquisa em represas. Nos anos 20, Professor R.E. Davis conduziu estudos para Hoover Dam. No final da década de 1950, estudos de modelo e material para a represa Oroville foram conduzidos pelos professores Raphael, Eberhart e Pirtz. Era natural que a primeira grande aplicação do recém-desenvolvido programa elemento finito seria para uma barragem.

Por recomendação do Dr. Roy Carlson, consultor do Distrito de Little Rock da Corporação

CÓPIA PARA REVISÃO

de Engenheiros, Clough apresentou uma proposta para analisar a represa Norfork–uma barragem gravitacional com uma rachadura vertical induzida pela temperatura perto do centro. A proposta demonstrou a capacidade do método de modelar estruturas de geometria arbitrária com diferentes propriedades materiais na represa e fundação.

A proposta de Clough foi aceita por uma proposta analógica do computador Richard MacNeal da Cal-Tech, então considerada de última geração. O projeto Norfork deu a oportunidade de estender o método para análise não linear do fechamento da fissura sob carga hidrostática. Wilson e o estudante Ian King realizaram as análises detalhadas. A importante conclusão da engenharia: A represa rachada estava segura.

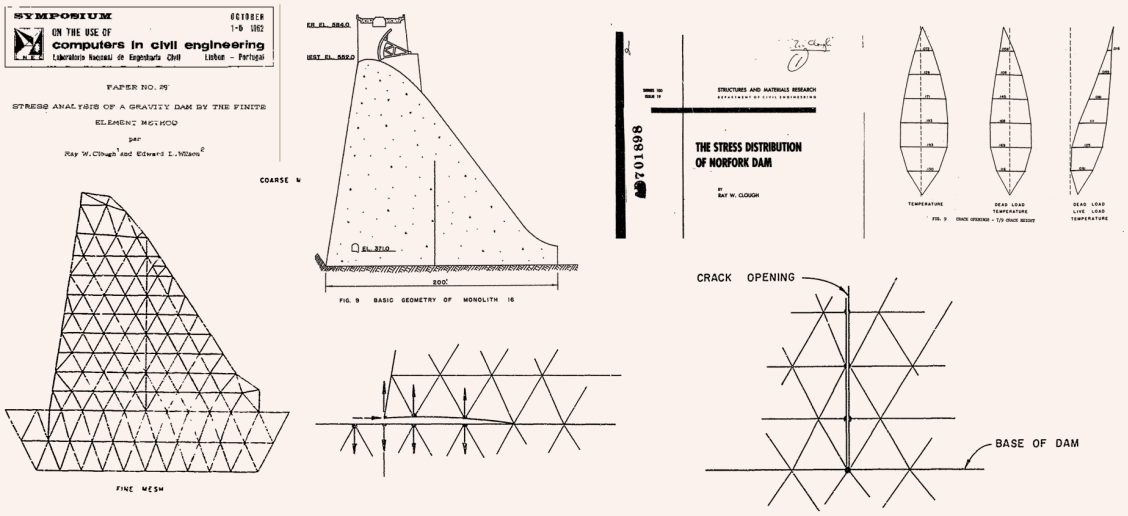


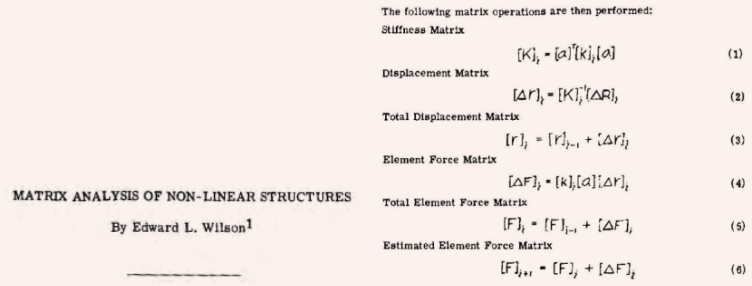
Figura 12.11: Norfork Dam elemento finito análise (Clough, 1962; Clough e Wilson, 1962)

O relatório do Corpo de Engenheiros (Clough, 1962) foi submetido em 1962, e um artigo relacionado foi apresentado no Simpósio sobre o Uso de Computadores na Engenharia Civil em Lisboa (Clough e Wilson, 1962). Esta foi apenas a segunda vez que "'elemento finito'"apareceu em um título de papel fora Berkeley.

12.3.6 Análise não linear e dinâmica (1960-1962)

No mesmo ano (1960) foi publicada a primeira análise não linear. Wilson, trabalhando em um projeto NSF sob a direção de Clough, escreveu um programa de análise bidimensional pórtico com relação momento-curvatura não linear definida pela equação Ramberg - Osgood.. As cargas foram aplicadas incrementalmente, produzindo uma análise do tipo "pushover"(Wilson, 1960), Fig. 12.12.

CÓPIA PARA REVISÃO



MATRIX ANALYSIS OF NON-LINEAR STRUCTURES

By Edward L. Wilson[1]

The following matrix operations are then performed:

Stiffness Matrix

$$[K]_i = [a]^T [k]_i [a] \quad (1)$$

Displacement Matrix

$$[\Delta r]_i = [K]_i^{-1} [\Delta R]_i \quad (2)$$

Total Displacement Matrix

$$[r]_i = [r]_{i-1} + [\Delta r]_i \quad (3)$$

Element Force Matrix

$$[\Delta F]_i = [k]_i [a] [\Delta r]_i \quad (4)$$

Total Element Force Matrix

$$[F]_i = [F]_{i-1} + [\Delta F]_i \quad (5)$$

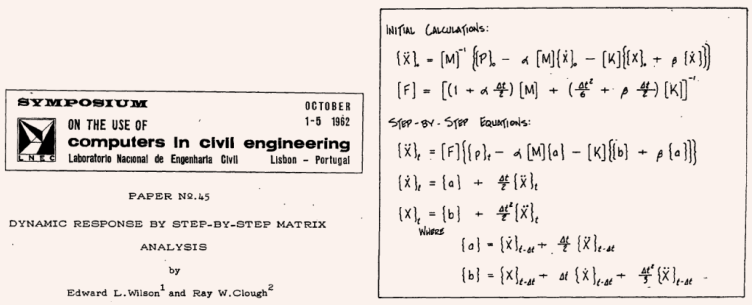
Estimated Element Force Matrix

$$[F]_{i+1} = [F]_i + [\Delta F]_i \quad (6)$$

Figura 12.12: Primeira análise não linear elemento finito (Wilson, 1960)

> A abordagem incremental de carga apresentada neste trabalho fornece um método geral de análise de estruturas com propriedades não lineares do material. Este método aproxima a análise de uma estrutura pela soma das análises de uma série de estruturas cada agindo linearmente sob um pequeno incremento da carga externa. Os erros envolvidos nesta aproximação podem ser feitos tão pequenos quanto desejados simplesmente diminuindo a magnitude do incremento de carga.
>
> Wilson, 1960 *"Matrix Analysis of Nonlinear Structures"*

Wilson e Clough apresentaram outro documento de referência no Simpósio de Lisboa de 1962 sobre análise dinâmica passo a passo[4] (Wilson e Clough, 1962). Este trabalho formulou em matriz o algoritmo de passos no tempo desenvolvido por Nathan M. Newmark (1910-1981). Newmark, uma figura imponente em engenharia estrutural na Universidade de Illinois, tinha introduzido seu esquema de integração incondicionalmente estável em 1959 (Newmark, 1959). A implementação Wilson-Clough eliminou a necessidade de iteração em cada passo através de uma inversão inicial da matriz, fazendo o método de Newmark prático para grandes sistemas elemento finito, Fig. 12.13.



SYMPOSIUM
ON THE USE OF computers in civil engineering
Laboratorio Nacional de Engenharia Civil — Lisbon – Portugal
OCTOBER 1-5 1962

PAPER N2.45

DYNAMIC RESPONSE BY STEP-BY-STEP MATRIX ANALYSIS

by

Edward L. Wilson[1] and Ray W. Clough[2]

INITIAL CALCULATIONS:

$$\{\ddot{X}\}_0 = [M]^{-1}\left(\{P\}_0 - \alpha [M]\{\dot{X}\}_0 - [K]\left(\{X\}_0 + \beta \{\dot{X}\}\right)\right)$$

$$[F] = \left[\left(1 + \alpha \frac{\Delta t}{2}\right)[M] + \left(\frac{\Delta t^2}{6} + \beta \frac{\Delta t}{2}\right)[K]\right]^{-1}$$

STEP-BY-STEP EQUATIONS:

$$\{\ddot{X}\}_t = [F]\left\{\{P\}_t - \alpha [M]\{a\} - [K]\left(\{b\} + \beta \{a\}\right)\right\}$$

$$\{\dot{X}\}_t = \{a\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_t$$

$$\{X\}_t = \{b\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{X}\}_t$$

WHERE

$$\{a\} = \{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t}$$

$$\{b\} = \{X\}_{t-\Delta t} + \Delta t\{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{3}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t}$$

Figura 12.13: Primeira análise dinâmica (Wilson e Clough, 1962)

[4] quando a frequência da carga aplicada (excitação) de uma estrutura é menor que cerca de um terço de sua menor frequência natural vibração, então podemos negligenciar efeitos de inércia e tratar o problema como um quase-estático, caso contrário, uma dinâmica A análise deve ser realizada. Para uma estrutura muito flexível, até mesmo uma carga aplicada lentamente pode exigir uma análise dinâmica.

CÓPIA PARA REVISÃO

> O método passo-a-passo como apresentado neste trabalho fornece um procedimento sistemático para determinar a resposta dinâmica de sistemas de massa discretos submetidos à carga arbitrária. A formulação das equações passo-a-passo na forma de matriz permite que a resposta de um sistema seja determinada por uma sequência repetida de operações de matriz. Além disso, a iteração em cada incremento de tempo, que é exigido por outros procedimentos, é eliminada por uma inversão inicial da matriz.
>
> Wilson e Clough, 1962 "*Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis*"

Este trabalho foi o prelúdio do crescente foco de Clough em engenharia sísmica, culminando em seu livro clássico (Clough e Penzien, 1975).

Para detalhes analíticos, consultar §53

12.4 Consolidação e disseminação

12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921-2009)

Olgierd Cecil Zienkiewicz (1921-2009), Fig. 12.14c, nascido na Inglaterra de um pai polonês, estabeleceu o método dos elementos finitos como uma ferramenta universal para análise de engenharia. Após o início do trabalho sobre a análise da barragem tensão na Universidade de Edimburgo, ele se mudou para a Universidade de Gales, Swansea, em 1957, onde construiu um dos principais grupos de mecânica computacional do mundo. Seu livro de 1967 com Y.K. Cheung, *O Método dos elementos finitos em Estrutural e Mecânica do contínuo*, foi o primeiro dedicado inteiramente ao assunto e treinado uma geração de engenheiros em todo o mundo. O que distinguiu Zienkiewicz foi sua extensão implacável do método para além de mecânica estrutural – para a dinâmica dos fluidos, transferência de calor, eletromagnéticos, e problemas multifísicos acoplados – demonstrando que elementos finitos forneceu uma estrutura unificada para praticamente todas as equações de campo da física matemática. Edições sucessivas de seu livro, eventualmente expandindo-se para três volumes, tornaram-se a referência definitiva. Sua colaboração com Bruce Irons produziu a formulação isoparamétrico, e seu grupo na Swansea foi pioneiro em refinamento adaptativo de malha, métodos mistos e análise dependente do tempo. Através de seus livros, seus alunos, e sua liderança editorial do *Jornal Internacional de Métodos Numericos em Engenharia*Zienkiewicz fez mais do que qualquer um para disseminar o método dos elementos finitos internacionalmente.

12.4.2 Conferência Wright-Patterson (1965)

Um evento crucial na consolidação internacional do método dos elementos finitos foi a Conferência sobre Métodos Matriciais em Mecânica estrutural realizada na Base Aérea

CÓPIA PARA REVISÃO

Wright-Patterson, em outubro de 1965. Este encontro reuniu os maiores grupos de pesquisa de todo o mundo, fornecendo um fórum para a troca de ideias que se desenvolviam em grande parte em paralelo.

12.4.3 Richard Gallagher (1927-1997)

Richard H. Gallagher[5] (1927-1997), da Universidade de Cornell, presidiu a uma sessão dedicada especificamente ao Método dos elementos finitos. Argyris apresentou aplicações para sólidos, placas e cascas, juntamente com novas formulações de elementos incluindo o elemento plano triangular de seis nós em coordenadas de área natural e o elemento tetraedro sólido de dez nós em coordenada de volume natural. A conferência demonstrou que o método amadureceu de desenvolvimentos isolados na Boeing, Berkeley, Stuttgart e Swansea em uma disciplina internacional coerente.

Antes, Gallagher tinha produzido o AGARDOgraph 69, *Um Estudo de Correlação dos Métodos de Matriz Análise estrutural* (Gallagher, 1964), uma pesquisa abrangente encomendada pelo Painel de Estruturas e Materiais da AGARD. Este relatório de 1964 comparou sistematicamente a força e as abordagens deslocamento como praticadas em toda a indústria da estrutura aérea, delineou áreas de acordo entre métodos publicados aparentemente diferentes, e avaliou formulações de elementos através de análises extensas de Estruturas de asa multiweb. A comparação detalhada das idealizações do estudo e sua avaliação franca de fontes de erro fizeram dele uma referência essencial para os engenheiros escolherem entre abordagens concorrentes.

Gallagher tornou-se um grande contribuinte para a teoria, particularmente para estruturas casca, e seu livro didático (Gallagher, 1975) forneceu outro caminho importante para a disseminação do método.

12.4.4 O Debate Metodológico

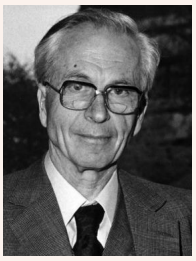
Durante o final dos anos 1950 e 1960, o debate continuou sobre os méritos relativos da força (flexibilidade) e deslocamento (rigidez) métodos. A comparação lado a lado de Argyris (Fig. 12.7) mostraram os métodos que seguem por etapas análogas. Przemieniecki, 1968[6] fornece comparação sistemática com numerosos exemplos.

Alguns engenheiros que podiam escrever programas de Fortran concluíram que os métodos tinham capacidades semelhantes; Escolher entre eles era uma questão de gosto. A maioria dos grupos aeroespaciais, defendendo a tradição, favoreceu o método das forças.

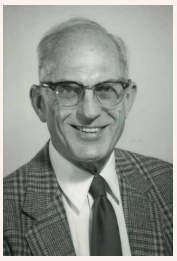
[5] Gallagher está incluído neste panteão porque ele era o professor favorito do autor como um estudante de pós-graduação em Cornell, onde ele ensinou cursos sobre elementos finitos, otimização estrutural, e cascas. No último curso, ele poderia derivar a oitava ordem equação diferencial governando teoria geral casca mal olhando para suas notas.

[6] Este livro introduziu muitos conceitos e anotações ainda em uso hoje. Continua sendo um dos melhores tratamentos do sujeito.

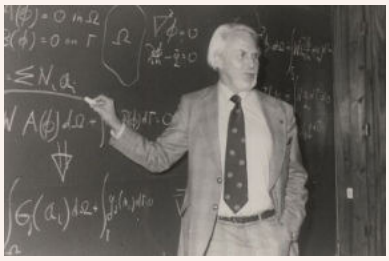
CÓPIA PARA REVISÃO



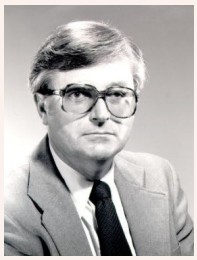
(a) Argyris (1913-2004)



(b) Clough (1920-2016)



(c) Zienkiewicz (1921-2009)



(d) Wilson (1931-2024)



(e) Gallagher (1927-1997)

Figura 12.14: Fundadores modernos do método dos elementos finitos

Mas os engenheiros que implementaram ambos notaram diferenças significativas. O método da rigidez direta não tinha um par duplo que combinasse com sua simplicidade algorítmica (Felippa, 2001).

Códigos de legado continuaram em muitas empresas aeroespaciais. Como Felippa observou, a divisão lembra a resposta de Einstein sobre a reação da velha guarda à nova física: Não os convencemos. "Os engenheiros contratados nos anos 1940-1950, agora em gestão, favoreceram o método das forças. Esforço substancial foi gasto em algoritmos de corte estrutural para seleção redundante automática durante os anos 60.

12.4.5 A Decisão NASTRAN (1969)

A resolução definitiva veio por decisão institucional. Em 1965, o pedido da NASA para construir o NASTRAN elemento finito sistema chamado para o desenvolvimento simultâneo de Deslocamento e versões da Força com capacidades idênticas, incluindo dinâmica e flambagem. Dois contratos foram adjudicados: para MSC (versão deslocamento) e Martin (versão força).

Em 1969, o desenvolvimento da versão da Força foi cancelado. Isto marcou o fim do método das forças como um sério candidato para programas de finalidade geral elemento finito. A formulação baseada em deslocamento tornou-se o padrão universal.

CÓPIA PARA REVISÃO

12.4.6 Generalização

Enquanto o método dos elementos finitos se originava em mecânica estrutural, sua estrutura matemática subjacente – princípios variáveis e formulações residuais ponderadas aplicadas a domínios discretizados – provada aplicável a qualquer problema de valor limite regido por equações diferenciais parciais. Como figo. 12.15 ilustra, as equações governantes da mecânica sólida, mecânica de fluidos, condução térmica, difusão, e condução elétrica todos compartilham a mesma estrutura matemática, diferindo apenas no significado físico da variável de campo e material coeficientes.

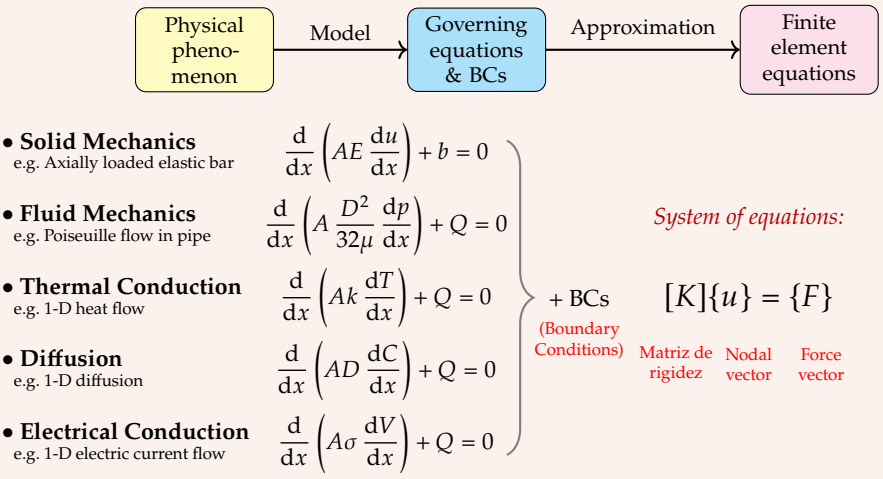


Figura 12.15: Generalização do método dos elementos finitos para múltiplas disciplinas físicas: Apesar das diferentes equações governantes, todas produzem a mesma estrutura algébrica

Em cada caso, a discretização produz um sistema da forma familiar $[K]\{u\} = \{F\}$, onde o matriz de rigidez, desconhecidos nodais, e vetor de força assumem interpretações específicas do problema. Esta universalidade foi reconhecida cedo por Zienkiewicz e seus colaboradores em Swansea, que sistematicamente estendeu o método para transferência de calor, fluxo de infiltração, eletromagnéticos, e eventualmente acoplado a problemas multifísicos. O método dos elementos finitos assim transcendeu suas origens como uma ferramenta para a análise de aeronaves tensão para se tornar a técnica numérica dominante em praticamente toda a ciência da engenharia.

Mesa 12.1 detalha a interpretação física das variáveis de campo e constantes materiais para cada classe de problema unificado pela estrutura elemento finito.

12.4.7 Livros e Adoção Mundial

O primeiro livro dedicado ao método dos elementos finitos foi escrito por Zienkiewicz, 1967. De nota particular: mesmo neste texto fundamental, a análise de represas apareceu entre os exemplos ilustrativos (Zienkiewicz e Cheung, 1964; Zienkiewicz e Cheung,

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 12.1: Classificação de vários problemas físicos

Problema físico	Princípio de Conservação	Variável do Estado	Fluxo	Constantes materiais	Fonte	Equação Constitutiva
Deformação de um corpo elástico	Equilíbrio de forças	Deslocamento ou forças	Tensão ou deformação	Módulo de Young, Coeficiente de Poisson	Força corporal ou tração	Lei de Hooke
Rede elétrica	Equilíbrio das correntes	Tensão ou intensidade	Fluxo elétrico	Condutividade elétrica	Carga elétrica externa	Lei de Kirchhoff
Torção	Conservação de energia potencial	Tensão ou função de dobra	Taxa de torção	Cisalhamento módulo	$-2\times$ ângulo de torção	Lei de Hooke
Transferência de calor	Conservação da energia	Temperatura	Fluxo de calor	Condutividade térmica	Calor interno ou externo	A lei de Fourier
Fluxo de fluidos	Conservação do momento	Velocidade	Cisalhamento tensão	Viscosidade	Forças do corpo	A lei de Stokes
Fluindo através da mídia porosa	Conservação da massa	Cabeça hidráulica	Taxa de fluxo	Permeabilidade	Fontes de fluidos	A lei de Darcy
Eletrostática	Conservação do fluxo elétrico	Potencial elétrico	Fluxo elétrico	Permissão	Carregar	Lei de Coulomb
Magnetostático	Conservação do potencial magnético	Potencial magnético	Fluxo magnético	Permeabilidade magnética	Atual	A lei de Maxwell

1965)Uma indicação precoce da afinidade natural do método para estruturas maciças e geometricamente complexas.

Zienkiewicz e Taylor, 2000 produziram tratamentos abrangentes que treinaram gerações de engenheiros em todo o mundo, cobrindo a formulação de elementos para vários elementos da física, isoparamétrico, integração numérica, análise não linear e dinâmica, e refinamento de malha adaptativa.

Bruce Irons, trabalhando com Zienkiewicz em Swansea, introduziu o conceito isoparamétrico (1966) – usando as mesmas funções de interpolação tanto para geometria e campos deslocamento (Irons, 1966). Esta formulação elegante permitiu que os limites dos elementos curvos fossem representados exatamente, facilitando a integração numérica sistemática via Quadratura de Gauss em um elemento pai, e unificando o tratamento de diversos tipos de elementos. O conceito isoparamétrico tornou-se fundamental para praticamente todas as implementações modernas elemento finito.

As fundações matemáticas foram solidificadas por Strang e Fix, 1973, estabelecendo rigorosa teoria de convergência que deu ao método sua certificação teórica.

12.4.8 Impacto atual e Aplicações

Em 1980, a FEM tornou-se o método numérico dominante para análise de engenharia. Códigos comerciais (ANSYS, ABAQUS), NASTRAN, ADINA, etc.) permitiu a análise de estruturas e sistemas de complexidade sem precedentes. Hoje, a FEM é onipresente.

- **Estruturas:** Edifícios, pontes, aviões, naves espaciais, automóveis
- **Fabricação:** Formação de metal, fundição, simulações de usinagem

CÓPIA PARA REVISÃO

- **Biomecânica:** Mecânica óssea, análise de tecidos moles, planejamento cirúrgico
- **Geomecânica:** Desenho da fundação, análise de túneis, resposta ao terremoto
- **Multifísica:** Acoplada térmica-estrutura, interação fluido-estrutura

A FEM transformou o projeto de engenharia de uma arte baseada em experiência para uma ciência orientada por simulação. Protótipos podem ser testados virtualmente antes da fabricação física. Otimização pode explorar espaços de projeto ordens de magnitude maior do que antes possível.

No entanto, as raízes da FEM nos métodos clássicos – método das forças, método dos deslocamentos, princípios energéticos – permanecem evidentes. O elemento matriz de rigidez é simplesmente o analógico discreto do operador contínuo rigidez. A montagem por superposição ecoa o princípio de trabalho virtual. O processo de solução segue a mesma lógica de equilíbrio da força estabelecida por Maxwell, Castigliano e seus contemporâneos.

12.5 Resumo e Contribuições-chave

Mesa 12.2 resume os principais contribuintes para métodos computacionais em análise estrutural, dispostos cronologicamente por categoria.

Tabela 12.2: Principais contribuintes para métodos computacionais em análise estrutural

Contribuidor	Ano	Referência	Contribuição
Diferença finita Métodos			
Karl Pearson (1857-1936)	1905	(Pearson, 1905)	Investigações experimentais na represa tensões
Lewis Fry Richardson (1881-1953)	1911	(Richardson, 1911)	Diferença finita método para análise tensão; Richardson extrapolação
Métodos de Solução Iterativa			
Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896)	1874	(Seidel, 1873)	Gauss - método de iteração sideral
Fundações Matemáticas da FEM			
Walther Ritz (1878-1909)	1909	(Ritz, 1909)	Método de aproximação variacional (Rayleigh–Ritz)
Boris Galerkin (1871-1945)	1915	(Galerkin, 1915)	Método de resíduos ponderados

Continuando na próxima página

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 12.2 – *Continuando*

Contribuidor	Ano	Referência	Contribuição
Alexander Hrennikoff (1896-1984)	1941	(Hrennikoff, 1941)	Analogia de laticínios; Método de estrutura para elasticidade
Richard Courant (1888-1972)	1943	(Courant, 1943)	Funções de teste em sub-regiões triangulares
Matrix Análise estrutural			
Gabriel Kron (1901-1968)	1944	(Kron, 1944)	Métodos tensores; Análise de rede; subestruturando conceitos
John Argyris (1913-2004)	1954–55	(Argyris e Kelsey, 1960)	Formulação matricial de teoremas de energia; força... dualidade
Método da rigidez direta e Elementos finitos			
M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp	1956	(Turner et al., 1956)	Método da rigidez direta; Plano triangular tensão elementos
M. Jonathan Turner (1909-1985)	1959	(Turner, 1959)	Exposição formal de método da rigidez direta; Extensões não lineares
Nathan M. Newmark (1910-1981)	1959	(Newmark, 1959)	Método de integração do tempo Newmark
Ray W. Clough (1920-2016)	1960	(Clough, 1960)	Chamado ''método dos elementos finitos'; extensão para mídia contínua
Desenvolvimentos Berkeley			
Edward L. Wilson (1931-2024)	1960	(Wilson, 1960)	Primeira análise não linear elemento finito; Programa SAP
R.W. Clough & E.L. Wilson	1962	(Clough, 1962)	Análise da represa Norfork; Primeiro grande aplicativo da FEM
E.L. Wilson & R.W. Clough	1962	(Wilson e Clough, 1962)	Primeira análise dinâmica da MEF; Método de Newmark
Livros e Difusão			
Conferência Wright-Patterson	1965		Consolidação internacional da pesquisa FEM
Bruce M. Ferros (1924-1983)	1966	(Irons, 1966)	Isoparamétrico conceito de elemento

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 12.2 – *Continuando*

Contribuidor	Ano	Referência	Contribuição
O.C. Zienkiewicz (1921-2009) & Y.K. Cheung	1967	(Zienkiewicz, 1967)	Primeiro livro elemento finito
J.S. Przemieniecki (1924-2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	Manual sistemático sobre matriz análise estrutural
Gilbert Strang & George Fix	1973	(Strang e Fix, 1973)	Teoria da Convergência Matemática para a FEM
Richard H. Gallagher (1927-1997)	1975	(Gallagher, 1975)	Elemento finito livro; casca desenvolvimento de elementos
Desenvolvimento de Software			
NASA / MSC / Martin	1965–69		Desenvolvimento NASTRAN; Versão de força cancelada 1969

12.6 Conclusão

Os métodos computacionais traçados neste capítulo – desde Richardson diferenças finitas até a matriz análise estrutural – representam não uma ruptura do clássico mecânica estrutural mas sua extensão sistemática permitida pelo digital Computação.

Os principais desenvolvimentos foram:

1911: O método de Richardson para análise tensão – a primeira abordagem numérica sistemática para problemas contínuos

1954–1956: Formulação matriz de Argyris de princípios energéticos; Turner... colaboração de massa produzindo o método da rigidez direta

1959: A exposição formal de Turner sobre o método da rigidez direta; O esquema de integração temporal de Newmark

1960: Clough está nomeando o método dos elementos finitos; Primeira análise não linear do MEF

1962: Primeira análise dinâmica da MEF; Análise da represa de Norfork demonstrando aplicação prática

1965–1969: Desenvolvimento NASTRAN e o triunfo dos métodos baseados em deslocamento

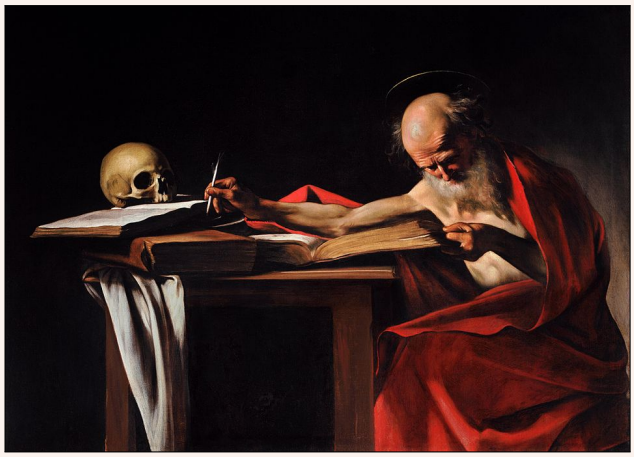
O elemento matrizes de rigidez, os procedimentos de montagem, e os princípios energéticos da análise moderna elemento finito rastreiam diretamente os conceitos desenvolvidos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

por Maxwell, Castigliano, e seus contemporâneos do século XIX. O computador mudou o que podia ser calculado, não o que estava sendo computado.

O analista estrutural de hoje, trabalhando com sofisticado software elemento finito capaz de resolver sistemas com milhões de graus de liberdade, está no final de um arco de desenvolvimento começando com o primeiro tratamento indeterminado de Navier vigas. Os princípios permanecem os estabelecidos há dois séculos. Só a escala de aplicação mudou.



Caravaggio, São Jerônimo Escrevendo (1605-1606)

O estudioso transcreve e transmite o conhecimento, de manuscrito a impresso em código, a eterna tarefa de preservar e propagar o método.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 13

De Abacus a Algoritmos: Um levantamento histórico de computação em ciência e engenharia

Abstract

A evolução da computação é inseparável da evolução de Matemática, engenharia e raciocínio científico. Desde o princípio Dispositivos manuais para ecossistemas digitais modernos, computação tem Manipulação simbólica progressivamente automatizada, libertando o intelecto humano para a percepção conceitual em vez de aritmética repetitiva. Este capítulo fornece uma visão histórica formal desse desenvolvimento, com ênfase particular nas ferramentas que moldaram a ciência e engenharia Praticar. Ela deliberadamente exclui a história do método rigidez e elemento finito formulações, que são cobertas em um capítulo posterior.

13.1 Introdução 468
13.2 Antigos e antigos dispositivos computacionais 468
13.3 Automatas Mecânicas e Máquinas de Cálculo Precoce 470
13.4 Babbage e Lovelace: Origens conceituais da programação 472
13.5 Computação Científica Analógica (1900-1945) 473
13.6 A Revolução Digital (1945-1960) . . 474
13.7 Linguagens de Programação e Software Científico Precoce 475
13.8 Linha do tempo de desenvolvimentos computacionais chave 476
13.9 Engenharia Primária e Software Estrutural (1960-1980) 476
13.10 A Era PC e a Expansão da Computação de Engenharia (1980-2000) . . . 477
13.11 Ecossistemas Computacionais Modernos (2000–Presente) 478
13.12 Evolução da Redação Técnica e Relatórios 479
13.13 Conclusão 481

CÓPIA PARA REVISÃO

13.1 Introdução

Este capítulo traça o longo arco intelectual que produziu moderno computação científica, começando com os primeiros dispositivos manuais e levando aos ecossistemas digitais integrados que agora sustentam a engenharia Praticar. Desde o ábaco e as mesas logarítmicas até Pascal e Leibniz As máquinas de cálculo, a narrativa mostra como a automação mecânica A fundação para avanços conceituais de Babbage e Lovelace. O O século XX introduziu analisadores diferenciais analógicos, seguidos por A revolução digital marcada por ENIAC, EDSAC, e os primeiros Arquiteturas de programas armazenadas. A maturação das linguagens de programação, Especialmente FORTRAN, catalisado o desenvolvimento de software de engenharia de SAP e NASTRAN para ABAQUS e ANSYS. Computação pessoal, MATLAB, Mathematica, e finalmente Python transformou a velocidade, escala, e Reprodutibilidade da análise científica. O capítulo termina com o moderno fluxos de trabalho envolvendo BIM, modelagem paramétrica e simulação baseada em nuvem, refletindo uma disciplina onde as capacidades computacionais estão agora Inseparável da criatividade e rigor de engenharia.

13.2 Antigos e antigos dispositivos computacionais

O Abacus

O dispositivo computacional mais usado é o ábaco , cujas origens são numerais posicionais muito anteriores. Em várias formas, apareceu na Mesopotâmia, Grécia, China e Japão. O Abacus incorpora duas ideias centrais: notação posicional e explícita representação do estado, Fig. 13.1.. Cada conta ou contador corresponde a um discreto O valor e a aritmética procedem por transições sistemáticas de estado. Longo Antes da análise formal, o ábaco permitiu aos comerciantes e administradores para realizar aritmética precisa e repetitiva.

Logarítmos de Napier e Regra de Deslize de Oughtred

Napier, 1614 introduzido logaritmos em 1614, proporcionando um radical Simplificação da computação numérica. Relacionando números com o seu logaritmos, Napier mostrou que a multiplicação poderia ser realizada por *Adicionando* logaritmos, e divisão por *subtraindo* Eles. Em suas próprias palavras:

> *"Por estas proporções, multiplicações problemáticas são transformadas em Adições e divisões em subtrações."*
> John Napier, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)

Esta transformação acelerou muito o cálculo astronômico, navegação, levantamento e

CÓPIA PARA REVISÃO

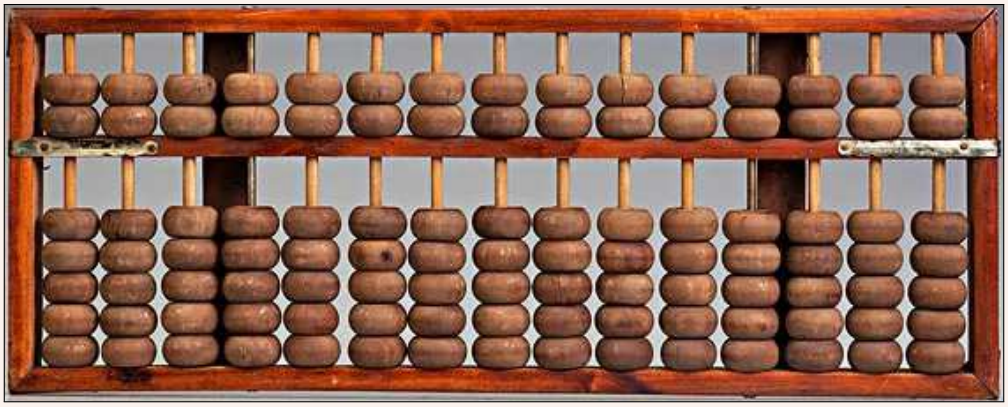


Figura 13.1: Ábaco tradicional chinês (suanpan)

trabalhos de engenharia. Um simples moderno exemplo ilustra a visão de Napier[1].. Henry Briggs logo complementou o trabalho de Napier ao introduzir logaritmos base-10 e publicar extensas tabelas impressas que permaneceram ferramentas padrão para séculos.

Com base na descoberta conceitual de Napier, Oughtred, 1632 Introduziu a regra do slide Por volta de 1632, usando dois Escalas logarítmicas deslizantes. Por mais de trezentos anos, o deslizamento A regra era o principal instrumento computacional dos engenheiros. Foi permitido Multiplicação rápida, divisão, extração de raízes, e, em especial Formas, operações trigonométricas e exponenciais; Veja Fig. 13.2.

No final do século XIX e início do século XX, a engenharia desliza As regras eram altamente refinadas e específicas da disciplina. Engenheiros estruturais Usado para calcular propriedades de seção, proporção de esbeltez, vento Pressões, permitidos tensões, e coeficientes de momento - muitas vezes em Conjunção com manuais de aço. O projeto dos arranha-céus primitivos Confiava fortemente em tais ferramentas.

Neste contexto, o método de distribuição do momento de Hardy Cross , introduzido em 1930, espalhado rapidamente em parte porque sua aritmética iterativa era ideal para Computação de regras de slide. O método não exigia resolver grandes sistemas de equações simultaneamente; Em vez disso, passou e balanceou momentos através de uma sequência de operações simples que poderiam ser eficientemente realizado em escalas logarítmicas.

[1]Por exemplo, $\log(3 \times 4) = \log 3 + \log 4$.. Usando logaritmos comuns, $\log 3 \approx 0.4771$ e.. $\log 4 \approx 0.6021$, então a soma deles 1.0792 Rende-se $10^{1.0792} \approx 12$, o produto correto. A Divisão é tratada da mesma forma: $\log(12/3) = \log 12 - \log 3$.

CÓPIA PARA REVISÃO

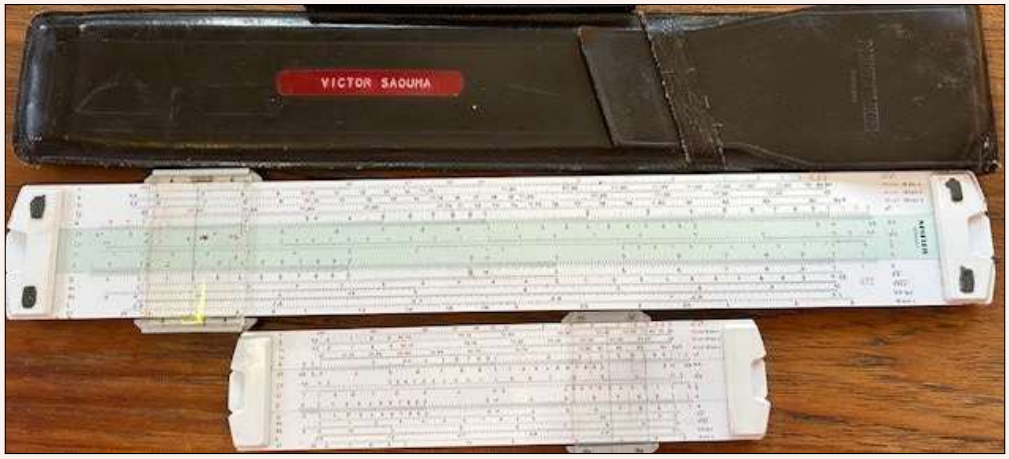


Figura 13.2: Regras de slides da faculdade do autor

13.3 Automatas Mecânicas e Máquinas de Cálculo Precoce

Máquina de somar de Pascal

Em 1642, Pascal, 1645 construiu uma máquina de adição mecânica (o "Pascaline") usando trens de engrenagem para automatizar adição e subtração. Carries foram propagadas mecanicamente através do mecanismo de engrenagem. Embora caro e limitado em alcance, o Pascaline marcou uma ruptura conceitual: A aritmética de rotina pode ser delegada em uma máquina.

Leibniz é um juiz desmedido

Gottfried Wilhelm Leibniz estendeu a computação mecânica inventando O tambor pisado. Seu "Reconhecidor Passo"(Leibniz, 1691b) Poderia Realizar multiplicação e divisão por adição e subtração repetidas. Leibniz sugeriu que as disputas lógicas poderiam, em princípio, ser resolvido por cálculo, prefigurando a ideia de raciocínio algorítmico, Fig. 13.3.

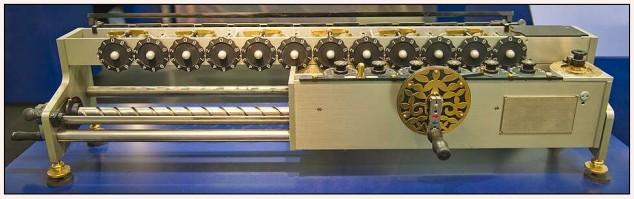


Figura 13.3: Leibniz é um juiz desmedido

CÓPIA PARA REVISÃO

Calculadoras de Era Industrial

Durante os séculos XVIII e XIX, cálculos mais robustos máquinas foram desenvolvidas para bancos e seguros, mas eles permaneceram Mecanicamente complexo e caro. Engenheiros continuaram a confiar principalmente sobre regras de slides e tabelas para a maioria estrutural e mecânica Cálculos.

Calculadoras eletrônicas de mão surgiram no início dos anos 70, começando com modelos pioneiros de empresas como Casio, Fig. 13.4, que introduziu alguns das primeiras calculadoras eletrônicas compactas para o mercado comercial. Esses dispositivos antigos substituíram a computação mecânica por integrada circuitos e displays de LED, oferecendo velocidade sem precedentes e portabilidade.



Figura 13.4: Calculadora eletrônica Casio (ca. 1970)

Hewlett... Packard logo seguiu com mais ciência avançada e instrumentos programáveis, estabelecendo uma presença dominante entre Engenheiros. A série HP do final dos anos 70 e início dos anos 80, incluindo A HP 10C, Fig. 13.5, HP 11C, e HP 15C–introduziu muitos usuários para *Inverter Notação Polonesa*[2] (RPN), um sistema em que Operands precedem operadores. A RPN eliminou a necessidade de parênteses A tecla reduzida é pressionada, mas requeria uma mudança conceitual que poderia ser não intuitivo; A própria HP do autor 10C continua sendo um lembrete vívido de como inicialmente desorientando essa transição poderia ser.

Estas calculadoras representaram uma ponte crucial entre a régua de deslizamento Computação e ferramentas digitais modernas: portátil, preciso, e programável muito antes de computadores pessoais se tornarem onipresentes. Hoje Calculadoras científicas e gráficas, seja de Casio, Texas Instrumentos, ou HP - herdar esta linhagem, fornecendo

[2]Notação polonesa reversa (RPN) é um Sistema de entrada baseado em pilhas, no qual operantes são inseridos *Antes* O, o Telefonista. Por exemplo, para calcular $3 + 4$, uma calculadora RPN requer `3 4 +`, que empurra 3 e 4 em uma pilha interna e então Aplique o operador. Parentes são desnecessários (por exemplo, para calcular $(3 + 4) \times 5$, um entra `3 4 + 5 *`). RPN reduz as teclas Mas pode ser contraintuitivo para os usuários acostumados a notação padrão.

CÓPIA PARA REVISÃO



Figura 13.5: A primeira calculadora do autor

simbólico manipulação, operações matriciais e resolução numérica impensáveis em A era das escamas logarítmicas.

13.4 Babbage e Lovelace: Origens conceituais da programação

O Motor de Diferença e o Motor Analítico

Charles Babbage propôs o motor da diferença para mecanizar o Cálculo de tabelas polinomiais usando diferenças finitas. Seu mais amplo Visão, o motor analítico , foi muito mais longe. Como descrito em seus escritos e mais tarde em Babbage, 1864, o O motor analítico incluía uma "armazém"(memória), uma "mill"(aritmética) Unidade), entrada de cartão perfurado, ramificação condicional e dispositivos de saída. Em conceito, previu a arquitetura do moderno programa armazenado Computadores.

Ada Lovelace e computação simbólica

Lovelace, 1843 Forneceu notas detalhadas sobre a análise de Babbage Motor em sua tradução do jornal de Menabrea, 13.6.. Ela reconheceu que.. máquina poderia manipular símbolos gerais e não apenas números, e ela Incluindo o que é frequentemente considerado como o primeiro algoritmo publicado, para Computando números de Bernoulli. Lovelace assim articulou a ideia de Programando bem antes de qualquer computador funcionar.

Apesar de seu brilho conceitual, os motores de Babbage nunca foram completo em sua

CÓPIA PARA REVISÃO

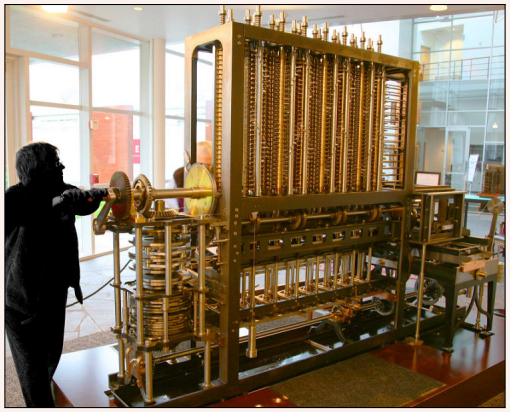


Figura 13.6: Máquina Analítica de Babbage

vida, devido a finanças, política, e Limitações de fabricação. Reconstruções parciais no final do século XX O século, no entanto, tem demonstrado a viabilidade mecânica de seu Desenhos.

13.5 Computação Científica Analógica (1900-1945)

Integradores mecânicos e pensamento analógico

No início do século XX, engenheiros começaram a projetar máquinas que Corpora diretamente a estrutura das equações matemáticas. Mecânica Integradores implementaram integração contínua através de discos rotativos e rolos; engrenagens diferenciais e ligações construídas somas e Diferenças. Esses dispositivos implementaram computação analógica: o comportamento de um sistema físico representava a solução de uma equação.

Analisador diferencial de Bush

Bush, 1931 descreveu o analisador diferencial, construído no MIT nos anos 1920 e 1930, Fig. 13.7.. Esta máquina usou vários integradores mecânicos unidades acoplada por eixos e amplificadores de torque para resolver sistemas de Equações diferenciais comuns. Engenheiros o empregaram para estudar deflexões, vibrações e sistemas dinâmicos bem antes do digital A simulação tornou-se viável.

Analisadores diferenciais e dispositivos analógicos relacionados desempenharam papéis importantes na balística, projeto de aeronaves e pesquisa nuclear precoce. Eles ofereceram soluções em tempo real, mas foram limitadas pela precisão mecânica, deriva, e complexidade. Estas limitações forneceram forte motivação para perseguir Computação digital eletrônica.

CÓPIA PARA REVISÃO

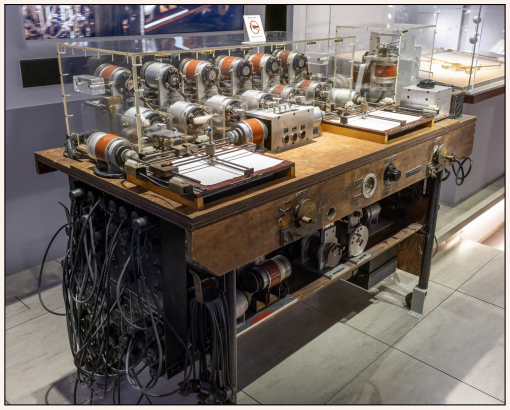


Figura 13.7: Analisador diferencial de Bush

13.6 A Revolução Digital (1945-1960)

ENIAC

O Integrador Eletrônico Numeral e Computador (ENIAC), desenvolvido em A Universidade da Pensilvânia e anunciada em 1946, Fig. 13.8, é amplamente considerado como o primeiro computador digital eletrônico de grande escala. Ela está contida no Ordem de 18.000 tubos de vácuo e poderia executar vários milhares Operações por segundo (Eckert e Mauchly, 1946). Programação necessária para religar cabos e plugboards de ajuste, mas ENIAC demonstrou que totalmente A computação eletrônica era prática.

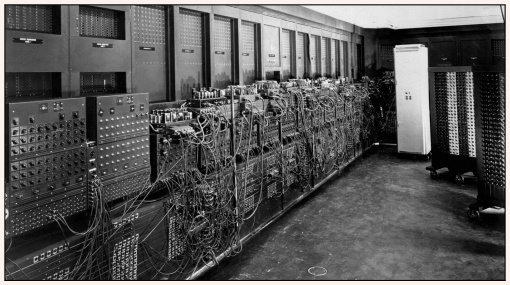


Figura 13.8: Computador ENIAC

Von Neumann Arquitetura e Programas Armazenados

John von Neumann e seus colaboradores propuseram o programa armazenado arquitetura, em que instruções de programa e dados residem em um comum Memória. Este conceito, articulado em relatórios iniciais sobre o projeto EDVAC, tornou-se a planta de quase todos os computadores digitais subsequentes. O Algoritmo separado do hardware, permitindo flexível Reprogramando sem religar fisicamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

EDSAC e UNIVAC

A calculadora automática de armazenamento eletrônico (EDSAC), construída em Cambridge e primeiro operacional em 1949, foi um dos primeiros Máquinas de programa armazenadas. Wilkes, 1951 documentou sua operação e Use. Na mesma época, a UNIVAC I foi entregue aos EUA. Censo Bureau em 1951, tornando-se o primeiro programa comercialmente disponível computador (Corporation, 1951).

EDSAC e UNIVAC marcaram a transição de protótipos experimentais para computação prática, científica e administrativa. Estrutura inicial Programas e análises numéricas em vários campos foram logo implementados Em tais máquinas.

13.7 Linguagens de Programação e Software Científico Precoce

Os primeiros computadores digitais foram programados em código de máquina ou montagem, que limitava a complexidade dos códigos científicos práticos. O A introdução de línguas de alto nível transformou esta imagem.

FORTRAN e ALGOL

Backus, 1957 FORTRAN (Formula Translation), lançado por IBM em 1957. FORTRAN permitiu que engenheiros expressassem algoritmos numéricos usando notação algébrica, matrizes e loops. Compiladores traduziram estes declarações em código de máquina eficiente. FORTRAN rapidamente se tornou o linguagem dominante para computação numérica e continua sendo importante hoje.

ALGOL, introduzida no final dos anos 50, contribuiu com o controle estruturado do fluxo Constrói e scoping regras que influenciaram línguas posteriores como C, Pascal, e muitos outros. Enquanto menos usado na prática de engenharia que FORTRAN, as contribuições conceituais de ALGOL foram significativas.

Centros de computação e processamento em lote

Universidades e laboratórios estabeleceram centros de computação centralizados Equipado com mainframes. Engenheiros prepararam código FORTRAN no soco cartões, enviou trabalhos para um operador, e esperou pela saída impressa. Depuração muitas vezes requeria múltiplos ciclos de submissão. Este processamento em lote O regime moldou os fluxos de trabalho computacionais iniciais e encorajou algorítmicos Eficiência.

CÓPIA PARA REVISÃO

13.8 Linha do tempo de desenvolvimentos computacionais chave

Ano	Milestone
ca. 2000 a.C.	Abacus em uso generalizado
1614	Napier apresenta logaritmos (Napier, 1614)
1632	A regra do slide de Oughtred (Oughtred, 1632)
1642	Pascal está adicionando a máquina (Pascal, 1645)
1690s	Leibniz é um juiz desmedido (Leibniz, 1691b)
1830s	O conceito do motor analítico de Babbage (Babbage, 1864)
1843	Anotações de Lovelace sobre o motor analítico (Lovelace, 1843)
1925–1931	Analisador diferencial de Bush (Bush, 1931)
1946	ENIAC operacional (Eckert e Mauchly, 1946)
1949	EDSAC operacional (Wilkes, 1951)
1951	UNIVAC Eu entreguei (Corporation, 1951)
1957	FORTRAN liberado (Backus, 1957)
1960s	SAP, STRUDL, NASTRAN, ANSYS precoces, etc. (Wilson, 1969; NASA, 1968)
1978	Primeiro lançamento do ABAQUS (*ABAQUS User's Manual* 1978)
1984	MATLAB introduzido (*MATLAB User's Guide* 1984)
1988	Mathematica apresentou (Wolfram, 1988)
2000s	Pilha científica Python, BIM, ferramentas paramétricas (Foundation, 2001)

Tabela 13.1: Linha do tempo de grandes marcos em computação científica e de engenharia

13.9 Engenharia Primária e Software Estrutural (1960-1980)

O período 1960-1980 testemunhou o surgimento de um propósito geral software de engenharia que automatizou muitas tarefas.

SAP e STRIDL

Na Universidade da Califórnia, Berkeley, O Análise estrutural O programa (SAP) foi desenvolvido como um código baseado em propósito geral para análise de pórtico e elemento finito (Wilson, 1969). Com o tempo, a SAP evoluiu no SAP IV, SAP90, e eventualmente SAP2000 e ETABS.

Na Georgia Tech, STRIDL (Projeto estrutural Linguagem) foi desenvolvido como um Sistema integrado combinando análise, projeto e gerenciamento de dados. Ele foi um dos primeiros exemplos de uma estrutura específica do domínio Linguagem.

CÓPIA PARA REVISÃO

NASTRAN, ANSYS e ABAQUS

NASTRAN (NASA Análise estrutural), desenvolvido pela primeira vez na década de 1960 sob O patrocínio da NASA, forneceu formatos de entrada padronizados e uma ampla espectro de capacidades elemento finito (NASA, 1968). Tornou-se um Plataforma de referência para análise aeroespacial e mecânica.

ANSYS, cujas raízes datam do início dos anos 70, evoluiu para um general Ambiente multifísico (Swanson, 1971). ABAQUS, primeiro lançado em 1978 (*ABAQUS User's Manual* 1978), especializada em não linear elemento finito análise e mais tarde expandido para cobrir uma ampla gama de materiais e Condições de carga.

Todos esses códigos foram inicialmente usados em computadores mainframe, com Entrada preparada em cartões perfurados e resultados impressos em impressoras.

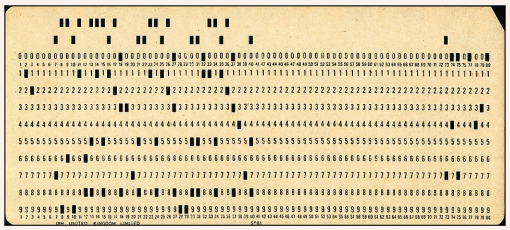


Figura 13.9: Cartões de soco e processamento em lote

13.10 A Era PC e a Expansão da Computação de Engenharia (1980-2000)

O advento de microprocessadores e computadores pessoais no final dos anos 70 e no início dos anos 80, computação descentralizada. Engenheiros não dependiam mais Apenas em mainframes; eles poderiam executar análises substanciais no desktop máquinas.

Computação Interativa

Computação interativa substituiu a submissão em lote e incentivou Modelo exploratório. Interfaces gráficas começaram a complementar ou Substituir arquivos de entrada baseados em texto, especialmente como memória e gráficos As capacidades melhoraram.

MATLAB

MATLAB , originalmente desenvolvido no final dos anos 70 e comercializado pela MathWorks em 1984, tornou-se uma ferramenta central para a numérica Álgebra linear, processamento de sinal, controle e dinâmica estrutural (*MATLAB User's Guide* 1984).

CÓPIA PARA REVISÃO

Sua linguagem orientada para a matriz, solucionadores embutidos, e Os gráficos o tornaram ideal para prototipagem rápida e ensino.

Matemática

Matemática , apresentado por Wolfram, 1988, Manipulação simbólica combinada, resolução numérica e visualização. Para os engenheiros, ele forneceu um ambiente poderoso para derivar e Verificando expressões analíticas, resolvendo diferenciais simbólicos Equações, e explorar dependências de parâmetros.

Proliferação de Software Estrutural

Com o aumento da potência do PC, software estrutural tornou-se mais acessível:

- SAP2000 e ETABS forneceram uma análise abrangente da construção e Ferramentas de design.
- O STAAD expandiu-se nos mercados civil e industrial.
- ADINA oferecia capacidades não lineares e multifísicas avançadas.
- SEGURO endereçado lajes e fundações.

Estes programas permitiram aos engenheiros visualizar formas modais, tensão contornos, e respostas da história do tempo de maneiras que teria sido Impraticável na era do mainframe.

Como análise estrutural software tornou-se onipresente, bem fundada preocupações sobre seu uso indevido surgiram (Powell, 2008 PDF).

13.11 Ecossistemas Computacionais Modernos (2000–Presente)

Computação científica Python e Open-Source

No início dos anos 2000, Python evoluiu para um grande Plataforma de computação científica, apoiada por bibliotecas como NumPy, SciPy, e Matplotlib. A Fundação Python de Software formalizou o O desenvolvimento da linguagem (Foundation, 2001). Com o advento de Jupyter Cadernos, Python se tornou um ambiente padrão para reprodutíveis Pesquisa computacional.

Para engenheiros estruturais, Python permite scripting de elemento finito Frameworks, simulações probabilísticas, processamento de dados para estruturas Monitoramento de saúde, e acoplamento com solucionadores externos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Computação de alto desempenho

As simulações estruturais e sísmicas modernas requerem alta performance Computação (HPC). Solucionadores paralelos, aceleração da GPU e nuvem Plataformas ativam:

- Análises dinâmicas não lineares em larga escala,
- simulações estocásticas com muitas realizações,
- Acoplada de fluido-estrutura ou modelos termomecânicos.

HPC transformou formulações acadêmicas em ferramentas práticas para Risco e avaliação de risco.

Modelagem de Informação de Construção (BIM) e Design Paramétrico

Modelagem de Informação de Construção (BIM) integra informações arquitetônicas, estruturais e de construção em um único Modelo digital. Softwares como Revit e Tekla Structures permitem Coordenação de geometria, materiais, cargas e conexões. O O padrão da Fundação Industrial facilita o intercâmbio de dados entre software de análise, plataformas BIM e ferramentas de fabricação.

Ferramentas paramétricas e generativas de design (Grasshopper, Dynamo) Estenda as capacidades de modelagem, permitindo geometria e topologia para ser conduzido por regras ou critérios de otimização. Essas ferramentas permitem o desempenho projeto conduzido de formas estruturais complexas, muitas vezes em conjunto com Solucionadores.

13.12 Evolução da Redação Técnica e Relatórios

De manuscritos a processadores de palavras

Historicamente, a comunicação científica dependia de manuscritos escritos à mão e tipografia mecânica. Revisões foram intensivas no trabalho, e Notação matemática necessária de tipos especializados. Máquinas de escrever A aparência padronizada, mas não suportava equações ou automatizadas Referendo. Os primeiros processadores de palavras facilitaram a edição, mas não foram projetados para grandes, equações-densas trabalhos técnicos.

Microsoft Word

Microsoft Word e ferramentas similares fizeram a criação de documentos amplamente acessível, mas edição de equações, referências cruzadas e bibliográficas A gestão permane-

CÓPIA PARA REVISÃO

ceu frágil para grandes projetos. Para um livro com centenas Equações, figuras e citações, manter a consistência é É difícil em tais ambientes.

LaTeX

LaTeX, desenvolvido por Leslie Lamport, tornou-se o Padrão definitivo para digitação científica. É matemática Precisão, consistência bibliográfica e programação fazem com que seja o Só uma plataforma viável para um trabalho técnico desta escala e complexidade. Sem o flexibilidade e automação proporcionada por LaTeX..seu manuseio de hiperlinks, referências cruzadas, macros personalizados, figuras e extensas Este livro simplesmente não poderia ter sido produzido. Não processador de texto convencional, incluindo Microsoft Word, poderia gerenciar o coesão estrutural, matemática e referencial necessária aqui. Quase cada figura, equação, tabela e citação neste volume é gerado através LaTeXmacros, garantindo clareza, reprodutibilidade e coerência Apresentação.

MathCad

Mathcad é um ambiente de cálculo de engenharia que integra matemática, texto e gráficos em um único documento, Fig. 13.10.. Permite aos engenheiros realizar cálculos simbólicos e numéricos usando notação matemática padrão, ao invés de programar sintaxe. Uma de suas características definidoras é que os cálculos e o texto explicativo coexistem perfeitamente, permitindo a criação de relatórios técnicos autodocumentados.

Unidades são tratadas nativamente, reduzindo significativamente o risco de erros dimensionais. Engenheiros podem inserir gráficos, tabelas e estudos de parâmetros diretamente ao lado das equações governantes.

Seu paradigma de planilha torna suposições, fórmulas e resultados imediatamente visíveis e rastreáveis. Mathcad também suporta documentação incorporada, hiperlinks e comentários formatados dentro do mesmo arquivo computacional.

Devido à sua transparência e legibilidade, é amplamente utilizado em engenharia mecânica, civil, elétrica e aeroespacial. É particularmente valioso para verificações de design, cálculos de conformidade de código e verificação dos resultados de elementos finitos.

Hoje, Mathcad tornou-se uma ferramenta padrão em muitos escritórios de engenharia[3], superando a lacuna entre análise rigorosa e clara comunicação técnica.

Apêndice J fornece uma extensa coleção de exemplos MathCad correspondentes a análise estrutural problemas resolvidos ao longo deste livro.

[3]Há muito que defendo, até agora sem sucesso, que todo o dever de casa dos alunos seja submetido em Mathcad, tanto para nos poupar da agonia de decifrar a letra e treinar os estudantes em uma plataforma de software amplamente utilizada na prática. Também facilitaria a detecção de trapaça, já que o fluxo de trabalho de cálculo torna-se transparente.

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

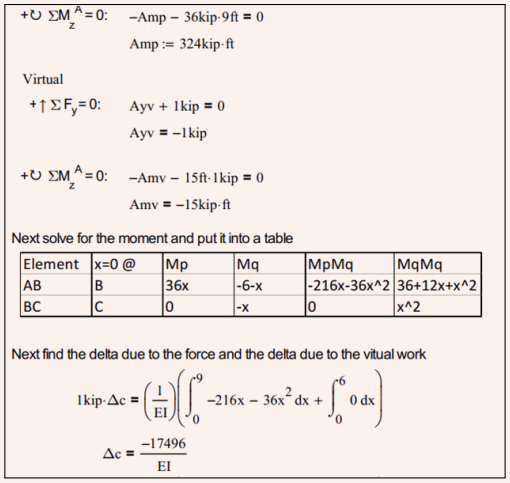


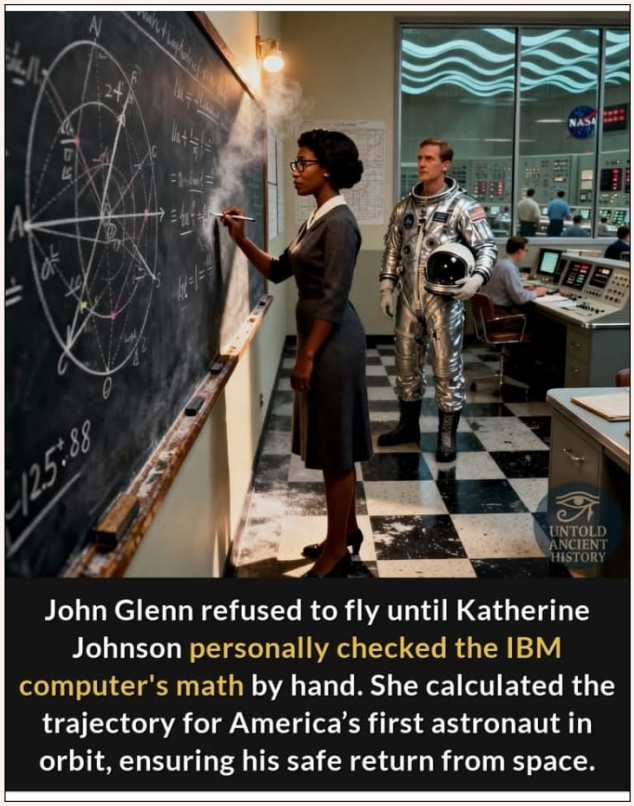
Figura 13.10: Eample of MathCad

13.13 Conclusão

O desenvolvimento da computação, do ábaco ao algoritmo moderno ecossistemas, reflete um esforço sustentado para automatizar e estender os seres humanos Raciocínio. Cada estágio –logaritmos, regras de slides, calculadoras mecânicas, máquinas analógicas, computadores digitais, linguagens de programação, e Ambientes de software integrados... expandiu a capacidade do engenheiro para modelar, analisar e projetar sistemas complexos.

Moderno análise estrutural, simulação numérica, e projeto baseado em dados Descanse sobre esta linhagem. Os métodos e ferramentas descritos neste capítulo Formar a base computacional sobre a qual o mais avançado analítico Técnicas de capítulos subsequentes são construídas.

CÓPIA PARA REVISÃO



Auto-explicativo

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 14

A Evolução da Força e os Princípios Virtuais

Abstract

Este capítulo traça o desenvolvimento paralelo e entrelaçado de dois conceitos fundamentais na mecânica: A noção de força *e o* Princípio de trabalho virtual.*. Começando com a personificação divina da força no antigo Egito e Mesopotâmia, seguimos o surgimento gradual do raciocínio mecânico através da filosofia natural grega, onde a distinção de Aristóteles entre movimento natural e violento dominava por quase Dois milênios. A narrativa prossegue através das contribuições medievais de estudiosos islâmicos, que refinaram o conceito de* Mayl *E os estudantes latinos, notadamente o uso implícito de Jordanus de Nemer do virtual deslocamentos através de "gravidade posicional'.'*

A Revolução Renascentista e Científica marca o ponto decisivo. Stevin's Clootcrans *A demonstração (1586) introduziu a impossibilidade do movimento perpétuo como critério de equilíbrio, enquanto Galileu articulou o trade-off entre força e deslocamento em máquinas simples. Descartes contribuiu com a visão crucial de que o infinitesimal, o início do movimento, são as quantidades adequadas para estática, e Torricelli reformulou o equilíbrio como uma condição variacional no centro da gravidade. Estes fios foram tecidos juntos por Johann Bernoulli, cuja carta de 1715 a Varignon deu a primeira declaração geral do princípio das velocidades virtuais: em equilíbrio, a soma de forças multiplicada por seu virtual deslocamentos desaparece.*

O capítulo culmina com a sistematização do século XVIII por d'Alembert, que se estendeu trabalho virtual à dinâmica através de seu princípio das forças inerciais, e por Lagrange, cujo Analitique Mécanique *(1788) elevou o princípio à fundação de toda mecânica, expressa puramente através de operações algébricas sem um único diagrama. Também examinamos as contribuições de Lazare Carnot sobre os movimentos geométricos e a teoria das máquinas, e a extensão de Fourier às restrições da desigualdade. Uma tabela cronológica resume os principais desenvolvimentos de Aristóteles a Mohr.*

14.1 Introdução 484
14.2 A Antiguidade e o Divino 487
14.2.1 Egito 487
14.2.2 Mesopotâmia 487
14.2.3 Índia 488
14.3 Antiguidade Clássica e Filosofia Natural 490
14.3.1 Gregos 490
14.3.2 Romanos, Plotino (204-270) . 497
14.3.3 Bizantino, Filopono (490–570) 498
14.4 Período Medieval e Escolástica . . . 499

CÓPIA PARA REVISÃO

14.4.1 Islâmicos 500
14.4.2 Jordanus de Nemore (ca 1225-ca1260) e Gravidade Posicional 501
14.4.3 Idade Média: Universidade de Paris 501
14.5 Renascimento e Revolução Científica 503
14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519) 503
14.5.2 Benedetti (1530-1590) 504
14.5.3 Pardies (1636-1673) 505
14.5.4 Simon Stevin (1548-1620) . . 506
14.5.5 Galileu (1564-1642) 510
14.5.6 Kepler (1571-1630) 514
14.5.7 Descartes (1596-1650) 516
14.5.8 Torricelli (1608-1647) 522
14.5.9 Wallis (1616-1703) 525
14.5.10 Leibniz (1646-1716) 525
14.5.11 Newton (1642-1726) 527
14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782) 529
14.5.13 Carta de Johann Bernoulli de 1715 530
14.5.14 Varignon (1654-1722) 532
14.5.15 D'Alembert (1717-1783) . . . 533
14.5.16 Kant (1724-1804) 539
14.5.17 Lagrange (1736-1813) 539
14.5.18 Fourier (1768-1830) 543
14.5.19 Lazare Carnot (1753-1823) . 543
14.6 Epílogo 545
14.7 Conclusão 546

14.1 Introdução

Em seu livro "Ciência e Hipótese"(La Science et l'HypothèSe), Poincaré Poincaré, 1905 famosamente discute o antropomórfico origem do conceito de força em algum comprimento[1].

Na verdade, os conceitos de *força* e.. *trabalho virtual* estão entre os mais fundamentais na mecânica, mas suas histórias raramente são contadas juntas. Isto é uma omissão, para as duas ideias desenvolvidas em diálogo íntimo: Os avanços na compreensão da força exigiram repetidamente novos princípios de equilíbrio, enquanto o refinamento do raciocínio virtual-trabalho por sua vez esclareceu o que "força"deve significar. O presente capítulo oferece uma narrativa unificada desta evolução dupla, abrangendo cerca de vinte e cinco séculos desde as personificações mitológicas da antiguidade até as formulações analíticas que sustentam o moderno análise estrutural.

Começamos com a força como um atributo divino... o egípcio *Não*, o Mesopotâmio *Enlil*, a Bíblia *Shaddai*Antes de se voltar para os gregos, para quem a filosofia natural substituiu a teologia como o quadro para entender o mundo físico. A distinção de Aristóteles entre movimento natural e violento, embora em última análise incorreto, estabeleceu o vocabulário conceitual que dominaria o pensamento ocidental até a Revolução Científica. Seus seguidores na A escola peripatética produziu o *Mechanica*Talvez o primeiro texto a procurar uma explicação unificada da vantagem mecânica, encontrando-a nas propriedades

[1]Ele escreveu: "A aceleração de um corpo é igual à força que atua nele dividido pela sua massa. Essa lei pode ser verificada por experiência? Se assim for, temos que medir as três magnitudes mencionadas na enunciação: aceleração, força e massa. Admito que a aceleração pode ser medida, porque passo por cima da dificuldade decorrente da medição do tempo. Mas como vamos medir força e massa? Nós nem sabemos o que eles são. O que é massa? Newton responde: "O produto do volume e da densidade"... O que é força? "É", responde Lagrange, "que se move ou tende a mover um corpo"

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

"maravilhosas" do círculo. Arquimedes, em contraste, oferecia provas geométricas rigorosas da lei de alavanca mas nenhum princípio geral – uma limitação que Descartes mais tarde caracterizaria como explicando *O quê* Acontece, mas não *Por quê*.

O período medieval viu dois desenvolvimentos paralelos. No mundo islâmico, estudiosos como Avicena e al-Baghdadi refinaram o conceito aristotélico de força impressa na teoria da *Mayl*, uma tendência interna que mantém os projéteis em movimento e que prefigura o conceito posterior de impulso. Na Europa Latina, Jordanus de Nemer introduziu o peso efetivo de um corpo em um plano inclinado uma ideia que implicitamente invoca virtualmente deslocamentos, embora sem reconhecê-los como tal. A teoria do ímpeto de Buridan e as percepções cinemáticas de Oresme na Universidade de Paris estabeleceram mais bases para a próxima revolução.

O Renascimento trouxe um novo espírito empírico. Leonardo da Vinci catalogou as propriedades de máquinas simples; Simon Stevin's *Clootcrans* (1586) derivaram a lei do plano inclinado da impossibilidade de movimento perpétuo, um raciocínio que é reconhecidamente "virtual"em caráter. Galileu articulou o comércio fundamental: O que se ganha em força perde-se na velocidade. Essas insights permaneceram dispersas, no entanto, sem um princípio unificador.

A síntese decisiva veio no século XVII. Descartes insistiu que o equilíbrio depende não de movimentos finitos, mas de infinitas simas— o "início do movimento"– e mostrou como a construção tangente estende este raciocínio a restrições curvas. Torricelli reformulou o equilíbrio como uma condição variacional: um sistema de corpos pesados está em equilíbrio se e somente se nenhum movimento admissível pode diminuir seu centro comum de gravidade. Wallis generalizou essas ideias para direções arbitrárias de força, e Leibniz contribuiu com profundidade filosófica (o *Vis viva* controvérsia) e o início de um cálculo simbólico adequado para quantidades direcionadas.

A pedra angular foi colocada por Johann Bernoulli. Em uma carta a Varignon datada de 26 de fevereiro de 1715, ele declarou o princípio das velocidades virtuais em sua forma geral: para qualquer sistema em equilíbrio, a soma das forças multiplicadas pelo virtual deslocamento em sua direção desaparece. Varignon reconheceu o resultado como "tão geral e tão bonito"que ele imediatamente pediu permissão para publicá-lo. Com esta única afirmação, as diferentes percepções de dois milênios foram unificadas em um único princípio aplicável a qualquer sistema mecânico.

O século XVIII transformou este princípio em fundamento da mecânica analítica. D'Alembert *Traité de Dynamique* (1743) Extendeu-se trabalho virtual à dinâmica pelo simples expediente de tratar termos inerciais como forças: o corpo acelerado pode ser considerado em equilíbrio sob a ação combinada de forças impressionáveis e inerciais. Lagrange's *Analitique Mécanique* (1788) sistematizou todo o assunto, introduzindo coordenadas generalizadas e mostrando que forças de restrição aparecem naturalmente como os multiplicadores Lagrange do problema variacional. Seu famoso orgulho... de que o trabalho não contém um único diagrama... testifica o poder da abordagem analítica.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lazare Carnot contribuiu com o conceito de *Movimentos geométricos* e o *momento de atividade*, superando a lacuna entre princípios abstratos e a ciência prática das máquinas. Fourier estendeu o quadro para restrições de desigualdade, abrindo a porta para a mecânica moderna de contato.

Ao longo desta narrativa, dois temas se repetem. A primeira é a tensão entre os *O quê* e o *Por quê*Entre demonstrações que uma condição de equilíbrio particular mantém (Arquimedes) e princípios que explicam por que ele deve realizar (Bernoulli, Lagrange). A segunda é a gradual abstração de força de um atributo divino, para uma qualidade de corpos em movimento, a uma quantidade matemática definida por seus efeitos sobre virtual deslocamentos. No final da nossa história, "força"tornou-se o que os engenheiros estruturais significam com o termo: o duplo de deslocamento na expressão trabalho, recuperável a partir tensão através da integral de Cauchy.

Também abordado (indirectamente neste capítulo) é o conceito de pralelograma de forças. De fato, uma das ideias matemáticas mais fundamentais no vetor[2] A análise é a ideia da adição de vetores. A soma de dois vetores que têm um ponto de origem comum é definido como o vetor originado no mesmo ponto e estendendo-se para o lado oposto do paralelograma definido pelos dois vetores originais. Certas entidades físicas, tais como velocidades e forças, podem ser agravadas em um de maneira semelhante, e desta correspondência deriva grande parte da utilidade da análise vetorial (Crowe, 1994).

A idéia de um paralelograma de velocidades pode ser encontrada em várias antigos autores gregos e o conceito de um paralelograma de forças não eram incomuns nos séculos XVI e XVII. No início do século XIX, paralelogramas de física As entidades frequentemente apareceram em tratados, e este uso indiretamente levou à análise vetorial, para esta idéia forneceu um exemplo impressionante de Como entidades vetoriais poderiam ser usadas para aplicações físicas (Crowe, 1994). A cobertura do paralelograma de forças será entrelaçada com o que se segue.

O conceito de vetor não foi introduzido até o século 19 por William Rowan Hamilton [3] (Trabalhando em seu *quaternião* álgebra); Não confundir com cálculo vetorial[4]. Assim, a noção de vetores estava ausente para todos os seguintes contribuintes para o paralelograma das forças.

O capítulo conclui com um epílogo sobre as quatro forças fundamentais da física – um lembrete de que nossas forças estruturais são, em última análise, eletromagnéticas na origem – e uma tabela cronológica resumindo os principais desenvolvimentos da antiguidade para o Século XIX. O leitor que segue esta narrativa, esperamos, ganhará não

[2]Curiosamente, o conceito de "vetor"não surgiu até o século XIX, nem mesmo Descartes que era pai da geometria analítica (também conhecido como "geometria coordenada", também conhecida como "Geometria cartesiana") pensou nisso.

[3]Que também foi o primeiro a cunhar os termos "escalar"e "tensor"(no entanto, referia-se ao comprimento de um quaternião. Foi Voigt, 1898 em 1898, que deu o sentido moderno do termo).

[4]Gibbs (físico americano) e Heaviside (cientista britânico) desenvolveram cálculos vetoriais para explicar melhor as equações de Maxwell.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

só perspectiva histórica, mas também uma apreciação mais profunda do porquê o princípio de trabalho virtual ocupa um lugar tão central em mecânica estrutural.

14.2 A Antiguidade e o Divino

Esta seção é fortemente baseada em *Concepts of Force* por Jammer, 1957.

14.2.1 Egito

F

Como[5] as sociedades primitivas desenvolveram-se em civilizações urbanas, a noção de forças imprevisíveis que governam o mundo transformou-se na ideia de uma hierarquia estruturada de forças naturais. Aos poucos, essas forças vieram a ser personificadas como espíritos poderosos ou deuses. A mitologia antiga, servindo como o sistema de crenças sistematizado primário nos tempos iniciais, abrangeu tanto a cosmologia quanto o que poderia ser considerado como a "física"da era pré-científica. Dentro deste quadro, o conceito de força era muitas vezes personificado como divindades ou espíritos.

O conceito abstrato de força, considerado como uma entidade divina, pode ser rastreado até o antigo Egito, notadamente em textos da dinastia XIX e literatura demótica posterior. Referido como "não" que foi conceituada como uma divindade pessoal incorporando força divina, ao invés de ser identificada como um intermediário daemônico ou angélico. O conceito de força divina é retratado como uma entidade poderosa enviada pelo deus-sol Re para cumprir um pedido, ilustrando que "não"engloba não só violência e ferocidade, mas também elementos de ordem e moralidade mesmo em suas primeiras representações.

Como ilustração, a tradução hieróglifica do nome demótico 'Pn-n-nht-w' Fig. 14.1a, em que a figura com a faca representa o conceito de força divina.

14.2.2 Mesopotâmia

F

[5]Este capítulo entrelaça dois temas principais: *Forças* e o *Princípios Virtuais*.. Para ajudar o leitor a acompanhar, o material principalmente preocupado com as forças é sinalizado na margem com F; material principalmente preocupado com princípios virtuais com V; e seções que envolvem substancialmente ambos estão marcados FV.

Se você acha este capítulo um tanto desarticulado, ou às vezes repetitivo, é simplesmente porque começou como dois capítulos separados ("Força" e "Forças Virtuais") que mais tarde foram cuidadosamente fundidos.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) 'Pn-n-nit-w' (Jammer, 1957)



(b) Enlil



(c) El Shaddai

Figura 14.1: Deidades associadas à força na antiguidade

Na civilização mesopotâmica, a população enfrentava fenômenos naturais frequentes e imprevisíveis, como tempestades, ventos e inundações, que trouxeram destruição. Essas forças foram personificadas por *Enlil*, o deus das tempestades, que simbolizava dinamismo e mudança, contrastando com o deus do céu *Anu*, representando estabilidade e permanência. *Enlil* corporificou tanto a força bruta quanto o princípio organizador no universo, agindo como um regulador contra o caos.

A associação bíblica de Deus com o conceito de força é evidente através de inúmeras referências ligando Seu nome com termos que denotam força, poder e vigor na Bíblia. Por exemplo, palavras como "Hail"' "poder", "força" e "vigor" são frequentemente usadas para descrever atributos divinos. Alguns estudiosos sugerem que o nome "shaddai" (que é um dos nomes dos deuses de Israel) pode se originar de uma raiz semítica significando "grande poder, grande força" ainda mais enfatizando a onipotência de Deus. Associações semelhantes entre os epítetos divinos e conceitos de força podem ser encontradas em outras línguas antigas também.

14.2.3 Índia

F

Os Jainas[6], seguidores de Jina (*Vardhamana*), que viveu ao mesmo tempo que Buda, desenvolveu um pluralismo atomístico realista e relativista (*Anekantada*). Notavelmente, eles não incorporaram o conceito de força, que contrasta com a ciência ocidental, onde a ideia de força desempenha um papel fundamental.

Na física de Jaina, a categoria *Ajiva* é dividido em vários componentes: matéria (*Pudgala*), espaço (*Akasha*), movimento (*dharma*), descanso (*adharma*), e tempo (*Kala*). *Dharma* e.. *adharma* se referem às condições de movimento e descanso, respectivamente. Eles são sem forma e passivos, apenas facilitando ou impedindo o movimento ou descanso, semelhante à água que sustenta o movimento de um peixe ou a terra fornecendo uma base para objetos

[6]Jainas enfatiza a não-violência (evitar insetos feridos), veracidade, não roubo, celibato e não posse (alguns monges ascéticos e freiras, praticar formas extremas de ascetismo, incluindo renúncia de apegos mundanos (como pano) e assim prática Como princípios fundamentais.

CÓPIA PARA REVISÃO

em repouso. Principalmente, é hora de iniciar a atividade*Kriya*) e "mudança' (*parinama*), sem assumir um papel de agente dinâmico semelhante ao conceito ocidental de força.

No Jainismo, *Dharma* (movimento) e *adharma* (resto) estão intrincadamente relacionados com o karma .. Enquanto o conceito de karma se refere principalmente às consequências morais e éticas de suas ações, ele também tem implicações para o reino físico.

Karma, no Jainismo, refere-se ao acúmulo de resíduos morais ou consequências resultantes de ações intencionais. Cada ação, seja física, verbal ou mental, deixa uma marca na alma, conhecida como karma. Estas partículas cármicas aderem à alma e influenciam suas futuras experiências e circunstâncias.

A relação entre o karma e o mundo físico, incluindo movimento e descanso, pode ser entendida da seguinte forma:

Karma e Ação: De acordo com a filosofia Jain, o karma é gerado por ações intencionais. Quando um indivíduo se envolve em ações que envolvem movimento ou descanso, acumulam as correspondentes consequências cármicas. Por exemplo, se alguém realiza um ato de violência (em movimento envolvente), acumula partículas cármicas que podem levar a futuras experiências de sofrimento. Da mesma forma, ações envolvendo restrição ou não-violência (involvendo descanso) também geram consequências cármicas.

Carma e Condições: Acredita-se que o carma influencia as condições e circunstâncias da vida de um indivíduo, incluindo seu ambiente físico e experiências. As consequências cármicas das ações passadas podem moldar as condições que facilitam ou impedem o movimento e o descanso. Por exemplo, as consequências cármicas favoráveis podem levar a um ambiente confortável propício ao descanso, enquanto o carma desfavorável pode levar a obstáculos ou desafios que impedem o movimento.

Carma e Libertação: No Jainismo, o objetivo final é alcançar a libertação*Moksha*) do ciclo de nascimento e morte (*Samsara*Libertando a alma da escravidão cármica. Esta libertação é alcançada através de práticas espirituais destinadas a purificar a alma e derramar karma acumulado. Ao transcender a influência do karma, acredita-se que os indivíduos atinjam um estado de eterna felicidade e liberdade das limitações mundanas, incluindo aquelas relacionadas ao movimento e descanso.

Assim, enquanto o karma se refere principalmente às consequências morais, sua influência estende-se a vários aspectos da vida, incluindo o reino físico. A acumulação e resolução do carma estão intrincadamente ligadas às experiências de um indivíduo de movimento, descanso e as condições gerais da existência no mundo.

CÓPIA PARA REVISÃO

14.3 Antiguidade Clássica e Filosofia Natural

14.3.1 Gregos

A abordagem grega da mecânica era filosófica e prática. Tendiam a discutir princípios mecânicos no contexto da filosofia natural.

Para os gregos antigos, filosofia natural era essencialmente o estudo do mundo natural e de seus fenômenos – englobando o que hoje tratamos como disciplinas separadas, tais como física, biologia, química e astronomia. Ao contrário da ciência moderna, ela não dependia fortemente de experiências, mas foi moldada pela observação, raciocínio lógico e especulação teórica. A filosofia natural grega lançou os conceitos e métodos fundamentais que definiriam a cultura intelectual do mundo ocidental e influenciaram estudiosos islâmicos romanos e medievais. Ele perdurou bem no início do período moderno, finalmente dando lugar à revolução científica (§ 5.3).

Essa continuidade é fundamental, pois enquanto a investigação mesopotâmica se baseava extensivamente na observação de longo prazo, a ciência grega enfatizava cada vez mais o raciocínio abstrato. Suas investigações muitas vezes repousavam em evidências empíricas limitadas e, às vezes, superficiais, seguidas de dedução lógica e argumento teórico.

Vamos, no entanto, brevemente delinear os perfis dos principais influenciadores, Fig. 14.2.

14.3.1.1 Empédocles (494-434 a.C.)

F

Empédocles , Fig. 14.2a, foi um antigo filósofo e poeta grego que viveu por volta do século 5 a.C.. Ele nasceu em Acragas (atual Agrigento) na Sicília, que era então uma colônia grega. Ele é mais conhecido por suas contribuições para a filosofia pré-socrática e suas teorias cosmológicas.

Empédocles afirmou a necessidade de duas forças opostas, "amor"(*Philotes, philia*E "Strife" (*Neikos*), que ele classificou junto com os quatro elementos da terra, água, ar e fogo, Fig. 14.3.. O amor servia como a força coesa que ligava a existência harmoniosamente, enquanto as lutas causavam ruptura e separação entre os elementos. Esta interação cíclica de amor e luta, semelhante à respiração de um organismo, refletiu a formação médica de Empédocles, derivando sua compreensão do universo da fisiologia. Amor, semelhante à atração física, originado do conceito de união na fisiologia. Empédocles não procurava uma explicação mecânica para processos cósmicos, pois via o organismo animal como fundamentalmente mais simples do que os mecanismos feitos pelo homem, com o fluxo e refluxo de sangue no corpo servindo de base para sua analogia fisiológica.

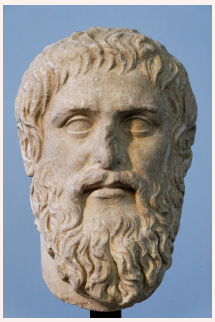
Suas ideias filosóficas eram influentes no pensamento grego antigo e continuaram a ser estudadas e debatidas por filósofos posteriores, incluindo Aristóteles e os Estóicos.

CÓPIA PARA REVISÃO

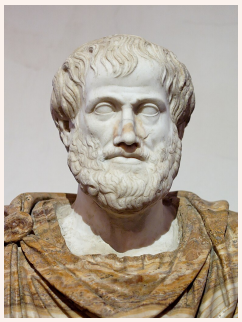
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Empédocles



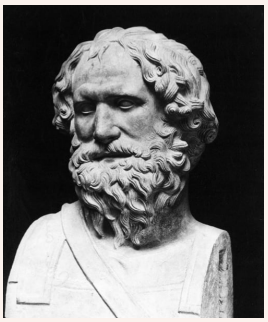
(b) Platão



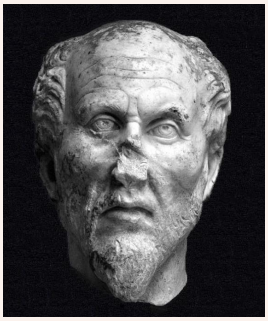
(c) Aristotle



(d) Posidonius



(e) Archemdis



(f) Plotinos



(g) Filopono



(h) Avicenna

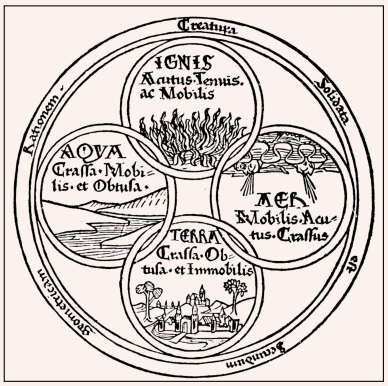


(i) Bagdá

Figura 14.2: Grandes influenciadores do conceito de força



(a) Agrigento



(b) Teoria de quatro elementos (fogo, ar, água e terra)

Figura 14.3: Empédocles (sobre)

14.3.1.2 Platão (427-348 a.C.)

Platão , 14.2b Interpretou os dois agentes de Empédocles como atração e repulsão, sugerindo que eles operam em sequências alternadas, enquanto Heráclito acreditava que essas forças operavam simultaneamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Platão, influenciado por suas doutrinas metafísicas, luta com a questão da origem do movimento. Em seu diálogo "As Leis" (Livro 10), ele explora vários tipos de movimento, tais como locomoção, rotação e combinação, finalmente rastreá-los de volta ao movimento espontâneo - o princípio fundamental da vida e alma[7]

> **Estranho ateniense**:. Então devemos dizer que a auto-moção é a origem de todos os movimentos, e o primeiro que surge entre as coisas em repouso também como entre as coisas em movimento, está o princípio mais velho e mais poderoso de mudança, e que é mudado por outro e ainda move outros é o segundo.
> **Cleinias, um Cretan**:. É verdade.
> **Ath.**:. Nesta fase do argumento vamos fazer uma pergunta.
> **Cie.**:. Que pergunta? **Ath.**:. Se víssemos esse poder existir em qualquer terreno, aguado, ou substância ardente, simples ou composta - como devemos descrevê-la?
> **Cie.**:. Você quer saber se devemos chamar uma vida de poder tão auto-movível?
> **Ath.**:. Eu quero.
> **Cie.**:. Certamente que deveríamos.
> **Ath.**:. E quando vemos alma em qualquer coisa, não devemos fazer o mesmo... não devemos admitir que isto é vida?
> **Cie.**:. Devemos
>
> Plato, 350 BC Laws, Book X

No entanto, os escritos de Platão não aplicam este conceito metafísico de força ao explicar o movimento real. Por exemplo, na visão de Platão, a gravidade, que causa o movimento em queda dos objetos terrestres, não está ligada ao seu conceito geral de força. Em vez disso, outra suposição inexplicável é introduzida: A tendência de coisas semelhantes para se unirem: A terra é assim atraída para a terra, água para a água e fogo para o fogo.

Isso naturalmente implicaria que cada elemento tem sua região designada no espaço. Esta noção de que existem regiões designadas no espaço, ou "lugares naturais", para os elementos, também foi mais tarde adotada por Aristóteles.

14.3.1.3 Aristóteles (384-322 a.C.)

Aristotle , Fig. 14.2c, aluno de Platão, tutor de Alexandre, o Grande. Através desta geometrização da gravidade, no entanto, a ideia de atração gravitacional foi por séculos expulsa da filosofia natural[8] V

Para sua mecânica adequada, Aristóteles limita-se unicamente ao conceito de força como a agência envolvida em *Puxando ou empurrando*, e ignora o conceito platônico de força como inerente à matéria ou o que podemos chamar hoje energia. Ele continua dizendo que é só quando algo externo move uma coisa, ou traz para descansar contra sua própria tendência

[7] Observe como Galileu usou a mesma forma de diálogo para avançar suas ideias.
[8] Foi só mais tarde, com os avanços na compreensão científica durante o Renascimento e o trabalho de figuras como Galileu e Newton, que o conceito de atração gravitacional ganhou aceitação e tornou-se integral para nossa compreensão moderna de Física.

CÓPIA PARA REVISÃO

interna, que dizemos que isso acontece pela força; Caso contrário, não dizemos que isso acontece à força.

Aristóteles não menciona as unidades em que acredita que a força deve ser medida. Pode-se supor que uma unidade de peso poderia ter sido usada para este propósito, pois o peso era historicamente a força mais antiga a ser medida e foi usado como referência para outras forças até os tempos modernos. Os gregos provavelmente mediram a força usando peso quando operavam alavancas, como prensas de óleo. No entanto, Aristóteles via o peso como uma manifestação de movimento natural ao invés de uma força de empurrar ou puxar. Portanto, o peso não poderia servir como a unidade padrão para medir as forças de acordo com Aristóteles.

Suas teorias foram baseadas em suas observações. Ele viu que os objetos virão descansar quando a força for removida (assim uma carroça virá para descansar quando o cavalo parar de puxá-la). Além disso, se os objetos caem eles se movem através de um meio, como ar ou água (de novo, movimento através de vácuo era considerado impossível). Em suma, Aristóteles viu um mundo em que sempre havia uma resistência oferecida ao movimento: Esta é a realidade do movimento. Assim, na estrutura de Aristóteles, a força foi conceituada como um empurrão ou puxar para um objeto, fazendo-o sofrer movimento violento, que ele classificou como

Natural De acordo com Aristóteles, o movimento natural era inerente aos objetos e foi impulsionado por sua natureza essencial. Por exemplo, objetos pesados tendem a cair para baixo porque é sua tendência natural procurar seu "lugar natural"no centro da Terra.

Violento movimento, por outro lado, era movimento que foi imposto sobre um objeto por uma força externa. Aristóteles acreditava que os objetos exigiam uma força externa contínua para sustentar o movimento contrário às suas tendências naturais. Por exemplo, empurrar uma pedra faria com que ela se movesse horizontalmente, mas a moção cessaria[9] uma vez que a força foi removida porque a tendência natural da pedra era para vir a descansar

. Em movimento violento, assim que o agente parar de causar isso, o movimento também para: Em outras palavras, o estado natural de um objeto é estar em repouso, uma vez que Aristóteles não aborda fricção que ainda não foi concebido como uma espécie de força na estrutura de Aristóteles. Embora Aristóteles inclua um agente externo que traz um corpo para descansar contra sua própria tendência interna, sob a categoria de forças, ele não possui um princípio de inércia .. Consequentemente, a continuação de um movimento obrigatório não pode ser considerada como uma "tendência interna", e o atrito, portanto, não pode se reconhecer como uma força.

A moção de projétil era um ponto difícil para a teoria do movimento aristotélico. Por sua teoria, tal movimento era difícil de explicar, para um movimento projétil, como violento,

[9]Poincaré, 1905 escreveu: ”Como Eles poderiam ter acreditado que a moção cessa com a causa da moção?’

CÓPIA PARA REVISÃO

exigiu um movedor distinto que continuamente tem que estar em contato com a coisa movida.

Aristóteles, adotou a classificação Empédocles. Para ele, terra e água eram considerados elementos pesados, tendendo a se mover para baixo em direção ao centro da Terra (*Gravitas*, enquanto ar e fogo eram considerados elementos de luz, tendendo a subir acima dos elementos mais densos (*Levitas*). Esta foi uma base para o *Teoria do peso e da leveza*. Assim, em um vácuo, não há nenhum meio para sustentar o movimento, e na ausência de resistência o objeto se moverá a velocidade infinita! (assim *A natureza abomina o vácuo*).

É importante notar que o conceito de inércia era estranho à física de Aristóteles. Aristóteles, e seus seguidores sustentavam que um corpo era mantido em movimento apenas pela ação de uma força externa contínua. A física aristotélica também foi referida como *Peripatética* Assume-se, um tema recorrente na história do conceito de força referindo-se ao conceito de movimento natural e à distinção entre movimento natural ou violento.

Note-se que, de uma perspectiva científica, a fusão da metafísica e física no pensamento aristotélico provou ser prejudicial. Por quase 19 séculos, seu trabalho tinha um status de autoridade que impedia o progresso. Por exemplo, sua ênfase na precedência do movimento rotacional sobre o movimento retilíneo impediu a exploração e descoberta de leis mecânicas, como evidenciado pelos desafios enfrentados por figuras como Bache, Kepler e Newton.

Aristóteles abordou a questão do paralelograma de forças. Barnes, 1984 Citações *Mechanica*

> Agora, se os dois deslocamentos de um corpo estão em qualquer proporção fixa, o resultado deslocamento deve necessariamente ser uma linha reta, e esta linha é a diagonal da figura, feita pelas linhas desenhadas nesta proporção. .. .. .. E a conversa também é verdade. É claro que, se um ponto for movido ao longo da diagonal por dois deslocamentos, é necessariamente movido de acordo com a proporção dos lados do paralelograma; Caso contrário, não será movido ao longo da diagonal[a]
>
> Aristotle, 2000 Mechanica, Mechanica 1: 848b. Cf. 23: 854b- 855a
>
> [a] As referências a Aristóteles seguem o padrão de numeração Bekker, em que os números se referem à página e pilar divisões da edição 1831 de Immanuel Bekkers *Aristotelis Opera*(por exemplo, "848b"significa página 848, certo pilar).

14.3.1.4 Arquimedes (287-212 aC): A demonstração de "O que"

Arquimedes (287-212 a.C.) tomou uma abordagem completamente diferente em seu *De Planorum Aequilibiis* (No Equilíbrio dos Aviões) (Archimedes, -250). Como Benvenuto "Enquanto Aristóteles relaciona a mecânica com uma teoria física, visando uma síntese universal, Archimedes pensa na estática como uma ciência racional e autônoma,

CÓPIA PARA REVISÃO

fundada em postulados quase evidentes e construída sobre rigorosa matemática "As manifestações"(Benvenuto, 1991a).

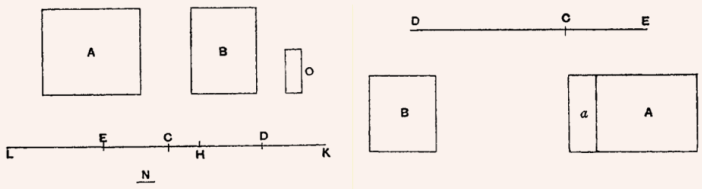
No Livro I (Props. 6-7), Arquimedes afirma a lei da alavanca em sua forma mais geral: "Duas magnitudes, sejam elas proporcionais ou incomensuráveis, equilíbrio em distâncias recíprocamente proporcionais às grandezas"(Archimedes, -250). Sua prova é lançada em termos de *magnitudes* (ainda não "forças") e procede por uma construção geométrica explícita: Escolha um ponto C em uma linha DE para que os segmentos sobre o fulcro satisfaçam a proporção recíproca (por exemplo, $A : B = DC : CE$), então mostre que colocando as magnitudes em D e.. E Equilíbrio em torno de C.. No caso commensurável, ele subdivide os braços em partes iguais e reduz o equilíbrio a agrupamentos simétricos; Para o caso incomensurável, ele estende o argumento por aproximação, preservando a mesma conclusão proporcional (Archimedes, -250).

Uma maneira moderna de *Visualize* o mesmo raciocínio é através de um experimento de pensamento em que as magnitudes são representadas por muitos pesos pequenos iguais, espalhados uniformemente ao longo da alavanca (Figura 14.4). Comece com um carga uniformemente distribuída sobre uma alavanca de comprimento total $(p + q)$, conhecido (por simetria) para equilibrar sobre seu ponto médio O.. Dividir a alavanca em dois segmentos de comprimento $2p$ e.. $2q$; cada segmento, pelo mesmo argumento de simetria, pode ser substituído por um único resultado proporcional ao seu comprimento (ou seja, $2p$ e.. $2q$) atuando em seu próprio ponto médio. Esses pontos médios estão a distâncias q e.. p De.. O, portanto o equilíbrio do sistema original distribuído implica equilíbrio de dois cargas concentradas $2p$ e.. $2q$ Colocado em braços de alavanca q e.. pOu seja, a lei da alavanca na forma recíproca $2p \cdot q = 2q \cdot p$, ou $p : q = p : q$ (equivalentemente $A : B = DC : CE$ na notação de Arquimedes).

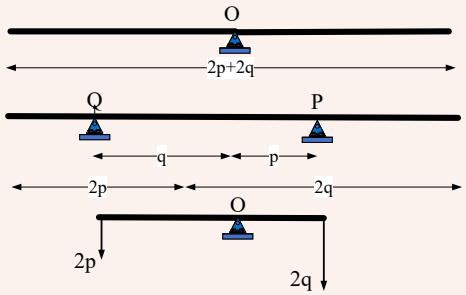
> LIVRO I. **Eu PÓSULO o seguinte:**
>
> 1. Pesos iguais a distâncias iguais estão em equilíbrio E pesos iguais em distâncias desiguais não estão em equilíbrio mas incline-se em direção ao peso que está a uma distância maior.
> 2. Se, quando pesos em certas distâncias estão em equilíbrio, algo ser adicionado a um dos pesos, eles não estão em equilíbrio mas inclina-se para aquele peso ao qual o A adição foi feita.
> 3. Da mesma forma, se algo for tirado de um dos pesos, eles não estão em equilíbrio mas inclinam-se para o Peso do qual nada foi tirado.
> 4. Quando números iguais e semelhantes coincidem se aplicados um ao outro, seus centros de gravidade coincidem igualmente.
> 5. Em números que são desiguais, mas similares os centros de A gravidade estará situada da mesma forma. Por pontos igualmente situados Em relação a figuras semelhantes quero dizer pontos tais que, se reta as linhas são desenhadas a partir deles para os ângulos iguais, eles fazem igual ângulos com os lados correspondentes.
>
> .....
>
> **Proposições 6, 7.**

CÓPIA PARA REVISÃO

> Duas magnitudes, se comensaláveis [Prop. 6] Ou incomensurável [Prop. 7], equilíbrio em distâncias mutuamente proporcionais às magnitudes.
>
> Archimedes, -250 De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)



(a) Original



(b) Interpretação moderna (adaptada de (Salencon, 2017))

Figura 14.4: Prova de Arquimedes da lei da alavanca

Esta prova é matematicamente rigorosa, mas, como Descartes Mais tarde observaria, explica-se - *Não, não, não* mas não *Cur ita sente-se'*—ele mostra *O quê* Acontece, mas não *Por quê* (Descartes, 1898). Arquimedes não invoca nenhum princípio geral; Cada máquina requer sua própria demonstração de postulados específicos.

Pode-se supor que Arquimedes, o pai da estática, tinha uma compreensão completa do conceito de força. No entanto, este não é o caso. Na verdade, suas contribuições para o conceito de força eram mínimas. Sua abordagem era principalmente geométrica, focando na distância e no peso. É importante notar que durante seu tempo, peso e forças foram considerados conceitos inteiramente separados.

14.3.1.5 Posidonius (135-51 a.C.) e os Estóicos

Ao contrário da visão de Aristóteles sobre a força como emanando da substância e localizada no assunto, Posidonius , Fig. 14.2d, vê a força como fundamental e inerente à relação entre objetos. Para ele, a força é uma correspondência mútua *Compaixão* entre objetos interagindo, unificando o universo através de um sistema de forças.

CÓPIA PARA REVISÃO

Esta concepção estóica de força, onde o agente e paciente são inseparáveis, reflete sua crença na unidade do cosmos. Os estóicos traçam paralelos entre esta ideia e o conceito de 'simpatia' na medicina, onde uma parte da doença do corpo afeta o todo, estendendo essa noção ao cosmos. Apresentar um substrato, material ou espiritual, para explicar o funcionamento da 'simpatia', reflete uma concessão à noção de força aristotélica.

Só com os estóicos o conceito de força toma uma nova direção. A investigação sobre a relação entre marés e os movimentos de corpos celestes inicia esta mudança. Essa investigação não é nova. Aristóteles já o abordou, enfatizando forças de puxar e empurrar para explicar o fenômeno. De acordo com ele, o movimento do sol gera ventos, que então empurram as águas do mar, causando marés. Posidonius, no entanto, aborda este problema de forma diferente. Ele viaja para Gades para estudar marés em primeira mão, coletando fatos e dados relevantes. Ele observa a periodicidade das marés, que se alinham com ciclos celestes. Poseidonius interpreta este fenômeno através do conceito de *Tonos*Uma tensão universal.

14.3.2 Romanos, Plotino (204-270)

F

O conceito de 'simpatia' como uma forma de força desempenhou um papel significativo na literatura científica, filosófica e mística do período romano também. Plotino , Fig. 14.2f, um filósofo proeminente desta era, freqüentemente atribuída ação à distância dele.

Magia e astrologia, que eram temas centrais na vida intelectual tanto do período romano quanto da Idade Média, pareciam encontrar racionalização no conceito de força de Plotino. De acordo com Plotino, a magia opera através da conexão simpática entre objetos semelhantes e diferentes. A magia simpática envolve induzir um certo estado em uma parte do universo com a crença de que um estado correspondente é produzido em outro lugar.

Assim, o conceito de força para os romanos foi influenciado por várias tradições filosóficas, incluindo as dos gregos. Estoicismo , que teve um impacto significativo no pensamento romano, também contribuiu para a sua compreensão da força. Na filosofia estóica, a força era muitas vezes vista como um aspecto inerente do universo, governando as interações entre objetos. Estava intimamente ligado à crença estóica no destino e determinismo, bem como sua ênfase em viver em harmonia com a natureza. Além disso, engenheiros romanos e estrategistas militares desenvolveram entendimentos práticos de força através de seu trabalho na construção de infraestrutura e em guerras, embora estes estavam mais preocupados com a aplicação da força ao invés de sua teoria Arranhões. No geral, o conceito romano de força foi moldado por uma combinação de ideias filosóficas e considerações práticas.

Na literatura latina posterior, os conceitos de força física e agências ocultas são muitas vezes misturados sem distinção. O termo *virtus* tipicamente engloba ambos esses conceitos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Além disso, porque a tradução Vulgata comumente traduz o grego *dynamis* Como *virtus*, o mesmo termo é usado para denotar forças em contextos físicos e religiosos.

O conceito de "simpatia"também foi empregado para fornecer suporte lógico à astrologia. "Sinpatia"foi usada para explicar a influência da lua nas marés, como Plotino fez, e seus efeitos sobre seres vivos. Proclus expandiu-se sobre esta ideia, afirmando que as esferas celestes influenciam eventos mundanos.

Plotino fez a pergunta: "As estrelas têm algum efeito"? Ele via estrelas, como Platão fazia, como seres eternos e divinos, expressões da onisciência da alma do mundo. Ao contrário dos fiéis aristotélicos que, como Ptolomeu, rejeitaram ações à distância e tentaram explicar marés através de forças de contato (tais como correntes atmosféricas, calor e luz), Plotino atribuiu influências cósmicas e astrológicas ao simpático relação que, em sua visão, existe entre todas as partes do universo.

14.3.3 Bizantino, Filopono (490–570)

F

John Philoponus , Fig. 14.2g, também conhecido como Johannes Philoponus ou João o Grammarian , foi um filósofo bizantino , teólogo e cientista que viveu no século VI dC. Ele nasceu em Alexandria, Egito. Philoponus fez contribuições significativas para vários campos, incluindo filosofia, teologia e ciência natural.

Em filosofia, Philoponus é mais conhecido por sua crítica à física de Aristóteles, (Philoponus, 1993). Ele desafiou as ideias aristotélicas sobre movimento, argumentando contra o conceito de um estado natural de repouso para objetos e propondo que uma força externa era necessária para manter um objeto em movimento. Isso desafiou a noção de movimento de Aristóteles e lançou as bases para desenvolvimentos posteriores na física, particularmente durante o Renascimento e a Revolução Científica. Philoponus desafiou vários conceitos aristotélicos, incluindo a teoria do movimento de Aristóteles e o conceito de força. Aristóteles propôs que uma força externa era necessária para manter um objeto em movimento, e que quando a força fosse removida, o objeto iria parar. No entanto, Philoponus discordou dessa noção.

Philoponus primeiro argumenta explicitamente contra a explicação de Aristóteles que uma pedra lançada, depois de deixar a mão, não pode ser impulsionada mais pelo ar atrás dela. Então ele continua:

> Em vez disso, alguma força cinética imaterial deve ser transmitida ao projétil pelo lançador. Pelo que o ar empurrado não contribui nada ou apenas muito pouco para esta moção. Mas se corpos em movimento são necessariamente movidos desta forma, é claro que o mesmo processo ocorrerá muito mais facilmente se uma flecha ou uma pedra for jogada necessariamente e contra sua tendência para o espaço vazio, e que nada é necessário para isso exceto a Atirador
>
> Philoponus, 1993 Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5

CÓPIA PARA REVISÃO

.

Esta última frase é destinada a mostrar que no espaço vazio - que Aristóteles rejeita - e ao contrário da opinião de Aristáteles, um corpo em movimento continuaria se movendo.

Com base na razão e experiência, ele concluiu que deve haver um corpo real ou *inclinação* (tendência de um objeto para se mover ou acelerar em uma determinada direção sob a influência de uma força) força motriz que é absorvida pelo projétil e causa seu movimento até que seja gasto pela resistência.

Para Philoponus, a inclinação é transmitida pelo projetor ao projétil e continuou propondo o conceito de impulso .. Ele sugeriu que os objetos em movimento possuíam um inato força ou ímpeto que os mantinha em movimento, mesmo na ausência de uma força externa. De acordo com Philoponus, este impulso foi responsável pelo movimento contínuo de um objeto e poderia explicar vários fenômenos observados na natureza. Em outras palavras, movimento foi mantido por alguma propriedade do corpo, transmitido quando ele foi posto em ação. É importante notar que para ele, o conceito de *Força incorpórea* explica também o movimento natural, como a queda livre de um corpo e o movimento dos céus. Isso voltará como um problema no Renascimento. Deve ser apontado que Philoponus usa duas expressões diferentes para o impulso: Capacidade cinética (*dynamis*) e força cinética (*Energeia*). Ambas as expressões designam em sua teoria um conceito, que está próximo ao conceito atual de energia, mas estão longe das concepções aristotélicas de potencialidade e atualidade.

Assim, Philoponus é creditado com o estabelecimento de algumas das bases para pensamento moderno, mais crítico e análise científica, rompendo com alguns dos aspectos mais defeituosos da lógica aristotélica e platônica por refutar sua teoria da gravidade.

14.4 Período Medieval e Escolástica

O período medieval viu a fusão da teologia cristã com a física aristotélica através do Escolástico, que buscava racionalizar fenômenos naturais com doutrina religiosa, mas muitas vezes faltava fundamentação empírica. A Renascença iniciou uma mudança em direção à observação e experimentação, preparando o palco para a Revolução Científica. Figuras como Galileu e Newton eram fundamentais, com a formulação de Newton das leis do movimento e da gravitação universal cristalizando o conceito de força em um contexto científico. A física moderna expandiu essas ideias em teorias mais abrangentes como o eletromagnetismo e a mecânica quântica, aperfeiçoando ainda mais nossa compreensão da força.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

14.4.1 Islâmicos

F

14.4.1.1 Avicenna (980–1037)

Abu-Ali-al-Husayn ibn AbdAllah ibin Sina, fig. 14.2h, (mais conhecido como Avicenna) (980-1037) revisitou o trabalho de Aristóteles, e desenvolveu uma teoria mais complexa do movimento. Ele sugeriu que um projétil recebe de seu ''mover'' *Mayl* uma quantidade relacionada com o peso do objeto (peso) que ajuda a carregar movimento. Por isso, todo objeto que aceita o ato de ceder*al-mayl*) de fora tem que ter alguma inclinação natural *Mayl Tibaci* que seria reduzida pelo atrito. Não está muito claro se o *Mayl* também foi responsável pela velocidade, caso em que este teria sido de fato um precursor precoce para o conceito de momento mais tarde desenvolvido por Newton. Avicena concordou assim que um impulso é dado a um projétil pelo lançador, mas ao contrário de Philoponus, que acreditava que era uma virtude temporária que iria declinar mesmo no vácuo, ele o via como persistente, exigindo forças externas como o ar resistência para dissipar.

Para Avicena, a inclinação, no entanto, não é uma força em si, mas sim um *Instrumento da força do movedor* para comunicar sua ação com a coisa movida. O *Mayl* é algo permanente, mas destrutível. Como Aristóteles, Avicena distinguiu um "maio natural"(*mail tabī'ī*), que é a causa do movimento natural de corpos caindo e um "maio violento' (*May Qasrī*), a causa do movimento projétil. Se não houvesse resistência ao mayl, por exemplo, em um vazio, ele persistiria infinitamente como o movimento que gera. Ele também alegou que um projétil no vácuo não iria parar a menos que fosse feito (o que é consistente com a primeira lei de Newton).

14.4.1.2 Bagdái (1080–1165)

F

Outro crítico da teoria do ímpeto foi Hibat Allah Abu'l-Barakat al-Baghdaadi[10] , Fig. 14.2i, que escreveu *Kitab al-Mu'tabar*, onde ele negou a idéia de Aristóteles de que uma força constante produz movimento uniforme. Ele fez uma distinção entre velocidade e aceleração e mostrou que a força é proporcional à aceleração ao invés da velocidade, prefigurando assim a segunda lei de movimento de Newton. Ele afirmou que o movedor transmite uma inclinação violenta (*May Qasrī*) no movimento e que isso diminui à medida que o objeto em movimento se distancia do movedor.

Ele modificou a teoria de Avicena e afirmou que *May Qasrī* é autoexpensável, então pode haver um movimento violento em um vazio, que chegaria ao fim sem resistência externa.

[10]Também condome com seu nome de nascimento hebraico Baruch ben Malka antes de se converter do judaísmo ao Islã.

CÓPIA PARA REVISÃO

14.4.2 Jordanus de Nemore (ca 1225-ca1260) e Gravidade Posicional

V

Jordanus de Nemmore foi o mecânico mais importante do período medieval, em seu tratado sobre a ciência dos pesos, *Elementa super demonstraçãoem ponderam* (intimamente relacionado com o mais tarde *De ratione ponderis* Analisou o plano inclinado comparando as "velocidades" (deslocamentos) de pesos em planos de inclinação diferente. Seu argumento, que um peso em um plano mais íngreme tem maior "gravidade posicional" (*Gravitas secundum situm*) porque ele desce mais para um determinado movimento ao longo do avião – implicitamente invoca virtual deslocamentos, embora sem reconhecê-los como tal. Este conceito de gravidade posicional, que efetivamente decompõe a força gravitacional de acordo com a direção da restrição, foi uma contribuição original impressionante (pelo menos em sua forma explícita e sistemática) e representa um passo crucial para o moderno Entender sistemas mecânicos restritos.

14.4.3 Idade Média: Universidade de Paris

F

A Universidade medieval de Paris era uma corporação composta por grupos autônomos. Isto se aplica não só à sua divisão em quatro faculdades distintas de artes, teologia, direito canônico e medicina, mas era verdade para as quatro nações da faculdade de artes. Foi nesta venerável instituição que Buridan e Oresme quase se sobrepuseram.

Oresme era tanto um filósofo natural quanto teólogo, enquanto a experiência profissional de Buridan estava confinada à filosofia natural que ele praticava por muitos anos como mestre em artes na Faculdade de Artes. Buridan comentou quase exclusivamente sobre Aristóteles. O legado de Oresme é bem diferente. Ele não só comentou pelo menos seis dos tratados de Aristóteles, mas escreveu quase o dobro dos tratados sobre uma ampla gama de tópicos.

14.4.3.1 Buridan (1295-1358)

F

Jean Buridan (Johannes Buridanus) refinou a teoria de *impulso* e sugeriu que um objeto em movimento possui uma certa força ou ímpeto que o mantém em movimento. Ao contrário da clássica visão aristotélica, que sustentava que os objetos se moviam apenas enquanto uma força fosse aplicada continuamente a eles, a teoria de Buridan sugeria que um objeto continuaria a mover-se com uma velocidade constante, a menos que atuasse por uma força externa (Buridan, 1991). Em outras palavras, Buridan introduziu a ideia de inércia, em que um objeto mantém seu estado de movimento, a menos que seja operado por uma força externa.

Ele também sugeriu que as forças da resistência e gravidade do ar prenderão o corpo. Buridan também sugeriu que o ímpeto dado a um corpo aumentasse com a velocidade com que foi posto em movimento, e com sua quantidade de matéria .. Claramente, estamos nos

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Buridan



(b) Oresme

Figura 14.5: Buridan, Oresme

aproximando cada vez mais do conceito moderno de impulso. Contrariamente a Newton, esta ainda era uma descrição qualitativa:

> ...depois de deixar o braço do lançador, o projétil seria movido por um impulso dado a ele pelo arremessador e continuaria sendo movido enquanto o ímpeto permanecesse mais forte que a resistência, e seria de duração infinita se não fosse diminuída e corrompida por uma força contrária resistindo a ela ou por algo inclinando-a para um movimento contrário.
>
> Buridan, 1991 John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics

Sobre o impulso celestial das esferas, ele escreveu

> Deus, quando criou o mundo, moveu cada um dos globos celestes como Ele quis, e ao movê-los impressionou neles impulsos que os moveram sem ter de movê - los mais... e aqueles impulsos, que ele imprimiu nos corpos celestes foram não diminuiu ou corrompeu depois, porque não havia inclinação dos corpos celestes para outros movimentos. Nem havia resistência que seria corrompida ou repressiva desse impulso.
>
> Buridan, 1971 John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo

Assim, no caso do movimento dos corpos celestes, o ímpeto é a força impressionada por Deus, que causa sua eterna *circular* Moção. Este conceito de ímpeto ajuda a descrever todos os tipos de movimento: Movimento terrestre, violento e natural de corpos pesados, bem como movimento de corpos celestes, não materiais.

Buridan também argumentou que o ímpeto é uma qualidade variável cuja força é determinada pela velocidade e quantidade da matéria no assunto. Desta forma, a aceleração de um corpo caído poderia ser entendida em termos de sua acumulação gradual de unidades de impulso. Uma grande armadilha disso *impulso* A teoria é que Buridan considerou isso como causa e não o resultado do movimento (uma grande diferença). Apesar de suas implicações revolucionárias, Buridan não usou o conceito de ímpeto para

CÓPIA PARA REVISÃO

transformar a ciência da mecânica. Ele não era, um precursor de Galileu, e permaneceu sem desculpas aristotélico em muitos outros aspectos.

Ao introduzir o conceito de inércia e enfatizar o papel da observação empírica na compreensão do mundo natural, Buridan abriu o caminho para a revolução científica dos séculos XVI e XVII.

14.4.3.2 Oresme (1320-1382)

Oresme§8.2.1) expandiu-se sobre as idéias de Buridan sobre o movimento projétil e a conservação do impulso, desenvolvendo ainda mais a noção de que o ímpeto poderia ser transferido entre corpos durante colisões ou interações. A formação de Oresme em matemática permitiu que ele abordasse questões de movimento com uma perspectiva quantitativa. Ele empregou o raciocínio matemático em suas discussões de ímpeto e movimento, lançando as bases para o posterior tratamento matemático da dinâmica por figuras como Galileu e Newton. F

Seus comentários sobre Aristóteles e seus próprios tratados sobre filosofia natural foram amplamente lidos e influentes durante o final da Idade Média e Renascimento. Suas obras ajudaram a divulgar e popularizar as ideias de Buridan e outros pensadores medievais, incluindo aquelas relacionadas ao ímpeto e dinâmica.

As contribuições de Buridan e Oresme para a teoria do ímpeto desempenharam um papel crucial na preparação do terreno intelectual para a revolução científica dos séculos XVI e XVII. A mudança da física aristotélica e para uma abordagem mais empírica e matematicamente rigorosa do estudo da natureza deve-se muito às percepções e argumentos de figuras como Buridan e Oresme.

14.5 Renascimento e Revolução Científica

14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519)

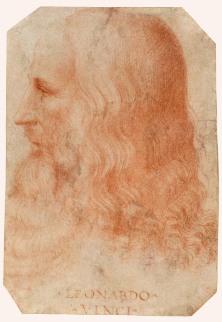
Sem dúvida, Leonardo, Fig. 14.6a, (§7.2.1) estava profundamente ciente da teoria de Buridan, e certamente ele tinha algo para escrever sobre o conceito de força (Vinci, 1938 PDF). F

Aqui está a definição de força de Leonardo,

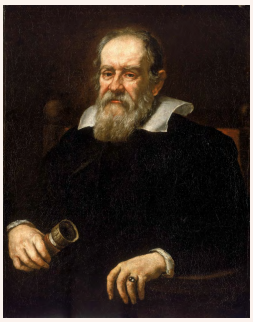
> Eu digo que a força é uma virtude espiritual, um poder invisível que, por meio da violência acidental, é causada pelo movimento, introduzido e infundido nos corpos, que são atraídos e desviados de seu hábito natural, dando-lhes uma vida ativa de Poder maravilhoso; Ele obriga todas as coisas criadas a mudar de forma e lugar, corre com fúria até sua morte desejada, e diversificará de acordo com as causas. A lentidão a torna grande e a velocidade a enfraquece. Nasce pela violência e morre de liberdade. E quanto maior for, mais rápido se consome. Ele caça com fúria o que se opõe

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.


(a) Leonardo


(b) Benedetti


(c) Galileu


(d) Kepler


(e) Descartes


(f) Leibniz

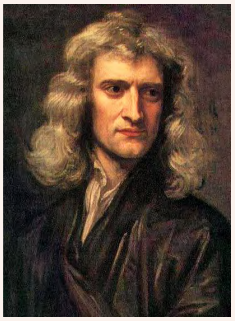

(g) Newton

Figura 14.6: Leonardo, Benedetti, Galileu, Kepler, Descartes, Leibniz, Newton

> à sua destruição, deseja derrotar, matar a sua causa, o que a impede, e vencer, mata-se; torna-se mais poderoso encontrando maiores obstáculos. Tudo escapa com fúria até sua morte. Ser coagido limita tudo. Nada se move sem ele. Onde o corpo nasce, não cresce e seu peso e sua forma não são modificados. Nenhuma moção feita por ela é sustentável. Cresce em fadigas e desaparece por descanso. O corpo onde está confinado não tem liberdade. E muitas vezes, através do movimento, gera uma nova força.
>
> Vinci, 1938 The Notebooks of Leonardo da Vinci

O que Leonardo define é um impulso, ou talvez o que chamamos hoje de energia cinética.

14.5.2 Benedetti (1530-1590)

Giovanni Benedetti, Fig. 14.6b, modificou a teoria madura do ímpeto insistindo que força impressa produz movimento retilíneo sozinho: F

> ...,[Qualquer] parte da matéria corporal que se move por si só quando um impulso foi impressionado com ela por qualquer força de motivação externa tem uma tendência natural para mover-se em um caminho retilíneo, não curvo.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

Benedetti usa o exemplo familiar de uma pedra girada em uma funda para argumentar que movimento circular é forçado, não natural, e que o corpo "procura" um caminho reto uma vez liberado.

No entanto, a descrição amplamente citada do caminho tangente da pedra, juntamente com a afirmação de que o ímpeto impressionado gradualmente e continuamente diminui, não é Benedetti. Ele se origina na escola de ímpeto parisiense anterior, especialmente Albert da Saxônia, que dá a versão canônica em seu Quaestiones super Physicam. Sua formulação diz:

> Quando o projétil é liberado da funda, ele toma seu caminho, com a natureza como seu guia, do ponto em que saiu da funda ao longo de uma linha tangente ao círculo que fez por último,... Agora é verdade que o ímpeto impressionado gradualmente e continuamente diminui.
>
> Saxony, 1988 Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis

O relato de Albert enfatiza dois pontos ausentes em Benedetti: a geometria tangente da liberação, e a decadência do ímpeto devido à resistência - ambas características da escola de Paris do século XIV.

Por Benedetti (Drake, 1976), em contraste, o aumento da velocidade no movimento é resultado de uma ação contínua da força, enquanto a tendência para baixo natural (*Gravitas*) permanece constante. Em movimento ascendente oblíquo de um corpo pesado, assumindo que não há resistência ao ar, o impulso impressionou impulsiona o corpo reto apenas enquanto ele permanece mais forte do que a tendência descendente inerente. Porque a tendência descendente é constante, um suposto conflito surge entre os dois poderes; à medida que o ímpeto impressionado enfraquece, eles eventualmente se equilibram, em que ponto a tendência natural traz o corpo de volta para a Terra. O assunto sobre o qual Benedetti diferiu de Buridan torna-se claro na continuação da passagem acima:

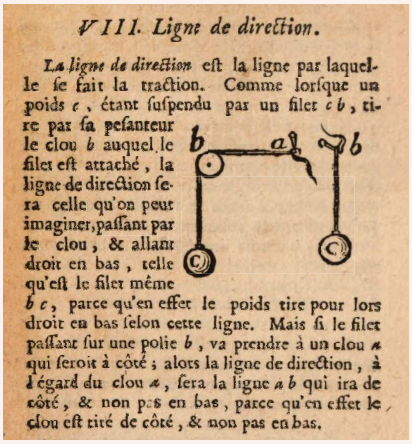
> ...;Dessa forma, a tendência descendente do corpo, causada por sua gravidade, entra imediatamente e, misturando-se com a força impressionável, não permite que a linha permaneça reta por muito tempo, mas faz com que rapidamente se torne curvada. Pois o corpo é movido por dois poderes, um impressionado pela força, o outro pela natureza.
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

14.5.3 Pardies (1636-1673)

Pardies está entre os primeiros pioneiros da resolução de forças e do conceito de equilíbrio. Formulou técnicas matemáticas para analisar a estabilidade das estruturas e a distribuição

CÓPIA PARA REVISÃO

de forças dentro dos sistemas mecânicos. Ele também fez importantes contribuições para a compreensão do Paralelograma de forças, um método geométrico para determinar a força resultante agindo em um corpo submetido a múltiplas forças. Seu trabalho ajudou a estabelecer os princípios matemáticos subjacentes ao equilíbrio das forças e lançou as bases para desenvolvimentos posteriores no campo da estática , Fig. 14.7.



VIII. Ligne de direction.

La ligne de direction eſt la ligne par laquelle ſe fait la traction. Comme lorſque un poids *c*, étant ſuſpendu par un filet *c b*, tire par ſa peſanteur le clou *b* auquel le filet eſt attaché, la ligne de direction ſera celle qu'on peut imaginer, paſſant par le clou, & allant droit en bas, telle qu'eſt le filet même *b c*, parce qu'en effet le poids tire pour lors droit en bas ſelon cette ligne. Mais ſi le filet paſſant ſur une polie *b*, va prendre à un clou *a* qui ſeroit à côté; alors la ligne de direction, à l'égard du clou *a*, ſera la ligne *a b* qui ira de côté, & non pas en bas, parce qu'en effet le clou eſt tiré de côté, & non pas en bas.

Figura 14.7: Noções de equilíbrio por Pardies, 1710

14.5.4 Simon Stevin (1548-1620)

F/V

Na Força

F

Simon Stevin, Fig. 14.8, um matemático holandês creditado com a fundação da disciplina de hidrostática, foi o primeiro a identificar o princípio de *equilíbrio*[11] As forças, também conhecidas como *paralelograma de forças*.

Seu tratado (Stevin, 1586) na estática cobria a determinação de centros de gravidade, aplicações estáticas (*De Weeghdaet*), e hidrostáticas (*De Waterwicht*), Fig. 14.9.. Interessante, nesta publicação ele também reitera sua convicção da excelência das línguas germânicas. Segundo ele, o holandês é a melhor linguagem para fins científicos porque combina brevidade com clareza[12].

[11] Note que muitas vezes é errado que a terceira lei de Newton..*Para cada ação, há uma reação igual e oposta*Fornece um equilíbrio de duas forças, a ação e reação iguais e opostas. Mas a lei diz que se um corpo A exerce uma força F_a no corpo B, então corpo B exercerá uma força igual e oposta F_b no corpo A.. Não há equilíbrio porque as forças F_a e.. F_b são exercidos em corpos diferentes, um no corpo A e o outro no corpo B.

[12] De fato, por muitos anos nos Estados Unidos, estudantes de pós-graduação - especialmente aqueles em química e física - foram obrigados a estudar alemão.

CÓPIA PARA REVISÃO

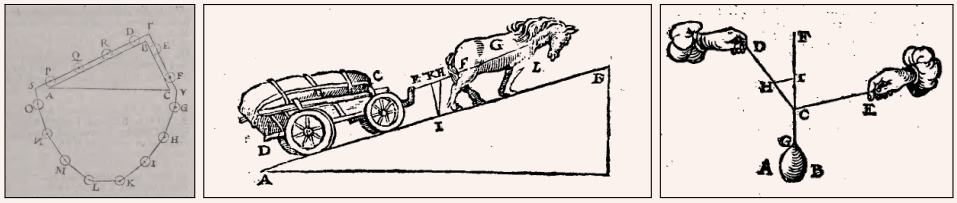


Figura 14.8: Simon Stevin (1548-1620)


DIALECTIKE
OFTE
BEVVYSCONST.
Leerende van allen saecken recht ende consteliick Oordeelen, Ock opencnde den weech tot de alderdiepste verborghentheden der Natueren.
Beschreven int Neerduytsch door Simon Stevin van Brugghe.
Tot Leyden,
By Christoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.
Fig. 5
DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.
Tot Leyden,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.
Fig. 6
292
GEORGE SARTON

Figura 14.9: A principal publicação de Stevin (Stevin, 1586 PDF)

Stevin (Miller, 2017 PDF) compara as forças exercidas por duas cordas suportando um peso à força necessária para sustentá-lo com uma única corda vertical. Em sua representação, Fig. 14.10, o peso AB pode ser suportado por um único cordão CF, onde C é o centro de gravidade do peso, ou por duas cordas CD e.. CE.. Neste último caso, as forças exercidas pelas cordas podem ser encontradas desenhando paralelos das cordas para a vertical: Se a força total necessária para suportar o peso com uma corda (ou seja, o "peso de todo o prisma") é proporcional a CI, então a força componente dirigida para D é proporcional a CH, onde H é encontrado desenhando a linha HI paralelo com a outra força de componentes direcionada para E.. Da mesma forma, desenhando o outro paralelo, IK, dá uma magnitude proporcional à força dirigida para E, ou seja CK.. As duas forças componentes, proporcionais aos lados do paralelograma, juntas têm um efeito equivalente à única força proporcional a CI, a diagonal.

Apesar das aparências, no entanto, esta não é uma verdadeira regra de Paralelograma para as forças. Apenas as grandezas das quantidades são calculadas; As instruções são dadas *A priori*.. Crucialmente, Stevin não mostra que as forças componentes necessariamente produzirão um resultado em uma direção específica – a vertical. Ele simplesmente assume que esse será o caso. Informações direcionais são colocadas na construção, mas não extraídas dela. Assim, na melhor das hipóteses, esta é uma regra para decompor uma determinada magnitude escalar em dois outros; as forças não são tratadas como magnitudes direcionadas, ou *Vetores*.

No entanto, Stevin demonstrou que forças agindo em um corpo poderiam ser representadas geometricamente e que a força resultante poderia ser determinada pela adição deles. Este princípio forneceu uma estrutura matemática para analisar os efeitos de múltiplas

CÓPIA PARA REVISÃO

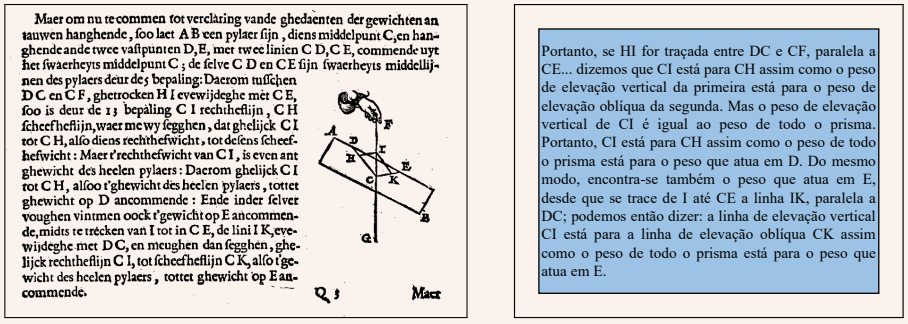


Figura 14.10: A representação de Stevin de um corpo apoiado por uma ou duas cordas; (Stevin, 1586) e.. (Miller, 2017)

forças agindo sobre um corpo e estabeleceu importantes bases para o desenvolvimento posterior das leis de movimento de Newton.

Consulte também para §14.5.4 para uma discussão adicional sobre o tratado de Stevin.

Os Clootcrans e os Trabalho virtual

Stevin fez uma contribuição decisiva com seu famoso *Clootcrans* Demonstração de 1586 (Stevin, 1586). Uma cadeia de bolas espaçadas uniformemente drapeadas sobre uma cunha triangular (Figura 14.11) deve estar em equilíbrio, pois caso contrário estaria em movimento perpétuo – que Stevin considerou obviamente impossível. A partir disso, ele derivava da lei do plano inclinado. Stevin estava tão orgulhoso desta prova que a figura aparece na capa de seus livros com o lema "Wonder en is gheen wonder" (Magic não é mágica).

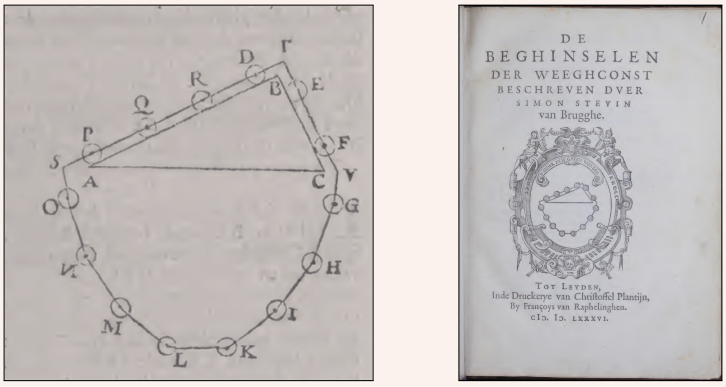


Figura 14.11: Stevin's *Clootcrans* Demonstração.

Ghelijck des driehoucx rechter fijde tot de flincker, alfo t'ftaltwicht des cloots op de flyncker fijdes, Tottet Ftaltwicht des cloots op de rechter fijde.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tghegeven. Laet ABC een driehouck wesen diens plat fy rechthuckich op den fichteinder, ende den grondt AC euewydich vanden fichteinder, ende op de fijde AB, die dobbel fy an BC, ligghe een cloot D, ende op d Fijde BC een cloot E, euewichtich ende euegroot met den cloet D.

T'begeerde. Wy mocten bewyfen dat ghelijck de fijde AB 2, tot BC 1, alfoo t'ftaltwicht des cloots E, tottet Ftaltwicht des cloots D.

Tbereytsel. Laet ons Maecken Rondtom den driehuck ABC eenen crans van veerthien clooten, euegroot, Euewichtich, ende euewijt van malcandcren als E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D,Al Ghefnoert an een lini, Ftreckende porta haer middelpunten, alfo dat fy op morrer middelpuntem drayan mueghen...

Tbewys. Soo t'ftaltwicht der vier clooten D, R, Q, P, niet euen en waer meet het ftaltuícht de twee cloon E, F, É de T'ander Fal Fwaerder Fijn; De vier D,R,Q,P... De acht clooten fullen neerwaert rollen, ende d'ander fes rijfen.

Maer dit foo wefende, den crans der clooten... De acht clooten ter flincker fijde wederom neer rollen caído, End'ander fes rijfen, Welcke valling ter een der, ende rijfing ter ander, omdat de reden altijdt de felue é, altijdt ghedueren fal, ende de clooten caiu uyt haer feluen een eeuwich roerfel maken, t'welck valfch é.

Daerom Ghelijck de Lini AB, tot BC, alfoo den cloot D tot den Cloot E.

Como o lado direito do triângulo é para a esquerda, assim é o "peso de pé" da esfera no lado esquerdo Para o peso da esfera do lado direito.

Dado: Que o ABC seja um triângulo cujo plano é perpendicular ao horizonte, com base AC paralela ao horizonte. Do lado AB, que é a dupla BC, deixe lá uma esfera D; e no lado BC uma esfera E, igual em peso e tamanho a D.
Necessário: para provar que como AB (2) é a BC (1), assim o peso de pé da esfera E é ao peso de A esfera D.

Preparação: Vamos fazer, ao redor do triângulo ABC, uma coroa de catorze esferas, igual em tamanho e peso e igualmente espaçados, etiquetados E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D, todos pendurados em uma linha passando por seus centros para que eles possam virar Esses centros...
Prova: Se o peso das quatro esferas D,R,Q,P não fosse igual ao peso de pé das duas esferas E,F, então uma Ou o outro lado seria mais pesado... As oito esferas rolariam para baixo e as outras seis subiriam. Mas se isso fosse assim, a coroa de esferas voltaria a rolar para baixo à esquerda e levantar-se à direita; E uma vez que a razão seria sempre O mesmo, isso continuaria para sempre, e as esferas produziriam um movimento eterno, que é falso.
Portanto, como a linha AB é para BC, assim é a esfera D para Esfera E.

Stevin, 1586 De Beghinselen der Weeghconst

O que Stevin está dizendo:

- **Lei do plano inclinado (vantagem mecânica).** Para contato sem fricção, a força (ou "peso efetivo") necessária ao longo de uma inclinação é proporcional ao comprimento inclino: Na notação de Stevin,

$$\frac{D}{E} = \frac{AB}{BC},$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Assim, quanto mais longa a inclinação (para a mesma altura), menor é a tração necessária.

- **Fórmula equivalente moderna.** Por um peso W Em uma inclinação de ângulo θ, comprimento L, e altura h,

$$P = W \sin\theta = W\,\frac{h}{L}\,,$$

Então duas rampas diferentes para a mesma altura requerem forças em proporção inversa com seus comprimentos.

- **Ligação conceitual com raciocínio virtual.** Stevin argumenta por contradição: Se as forças não se equilibrarem, o sistema rodaria em torno de um ciclo fechado e renderia movimento perpétuo. Uma vez que isso é impossível, a tendência de driving na rede deve cancelar em equilíbrio— um antepassado próximo de mais tarde virtual-trabalho e virtual– deslocamento argumentos.

Stevin provavelmente considerou esta derivação como uma das mais importantes no tratado, o que explicaria por que *Clootcrans* aparece como uma vinheta de página de título (Figura 14.11).

14.5.5 Galileu (1564-1642)

Galileo Galilei , Fig. 14.6c, está em um momento crucial na história da mecânica. Suas contribuições abrangem dois domínios inter-relacionados: o conceito nascente de inércia que eventualmente deslocaria a teoria do ímpeto, e um raciocínio proto-virtual-trabalho que antecipa formulações posteriores baseadas em energia de equilíbrio mecânico.

De Impetus à Inércia

F

Em sua *Discorsi e dimostrazioni matematicalhe, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & Eu me movimenti locali* (Galilei, 1638)Galileu iniciou uma concepção moderna de impulso, caracterizando o ímpeto como um efeito e medida do movimento tratado em função do peso e da velocidade. Suas experiências com planos inclinados e corpos caídos o levaram a formular o princípio da inércia, que afirma que um objeto permanecerá em seu estado de movimento–quer em repouso ou se movendo com velocidade constante– a menos que atuado por uma força externa. Este princípio desafiou a visão aristotélica de que os objetos naturalmente descansam quando não estão sujeitos a influências externas, e lançou as bases para a primeira lei do movimento de Newton.

Vamos lembrar que a teoria do ímpeto implicava que na ausência de uma força, um objeto viria descansar; O conceito de inércia não foi entendido. As palavras de Galileu marcam a transição:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Eu observei que os corpos físicos têm uma inclinação Em direção a algum movimento, como corpos pesados para baixo, qual movimento é exercido por eles através de uma propriedade intrínseca e sem necessidade de um movimento externo especial, sempre que eles não são impedidos por algum obstáculo. E para alguma outra moção eles têm um repugnância, como os mesmos corpos pesados para mover-se para cima, por isso Eles nunca se movem dessa maneira a menos que jogado violentamente Para cima por um movedor externo. Finalmente, para alguns movimentos eles são indiferentes, assim como corpos pesados para movimento horizontal[a] para Que não têm inclinação... Nem repugnância... E Portanto, todos os impedimentos externos sendo removidos, um corpo pesado Em uma superfície esférica concêntrica com a terra será indiferente para descansar ou se mover em direção a qualquer parte do horizonte. E permanecerá no estado em que foi colocado uma vez; Isto é, se colocado em um estado de repouso, ele vai conservar isso; E se.. Colocado em movimento para o oeste, por exemplo, ele vai manter Ele mesmo nesse movimento. Assim, uma nave... tendo uma vez Recebeu algum ímpeto através do mar tranquilo, iria se mover continuamente ao redor do nosso globo sem nunca parar... Se... Todos impedimentos extrínsecos podem ser removidos.
>
> Galilei e Drake, 1990 *"Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)"*

[a] Para Galileu, "horizontal"implica um movimento de um corpo que é *Não* em direção ou longe do centro da Terra.

Galileu introduz aqui o conceito de inércia pela primeira vez.[13] Notamos que começa com *inércia circular* (de corpos celestes), e depois estende-se para as naves que vão *Por aí* O globo. Infelizmente, não há menção direta e explícita de *Inerência linear*, embora certamente poderia ter sido inferido de observar a navegação de um navio (presumivelmente ao longo de uma linha reta para um observador). Isso teria que esperar por Newton. Simplificando, Galileu mudou de *Mecânica do impulso à inércia clássica* Mecânica.

Também vale a pena notar que Galileu mais tarde (em 1632) concluiu que baseado nesta premissa inicial de inércia, é impossível dizer a diferença entre um objeto em movimento e um imóvel sem alguma referência externa para compará-lo contra.. Princípio que Einstein abraçaria mais tarde, embora seja extremamente improvável que ele tenha sido diretamente inspirado por Galileu:

> SALV. Então, ainda persistemos na ideia inveterada de não nos movermos a menos que nossas pernas nos carreguem.
>
> O que está dizendo é verdade, meu caro Simplicio, se o objeto que vê estiver em movimento enquanto você permanece parado para observá-lo. Mas se você está em um poço quando o poço e vocês juntos são levados pela rotação da terra, não vê que nem em uma hora, nem em mil, nem por toda a eternidade, você nunca será tomado pela boca do poço? A maneira como o movimento ou não move da terra age sobre você em tal situação pode ser reconhecida não pela boca do poço, mas de algum outro objeto separado que não compartilha o mesmo estado de movimento - ou devo dizer, de descanso.

[13] Precursores do pensamento inercial aparecem em tradições de ímpeto anteriores; O ponto aqui é que Galileu dá uma declaração pouco explícita e fisicamente fundamentada (primeira em forma circular/horizontal) e a usa sistematicamente.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

A Regra Dourada da Mecânica

V

Além de seu trabalho sobre inércia, Galileu conecta a eficácia das máquinas às distâncias através das quais as forças atuam, e ele faz isso de uma forma que antecipa raciocínio mais tarde virtual-trabalho.. Em *Le meccaniche* (Galilei, 1594), ele afirma uma restrição geral em instrumentos mecânicos:. Nenhum dispositivo pode realmente multiplicar a força sem uma perda compensatória na velocidade (e, equivalentemente, um aumento no tempo). Sua formulação é explícita:

> cioè, che quanto si guadagna di forza per mezo loro, altrettanto si scapita nel tempo e nella velocità.
>
> Isso é: Tudo o que é ganho em vigor por seus meios é perdido pela mesma quantidade no tempo e na velocidade (velocidade).
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

Este princípio de compensação – mais tarde popularizado em livros didáticos como o *Regra de ouro da mecânica*Afirma que qualquer ganho em vigor deve ser pago por uma perda correspondente de velocidade (ou, equivalentemente, um aumento na distância e no tempo através do qual a força movente atua).

Galileu observa imediatamente que a declaração pode parecer paradoxal, porque o parafuso (e arranjos relacionados) pode parecer aumentar a força *sem* requerendo uma viagem mais longa do que o corpo movido.

> ... Senza che il motore si muova per più Pulgo Viaggio está se movendo.
>
> ... Sem que o movedor se mova por uma viagem mais longa do que o corpo movido.
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

Em outras palavras, sua análise pórticos o plano inclinado e as máquinas simples em termos das respectivas ‘‘viagens’ (*viaggi*) da força de movimento e da carga; Mas sua explicação permanece na linguagem do tempo e da velocidade.[14]

Para dissolver a aparência do paradoxo, Galileu retorna ao plano inclinado e compara movimentos em um ambiente geometricamente controlado. O que importa não é apenas a distância traçada ao longo de um guia, mas a mudança vertical contra a gravidade. Na

[14]Em contraste com formulações posteriores baseadas no trabalho, Galileu muitas vezes argumenta através de comparações cinemáticas de velocidades e tempos, um enquadramento que permanece mais perto de discussões anteriores (pré-Newtonianas) de movimento.

CÓPIA PARA REVISÃO

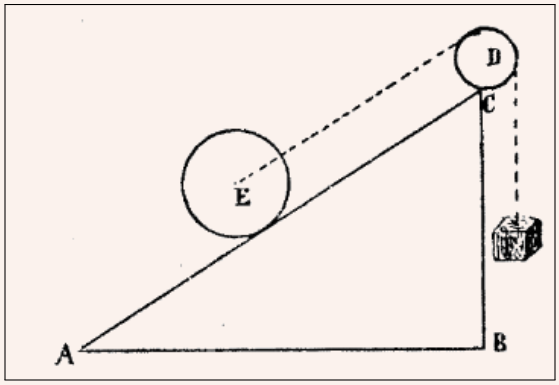


Figura 14.12: Estudo de avião inclinado de Galileu (Galilei, 1594)

notação moderna (idealizada, sem fricção), elevando um peso W através de uma altura h puxando um plano de comprimento L requer uma força

$$P = W\,\frac{h}{L} = W \sin\theta,$$

para que o produto $P\,L$ igual a $W\,h$.. A máquina reduz a força necessária apenas aumentando a distância (e assim, em cadência comparável, o tempo) através do qual a força aplicada deve agir. Galileu expressa este acordo em termos de velocidade e tempo ao invés de em termos do "trabalho", mas o conteúdo é o mesmo: *Não se pode obter vantagem mecânica sem pagar em movimento* (Galilei, 1594).

Esta linha de pensamento corre em paralelo com Simon Stevin anteriormente inclinado-plano argumento baseado no *Clootcrans*:. Stevin infere equilíbrio da impossibilidade de movimento perpétuo, e desse equilíbrio recupera a proporcionalidade que governa o plano inclinado. Galileu atinge a mesma restrição física do ponto de vista das máquinas, enfatizando o necessário comércio entre força e distância (daí em diante tempo) através do qual a força age. Tomados juntos, Stevin e Galileu ilustram duas rotas complementares para um princípio que mais tarde se torna padrão na linguagem de trabalho virtual: Uma máquina não pode criar vantagem mecânica sem um pagamento em movimento (Stevin, 1586; Galilei, 1594).

Nesse sentido, a "Regra de Ouro"de Galileu é um antepassado próximo de formulações virtuais e virtuais: Para uma máquina ideal em equilíbrio, qualquer movimento admissível é restringido para que o trabalho líquido das forças aplicadas cancele.. Mais tarde, os autores reformulariam o mesmo invariante em uma linguagem analítica mais sistemática, mas a visão central já está presente nos escritos mecânicos de Galileu e é ecoada novamente no *Discorsi* no contexto mais amplo de máquinas simples e a transmissão da força (Galilei, 1638).

CÓPIA PARA REVISÃO

Limitações Matemáticas e Contexto Histórico

Galileu não tinha a estrutura matemática da geometria analítica cartesiana e cálculo que Newton comandaria mais tarde. Embora seu contemporâneo Kepler formulou suas famosas três leis, as contribuições matemáticas de Galileu permaneceram limitadas, muitas vezes heurísticas ou simplistas na natureza. Por exemplo, as tentativas de Galileu para localizar o linha neutra (§7.2.2) demonstrar esta limitação. Portanto, não é surpreendente que Galileu não tenha formulado especificamente uma equação relacionada à inércia – isso teve que esperar Newton.

Galileu, que é considerado o "pai da física"ou "pai de mecânica experimental", conseguiu defender o copernicanismo enquanto estava fisicamente próximo do Papa (que mantinha a visão geocêntrica aristotélica). Assim, é digno de nota que enquanto Galileu enfrentava o escrutínio por seu apoio à visão heliocêntrica do universo, seu contemporâneo Giordano Bruno (1548-1600) Tive um destino muito mais duro. Enquanto Galileu foi obrigado a retratar suas crenças heliocêntricas perante a Igreja Católica Romana, Bruno, um filósofo italiano e frade dominicano, enfrentou perseguição e foi executado por sua defesa inflexível de heliocentrismo e outros Teorias cosmológicas consideradas heréticas pelas autoridades religiosas.

14.5.6 Kepler (1571-1630)

F

Discutir o surgimento do universo heliocêntrico está além do escopo deste livro. No entanto, o afastamento da geocentricidade levou a um reexame dos conceitos de forças e impulso, que são centrais para o foco deste capítulo.

Um lembrete rápido: O trabalho de Bache envolvia uma extensa coleção de observações, documentando meticulosamente os movimentos dos corpos celestes e compilando dados em tabelas. Apesar da meticulosidade de sua abordagem empírica, estas observações careceram de um quadro matemático coeso ou explicação física[15].. A ausência de uma base teórica abrangente significava que as observações de Bache permaneceram desconectadas de uma compreensão mais profunda da mecânica celestial.

Foi Johannes Kepler, Fig. 14.6d, que eventualmente forneceu o modelo matemático necessário para fazer sentido dessas observações, com suas leis de movimento planetário. No entanto, uma explicação completa dos princípios subjacentes teve que esperar o trabalho inovador de Newton e sua teoria da gravidade universal (Kepler, 1609). Resumindo, Kepler foi o primeiro a procurar um *definição quantitativa de força*Vamos ver como.

Mas primeiro, devemos notar que Kepler era ambíguo: em um mesmo trabalho o conceito de força é às vezes referido como uma alma e às vezes como uma quantidade física, quase mecânica corporeal. Claramente, até ele estava lutando para se desmamar de Aristóteles.

[15]Isso era parecido com a realização de numerosos testes materiais, limitando-nos a tabulá-los em uma planilha. O que falta é um modelo constitutivo matemático abrangente para explicar os fenômenos subjacentes

CÓPIA PARA REVISÃO

Em sua *Mysterium cosmographicum1* Kepler ainda mantém a concepção tradicional celestial de força como uma alma animando os corpos e dirigindo seus movimentos adequados.

Kepler concebe a natureza universal das forças gravitacionais e chama a gravidade de "passividade"ao invés de atividade. Ele chegou à conclusão de uma coincidência temporal das marés com certas posições lunares. Como resultado dessas investigações, alguns avançaram a teoria de que a lua causa as marés. Kepler concorda com esses defensores da teoria da lua, mas generaliza essas descobertas em um sentido importante: Os oceanos são atraídos pela lua tanto quanto todos os pesados Os objetos, incluindo os oceanos, são atraídos pela terra. Fig. 14.13.

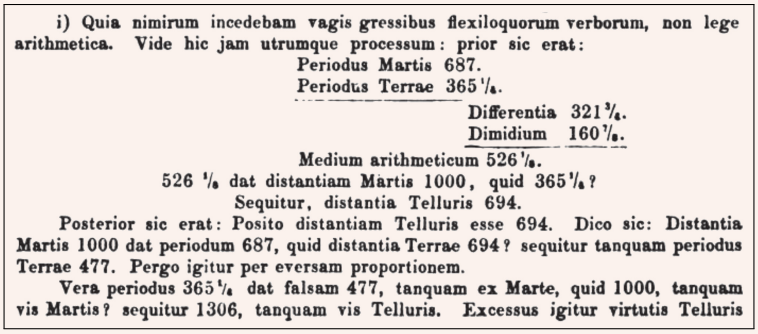
Kepler procurou uma explicação dinâmica do movimento planetário em seu primeiro tratado astronómico *Astronomia nova*.. Na introdução do livro ele escreve:

> Aqui está a verdadeira doutrina da gravidade. A gravidade é uma afeição mútua entre os corpos relacionados, que tende a uni-los e conjugá-los (da qual também a faculdade magnética), enquanto a terra atrai a pedra em vez da pedra tende para a terra. Mesmo se colocássemos o centro da Terra no centro do mundo, não seria para este centro do Mundo como tal que corpos pesados seriam levados mas sim para o centro do corpo redondo ao qual eles estão relacionados, ou seja, para o meio da terra. Assim, não importa para onde a terra seja transportada, é sempre em direção a ela que corpos pesados são carregados graças à faculdade animando-a.
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis

De fato, neste mesmo *Nova Astronomia* (1609) ele menciona a descoberta de que o curso de um planeta é ''um caminho oval, perfeitamente elíptico". Ele relatou que obteve esse resultado, realizando provas mais laboriosas e... Computações em um número muito grande de observações. Ele também tornou explícito que seu sucesso foi baseado em descartar a abordagem de Ptolomeu, que havia considerado o movimento médio do Sol, ao invés de seu aparente movimento. De acordo com Kepler, Ptolomeu tinha a impressão de que não haveria diferença entre os dois movimentos, então ele escolheu o método anterior para facilitar o cálculo. Copérnico (1473-1543) e Brahe (1546-1601) seguiram Ptolomeu, mas para Kepler este não era o caminho a seguir. Já em seu estudo inicial, ele havia indicado que o movimento aparente deve ser levado em consideração, isto é, o ponto de referência deveria ser o verdadeiro corpo do Sol. Mas isso não foi suficiente. Para Kepler uma combinação bem sucedida de cálculos com observações não é suficiente; O padrão escondido nas observações tem que ser acessível à explicação física. Tal padrão deve corresponder aos três domínios distintos que juntos constituem para Kepler o quadro para a execução da necessária reforma da astronomia: geometria, física e observações (Hon e Zik, 2009).

Deve-se notar que Kepler nunca invocou a inércia (moderna do conceito) em sua escrita. Ao observar que a velocidade planetária é mais alta no periélio e mais baixa no afélio, Kepler se convenceu de que o papel do Sol neste fenômeno era essencialmente físico na natureza e assim *Mais mecânico do que espiritual*.

CÓPIA PARA REVISÃO



i) Quia nimirum incedebam vagis gressibus flexiloquorum verborum, non lege arithmetica. Vide hic jam utrumque processum: prior sic erat:

Periodus Martis 687.
Periodus Terrae 365 ¼.
Differentia 321 ¾.
Dimidium 160 ⅞.
Medium arithmeticum 526 ⅛.

526 ⅛ dat distantiam Martis 1000, quid 365 ¼?
Sequitur, distantia Telluris 694.

Posterior sic erat: Posito distantiam Telluris esse 694. Dico sic: Distantia Martis 1000 dat periodum 687, quid distantia Terrae 694? sequitur tanquam periodus Terrae 477. Pergo igitur per eversam proportionem.

Vera periodus 365 ¼ dat falsam 477, tanquam ex Marte, quid 1000, tanquam vis Martis? sequitur 1306, tanquam vis Telluris. Excessus igitur virtutis Telluris

Figura 14.13: Cálculos Kepler (Kepler, 1855)

> Se você substituir pela palavra ”alma” a palavra ‘‘força”’, você tem o próprio princípio sobre o qual a física celestial do tratado em Marte etc. é baseado... Antigamente eu acreditava que a causa do movimento planetário é uma alma, fascinada como eu era pelos ensinamentos de J. C. Scaliger na inteligência motora. Mas quando percebi que esses motivos atenuam com a distância do sol, cheguei à conclusão de que essa força é algo corporal, se não for assim corretamente, pelo menos em certo sentido.
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis

Aí está!

Finalmente, seu trabalho prefigurava a descoberta da lei da gravidade, pois reconhecia que a força agindo sobre os planetas deve ser uma força radial e atraente centrada no sol. Esta foi uma saída significativa da noção de força de Aristóteles como um arrasto tangencial.

14.5.7 Descartes (1596-1650)

René Descartes fez contribuições cruciais tanto para o conceito de força quanto para o princípio de trabalho virtual. Onde Kepler era "mecanicista", tirando conclusões (e equações) das observações, Descartes— não esqueçamos que ele era um grande filósofo (*Cogito Ergo Sum*- ...tomou uma abordagem mais especulativa. Seus conceitos explicaram como os corpos se movem e interagem baseados em princípios filosóficos, embora sua abordagem carecesse do formalismo matemático e poder preditivo da obra de Kepler.

Curiosamente, o próprio Católico Descartes passou a maior parte de sua vida na República Holandesa, onde ele se juntou ao exército protestante holandês como mercenário e estudou engenharia militar conforme estabelecido por Simon Stevin. Estes foram os anos da Idade de Ouro Holandesa, caracterizada pela abertura cultural em contraste com o ambiente mais repressivo na França.

Mais sobre Descarts em §6.6.3.

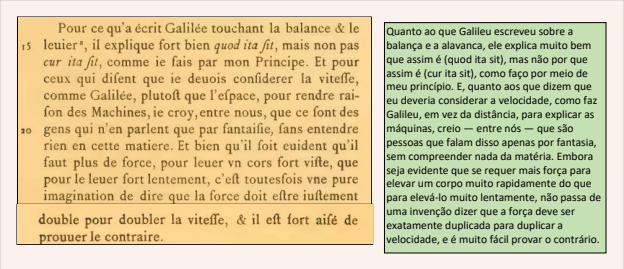
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Força e Impetus

F

Descartes[16] A contribuição para o conceito de força foi apresentar uma alternativa ontológica[17] A estrutura em que o ímpeto tradicional não podia mais encontrar um lugar, Fig. 14.14.


Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance & le leuier*, il explique fort bien *quod ita ſit*, mais non pas *cur ita ſit*, comme ie fais par mon Principe. Et pour ceux qui diſent que ie deuois conſiderer la viteſſe, comme Galilée, plutoſt que l'eſpace, pour rendre raiſon des Machines, ie croy, entre nous, que ce ſont des gens qui n'en parlent que par fantaiſie, ſans entendre rien en cette matiere. Et bien qu'il ſoit euident qu'il faut plus de force, pour leuer vn cors fort viſte, que pour le leuer fort lentement, c'eſt toutesfois vne pure imagination de dire que la force doit eſtre iuſtement double pour doubler la viteſſe, & il eſt fort aiſé de prouuer le contraire.

Quanto ao que Galileu escreveu sobre a balança e a alavanca, ele explica muito bem que assim é (quod ita sit), mas não por que assim é (cur ita sit), como faço por meio de meu princípio. E, quanto aos que dizem que eu deveria considerar a velocidade, como faz Galileu, em vez da distância, para explicar as máquinas, creio — entre nós — que são pessoas que falam disso apenas por fantasia, sem compreender nada da matéria. Embora seja evidente que se requer mais força para elevar um corpo muito rapidamente do que para elevá-lo muito lentamente, não passa de uma invenção dizer que a força deve ser exatamente duplicada para duplicar a velocidade, e é muito fácil provar o contrário.

Figura 14.14: René Descartes (1596-1650)

O conceito de ímpeto de Descartes focava principalmente no movimento dos corpos na Terra ao invés de corpos celestes. Estava mais preocupado em explicar o movimento terrestre, como o movimento de projéteis, ao invés do movimento orbital dos planetas. Sua abordagem era qualitativa, usada para explicar a persistência do movimento ao invés de fornecer uma teoria matemática precisa.

Em sua *Princípios da Filosofia* (1644), Descartes afirma que Deus é a causa universal e primária do movimento, na medida em que conserva a quantidade total de movimento e descanso que Ele criou inicialmente no universo por meio de sua concordância comum Deus conserva o mundo material pela mesma ação e de acordo com as mesmas leis de quando Ele o criou *Princípios*, a identificação do ato de Deus da criação com o Seu ato de conservação serve para mostrar que Deus produz essas transferências em movimento resultantes de colisões que preservam a quantidade total de movimento e descanso Ele criou inicialmente (Schmaltz, 2003).

De acordo com Descartes, o universo estava cheio de uma substância chamada "éter', e este éter estava em constante movimento, formando redemoinhos ou vórtices. Corpos celestiais, incluindo o sol, planetas e estrelas, foram transportados por esses vórtices, como objetos flutuando em um riacho:

> Mas eu desejo agora que você considere qual a gravidade desta terra é, isto é, a força que une todas as suas partes, e que faz Todos eles tendem para o seu centro, todos mais ou menos de acordo como

[16] Mais sobre Descartes em §6.6.3

[17] Ontologia: o ramo da filosofia preocupado com a natureza do ser, existência ou realidade. Em termos mais simples, trata de perguntas sobre o que as coisas são fundamentalmente, como elas existem e o que significa para algo existir.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Eles são mais ou menos grandes e sólidos; que não é mais nada e consiste Só nisto, que as partes do pequeno céu que o rodeia, Virando muito mais rápido do que o seu próprio fazer em torno de seu centro, tendem também Com muito mais força para se retirarem dele, e consequentemente Empurre-os de volta para lá.
>
> Descartes, 1927 Selections

Aqui Descartes tenta mostrar que as partículas mais volumosas que constituem o vórtice no centro do qual a terra está situada estão constantemente se movendo em direção à circunferência do vórtex, devido ao seu maior volume; A matéria terrestre, coerindo em grandes caroços, não pode ceder tão facilmente à pressão externa como esta substância etérea (Jammer, 1957).

Virtual Deslocamentos e a construção Tangent

V

Seguindo os insights geométricos de Stevin, Descartes trouxe clareza sem precedentes ao princípio de trabalho virtual, transformando-o de uma regra de proporção em uma fundação para toda a estática. Suas contribuições, preservadas em sua extensa correspondência (Descartes, 1898), representam um avanço conceitual decisivo: O reconhecimento que só *Infinitesimal* deslocamentos importa, e isso *espaço*Não a velocidade, é a medida adequada da vantagem mecânica.

O Princípio Fundamental (1637). Em uma carta para Christiaan Huygens em 5 de outubro de 1637, acompanhando seu pequeno tratado *Explicação des engins par l'aide desquels on peut avec une petite force level un fardeau forte pesant*Descartes declarou o princípio fundamental com uma admirável clareza:

> A invenção de todas essas máquinas é fundada em um princípio, que é que a mesma força que pode levantar um peso, por exemplo, de 100 libras, até dois pés, também pode elevar um peso de 200 libras até um pé, ou um peso para 400 libras até meio pé, E assim por diante, desde que seja aplicado a eles.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Huygens, 5 October 1637, AT I, 435–436

Isso expressa a conservação do produto da carga vertical deslocamento–superficialmente semelhante à regra de proporção de Aristóteles, mas com uma diferença crucial: *Não há nenhuma referência ao tempo ou velocidade.*. A força de que Descartes fala não é um esforço instantâneo, mas uma *Ação* medido pelo produto de peso e altura atravessados. Como ele explicaria mais tarde, esta ação tem duas dimensões, ao contrário da força necessária apenas para manter um peso em repouso, que tem apenas uma.

A Geometria do Infinitesimal Deslocamento (1638). Descartes desenvolveu as implicações de seu princípio em uma carta notável para Mersenne datado de 13 de julho de 1638.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Aqui ele introduziu o conceito decisivo de *movimento incipiente*E mostrou como aplicar seu princípio aos corpos obrigados a se moverem por caminhos curvos.

A visão chave aparece no início da carta:

> Daqui segue-se evidentemente que o peso relativo de cada corpo, ou o que é a mesma coisa, a força que deve ser empregada para sustentá-lo e impedi-lo de descer quando está em uma determinada posição, deve ser medida pelo *início do movimento* que o poder de apoio teria que fazer, quer elevá-lo ou segui-lo se descesse. Para que a proporção entre a linha reta que este movimento descreveria e aquela que marcaria o quanto o corpo se aproximaria do centro da Terra, seja igual à mesma entre sua peso absoluto e relativo.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 228–229

Várias características desta passagem merecem ênfase. Primeiro, a frase "início do movimento" (*Iniciando o movimento*) sinaliza que Descartes não está preocupado com finitos deslocamentos mas com infinitesimais – a geometria da restrição em um ponto, não o caminho atravessado por uma distância mensurável. Segundo, o uso do humor condicional ("'*teria que fazer*," "*descreveria*") indica que não consideramos real deslocamentos mas *potencial* Um. Isso abre a porta para o conceito de *virtualidade* que mais tarde seria explicitado por Johann Bernoulli.

Algumas linhas depois, Descartes tornou explícito o caráter infinitesimal de seu raciocínio:

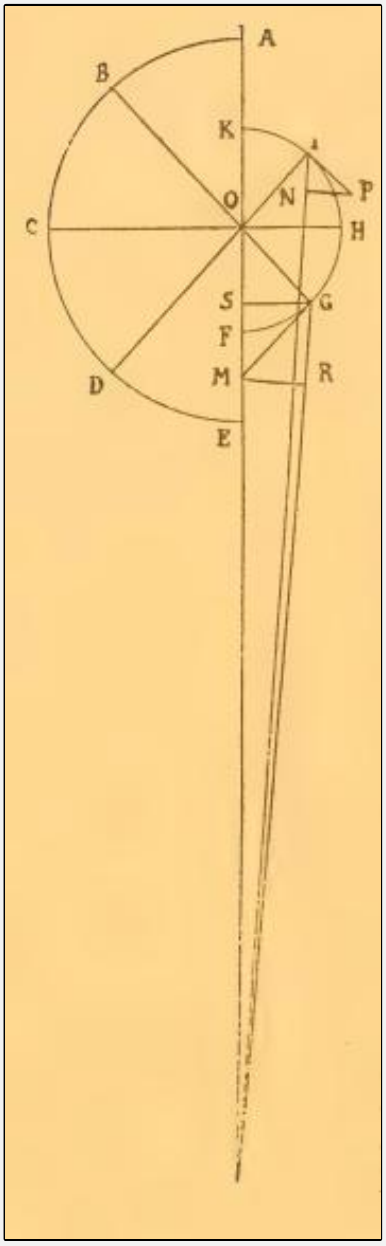
> Note que eu digo *Começar a descer*, e não simplesmente descer, porque é apenas o início da descida que deve ser levado em conta.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 233

Esta é uma declaração decisiva. O que importa não é o movimento finito, mas o infinitesimal *Começando* de movimento.

A alavanca e a construção Tangent. Descartes ilustrou seu princípio através de três exemplos: A polia, o plano inclinado e a alavanca. O exemplo da alavanca é particularmente importante porque mostra como lidar com restrições que forçam o movimento ao longo de caminhos curvos. A passagem completa merece citação, pois representa uma das mais claras exposições da estática pré-lagrangeana:

> **Exemplo 3 - A alavanca.**

CÓPIA PARA REVISÃO



Vamos *CH* Seja uma alavanca apoiada no ponto *O* de tal forma que, quando é levantada ou reduzida, o fim *C* descreve o semicírculo *ABCDE* E o fim *H* O semicírculo *FGHIK*, dos quais semicírculos *O* é o centro. Além disso, não se leve em conta sua espessura ou peso, mas que seja considerado como uma linha reta matemática na qual o ponto *O* Mentiras. Agora observe que, enquanto a força ou poder que se move descreve todo o semicírculo *ABCDE* e age nessa linha *ABCDE*, embora o peso (que eu suponho estar na outra extremidade) também descreve o semicírculo *FGHIK*, não é no entanto levantada pelo comprimento daquela linha curva *FGHIK*Mas só pelo comprimento da linha reta *FK*.. Assim, a proporção entre a força que move este peso e seu peso não deve ser medida pela proporção entre os dois diâmetros desses círculos, ou entre suas duas circunferências, mas sim por aquela entre a circunferência do primeiro e o diâmetro do segundo.

Considere ainda mais que esta força não precisa ser tão grande para mover a alavanca quando está perto *A* ou perto *E* Como quando está perto *B* ou perto *D*Nem tão grande quando está perto *B* ou perto *D* Como quando está perto *C*.. A razão é que o peso aumenta menos nessas posições. Isso é fácil de ver se, supondo que a linha *COH* para ser paralelo ao horizonte e *AOF* Para cortá-lo em ângulos retos, um leva o ponto *G* igualmente distante dos pontos *F* e.. *H*E o ponto.. *B* igualmente distante dos pontos *A* e.. *C*E, tendo desenhado *GS* paralelo ao horizonte, nota-se que a linha *FS*, que marca quanto esse peso sobe enquanto a força age ao longo da linha *AB*, é muito menor do que a linha *SO*, que marca o quanto ele sobe enquanto a força age ao longo da linha *BC*.

Agora, a fim de medir exatamente o que esta força deve ser em cada ponto da linha curva *ABCDE*, deve-se pensar que ele age lá da mesma forma como se estivesse arrastando o peso em um plano circularmente inclinado; e a inclinação em cada ponto deste plano circular (ou esférico) deve ser medida pela linha reta que toca o círculo naquele ponto. Assim, por exemplo, quando o poder está no ponto *B*, a fim de encontrar a proporção que deve ter para o peso do peso que é então no ponto *G*, deve-se desenhar a tangente *GM*E outra linha do ponto *G*, como *GR*, que tende diretamente para o centro da terra; Então, do ponto *M*, tomada à vontade na linha *GM*, desenhar *MR* em ângulos retos para *GR*; E devemos considerar que o peso deste peso, no momento *G*, é para a força que seria necessária naquele lugar para sustentá-lo ou movê-lo ao longo do círculo *FGH*, como a linha *GM* é para *GR*.. Então, se a linha *BO* Supõe-se que o dobro da linha *OG*, a força no momento *B* Só precisa ser a este peso no momento *G* como metade da linha *GR* é para toda a linha *GM*; E se *BO* e *OG* são iguais, esta força deve ser para este peso como toda a linha *GR* é para toda a linha *GM*, etc.

Da mesma forma, quando a força está no ponto *D*, para saber quanto o peso então no momento *I* pesa, deve-se desenhar a tangente *IP* e a linha reta *IN* em direção ao centro da terra; E do

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © ©2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA (pode conter imprecisões ou erros)
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 235–237

O movimento crucial nesta análise é a substituição do caminho curvo por seu *tangente* no ponto em questão. Esta é uma construção diferencial-geométrica: A tangente capta a direção instantânea do movimento permitido, e a proporção $GM : GR$ Dá a vantagem mecânica nessa configuração precisa. Na linguagem moderna, diríamos que Descartes está calculando o componente da força gravitacional ao longo da direção de restrição – ou equivalentemente, avaliando o trabalho virtual para um infinitesimal deslocamento ao longo do tangente.

Espaço, não Velocidade. Descartes estava plenamente ciente de que sua abordagem diferia da dos seus antecessores e contemporâneos, muitos dos quais formularam princípios mecânicos em termos de velocidades. Em uma carta a Mersenne em 15 de novembro de 1638, ele contrastava sua abordagem com Galileu:

Despeje o que écrit Galilée touchant la balance et le lever, il explique fort bien - *Não, não, não*Mais non pas *Cur ita sente-se*, comme je fais par mon Principe. Et pour ceux qui disent que je devois considérer la vitesse, comme Galilée, plutôt que l'espace, pour rendre raison des Machines, je croy, entre nous, que d.C. sont des gens qui n'en parlent que par fantasie, sans entendre rien en cette matière. . .

Sobre o que Galileu escreveu sobre o equilíbrio e a alavanca, ele explica muito bem *O que está acontecendo* mas não *Por que acontece*, como eu faço através do meu princípio. E quanto àqueles que dizem que devo considerar a velocidade, como Galileu faz, em vez do espaço, para explicar as máquinas, eu acredito, entre nós, que eles são pessoas que falam apenas de fantasia, sem entender nada do assunto. . .

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 15 November 1638, AT II, 433–434

Esta passagem revela a convicção de Descartes de que seu princípio não fornece meramente uma regra correta, mas um genuíno *Explicação*.. Galileu e outros poderiam derivar a lei da alavanca, mas sua invocação de velocidades obscureceu a verdadeira razão para vantagem mecânica. Em uma carta de 12 de setembro de 1638, Descartes elaborou por que deliberadamente excluiu a velocidade de sua formulação:

Não é a diferença na velocidade que faz esses pesos ter que ser um dobro do outro, mas a diferença no espaço. . . E se eu tiver mostrado alguma habilidade em qualquer parte deste pequeno tratado sobre estática, estou disposto a que ele seja conhecido que está mais nisso sozinho do que no resto. Pois é impossível dizer algo bom ou sólido sobre a velocidade sem ter explicado o que realmente é pesado, e junto com ele todo o sistema do mundo. Agora, como eu não queria fazer isso, encontrei uma maneira de omitir essa consideração, e separar os outros dela para que eu pudesse explicá-los sem ela.

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 12 September 1638, AT II, 353–355

Esta é uma notável afirmação metodológica. Descartes reconheceu que um tratamento

CÓPIA PARA REVISÃO

completo das velocidades exigiria uma teoria da dinâmica – um relato de como as forças produzem acelerações, o que por sua vez exigiria entender a própria natureza da gravidade. Ao formular estática puramente em termos de espacial deslocamentos, ele alcançou uma teoria auto-suficiente que não dependia de questões não resolvidas na física. O princípio de trabalho virtual, nas mãos de Descartes, tornou-se uma afirmação puramente geométrica sobre equilíbrio, independente de qualquer hipótese dinâmica.

Legado de Descartes

As contribuições de Descartes para o princípio de trabalho virtual podem ser resumidas em quatro pontos:

1. **O princípio fundamental**:. A ação necessária para levantar um peso é medida pelo produto de peso e altura, e este produto é conservado em todas as máquinas simples. Isso generaliza as idéias de Stevin em um axioma universal para estática.
2. **O ponto de vista infinito**:. O que importa não é finito deslocamento mas o "início do movimento'— o infinitesimal deslocamento compatível com as restrições. Isso transforma o princípio de uma declaração sobre movimentos reais em um sobre *virtual* deslocamentos.
3. **A construção tangente**:. Para restrições curvas, o relevante deslocamento é medido ao longo da tangente à curva de restrição. Esta construção geométrica permite que o princípio seja aplicado a sistemas mecânicos arbitrários.
4. **Espaço sobre a velocidade**:. As variáveis adequadas para estática são espaciais deslocamentos, não velocidades. Esta separação da estática da dinâmica foi uma escolha metodológica deliberada que deu ao princípio sua generalidade característica.

A formulação de Descartes logo foi generalizada por John Wallis (1616-1703), que em seu *Mechanica* (1670-1671) estendeu o princípio às forças arbitrárias: "Os movimentos para frente ou para trás das forças motoras são obtidos dos produtos das forças por seus movimentos para a frente ou pra trás estimados ao longo das direções dessas forças."(Wallis, 1670). Mas foi Johann Bernoulli que, no século seguinte, daria ao princípio sua formulação definitiva e seu nome: O princípio de *Velocidades virtuais*.

14.5.8 Torricelli (1608-1647)

V

Evangelista Torricelli (1608-1647)[18] foi o último aluno de Galileu e, após a morte de Galleu em janeiro de 1642, seu sucessor como matemático do grão-duque Ferdinando II

[18]Torricelli é talvez mais conhecido por sua invenção do barômetro (1643) e pela lei de "Torricelli"que governa o fluxo fluido de um orifício. Mas suas contribuições para a mecânica, embora menos celebradas, são de fundamental importância para a história de trabalho virtual.

CÓPIA PARA REVISÃO

de Medici em Florença. Em 1644 ele publicou seu *Ópera geométricaa* (Torricelli, 1644), o único trabalho a aparecer em sua vida. A segunda parte deste tratado, *De motu gravium naturaliter descententium et proiectorum*, contém um princípio de equilíbrio que provaria ser uma ligação crucial entre a estática archimedeana e o princípio trabalho virtual de Bernoulli e Lagrange.

Em uma breve seção preliminar intitulada *Praemittamus*Torricelli declarou seu axioma fundamental, Fig. 14.15:

> *Praemittamus.*
> Duo grauia simul coniuncta ex se moueri non posses, nisi centrum communy grauitatis ipsorum descendat.
>
> Quanto enim duo grauia ita inter se coniuncta fuerint, vt ad motum vnius motus etiam alterius consequatur, erunt duo illa grauya tamquam graue vnum ex duobus compositum, siue id libra sit, siue troclea, siua qualibet alias Mechanica ratione. Graue autem huiusmodi non mouebitur vnquam, nisi centrum grauitatis ipsius descendet. Quanto vero ita constituitum fuerit vt nulo moda communy ipsius centrum grauitatis descere possit, graue penitus in sua positione quiescet: pseudônimo de Enim Frustra Moueretur; horizontali, cilicet latione, quae nequaquam deorsum tenit.
>
> ---
>
> Vamos confirmar isso por demonstração. Prosseguimos imediatamente para estabelecer o que, em Galileu, é um princípio, ou postulado. *Nós presumimos isso.*
> Dois corpos pesados, unidos, não podem se mover a menos que seu centro de gravidade desça.
> Pois quando dois corpos pesados estiverem conectados um ao outro de tal forma que, por causa do movimento de um, o movimento do outro também segue, esses dois corpos pesadas serão como um corpo pesado composto de dois— seja ele um equilíbrio, ou uma polia, ou por qualquer outro arranjo mecânico. Um peso desse tipo nunca se moverá a menos que seu próprio centro de gravidade desça. Mas quando estiver tão arranjado que seu centro de gravidade comum não possa descer, o peso permanecerá totalmente em repouso em sua posição; Caso contrário, ele se moveria em vão, ou seja, por uma tradução horizontal, que de forma alguma tende para baixo.
>
> Torricelli, 1644 Opera geometrica

O contrapositivo dá o critério de equilíbrio: *um sistema de corpos pesados conectados está em equilíbrio se e somente se, para cada movimento possível, seu centro comum de gravidade não puder descer*.

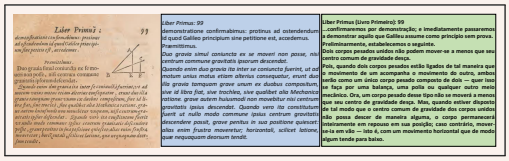


Figura 14.15: Axioma de Torricelli

Esta afirmação enganosamente simples representa uma profunda generalização. O princípio antigo.. *Solteiro* O corpo está em equilíbrio quando apoiado no seu centro de gravidade... era bem conhecido por Arquimedes. O que Torricelli reconheceu foi que para um *agregado* de corpos rígidos conectados, o centro de gravidade de todo o sistema

CÓPIA PARA REVISÃO

(computado de acordo com as regras arquimedeanas) tem o mesmo significado físico. Se nenhum movimento virtual pode diminuir este ponto, o sistema está em equilíbrio.

Relação com Trabalho virtual

Embora o princípio de Torricelli não mencione explicitamente virtual deslocamentos ou trabalho virtual, é equivalente ao princípio de trabalho virtual para sistemas sujeitos apenas à gravidade. Considere um sistema de n Corpos pesados com pesos W_i Em alturas z_i acima de algum dado. A altura do centro de gravidade é

$$\bar{z} = \frac{\sum_i W_i z_i}{\sum_i W_i}$$

Para qualquer virtual deslocamento $\delta \mathbf{r}_i$A mudança virtual na altura do centro de gravidade é

$$\delta \bar{z} = \frac{\sum_i W_i \, \delta z_i}{\sum_i W_i}$$

A condição de Torricelli que o centro de gravidade não pode descer ($\delta \bar{z} \geq 0$ Para todos os movimentos admissíveis, com igualdade em equilíbrio para reversível deslocamentos) é equivalente a exigir que o trabalho virtual de gravidade desapareça:

$$\delta W = -\sum_i W_i \, \delta z_i = 0 \tag{14.1}$$

para todos os virtuais admissíveis deslocamentos. O princípio do centro de gravidade é, portanto, um caso especial do princípio de trabalho virtual, restrito às forças gravitacionais.

De Torricelli a Bernoulli

Torricelli usou seu princípio para dar provas elegantes de resultados em mecânica, incluindo a lei do plano inclinado e o equilíbrio dos sistemas em planos de inclinações diferentes – resultados que Galileu tinha tratado por outros métodos. Sua abordagem tinha vantagens distintas: não requeria decomposição de forças, nenhuma consideração das tendências ao movimento, e nenhum apelo ao raciocínio dinâmico. O critério do centro de gravidade forneceu um teste puramente geométrico e estático para o equilíbrio.

O princípio foi retomado por mecânicos posteriores, notavelmente Wallis e Huygens, e tornou-se uma das várias formulações concorrentes da condição de equilíbrio no século XVII. Quando Johann Bernoulli articulou o princípio das velocidades virtuais em 1715, ele sintetizou a visão de Torricelli com a tradição mais antiga decorrente do pseudo-aristotélico *Mechanica*:. O princípio de Bernoulli se aplica a *Qualquer* forças, não apenas gravidade, e expressaram a condição de equilíbrio em termos do desaparecimento de trabalho virtual ao invés da estacionalidade de um centro de gravidade.

Lagrange, na pesquisa histórica abrindo seu *Analitique Mécanique*, deu a Torricelli todo o crédito por este importante passo intermediário:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Torricelli fut le premier qui réduisit le principe des vitesses virtulles à condição de cette, que le centre de gravité des poids ne descende pas.
>
> Torricelli foi o primeiro a reduzir o princípio das velocidades virtuais a esta condição: que o centro de gravidade dos pesos não desce.

No arco de desenvolvimento da *Mechanica* Para Lagrange, a contribuição de Torricelli ocupa uma posição crucial. Ele mostrou que o equilíbrio poderia ser caracterizado por uma propriedade extrema, o centro de gravidade em sua posição mais baixa possível, ao invés de um equilíbrio de forças ou momentos. Esta perspectiva variacional, generalizada além da gravidade para sistemas de força arbitrária, se tornaria a marca da mecânica analítica.

14.5.9 Wallis (1616-1703)

V

John Wallis, em seu *Mechanica* (1670–1671) (Wallis, 1670), estendeu o princípio trabalho virtual para direções arbitrárias de força. Ele afirmou que os movimentos para frente ou para trás das forças motoras são obtidos dos produtos das forças por seus movimentos para a frente ou pra trás estimados ao longo das direções dessas forças Um passo importante para o princípio geral que Bernoulli articularia.

14.5.10 Leibniz (1646-1716)

F

Leibniz fez contribuições tanto para o conceito de força quanto para o aparato matemático que eventualmente descreveria.

Força e Monadologia

Para Leibniz, Fig. 14.6f, em *Monadologia*, força pode ser entendida como a expressão da atividade inerente ou admissão de *Mônadas*.. Enquanto a força no sentido mecânico tradicional envolve ação externa sobre os corpos, Leibniz concebeu a força como um princípio interno inerente a todas as substâncias. As interações entre *Mônadas*[19], conduzidos por seus *inclinação*, resultam na manifestação da força como mudanças em suas percepções ou estados. Anote analogia com a então desmascarada teoria de *impulso*.

Em direção a um cálculo da situação

Até agora, as forças ainda eram tratadas essencialmente como escalares: uma rastreou as magnitudes, enquanto a geometria da configuração forneceu as direções.

[19] No sistema filosófico de Leibniz, *Mônada* é um conceito metafísico fundamental que representa uma substância indivisível, imaterial e auto-suficiente

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Leibniz estava insatisfeito com esta divisão entre o cálculo e a figura. Ele se tornou um precursor conceitual de um cálculo simbólico de 'situação', uma notação destinada a codificar posição, orientação e até mesmo movimento tão diretamente quanto magnitude. Em 1679 ele escreveu para Huygens (Leibniz e Loemker, 1956):

> Eu descobri certos elementos de uma nova característica que é completamente diferente da álgebra e que terá grandes vantagens em representar para a mente, exatamente e de uma forma fiel à sua natureza, mesmo sem figuras, tudo o que depende de Percepção de sentido. Álgebra é a característica para números ou magnitudes indeterminados apenas, mas não expressa situação, ângulos e movimento diretamente. Por isso, muitas vezes é difícil analisar as propriedades de uma figura por cálculo, e ainda mais difícil encontrar demonstrações geométricas e construções muito convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico está concluído. Mas esta nova característica, que segue as figuras visuais, não pode deixar de dar a solução, a construção e a demonstração geométrica tudo ao mesmo tempo, e de uma forma natural e em uma análise, isto é, através de determinado procedimento.
>
> Leibniz e Loemker, 1956 Philosophical Papers and Letters

O ponto chave é sua insistência em que uma mecânica bem sucedida precisa de uma linguagem que leve "onde"' e "como dirigido" junto com "o quanto'— — um programa que prenuncie tratamentos sistemáticos posteriores de quantidades direcionadas.

A Controvérsia Vis Viva

Desde o final do século XVII até a maior parte do século XVIII, a mecânica continental foi dividida por uma pergunta enganosamente simples: Que quantidade melhor captura a medida verdadeira do poder de motivação?(Descartes, 1644; Leibniz, 1686a) Os cartesianos (e muitos newtonianos, em uma linguagem diferente) enfatizaram a quantidade de movimento proporcional ao mv,(Descartes, 1644; Newton, 1687) porque rastreia o que é trocado em impactos e porque aparece naturalmente nos argumentos de equilíbrio de movimento. Leibniz, em contraste, argumentou que a "força viva"*Vis viva* é proporcional a mv^2,(Leibniz, 1686a) insistindo que isso é o que a natureza preserva em muitos processos mecânicos e que mede a capacidade de um corpo produzir efeitos.

A disputa foi aguçada por experiências sobre colisão e sobre o efeito de um peso em movimento, (Gravesande, 1722). Se alguém perguntar o que um corpo em movimento pode conseguir contra a gravidade, a comparação relevante é quão alto ele pode levantar um peso. Em casos simples que a altura escala com v^2, Não com v, que favoreceu a medida Leibnizian. No entanto, em interações impulsivas (colisões, mudanças bruscas), o que se equilibra entre os corpos é como o momento, mais perto de mv.. Grande parte da controvérsia persistiu porque ambos os lados tentaram elevar sua quantidade preferida para a definição única de força, enquanto as questões subjacentes eram diferentes: Uma diz respeito ao impulso e à troca no tempo, a outra diz respeito a trabalho e capacidade de produzir mudanças de configuração.(d'Alembert, 1743)

Um leitor moderno pode ver a eventual resolução: mv e.. mv^2 Não são rivais, mas

CÓPIA PARA REVISÃO

invariantes distintos (em condições diferentes) ligados a princípios distintos. Momentum é a moeda natural do impulso e o equações de movimento; $\frac{1}{2}mv^2$ é a moeda natural do trabalho e da energia.

14.5.11 Newton (1642-1726)

F

Finalmente, aqui vem Isaac Newton, Fig. 14.6g.. Um gênio§6.6.7), e um alquimista (6.6.7)! É o mesmo homem que escreveu um dos livros mais influentes *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Já escrito, também mergulhou em Alquimia[20].. Embora possamos considerar isso com alguma condescendência, é importante reconhecer que tais atividades não eram incomuns (embora muitas vezes secretas) durante seu período de tempo.

A essa altura, o terreno já havia sido preparado para Newton por predecessores como Galileu e Kepler. Newton foi o primeiro a articular a definição de força com clareza e precisão sem precedentes, resolvendo ambiguidades que persistiram até então. Por exemplo, sem dúvida Newton foi influência da lei de Kepler que *Parece implicar que* que a força exercida pelo sol nos planetas diminui com a distância.

Através de sua descoberta da gravidade (Newton, 1687)Newton unificou os princípios celestes estabelecidos por Kepler com observações terrestres de Galileu e Descartes, formando uma teoria abrangente. Esta unidade ficou evidente em sua compreensão de que a força indutora da queda de uma maçã é a mesma força responsável pela órbita da lua.

Newton fez uma distinção clara entre peso e massa, ou o que ele chamou de "quantidade da matéria", uma noção já concebida por Buridan, Kepler, e Galileu, mas antes... Newton nunca tinha sido consciente e explicitamente reconhecido como um conceito básico na mecânica. O termo "força"aparece pela primeira vez no Newton's *Principia* Definição III:

> O '*Vis insita*[a] , ou força inata da matéria, é um poder de resistência pelo qual cada corpo, tanto quanto nele está, continua em seu estado atual se seja de descanso, ou de se mover uniformemente para a frente em uma linha direita.
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy
>
> [a]Não se confunda com Leibniz *Vis viva* ("força viva"), proporcional a mv^2 (mais tarde energia cinética até um fator constante). Newton *Vis insita* É inércia. Um poder inerente de resistir a mudanças de estado.

A natureza inerte da matéria é aqui concebida como uma força de inatividade. A inércia, na opinião de Newton, é

[20]Para Newton, Alquimia não era apenas sobre tentar criar a mítica pedra do filósofo para transmutar metais base em ouro. Era também uma maneira de ele obter conhecimento empírico mais profundo sobre o mundo material e adquirir poder sobre a natureza.

CÓPIA PARA REVISÃO

> ... algum tipo de força inerente (*Insita*) em matéria e latente, enquanto nenhuma outra força impressionou o corpo, "estou disposto a mudar sua condição"... É a resistência até o momento O corpo, por manter seu estado atual, se opõe à força impressionada; é impulso, até onde o corpo, por não facilmente ceder lugar à força impressionável de outro, se esforça para mudar o estado daquele outro.
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy

Claramente, nesta definição, a força não é (ainda) concebida como uma causa de movimento ou aceleração. Mas mais tarde na Definição IV Ele definiu *Força Impressionada*

> Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo, a fim de mudar seu estado, ou de repouso, ou movimento uniforme em uma linha direita.
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy

A transição de Newton da ação das forças impulsivas para a ação de forças contínuas ocorre na primeira proposição no *Principia*.. Enquanto Newton pode ter descoberto a gravidade, mas não tinha ideia de como funcionava. Ele presumiu que isso funciona instantaneamente. Isso teve que esperar por Einstein, que olhou para o espaço e o tempo como entrelaçados em um tecido curvado, matéria deforma este espaço, e é a dobra ou curva daquele espaço-tempo que cria o que sentimos como gravidade. Esta é a essência do *Teoria da relatividade geral*[21]

Newton também abordou a lei do paralelograma de forças por considerações puramente dinâmicas (Dugas, 1988):

> Corrolar I (para a segunda lei)... Um corpo por duas forças unidas descreverá a diagonal de um paralelograma, ao mesmo tempo que descreveria os lados dessas forças separadas. Se um corpo em
>
> um determinado momento, pela força M impressionados no lugar A, deve com uma moção uniforme ser transportada de A para B; e pela força N Impressionados no mesmo lugar, devem ser levados de A para C; completar o paralelograma $ABCD$, e, por ambas as forças agindo juntos, será ao mesmo tempo transportado na diagonal de A para D.. Pois desde que a polícia N Atua na direção da linha AC, paralelo a BD, esta força (pela segunda lei) não irá de modo algum alterar a velocidade gerada pela outra força M, pelo qual o corpo é levado para a linha BD.. O corpo, portanto, chegará à linha BD ao mesmo tempo, se a força N ficar impressionado ou não; E, portanto, no final desse tempo ele será encontrado em algum lugar na linha BD.. Pelo mesmo argumento, no final do mesmo tempo será encontrado em algum lugar na linha de CD. Portanto, será encontrado no ponto D, onde ambas as linhas se encontram. Mas ele vai se mover em uma linha direita de A para D, pela Lei I.
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy, Book I, Cor. I to Law II

Aqui, Newton fala explicitamente de um movimento uniforme como resultante de uma determinada força, enquanto que é a mudança de movimento, ou seja, aceleração vezes

[21] A relatividade especial é a que deu $e = mc^2$ e assume uma inercial pórtico de referência (sem aceleração).

CÓPIA PARA REVISÃO

massa, que, de acordo com a segunda lei do movimento é proporcional à força impressa. Estas duas idéias aparentemente contraditórias poderiam ter sido reconciliadas na mente de Newton apenas sob uma condição: Newton concebeu a ação acelerativa da força como uma série de ações sucessivas que transmitem ao objeto em movimento incrementos sucessivos de velocidade (Jammer, 1957).

14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782)

Eclipsado por seu outro trabalho, Daniel Bernoulli também trabalhou nos princípios que se relacionam com o paralelograma de forças. F

Os primeiros defensores de uma explicação estática muitas vezes afirmavam que o paralelograma das forças não depende da segunda lei de Newton. Argumentavam que as forças ainda se combinariam em um padrão de paralelograma, mesmo que a relação entre força e movimento fosse diferente do descrito pela segunda lei de Newton.

Neste contexto, Bernoulli, Daniel, 1726 fez uma tentativa pioneira de dar uma explicação estática do paralelograma das forças. Para motivá-lo, ele sugeriu que uma ampla gama de alternativas à segunda lei de Newton poderia ter sido mantida, mas não foi. Dentre estas alternativas "contrafatuais"estão que a força resultante é proporcional à raiz quadrada da aceleração resultante, ou à sua raiz cúbica, ou ao seu quadrado. Mas mesmo que uma dessas possibilidades contrafatuais tivesse sido o caso, ele sustentou que o paralelograma de forças ainda teria se mantido.

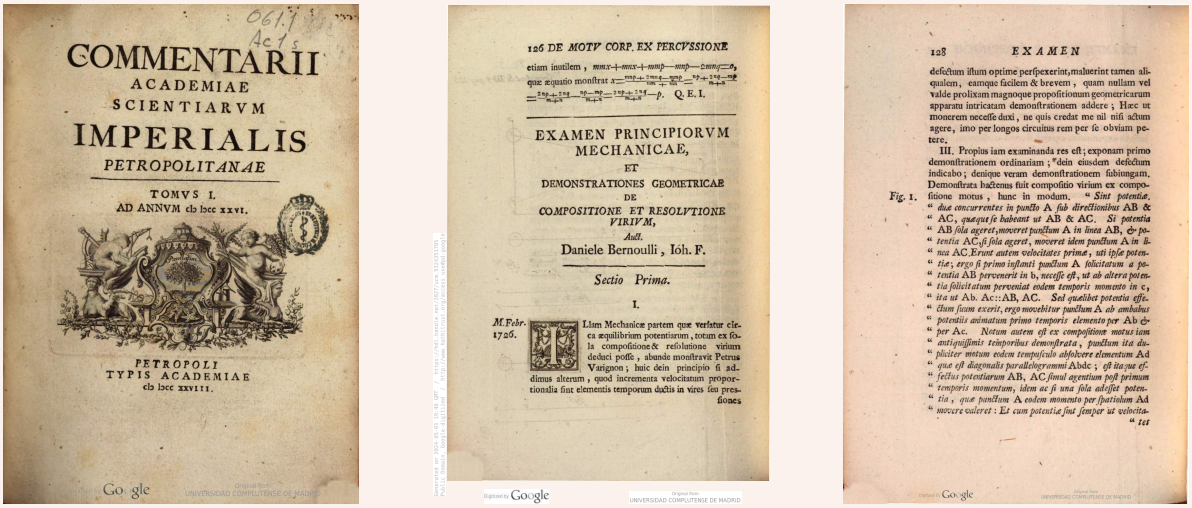

COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS I.
AD ANNVM clɔ Iɔcc XXVI.
PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
clɔ Iɔcc XXVIII.
126 DE MOTV CORP. EX PERCVSSIONE
EXAMEN PRINCIPIORVM MECHANICAE,
ET
DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE
DE
COMPOSITIONE ET RESOLVTIONE VIRIVM,
Auct.
Daniele Bernoulli, Ioh. F.
Sectio Prima.
I.
M. Febr. 1726.
128 EXAMEN
Fig. 1.

Figura 14.16: Bernoulli em paralelograma de forças (Bernoulli, Daniel, 1726)

> Que haja duas forças simultâneas no ponto A nas direções AB & AC, proporcional à AB & AC. Se forçasse AB a agir sozinho, moveria o ponto A ao longo da linha AB, e se forçasse AC a agir sozinha, moveriam o mesmo ponto A pela linha AC. No entanto, as velocidades iniciais serão como as próprias

CÓPIA PARA REVISÃO

forças; Portanto, se no primeiro momento o ponto A, provocado pela força AB, atinge o, é necessário que movido pela outra força atinja C ao mesmo tempo, tal que Ab. Ac::AB, AC. Mas cada força exerce seu próprio efeito, portanto o ponto A, animado por ambas as forças, será movido durante o primeiro momento de tempo através de Ab & Ac. É sabido pela composição do movimento, demonstrada desde os tempos mais antigos, que o ponto, movido duplamente no mesmo momento minúsculo, completará o elemento Ad, que é a diagonal do paralelograma Abdc; assim, o efeito das forças AB, AC agindo juntos após o primeiro momento de tempo, é o mesmo que se uma única força estivesse presente, que poderia mover ponto A através do espaço Ad no mesmo momento: E como as forças são sempre proporcionais às velocidades...

Bernoulli, Daniel, 1726 *"1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142"*

14.5.13 Carta de Johann Bernoulli de 1715

V

O princípio das velocidades virtuais, em sua forma analítica moderna, apareceu pela primeira vez numa carta de Johann Bernoulli (1667-1748) a Pierre Varignon (1654-1722), datado de 26 de fevereiro de 1715.[22] Esta carta, preservada no póstuma de Varignon *Nouvelle Mécanique ou Statique* (Varignon, 1725), representa um momento divisor de águas na história da mecânica – a primeira declaração explícita e geral do que se tornaria o fundamento da estática analítica.

Varignon apresenta a contribuição de Bernoulli no início da Seção IX do Volume 2:

Dans une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717, M. Bernoulli, après y avoir défini d.C. qu'il entendoit par le mot d'*Energia*De la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante, m'annonça qu'*em tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou mediatement ou immédiatement, la somme des Energies afirmativas sera égale à la somma des Energias negativas, empresas afirmativas.*

Em uma carta escrita de Basileia em 26 de janeiro de 1717, M. Bernoulli, depois de ter definido o que ele quis dizer com a palavra *Energia* da maneira mostrada na seguinte definição, anunciou-me que *em cada equilíbrio de forças, seja qual for a forma como elas são aplicadas umas às outras, mediativamente ou imediatamente, a soma das Energias positivas será igual à soma das energias negativas, tomadas positivamente.*

Varignon em Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717"*

(Note que a data dada no texto publicado de Varignon contém o erro de impressão discutido acima.)

A reação de Varignon revela o significado que ele atribuiu a este princípio:

[22] A data é comumente dada como '26 de janeiro de 1717' na literatura, após um erro de impressão no póstumo de Varignon *Nouvelle Mécanique* (1725). A data correta, conforme estabelecida pela bolsa moderna, é 26 de fevereiro de 1715; ver o *Dicionário completo de biografia científica*, s.v. "Bernoulli, Johann."

CÓPIA PARA REVISÃO

Cette me propõe parut si generale & Sim, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précédente, je lui demandai la permission qu'il m'accorda, de l'ajouter ci avec la demonstração que cette Théorie m'en fournissoit, & Não me envoyoit pas.

Esta proposta me parecia tão geral e tão bonita que, vendo que eu poderia facilmente deduzi-la da Teoria precedente, pedi sua permissão - o que ele concedeu - para adicioná-lo aqui com a demonstração de que esta teoria me forneceu, e que ele fez Não me mande.

Varignon em Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717"*

A definição-chave segue, nas palavras de Bernoulli, Fig. 14.17:

DEFINIÇÃO XXXII Concevez (disoit-il) plusieurs forças diferentes qui agissen suivant diferentees tendances ou direções derramar tenir en equilíbrio un point, une ligne, une superfície, ou un corpo; Concevez aussi que l'on imprime a tout le systeme de ces forces un petit mouvement, paralelele a soi-meme suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixa quelCONQUE: Vous sera aise de comprendre que par d.C. mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, a moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendendances perpendiculaires a la direction du petit mouvement; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien: Car ces advancements ou reculements, qui sont d.C. que j'appelle vitesses virtulles, ne font autre choosed que d.C. dont chaque ligne de tendence aumente ou diminue par le petit mouvement; & O que você está fazendo "Pete parte qui sera la mesure de la vitesse virtulle de cette force".

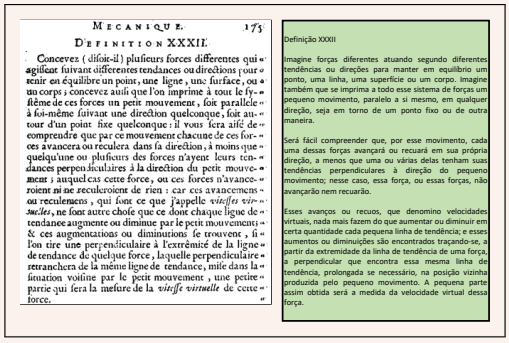
DEFINIÇÃO XXXII Concebido (ele disse) várias forças diferentes agindo com diferentes tendências ou direções para segurar um ponto, uma linha, uma superfície, ou um corpo em equilíbrio; Também concebemos que se transmite a todo o sistema dessas forças um pequeno movimento, ou uma tradução paralela a si mesmo em alguma direção, ou um giro sobre algum ponto fixo: Será fácil entender que por este movimento cada uma dessas forças avançará ou recuará em sua própria direção, a menos que uma ou várias das forças tenham suas tendências perpendiculares à direção do pequeno movimento; Nesse caso, esta força, ou estas forças, não avançará nem recuará. Para estes avanços ou recuos, que são o que eu chamo de velocidades virtuais, não são nada mais do que a quantidade pela qual cada linha de tendência aumenta ou diminui sob o pequeno movimento; e esses aumentos ou diminuições são encontrados desenhando uma perpendicular no final da linha de tendência de alguma força, que perpendicularmente irá cortar dessa mesma linha de tendencia, colocada na posição vizinha pelo pequeno movimento, uma pequena parte que será a medida da velocidade virtual desta força.

Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717"*

Várias características da formulação de Bernoulli merecem ênfase:

- O princípio se aplica a *Qualquer* sistema - um ponto, linha, superfície, ou corpo - mantido em equilíbrio por *Qualquer* configuração de forças, seja aplicada diretamente ou através de mecanismos intermediários.
- O 'pequeno movimento' impresso no sistema é totalmente arbitrário: Pode ser uma tradução em qualquer direção ou rotação sobre qualquer ponto fixo. Esta arbitrariedade é precisamente o que dá ao princípio seu poder.
- As velocidades virtuais são grandezas geométricas, as projeções do pequeno desloca-

CÓPIA PARA REVISÃO



MECANIQUE. 173

DEFINITION XXXII.

Concevez (difoit-il) pluſieurs forces differentes qui « agiſſent ſuivant differentes tendances ou directions pour « tenir en équilibre un point, une ligne, une ſurface, ou « un corps; concevez auſſi que l'on imprime à tout le ſy- « ſtême de ces forces un petit mouvement, ſoit parallele « à ſoi-même ſuivant une direction quelconque, ſoit au- « tour d'un point fixe quelconque: il vous ſera aiſé de « comprendre que par ce mouvement chacune de ces for- « ces avancera ou reculera dans ſa direction, à moins que « quelqu'une ou pluſieurs des forces n'ayent leurs ten- « dances perpendiculaires à la direction du petit mouve- « ment; auquel cas cette force, ou ces forces n'avance- « roient ni ne reculeroient de rien: car ces avancemens « ou reculemens, qui ſont ce que j'appelle *viteſſes vir-* « *tuelles*, ne ſont autre choſe que ce dont chaque ligne de « tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; « & ces augmentations ou diminutions ſe trouvent, ſi « l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne « de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire « retranchera de la même ligne de tendance, miſe dans la « ſituation voiſine par le petit mouvement, une petite « partie qui ſera la meſure de la *viteſſe virtuelle* de cette « force. "

Definição XXXII

Imagine forças diferentes atuando segundo diferentes tendências ou direções para manter em equilíbrio um ponto, uma linha, uma superfície ou um corpo. Imagine também que se imprima a todo esse sistema de forças um pequeno movimento, paralelo a si mesmo, em qualquer direção, seja em torno de um ponto fixo ou de outra maneira.

Será fácil compreender que, por esse movimento, cada uma dessas forças avançará ou recuará em sua própria direção, a menos que uma ou várias delas tenham suas tendências perpendiculares à direção do pequeno movimento; nesse caso, essa força, ou essas forças, não avançarão nem recuarão.

Esses avanços ou recuos, que denomino velocidades virtuais, nada mais fazem do que aumentar ou diminuir em certa quantidade cada pequena linha de tendência; e esses aumentos ou diminuições são encontrados traçando-se, a partir da extremidade da linha de tendência de uma força, a perpendicular que encontra essa mesma linha de tendência, prolongada se necessário, na posição vizinha produzida pelo pequeno movimento. A pequena parte assim obtida será a medida da velocidade virtual dessa força.

Figura 14.17: As velocidades geométricas de Johann Bernoulli, (Bernoulli, Johann, 1725)

mentos nas linhas de ação das respectivas forças, não velocidades reais no sentido cinemático.

Bernoulli "Energia" é o que chamamos agora *trabalho virtual*:. o produto de uma força e sua velocidade virtual (ou seja, o componente do virtual deslocamento ao longo da linha de ação da força). O teorema em si (Théorème XL, p. 176) podem ser declarados na notação moderna como:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \text{(para o equilíbrio)}$$

Esta formulação representa o culminar de quase dois milênios de desenvolvimento, a partir das intuitivas percepções do pseudo-aristotélico *Mechanica*, através de Jordanus *Gravitas secundum situm*, Stevin *Clootcrans*"Golden Rule"de Galileu e o princípio da conservação de Descartes, para a declaração analítica geral de Bernoulli. O princípio encontraria seu lugar definitivo na mecânica através de Lagrange *Analitique Mécanique* (1788), onde serve de base para todo o edifício da mecânica analítica.

14.5.14 Varignon (1654-1722)

F

Em 1687, o ano da publicação do *Principia*, Varignon publicado *Nouvelle Mécanique ou Statique* (Varignon, 1725) no qual o princípio do paralelograma de forças, inferido de um ponto de vista aristotélico, é aplicado à solução de uma classe de problemas não tocados por Newton.

> **Lemma III:** Se o ponto sem peso *A* é empurrado uniformemente e ao mesmo tempo por duas forças [*Puissances*] *E* e.. *F* ao longo das linhas *AC* e.. *AB* [Na Fig. 221], que formam entre eles algum ângulo *CAB*E a ação da força *E* é para A ação da força *F* Como *AC* é para *AB*, [Então..] Este ponto *A* seguirá a diagonal *AD* do paralelograma *BC* formado por estas duas linhas.
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII

CÓPIA PARA REVISÃO

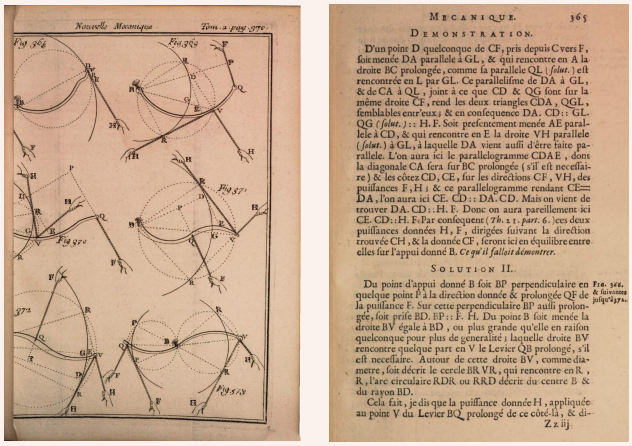


Figura 14.18: Noções de equilíbrio por Varignon, 1725

Considerando que estamos aqui abordando o paralelograma de forças, devemos mencionar ao passar o famoso teorema de Varignon :

> A soma dos momentos de várias forças concorrentes sobre um ponto é igual ao momento do resultado dessas forças, ou alternadamente, o momento de uma força sobre um determinado ponto equivale à soma dos instantes de seus componentes.
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII

14.5.15 D'Alembert (1717-1783)

Jean le Rond d'Alembert *Traité de Dynamique* (1743) (d'Alembert, 1743) Estendia o princípio das velocidades virtuais da estática à dinâmica, e ao fazê-lo unificava a ciência da mecânica. F/V

A postura filosófica de D'Alembert era distinta. Ele procurou eliminar a mecânica das noções obscuras:

> J'ai, pour ansi dire, détourné les yeux des causes motrices, pread n'envisager uniquement que le mouvement qu'elles produisent; ESTUDAMENTO PROSCRIT les forces inhérentes au corps en mouvement, etres obscurs & Métafisiques, qui ne sont capaz que de répandre les ténèbres sur une Science Claire par elle-même.
>
> Por assim dizer, eu virei meus olhos de causas móveis, para considerar apenas o movimento que eles produzem; Eu proscrevi forças inerentes aos corpos em movimento, objetos e seres metafísicos, capazes de lançar a escuridão sobre uma ciência clara.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Isso o colocou no meio do *Vis viva* controvérsias que dividiram os mecânicos continentais desde Leibniz.

CÓPIA PARA REVISÃO

Pergunta da Cette... Consiste Ùm savoir, si la force des Corps en Mouvement est propropensonelle Au produit de la masse par la vitesse, ou au produIT de la massa par le quarré de la vitesse... MalgrÉ quanto às disputas que a Cette questiona um motivoÉes, I'inutilitÉ parfaite não elle est pour la MÉchanique, me engagueé À n'en faire aucune menciona dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui.

Esta pergunta pergunta se a força dos corpos em movimento é proporcional à massa vezes velocidade, ou a massa vezes o quadrado da velocidade ... Apesar das disputas que causou, sua completa inutilidade para a mecânica me levou a não fazer menção disso no trabalho que publico hoje.

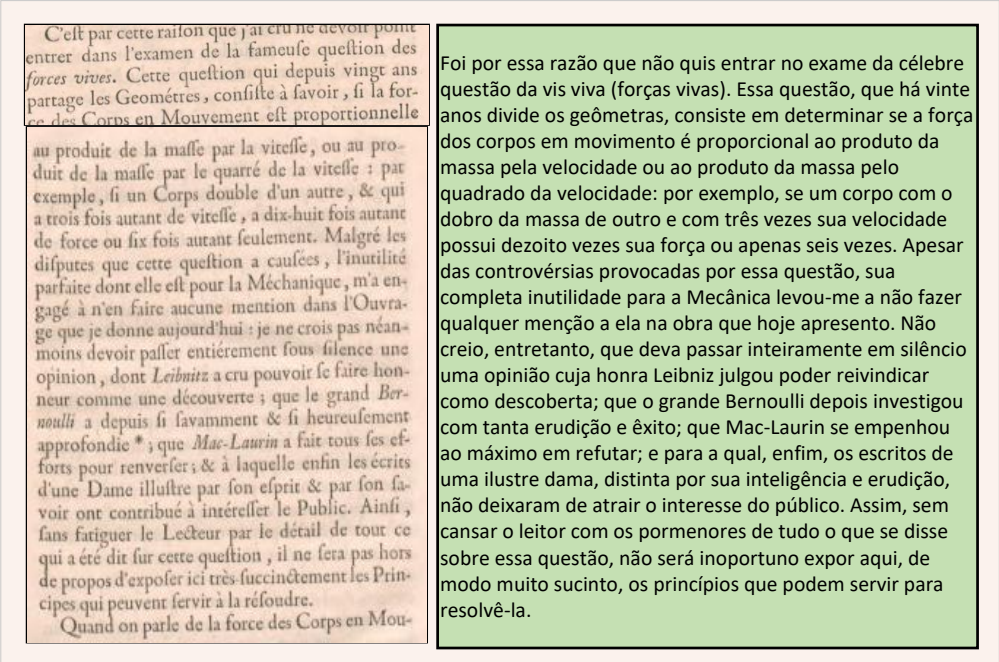
d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Ao reformular a dinâmica como um problema de equilíbrio, d'Alembert desviou as disputas sobre a "verdadeira medida"da força.

Sua visão chave era enganosamente simples. A segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, pode ser reescrito como:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Esta é uma declaração de equilíbrio entre a força aplicada $\mathbf{F}$ E o que D'Alembert chamou de "força da inércia", $-m\mathbf{a}$.. O corpo acelerado pode ser tratado como se estivesse em equilíbrio estático sob a ação combinada das forças impressas e as forças inerciais, Fig. 14.19.



C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis vingt ans partage les Geométres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe : par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illuſtre par ſon eſprit & par ſon ſavoir ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

Foi por essa razão que não quis entrar no exame da célebre questão da vis viva (forças vivas). Essa questão, que há vinte anos divide os geômetras, consiste em determinar se a força dos corpos em movimento é proporcional ao produto da massa pela velocidade ou ao produto da massa pelo quadrado da velocidade: por exemplo, se um corpo com o dobro da massa de outro e com três vezes sua velocidade possui dezoito vezes sua força ou apenas seis vezes. Apesar das controvérsias provocadas por essa questão, sua completa inutilidade para a Mecânica levou-me a não fazer qualquer menção a ela na obra que hoje apresento. Não creio, entretanto, que deva passar inteiramente em silêncio uma opinião cuja honra Leibniz julgou poder reivindicar como descoberta; que o grande Bernoulli depois investigou com tanta erudição e êxito; que Mac-Laurin se empenhou ao máximo em refutar; e para a qual, enfim, os escritos de uma ilustre dama, distinta por sua inteligência e erudição, não deixaram de atrair o interesse do público. Assim, sem cansar o leitor com os pormenores de tudo o que se disse sobre essa questão, não será inoportuno expor aqui, de modo muito sucinto, os princípios que podem servir para resolvê-la.

Figura 14.19: D'Alembert sobre a controvérsia vis viva: Uma disputa que ele considera inútil, mas brevemente abordada (d'Alembert, 1743)

Note que neste texto, d'Alembert se refere à "senhora distinta pelo seu intelecto e aprendizagem"é Emilie du ChÂtelet (1706-1749), cujos escritos— notavelmente ela *Instituições de*

CÓPIA PARA REVISÃO

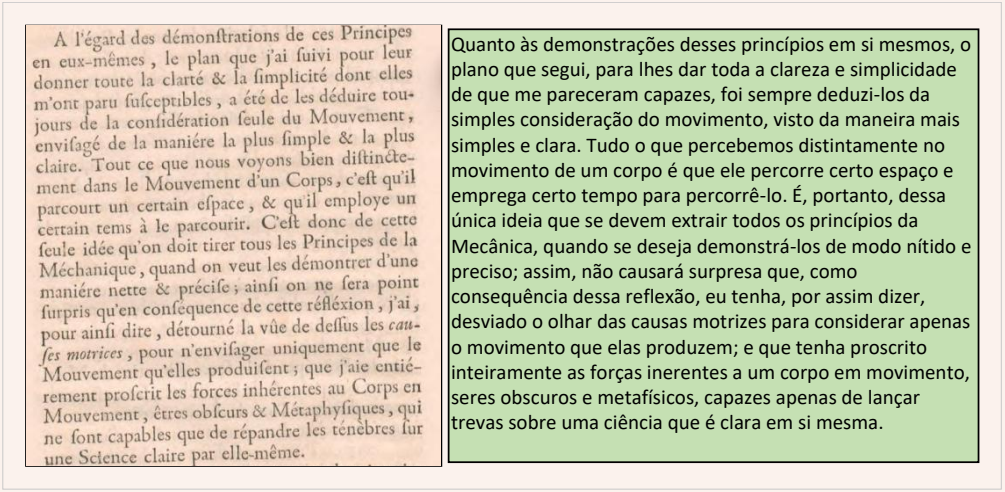
físico (1740) e suas intervenções no debate vis viva–ajudado trazer a controvérsia para um público mais amplo.

O princípio das velocidades virtuais se aplica diretamente. Para um sistema de partículas, o princípio de d'Alembert afirma:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Onde $\delta \mathbf{r}_i$ são virtual deslocamentos compatíveis com as restrições.

Isso é uma dinâmica reduzida a estática. Ao tratar termos inerciais como forças, d'Alembert uniu a mecânica e demonstrou a extraordinária generalidade de trabalho virtual. Cada problema em dinâmica, não importa quão complexo o sistema de corpos e restrições, poderia agora ser abordado através da mesma estrutura variacional que Bernoulli estabeleceu para estática. Assim, ele deu papel proeminente a todos os princípios da Mecânica para uma rigorosa derivação, Fig. 14.20.



A l'égard des démonſtrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai ſuivi pour leur donner toute la clarté & la ſimplicité dont elles m'ont paru ſuſceptibles, a été de les déduire toujours de la conſidération ſeule du Mouvement, enviſagé de la maniére la plus ſimple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien diſtinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'eſt qu'il parcourt un certain eſpace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'eſt donc de cette ſeule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette & préciſe; ainſi on ne ſera point ſurpris qu'en conſequence de cette réfléxion, j'ai, pour ainſi dire, détourné la vûe de deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténébres ſur une Science claire par elle-même.

Quanto às demonstrações desses princípios em si mesmos, o plano que segui, para lhes dar toda a clareza e simplicidade de que me pareceram capazes, foi sempre deduzi-los da simples consideração do movimento, visto da maneira mais simples e clara. Tudo o que percebemos distintamente no movimento de um corpo é que ele percorre certo espaço e emprega certo tempo para percorrê-lo. É, portanto, dessa única ideia que se devem extrair todos os princípios da Mecânica, quando se deseja demonstrá-los de modo nítido e preciso; assim, não causará surpresa que, como consequência dessa reflexão, eu tenha, por assim dizer, desviado o olhar das causas motrizes para considerar apenas o movimento que elas produzem; e que tenha proscrito inteiramente as forças inerentes a um corpo em movimento, seres obscuros e metafísicos, capazes apenas de lançar trevas sobre uma ciência que é clara em si mesma.

Figura 14.20: D'Alembert em movimento como o único fundamento da mecânica (d'Alembert, 1743 PDF)

Finalmente, D'Alembert tinha pouca paciência para debates que tratavam "força"como uma causa metafísica escondida ou apenas um campo de batalha terminológico. Ele diz explicitamente que se afastou das causas móveis para considerar apenas o movimento produzido, e descarta a disputa vis viva como inútil à mecânica, preferindo princípios operacionais claros baseados em movimentos e cálculos, fig. 1. 14.20.

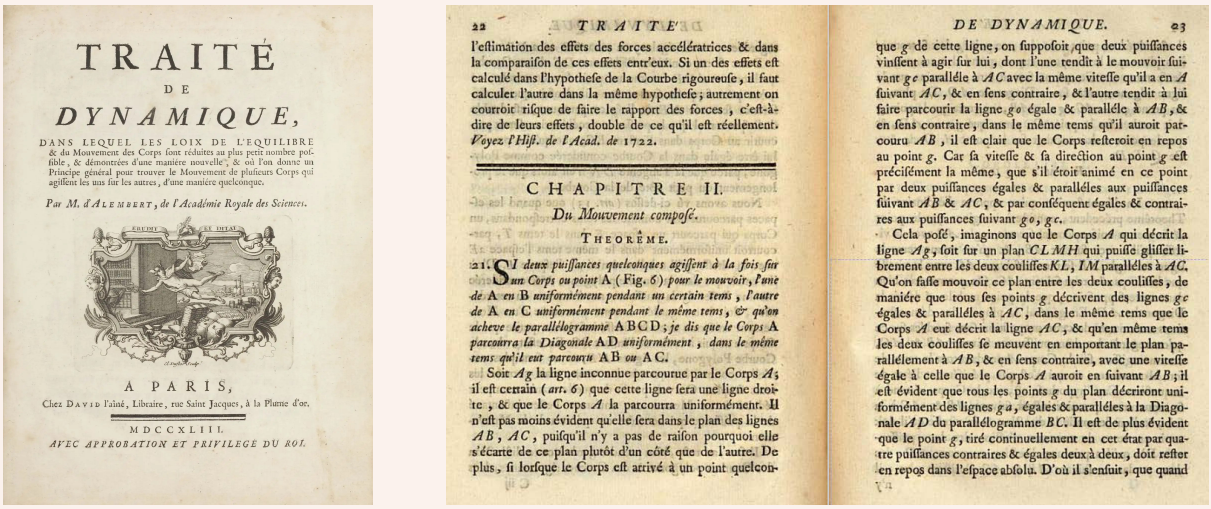
Deve-se notar que o próprio d'Alembert não chamou isso de 'Princípio de Alembert'; Essa apelação veio mais tarde. Na *Traite*, ele apresentou-o como um método geral para resolver problemas de movimento restrito, não como um princípio nomeado. O batismo foi realizado por gerações subsequentes que reconheceram o caráter fundamental de sua visão.

CÓPIA PARA REVISÃO

Na Força e no Paralelograma

Na *Traité de Dynamique*, d'Alembert abordou o problema do paralelograma de forças usando um método geométrico para analisar o resultado das forças simultâneas atuando em um corpo. Ele explora o cenário onde duas forças atuam em um ponto simultaneamente, cada uma dirigindo o ponto ao longo de dois caminhos, AB e.. AC, respectivamente, dentro do mesmo tempo pórtico. Construindo um paralelograma onde AB e.. AC representa lados adjacentes, a diagonal de A representa o caminho resultante devido ao efeito combinado das duas forças:

> Teorema 2. Se dois poderes arbitrários agirem ao mesmo tempo em um corpo ou ponto A Para mover, um de A para B uniformemente em um determinado tempo, o outro de A para C uniformemente durante o mesmo tempo, e se alguém constrói o paralelograma $ABCD$; Eu digo que o corpo A se moverá ao longo da diagonal AD uniformemente na mesma época que teria se movido AB ou AC.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique



TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre poſſible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres, d'une manière quelconque.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
M. D. C. C. XLIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

22 TRAITE'
l'eſtimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaiſon de ces effets entr'eux. Si un des effets eſt calculé dans l'hypotheſe de la Courbe rigoureuſe, il faut calculer l'autre dans la même hypotheſe; autrement on courroit riſque de faire le rapport des forces, c'eſt-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il eſt réellement. *Voyez l'Hiſt. de l'Acad. de 1722.*

CHAPITRE II.
Du Mouvement compoſé.
THEOREME.
21. *SI deux puiſſances quelconques agiſſent à la fois ſur un Corps ou point* A (Fig. 6) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme* ABCD; *je dis que le Corps* A *parcourra la Diagonale* AD *uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru* AB *ou* AC.
Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le Corps A; il eſt certain (*art.* 6) que cette ligne ſera une ligne droite, & que le Corps A la parcourra uniformément. Il n'eſt pas moins évident qu'elle ſera dans le plan des lignes AB, AC, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, ſi lorſque le Corps eſt arrivé à un point quelcon-

DE DYNAMIQUE. 23
que g de cette ligne, on ſuppoſoit que deux puiſſances vinſſent à agir ſur lui, dont l'une tendît à le mouvoir ſuivant ge parallèle à AC avec la même viteſſe qu'il a en A ſuivant AC, & en ſens contraire, & l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne go égale & parallèle à AB, & en ſens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il eſt clair que le Corps reſteroit en repos au point g. Car ſa viteſſe & ſa direction au point g eſt préciſément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puiſſances égales & parallèles aux puiſſances ſuivant AB & AC, & par conſéquent égales & contraires aux puiſſances ſuivant go, ge.
Cela poſé, imaginons que le Corps A qui décrit la ligne Ag, ſoit ſur un plan $CLMH$ qui puiſſe gliſſer librement entre les deux couliſſes KL, IM parallèles à AC. Qu'on faſſe mouvoir ce plan entre les deux couliſſes, de maniére que tous ſes points g décrivent des lignes ge égales & parallèles à AC, dans le même tems que le Corps A eut décrit la ligne AC, & qu'en même tems les deux couliſſes ſe meuvent en emportant le plan parallélement à AB, & en ſens contraire, avec une viteſſe égale à celle que le Corps A auroit en ſuivant AB; il eſt évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga, égales & parallèles à la Diagonale AD du parallélogramme BC. Il eſt de plus évident que le point g, tiré continuellement en cet état par quatre puiſſances contraires & égales deux à deux, doit reſter en repos dans l'eſpace abſolu. D'où il s'enſuit, que quand

Figura 14.21: D'Alembert no paralelograma de forças (d'Alembert, 1743)

Em um trabalho de acompanhamento, d'Alembert escreveu:

> **Proposição 1.** Dois poderes iguais $\alpha\beta$ e.. $\alpha\xi$, formando qualquer ângulo entre eles, sempre produzirá a diagonal $\alpha\delta$ como o resultado.
>
> d'Alembert, 1761 *"Démonstration du principe de la composition des forces"*, p. 177

Note-se que d'Alembert usa a palavra ''poder" na declaração da proposição, bem como no texto das memórias, embora a palavra "força" apareça no título; Isso mostra a liberdade com que ele trocou ambos os termos.

CÓPIA PARA REVISÃO

D'Alembert voltou ao assunto mais uma vez. Sob o título *Nouvelle demonstration du Parallélogramme des Forces*, Fig. 14.22Ele escreveu:

> Nas memórias que apresentei sobre os Princípios da Mecânica, anunciei uma nova prova do Paralelograma das Forças. É esta prova que darei aqui. É na realidade menos simples do que a prova que pode ser lida no volume citado; No entanto, como o uso que faço de algumas funções pode ser útil para resolver outros problemas do mesmo tipo, acredito que os Geômetros não ficarão zangados se eu compartilhá-los com eles.
>
> d'Alembert, 1773 *"Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces"*

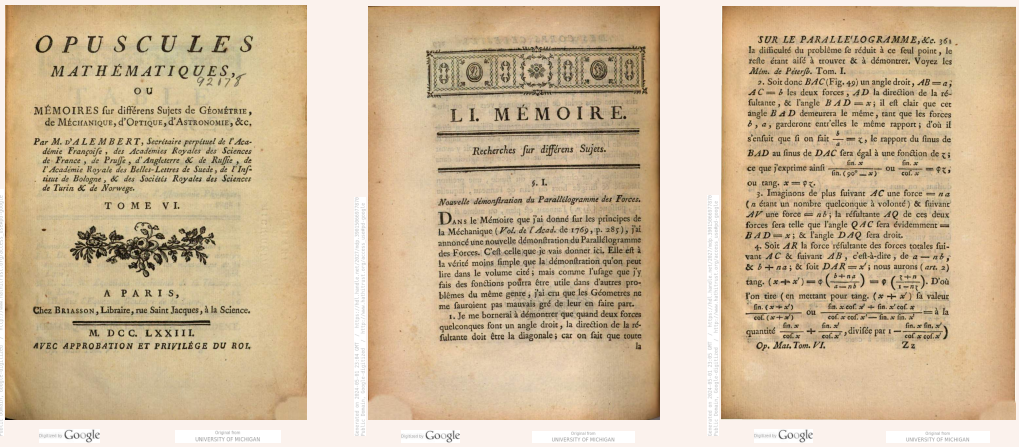


Figura 14.22: As últimas observações de D'Alembert sobre o paralelograma das forças (d'Alembert, 1773)

Extensão para Dynamics e Trabalho virtual

V

A motivação de D'Alembert era parcialmente filosófica. Ele procurou eliminar a força como uma causa metafísica, uma noção que ele considerava obscura, e reformular a mecânica em termos puramente geométricos e cinemáticos:

> J'ai, pour ansi dire, détourné la vue de dessus les causa motrices, poup non concepting uniquement que le Mouvement qu'elles produisent; ESTUDAÇÃO PROSCRIT les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs & Métafisiques, qui ne sont capaz que de répandre les ténèbres sur une Science Claire par elle-même.
>
> Por assim dizer, eu virei meus olhos de causas móveis, para considerar apenas o movimento que eles produzem; Eu proscrevi forças inerentes aos corpos em movimento, objetos e seres metafísicos, capazes de lançar a escuridão sobre uma ciência clara.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

CÓPIA PARA REVISÃO

Isso o colocou no meio do *Vis viva* [23] A controvérsia que dividiu os mecânicos continentais desde Leibniz:

> Pergunta da Cette... Consiste em savoir, si la force des Corps en Mouvement est propencenelle au produit de la masse par la vitesse, ou au productit de La Masse par le quarré de la vitesse... Malgré les disputas que se questionam a causa, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mencione dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui.
>
> Esta pergunta pergunta se a força dos corpos em movimento é proporcional à massa vezes velocidade, ou a massa vezes o quadrado da velocidade ... Apesar das disputas que causou, sua completa inutilidade para a mecânica me levou a não fazer menção disso no trabalho que publico hoje.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

Ao reformular a dinâmica como um problema de equilíbrio, d'Alembert desviou as disputas sobre a "verdadeira medida"da força.

Sua visão chave era enganosamente simples. A segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, pode ser reescrito como:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Esta é uma declaração de equilíbrio entre a força aplicada $\mathbf{F}$ E o que D'Alembert chamou de "força da inércia", $-m\mathbf{a}$.. O corpo acelerado pode ser tratado como se estivesse em equilíbrio estático sob a ação combinada das forças impressas e as forças inerciais.

O princípio das velocidades virtuais se aplica diretamente. Para um sistema de partículas, o princípio de d'Alembert afirma:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

Onde $\delta\mathbf{r}_i$ são virtual deslocamentos compatíveis com as restrições.

Isso é uma dinâmica reduzida a estática. Ao tratar termos inerciais como forças, d'Alembert uniu a mecânica e demonstrou a extraordinária generalidade de trabalho virtual. Cada problema em dinâmica, não importa quão complexo o sistema de corpos e restrições, poderia agora ser abordado através da mesma estrutura variacional que Bernoulli estabeleceu para estática.

Deve-se notar que o próprio d'Alembert não chamou isso de 'Princípio de Alembert'; Essa apelação veio mais tarde. Na *Traité*, ele apresentou-o como um método geral para resolver problemas de movimento restrito, não como um princípio nomeado. O batismo foi realizado por gerações subsequentes que reconheceram o caráter fundamental de sua visão.

[23] Leibniz's *Vis viva* ("força viva"), proporcional a mv^2 (mais tarde energia cinética até um fator constante), não deve ser confundido com Newton's *Vis insita* ("força inata"), ou seja. inércia ou resistência a mudanças de estado.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

14.5.16 Kant (1724-1804)

F

Esta seção terminará com um fim filosófico.

Em suas "Fundações Metafísicas da Ciência Natural", Kant, 2023 discutiu a composição dos movimentos, que se relaciona com o paralelograma das forças.

Em Foronomia (termo cunhado por Kant para se referir ao estudo dos movimentos dos corpos, sem considerar as forças ou a natureza dos próprios corpos: Kant explora a ideia de combinar diferentes movimentos de um único ponto para entender como eles se integram para formar um movimento resultante. Sua abordagem filosófica visa fornecer uma base metafísica para esses conceitos, articulando como diferentes movimentos em um único ponto podem ser entendidos como um todo unificado ao invés de apenas como causas produzindo efeitos. Kant não desenvolveu nenhuma lei matemática específica.

> **Proposição** A composição de dois movimentos de um e o mesmo ponto, só pode ser concebido por um deles sendo apresentado no espaço absoluto, mas, em vez do outro, um movimento de uma velocidade igual na direção contrária do espaço relativo [sendo apresentado] idêntico a ele.
>
> Kant, 2023 Metaphysical foundations of natural science

Não sei o que isso significa. Mas, novamente, Immanuel Kant foi um dos grandes filósofos para tratar da física.

14.5.17 Lagrange (1736-1813)

V

Joseph-Louis Lagrange *Analitique Mécanique*, Publicado em 1788 (Lagrange, 1788), representa o culminar da tradição trabalho virtual. Neste tratado monumental, Lagrange elevou o princípio das velocidades virtuais para a fundação de *Todos* Mecânica... estática, dinâmica, corpos rígidos, fluidos... e lançar todo o assunto em forma puramente analítica.

Lagrange como historiador

O próprio Lagrange estava bem ciente do desenvolvimento histórico das ideias que ele estava sistematizando. O *Analitique Mécanique* começa com uma extensa pesquisa histórica traçando a evolução da mecânica da antiguidade através de seu próprio tempo. Ele discute Arquimedes, Stevin, Galileu, Torricelli, Descartes, Wallis, Huygens, Bernoullis e d'Alembert, fornecendo o que permanece um dos melhores relatos históricos do assunto escrito por um praticante. Esta consciência histórica, rara entre os matemáticos, altera seu trabalho um senso de linhagem intelectual que conecta o leitor à longa cadeia de descobertas levando ao princípio das velocidades virtuais.

CÓPIA PARA REVISÃO

O Programa Analítico

No prefácio, Lagrange explicitou sua intenção revolucionária:

> Em ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les methodes que j'y expor ne demandent ni constructions, ni raisonnemens geométriques ou mecânicas, mais seulement des opérations algébriques, assujeitties à une marche réguliere et uniforme.
>
> Não encontrarão diagramas neste trabalho. Os métodos que apresento não requerem construções nem raciocínios geométricos ou mecânicos, mas apenas operações algébricas sujeitas a um procedimento regular e uniforme.
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique

Isso não foi mera vangloria. O *Analitique Mécanique* Não contém uma única figura, um feito notável para um tratado sobre mecânica, e um testemunho do poder dos métodos analíticos que Lagrange havia desenvolvido.

Coordenadas Generalizadas

Uma das inovações mais conseqüentes de Lagrange foi a introdução de *coordenadas generalizadas*.. Em vez de descrever um sistema mecânico em termos das coordenadas cartesianas de cada partícula, que normalmente não são independentes devido a restrições, Lagrange parametrizou o sistema por um conjunto mínimo de variáveis independentes $q_1, q_2, \ldots, q_n$, onde n é o número de graus de liberdade.

Essa abstração foi revolucionária. Um pêndulo duplo, uma roda giratória, um topo giratório, uma corda vibratória... tudo poderia ser tratado pelo mesmo formalismo, independentemente da natureza física das coordenadas. O q_j Pode representar ângulos, comprimentos ou qualquer outra quantidade adequada ao problema. O princípio das velocidades virtuais, expresso em termos dessas coordenadas generalizadas, tornou-se uma ferramenta universal aplicável a sistemas de complexidade arbitrária.

O Princípio da Velocidade Virtual

A declaração generalizada de Lagrange do princípio diz:

> Si un système quelconque de tant de corps ou pontos que l'on veut, tirés chacun par de puissances quelconques, est en equilibre, & Que'on donne à d.C. système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtulle; La somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette meme puissance, sera toujours égale à zéro.
>
> Se algum sistema de qualquer número de corpos ou pontos, cada um desenhado por quaisquer forças, está em equilíbrio, e se alguém dá a este sistema qualquer movimento pequeno, em virtude do qual cada ponto atravessa um espaço infinitamente pequeno que expressa Sua velocidade virtual; A soma

CÓPIA PARA REVISÃO

> das forças, cada uma multiplicada pelo espaço que o ponto onde é aplicado atravessa na direção dessa mesma força, sempre será igual a zero.
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §1

Ainda assim, em edições posteriores, Lagrange expressou reservas sobre tomar o princípio como evidente:

> Quanto à natureza du principe des vitesses virtulles, il faut convenir qu'il n'est pas assez évident par lui-même pour pouvoir érigé en principe primitif.
>
> Em relação à natureza do princípio das velocidades virtuais, deve-se reconhecer que não é evidente o suficiente para ser estabelecido como um princípio primitivo.
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §18

Esta passagem, acrescentada na segunda edição (1811-1815), que Lagrange estava revisando no momento de sua morte, reflete sua visão madura que um princípio tão poderoso exigia uma demonstração de fundações mais simples.

Provas de Lagrange via blocos de polia

Em um artigo publicado no *Jornal de l'École Polytechnique* (Lagrange, 1798), Lagrange forneceu uma prova engenhosa do princípio baseado no equilíbrio dos blocos de polia (Figura 14.23).

A idéia é imaginar que todas as forças no sistema são exercidas por pesos agindo através de sistemas de polias, conectados por uma única corda inextensível. Se o sistema tem corpos em posições sujeitas a forças P, Q, R, S, TEssas forças são geradas por blocos de polia com vantagens mecânicas proporcionais a P, Q, R, S, T respectivamente, todos conectados pela mesma corda a um único peso.

Se os corpos passam por infinitas deslocamentos que alteram as distâncias nos sistemas de polia em quantidades $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, então o fim livre da corda se move por:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + S\delta + T\varepsilon + \cdots$$

Para o equilíbrio, este deslocamento deve desaparecer (caso contrário o peso desceria, violando o equilíbrio). Daí:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \cdots = 0$$

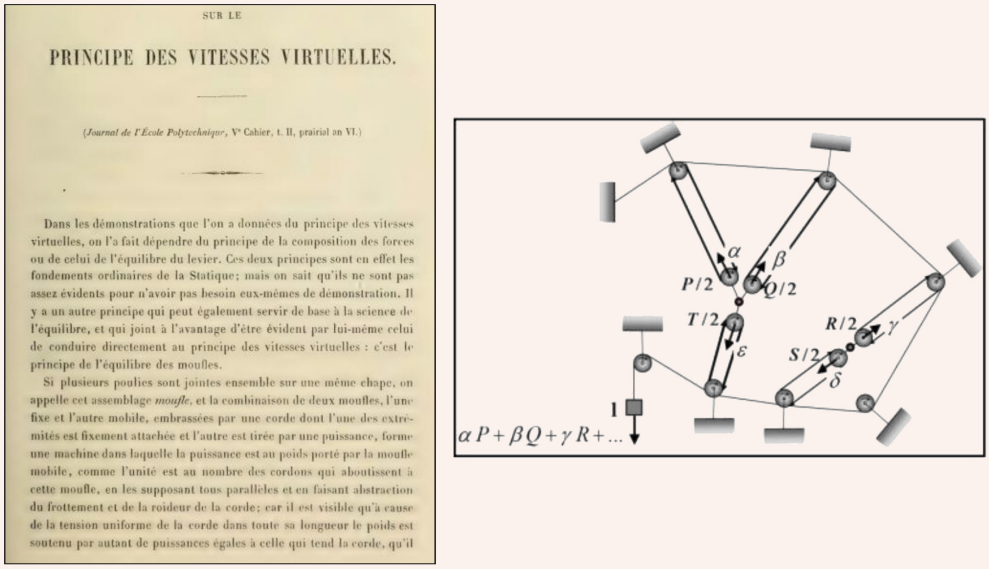
Que é precisamente a expressão analítica do princípio geral das velocidades virtuais

Multiplicadores Lagrange e forças de restrição

Talvez a contribuição mais profunda de Lagrange para o aparelho mecânico foi seu tratamento das restrições. Se o sistema está sujeito a restrições geométricas expressas como:

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \ldots$$

CÓPIA PARA REVISÃO


SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, V^e^ Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

Figura 14.23: A prova de Lagrange do princípio das velocidades virtuais usando blocos de polia (depois (Salençon, 2018))

então a equação trabalho virtual sob estas restrições é equivalente a:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \cdots = 0$$

para *Arbitrário* Variações, onde λ, μ, ν São escalares indeterminados... - Os famosos *Multiplicadores Lagrange*.

Lagrange fez então a observação crucial de que os termos $\lambda\,dL$, $\mu\,dM$, etc., têm exatamente a mesma forma matemática que os termos de força $P\,dp$, $Q\,dq$, etc. Isso leva a uma profunda interpretação física: Os multiplicadores de Lagrange *são* As forças de restrição... as reações. Cada equação de restrição geométrica é equivalente a uma ou várias forças atuando no sistema; inversamente, essas forças podem ser substituídas pelas equações geométricas de restrição, para que os corpos constituintes possam ser considerados completamente livres. Os multiplicadores representam precisamente as resistências que os corpos encontram devido às suas conexões, ou as reações que devem ser iguais e opostas às pressões exercidas pelos corpos.

Essa visão... que forças e restrições são conceitos duplos... está no coração da moderna mecânica estrutural.

O Lagrange Equações de movimento

A conquista coroada do *Analitique Mécanique* é a derivação do general equações de movimento para qualquer sistema mecânico. Combinando o princípio d'Alembert com o formalismo das coordenadas generalizadas, Lagrange mostrou que o movimento de um

CÓPIA PARA REVISÃO

sistema com n graus de liberdade é governado por n Equações diferenciais de segunda ordem:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.2}$$

Onde T é a energia cinética e Q_j são as forças generalizadas.

Quando as forças são derivíveis de uma energia potencial $V(q_1, \ldots, q_n)$, de modo que $Q_j = -\partial V/\partial q_j$, as equações tomam a forma elegante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.3}$$

Onde $L = T - V$ é o *Lagrangian* do sistema.

Estes são os.. *Euler... equações de Lagrange*, as equações fundamentais da mecânica analítica. Cada problema em dinâmica, do movimento dos planetas às vibrações de corpos elásticos, reduz-se a escrever o Lagrangiano e resolver essas equações. Todo o edifício da mecânica clássica, que tinha sido construído em pedaços ao longo de dois séculos por Galileu, Newton, os Bernoullis, Euler e d'Alembert, foi reduzido a um único procedimento uniforme.

14.5.18 Fourier (1768-1830)

V

Fourier (Fourier, 1798) Expandiu a estrutura de Lagrange para *Restrições de desigualdade*Observando que se considerarmos as resistências como forças... O corpo pode ser considerado livre, e a soma dos momentos é nula para todos os possíveis *restrições unilaterais* Como contato sem tensão, um corpo descansando em uma superfície, por exemplo, que pode empurrar mas não puxar. O princípio trabalho virtual torna-se um *Desigualdade*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \leq 0$$

para todos virtual deslocamentos compatível com a restrição. Esta formulação abriu a porta para a moderna teoria das desigualdades variacionais e da mecânica dos problemas de contato.

14.5.19 Lazare Carnot (1753-1823)

V

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823) é lembrado principalmente como "l'organisateur de la victoire" – o engenheiro militar e estadista que organizou os exércitos revolucionários franceses. Mas antes de sua carreira política o consumiu, e novamente após sua queda

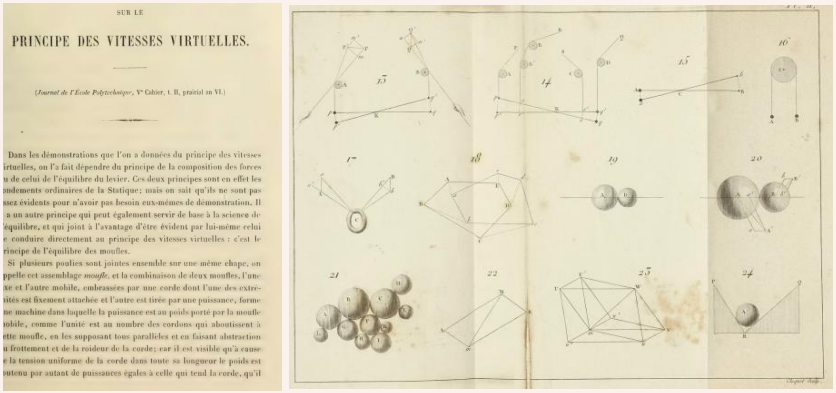
CÓPIA PARA REVISÃO

do poder em 1797, Carnot fez contribuições fundamentais para a mecânica que pontem o fosso entre a formulação analítica de Lagrange e a ciência prática das máquinas.

Carnot's *Essai sur les machines en général* foi publicado pela primeira vez em 1783 (Carnot, 1783)Quando ele era um capitão obscuro no Corps Royal du Génie. Ele atraiu pouca atenção na época. Vinte anos depois, após seu eclipse político, Carnot publicou uma versão substancialmente revisada como *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (Carnot, 1803 PDF). Estes trabalhos constituem o primeiro tratado teórico sobre a ciência geral das máquinas.

Para um excelente estudo e tradução em inglês de Carnot *Essai*, veja Pisano, Coopersmith e Peake, 2021.

A inovação central de Carnot foi o conceito de *Mouvement géométrique*- Movimento geométrico, (Carnot, 1803 PDF). Ele definiu estes movimentos como dependendo apenas da geometria de um sistema mecânico, não de sua dinâmica: Na terminologia moderna, os movimentos geométricos são o que chamamos de *virtual deslocamentos compatível com as restrições*, com a exigência adicional de reversibilidade (Fig. 14.24).


SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(Journal de l'École Polytechnique, V^e Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *mouffle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

Figura 14.24: Carnot ilustra sistemas de corpos, movimentos geométricos e mecânica do impacto (Carnot, 1803 PDF)

Carnot introduziu o termo *Momento de atividade* para o que agora chamamos *Trabalho*, o produto da força e deslocamento na direção da força. Usando movimentos geométricos e o momento da atividade, Carnot formulou um princípio generalizado: em qualquer sistema de corpos sujeitos a restrições, os movimentos geométricos são precisamente aqueles para os quais o momento total da atividade desaparece. Esta é uma forma do princípio de trabalho virtual expressa em linguagem adequada para a análise de mecanismos ao invés do formalismo abstrato de Lagrange.

Uma característica distinta da mecânica de Carnot é seu tratamento *Corpo duro*Corpos duros que sofrem mudanças instantâneas de velocidade sobre o impacto ou quando as restrições são subitamente impostas. Para tais sistemas, Carnot derivava seu teorema sobre

CÓPIA PARA REVISÃO

a perda de *Vis viva* em impacto inelástico: O, o *Vis viva* Perdido é igual a *Vis viva* que seria gerado pelas velocidades perdidas.

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i U_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i|^2 \tag{14.4}$$

Onde $\mathbf{U}_i$ e.. $\mathbf{V}_i$ são as velocidades antes e depois do impacto. Este resultado, às vezes chamado teorema de Carnot, mostra que entre todos os movimentos compatíveis com as restrições, o movimento real após o impacto minimiza a perda de energia cinética.

Para gradualmente diferentes forças, Carnot estendeu sua análise ao princípio da continuidade :. Uma máquina opera com máxima eficiência quando a transmissão de movimento ocorre sem mudanças bruscas de velocidade. Este insight teve implicações práticas imediatas para o projeto da máquina, e profundas implicações teóricas que Sadi, filho de Carnot, exploraria mais tarde: O conceito de um processo reversível é um descendente direto do movimento geométrico de Lazare.[24]

Se Lagrange transformou trabalho virtual em um ramo de análise pura, Carnot o transformou em uma ferramenta para engenharia. Seu conceito de movimento geométrico forneceu uma interpretação física do virtual deslocamento mais concreto do que a definição puramente analítica de Lagrange, e sua ênfase no trabalho como a quantidade fundamental na análise da máquina antecipou a energia baseada em energia Abordagem que dominaria a física do século XIX.

14.6 Epílogo

Por meio de um epílogo, uma pequena piscada para nossos colegas de Física e fechar este capítulo com suas definições dos quatro tipos de forças.

Gravitacional força é a força da atração entre duas massas. É a força responsável pela atração gravitacional que objetos com massa exercem uns nos outros. De acordo com a lei de Newton da gravitação universal, a magnitude da força gravitacional entre duas massas é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros.

Eletromagnético força é a força que age entre partículas carregadas eletricamente. Inclui forças elétricas (atração ou repulsão entre partículas carregadas) e forças magnéticas (interação entre cargas móveis). Esta é a força que impede um livro de cair através de uma tabela porque no nível atômico, tanto o seu livro como a tabela são compostos de átomos, que consistem em um núcleo (contendo prótons e nêutrons) cercado por

[24] Sadi Carnot (1796-1832) fundou a termodinâmica com sua *Réflexions sur la puissance motrice du feu* (1824). O aparato conceitual que ele herdou de seu pai, particularmente a noção de processos reversíveis, desempenhou um papel crucial nesse trabalho.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

elétrons. Os elétrons no livro e os elétrodos na superfície da tabela repelem-se devido às suas cargas negativas. Da mesma forma, os elétrons nos átomos do livro e os átomos da superfície da mesa também se repelem. Esta força de repulsão entre os elétrons carregados negativamente é o que impede sua mão de passar através da mesa.

Nuclear Fraco A força é responsável por certos tipos de decomposição radioativa e interações envolvendo partículas elementares.

Forte Nuclear força é a força que liga prótons e nêutrons juntos no núcleo de um átomo. É a mais forte das quatro forças fundamentais, mas tem um alcance muito curto, agindo apenas em distâncias comparáveis ao tamanho dos núcleos atômicos. Forte força nuclear é responsável por manter núcleos atômicos juntos apesar da repulsão eletrostática entre prótons carregados positivamente.

14.7 Conclusão

Refletindo sobre nossa compreensão atual da física e mecânica, é realmente fascinante ver o progresso extenso que a humanidade tem feito na compreensão do conceito de força. Inicialmente entrelaçados com a intervenção divina e filosofia abstrata, essas primeiras ideias agora parecem distantes de nossas discussões empíricas diretas. De fato, a jornada de perceber a força como uma manifestação da vontade divina para compreendê-la através das claras e precisas lentes da física/mecânica moderna marca uma evolução significativa.

Esta transformação, catalisada pela Revolução Científica a partir do final do século XVI, ressalta nossa busca implacável de conhecimento e a profunda mudança das explicações místicas para empíricas e teóricas Ciência.

Assim, concluirei apropriadamente com a citação atribuída a um dos fundadores da mecânica quântica e eletrodinâmica quântica, Paul Dirac [25]

> Parece claro que a moda atual para dinossauros e o interesse histórico que as pessoas mostram nas religiões primitivas surgem da mesma causa – um desejo de entender como as pessoas primitivas enfrentavam o mundo. As antigas religiões eram tentativas de entender as forças da natureza, personificando-as.
>
> Dirac, 1963 *"The Evolution of the Physicist's Picture of Nature"*

[25] https://freethoughtblogs.com/singham/2013/03/24/paul-dirac-on-religion/

CÓPIA PARA REVISÃO

Resumo Cronológico

Tabela 14.1: Desenvolvimento cronológico da força e dos princípios virtuais.

Ano	Autor	Referência	Contribuição Principal
c. 450 a.C.	Empédocles	n/a	”Amor” e ”Força”’ como causas opostas de movimento (primeiramente primitivos como força)
c. 350 a.C.	Platão	Plato, 350 BC	Auto-moção como causa primária; Primeiro enquadramento metafísico da agência em movimento
c. 350 a.C.	Aristotle	Aristotle, 2000	Lever explicado por velocidades circulares; conceito de ”poder”
c. 250 a.C.	Arquimedes	Archimedes, -250	Prova rígida da lei de alavancas; Nenhum princípio variacional geral
c. 100 a.C.	Posidonius / Stoics	n/a	Força como ativa "tensão"; Ênfase explícita de empurrar/puxar; agente/paciente dualidade
c. 530	Filopono	Philoponus, 1993	Crítica de Aristóteles; Impulso impressionado persiste após contato (proto-inertia)
c. 1020	Avicenna	n/a	*Mayl* (inclinação/impeto) como tendência impressionada; movimento persiste sem movimento contínuo
c. 1120	al-Baghdadi	n/a	Força ligada à mudança de movimento (distingue aceleração da velocidade; Proto..$F \propto a$)
c. 1250	Jordanus de Nemmore	Nemore, 1250	”Gravidade posicional”; virtual implícito deslocamentos em sistemas restritos
c. 1340	Jean Buridan	Buridan, 1991	Teoria do impulso refinado; Declaração de inércia (moção persiste a menos que resista)
c. 1500	Leonardo da Vinci	Vinci, 1881	Manuscritos em máquinas simples; Regra da proporção; síntese prática
1586	Simon Stevin	Stevin, 1586	*Clootcrans*; impossibilidade de movimento perpétuo; paralelograma de forças
1594	Galileo Galilei	Galilei, 1594	"Conseguido em força, perdido em velocidade"(comércio entre força e movimento)
1615	Salomon de Caus	Caus, 1615	*Les raisons des forces mouvantes*; Introduzido termo ”travail” (trabalho)
1637	RenÉ Descartes	Descartes, 1898	Infinitesimal deslocamentos; construção tangente; espaço (não tempo/velocidade)
1644	Evangelista Torricelli	Torricelli, 1644	Critério de centro-de-gravidade: Equilíbrio se o C.G. comum. Não posso descer
1670	John Wallis	Wallis, 1670	Composição generalizada além de direções especiais; Decomposição de força mais ampla
1686	G. W. Leibniz	Leibniz, 1686a	*Vis viva* (mv^2) vs momentum (mv): ’’Força” ligada ao trabalho/energia
1687	Isaac Newton	Newton, 1687	Leis de movimento; paralelograma de forças da dinâmica
1717	Johann Bernoulli	Bernoulli, Johann, 1725	Primeira declaração geral de velocidades virtuais (carta para Varignon)
1725	Pierre Varignon	Varignon, 1725	Teorema de Varignon sobre momentos; divulgação/organização de resultados anteriores
1726	Daniel Bernoulli	Bernoulli, Daniel, 1726	Explicação estática do paralelograma de forças; consolidação da composição
1743	Jean d’Alembert	d’Alembert, 1743	Extensão à dinâmica através de forças inerciais; Reformulação do estilo virtual de trabalho
1783	Lazare Carnot	Carnot, 1783	”Movimentos geométricos’; *Momento de atividadeé*; Teoria das máquinas
1786	Immanuel Kant	Kant, 2023	Tratamento filosófico da composição dos movimentos (espaço absoluto/relativo)
1788	Joseph Lagrange	Lagrange, 1788	Sistematização; multiplicadores como forças de restrição; mecânica analítica
1798	Joseph Fourier	Fourier, 1798	Desigualdade (unilateral) restrições; Reações tratadas como forças
1864	James Maxwell	Maxwell, 1864c	Método de carga da unidade. Teorema recíproco
1868	Otto Mohr	Mohr, 1868	Método de carga unitária sistemática para pórticos

CÓPIA PARA REVISÃO



Caravaggio, A Conversão de São Paulo (1601)

Uma força invisível ataca Paulo de seu cavalo, a causa invisível, o efeito inegável. A própria força permanece misteriosa enquanto suas consequências são manifestas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Interlúdio III: Onde a bolsa encontra paixão

Os próximos dois capítulos partem de uma apresentação estritamente histórica ou temática para abordar dois assuntos pelos quais tenho um forte interesse pessoal. O mais importante é o Capítulo 15, onde a sutil intersecção entre estruturas e arquitetura é examinada. Capítulo 16 em seguida, explora uma intersecção diferente: que entre terremotos e mitos.

Estritamente falando, nenhum tópico pertence totalmente ao escopo deste livro; no entanto, refletem interesses pessoais duradouros que naturalmente se espalharam nesses dois capítulos finais.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 15

Arquitetura & Estrutura

Abstract

Este capítulo examina a complexa e evolutiva relação entre arquitetura e engenharia estrutural - duas disciplinas que antes eram unificadas na figura do mestre construtor, mas têm crescido cada vez mais distintas desde o século XVIII. Começando com os princípios fundamentais articulados por Vitruvius em seu De Architectura—Firmitas, utilitas, e venustas Rastreamos como esses ideais foram transmitidos através dos tratados renascentistas de Alberti e Palladio, adaptados aos materiais da era industrial por engenheiros como Eiffel e Maillart, e finalmente reformulados em Billington's O conceito do século XX de "arte estrutural" progettistiConstrutores de design que conseguiram a integração da lógica estrutural e expressão estética que representa o maior chamado de nossa profissão, enquanto confrontam verdades desconfortáveis sobre o estado atual da prática de engenharia estrutural. Numa era em que as ferramentas computacionais reduziram muitos engenheiros a técnicos e apoiadores de ideias arquitetônicas, examinamos o que distingue os criativos cinco por cento que continuam a ultrapassar limites. Em vez de apoiar a terminologia contestada de Billington sobre "arte estrutural", argumentamos pela designação mais precisa de "arqueza estrutural"e sugerimos que o caminho para frente não reside na rejeição da tecnologia, mas em redescobrir o fundamental princípios que possibilitaram as conquistas de nossos antecessores.

15.1 Introdução 551
15.1.1 Organização do Capítulo . . 552
15.2 A Tradição Vitruviana 553
15.2.1 Marcus Vitruvius Pollio: O Primeiro Influenciador Arquitetônico 553
15.2.2 Vitruvius Redescoberto Durante o Renascimento 561
15.2.3 Antropometria e Questão de Escala 569
15.3 Interlúdio: Arquitetos e Engenheiros... Arte e Ciência? 583
15.4 Os Pioneiros 586
15.4.1 O Buttress Voador: Lógica Estrutural Visível 587
15.4.2 Gustave Eiffel (1832-1923) . . 590
15.4.3 Louis Henri Sullivan (1856-1924) 592
15.4.4 Robert Maillart (1872-1940) . 594
15.4.5 Auguste Perret (1874-1954) . 595
15.4.6 Eduardo Torroja Miret (1899-1961) 597
15.4.7 Pier Luigi Nervi (1891-1979) 600
15.4.8 Riccardo Morandi (1902-1989) 607
15.4.9 Christian Menn (1927-2018) . 609
15.4.10 Fazlur Rahman Khan (1929-1982) 610

CÓPIA PARA REVISÃO

15.4.11 O Progettisti Comparado: Construtores de Designer e seus Materiais 614
15.5 Morfogênese estrutural: Figuras-chave 616
15.5.1 Catenária 617
15.5.2 E Membranas 620
15.5.3 Estruturas recíprocas 623
15.5.4 Otimização Matemática: Maxwell, Michell, Baker e Beghini 626
15.5.5 Coda: Quando os arquitetos e engenheiros colidiram . . . 632
15.6 A Geração de Computador 635
15.6.1 Arquitetos "Excepcionais" . 635
15.6.2 Engenheiros estruturais: O Cinco Percenter 638
15.7 Vitruvius Revisitado 649
15.7.1 Desconstruindo a Arte Estrutural 649
15.7.2 O que é Art? 650
15.7.3 Arquitetura Estrutural: Manifesto de Llunji 652
15.8 Conclusão 653

15.1 Introdução

A relação entre arquitetura e engenharia é tão antiga quanto a própria construção[1].. Antes da profissionalização dessas disciplinas no século XVIII, uma única figura – o mestre construtor – concebeu, projetou e construiu as grandes estruturas da antiguidade e da Idade Média. Os mastros voadores das catedrais góticas, as cúpulas das igrejas bizantinas, e as pontes das estradas romanas emergiram não da colaboração de especialistas, mas de indivíduos que possuíam conhecimento prático de construção e sensibilidade estética em Meça igual.

Esta unidade começou a se fragmentar com o surgimento da mecânica racional e a fundação de instituições educacionais especializadas: O, o *École des Ponts et ChaussÉes* (1747), o *École Polytechnique* (1794), e seus homólogos em toda a Europa. O *lngÉnieur*, treinado em matemática e mecânica, tornou-se distinto do *arquiteto*, treinado em composição, desenho e história. O que tinha sido uma única vocação tornou-se duas profissões, cada um com seus próprios valores, métodos e estruturas institucionais.

Ao contrário dos outros capítulos deste livro, que seguem uma estrutura predominantemente cronológica, este capítulo adota uma abordagem temática. Um tratamento puramente cronológico não só se revelaria tedioso, mas inadequadamente captaria as complexas interações entre as várias figuras e ideias que moldaram a relação arquitetura-estrutura. O conteúdo resultante pode parecer heteroclite–reflexo, reconhecidamente, os interesses e entusiasmos particulares do autor– mas esta organização eclética melhor serve nosso propósito de entender como inovação técnica, visão estética, e teórico A reflexão tem influenciado uns aos outros através de séculos e continentes. De fato, este

[1]Este capítulo cresceu de muitas conversas com Patrizia Galdieri, arquiteto, cuja curiosidade sobre o A fronteira entre arquitetura e engenharia estrutural ajudou a despertar a minha própria.

CÓPIA PARA REVISÃO

capítulo, junto com o Capítulo 9[2], estavam entre os meus favoritos para escrever, como eles proporcionaram a oportunidade de expressar interesses pessoais e vieses que poderiam de outra forma permanecer escondidos sob a exposição técnica que domina o resto deste trabalho.

A tensão entre essas disciplinas e a questão de se sua separação representa progresso ou perda, anima este capítulo. Por um lado, o surgimento da engenharia estrutural como uma disciplina científica possibilitou realizações sem precedentes: pontes que se estendem por distâncias que pareciam impossíveis para os construtores medievais, torres subindo a alturas que desafiavam as regras de proporção Vitruviana, cascas de tal magreza que eles abordaram os limites teóricos do comportamento material. Por outro lado, esta especialização criou uma divisão de trabalho que muitas vezes relegava o engenheiro estrutural para o papel de consultor técnico, resolvendo problemas definidos por outros em vez de moldar a concepção de edifícios desde seu início.

As figuras examinadas neste capítulo, de Vitruvio através dos mestres da Renascença aos grandes engenheiros-construtores dos séculos XIX e XX, representam diferentes respostas a esta tensão fundamental. Alguns, como Nervi e Torroja, alcançaram uma síntese do domínio técnico e visão estética que rivaliza com qualquer realização puramente "artística". Outros, como Gehry e Calatrava, desafiaram engenheiros estruturais a analisar formas de complexidade geométrica que novas ferramentas computacionais tiveram que ser desenvolvidas para realizá-las. Ainda outros, como Billington, procuravam articular um referencial teórico que estabelecesse a engenharia estrutural como uma disciplina criativa autônoma em vez de uma serva à arquitetura.

Este capítulo não oferece resoluções fáceis para essas tensões. Em vez disso, fornece o contexto histórico e conceitual necessário para que o engenheiro estrutural pensativo navegue por eles. A tríade vitruviana - força, utilidade e beleza - continua tão relevante hoje como era há dois milênios atrás, mesmo que os meios para alcançar esses objetivos tenham sido transformados sem reconhecimento. Entender essa tradição, e os grandes praticantes que a encarnaram, é essencial para quem aspira a praticar engenharia estrutural não apenas como uma especialidade técnica, mas como uma disciplina criativa digna do nome.

15.1.1 Organização do Capítulo

Este capítulo é organizado em sete grandes seções, cada uma abordando um aspecto distinto da relação arquitetura-estrutura:

§15.2:. A Tradição Vitruviana Começamos com o texto fundamental da teoria arquitetônica ocidental através de três subseções: §15.2.1 examina Marcus Vitruvius Pollio e seu tratado abrangente *De Architectura*, estabelecendo a famosa tríade de *Firmitas*, *utilitas*, e *venustas* (§3.2.4.1) traça a transmissão dos princípios vitruvianos através

[2]Os Grandes Desafios: Catenária, Elastica e o Nascimento da Mecânica Analítica.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

dos tratados renascentistas de Alberti e Palladio; e.. §15.2.3 explora a tradição antropométrica de Vitruvius através de Leonardo para Le Corbusier *Modulor*.

§15.3:. **Interlúdio, arquitetos e engenheiros** Um exame crítico de como os papéis de arquiteto e engenheiro divergiram no século XVIII, criando as tensões profissionais que persistem hoje, com perspectivas de Ada Louise Huxtable, Eduardo Torroja, e Le Corbusier sobre o próprio relação entre essas disciplinas.

§15.4:. **Os Pioneiros** O coração do capítulo apresenta o grande *progettisti*Engenheiros que alcançaram a arte estrutural através da integração do domínio técnico e visão estética. Do topo gótico voando através da construção de ferro Eiffel, arcos de concreto de Maillart, Torroja cascas, ferrocimento de Nervi, Morandi concreto protendido, pontes de Menn e arranha-céus tubulares de Khan.

§15.5:. **Morfogênese estrutural** A tradição de encontrar formas onde a forma estrutural emerge das demandas de carga, material e construção em vez de preferência estética arbitrária – desde estudos catenarios através de experimentos de membrana até abordagens de otimização matemática.

§15.5.5:. **Competição do século 19 entre arquitetos e engenheiros** Exame histórico da rivalidade profissional entre arquitetos e engenheiros durante a era industrial, incluindo estudos de caso da competição Torre Eiffel, Crystal Palace, e Brooklyn Bridge.

§15.6:. **A Geração de Computador** Confrontando a transformação da prática de engenharia estrutural através de ferramentas computacionais, traçando os criativos "cinco por cento"que transcendem mero cálculo técnico do World Trade Center de Robertson através dos arranha-céus otimizados topologia de Baker Para os sofisticados projetos de ponte de Virlogeux, enquanto examinava o trabalho de "arquitetos excepcionais"como Candela, Gehry e Calatrava.

§15.7:. **Vitruvius Revisitado** Um exame crítico do conceito de Billington de "arte estrutural"e defesa para o termo mais preciso "arquitectura estrutural", argumentando que a tríade vitruviana continua sendo o quadro mais adequado para avaliar realizações estruturais na computação Idade.

15.2 A Tradição Vitruviana

15.2.1 Marcus Vitruvius Pollio: O Primeiro Influenciador Arquitetônico

Sem arquitetura *Teórico* teve uma influência tão importante e duradoura como Marcus Vitruvius Pollio (também conhecido por: Vitruvius), ou mais especificamente seu livro *De Architectura, libri dezembro*, conhecido hoje como o *Dez livros sobre arquitetura* (Vitruvius e Morgan, 1914). Curiosamente, no contexto deste livro ele é muitas vezes rotulado como

CÓPIA PARA REVISÃO

um arquiteto romano *e.*. Um engenheiro militar. Escrito durante o reinado de Augusto e dedicado ao imperador, *De Architectura* compreende dez livros que cobrem a educação de arquitetos, materiais de construção, construção de templos, edifícios públicos e privados, pisos e estuque, abastecimento de água, astronomia e cronometragem, e máquinas civis e militares. É provavelmente o primeiro estudo abrangente sobre seu tema, abrangendo não só construção de edifícios, mas também muitos aspectos da engenharia mecânica, incluindo gestão de construção, engenharia civil, engenharia de materiais, engenharia militar, e Planejamento urbano.

15.2.1.1 Vitruvius na Educação

Como muitos estudantes de pós-graduação reconhecendo seus comitês de tese, Vitruvius expressa gratidão a seus pais e afirma não ser impulsionado por considerações financeiras.[3]

> Por isso, sou muito grato e infinitamente grato aos meus pais pela aprovação desta lei ateniense, e por ter tomado cuidado para que me ensinassem uma arte, e aquela de um tipo que não pode ser levada à perfeição sem aprender e um liberal educação em todos os ramos de instrução. Obrigado, portanto, à atenção de meus pais e da instrução dada por meus professores, eu obtive uma ampla gama de conhecimento, e pelo prazer que eu tenho em assuntos literários e artísticos, e na escrita de tratados, eu adquiri bens intelectuais cujos principais frutos são estes pensamentos: Essa superfluidade é inútil, e não sentir a falta de nada são verdadeiras riquezas. Pode haver algumas pessoas, no entanto, que consideram tudo isso de nenhuma consequência, e pensam que os sábios são aqueles que têm muito dinheiro. É por isso que muitos, em busca desse fim, assumem sobre si mesmos uma garantia insolente, e alcançam notoriedade e riqueza ao mesmo tempo. Mas por minha parte, César, eu nunca estive ansioso para fazer dinheiro pela minha arte, mas têm ido no princípio que esbelto meios e uma boa reputação são preferíveis à riqueza e Descrédito.
>
> Vitruvius, 1960

Vitruvius defendia a ideia de que um arquiteto deveria ter uma educação ampla, e não se especializar em uma fase inicial – um sentimento que ressoa com preocupações modernas sobre treinamento técnico excessivamente estreito:

> Um. O arquiteto deve estar equipado com conhecimento de muitos ramos de estudo e variados tipos de aprendizagem, pois é por sua Julgamento de que todo o trabalho feito pelas outras artes é posto à prova. Isto O conhecimento é filho da prática e da teoria. ... 4. ... Um arquiteto deveria ser um homem educado para deixar uma lembrança mais duradoura em seus tratados. Em segundo lugar, ele deve ter um conhecimento de desenho para que possa facilmente fazer esboços para mostrar a aparência do trabalho que propõe. Geometria, também, é de muita ajuda na arquitetura, e em particular nos ensina o uso da regra e bússolas, pelo qual especialmente nós adquirimos prontidão para fazer planos para edifícios em seus terrenos, e aplicar corretamente a praça, o nível, ea Queda Cinco. Um amplo conhecimento da história é necessário... Seis. Quanto à filosofia, faz um arquiteto de mente alta e não auto-assumindo, mas o torna cortês, justo e honesto sem avareza. ... Oito. Música, também, o arquiteto deve entender para que ele Pode ter conhecimento da teoria canônica e matemática. ...

[3] Na linguagem moderna, ele procurava autoridade sobre celebridades.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Nove. Nos teatros, também, há os vasos de bronze 10. O arquiteto também deve ter conhecimento do estudo de Medicina por causa das questões do clima. Eu acho que os homens não têm o direito de se professar arquitetos apressadamente, sem ter escalado desde a infância os passos desses estudos e assim, amamentado pelo conhecimento de muitas artes e ciências, tendo atingido as alturas do solo sagrado da arquitetura.
>
> Vitruvius, 1960

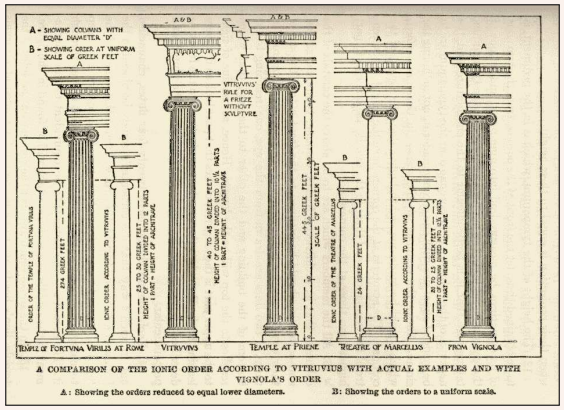
Como muitos de nós cientistas, Vitruvius também estava preocupado com suas habilidades de escrita, pedindo a indulgência de César se alguma coisa é definida com pouca consideração pela regra gramatical

15.2.1.2 Vitruvius, o Engenheiro

Como engenheiro militar, Vitruvius criou regras simples para projeto estrutural. Seu *De Architectura* (Vitruvius, 1960) foi de fato o primeiro registro codificado conjunto de regras para estruturas, consistindo em dissertações sobre uma grande variedade de assuntos relacionados à arquitetura, engenharia, saneamento, hidráulica prática, vasos acústicos, e similares. Grande parte do material parece ter sido tirado de tratados extintos anteriormente por arquitetos gregos. Os escritos têm sido estudados desde o Renascimento como um tesauro da arte da arquitetura clássica romana, Fig. 15.1b.. Para todos os fins práticos, pode ser visto como um guia para projetos de construção.



(a) Vitruvius apresentando *De Architectura* a César Augusto



(b) Leis Vitruvius de proporções, (Vitruvius, 1960)

Figura 15.1: Vitruvius

O conteúdo prático de *De Architectura* é extenso: Vitruvius discute as propriedades de materiais de construção (cal, areia, pedra, madeira), projeto da fundação, construção de paredes, e as proporções apropriadas para diferentes tipos de edifícios. Ele descreve as ordens clássicas (Doric, Ionic, Corinthian) e sua aplicação adequada, relaciona proporção arquitetônica com o corpo humano – o famoso homem Vitruviano que Leonardo mais

CÓPIA PARA REVISÃO

tarde ilustraria, e que examinamos ainda mais em §15.2.3E fornece contas detalhadas de máquinas de construção, incluindo guindastes, guinchos e dispositivos de elevação de água.

O que é mais importante neste livro são as regras de proporcionalidade. Um deles diz:

> Se a largura for de mais de 40 pés, deixe pilares ser colocado dentro e em frente ao pilares entre as formigas. Eles devem ter a mesma altura que o pilares na frente deles, mas sua espessura deve ser proporcionalmente reduzida: Assim, se o pilares na frente estão em espessura um oitavo de sua altura, estes devem ser um décimo; Se os primeiros são um nono ou um décimo, estes devem ser reduzidos na mesma proporção. Pois sua redução não será perceptível, pois o ar não tem livre jogo sobre eles. Ainda assim, no caso de parecerem muito esbeltos, quando o exterior pilares tem vinte ou vinte e quatro flautas, estas podem ter vinte e oito ou trinta e dois. Assim, o número adicional de flautas compensará proporcionalmente a perda no corpo do eixo, impedindo que ele seja visto, e assim de uma forma diferente o pilares será feito para parecer igualmente grosso.
>
> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

Essas regras eram aplicáveis porque um pilar projetado desta forma tinha sido encontrado pela experiência para ser satisfatório – poderia ser parte de um edifício sem flambagem ou esmagamento. Além disso, a experiência mostrou que o pilar poderia ser construído em qualquer escala, ao contrário da intuição "moderna" (Heyman, 2003). Essas regras funcionavam por séculos porque os materiais usados para construção antiga, pedra e até certo ponto madeira, são muito levemente estressados nas estruturas completas. Pontes de pedra muito grandes poderiam ser construídas, e catedrais construídas a uma altura impressionante; tudo o que era necessário era que a forma (de um anel de arco, de uma bunda voadora) deveria estar correta, e esta é uma exigência geométrica, para ser satisfeita seguindo as regras da proporção. É claro que ninguém sabia quão segura era a estrutura, e assim o processo deve ter sido de tentativa e erro.

A abordagem de Vitruvius – leis de proporções – assim permaneceu a abordagem predominante do design por séculos porque *Formar* era o objetivo mais importante. A força era irrelevante (as pedras são bastante fortes), rigidez pode nunca ter ocorrido aos construtores como sendo um problema, e a estabilidade foi abordada geometricamente (por exemplo, como moldar um arco para evitar tensão tensões levando a rachaduras que por sua vez se renderiam a Falhado).

Os limites da proporcionalidade: Desenho da Ponte Para os edifícios, as regras proporcionais permaneceram adequadas, mas o projeto da ponte revelou suas limitações antes do desafio teórico de Galileu. Como Huerta, 2018 mostrou que o problema do projeto da ponte é inerentemente não proporcional: Para uma carga de tráfego, pontes menores são mais sensíveis à ação de passar cargas do que as maiores. Mas até o século XVIII, as regras conhecidas eram proporcionais. Alberti *De Re Aedificatoria* (Alberti, 1485) As regras derivadas do precedente romano e citadas durante os tratados arquitetônicos por três séculos.

O engenheiro francês Hubert Gautier (1660–1737), em seu *Traité des ponts* (1716) (Gautier,

CÓPIA PARA REVISÃO

1765)O primeiro tratado dedicado inteiramente às pontes... reconheceu que as regras proporcionais falharam para pequenos arcos. Ele observou que um..*Toise* O arco projetado pela regra de Alberti do span/15 teria uma espessura inferior a 6 polegadas, manifestamente inadequada em comparação com os 1,5 pés que a experiência exigia. Gautier explicou a discrepância:

> Está certo que o grande Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau Qui porte la meme voiture
>
> ---
>
> Uma grande ponte carregando uma carruagem pesada é muito menos carregada do que uma pequena ponte com a mesma carruagem.
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

A declaração de Gautier requer esclarecimento: Ele quer dizer que o *Rácio* A carga de tráfego para o próprio peso da ponte é muito menor para uma grande ponte do que para uma pequena. Uma grande ponte, sendo mais pesada, é dominada pelo seu peso próprio; A carruagem de passagem representa uma fração insignificante da carga total. Uma pequena ponte, sendo mais leve, experimenta a mesma carruagem que uma perturbação proporcionalmente maior. É por isso que as regras são proporcionaist/s = const.() falham em pequenas distâncias: A magnitude absoluta da carga viva não escala com a estrutura, mesmo que a carga morta sim. Este foi o primeiro reconhecimento explícito de que o projeto da ponte é *não proporcional*.

A solução definitiva veio de Jean Rodolphe Perronet (1708-1794), fundador e primeiro diretor da École des Ponts et Chaussées que publicou algumas memórias inéditas. O mais notável é o seu inédito *"Mémoire sur l'epaisseur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les differenties voûtes des Ponts"* (Memórias sobre a espessura dos vousoirs na pedra-chave, nas diferentes abóbadas das pontes).[4].. Nesta recente memória de 1748, Perronet compilou dados de mais de 200 pontes existentes e deriva uma regra não proporcional: para arcos semicirculares, a espessura da pedra-chave t Deve ser $t = s/24 + 1 - s/144$, onde s é o limite. Esta regra quase reduziu para metade a espessura prescrita por Alberti-Gautier para grandes pontes, enquanto fornecia espessura adequada para pequenas. Perronet justificou sua abordagem empiricamente:

> Na questão da construção, a especulação sozinha não pode prevalecer sobre a experiência
>
> Perronet, citado em Huerta, 2018 *"Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet"*

Seu governo permaneceu em uso por mais de um século, e a abordagem empírica –

[4]Não consegui localizar uma versão pdf deste documento, o manuscrito original (Ms. 2202) é realizada no *Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées* em Paris. Leitores interessados na engenharia de ponte de Perronet podem consultar seus trabalhos publicados mais tarde (Perronet, 1782–1788) ou (Perronet, 1782).

CÓPIA PARA REVISÃO

comparando projetos propostos contra bases de dados de precedentes bem sucedidos – antecipa engenharia moderna baseada no desempenho.

Para detalhes analíticos, consultar §63.3.2.3

Figura 15.2 ilustra a evolução das regras empíricas para o projeto da ponte de arco desde a antiguidade até o século XIX, traçando a proporção de espessura do arco t para passar s como uma função de span. A banda horizontal no topo representa proporções típicas de ponte romana$t/s \approx 1/10$ para 1/12), enquanto a regra Alberti-Gautier de $t/s = 1/15$Herdada de fontes clássicas e codificadas em tratados renascentistas, permaneceu a regra proporcional padrão por três séculos. A contribuição de Gautier em 1717 foi o reconhecimento de que esta regra proporcional falhou para pequenas distâncias, onde as cargas de tráfego se tornam relativamente mais significativas; Sua curva íngreme para pequenos arcos ($s < 40$ Os pés) marcaram a primeira aproximação não proporcional. Regra 1748 de Perronet, $t = 0.325 + 0.035s$ (em metros), representou um avanço decisivo: Estudando mais de 200 pontes existentes, ele demonstrou que grandes arcos poderiam ser construídos muito mais finos do que Alberti prescreveu – quase metade da espessura necessária para comprimentos acima de 30 metros. Depois de 1850, os engenheiros reconheceram que as regras incorporando a raiz quadrada do span melhor capturaram a relação não linear entre tamanho e espessura necessária, levando a fórmulas como Dupuit's $t = 0.2\sqrt{s}$ e Trautwine's $t = 0.14\sqrt{s}$.. A linha tracejada em $t/s \approx 1/56$ representa o limite inferior prático identificado por Heyman, 1982 a partir de sua análise da ponte medieval Teston – uma demonstração notável de quão longe o projeto empírico poderia empurrar esbelta estruturante antes do advento da análise moderna. A descida progressiva dessas curvas reflete a crescente confiança dos engenheiros na redução do material através da experiência acumulada, prefigurando a transição das regras geométricas de polegar para a análise baseada em mecânica que eventualmente suplantaria Eles.

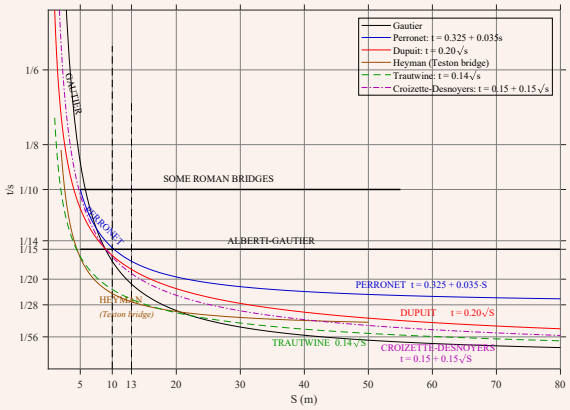


Figura 15.2: Evolução das regras empíricas para o projeto da ponte de arco (depois (Huerta, 2018)).

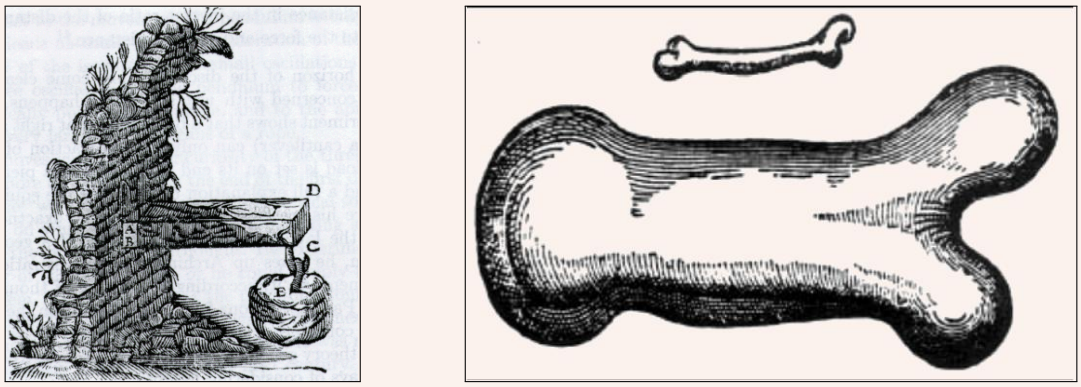
A evolução das regras de projeto da ponte prefigurava assim a transição mais ampla

CÓPIA PARA REVISÃO

do pensamento geométrico para o mecânico. Onde a proporcionalidade vitruviana bastava para edifícios cuja estabilidade dependia apenas da geometria, pontes exigiam atenção à magnitude absoluta das forças – uma mudança conceitual que Galileu articularia teoricamente e que eventualmente transformar toda a engenharia estrutural.

Desafio de Galileu Este regime confortável de proporcionalidade persistiu por quase dois milênios, até que novos materiais e novas ambições exigiram uma abordagem diferente. Foi Galilei, 1632 que desafiou essas duas noções fundamentais: Primeiro, ele introduziu o conceito de tensão, §7.2.2 (em uma viga, Fig. 15.3a) como uma consideração de design independente da geometria; E segundo, ele afirmou que há um limite para escalabilidade – que uma estrutura não pode simplesmente ser ampliada indefinidamente mantendo suas proporções[5], Fig. 15.3b.. Com Galileu, a era do design puramente geométrico começou a ceder à era da mecânica. As implicações desta mudança, no entanto, levaria séculos para se desdobrar, e para edifícios de materiais tradicionais, a proporcionalidade vitruviana permaneceu um guia útil bem na era moderna.

> Uma vez desenhei a forma de um osso, alongado três vezes, e então engrossei tal proporção que poderia funcionar em seu grande animal relativamente como o menor O osso serve ao animal menor: Aqui estão as fotos; Você vê como desproporcional A forma se torna no osso aumentado. A partir disso, é manifesto que se alguém desejasse Para manter em um gigante enorme as proporções de membros que existem em um homem comum, seria necessário encontrar material muito mais difícil e resistente para formar seus ossos, ou então permitir que sua robustez seja proporcionalmente mais fraca que em homens de estatura média; Caso contrário, ele cresceria para uma altura irracional ser visto esmagado pelo seu próprio peso e caído.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"



(a) Tensões são importantes (b) Limites para escalar

Figura 15.3: Galileu desafia Vitruvius (Galilei, 1632)

[5] O autor abordou esta questão em (Saouma e Fava, 2006).

CÓPIA PARA REVISÃO

15.2.1.3 Vitruvius, o Arquiteto: A Tríade Durante

Embora *De Architectura* continha informações muito úteis sobre materiais e técnicas antigas, essas regras práticas foram há muito substituídas pelo surgimento da mecânica e moderna análise estrutural. O legado sobrevivente de Vitruvius é sua análise mais abstrata da arquitetura, onde ele definiu perfeição arquitetônica em termos de três qualidades inseparáveis.. *Tríade Vitruviana*:

Vitruvius apresenta a tríade duradoura da arquitetura: *Firmitas* (sondagem estrutural), *utilitas* (Adequação funcional) e *venustas* Um quadro que antecipa discussões modernas de integridade estrutural, capacidade de manutenção e expressão arquitetônica. Construção sonora, Vitruvius insiste, deve ser durável, funcional e bonita; essas qualidades não são independentes, mas se reforçam mutuamente. Seu tratado demonstra a unidade holística do raciocínio estrutural, estética e métodos de construção que caracterizaram a engenharia romana no seu melhor (Vitruvius, 1960, Book III, Chap III).

Firmitas Força[6] (Livros II e III)

Utilitas Utilidade[7] (Livros IV e V).

Venutas Beleza (Livros VI-IX); é dividido em seis conceitos básicos relacionados com os gostos sociais (Vitruvius, 1960, Book I Chap. II):

Proporcional Princípios: Ordem*Ordinatio*), Arranjo (*Dispositio*), Economia (*Distributio*)

Estética Qualidades: Eurítmia (*Euritmia*), simetria (*simetria*), Propriedade (*decoração*)

A partir dessas definições Vitruvius deriva regras finitas que regem o planejamento e a perfeição.

Curiosamente, esses três preceitos, juntos, ocupam menos de dez linhas em *De Architectura* e não são destacados em nenhuma introdução ao livro... quase uma reflexão posterior:

> Tudo isso deve ser construído com a devida referência *durabilidade, conveniência e beleza.*. A durabilidade será assegurada quando as fundações forem levadas para o solo sólido e materiais selecionados sabiamente e liberalmente; conveniência, quando o arranjo dos apartamentos é impecável e não apresenta nenhum obstáculo para usar, e quando cada classe de edifício é atribuída à sua exposição adequada e apropriada; e beleza, quando a aparência do trabalho é agradável e de bom gosto, e quando seus membros estão em devida proporção de acordo com os princípios corretos de simetria.
>
> (Vitruvius, 1960) Livro I Capítulo III

Os três termos reaparecem juntos apenas mais uma vez– "Um relato deve agora ser dado do eustyle, que é a classe mais aprovada, e está organizado em princípios desenvolvidos

[6] Na linguagem moderna: Satisfazer a força, rigidez, e requisitos de estabilidade.
[7] Não dissuadiu Nero para mais tarde construir edifícios extravagantes sem utilidade real.

CÓPIA PARA REVISÃO

com vista à conveniência, beleza e força'— no Livro III Capítulo III quando abordando as proporções de intercolumniations e de pilares.

Essas regras tiveram pouco efeito na arquitetura dos dias de Vitruvio, mas foram adotadas como verdadeira doutrina durante o Renascimento. A tríade vitruviana continua sendo uma pedra de toque para a educação arquitetural e engenharia, lembrando aos praticantes que as estruturas devem satisfazer múltiplos critérios simultaneamente. Esta tríade... força, utilidade, beleza... ecoará através de toda a teoria arquitetural subsequente, de Alberti para Palladio. Como veremos em §15.7.1, mesmo o conceito de Billington do século XX de "arte estrutural", com seus três pilares de eficiência, economia e elegância, é essencialmente uma reformulação do que Vitruvius articulou dois milênios antes.

15.2.1.4 Vitruvius em Atletas contra Estudiosos

Um aspecto menos conhecido, mas encantador da escrita de Vitruvius aborda a injustiça de recompensar atletas olímpicos por seus *Corpo pórtico fortalecido pelo treinamento* Enquanto negligenciava os estudiosos para o *doutrinas que eles colocam em seus livros*.. Esta queixa certamente ressoará em nossa sociedade moderna, onde treinadores atléticos são recompensados com salários desproporcionados comparados aos de meros estudiosos mortais:

> Os ancestrais dos gregos nomearam tão grandes honras para os famosos atletas que são vitoriosos nos jogos olímpicos, pítmios, istmianos e nemenos, que não só são saudados com aplausos como estão de palma e coroa na reunião em si Mas mesmo voltando para seus vários estados no triunfo da vitória, eles cavalgam em suas cidades e para as casas de seus pais em carros de quatro cavalos, e desfrutar de receitas fixas para a vida à custa do público. Quando penso nisso, fico espantado que as mesmas honras e ainda maiores não sejam concedidas àqueles autores cujos serviços ilimitados são realizados para todos os tempos e para todas as nações. Isso teria sido uma prática que valeria a pena estabelecer, porque no caso dos atletas é meramente seu próprio corpo pórtico que é fortalecido pelo treinamento deles, enquanto que no caso de autores é a mente, e não só a sua própria mas também o homem está em Geral, pelas doutrinas estabelecidas em seus livros para a aquisição de conhecimento e o afiamento do intelecto.
>
> (Vitruvius, 1960)

15.2.2 Vitruvius Redescoberto Durante o Renascimento

Redescoberto no mosteiro de St. Gallen em 1414, *De Architectura* tornou-se a base teórica para a arquitetura renascentista. Acredita-se amplamente que *De Architectura* Foi descoberto por Poggio Bracciolini, que o encontrou na biblioteca da Abadia de Saint Gall, Suíça[8]Mas, independentemente de como o achado realmente era novo, serviu como catalisador para um interesse renovado em Vitruvius. O tempo estava maduro, como correspondia aos primeiros anos do Renascimento.

[8]Uma afirmação contestada por Krinsky, 1967, que mostrou que havia pelo menos setenta e oito cópias em várias bibliotecas europeias na época.

CÓPIA PARA REVISÃO

Durante o Renascimento, Vitruvio teve uma grande influência sobre vários arquitetos, mais notavelmente Alberti e Palladio, mas também Serlio e Vignola, todos eles se basearam em Vitruvius enquanto adaptavam seus princípios à prática contemporânea. Mesa 15.1 resume o conteúdo dos três mais icônicos tratados arquitetônicos, os de Vitruvius, Alberti e Palladio, juntamente com as virtudes arquiteturais defendidas por seus respectivos autores. Estas obras permanecem tão relevantes hoje como quando foram escritas, há meio milênio ou dois milênios atrás.

Tabela 15.1: Conteúdo dos tratados de Vitruvius, Alberti e Palladio

Livro	Vitruvius	Alberti	Palladio
Uma	Urbanismo, arquitetura ou engenharia civil em geral	Linhamentos	Materiais e técnicas de construção
Dois	Materiais de construção	Materiais	Desenho de casas urbanas privadas e vilas rurais
Três	Templos e as ordens da arquitetura	Construção	Planeamento da cidade
Quatro	Continuação do Livro III	Obras Públicas	Desenhos de templos romanos específicos que datam da antiguidade e apenas um projeto contemporâneo de igreja
[2pt] **Cinco**	Edifícios civis	Obras de Indivíduos	
Seis	Edifícios domésticos	Ornamento	
Sete	Pavimentos e gesso decorativo	Ornamento para Edifícios Sagrados	
Oito	Abastecimentos de água e aquedutos	Ornamento aos Edifícios Seculares Públicos	
Nove	Ciências que influenciam a arquitetura: geometria, medição, astronomia, relógios de sol	Ornamento para Edifícios Privados	
Dez	Uso e construção de máquinas, motores de cerco romanos, moinhos de água, máquinas de drenagem, elevação, pneumáticos	Restauração de prédios	

15.2.2.1 Leon Battista Alberti (1404–1472)

Leon Battista Alberti[9] (1404–1472) (Alberti, 1485) autor do primeiro abrangente tratado arquitetônico da Renascença, transformando arquitetura de uma arte medieval em disciplina intelectual humanista. Seu *De Re Aedificatoria* (Na arte do edifício) (Alberti, 1988), completada por volta de 1452 e publicada postumamente em 1485, foi o primeiro trabalho a rivalizar com Vitruvius em escopo e ambição. Escrito em latim e modelado em

[9] Mais detalhes sobre o início da vida de Alberti podem ser encontrados em §6.4.1.

CÓPIA PARA REVISÃO

Vitruvius, embora muito mais sistemático e original, compreende dez livros que cobrem seleção de locais, materiais de construção, métodos de construção... edifícios sagrados e seculares, ornamentos e restauração. Alberti apresentou o manuscrito ao Papa Nicolau V.[10] circulou em manuscrito antes de sua primeira edição impressa em 1485. Curiosamente, a primeira edição impressa de Vitruvius seguiu-se em 1486, e as duas obras depois exerceram influência mútua sobre os leitores do Renascimento.

Fundação Teórica e *Concinnitas* Ao contrário de Vitruvius, que escreveu como um arquiteto praticante, Alberti abordou a arquitetura como um teórico e intelectual que tinha estudado edifícios clássicos diretamente e trouxe julgamento crítico à antiga autoridade. Ele desenvolveu uma teoria da beleza baseada em *Concinnitas*A correspondência harmoniosa de partes para todo – fundamentada em proporções matemáticas e princípios universais de proporção[11] e harmonia.. Este princípio de integração harmoniosa garante que nada pode ser adicionado, removido ou alterado sem diminuir o todo, aplicando-se igualmente à composição estética e coerência estrutural: um edifício bem projetado deve ser bonito, funcional e som, com essas qualidades decorrentes das mesmas relações geométricas subjacentes.

Alberti insistiu que o papel adequado do arquiteto é projetar através de desenhos e modelos, deixando execução para construtores – uma distinção que elevou a prática arquitetural a uma arte liberal. Sua ênfase no primado de *Lineamenta* (o quadro geométrico abstrato de um projeto) sobre a construção material estabeleceu a separação conceitual entre o design e construção que caracteriza a prática profissional moderna. O tratado estabeleceu a arquitetura como uma arte liberal digna de atenção acadêmica, separando o design intelectual da construção manual e elevando o arquiteto do artesão ao profissional.

Compreensão Estrutural e Propriedades Materiais *De Re Aedificatoria* aborda questões estruturais diretamente através de uma compreensão sofisticada de como os edifícios resistem a cargas e por que algumas formas são mais estáveis do que outras. Alberti discute as propriedades dos materiais de construção, pedra, tijolo, madeira e cal, e seus usos apropriados. Ele analisa a construção de paredes, o projeto da fundação e o comportamento dos arcos, usando fontes antigas e suas próprias observações das ruínas romanas. Seu tratamento de abóbadas distingue entre diferentes tipos estruturais e suas aplicações apropriadas. Alberti enfatiza que a adequação estrutural e a qualidade estética são inseparáveis: Um edifício que falha estruturalmente não pode ser bonito, e um que viola harmonia proporcional não pode realmente ser sólido.

Ornamento e Necessidade Alberti pode ter sido um precursor de Sullivan em defender o que equivale a uma abordagem minimalista – a idéia de que ornamento deve surgir da necessidade ao invés de ser aplicado arbitrariamente:

[10] Enquanto Vitruvius dedicou seus dez livros ao Imperador César Augusto, Alberti dedicou os dele ao Papa Nicolau V.

[11] Um conceito paralelo existe na estética japonesa: *Shibusa*, a qualidade da elegância subestimada em que nada supérfluo permanece. O princípio de que a perfeição é alcançada quando nada mais pode ser removido aplica-se igualmente à busca da eficiência do engenheiro estrutural e à procura da beleza pelo arquiteto.

CÓPIA PARA REVISÃO

> O chefe e o primeiro ornamento de qualquer coisa é estar livre de todas as impropriedades. Será, portanto, uma compartição justa e adequada, se não for nem confusa nem interrompida, nem muito divagante, nem composta de partes impróprias, e se os deputados não forem nem muitos nem poucos, nem pequenos ou grandes demais, nem incomparados, Nem como estava separado e dividido do resto do corpo: Mas tudo tão disposto de acordo com a natureza e conveniência, e os usos para os quais a estrutura se destina, com tal ordem, tamanho do número, situação, e forma, que podemos estar satisfeitos não há nada em todo o Fabrick, mas o que foi inventado para algum uso ou conveniência, e com a compactação mais bonita de todas as partes... Toda a composição dos membros, portanto, parece ser feita e dirigida inteiramente pela necessidade e conveniência; para que não fique tão satisfeito por haver tais ou tais partes no prédio, como que elas são dispostas e colocadas em tal situação, ordem e conexão.
>
> Alberti, 1485

Influência Durante A influência de *De Re Aedificatoria* foi profundo e duradouro. Estabeleceu a base teórica para arquitetura renascentista, influenciando Bramante, Raphael e Michelangelo. Traduzido para italiano em 1550, moldou a educação arquitetural por séculos. A insistência de Alberti em que a arquitetura deve ser fundamentada em princípios racionais - matemáticos, estéticos e estruturais - forneceu uma ponte crucial entre a antiguidade clássica e o surgimento da ciência moderna da engenharia. Neste sentido, *De Re Aedificatoria* foi o primeiro tratado moderno sobre arquitetura e é considerado uma ponte entre a arquitetura romana e renascentista.

15.2.2.2 Andrea Palladio (1508-1580)

Detalhes sobre sua vida precoce podem ser encontrados em §6.4.3.

Eu Quattro Libri dell'Architetura O endereço dos quatro livros, respectivamente: Princípios fundamentais, materiais e técnicas (Livro I); arquitetura doméstica, incluindo vilas e palácios de Palladio (Livro II); Edifícios públicos, ruas e design urbano (Livro III); e antigos templos romanos (Livro IV). Esta organização passa de princípios para prática para precedente, fornecendo tanto fundamentos teóricos quanto modelos práticos. Ao contrário dos tratados arquitetônicos anteriores, Palladio combinou princípios teóricos com detalhes precisos de construção e desenhos medidos – planos, elevações, e seções com dimensões – estabelecendo um padrão para documentação arquitetural que permanece fundamental para a prática profissional. Ao fazê-lo, Palladio estabeleceu a arquitetura como uma disciplina racional governada por proporção, geometria e lógica construcional.

Sistemas proporcionais e clareza estrutural Os sistemas proporcionais de Palladio são centrais para o seu método. Ele derivava dimensões de sala das relações harmônicas análogas às consonâncias musicais, criando sequências espaciais que progridem através de proporções relacionadas. Os quartos de uma vila podem seguir proporções de 1:1, 1:$\sqrt{2}$, 2:3 e 3:4, estabelecendo relações matemáticas perceptíveis como harmonia estética. Essas proporções governam não só as dimensões do plano, mas também as alturas do teto, tamanhos de janelas e composições de fachada, criando edifícios unificados por relações geométricas em cada escala.

CÓPIA PARA REVISÃO

Além da estética, Palladio abordou a clareza estrutural com atenção sistemática. Suas vilas empregam hierarquias estruturais claras: As paredes de carga definem os espaços principais, e as entablaturas articulam a circulação, e estruturas do teto se estendem entre suportes em padrões racionais e legíveis. Seus projetos de ponte, incluindo o famoso projeto não construído para o Rialto, demonstram uma compreensão sofisticada de como as forças fluem através da madeira e estruturas de pedra. As especificações de construção detalhadas no Livro I abordam fundações, paredes e propriedades de materiais de construção com experiência prática.

Princípios Vitruvianos e Teoria Arquitetônica Palladio enfatizou que ao preparar seu livro ele havia estudado as obras de antecessores que escreveram sobre arquitetura, e em mais de uma ocasião ele tensões a importância de Alberti. Mas acima de todos os livros modernos ele coloca Vitruvius, a quem ele escolheu *Per maestro, e guia* (como mestre e guia). Ele provavelmente estava mais familiarizado com Vitruvius do que qualquer outro arquiteto contemporâneo (Wittkower, 1944). Em sua *Quattro Libri*Palladio reconhece a dívida renascentista com Vitruvio e propõe sua própria variação da tríade: Utilidade, conveniência, duração e beleza (Palladio, 1570). Sobre a relação dessas qualidades, Palladio escreveu:

> A beleza derivará de uma forma graciosa e da relação do todo com as partes, e das partes entre si e com o todo, porque os edifícios devem parecer ser como corpos completos e bem definidos, dos quais um membro corresponde ao outro e todos Os membros são necessários para o que é necessário.
>
> Palladio, 1570 I quattro libri dell'architettura, pp. I, I, 7

Influência Global e Legado Arquitetônico A influência de Palladio se estendeu muito além da Itália. Inigo Jones trouxe o Palladianismo para a Inglaterra no início do século XVII; Lorde Burlington o reviveu no dia 18; e cruzou o Atlântico para moldar a arquitetura americana da Virgínia de Jefferson ao antebellum sul. Seus palácios e vilas foram imitados por 400 anos; ele foi o primeiro arquiteto a sistematizar o plano de uma casa e consistentemente usar a antiga frente do templo greco-romano como um pórtico. Seu projeto de villa, com seus pórticos diante do templo, planos simétricos e proporções harmônicas, definiu um vocabulário que se espalhou muito além da Itália. Seu uso de sistemas proporcionais modulares permitiu que formas arquitetônicas, layout estrutural e organização espacial fossem tratadas coerentemente. No século XVIII dominou a arquitetura inglesa e mais tarde influenciou profundamente o edifício cívico e doméstico americano, desde Monticello de Thomas Jefferson até inúmeros tribunais, plantações e edifícios institucionais. Nesses contextos, a arquitetura palladiana tornou-se associada com racionalidade, estabilidade e ordem cívica.

Posição na história do pensamento estrutural Palladio ocupa uma posição única na história do raciocínio estrutural. Embora ele não formulasse uma teoria da mecânica ou analisasse forças e tensões explicitamente, seu trabalho demonstra como a forma arquitetural pode incorporar princípios racionais compatíveis com lógica estrutural. Seus prédios revelam uma compreensão intuitiva dos caminhos de carga, simetria e clareza construcional

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

– qualidades que mais tarde análise estrutural formalizariam matematicamente. Sua insistência em proporção, equilíbrio e regularidade impuseram uma ordem estrutural implícita nos edifícios, alinhando forma arquitetural com viabilidade construtiva.

A clareza, racionalidade e sistematização que caracterizam o design palladiano forneceram uma ponte crucial entre a arquitetura clássica e o pensamento estrutural moderno. Neste sentido, Palladio representa um fluxo paralelo à mecânica primitiva: Uma tradição na qual geometria, proporção e prática de construção antecipavam o tratamento analítico posterior das estruturas. Sua influência na forma arquitetônica forneceu uma estrutura estável dentro da qual a ciência emergente de mecânica estrutural poderia mais tarde operar.

15.2.2.3 A Reordenação da Tríade

Enquanto Vitruvius cunhou a sequência latina *Firmitas, utilitas, venustas*Alberti e Palladio reordenaram os termos para o italiano *Comodità* (utilidade), *Perpetuità* (duração), *Belazza* (Beleza). Isso *venustas* (ou *Belazza*) vem em último lugar em ambas as formulações implica que a beleza só pode ser alcançada através da satisfação dos dois primeiros requisitos - que a qualidade estética emerge de, ao invés de ser imposta sobre, adequação funcional e estrutural. Este é um ponto crucial, e que retornaremos quando examinarmos a reformulação de Billington do século XX desses mesmos princípios em §15.7.1.

Como Wittkower, 1944 observado do tratado de Alberti:

> Um dos principais temas do prefácio de Alberti é o serviço à humanidade da arte da arquitetura. O prefácio afirma que a arquitetura deve ser da maior conveniência para a humanidade em todos os aspectos. "Um edifício que não tem outra qualidade do que esta utilidade pública e privada será um prazer olhar para cima. Um tipo diferente de beleza é apropriado para cada edifício, de acordo com a diferença de propósito; assim Alberti aderiu ao princípio aristotélico de relativa beleza que mais tarde se tornou popular entre os críticos arquitetônicos do século XVIII. Alberti repetidamente enfatizava a ideia de que arquitetura é em grande parte um crescimento de necessidade e conveniência; É apenas por último e em grau secundário, subserviente ao prazer e à recreação. A maneira correta de estudar arquitetura é começar com o senso comum da construção. Este é o tom predominante do tratado dele.
>
> Wittkower, 1944 *"Principles of Palladio's Architecture"*

Em outras palavras, houve muitas revisitas das virtudes vitruvianas (ou tríade) ao longo dos séculos pelos arquitetos renascentistas mais eminentes para nós ignorá-los em favor de qualquer definição supostamente nova. A partir dos dias de Alberti, a arquitetura foi concebida em termos de matemática aplicada, como até então ela mal tinha sido examinada através da análise lógica (Wittkower, 1944).

15.2.2.4 Alberti e Palladio como engenheiros

O engenheiro estrutural pode estar interessado no que é essencialmente a diretriz de Alberti para a fabricação de cimento e misturas subsequentes em *concreto*:

CÓPIA PARA REVISÃO

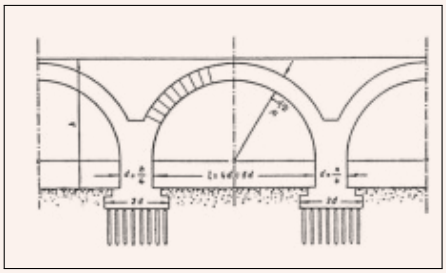
> ...o que é fresco escavado da pedreira é melhor do que o que tem sido mantido há muito tempo; E o que foi cimentado com argamassa não voltará a cimentar bem uma segunda vez. Tanto pode ser suficiente para pedrar. Quanto ao cal, eles condenam o que quando vem do forno não está em pedaços inteiros, mas em pedaços quebrados, e como estava em pó, e dizem que nunca será útil. Eles recomendam aquilo que purga e fica branco no fogo, e que é leve e sonoro, e quando você molha, explode, e joga fora uma forte fumaça grossa alto no ar. O primeiro, sendo fraco, deve naturalmente exigir menos areia; Mas este último, sendo forte, requer mais. Cato dirige, que a cada dois pés de trabalho, devemos permitir um alqueire de limão e dois de areia: Outros prescrevem diferentes proporções. Vitruvius e Plínio são para misturar a areia assim; Ou seja, para dar a cada alqueire de cal três de areia do poço, ou dois de rio ou areia do mar. Por fim, quando a qualidade e natureza de sua pedra requer que seu argamassa seja mais líquido ou tratável (que falaremos de mais claramente abaixo) sua areia deve ser peneirada através de uma peneira; Mas quando for para ser mais rígido, misture-o com meio cascalho e fragmentos quebrados de pedra. Todos concordam, que se você misturá-lo com um terço de azulejo quebrado ou tijolo batido, será muito mais tenaz. No entanto, misture-o como quiser, você deve agitar-lo com frequência, até que as peças mais pequenas sejam incorporadas; E alguns, para este fim, e que ele pode estar bem misturados, agitar sobre ele e vencê-lo um grande tempo em um morteiro. Mas não diremos mais aqui do Cimento, só que assim muito, que o limão toma melhor conta com pedra de sua própria espécie, e especialmente fora da mesma pedreira, do que com um estranho.
>
> (Alberti, 1485)

Além de materiais, Alberti forneceu o que pode ser o primeiro tratamento sistemático do projeto da ponte no Renascimento. Seu *De re aedificatoria* (Alberti, 1485) devotou uma atenção substancial às pontes nos Livros Quatro e Oito, dando regras geométricas precisas que influenciariam os construtores de pontes por três séculos (Huerta, 2018). Para os cais, Alberti prescreveu uma largura igual a um terço da extensão – uma regra rastreável à prática medieval, aparecendo em um manuscrito de 1401 sobre a Ponte de Pedra de Zaragoza (Huerta, 2004). Para a espessura do arco na coroa, ele não especificou mais de um quinto da extensão: "Em uma grande ponte eles não devem ocupar mais de um décimo da abertura total."Ele também deu uma regra alternativa para os arcos de frente de pelo menos um décimo do vão. Estas regras eram suficientemente precisas para que uma geometria completa da ponte pudesse ser reconstruída a partir delas somente (Fig. 15.4a).

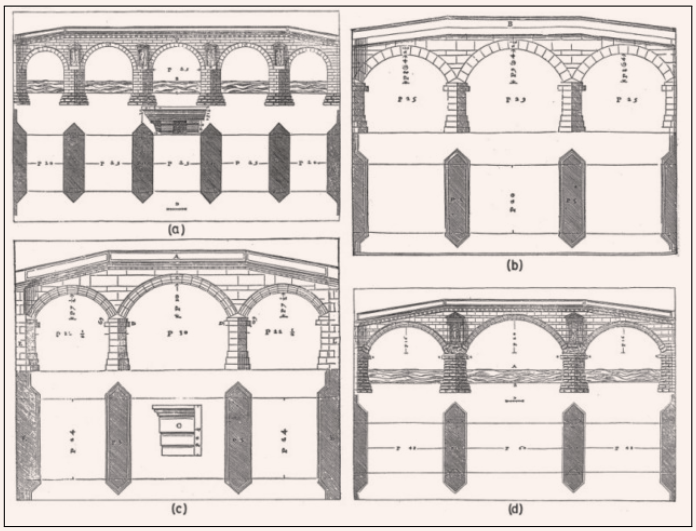
Essas regras podem parecer grosseiras em comparação com a complexidade do projeto e construção de pontes, mas serviram como orientação para o mestre construtor que possuía o julgamento de aplicar - e quando necessário, desviar-se deles. Como Huerta, 2018 Observa, a seção de Alberti sobre pontes ocupa totalmente um quarto de seu Livro Seis sobre Obras Públicas, tratando todos os aspectos desde a seleção do local à construção da fundação até materiais, todos entrelaçados com exemplos históricos como a ponte de Júlio César sobre A ponte do Danúbio e Rei Menes em Memphis. As regras eram conservadoras: Pontes romanas tipicamente exibiam relações de espessura a amplitude entre 1/10 e 1/12, embora estruturas excepcionais alcançassem uma maior esbeltez. O arco principal da ponte romana em Narni (21 M span) alcançou 1/17; A ponte romana Alcántara em Toledo (28.8 M) atingiu 1/16 (Fernández Casado, 1980).

Palladio, caracteristicamente, ensinou não através de regras explícitas mas através de

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Regras de Alberti para o projeto da ponte Arqui, depois Straub, 1952



(b) Pontes descritas por Palladio (1570): (a) Ponte romana de Rimini; b) Ponte medieval sobre a Rerone; (c) Ponte de Palladio em Vicenza; (d) projeto para uma nova ponte (Palladio, 1570)

Figura 15.4: Projeto da ponte renascentista: Regras geométricas de Alberti e exemplos documentados de Palladio (Huerta, 2018)

exemplos medidos – uma abordagem pedagógica que incorporou proporções seguras dentro de precedentes documentados. Seu Terceiro Livro (Palladio, 1570) apresenta quatro pontes com suas dimensões (Tabela 15.2): A ponte romana em Rimini, a ponte medieval sobre o Rerone, sua própria ponte em Vicenza, e um projeto não realizado. A progressão é instrutiva: onde a prática romana e medieval manteve relações de 1/10 a 1/12, o próprio trabalho de Palladio combinou precedente medieval em 1/12 enquanto seu projeto especulativo empurrou para 1/17—aproximando-se da esbeltez das estruturas romanas mais ousadas e antecipando Afinamento progressivo que caracterizaria a engenharia de ponte francesa do século XVIII.

Tabela 15.2: Proporções de ponte em Palladio (1570), depois Huerta, 2018

Ponte	Espessura do arco/espinha
(a) Ponte romana (Rimini)	1/10
b) Ponte medieval (Rerone)	1/12
(c) Ponte Palladio (Vicenza)	1/12
(d) Desenho de Palladio	1/17

A tradição Alberti-Palladio de regras proporcionais baseava-se em uma visão funda-

CÓPIA PARA REVISÃO

mental: Para estruturas de alvenaria, a estabilidade depende da geometria em vez do tamanho absoluto. Um arco que está em uma escala ficará em qualquer escala, desde que suas proporções sejam mantidas. Este princípio, essencialmente correto para edifícios, seria inadequado para pontes. Como Hubert Gautier reconheceu pela primeira vez em 1716, pontes devem suportar a passagem de cargas pesadas de tráfego, e este problema é inerentemente não proporcional: Para uma determinada carga, pontes menores são mais "mais fracas-- mais sensíveis à ação de veículos que passam. Um carrinho que mal afeta uma grande ponte pode tensão um pequeno severamente. Este reconhecimento eventualmente levaria Jean-Rodolphe Perronet, em suas memórias inéditas de 1748, a propor regras que quase reduziram para metade a espessura prescrita por Alberti-Gautier para grandes extensões - regras derivadas não da mecânica teórica (que Perront julgou Inadequado à complexidade do problema), mas a partir do estudo sistemático de mais de 200 pontes existentes. ”Na questão da construção’, escreveu Perronet, ’a especulação sozinho não pode prevalecer sobre a experiência” (Huerta, 2018 PDF).

Mas os interesses de Palladio se estenderam além dos arcos de alvenaria. Capítulo 8 de seu Terceiro Livro é intitulado *”Dì tre altre invenzioni secondo le quali si ponno fare i ponti di legno senza porre altrimenti pali nel fiume”*Sobre outras invenções que nos permitem construir pontes de madeira sem colocar cais no rio. Como mostrado na Fig. 15.5bEsta foi uma das primeiras ilustrações gravadas do que veio a ser conhecido como um treliça. Na verdade, um treliça é uma forma estrutural mais sofisticada do que uma ponte de arco: não requer pedras pesadas, mas meros componentes de madeira, e embora algumas das formas mostradas sejam pouco convencionais pela compreensão estrutural moderna (Fig. III na placa original), outros são projetos perfeitamente adequados que antecipam desenvolvimentos posteriores.

O famoso *Ponte dell’Accademia* em Veneza tem uma semelhança impressionante com o projeto da ponte de arco de Palladio (Fig. III na placa), embora tenha sido construída em 1854 e originalmente feita de ferro; Foi então demolida e reconstruída em madeira em 1933. Talvez mera coincidência... ou talvez um testemunho da influência duradoura da imaginação estrutural de Palladio.

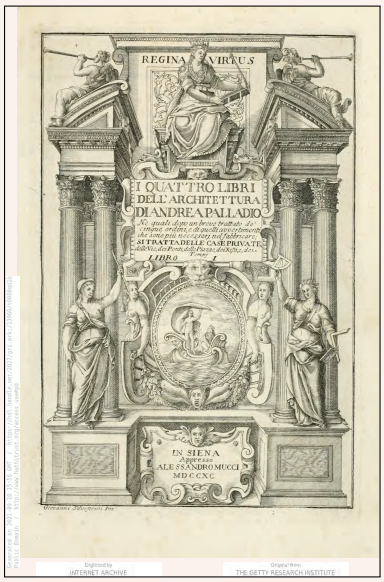
Aqui vemos um exemplo em que o arquiteto era o inovador da forma estrutural.[12] Mais tarde, na Itália, seriam engenheiros estruturais cujos projetos eram obras-primas arquitetônicas, como Pier Luigi Nervi’s *Palazzetto dello Sport*, que devemos examinar em §19.2.12.

15.2.3 Antropometria e Questão de Escala

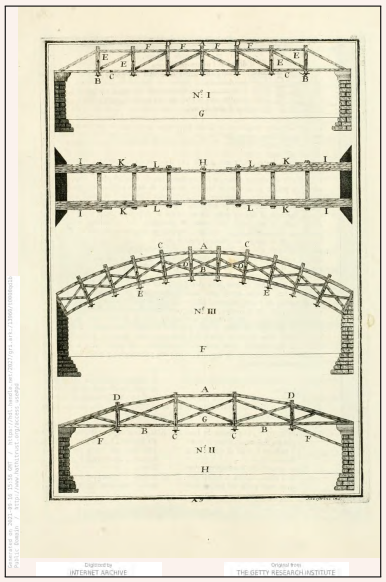
As associações do corpo com a arquitetura e o complexo fenômeno da corporalidade sempre estiveram presentes na cultura arquitetônica. Desde a antiguidade até o século XX, arquitetos e teóricos procuravam fundamentar proporção arquitetural nas medidas e

[12]Na verdade, até os dias de hoje, estudantes de arquitetura em universidades italianas fazem uma multidão de cursos análise estrutural e não apenas um “introdutório” como na maioria dos outros países.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Página de capa



(b) Treliças



(c) *Ponte dell'Accademia* em Veneza

Figura 15.5: Palladio's *Quatro livros de arquitetura* (Palladio, 1570)

proporções da forma humana - uma prática chamada *antropometria*.. A suposição subjacente era que proporções derivadas do corpo humano possuíam uma harmonia inerente que, quando aplicada a edifícios, produziria resultados igualmente harmoniosos e que essas proporções poderiam ser aplicadas em qualquer escala.

15.2.3.1 Vitruvius: O Texto Fundamental

Vitruvius fez a observação fundamental ligando proporção humana à arquitetura:

> Pois o corpo humano é tão projetado pela natureza que o rosto, do queixo ao topo da testa e as raízes mais baixas do cabelo, é uma décima parte de toda a altura; A mão aberta do pulso até a ponta do dedo médio é igual; A cabeça do queixo para a coroa é um oitavo, e com o pescoço e ombro da parte superior do peito até as raízes mais baixas do cabelo é um sexto; do meio do peito até o topo da coroa é um quarto. Se tomarmos a altura do próprio rosto, a distância da parte inferior do queixo para o lado inferior das narinas é de um terço. O nariz do lado de baixo das narinas para uma linha entre as sobrancelhas é o mesmo; De lá até as raízes mais baixas do cabelo também é um terço, compreendendo a testa. O comprimento do pé é um sexto da altura do corpo; do antebraço, um quarto; E a largura do peito também é um quarto. Os outros membros, também, têm suas próprias proporções simétricas, e foi empregando-os que os famosos pintores e escultores da antiguidade alcançaram grande e infinito renome.
>
> Da mesma forma, nos membros de um templo deveria haver a maior harmonia nas relações simétricas das diferentes partes com a magnitude geral do todo...
>
> Vitruvius, 1960 The Ten Books on Architecture, Book III, Chapter I

CÓPIA PARA REVISÃO

Para Vitruvius, o corpo humano bem formado exibiu *simetria*Uma comodidade de partes para toda... essa arquitetura deve imitar. O umbigo, ele observou, marca o centro de um círculo circunscrevendo os membros estendidos, enquanto um quadrado contém a figura com braços estendidos horizontalmente: observações que cativariam artistas e arquitetos renascentistas.

15.2.3.2 Transmissão medieval

Uma das primeiras tentativas medievais de codificar tais proporções foi por Villard de Honnecourt (fl. c. 1225-1250), cujo portfólio contém desenhos esquemáticos sobrepondo figuras geométricas em formas humanas e animais, Fig. 15.7a (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858 PDF). Estes esboços, enquanto brutos por padrões posteriores, representam um esforço para reduzir a forma orgânica à geometria construível – uma preocupação prática para um pedreiro mestre que trabalha em uma era quando o conhecimento de design foi transmitido através de desenhos e prática de oficina ao invés que tratados impressos.

15.2.3.3 A Renascença

O renascimento dos ideais vitruvianos levou a investigações mais rigorosas. Leon Battista Alberti (1404–1472), em seu tratado curto *De Statua*[13] (Alberti e Tiraboschi, 1804 PDF), moveu-se além das proporções proporcionais para desenvolver instrumentos para a medição precisa e transferência de dimensões corporais. Seu *Exempeda* estabeleceu um sistema de medição dividindo a altura humana em 1,80 m (*Pedes*Cada pé em 10 polegadas*Unceolae*E cada polegada em 10 minutos*Minuta*Uma subdivisão decimal antecipando reformas metrológicas posteriores. Mais engenhosamente, seu *Definitor* ou *finitorium*, Fig. 15.7b, consistia de um disco circular graduado com um braço giratório do qual uma linha prumo desceu. Com ele, qualquer ponto em um modelo poderia ser registrado através de uma combinação de ângulo polar e coordenadas verticais, permitindo a transferência mecânica do modelo de argila para o bloco de mármore com precisão sem precedentes.

Francesco di Giorgio Martini (1439-1501), arquiteto e engenheiro do Duque de Urbino, estendeu o pensamento antropométrico mais diretamente para a arquitetura. Em sua *Trattati di architetura, Inglaterra e arte militar* (Giorgio Martini, ca. 1480 PDF), ele produziu desenhos notáveis sobrepondo a figura humana em plantas da igreja, layouts de fortaleza, e pilar perfis. Para Francesco, a correspondência não era meramente metafórica: A nave tornou-se o tronco, os transeptos os braços, a abstenção da cabeça. Este mapeamento corporal informou sua proporção de espaços e sua aproximação ao projeto da fortificação.

Leonardo da Vinci comemorado *Homem Vitruviano* (c. 1490), Fig. 15.7c, representa a

[13] Suas outras contribuições notáveis incluem *De Pictura* (publicado com *De Statua*), 1435, e *De Re Aedificatoria*O primeiro tratado arquitetônico da Renascença.

CÓPIA PARA REVISÃO

síntese renascentista mais refinada do texto vitruviano.[14] A inovação de Leonardo estava em sua resolução de um quebra-cabeça geométrico implícito em Vitruvius: Como a mesma figura pode ser inscrita em círculo e quadrado? Ao ajustar ligeiramente a posição dos membros e deslocar o centro do círculo para o umbigo enquanto o quadrado é baseado nos pés, Leonardo demonstrou que ambas as construções poderiam coexistir – o círculo representando geometria cósmica ou divina, quadrado o terrestre e construível.

Essas investigações renascentistas não eram meramente exercícios artísticos. A crença de que as proporções humanas refletiam uma ordem divina ou natural forneceu justificativa teórica para regras arquitetônicas. Quando Alberti ou Palladio As razões específicas prescritas para as dimensões da sala ou espaçamento pilar, eles apelaram implicitamente para esta base antropométrica: Edifícios proporcionais como o corpo humano possuiriam a mesma harmonia inerente.

15.2.3.4 O século XX: Modulor & Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier (1887-1965)

Charles-Édouard Jeanneret nasceu em 1887 em La Chaux-de-Fonds, Suíça, uma cidade moldada pela indústria relojoeira e sua cultura de precisão artesanal. Ele foi treinado inicialmente como um gravador e artista decorativo na escola de arte local, onde ele veio sob a influência de Charles L'Eplattenier, que o redirecionou para a arquitetura e incentivou observação sistemática da estrutura e forma. As primeiras viagens pela Itália, Alemanha e Balcãs expuseram Jeanneret à arquitetura clássica, construção vernácula e métodos industriais emergentes, formando uma visão de mundo que combinava a consciência histórica com um fascínio pela tecnologia moderna[15] Em 1917 ele se estabeleceu permanentemente em Paris e adotou o nome Le Corbusier, marcando uma ruptura decisiva com a tradição acadêmica.

Ele era o arquiteto mais influente do século 20 e um polemista cujos escritos moldaram o discurso arquitetônico tão profundamente quanto seus edifícios moldaram cidades.[16] Seu manifesto *Em direção a uma nova arquitetura* (Le Corbusier, 1931 PDF) publicado em 1923, introduziu o conceito provocativo[17] do edifício como uma "máquina para viver- uma

[14] Ao contrário da crença popular, este desenho não tem nada a ver com o Golden Ratio; Leonardo estava ilustrando as reivindicações proporcionais específicas de Vitruvius.

[15] Antes de adotar o pseudônimo Le Corbusier, os jovens Jeanneret trabalhou no atelier de Paris de Auguste Perret (1908-1910), de quem ele absorveu e mais tarde reagiu contra a doutrina da honestidade estrutural em concreto armado. Veja §15.4.5.

[16] Em 1927, ele e seu primo Pierre Jeanneret apresentaram um projeto inovador para a competição do Palácio da Liga das Nações em Genebra. Seu projeto foi desqualificado sobre o tecnicismo que os desenhos foram impressos a máquina em vez de desenhado à mão na tinta da Índia, conforme as regras de concorrência exigiam. A decisão foi amplamente vista como um pretexto pelos membros conservadores do júri para excluir um projeto radicalmente moderno que rompeu com as noções tradicionais de um ''palácio'' Congrès Internationaux d'Architecture Moderne (CIAM) em 1928.

[17] As associações políticas de Le Corbusier foram amplamente debatidas por estudiosos. Enquanto ele procurava comissões de líderes autoritários, incluindo Mussolini e brevemente trabalhou com Vichy França (1940-41), a maioria dos historiadores conclui que ele era um oportunista tecnocrata em vez ideologicamente

CÓPIA PARA REVISÃO

formulação que cristalizou o funcionalista A agenda do movimento moderno e exigiu que a arquitetura abraçasse a clareza racional da engenharia.

O livro é uma colagem de ensaios, fotografias e polêmicas, justapondo imagens de silos de grãos, automóveis, e linhas oceânicas com o Partenon e arquitetura romana. Le Corbusier argumentou que os engenheiros, trabalhando a partir de cálculos e economia, tinham alcançado uma harmonia e beleza que arquitetos contemporâneos, atolados no historicismo acadêmico, não podiam igualar. "A Estética e Arquitetura do Engenheiro", declarou ele, "são duas coisas que marcham juntas e seguem umas das outras."do modernismo.

"Cinco Pontos de uma Nova Arquitetura"de Le Corbusier (*Les cinq points d'une arquitetura nova*) (Corbusier e Jeanneret, 1929), formulado em 1927, estabeleceu os princípios fundamentais do design modernista:

1) **Pilotis** Que substituem as paredes de carga e elevam o edifício do solo, libertando o nível de terra para circulação e criando uma nova estética baseada na clareza estrutural;
2) **Plano Livre** A separação da estrutura das paredes permite arranjos interiores flexíveis, com espaços divididos por telas móveis em vez de partições fixas;
3) **Free Façade** Projetando pisos para além dos pilares de apoio como varandas, a fachada perde sua função estrutural e as janelas podem estender-se a qualquer comprimento sem relação com divisões interiores;
4) **Janelas horizontais** Janelas que fornecem iluminação oito vezes mais forte do que aberturas verticais equivalentes enquanto criam vistas panorâmicas e enfatizam a geometria linear do edifício;
5) **Jardim do telhado** Tetos planos transformados em terraços plantados que restauram o espaço verde perdido para a construção, proporcionando isolamento e áreas de vida ao ar livre. Esses princípios, exemplificados em Villa Savoye (1929-1931), criaram o que Le Corbusier chamou de "uma máquina para viver em—arquitetura que abraçou a lógica industrial e os materiais modernos para fundamentalmente remodelar o design espacial.

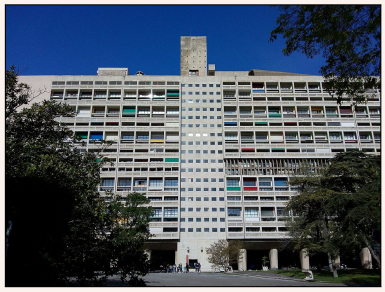
Suas obras construídas, incluindo a Unidade de Habitação[18] (Cité de l'architecture & du patrimoine, 2015) (Fig. 15.6a), a capela em Ronchamp (Fig. 15.6c), e os edifícios em Chandigarh - demonstrar a evolução de seu pensamento do racionalismo purista para o expressionismo escultural, mas todos compartilham um compromisso com clareza estrutural ea expressão honesta de materiais. A integração de Le Corbusier da eficiência

fascista. Seu principal compromisso era implementar suas visões arquiteturais através de qualquer sistema político disponível. Veja Fishman, 1982*Utopias urbanas no século XX* (1977).

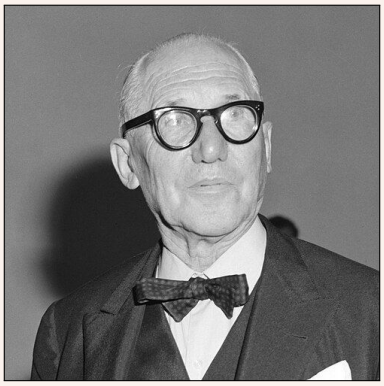
[18] A Unité d'Habitation de Marseille (1947-1952), também conhecida como a Cité Radieuse, foi a primeira e mais famosa realização de Le Corbusier sobre seu conceito para comunidades residenciais verticais. O edifício de 337 apartamentos em Pilotis, com sua rua comercial interna, instalações no telhado e aplicação do sistema proporcional Modulor, tornou-se o protótipo para quatro Unités d'Habitation adicionais construídos em Nantes-Rezé, Berlim, Briey-en-Forêt, e Firmino.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

estrutural e estética arquitetônica, sua insistência em que a beleza emerge do design racional ao invés de decoração aplicada, e seu abraço de novos materiais e métodos de construção estabeleceu paradigmas que continuar a moldar educação e prática arquitetônica.



(a) Unite d'Habitation



(b) Charles-Édouard em 1964



(c) Chapelle Notre-Dame-du-Haut

Figura 15.6: Charles-Édouard Jeanneret Le Corbusier

O Sistema Modulor A tradição da proporção arquitetônica continuou em disfarce transformado no século XX com Le Corbusier's *Modulor* (1948, revisado em 1955), Fig. 15.7d (Corbusier, 1954; Corbusier, 1955). Desenvolvido durante a Segunda Guerra Mundial e refinado nos anos seguintes, este sistema proporcional foi uma tentativa explícita de criar uma escala universal ligando fisiologia humana às dimensões arquitetônicas e estruturais. Baseado nas dimensões do corpo humano, na razão dourada e na sequência de Fibonacci, o Modulor foi concebido como uma ponte entre a antropometria, matemática e construção, fornecendo uma estrutura numérica coerente para dimensionamento de elementos estruturais, módulos espaciais e componentes de construção. Embora muitas vezes criticado por suas suposições normativas e adaptabilidade limitada, o Modulor representou uma séria tentativa de fundamentar a proporção arquitetural em princípios mensuráveis, quase-engenharia ao invés de precedente histórico ou estética arbitrária regras, refletindo a ambição duradoura de Le Corbusier em conciliar escala humana com racionalidade industrial.

Le Corbusier definiu como segue:

> O 'Modulor' é uma medida baseada na matemática e na escala humana: é constituída por uma dupla série de números, a série vermelha e o azul.
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 60

O sistema de Le Corbusier começou com uma altura humana padrão de 1,83 M (seis pés), escolhido em parte para conciliar medidas métricas e imperiais - uma ambição que

CÓPIA PARA REVISÃO

ele perseguiu com considerável tenacidade. A partir desta altura, os pontos-chave foram estabelecidos: O plexo solar às 13h13 M, o topo do braço levantado em 2.26 M (duplicar a altura do plexo solar). Como ele escreveu, todas as medidas "originam em uma única fonte, a medida 113, o plexo solar de um homem de 1,80 m de altura"(Corbusier, 1954). Estas dimensões foram então elaboradas através de duas séries baseadas em Fibonacci, a série vermelha e cada termo aproximadamente em proporção dourada para seus vizinhos.

A série vermelha, baseada na altura do plexo solar (1.13) M), gerado:

$$\ldots, 27, 43, 70, 113, 183, 296, \ldots \text{ cm}$$

A série azul, baseada no dobro da altura do plexo solar (2.26 M), produzido:

$$\ldots, 33, 53, 86, 140, 226, 366, \ldots \text{ cm}$$

Juntos, estas séries forneceram uma gama de dimensões que Le Corbusier empregou em seus edifícios pós-guerra, mais notavelmente a Unidadeé D'Habitation em Marselha (1947-1952), onde quase todas as dimensões - larguras de apartamento, alturas do teto, espaçamento entre brise e soleil - derivado dos valores Modulor.

Le Corbusier posicionou explicitamente seu trabalho como uma saída da tradição estática vitruviana:

> Leonardo e seus contemporâneos, pensando em Vitruvio, mostraram as proporções do homem colocando seu corpo, com os braços abertos, dentro de um círculo. É o homem estático, correspondente a uma arquitetura estática... [Le Corbusier] Exemplos de seu sistema por um homem com braço elevado. Isso é um homem dinâmico, correspondente a uma arquitetura dinâmica.
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 75

Onde Vitruvius e Leonardo retratavam o homem em repouso, braços estendidos em equilíbrio passivo, a figura de Le Corbusier alcança para cima – um gesto ativo estabelecendo a dimensão vertical do espaço habitável.

O Modulor atraiu admiração e crítica. Albert Einstein, mostrou o sistema em Princeton em 1946, ofereceu uma avaliação que Le Corbusier citaria para o resto de sua vida:

> Em uma carta escrita para mim na mesma noite, Einstein teve a bondade de dizer isso do 'Modulor': *É uma escala de proporções que torna o ruim difícil e o bom fácil.*
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 58

Le Corbusier considerou isso uma validação da ciência, embora os críticos notaram que o sistema foi calibrado para um corpo masculino idealizado e produziu espaços que poderiam se sentir apertados para indivíduos mais altos. Mais fundamentalmente, a

CÓPIA PARA REVISÃO

afirmação do Modulor de universalidade matemática se baseava em preferências estéticas ao invés de necessidade estrutural ou funcional.

15.2.3.5 Da Proporção à Ergonomia

O Modulor representou a última grande tentativa de fundamentar a proporção arquitetural em princípios antropométricos. Mais tarde, desenvolvimentos do século XX – notavelmente Ernst Neufert *Bauentwurfslehre* (Dados de Arquitetos, 1936) (Neufert, 1970 PDF) e Henry Dreyfuss *A Medida do Homem* (1960) (Dreyfuss, 1960)Transferido da harmonia proporcional para a funcionalidade ergonômica: a preocupação tornou-se não ordem cósmica, mas ajuste prático, acomodando a gama de tamanhos de corpo humano no projeto de móveis, equipamentos e desobstruções espaciais.

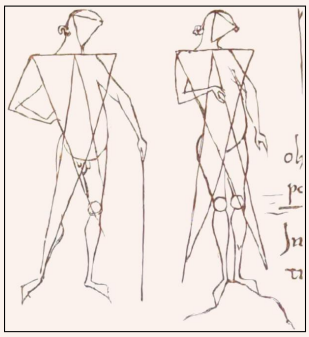
15.2.3.6 A Assunção Oculta: Escalar a Independência

Ao longo desta tradição de dois mil anos, desde Vitruvius até Le Corbusier, a proporção antropométrica teve uma suposição implícita: que as relações derivadas do corpo humano poderiam ser aplicadas em qualquer escala. Um templo poderia usar as mesmas proporções de um pequeno santuário; Uma catedral poderia ser uma capela grande. Para as estruturas de alvenaria, esta suposição provou-se amplamente válida – como notado em §15.2.1A pedra é tão levemente enfatizada que a geometria, não a força, governa o design.

Mas essa suposição tem limites. Como Galileu demonstrou em seu *Discorsi* (discussionado em §15.2.1), uma estrutura não pode simplesmente ser ampliada indefinidamente mantendo suas proporções. A relação entre área transversal e volume muda com a escala: O dobro das dimensões lineares e a área aumenta quatro vezes enquanto o volume (e, portanto, peso) aumenta oito vezes. Tensões aumentar, e eventualmente o material falha. É por isso que elefantes têm pernas proporcionalmente mais grossas do que ratos, e porque catedrais góticas, apesar de suas ambições crescentes, alcançaram limites práticos que nenhuma quantidade de refinamento geométrico poderia transcender.

A tradição antropométrica representa assim uma notável realização intelectual, mas limitada pelas realidades físicas que Galileu primeiro articulou e que o moderno análise estrutural tornou preciso. A proporção sozinha não pode substituir a mecânica.

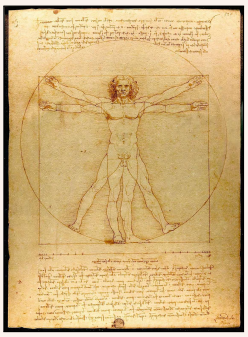
CÓPIA PARA REVISÃO



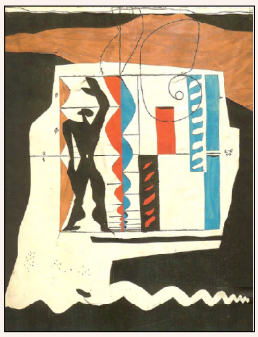
(a) Villard de Honnecourt, ca. 1240 (De Honnecourt, 1858)



(b) Alberti *Definidor* (Alberti e Tiraboschi, 1804)



(c) Leonardo's *Homem Vitruviano*, c. 1490



(d) Le Corbusier *Modulor* (Corbusier, 1954)

Figura 15.7: Sistemas antropométricos de proporção: Da geometria medieval ao humanismo renascentista ao modernismo do século XX

15.2.3.7 Geometria Operativa: Como os Mestres Construtores Rastrearam seus prédios

A tradição antropométrica examinada acima descreve como os arquitetos *Pensei* Cerca de proporção. Uma pergunta complementar... como mestres construtores *Aplicado* Esses princípios no local de construção revelam uma prática igualmente rica e surpreendentemente sistemática. Bolsa de estudos recente (Oikonomou, 2022) Reconstruiu a geometria operativa empregada desde o antigo Egito até o século XVIII, demonstrando que dois métodos construtivos distintos foram consistentemente usados através de culturas e milênios.

O primeiro método, *ad quatratum*, é baseado na rotação de quadrados inscritos dentro de um círculo. Um quadrado inscrito em um círculo, então girado 45°, produz um segundo quadrado cujo lado carrega uma proporção de $1 : \sqrt{2}$ uma relação irracional que, no entanto, emerge naturalmente de uma operação geométrica puramente prática. O segundo método, *ad triangulum*, inscreve triângulos equiláteros dentro de um círculo governante, produzindo relações altura-largura governadas por $\sqrt{3}$.. Essas duas operações, facilmente executadas com bússola e corda em qualquer escala, geraram as principais relações proporcionais encontradas nas estruturas históricas das pirâmides egípcias às catedrais góticas. Figura 15.8 ilustra ambos os métodos como aplicados ao plano de uma igreja bizantina triconch; O círculo básico tem um diâmetro de exatamente 20 pés bizantinos[19]; Todos os elementos estruturais derivam da interseção de dois quadrados girados inscritos dentro dele.

[19] O pé bizantino era uma unidade de comprimento usada em todo o Império Bizantino, derivado do Romano *pes*.. Seu valor é geralmente tomado para ser sobre 0.312 m (31.2 cm). Na análise arquitetônica, muitas vezes aparece como o módulo subjacente do qual foram geradas construções geométricas (quadrados, triângulos, círculos), ilustrando a coexistência histórica de uma unidade de medição racional com razões geométricas tais como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

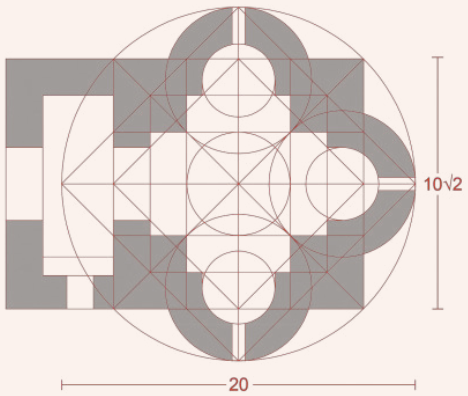


Figura 15.8: Plano de Panagia Koumbelidiki (Kastoria, 10 c.) com *ad quatratum* Rastreando (Oikonomou, 2022)

O Papel dos Triângulos de Pitágoras Ao lado desses métodos baseados em círculos, os mestres construtores dependiam de uma segunda família de ferramentas: Cordas atadas formando triângulos retos pitagóricos. O triângulo 3-4-5, cujo ângulo reto não requer nenhum instrumento além de três comprimentos de corda, foi usado durante toda a antiguidade e a Idade Média para estabelecer perpendicularidade e controlar o traçado retangular dos perímetros de construção. Mas o 3-4-5 não era o único tal ferramenta: os triângulos 5-12-13, 8-15-17, e 12-35-37 eram igualmente conhecidos, cada um oferecendo diferentes proporções de aspecto adequadas para tipos específicos de edifícios. As guildas de Stonemasons transmitiram esse conhecimento através da prática em vez de texto, o que explica parcialmente por que esses métodos de construção permaneceram amplamente invisíveis à tradição do tratado arquitetônico – Vitruvius, Alberti e Palladio escreveram sobre Proporção; O conhecimento operacional de como alcançá-lo no solo foi mantido por aqueles que construíram.

De Círculos a Catedrais Os dois sistemas..*ad quatratum* e.. *ad triangulum*Não eram concorrentes, mas complementos. Os mestres construtores góticos empregaram ambas as sequências racionais (como 1:2:4:1 para larguras de baía) e razões irracionais ($\sqrt{2}$ Da diagonal do quadrado, $\sqrt{3}$ do triângulo equilátero) simultaneamente, aceitando que figuras modulares e geométricas não poderiam ser perfeitamente reconciliadas. Como John James observou dos pedreiros de Chartres, eles escolheram deliberadamente usar ambos, e então aceitaram a luta necessária para reuni-los (James, 1982, p. 98).. A seção de Notre-Dame de Paris (fundada em 1163) ilustra o *ad triangulum* método claramente: um único triângulo equilátero, definido a partir da largura total da nave e corredores, define a altura interior total e, quando dividido por três, localiza a base do trifório, como mostrado na figura 1. 15.9 onde um único triângulo equilátero, definido a partir da largura interior completa, define a altura total; Subdivisão por três localiza a base do triforium.

Sistemas Modulares e Padrões Métricos Os métodos geométricos funcionaram em conjunto com padrões metrológicos. Os templos gregos antigos foram projetados em grades

CÓPIA PARA REVISÃO

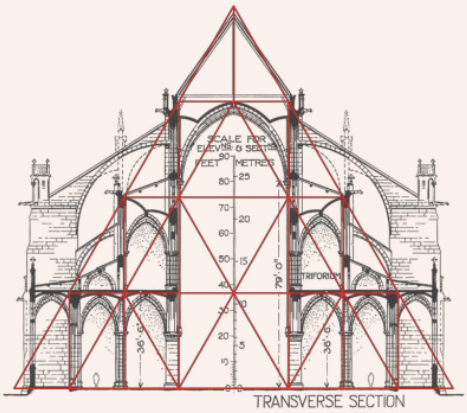


Figura 15.9: Seção de Notre-Dame de Paris com *ad triangulum* Rastreando (Oikonomou, 2022)

modulares expressas em pés de sótão (30,85) cm); As igrejas bizantinas usaram o pé bizantino (31.2 cm) ou spithami (23,4 cm); As catedrais góticas empregavam *Pied de roi*[20] Ou o braccio local. O estilo do Partenon está em uma grade de 25 × 25 Pés do sótão, enquanto sua nave (sekos) exibe uma proporção de 5:12 correspondendo diretamente ao triângulo pitagórico 5-12-13 (Oikonomou, 2022). O que aparece como pura harmonia geométrica no edifício acabado foi assim gerado pela interação de uma unidade local de medida, um triângulo pitagórico, e uma grade modular – um sistema tão prático quanto ele era elegante, como ilustrado na figura. 15.10 onde a proporção 5:12 dos sekos e sua correspondência com o triângulo pitagórico 5-12-13, sobreposto em um 25 × 25 Grade modular de pés-táticos.

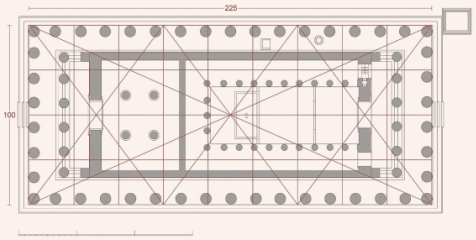


Figura 15.10: Análise do plano Parthenon (Oikonomou, 2022)

Para referência, tabela 15.3 Coleciona as unidades principais de comprimento empregado em culturas e períodos, expresso em termos do medidor para comparação.

[20] O *Pied de roi* (Pé de Rei) era o padrão francês Unidade de comprimento antes da adoção do sistema métrico. Seu valor era Aproximadamente 0.32484 E foi subdividido em 12 *Pouces* Cada um dividido em 12 *Lignes*.. Muitas arquiteturas francesas e obras de engenharia foram dimensionadas usando este módulo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 15.3: Unidades históricas de medição de comprimento e inclinação usadas na arquitetura e construção

Unidade	Civilização / Período	Contexto de uso	Equivalente métrico
		Egípcio	
Dígito (*db*)	Antigo Egito	Subdivisão padrão mais pequena	18.75 mm
Palm*šsp*)	Antigo Egito	4 dígitos; Módulo proporcional básico	75 mm
Cúbito comum*mh*)	Antigo Egito	6 palmas; construção diária	450 mm
Cúbito real (*MH NSW*)	Antigo Egito	7 palmas; Construção monumental	525 mm
Rod (*H3yt*)	Antigo Egito	10 cúbitos reais; Agrimensura de terra	5.25 m
Secado[†]	Antigo Egito	Deslocamento da pirâmide: palmas por côvado real	Sem dimensão
		Mesopotâmia	
Cubit (*Kus*)	Babylonia / Sumer	Módulo de comprimento padrão	500 mm
		Mesoamericano	
Tlacxitli	Asteca	Umbigo ao chão; Módulo baseado no corpo	≈ 1.00 m
Tlalcuahuit	Asteca	Vara de terra; Unidade de levantamento padrão	≈ 2.50 m
		Grego	
Pé do sótão	Grécia Antiga	Temple planning grid	308.5 mm
		Bizantino	
Pé bizantino	Império Bizantino	Igreja e construção civil	312 mm
Spithami	Império Bizantino	Span (batido ao dedo mindinho)	234 mm
		Italiano - Braccio por cidade (pré-unificação, antes de 1861)	
Braccio (Florência)	Toscana, 13o a 18o C.	Arquitetura e medida de pano; 2 Palmi	583 mm
Braccio (Veneza, da Seta)	República de Veneza	Seda e comércio marítimo	639 mm
Braccio (Veneza, da Panno)	República de Veneza	Medida de pano	595 mm
Braccio (Milan)	Ducado / Reino da Lombardia	Construção geral e tecido	595 mm
Braccio (Roma)	Estados Papais	Medida de arquitetura (*Da fabbrica*)	634 mm

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 15.3 — *Continuado da página anterior*

Unidade	Civilização / Período	Contexto de uso	Equivalente métrico
Braccio (Naples)	Reino de Duas Sicílias	Medida de pano; ≈2.67 Palmi	700 mm
Braccio (Bolonha)	Estados Papais / Emilia	Medida geral	640 mm
Braccio (Turim/Piemonte)	Reino da Sardenha	Construção geral; 2 *piedi liprandi*	683 mm
Braccio (Genoa)	República de Gênova	Medida comercial e de construção	595 mm
Braccio (Verona)	Lombardia, Veneza	Construção e tecido	642 mm
Braccio (Mantua)	Lombardia, Veneza	Padrão de construção local	467 mm
Braccio (Cremona, da África)	Lombardia	Fabricação e construção	483 mm
		Medieval e Renascimento (outro)	
Pied de roi	França, pré-métrica	Pé francês padrão; obras de arquitetura e engenharia	324.84 mm
		Otomano	
ArşEm	Império Otomano	Módulo de construção; Rastreamento da casa de banho	757.7 mm

† O *Seked* Não é um comprimento, mas uma medida de inclinação: O, o Número de palmas horizontais por um côvado real de ascensão vertical, equivalente ao moderno Cotangente do ângulo da face. A Grande Pirâmide de Gizé tem um seke de $5\frac{1}{2}$ (i.e. 5 palmeiras e 2 dígitos), correspondendo a um ângulo de face de 51.84.

Nota: Os valores de Braccio são padrões tradicionais pré-1861. O florentino Braccio foi aumentado em $\frac{17}{16}$ (6.25%) por uma lei de 2 Julho de 1782; O, o mais cedo (histórico) valor de 583 mm é citado aqui. Os valores napolitanos eram semelhantes revisado para cima por ≈ 0.33% depois de 1840.

A notável variação no *braccio*, Mesa 15.4 através da pré-unificação da Itália.. 467 mm em Mântua a 700 mm em Nápoles, uma proporção de quase 3:2 – não foi acidente de imprecisão, mas uma expressão deliberada de soberania. Cada estado italiano ciumentamente manteve seus próprios padrões de pesos e medidas, desde o controle sobre a medição era inseparável do controle sobre o comércio, impostos e contratos de construção. Padronizando o *braccio* foi, portanto, um dos atos políticos explícitos do Risorgimento: A Lei de 28 Julho de 1861, impondo o sistema métrico em todo O novo Reino unificado da Itália, foi uma declaração de soberania nacional como uma reforma prática. Venice é dois braccia..*Da seta* (639 mm) para a seda Trocar e *Da panno* (595 Para o tecido... ilustre uma outra camada de Complexidade:

CÓPIA PARA REVISÃO

mesmo dentro de uma única cidade-estado, corporações rivais guild mantida Padrões distintos para diferentes mercadorias.

Tabela 15.4: O *braccio* através de estados italianos pré-unificação

Cidade	Entidade Política	Casa de governo / Autoridade	Valor
Florença	Grão-Ducado da Toscana	Medici; Habsburg-Lorraine depois de 1737	583 mm
Veneza	República de Veneza	Sereníssima (independente até 1797)	595–639 mm
Milão	Ducado / Reino da Lombardia	Espanhol, depois austríaco Habsburgo	595 mm
Roma	Estados Papais	Santa Sé	634 mm
Nápoles	Reino das Duas Sicílias	Monarquia Bourbon	700 mm
Bolonha	Estados Papais (Legação de Bolonha)	Santa Sé (semi-autônoma)	640 mm
Turim	Reino da Sardenha	Casa de Savoy	683 mm
Gênova	República de Gênova	Sereníssima (independente até 1797)	595 mm
Verona	República de Veneza → Lombardia, Veneza	Veneziano, então austríaco depois de 1797	642 mm
Mântua	Ducado de Mântua → Lombardia, Veneza	Gonzaga, então Habsburgo austríaco	467 mm
Cremona	Ducado de Milão → Lombardia, Veneza	Espanhol, depois austríaco Habsburgo	483 mm

Nota: Veneza manteve duas braccias distintas ao mesmo tempo *braccio da seta* (639 mm) para o comércio de seda e *braccio da panno* (595 Para o nível geral de tecido, refletindo guilda em vez de apenas estado controle sobre os padrões de medição. Todos os valores são pré-1861 padrões tradicionais; O sistema métrico foi imposto em toda a Itália unificada pela Lei de 28 Julho de 1861.

Continuação da Antiguidade ao Período Otomano Esta tradição operativa mostra uma notável continuidade. As mesmas ferramentas básicas, cordas de nó, prumo, o quadrado rotativo e o triângulo inscrito aparecem na construção egípcia. 2500 A.C., planejamento da igreja bizantina do século X, e arquitetura doméstica otomana do século XVIII (Oikonomou, 2022). Construtores otomanos trabalharam para um *Arşin* grade (75,77) cm), rastreando perímetros de casa de banho com 3-4-5 triângulos escalonados e determinando layouts interiores octogonais através *ad quatratum* A mesma lógica geométrica que tinha organizado igrejas bizantinas de tricô um milênio antes. Quando o carpinteiro da Albânia relatou que a altura do teto foi obtida por uma simples corda, até um quarto da largura da casa, ele estava descrevendo uma prática cuja ancestralidade se estendia de volta para os arpedonautas do vale do Nilo. Figura 15.11 mostra como este kit geométrico foi aplicado a um banho otomano no norte da Grécia. O *Arşin* Grade e triangulo pitagórico 3-4-5. O perímetro está definido em um 4×3 *Arşin* Grade; O interior octogonal deriva de um *ad quatratum* Operação.

Esta geometria operativa é o substrato prático sob o edifício teórico de Vitruvius, Alberti e Palladio. Os escritores do tratado codificaram *O quê* Proporção para alcançar; Os mestres construtores sabiam *Como* para alcançá-lo, através de uma ferramenta de operações geométricas que não deixou nenhum registro escrito mas moldou todas as principais estruturas do mundo ocidental.

CÓPIA PARA REVISÃO

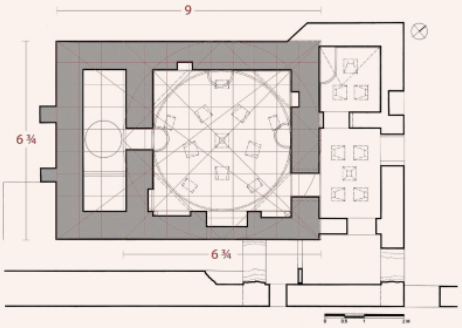


Figura 15.11: Banho otomano em Florina (18o C.) Retirada depois Oikonomou, 2022

15.3 Interlúdio: Arquitetos e Engenheiros... Arte e Ciência?

Parece que os papéis de arquiteto, construtor, pedreiro e engenheiro nem sempre foram distintos. Até meados do século XVIII, essas funções residiam em uma única figura: O mestre construtor. Os construtores se basearam primeiro em tentativas e erros, ou seja, falhas, e depois em regras heuristicamente derivadas de polegares e leis de proporção passadas por gerações.[21]

Esta unidade histórica é bem capturada pela crítica arquitetônica Ada Louise Huxtable:

> A natureza da arquitetura tem sido discutida por séculos. Seja arte ou estrutura, estética ou engenharia... ou, se uma combinação de ambos, em que proporção... é um desafio constante e um assunto contínuo de debate.
>
> Isso nem sempre foi assim. Embora as próprias perguntas sejam intemporal, a confusão sobre elas é de origem comparativamente recente. Em Roma, o papel do arquiteto descomprometidamente abrangeu todas as atividades do engenheiro. Vitruvius, em seu trabalho *Sobre Arquitetura*, escrito entre 25 e 23 B.C., observou que as responsabilidades do arquiteto incluíam construção, mecânica, e – não menos importante das artes mecânicas de seu tempo— hora fazendo, com uma admoestação especial que o edifício deve ter em conta a mesma força (estrutura), utilidade (função), e graça (arte).
>
> Os registros do escritório de Villard de Honnecourt, no ano de 1235, deixam claro que o "mestre construtor"dos tempos medievais ainda era arquiteto e engenheiro, e do tratado arquitetônico definitivo de Leon Battista Alberti de 1451-52, aprendemos que o Renascimento não trouxe divisão de trabalho. O homem renascentista de muitas faces, na verdade, considerava toda arte sua província, e toda a engenharia uma parte da arte.
>
> (Huxtable, 2017, p. 11)

A separação veio no século XVIII, impulsionada pelo surgimento da mecânica racional e pela institucionalização do ensino técnico. Na França, a fundação do *École des Ponts*

[21] Podemos nos maravilhar hoje com as antigas estruturas sobreviventes, mas nunca devemos esquecer que elas constituem uma porção infinitesimal das construídas, e são quase todas projetadas por padrões modernos.

CÓPIA PARA REVISÃO

et Chaussées (1747) e mais tarde o *École Politécnica* (1794) criou uma nova figura: O, o *Ingénieur*, treinado em matemática e mecânica, distinto da *arquiteto* Treinado na *École des Beaux-Arts* em composição, desenho e história. Na Grã-Bretanha, a autodesignação de John Smeaton como um engenheiro civil (1768) e a fundação da Instituição dos Engenheiros Civis (1818) formalizaram a mesma divisão. O sistema universitário alemão do século XIX, enfatizando a pesquisa pura ao lado do ensino, profissionalizou ainda mais ambas as disciplinas (Graham e Diamond, 2004).

A partir daí, o potencial de colisão entre arquitetura e engenharia tornou-se real. Pier Luigi Nervi, refletindo sobre seu próprio treinamento, descreveu a divisão com uma diretividade característica:

> Quando eu estudei na excelente Escola de Engenharia Civil em Bolonha, a palavra arquitetura referia-se apenas ao estudo das fachadas e de seus detalhes. Nunca ocorreu aos nossos professores, ou mesmo a nós, que uma ponte, uma estrutura de transporte, um plano urbano, também poderiam ser obras de arquitetura... Estruturas em concreto armado ou ferro, apesar dos exemplos já existentes de grandes pontes, da torre Eiffel, foram consideradas façanhas técnicas desenvolvidas em campos que nada tinham a ver com arquitetura.... Estes projetos estavam mais preocupados com o olhar de um edifício do que como ele foi montado juntos, uma abordagem baseada em um falso formalismo que enfatizou "a divisão entre substância e aparência... a mentalidade do decorador, para a qual tudo é possível no campo das molduras e da decoração plástica e pictórica... ignorância da entidade física da arquitetura, que, como um ser vivo, não pode separar a beleza da saúde fisiológica do corpo.'
>
> (Huxtable, 2017, p. 21)

Ironicamente, foi um grande arquiteto que deu muita credibilidade ao papel criativo dos engenheiros. Le Corbusier, em *Vers une arquitetura* (1923), escreveu, Fig. 15.12a:

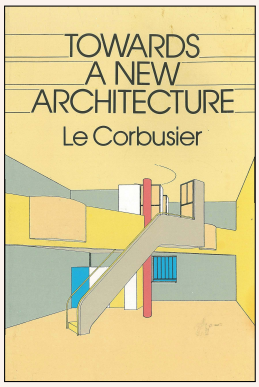
> A Estética e a Arquitetura do Engenheiro são duas coisas que marcham juntas e seguem uma da outra: O que está agora em pleno auge, o outro num estado infeliz de retrogressão.
>
> O engenheiro, inspirado na lei da Economia e governado por cálculos matemáticos, nos coloca de acordo com a lei universal. Ele alcança a harmonia.
>
> O Arquiteto, por seu arranjo de formas, realiza uma ordem que é a criação pura do seu espírito; por formas e formas ele afeta nossos sentidos em um grau agudo e provoca emoções plásticas.
>
> (Le Corbusier, 1931)

A visão de Le Corbusier sobre o *Ingénieur-architecte*Capturado em seu famoso pictograma (Fig. 15.12bNão era uma chamada para os engenheiros se tornarem arquitetos ou vice-versa, mas para ambos reconhecerem que grande edifício requer a síntese da lógica estrutural e arte espacial.

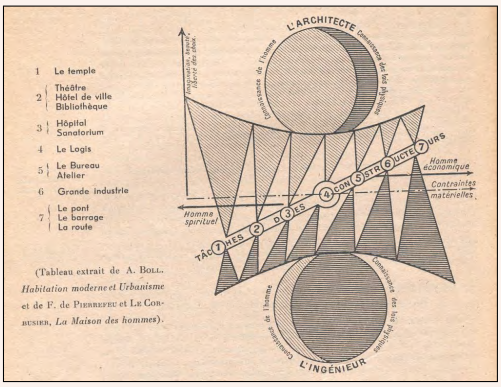
Esta visão encontrou um eco no engenheiro espanhol Eduardo Torroja:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Le Corbusier, 1931



(b) Le Corbusier's *ingénieur-architecte* pictogram (Pierrefeu e Corbusier, 1942)

Figura 15.12: Le Corbusier *Ingénieur-architecte* pictograma (Pierrefeu e Corbusier, 1942).

> Projeto estrutural está preocupado com muito mais do que ciência e técnicas: também está muito preocupado com a arte, senso comum, sentimento, aptidão, e prazer da tarefa de criar contornos oportunos aos quais os cálculos científicos adicionarão toques finais, sustentando que a estrutura é sólida e forte em De acordo com os requisitos.
>
> Matemática é apenas uma ferramenta conveniente pela qual o designer determina as proporções físicas e detalhes de uma estrutura planejada, a fim de transformar suas idéias das linhas de um projeto para a realidade de uma estruturas terminadas.
>
> (Torroja, Polivka e Polivka, 1958)

No entanto, a divisão profissional persiste. Como Henry Petroski observou, engenheiros amaldiçoam arquitetos que concebem edifícios exigindo extraordinárias contorções de concreto pesado e aço para executar; Os arquitetos desprezam engenheiros que acusam de falta de criatividade estrutural ou a vontade de deixar suas imaginações voarem (Petroski, 1997).

Os italianos têm uma palavra para aqueles que transcendem esta divisão: *Progettista*Aquele que concebe e realiza um projeto inteiro, unindo design e execução, forma e estrutura. Os números examinados nas seções seguintes, dos mestres anônimos das catedrais góticas a Maillart, Nervi, Candela e Khan, são todos, em suas diferentes maneiras, *progettisti*.. Eles demonstram que a tríade vitruviana nunca foi um menu de onde escolher, mas uma unidade a ser alcançada.

CÓPIA PARA REVISÃO

15.4 Os Pioneiros

Considerando que houve um histórico encontro entre arquitetura e engenharia, surge uma questão natural: Será que isso continuou após o surgimento da engenharia estrutural como uma disciplina científica? Duas perguntas pórtico esta investigação:

1. Temos engenheiros modernos cujos projetos levam a belas estruturas *Per se*...obras que tocariam a sensibilidade de um arquiteto?
2. Temos arquitetos modernos cujos projetos ousados ou inovadores desafiam o engenheiro estrutural a superar-se?[22]

Esta seção aborda a primeira questão, focando nos "verdadeiros engenheiros"que foram pioneiros no design antes do surgimento dos computadores.

Quando a estrutura se torna arte: A Estética da Necessidade

Embora a arquitetura seja frequentemente celebrada por sua expressão visual, é a estrutura subjacente que torna tal expressão possível. Em certas obras excepcionais, a necessidade estrutural em si torna-se a principal fonte de energia visual. Estes não são edifícios onde a forma é drapeada sobre a função, mas onde o formulário *É* Revelando, ao invés de esconder, como as forças fluem pelo espaço. A elegância destas estruturas não está na ornamentação, mas na clareza e inevitabilidade de suas formas. Quando os desafios de engenharia são enfrentados com precisão e imaginação, o resultado pode ser profundamente bonito: uma estrutura que é ao mesmo tempo racional e expressiva.

Esta seção é dedicada a estruturas icônicas concebidas por engenheiros estruturais– projetos que não só resolvem exigentes desafios técnicos, mas também cativam o olho ea imaginação. Em quase todos os casos, a geometria, proporções e ritmo desses projetos surgem diretamente das forças que eles devem resistir e as cargas que eles precisam carregar. No entanto, no desempenho de seu papel estrutural, eles conseguem uma espécie de arte – falando através de arcos, treliças, cabos, e cascas em uma linguagem de necessidade que se torna poesia no espaço (Pedreschi, 2008).

No início, Le Corbusier abordou a questão que é central para esta seção:

> Nossos engenheiros produzem arquitetura, pois empregam um cálculo matemático que deriva da lei natural, e suas obras nos dão o sentimento de harmonia. O engenheiro, portanto, tem sua própria estética, pois ele deve, ao fazer seus cálculos, qualificar alguns dos termos de sua equação; E é aqui que o gosto intervém. Agora, ao lidar com um problema matemático, um homem está considerando

[22] Até Zaha Hadid (1950-2016), que estudou matemática como estudante na Universidade Americana de Beirute e, portanto, pode ter se sentido confortável em projetar estruturas curvilíneas, os notáveis arquitetos eram todos homens.

CÓPIA PARA REVISÃO

> isso de um ponto de vista puramente abstrato, e em tal estado, seu gosto deve seguir um caminho certo.
>
> (Le Corbusier, 1931)

Os italianos melhor capturaram o papel do engenheiro-arquiteto com o termo *Progettista*Um que elabora um projeto de natureza arquitetônica ou técnica através de um processo de design: a figura profissional que, com formação cultural e experiência técnica adequada, primeiro concebe o que será construído. As seguintes seções brevemente destacam estruturas icônicas projetadas por *progettisti*.

15.4.1 O Buttress Voador: Lógica Estrutural Visível

O buttress voador é um dos primeiros e mais icônicos exemplos de forma seguindo a função com resultados impressionantes. Nascido da necessidade durante o período gótico, abordou um desafio estrutural fundamental: o impulso lateral gerado por cofres nervurados e telhados de pedra pesados em vastas catedrais. Em vez de confiarem apenas em paredes maciças para neutralizar essas forças, os construtores conceberam uma solução externa ousada - suportes arcados que canalizam cargas horizontais para fora e para baixo para cais distantes.

O que começou como uma resposta pragmática às restrições de engenharia logo evoluiu para uma característica arquitetônica definidora. Os arcos esbeltos e elevados de pontas voadoras não só liberam espaço interior para vitrais e expressões verticais; Eles se tornaram gestos estéticos por direito próprio. Neles, a clareza estrutural encontrou graça escultural, inaugurando uma longa tradição onde o trabalho do engenheiro estrutural também poderia ser uma obra de arte.

De fato, seria impossível escrever uma visão geral da teoria análise estrutural sem referência a catedrais góticas. Estes foram os resultados de ousadas experiências estruturais para não ser visto novamente até a construção de pontes de longo alcance e edifícios de metal-pórtico na segunda metade do século XIX (Mark, 1978).

Apesar da magnificência destas estruturas, elevando-se alto para a glória de Deus com a máxima luz (em oposição às igrejas românicas anteriores), catedrais góticas ofereciam menos desafios técnicos do que se poderia esperar. Eles ainda foram projetados por regras de polegar refinados ao longo das gerações, o que quer dizer, deve ter havido vários acidentes fatais ao longo do caminho.

Muitos tópicos de interesse para o engenheiro estrutural se relacionam com a arquitetura gótica: cúpulas, costeletas, arcos e outros. No entanto, esta seção limita-se à relevância estrutural dos rabos voadores.

Olhando para uma catedral gótica, os rabos voadores se destacam imediatamente. Eles foram usados pela primeira vez para proporcionar estabilidade à nave clerestory de Notre-Dame de Paris (Murray, 1998) pouco antes de 1180. No entanto, os registros

CÓPIA PARA REVISÃO

sobreviventes do período não dizem quase nada das técnicas de design empregadas para tal marcaram uma conquista técnica. Por isso, é justo descartar o uso de qualquer metodologia científica. A ausência de teoria estrutural também elimina a possibilidade de modelagem quantitativa em pequena escala; Os construtores não poderiam prever com certeza se elementos estruturais válidos em edifícios menores funcionariam de forma confiável na grande escala de novas construções.

Uma exceção importante, no entanto, é a estabilidade bruta contra virar sob cargas de peso morto, que não depende da escala. Um modelo de bancada poderia ter servido para indicar a estabilidade bruta de um prédio em grande escala. Este fato de comportamento estrutural ajudou a compensar alguns problemas de novo, design em larga escala – embora provavelmente não tenha sido agarrado por construtores medievais (Mark, 1978).

Um tratado-chave sobre arquitetura foi publicado em 1568 em Paris por Philibert de l'Orme (De l'Orme, 1561). Este é o primeiro trabalho em que a arte da projeção maçônica é introduzida, contendo um ensaio muito completo descrevendo *les traicts geometriques qui montrent comme[nt] A culpa é de Tailler e Coupper Les Pierres*Os métodos geométricos para cortar e moldar pedras, ou mais prosaicamente: A arte de obter a partir de planos e desenhos as formas de pedras individuais em forma conveniente para o pedreiro construir um edifício proposto.

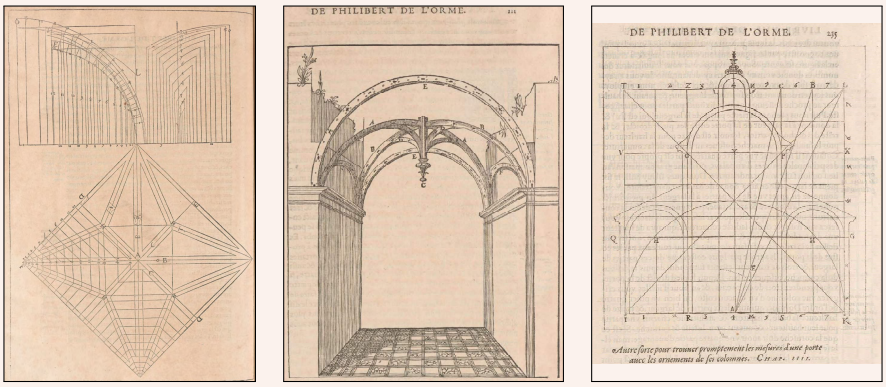


Figura 15.13: Ilustrações de l'Orme (De l'Orme, 1561)

Mais tarde, no século XIX, Eugène Viollet-le-Duc escreveu seu famoso *Dictionnaire Raisonné* (Viollet-le-Duc, 1854).[23] No entanto, sua contribuição teórica mais significativa veio através de seu *Discursos sobre Arquitetura* (Viollet-le-Duc, 1875), na qual ele articulou uma filosofia abrangente de clareza estrutural e os princípios subjacentes ao projeto gótico – trabalho que une a tradição empírica medieval e teoria estrutural moderna. (Para o seu papel fundamental na compreensão dos princípios estruturais góticos, ver §4.3Ele também

[23]Este é um monumental dicionário alfabético abrangente de nove volumes de todos os termos arquitetônicos, com centenas de ilustrações muito precisas e bonitas.

CÓPIA PARA REVISÃO

restaurou... ou 'Massagrado', segundo alguns historiadores modernos... muitos edifícios medievais danificados durante a Revolução Francesa.[24]

Outro tratado monumental foi escrito por Willis, 1910, que começa dizendo:

> O cofre nervurado da Idade Média . . . Difere inteiramente dos cofres dos romanos. Consiste . . . de uma estrutura de costelas, ou arcos de pedra, sobre os quais as verdadeiras abóbadas ou coberturas reais do apartamento resto. Estas abóbadas são geralmente construídas de um material mais leve e com acabamento mais áspero do que as costelas sobre as quais descansam, e entre elas constituem, na verdade, uma espécie de painel fino. A construção destas costelas não oferece dificuldade em cortar pedras, cada um sendo considerado separadamente, um simples arco; no entanto, as formas de seus vousoirs dificilmente podem ter sido obtidas sem traçar no chão a figura full-sized deste arco, a partir do qual para obter os moldes faciais dos vossoirs.
>
> Willis, 1910 On the construction of the vaults of the Middle Ages

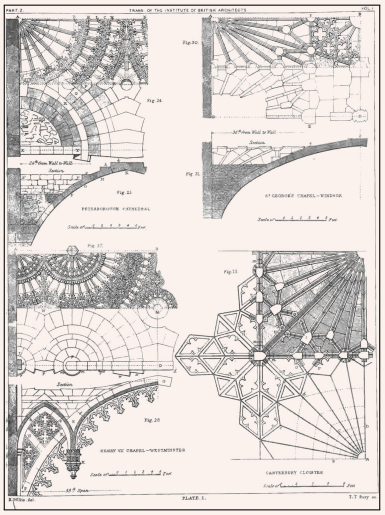


Figura 15.14: Ilustrações de Willis, 1910

Finalmente, Mark e Prentke, 1968, em um papel de referência, procurou mais informações através de análises detalhadas (usando técnicas de fotoelasticidade) de várias igrejas góticas principais. Suas análises revelaram que o pináculo colocado sobre as bordas externas do píer-buttres— as estruturas torre-como ao longo do perímetro de uma igreja que resiste ao impulso exterior dos píers voadores– ajudou a manter a integridade da píere-butstres superando a tensão local causada pela combinação de peso morto e cargas de vento: o peso do pináculo gera compressão no píer-buttress que cancela a tensão. O pináculo age como um elemento protesante.

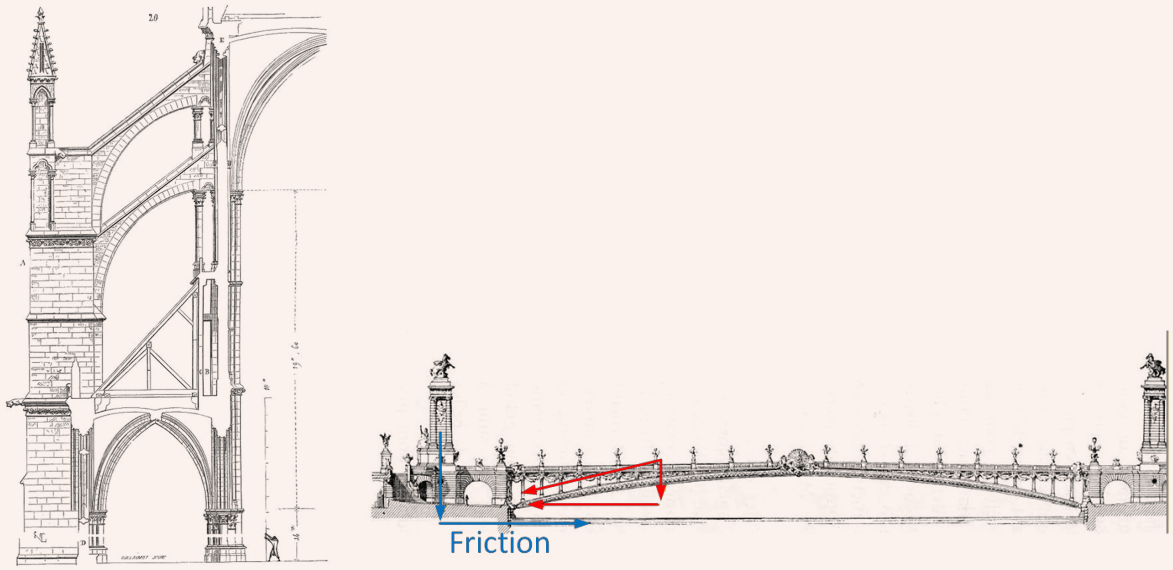
Este achado foi surpreendente porque a função técnica do pináculo é mascarada por seu

[24] Por exemplo, ele tomou a liberdade de adicionar um pináculo à nave central de Notre-Dame de Paris (que recentemente queimou), embora nunca tivesse existido antes da sua intervenção.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

papel decorativo overpowering, e porque considerações grosseiras de estabilidade teria colocado o pináculos no interior em vez da borda externa do píer-buttress.

O papel estrutural do pináculo não foi perdido nos engenheiros que projetaram o Pont Alexandre muito raso III em Paris (Fig. 15.15bConstruído em honra da Aliança Franco-Russa de 1892.



(a) Bunda voadora (Viollet-le-Duc, 1854)

(b) Ponte Alexandre III, Paris

Figura 15.15: Transferência de carga em arcos

Para uma compreensão mais profunda da ciência por trás das catedrais góticas, o leitor deve consultar Heyman et al., 1992 e.. Heyman, 1998b.

15.4.2 Gustave Eiffel (1832-1923)

Gustave Eiffel era o engenheiro francês por excelência, um puro produto de sua elitista *Grandes Écoles*.[25] Ele é provavelmente o exemplo mais notável de um engenheiro que projetou uma "estrutura"servindo absolutamente sem propósito[26] Além de ser um testamento artístico para o francês *Prouse* um projeto Eiffel documentou-se em uma generosa monografia de dois volumes publicada na década seguinte (Lemoine, 2002).[27]

[25]Embora ele tenha escolhido surpreendentemente *École Centrale des Arts et Manufactures* sobre o muito mais prestigiado *École Politécnica*.

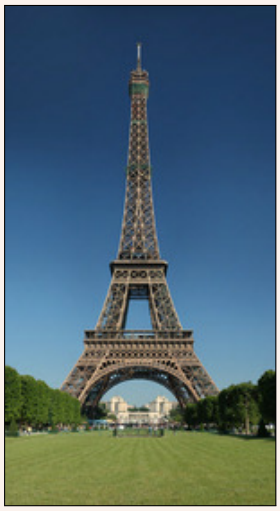
[26]Com a possível exceção de um restaurante no terceiro andar.

[27]Eiffel prevaleceu sobre um projeto concorrente de Jules Bourdais, que propôs uma torre de granito com iluminação elétrica. Um conceito esteticamente e estruturalmente inferior que teria sido muito mais caro e menos inovador (Bourdais, 1881). Veja §15.5.5 para uma conta mais completa deste concurso.

CÓPIA PARA REVISÃO

Embora Eiffel fosse responsável pelo projeto final, o conceitual original foi concebido por outros dois engenheiros em sua firma: Maurice Koechlin e Émile Nouguier. Pouco reconhecimento foi dado a Koechlin, que estava fortemente envolvido no projeto da Torre Eiffel e do Viaduto Garabit, entre outras estruturas.

Anteriormente, Eiffel tinha projetado o esqueleto de ferro interior da Estátua da Liberdade para o escultor Auguste Bartholdi. Mais tarde, ele projetou múltiplos viadutos e estações ferroviárias em vários países. Figura 15.16b mostra sua famosa ponte de arco, Ponte Maria Pia.



(a) Arte: A Torre



(b) Engenharia: A Ponte

Figura 15.16: Gustave Eiffel: A torre e a ponte

A silhueta cônica da torre é muitas vezes admirada puramente como uma escolha estética, mas seu perfil era derivado de necessidade de engenharia: Eiffel moldou cada seção para que o resultado da pressão do vento na estrutura acima de qualquer corte horizontal permanecesse tangente às bordas da torre, minimizando a flexão tensões do carregamento do vento. Esta lógica orientada pelo vento por trás da curva da torre foi examinada analiticamente contra os modernos modelos de perfil de vento da camada limite atmosférica, confirmando quão próxima a forma empiricamente derivada de Eiffel antecipou-se mais tarde teoria aerodinâmica (Weidman, 2009).

Assim como Nervi estaria envolvido em *ferrocemento* Para o seu cascas, Eiffel estava envolvido na fabricação através de *Construções Eiffel Métalliques*.. E assim como Morandi mais tarde teria seu tipo de ponte ”assinatura”, Eiffel tinha sua ’’assinaturas” pontes arqueadas de duas faces:[28] Ponte Maria Pia (Thrall, Billington e Bréa, 2012), o Viaduto Garabit, a Ponte Dom Luís, a ponte Rodo-Ferroviária de Viana do Castelo, e outros.

[28]Como mostrado no Capítulo 32A análise de arcos de duas torções é muito mais complexa do que a dos arcos com três torções.

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

A companhia da Eiffel, *Compagnie des Établissements Eiffel*, estava na vanguarda das estruturas de ferro pré-fabricadas (Établissements Eiffel, 19th Century). Esta abordagem industrializada permitiu uma construção rápida e econômica de pontes, torres e outras estruturas. Ele enfatizou a modularidade de várias maneiras-chave, uma abordagem cujos princípios subjacentes à otimização estrutural foram desde então analisados em detalhes (Sundaram e Ananthasuresh, 2009):

Pré-fabricação: Componentes foram fabricados em oficinas com alta precisão, depois transportados para o local para montagem, reduzindo o tempo de construção no local e garantindo controle de qualidade.

Componentes padronizados: Eiffel usou componentes padronizados de ferro e aço que poderiam ser produzidos em massa e reutilizados em vários projetos, custo-efetivo e escalável.

Juntas parafusadas e rebitadas: Ele favoreceu conexões aparafusadas e rebitadas sobre técnicas tradicionais de alvenaria ou soldagem, permitindo uma montagem mais fácil e desmontagem.

Estruturas leves, mas fortes. Ele empregou treliça e projetos treliça para otimizar o uso do material, tornando as estruturas mais leves, mantendo a força.

Adaptabilidade: A abordagem modular permitiu que seus projetos se adaptassem a terrenos complexos, como desfiladeiros e rios íngremes, como visto no Viaduto Garabit e outras pontes ferroviárias.

Esses princípios da modularidade revolucionaram a construção em larga escala e inspiraram técnicas modernas de pré-fabricação e design modular na arquitetura e engenharia.

O envolvimento de Eiffel no escândalo do Canal do Panamá prejudicou temporariamente sua reputação, embora ele tenha sido absolvido mais tarde (Charle, 2004). Seu legado na construção metálica permanece incomparável, colocando a base para arranha-céus modernos e pontes de longo alcance.

15.4.3 Louis Henri Sullivan (1856-1924)

Nascido em 1856, Sullivan entrou no MIT aos 16 anos. Brevemente empregado em Chicago ele então se matriculou na *ÈCole des Beaux-Arts* em Paris e depois passou algum tempo viajando para Roma e Florença.

O estilo arquitetônico de Sullivan envolvia grandes volumes contrastados com intrincadas ornamentações. O enfeite era, para Sullivan, uma parte de reforço de outro modo reta para frente edifícios de aço pórtico.

Como (um dos poucos) treinados em engenharia e arquitetura, não é de surpreender que foi ele quem criou o famoso aforismo (Sullivan, 1896 PDF) para estruturas (em oposição à arquitetura) declarou abaixo:

CÓPIA PARA REVISÃO

No entanto, para o olho firme de alguém que está na costa das coisas, olhando principalmente e mais amorosamente sobre aquele lado em que o sol brilha e que nos sentimos alegremente para ser vida, o coração é sempre feliz pela beleza, a espontaneidade requintado, com o qual A vida busca e assume suas formas em um acordo perfeitamente responsivo às suas necessidades. Parece sempre como se a vida e a forma fossem absolutamente um e inseparáveis, tão adequado é o sentido de realização. Seja a águia varrendo em seu vôo, ou a flor de maçã aberta, o cavalo de trabalho labutando, o cisne de bluthe, o carvalho ramificando, o fluxo sinuoso em sua base, as nuvens à deriva, sobre toda a freira em curso, forma sempre segue função, e esta é a Direito. É a lei penetrante de todas as coisas orgânicas e inorgânicas, de tudo físico e metafísico, de todas coisas humanas e todas as sobre-humanas, das verdadeiras manifestações da cabeça, do coração, da alma, que a vida é reconhecível em seu expressão, que *A forma sempre segue a função*.. Esta é a lei. Onde a função não muda, a forma não muda. As rochas de granito, as colinas sempre emaranhadas, permanecem por séculos; O raio vive, entra em forma e morre, num piscar de olhos. ... E assim,

- Quando o instinto e a sensibilidade nativos governarem o exercício de nossa amada arte;
- Quando a lei conhecida, a lei respeitada, for aquela forma que segue o funcionamento;
- Quando nossos arquitetos deixarem de se armar e tagarelar algemados e vãogloriosos no asilo de uma escola estrangeira;
- quando é realmente sentido, alegremente aceito, que esta lei abre o sol arejado de campos verdes, e nos dá uma liberdade que a própria beleza e suntuosidade do cumprimento da própria lei como exibido na natureza irá deter qualquer são, qualquer sensível homem de mudar para licença;
- Quando se torna evidente que estamos apenas falando uma língua estrangeira com um sotaque americano perceptível, enquanto todo e qualquer arquiteto na terra pode, sob a influência benigna desta lei, expressar da forma mais simples, modesta, natural que O que é dele dizer: que ele poderia realmente e com certeza desenvolver sua própria individualidade característica, e que a arte arquitetural com ele certamente se tornaria uma forma viva de linguagem, uma forma natural de expressão, dando-lhe sucesso e acrescentando tesouros pequenos e grandes à arte crescente de sua terra;
- quando sabemos e sentimos que a natureza é nossa amiga, não nosso inimigo implacável, que uma tarde no campo, uma hora à beira-mar, uma visão aberta de um único dia, através do amanhecer, meio-dia e crepúsculo, nos sugerirá tanto que seja rítmico, profundo, E eterno na vasta arte da arquitetura, algo tão profundo, tão verdadeiro, que tudo as estreitas formalidades, regras rígidas e laços estranguladores de As escolas não podem abafar isso em nós,

- então pode ser proclamado que estamos no alto caminho para uma arte natural e satisfatória, uma arquitetura que em breve se tornará uma bela arte no verdadeiro, o melhor sentido da palavra, uma arte que viverá porque será do povo, para o povo, e por O povo.

(Sullivan, 1896)

Nota: A formulação linear de Sullivan pode simplificar a relação entre espaço e forma. Como o filósofo russo Pavel Florensky observou:

> Então, andaremos em círculos, se tentarmos estabelecer o que vem primeiro: espacialidade ou coisa.
>
> Florensky, 1996 Beyond Vision: Essays on the Perception of Art

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Isso sugere que o espaço arquitetônico pode influenciar a forma estrutural, tanto quanto os requisitos funcionais moldam a experiência espacial – uma relação recíproca que os maiores engenheiros estruturais, de Nervi a Torroja, intuitivamente compreendidos em seu trabalho.

A segunda parte é muito florida Kiplingesque. Claramente suas habilidades de escrita não estão em sintonia com a simplicidade que ele defende para estruturas. Embora Sullivan acreditasse que os prédios precisavam expressar sua função, suas estruturas eram maciças[29].. Embora considerado inovador em O projeto de edifícios altos, ele não podia se abster dos decorativos no que era então a maior contribuição da América para o início da arquitetura moderna: Sistema estrutural de aço.

Sullivan foi o mentor do jovem Frank Lloyd Wright. Infelizmente, seus últimos 20 anos foi caracterizado por um rápido declínio, falta de comissões, dificuldades financeiras e alcoolismo.

15.4.4 Robert Maillart (1872-1940)

Graças a Billington (Billington, Mark e Abel, 1972; Billington, 1979)Maillart foi "leonizado"como o artista estrutural

Robert Maillart (Fig. 15.17a) foi um engenheiro suíço treinado no precursor do Instituto Federal de Tecnologia Suíço em Zurique (ETH), onde estudou com Wilhelm Ritter (ele mesmo estudante de Culmann) e se tornou um firme aderente da estática gráfica.

Maillart não gostava da teoria do excesso e entendia a necessidade de fazer suposições e visualizar o comportamento estrutural.[30] Curiosamente, abordagens semelhantes foram tomadas muito mais tarde por dois eminentes engenheiros suíços: Giovanni Lombardi em seu projeto de barragens, e Christian Menn, que dependia da computação *Depois* completando projetos preliminares para refino-los.

Maillart, que foi pioneiro no uso de concreto armado, projetou uma série de arcos de três torções (como mostrado em §32.1.1.2.3, sua análise é bastante simples), guiado por um sentido aguçado de estética.

A Suíça tinha - e ainda tem - uma tradição de abertura de competições para selecionar projetos cívicos, com seleção baseada em múltiplos critérios, não só o custo. Por causa da tradição do país de confiar em cálculos simples, juntamente com um bom entendimento para a resposta estrutural, os projetos originais poderiam florescer. Isto contrastava com culturas que se baseavam excessivamente em inspiração de desenhos anteriores reforçados pela matemática, como o alemão ou francês do tempo— abordagens que tenderam a sufocar criatividade.

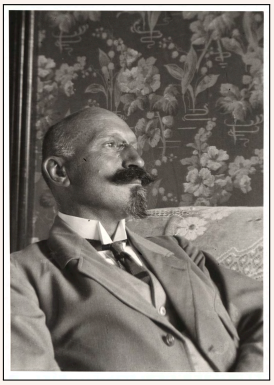
[29] O que explica o quanto não achei necessário incluir uma foto das estruturas dele.

[30] Hoje em dia, poucos engenheiros têm essa profunda compreensão do comportamento estrutural, levando à dependência excessiva de modelos computacionais que geram belas (e convincentes) imagens gráficas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Como uma nota lateral, a chamada competição aberta nem sempre foi tão transparente e justa quanto se poderia esperar na Suíça. Famosamente, a competição pela Liga das Nações A sede foi mal sucedida, resultando em um jovem arquiteto suíço, Le Corbusier, empacotando e partindo para a França depois que a comissão adotou uma "design by committee"(em grande parte baseada em seu conceito), seu trabalho não reconhecido – parcialmente justificado pelo fato de O jovem arquiteto teve a temeridade de não apresentar seus desenhos em tinta indiana. Suíça perdeu uma figura imponente para a França, embora seu rosto agora enfeita os 10 Conta CHF.

Assim, quando chegou a hora de construir uma ponte em uma parte remota da Suíça com pouco tráfego, Maillart construiu sua estrutura mais icônica: Ponte Salginatobel, comemorado em todo o mundo (Fig. 15.17b). Outro dos projetos de Maillart, o armazém Magazzini Generali, é discutido no Capítulo 39.3 (baseado nas notas de Billington).



(a) Monsieur Maillart



(b) Ponte Salginatobel

Figura 15.17: Robert Maillart

Enquanto Eiffel favoreceu o arco de duas torções para pontes forjadas de ferro, Maillart encontrou beleza em três tortilhas de concreto.

15.4.5 Auguste Perret (1874-1954)

Auguste Perret (Bruxelas, 1874 - Paris, 1954) foi um arquiteto francês Construtor que fez para concreto armado o que Maillart tinha feito para o Ponte: Ele demonstrou que o material não precisa ser escondido atrás da pedra revestimento ou gesso ornamental, mas poderia ficar exposto como o honesto expressão da estrutura de um edifício. Onde seus contemporâneos tratavam concreto como um esqueleto utilitário para ser vestido, Perret tratou-o como arquitetura em si – forma, proporção, e detalhado com o mesmo Cuidado com um pedreiro clássico que lucraria em pedra cortada[31].

[31]Em retrospecto, Perret pode ser visto como um precursor inconsciente do que os Smithsons e Reyner Banham iria terminar mais tarde *brutalismo*— o Exposição deliberada de concreto cru (*Béton Brut*) como um Terminou a superfície. A ironia é considerável: Perret está exposto concreto foi sempre refinado,

CÓPIA PARA REVISÃO

Perret treinou na *École des Beaux-Arts* em Paris, mas nunca tirou seu diploma, preferindo o mundo prático de seu pai empresa de construção, Perret Frères, que ele eventualmente liderou. Este duplo identidade... escolarizada em composição clássica, fundamentada na construção A realidade... em forma de tudo o que ele construiu. Seu prédio de apartamentos no 25 Bis rue Franklin, Paris (1903), foi uma das primeiras estruturas para Exponha um concreto armado pórtico em uma fachada, com enchimento de telha cerâmica Painéis lendo honestamente como não-estruturais. Seu *Notre-Dame du Chuvoso* (1923) continua sua obra-prima: Uma igreja em que esbelta Concreto pilares suporta uma fina casca abóbada, as paredes se dissolveram completamente em uma rede de traços pré-moldados de concreto preenchido com vitrais por Maurice Denis... Lógica gótica renascida em material industrial, Fig. 15.18.. Seu maior Comissão, a reconstrução de Le Havre após sua guerra Destruição (1945-1954), aplicou estes princípios em escala urbana: a centro da cidade unificado de concreto, clássico em proporção mas inequivocamente Moderno, reconhecido hoje como Patrimônio Mundial da UNESCO.



Figura 15.18: Notre Dame Raincy de Perret (1923)

Filosofia do Design A convicção orientadora de Perret era que a estrutura e arquitetura são Inseparável.

> Celui qui dissimule une partie quelconque de la charpente se prive du seul légitime et plus bel ornamento de l'architecture. Celui qui dissimule un poteau commet une faute. Celui qui fait un faux poteau commet un crime.

classicamente proporcional, e Meticulosamente detalhado, enquanto o brutalismo que ajudou a inspirar Muitas vezes celebrava a crueza como uma estética em si mesma. Le Corbusier *Unite d'Habitation* (1952)—cujo concreto marcado com placa A superfície deu ao brutalismo seu próprio nome... foi projetado por um homem que passou dois anos no ateliê de Perret absorvendo precisamente o lição oposta: que expunha exigências concretas, não desculpas, o A nave mais alta.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Aquele que esconde qualquer parte da estrutura priva-se do único ornamento legítimo e mais bonito da arquitetura. Aquele que esconde um pilar comete uma falha. Aquele que cria um falso comete um crime.
>
> Perret, 1952 Contribution à une théorie de l'architecture

Ele escreveu uma declaração que.. Poderia ter sido assinado por Nervi ou Torroja. Ele rejeitou o *Art Nouveau* tendência de dissolver a estrutura em ornamento, e igualmente rejeitou o modernismo nascente que reduziu os edifícios a abstratos volumes indiferentes ao material e à nave. Para Perret, o pilar, o viga, e o pórtico não eram obstáculos à beleza, mas sua própria fonte, desde que fossem proporcionais com rigor e executados com precisão. Isso o colocou em uma linhagem que corre de Vitruvius até Viollet-le-Duc para os artistas estruturais do século XX... um construtor teórico que entendia que a tríade de *Firmitas, utilitas, venustas* não era uma hierarquia, mas uma unidade.

Sua influência na próxima geração foi direta e pessoal. Entre os jovens arquitetos que passaram por seu atelier Paris foi Charles..ÉDouard Jeanneret... depois Le Corbusier... que trabalhou lá de 1908 a 1910 e absorvido, mesmo como ele mais tarde reagiu contra, A insistência de Perret na honestidade estrutural.[32] Onde Perret permaneceu leal ao pilar e o ângulo certo, seu aluno iria dissolver a parede completamente; Mas ambos concordaram que a estrutura não deve mentir.

15.4.6 Eduardo Torroja Miret (1899-1961)

Eduardo Torroja y Miret (Madrid, 1899-1961) foi um engenheiro estrutural espanhol amplamente considerado como uma das quatro figuras mais influentes no desenvolvimento técnico e estético de concreto armado na primeira metade do século XX, ao lado Robert Maillart, Eugène Freyssinet e Pier Luigi Nervi. Ele estava entre os maiores engenheiros estruturais do século XX, um mestre de estruturas casca e formas finas de concreto cujas obras alcançaram uma integração da lógica estrutural e beleza arquitetônica raramente igualavam antes ou depois.

Torroja estudou na *Escuela de Ingenieros de Caminos*[33] em Madri, onde estudou com Juan Manuel de Zafra y Esteban, um notável pesquisador no campo emergente de concreto armado, e com José Ribera, que liderou a firma de Hennebique na Espanha. A tutela desses dois homens desempenhou um papel importante no desenvolvimento posterior de Torroja. Depois de se formar na Escuela de Ingenieros de Caminos em 1923, ele estabeleceu seu próprio escritório técnico (*Oficina Técnica Eduardo Torroja*) em 1927 (Winchurch, 2007 PDF).

[32] O relacionamento era.. Vida e ocasionalmente acrimonioso: Le Corbusier, o revolucionário E Perret, o classicista, discordou publicamente de quase tudo As impressões digitais de Perret. O piloto, a fachada livre, o exposto pórtico– são visíveis durante todo o trabalho de Le Corbusier cedo.

[33] Como se este não fosse um nome incomum para a instituição, mais tarde tornou-se o (famed) *Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos* (Universidad Politécnica de Madrid). Nada sobre engenharia civil ou estrutural no título.

CÓPIA PARA REVISÃO

No início, ele se focou em projetar e analisar edifícios; Então por volta de 1933 ele completou vários projetos incorporando finos cascas e cilíndricos abóbados (Winchurch, 2007). Seus primeiros trabalhos e passou a projetar estruturas de concreto emblemáticas, incluindo o Salão do Mercado Algeciras (1933), o telhado cantilevered Zarzuela Hipódromo em Madrid (1935), e o salão esportivo Frontón Recoletos (1935) –denominado extraordinário Comando da construção de casca. O Frontón Recoletos, destruído na Guerra Civil Espanhola, apresentava um cruzamento cilíndrico cascas com lunetas vidradas que inundavam o interior com luz – uma síntese de estrutura, espaço e iluminação.

Torroja competiu pelo projeto do novo Hipódromo de Zarzuela em Madri; O seu desenho (#3) foi selecionado entre nove finalistas (Fig. 15.19a). Isto *magnum opus* foi a submissão mais estrutural e esteticamente realizada, impregnada pelo chamado *Racionalismo Madrileniano*.[34] Ele mal tinha 36 anos.

> O primeiro prêmio foi atribuído à solução projetada pelos arquitetos C. Arniches e M. Domínguez e o engenheiro E. Torroja, em que a originalidade da cobertura casca, um completamente nova estrutura em seu tempo, e que ainda hoje, aos vinte e sete anos, mostra sua originalidade expressiva do gênio de Torroya, que com este trabalho obtém sua primeira vitória em uma competição.
>
> Torroja, 1962a

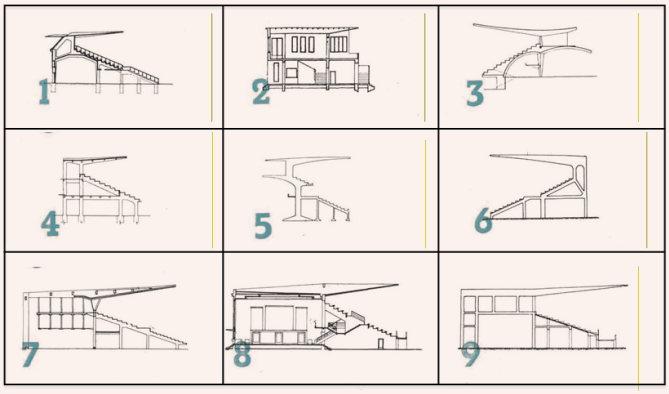
O telhado de Zarzuela, Um hiperbolóide casca Um cantilevering 12,8 metros com uma espessura de apenas 5 centímetros na borda, permanece um ícone de elegância estrutural. Na verdade, mais de 50 anos depois, o Hipódromo Zarzuela tornou-se um monumento histórico-artístico da Espanha. Uma excelente análise da arquitetura de Torroja é dada por Antuña Bernardo, 2003.

Em 1936, Torroja admitiu que para ir mais longe, mais conhecimento tinha de ser adquirido. Em 1940, foi nomeado diretor do *Laboratório Central de Ensaios de Materiais*, onde ele enfatizou modelo e teste de material. Mais tarde fundou o Instituto Técnico de la Construção y del Cemento (agora Instituto Eduardo Torroja) em Madri, que se tornou um centro líder de pesquisa em tecnologia de concreto e engenharia estrutural. Ele também co-fundou o *Comité Européen du Béton* (CEB), e serviu como presidente do *Fédération Internationale de la Précontraine* (FIP). Ele era professor na Escola de Engenharia Civil de Madrid e foi professor visitante em Princeton, Harvard e MIT.

Design Filosofia e intuição estrutural A filosofia do projeto de Torroja rejeitou tanto a imposição arbitrária da forma como a aplicação mecânica do cálculo. "O designer estrutural", escreveu ele, "deve possuir intuição criativa e a capacidade de ver o todo antes das partes."Ele defendeu formas que emergem naturalmente do fluxo de forças Através da forma... carregando carga através da ação de membrana, arcos seguindo linhas de impulso,

[34] O Racionalismo Madrileniano é caracterizado pela arquitetura que se destaca tanto em suas formas e elementos quanto nos materiais utilizados: concreto armado, tijolo exposto, grandes janelas horizontais, e fachadas lisas sem ornamento. Foi parcialmente impulsionado pela escassez de materiais no que ainda era um país pobre após a brutal guerra civil que sacudiu a Espanha.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Submissões (Torroja, 1962a)



(b) O projeto de Torroja

Figura 15.19: Torroja, Zarzuela Hipódromo

cabos assumindo formas funiculares. Essa abordagem, que ele chamou de "intuição estrutural", exigia uma compreensão profunda de como os materiais se comportam e como as forças encontram seus caminhos através das estruturas. Ele foi pioneiro no uso de testes em larga escala para verificar o comportamento das estruturas complexas casca antes de finalizar os projetos, combinando intuição com validação empírica quando métodos analíticos da época se mostraram insuficientes.

Como Hardy Cross, Torroja acreditava que a análise detalhada só deveria vir após o desenho preliminar. Ele via os cálculos quase como um pensamento posterior, necessário para avaliar a viabilidade de um projeto já concebido através da intuição.[35]

> Uma vez que o cálculo de tensões em uma estrutura ou membros estruturais individuais, após o projeto geral ser concluído, é um trabalho mais técnico e especializado, é uma matéria além do escopo deste livro, e apenas comentários gerais serão feitos. O cálculo de tensões só pode servir para verificar e corrigir os tamanhos dos membros estruturais como concebido e proposto pela intuição do designer. O trabalho em si nunca nasce do cálculo. O cálculo refere-se ao projeto como concebido e adotado: geralmente é feito após o projeto geral, para garantir a estabilidade e a força da estrutura. Se o cálculo não provar a necessária segurança da estrutura, o designer deve modificar seu trabalho e repetir os cálculos para aprovação final. Os cálculos devem verificar não só a força, mas também a elasticidade e estabilidade estática da construção. A força de uma estrutura é muitas vezes óbvia e não precisa de cálculos. Isso, no entanto, não deve significar que em outros casos a verificação precisa pode ser omitida sem justificação adequada.
>
> (Torroja, Polivka e Polivka, 1958)

Razón y Ser de los Tipos Estruturais Em seus últimos anos, Torroja focou-se em publicações. Seu livro *Razón y Ser de los Tipos Estruturais* (publicado em inglês como Filosofia das

[35] Da mesma forma, eu sempre disse aos alunos que eles deveriam ter uma resposta aproximada para um problema antes de ser analisado por um código elemento finito. Análise estrutural deve ser visto como um *Problema Fermi*.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Estruturas, 1958) (Torroja, 2008; Torroja, 1962b; Torroja e Miret, 1958) tornou-se um dos textos mais influentes em projeto estrutural mundo e articula uma filosofia de design centrada na expressão natural do fluxo de forças através da forma. Torroja escreveu este livro como um argumento contra aqueles que procuravam reduzir as estruturas a uma mera questão de cálculo; Para ele, a resistência era essencial mas nunca o único ou principal fundamento para construção. O livro apresenta suas reflexões sobre o processo mental - racional e emocional - que um designer estrutural emprega ao enfrentar um novo projeto. Em relação ao primado do projeto conceitual sobre o cálculo, Torroja escreveu explicitamente no prólogo: *Antes e acima de tudo, há a ideia, moldando o material em uma forma resistente, para cumprir sua missão.* Esta declaração confirma que Torroja realmente acreditava análise estrutural deve seguir - não preceder - o projeto conceitual preliminar de uma estrutura.

Seu *Filosofia das Estruturas* é tanto um tratado técnico e uma meditação sobre a arte de projeto estrutural. Considerando que.. (Torroja e Miret, 1958) fornece uma perspectiva sobre suas inúmeras realizações pessoais, (Torroja, Polivka e Polivka, 1958) é muito mais interessante: nele ele reflete sobre a profissão de engenharia estrutural e então descreve em termos simples (não uma única equação) o comportamento estrutural de várias estruturas, tais como arcos, cúpulas, cascas, barragens, e muito mais. Torroja analisa tipos estruturais—vigas, arcos, treliças, pórticos, cascas– não apenas como abstrações matemáticas, mas como respostas às exigências físicas e espaciais. Ele enfatiza que a otimização estrutural e beleza arquitetônica não são objetivos concorrentes, mas aspectos complementares do bom design: estruturas que resistem eficientemente a cargas também tendem a ser elegantes, porque tanto eficiência quanto beleza surgem da expressão clara de ação estrutural.

A influência de Torroja estendeu-se por todo o mundo espanhol e além, inspirando engenheiros que buscavam unir virtuosidade técnica com beleza formal. Seu cascas, embora exigente em execução, demonstrou que concreto armado poderia alcançar uma leveza e graça rivalizando com a melhor abóbada gótica.

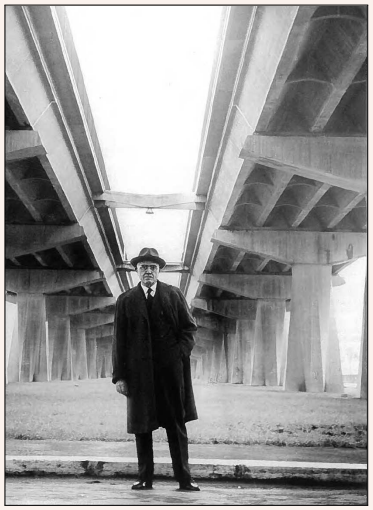
15.4.7 Pier Luigi Nervi (1891-1979)

Pier Luigi Nervi (Sondrio, 1891 - Roma, 1979), mostrado na Fig. 15.20, foi um engenheiro estrutural italiano e arquiteto amplamente considerado, juntamente com Robert Maillart, Eugène Freyssinet, e Eduardo Torroja, como uma das figuras mais influentes no desenvolvimento da construção concreto armado no século XX. O historiador arquitetônico Nikolaus Pevsner descreveu-o como o artista mais brilhante de nosso tempo. "Ele era um dos engenheiros mais criativos e influentes do século XX (Nervi, 1956a), educado e praticado como um *Ingegnere edile* Na Universidade de Bolonha. Depois de se formar em engenharia civil pela Universidade de Bolonha, em 1913, Nervi trabalhou para o *Società Anonima per Costruzioni Cementizie* Antes de estabelecer sua firma em 1920, fundando sua própria empresa em 1923, e mais tarde *Società Ingg. Nervi & Bartoli* (1932), através do qual ele serviu como designer e construtor – uma combinação incomum que lhe permitiu testar

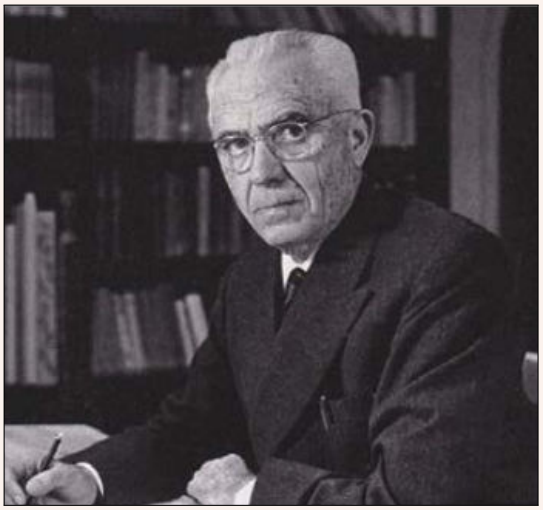
CÓPIA PARA REVISÃO

e refinar suas ideias inovadoras diretamente no local e deu a ele a intuição e o talento para alcançar projetos inovadores econômicos. Ele era realmente um *Progettista por excelência*.. Esta integração do design e construção era central para sua filosofia: A forma estrutural, ele insistiu, deve emergir das realidades dos materiais e da fabricação, não da geometria abstrata imposta sem considerar a construibilidade.

É prática comum na cultura italiana preceder o nome de uma pessoa pelo seu título*Dottore, Avvocato, Ragioniere, Architetto, Ingegnere*, etc.). Quando as pessoas se referiam a Nervi como *Architetto Nervi*Ele sempre os corrigia. "*Não, Ingegnere Nervi*" (Maier, 2007).



(a) (Lori, 2009)



(b) (Nervi, Neri et al., 2014)

Figura 15.20: *L'Ingegnere* Pier Luigi Nervi

Suas principais obras incluem o Estádio Berta (Stadio Artemio Franchi), em Florença (1930-32), os hangares de aeronaves em Orvieto e Orbetello (1935-42), os Salões de Exposições de Turim (1947-50), a Sede da UNESCO em Paris (com Breuer e Zehrfuss, 1950), Torre Pirelli em Milão (com Gio Ponti, 1955-59), e os palácios esportivos para as Olimpíadas de Roma 1960, incluindo o *Palazzetto dello Sport* e (não confundir com) *Palazzo dello Sport*.. Ele lecionou na Faculdade de Arquitetura de Roma de 1946 a 1961 e fez as palestras Charles Eliot Norton em Harvard em 1961-62.

Suas marcas eram formas curvadas e arcos elevando-se. Mas seus prédios eram fundamentalmente racionais, possuindo uma sensação de contenção. Ele não aprovava prédios extravagantes cujas estruturas eram muito elaboradas para o trabalho em questão; Ele procurou em vez disso criar edifícios razoáveis e diretos com um ar de simplicidade e economia. "A beleza não vem da decoração, mas da coerência estrutural", disse ele (The Baltimore Sun, 1979).

Inovações Técnicas e Integração Profissional Nervi habilmente combinou três aspectos da profissão: compreensão estrutural do fluxo de forças em uma estrutura, determinando

CÓPIA PARA REVISÃO

especificamente *isostático* Linhas[36] Mesmo para estruturas complexas; desenvolvimento de materiais inovadores de *ferrocemento*, que desempenhou um papel importante na construção de seu cascas; e técnicas de construção para reduzir o custo sem comprometer estética ou segurança.

As contribuições de Nervi se estenderam além do design para abranger inovações fundamentais na tecnologia da construção. Ele desenvolveu e patenteou *ferrocemento* (ferrocimento)Um compósito cimentício fino usando várias camadas de malha fina de aço pulverizada com argamassa de cimento, o que permitiu a criação de elementos de espessura mínima com notável resistência e plasticidade. Esta técnica, empregada pela primeira vez para paredes de armazéns, cascos de barcos e elementos arquitetônicos em grande escala, tornou-se a marca do seu trabalho pós-guerra, permitindo a pré-fabricação de formas curvas complexas que poderiam ser montadas no local. Ele também foi pioneiro no uso de elementos estruturais pré-moldados e sistemas de cofragem móveis, reduzindo drasticamente o tempo de construção e os custos mantendo os mais altos padrões de elegância estrutural.

O Engenheiro: Linhas isostáticas e compreensão estrutural No tempo de Nervi, os engenheiros dependiam de uma sólida compreensão da mecânica, complementada por testes. Nenhum computador ainda estava disponível, e os cálculos eram (pelos padrões modernos) relativamente elementares.

Seu sistema de *Ribbing isostático*, patenteado em 1949, costeletas de concreto alinhadas ao longo das linhas de principal momentos fletores, otimizando o uso do material enquanto produz os padrões distintivos de cofre visíveis em obras como a Fábrica Gatti Wool e o Palazzetto dello Sport. Nervi atribui Aldo Arcangeli, um dos engenheiros em seu escritório de design de Nervi e Bartoli, que sugeriu que as costelas de um laje deve seguir as linhas isostáticas de seu principal momentos fletores. Essas linhas dependem exclusivamente das condições de carga da estrutura, e Nervi ficou surpreso ao descobrir que limitando sua tarefa a interpretar um fenômeno puramente físico, ele poderia descobrir novas formas inesperadas e expressivas. As costelas laje colocadas ao longo das linhas isostáticas dos momentos são lindamente curvadas em plano (Nervi, 1956b).

As linhas isostáticas (não confundir com linhas de contorno) podem ser facilmente construídas através do seguinte algoritmo:

procedure ISOSTÁTICO ▷ Linhas isostáticas do enredo
  Inicializar $\Gamma, h, L, nLines, frac, vect, i$ ▷ Inicializar constantes
  for $Line \leftarrow 0$ to $nLines$ **do** ▷ Circuito no número de linhas
    $x_0 = -L/2 + Line \times L/frac;\ y_0 = 0.99 \times h/2$ ▷ Inicializar primeiro ponto
    $x(1) = x_0; y(1) = y_0$ ▷ Inicializar array
    $Inside \leftarrow$ `true`
    $k = 1$ ▷ Inicializar contador para Line

[36] Linhas isostáticas Defina as direções de um valor principal de um tensor da ordem 2 (como σ_{ij} ou M_{ij}) para visualizar sua trajetória em vigas, placas, ou outros elementos.

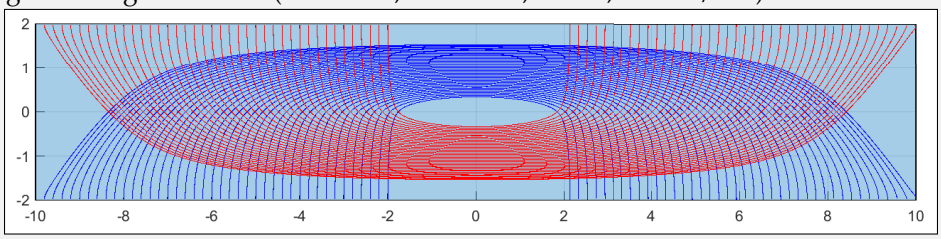
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
        while Inside = True do
            Compute σxx; σyy; τxy                    ▷ Computar componentes tensores
            T = Tensor(σxx τxy)                      ▷ Prepare tensão / tensor de momento
            [Vect, D] = eig(Tensor)                  ▷ Calcular normalizar/ordenar os autovetores
            V(:) = Vect(:, i)                        ▷ Extrair vetor (1o ou 2o eigenvector (C ou T)
            k = k + 1                                ▷ Contador de incrementos para Line
            x(k) = x(k − 1) + vect × V(1)            ▷ Determinar o próximo ponto
            y(k) = y(k − 1) + vect × V(2)            ▷ por um arco comprimento=vect
            if x, y, outside Γ then                  ▷ Verifique se ficamos dentro da superfície
                Inside ← false
            end if
        end while
        Plot(x,y)                                    ▷ Trace esta linha
    end for
end procedure
```

Onde

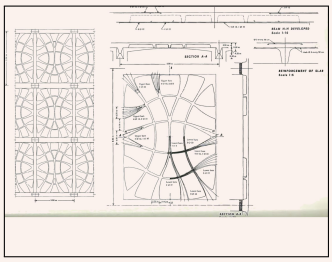
Γ	Volume do corpo ($h \times L$)
h	Altura
L	Comprimento
NLINHAS	Número de linhas isostáticas
Frac	Grande número para evitar começar em $x = \pm L/2$
Vect	Comprimento do arco incremental da linha isostática
i	Compressão ($i = 1$) ou tensão ($i = 2$)

Usando este algoritmo (MATLAB Código listado em §I.2.10Pode-se facilmente plotar as linhas isostáticas de uma viga sob carga uniforme (nlines=40, delta=100, i=1&2, vect=$h/100$).

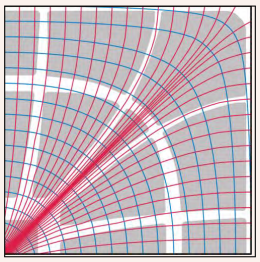


Na Fig. 15.21b, as linhas vermelhas representam os isostáticas correspondentes ao máximo principal momentos fletores, e as linhas azuis representam os secundários correspondentes ao mínimo principal momentos fletores (Halpern, Billington e Adriaenssens, 2013). Neste caso, ambos os pares de linhas foram gerados desde o início nós ao longo dos quatro limites. As concentrações de linhas indicam convergência das direções principais. O contorno cinza e branco mostra um plano aproximado do piso da Fábrica de Lã Gatti para ilustrar a correlação entre a isostática teórica e o padrão das costelas. A isostática secundária concêntrica produzida em torno do suporte pilar na parte inferior esquerda do trimestre laje reflete o raciocínio para colocar curvas concêntricas de reforço ao redor da cabeça pilar e verificar a colocação de Nervi da costela circundando o pilar. As costelas que emanam do centro pilar também mostram estreita correlação com a isostática primária gerada. Vários exemplos do projeto de telhado inspirado em isostático de Nervi podem ser encontrados em (Vitalis, 2021).

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Piso laje usando costelas isostáticas (Nervi, 1956b)



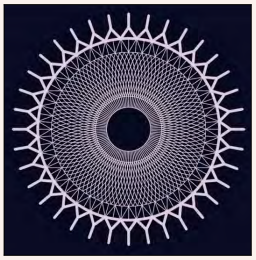


(b) Linhas isostáticas da Fábrica de Lã Gatti (Halpern, Billington e Adriaenssens, 2013)

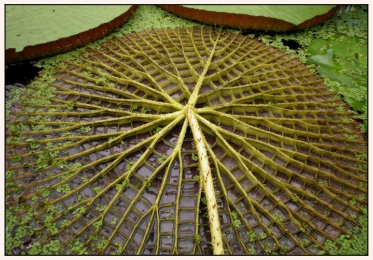
Figura 15.21: Exemplos de linhas isostáticas

Como a maioria dos italianos de sua geração, e na ausência do ainda-a-desenvolvido método dos elementos finitos, Nervi sempre considerou experimentação como o melhor método para aplicar ou testar os limites da teoria quando a teoria se mostrou inadequada para apoiar seu inovador Desenhos.[37] Trabalhar com modelos de teste em pequena escala era uma constante em seu trabalho de design; Ele os usou para "teste"e "tfraqueza"suas suposições não comprovadas. Figura 15.23a mostra um teste modelo do hangar Orvieto (Fig. 15.24b). Nervi constantemente empregou modelos reduzidos, testados em condições laboratoriais, para verificar o comportamento estrutural antes da construção – uma prática que complementava sua análise teórica com validação empírica. Nervi não só se baseava em testes de modelo com medidores deformação mas também na fotoelasticidade e teoria matemática.

Vale a pena mencionar que alguns viram no trabalho de Nervi a crescente ciência do *Arquitetura biomimética*, observando uma forte semelhança entre as linhas isostáticas e a venação natural das folhas ou a ramificação de árvores *Victoria Amazonica* (Vitalis, 2021) (Fig. 15.22).



(a) *Palazzetto dello Sport* Cúpula



(b) *Victoria Amazonica*

Figura 15.22: Nervi e arquitetura biomimética

[37] Muitos dos testes de Nervi foram realizados em ISMES (agora extintos)*Istituto Sperimentale Modelli e Strutture*), que foi pioneira em testes para represas (principalmente) e estruturas inovadoras.

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

O cientista material: Ferrocement Inovação O nome de Nervi está fortemente associado com *ferrocemento*, que ele foi pioneiro[38] como material viável para a construção de cofragens. Não é nada mais do que argamassa de cimento Portland reforçada por camadas bem espaçadas de redes de fibras contínuas ou malhas (como "fio de galinha"), como mostrado na figura 1. 15.23b.

Em vez de cofragem, o concreto foi aplicado com espátulas em uma malha de arame de qualquer forma, fixada a barras de apoio. Desta forma, concreto armado se rompeu não só da forma do esqueleto linear, mas também da geometria rígida de sua cofragem. O concreto derramado era perfeito, sua forma completamente independente. Nervi usou estes elementos muito finos, especialmente moldados extremamente custo-efetivo como elementos acabados, como cofragem, ou como fôrma perdida. O ferrocimento é particularmente adequado para construir superfícies e estruturas relativamente finas, duras e fortes em muitas formas (cascas de barco, telhados casca, tanques de água). Nervi também foi aclamado por usar o ferrocimento para construir barcos, embora ele certamente tenha sido precedido no século XIX por Lambot na França e Hollister nos Estados Unidos.

Assim, vemos como o gênio de Nervi combinou material, forma, construção e expressão arquitetônica economicamente. Suas formas estruturais eficientesCosteletas seguindo linhas de principais, moldadas pela ação da membrana, cantilevers diminuindo com a diminuição dos momentos... Demonstraram como a inovação tecnológica poderia impulsionar a expressão arquitetural.

O Construtor: Grandes Obras e Inovação de Construção Após a Segunda Guerra Mundial, a Itália empreendeu extensa reconstrução. Concreto era barato, aço escasso, trabalho abundante e historicamente habilidoso. Esta combinação, juntamente com a criatividade e engenhosidade de algumas figuras principais, resultou em algumas das estruturas mais icônicas do século XX. Esta era está bem capturada (Desideri et al., 2013 PDF).

Seus primeiros estádios municipais em Florença (1930-1932), mostrados em Figs. 15.24c e.. 15.24d, demonstrou o potencial de concreto armado Para os dramas cantilevers e a forma expressiva. Mas o trabalho maduro de Nervi alcançou seu caráter distinto através de seu desenvolvimento de ferrocimento e pré-fabricado elementos nervurados que poderiam ser produzidos em massa e montados no local. Essas técnicas permitiram a construção de superfícies curvas complexas com economia notável.

As salas de exposição em Turim (1948-1950), a sede da UNESCO em Paris (1953-1958, com Breuer e Zehrfuss), a Torre Pirelli em Milão (1956-1958 e Ponti), o Palazzetto dello Sport e Palazzo dello Esporte para as Olimpíadas de Roma 1960, e o Sala de audiências no Vaticano (1971) demonstram o alcance e a virtuosidade de Nervi. Os salões de Turim apresentam dramáticas superfícies onduladas montadas em unidades pré-fabricadas; O

[38] Na verdade, o ferrocimento foi inventado por dois franceses: Joseph Monier e Joseph-Louis Lambot (que construiu um barco com o sistema em 1848). Este foi o precursor de mais tarde "inventado"por François Hennebique.

CÓPIA PARA REVISÃO

Palazzetto dello Sport atinge uma cúpula que atravessa 60 metros através de um nervuras casca de elementos pré-moldados, seu interior uma força de força da expressão estrutural.[39]

Nervi defendeu a sinergia da construção modular, concreto armado, e elegância estrutural.. Argumentou que engenheiros, livres de preconceitos estilísticos, poderiam alcançar uma "verdade estrutural"inerentemente bela – não através da decoração aplicada mas pela expressão clara de como as forças fluem através do material. O trabalho de Nervi provou que economia, eficiência estrutural e beleza não eram objetivos competitivos, mas aliados naturais quando o projeto progride do engajamento honesto com materiais e forças.

Design Filosofia e Escritas Teóricas Os escritos teóricos de Nervi são tão significativos quanto suas obras construídas. Seu livro mais famoso, *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato* (1945) (Nervi, Neri et al., 2014), colocou uma questão fundamental sobre a natureza de projeto estrutural, buscando conciliar a divisão histórica entre as abordagens técnico-científica e intuitiva-artística para construir. Republicado em 1997 por iniciativa do arquiteto Aldo Rossi, que o chamou de "um dos poucos livros que sempre recomendei aos meus alunos", o trabalho defendeu um equilíbrio racional mas sensível entre proporção, cálculo, experimental observação, e sensibilidade estética.

Suas palestras de 1961 em Harvard, mais tarde publicadas como *Estética e Tecnologia em Construção* (Nervi, 2018), expandiu essas ideias, demonstrando através de seus próprios projetos como concreto pré-moldado e moldado no local poderia satisfazer sua demanda tripla de economia, correção técnica e satisfação estética. Em relação ao papel da intuição versus cálculo na concepção estrutural, Nervi escreveu em 1931 que os resultados numéricos obtidos através de fórmulas podem ser considerados apenas como parâmetros orientadores, a serem interpretados e avaliados pelo sentimento e intuição, Só faculdades capazes de avaliar o que não pode ser avaliado usando uma régua e escala" (Nervi, 2018, p. 16).. Ele insistiu ainda que a tarefa do designer estrutural é "inventar"uma estrutura primeiro, prefigurando-a como forma no espaço e só então calcular. Esta convicção de que a concepção intuitiva deve preceder a verificação matemática coloca Nervi em posição quadrada ao lado de Torroja na tradição dos engenheiros-artistas que viam a análise como uma ferramenta para o refinamento, em vez de geração de forma estrutural.

> . . . Gostaria de chamar a atenção dos arquitetos, engenheiros, críticos e todos os seguidores do maravilhoso campo da arquitetura uma realidade objetiva muitas vezes negligenciada, e mais frequentemente negada através de uma idealização formal e cultural enganosa O fato arquitetônico:

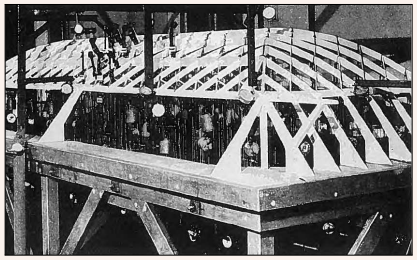
[39] O autor, enquanto estudava no ensino médio em Roma, teve a sorte de competir em jogos de handebol dentro do Palazzetto dello Sport. Em pé naquela quadra, sob a cúpula nerviiana em ascensão, não se podia deixar de sentir a estrutura como uma presença viva – as costelas irradiando acima como abóbada de alguma catedral futurista, a luz filtrando através do perímetro vidrado, o Todo o espaço de alguma forma, tanto monumental quanto íntimo. Essa experiência juvenil deixou uma impressão indelével: Aqui estava a prova de que a engenharia poderia aspirar à arte, essa estrutura poderia mover o espírito tão certamente como qualquer escultura ou sinfonia. O Palazzetto permanece, para o autor, o edifício contra o qual todos os outros são medidos.

CÓPIA PARA REVISÃO

> materiais, estática, tecnologia de construção, eficiência econômica e necessidades funcionais são o vocabulário do discurso arquitetônico.
>
> É impossível elevar tal fala ao nível da poesia (arquitetura) ou até mesmo corrigir prosa (boa construção) sem uma compreensão perfeita deste vocabulário, e das regras de gramática e sintaxe (técnica) com as quais eles devem ser compostos.
>
> (Nervi, 1963)

Em termos de cálculos, infelizmente não sobrevive muito; No entanto, seu trabalho é amplamente ilustrado por muitos autores (Nervi, 1956b; Greco, 2008; Nervi, 2018; Lori, 2009; Nervi, 1963; Chiorino e Olmo, 2010), e seus arquivos estão divididos entre o museu MAXXI em Roma e a Universidade de Parma (CSAC, *Centro Studi e Archivio della Comunicazione*).

Algumas das estruturas mais icônicas de Nervi são mostradas na figura. 15.24.. Seus livros *Estruturas* (1956) e *Estética e Tecnologia em Construção* (1965) articulam uma filosofia na qual a beleza emerge naturalmente da expressão honesta da lógica estrutural e do processo de construção.



(a) Teste de modelo do hangar Orvieto (Lori, 2009)



(b) Ferrocement

Figura 15.23: Nervi: Engenheiro estrutural e material

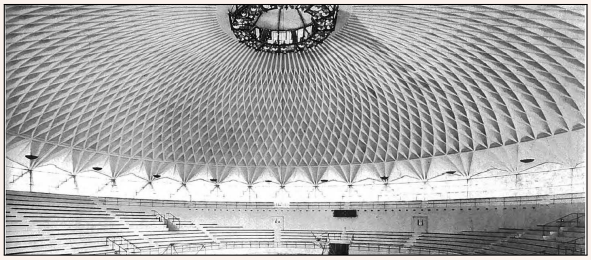
15.4.8 Riccardo Morandi (1902-1989)

Após a Segunda Guerra Mundial, a Itália entrou em um frenesi de reconstrução. Combinado com a criatividade histórica e o senso estético dos italianos, este esforço produziu algumas estruturas icônicas – principalmente, se não só, no concreto, como era muito mais barato do que o aço, e trabalho relativamente barato era abundante.

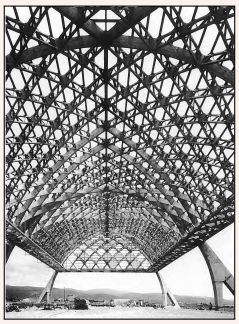
Riccardo Morandi é mais conhecido por seu uso inovador de pontes reforçadas e concreto protendido, assim como pontes paradas por cabo.

Possivelmente inspirado pela Ponte Bixby Creek (Fig. 15.25a), Morandi projetou a Ponte Paul Sauer na África do Sul (Fig. 15.25b). Ambos são considerados estruturas icônicas em seus respectivos países.

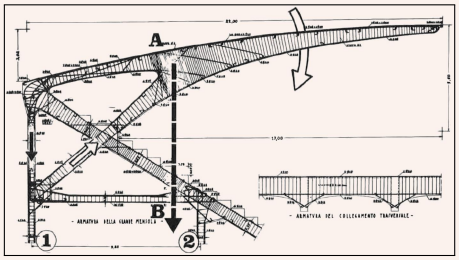
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Dentro da *Palazzetto dello Sport* (Nervi, 1963)



(b) Orvieto hangar (Lori, 2009)



(c) Estádio de Florença (Nervi, 2018)



(d) Estádio de Florença (Nervi, 2018)

Figura 15.24: As estruturas icônicas de Nervi

Mais tarde, Morandi abraçou o projeto de estruturas suportadas por cabo, e seu nome está fortemente associado com três pontes de design quase idêntico: a Ponte General Rafael Urdaneta na Venezuela, o Viadotto Polcevera cruzando a cidade de Gênova, e a Ponte Wadi el Kuf na Líbia. Essas pontes podem ter sido "estéticamente"agradável (nem todos concordam), mas faltaram redundância e exigiram manutenção diligente para evitar a corrosão dos cabos. A ponte de Genoa (na verdade um viaduto) caiu em agosto de 2018, causando 43 mortes. Ironicamente, o viaduto de substituição foi projetado por Renzo Piano, um conhecido arquiteto genovês que co-projetou o Centro Pompidou.

Outra estrutura conhecida (embora talvez não "iconic") por Morandi é o par de hangares Alitalia no aeroporto Fiumicino, em Roma, visível para todos os viajantes. Cada hangar é composto por 19 cabos catenários protendidos que suportam o telhado. Em cada extremidade, um concreto protendido viga suporta estes cabos. Finalmente, esses membros estão ligados às paredes por duas séries de tendões concreto protendido que se espalham dos pilares (Morandi e Piccarreta, 1972). Este hangar tem grande semelhança com o telhado catenário do Aeroporto de Dulles, concebido por Eero Saarinen (ver Capítulo) 39.1). A propósito, Morandi era engenheiro e Saarinen arquiteto.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Ponte Bixby Creek (Panhorst, 1932)



(b) Ponte Paul Sauer (Morandi, 1953)

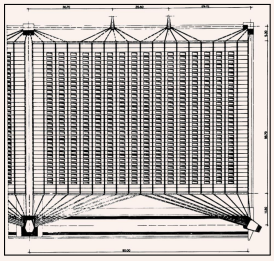


(c) Ponte General Rafael Urdaneta (1958)



(d) Viadotto Polcevera, Gênova (Morandi, 1963)





(e) hangar Alitalia, Fiumicino (Morandi, 1962)

Figura 15.25: Riccardo Morandi

15.4.9 Christian Menn (1927-2018)

Através de Maillart, já vimos como um engenheiro suíço pode combinar poderosamente eficiência estrutural com estética. Ele foi seguido por dois notáveis compatriotas: Christian Menn e Othmar Ammann.[40]

Menn é, sem dúvida, o mais eminente engenheiro de ponte do século XX. Mais de 50 anos ele implantou inovação, imaginação, engenharia estrutural sólida "sentimento gut" e mais importante sensibilidade estética. Ele praticava enquanto ensinava no ETH (antes frequentado por Maillart). Uma pesquisa de seu trabalho está resumida em (Brühwiler, 2010).

O domínio de Menn na análise estrutural (concreto protendido ponte) é exibido em seu livro (Menn, 1990). Nele, Menn implica que uma ponte devidamente projetada que explique os custos da economia, ciclo de vida e construção será *de fato* Estética.[41] Um estudo interessante de sua famosa ponte Sunniberg (Fig. 15.26) é dado por Honigmann e Billington, 2003 .

Menn discute o papel da estética em (Menn, 1996):

[40]Othmar Ammann projetou a Ponte George Washington (§39.4), a Ponte Verrazano-Narrows, e a Ponte Bayonne.

[41]Per Vitruvius, se *Firmitas* e.. *utilitas* As exigências são cumpridas, então *venustas* Eu vou segui-lo.

CÓPIA PARA REVISÃO

> Pontes devem satisfazer requisitos funcionais específicos e restrições, como folga e horário de construção. Além desses requisitos, os objetivos de design mais importantes são: segurança estrutural, manutenção, economia e elegância.
>
> Critérios que definem segurança estrutural e manutenção são especificados em padrões de projeto, que refletem o atual estado da arte dos aspectos técnicos do design de ponte. Segurança estrutural e manutenção são alcançadas por engenheiros que trabalham principalmente como artesãos, isto é, através da aplicação lógica de princípios bem estabelecidos. O custo de uma determinada ponte pode ser estimado com base na experiência e em estudos de conceitos alternativos. A economia depende principalmente do conceito de design. A elegância se relaciona principalmente com o impacto no meio ambiente e beleza das próprias estruturas. Embora seja impossível quantificar a elegância racionalmente, a interação entre os aspectos técnicos e visuais do projeto da ponte implica que a elegância também é regida por certos critérios. Em particular, elegância pode ser julgada objetivamente com uma sensibilidade bem treinada para a forma visual.
>
> . . .
>
> Os aspectos estéticos do design de ponte são mais importantes do que comumente admitido. Estruturas de engenharia geralmente produzem impacto significativo no ambiente natural e humano. Os usuários de pontes também produzem efeitos novos e geralmente desagradáveis no ambiente, como ruído e gases de escape. Por estas razões, as pontes são frequentemente consideradas negativas na sociedade.
>
> (Menn, 1996)



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85195985

Figura 15.26: Ponte Sunniberg de Menn

15.4.10 Fazlur Rahman Khan (1929-1982)

Fazlur Rahman Khan (1929 - 1982), nascido em Dhaka (então Índia Britânica, agora Bangladesh), foi um engenheiro estrutural e arquiteto Bangladesh-Americano que foi possivelmente, depois de Nervi, o maior engenheiro estrutural da segunda metade do século XX. Chamado de "pai dos projetos tubulares"e "Einstein da engenharia estrutural", Khan revolucionou o projeto e construção de arranha-céus e design de prédios altos Na

CÓPIA PARA REVISÃO

segunda metade do século XX. Ele desenvolveu sistemas estruturais inovadores, incluindo o tubo emoldurado, o tubo trespassado e o tubo empacotado, que possibilitaram alturas de construção sem precedentes com maior eficiência material e arquitetura flexibilidade, tornando os edifícios supertall economicamente viáveis, permanece fundamental para a construção de arranha-céus hoje em dia, transformou a lógica estrutural dos arranha-quedistas, e tornou possível os edifícios super-altais que definem as linhas urbanas contemporâneas (Fig. 15.27).

Depois de receber seu Bacharel em Engenharia Civil pela Ahsanullah Engineering College (atual Universidade de Engenharia e Tecnologia do Bangladesh) em Dhaka, ele viajou para os Estados Unidos em 1952 com uma bolsa Fulbright. Na Universidade de Illinois em Urbana-Champaign, ele obteve dois mestrados (em engenharia estrutural e mecânica teórica e aplicada) e um Ph.D. em engenharia estrutural em apenas três anos. Após um breve retorno ao Paquistão como engenheiro executivo da Autoridade de Desenvolvimento Karachi, Khan se juntou ao escritório de Skidmore em Chicago, Owings & Merrill (SOM) Em 1955, onde passaria toda a sua carreira, tornando-se sócio em 1966 e um americano naturalizado. Cidadão em 1967. Chicago, berço do arranha-céus, tem tradicionalmente rivalizado com Nova Iorque para a construção de edifícios altos e forneceu o ambiente ideal para as inovações de Khan. Ao contrário da maioria dos engenheiros anteriormente discutidos (com exceção de Eiffel), Khan projetado principalmente em aço.

Suas principais obras incluem o Centro John Hancock de 100 andares (1969) e a Torre Sears de 110 andares (agora Torre Willis, 1973)—o último que detém o título de edifício mais alto do mundo por mais de duas décadas. Khan foi eleito para a Academia Nacional de Engenharia em 1973, recebeu doutorado honorário da Universidade Northwestern, Universidade Lehigh, e ETH Zurique, e foi nomeado *Notícias de Engenharia-Record*É o Homem do Ano em 1972.

O Prêmio para Inovação Tubular e Altura Quando Khan começou sua carreira na SOM no final dos anos 50, as opções disponíveis para designers de edifícios altos eram surpreendentemente limitadas. O desafio fundamental dos edifícios altos é a resistência lateral à cargaResistindo aos momentos de derrubamento e cisalhamentos induzidos pelo vento e terremotos. O aço rígido convencional pórtico—no qual pilares espaçado ao longo do plano de chão carregam tanto a gravidade quanto as cargas laterais – tinha dominado a construção de arranha-céus desde o final do século XIX. Construção rígida tradicional pórtico, com conexões que resistem ao momento entre pilares e vigas, torna-se cada vez mais ineficiente à medida que os prédios crescem. Os tamanhos dos membros aumentam rapidamente, e o interior pilares prolifera. No entanto, à medida que os edifícios cresciam mais altos, a quantidade de aço necessária para resistir às forças do vento aumentou desproporcionalmente, criando o que Khan chamou de "premium for height"dramaticamente com altura de construção sob enquadramento convencional, tornando edifícios super-altais proibitivamente caros.

A visão revolucionária de Khan era reconhecer que o rígido pórtico não era o único sistema estrutural adequado para edifícios altos e reconcetualizar todo o perímetro do edifício

CÓPIA PARA REVISÃO

como um tubo estrutural – um cantilever oco subindo do chão, com O exterior próximo ao espaço pilares conectado por um espaçamento profundo vigas formando um tubo rígido que resiste a cargas laterais através de cantilever e ação pórtico. Movendo os elementos de resistência lateral primária para o perímetro do edifício, ele concebeu a estrutura como um tubo oco tridimensional cantilevered da fundação – análogo, como ele mais tarde observou, ao bambu que cresceu em seu nativo Bangladesh. Este conceito tubular, implementado pela primeira vez no 43-story DeWitt-Chestnut Apartments em Chicago (1963-66) e mais tarde realizado no prédio de apartamento DeWitt-Chestnut (1963) e o edifício Brunswick 43-story (1965), usado próximo perímetro espaçado pilares conectados por um deep spandrel vigas para criar um rígido exterior "pele" que simultaneamente serviu como estrutura, força do vento, e expressão arquitetônica, enquanto libertando o interior para planos flexíveis de chão e drasticamente melhoraram a eficiência estrutural. Concentrando a resistência lateral no perímetro, o tubo libertou espaços interiores da floresta de pilares exigido pelo enquadramento convencional.

Sistemas Estruturais e Grandes Obras Khan desenvolveu várias variantes do conceito de tubo para atender diferentes faixas de altura e requisitos funcionais e relações sistemáticas entre a altura da construção e o sistema estrutural ideal – a partir de rígido pórticos para edifícios de baixo edifício através cisalhamento paredes, com suporte pórticos, e várias configurações de tubos para aumentar as alturas. Este conceito de "premium for height"forneceu aos designers uma orientação racional para selecionar sistemas estruturais baseados em eficiência, ao invés de precedentes. O *Tubo emoldurado*, exemplificado pelo edifício DeWitt-Chestnut e depois as torres do World Trade Center em Nova York (projetado por Leslie Robertson usando os princípios de Khan), provou ser eficiente para edifícios de até aproximadamente 60 andares.

Para o Centro John Hancock de 100 andares (1965-69), Khan introduziu o *Tubo de treliça* (ou tubo com suporte), em que membros diagonais, os icônicos X-braces exteriores do edifício, ajustam o tubo contra cisalhamento defasagem e reduzem drasticamente as exigências de aço. O Centro Hancock usou apenas 145 Kg de aço por metro quadrado, comparado com 206 kg/m^2 Para o Empire State Building e 275 kg/m^2 Para o Chase Manhattan Plaza. Para a Torre Sears, Khan inventou o *Tubo empacotado*, composto por nove tubos quadrados de diferentes alturas agrupados juntos, o que proporcionou uma rigidez excepcional ao mesmo tempo em que permitiu que o perfil do edifício retrocedesse enquanto ele rosa—provando que "eficiente torres já não tinha que ser como caixa; A Torre Sears de 110 andares (1973, agora a Torre Willis), empregando nove tubos embalados de diferentes alturas, demonstrou o potencial do sistema para supertarl Construção.

Khan também foi pioneiro em sistemas compostos de aço-concreto e o uso de concreto leve na construção de arranha-céus, e ele foi um dos primeiros a empregar computadores para análise estrutural e verificação do projeto. No entanto, ele era provavelmente o último grande designer de arranha-céus que não confiava significativamente no uso de computadores; As coisas estavam prestes a mudar.

A seguinte citação capta sua abordagem sistemática:

CÓPIA PARA REVISÃO

> No entanto, a construção de edifícios altos só pode ser economicamente atraente se os engenheiros estruturais puderem ter uma compreensão abrangente dos comportamentos estruturais de vários sistemas, por um lado, e do sentido prático dos problemas de construção sobre O outro.
>
> . . .
>
> Uma estrutura que usa o mínimo de aço pode levar a um edifício acabado muito caro porque não foi dada consideração a nenhum dos fatores não estruturais que afetam o prédio terminado. Por outro lado, uma estrutura que é projetada apenas para se adequar às 'Visões' estéticas do arquiteto e as necessidades de todos os outros ofícios é obrigado a contribuir para a inferioridade e o custo excessivo do edifício acabado. Em algum lugar entre estes dois extremos está o sistema estrutural ideal para qualquer projeto em particular e é deixado até a prontidão e participação ativa do engenheiro para desenvolver o sistema ótimo. A experiência mostrou que a maioria das estruturas de construção pode ser classificada em seis grandes categorias:
>
> a Estruturas simplesmente conectadas
> b Estruturas semi-rígidas
> c Estruturas rígidas
> d Estruturas com cisalhamento-treliças
> e Estruturas com interação pórtico e cisalhamento-treliças
> f Estruturas rígidas tipo caixa
>
> i Exteriores bem espaçados
> ii Diagonais bem espaçadas como paredes exteriores
> iii Otimismo pilar-diagonal-spandrel para paredes exteriores
>
> (Khan, 1965)

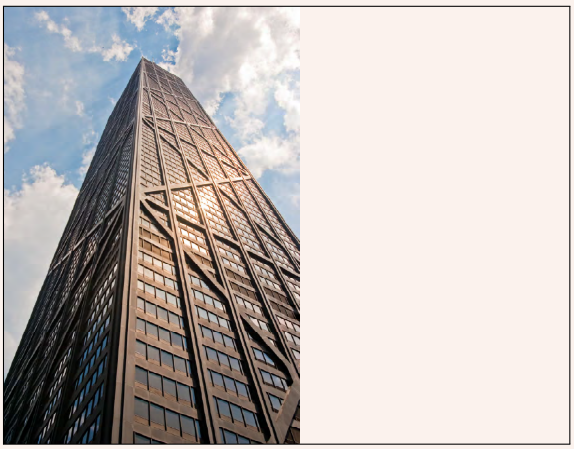
Design Filosofia e Colaboração Além de suas inovações técnicas, Khan foi distinguido pela sua abordagem da relação entre engenharia e arquitetura. Sua célebre parceria com o arquiteto Bruce Graham na SOM exemplificava sua crença de que a estrutura deveria ser o princípio organizador do projeto arquitetônico, não apenas uma estrutura escondida. Khan possuía o que Graham descreveu como "uma compreensão intuitiva do comportamento estrutural-- ele uma vez comentou, "Quando penso em design, me coloco no lugar de um prédio inteiro, sentindo todas as partes. Em minha mente, visualizo o tensões e contorço um prédio que sofre.' No entanto, ele insistiu que a virtuosidade técnica deve servir a propósitos humanos mais amplos: "O homem técnico não deve se perder em sua própria tecnologia; Ele deve ser capaz de apreciar a vida, e a vida é arte, drama, música, e o mais importante, as pessoas.'

Sua integração da lógica estrutural com o planejamento arquitetônico, os interiores livres de tubos e placas flexíveis de piso, ampliou a colaboração entre engenheiro e arquiteto que produz os melhores edifícios altos. Khan também foi um pioneiro no computador auxiliado análise estrutural, reconhecendo precocemente o potencial da computação digital para analisar os complexos, sistemas altamente indeterminados de edifícios altos. Esta visão humanista estendeu-se a suas atividades de ensino no Instituto de Tecnologia de

CÓPIA PARA REVISÃO

Illinois, onde ele trabalhou com estudantes para desenvolver conceitos - como o tubo preso em concreto - que só seria realizado em forma construída anos depois.

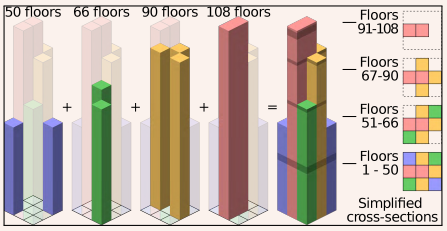
Khan morreu de repente em 1982 aos 52 anos enquanto trabalhava no projeto do Terminal Hajj na Arábia Saudita, cortando uma carreira de extraordinária criatividade, mas seus sistemas estruturais continuam a moldar as linhas do céu em todo o mundo, das Torres Petronas em Kuala Lumpur para Burj Khalifa em Dubai, o último representando, como um comentarista observou, a expressão final de sua filosofia de design audaciosa e leve. Medalha Khan Lifetime Achievement em sua honra. Levou quase 50 anos para seu papel de referência em edifícios altos ser atualizado por Baker, Skidmore et al., 2013 Para as torres do século XXI.



(a) O X-bracing externo do Edifício John Hancock



(b) Torre Willis



(c) Módulos da Torre Willis

Figura 15.27: Os edifícios icônicos de Khan

15.4.11 O Progettisti Comparado: Construtores de Designer e seus Materiais

Os engenheiros perfilados neste capítulo compartilham uma característica distintiva: Eles não eram apenas designers, mas também *Construtores*Empreendedores que possuíam ou controlavam empresas de construção, permitindo-lhes experimentar novas técnicas e materiais de maneiras que os engenheiros raramente conseguiam. Esta integração

CÓPIA PARA REVISÃO

do projeto e construção, encarnada no termo italiano *Progettista*, era o centro de suas conquistas.

15.4.11.1 Eiffel e Metal

A companhia de Gustave Eiffel, *Compagnie des Établissements Eiffel*Especializada em estruturas pré-fabricadas de ferro e aço. A empresa fabricava componentes em oficinas com alta precisão, então os transportava e reunia no local. Uma abordagem industrializada que permitia uma construção rápida e econômica de pontes, torres e prédios. A própria Torre Eiffel foi pré-fabricada fora do local e montada com uma velocidade notável. O uso da Eiffel de componentes padronizados e aparafusados e sua ênfase na modularidade criaram o terreno para a construção moderna de aço.

15.4.11.2 Nervi e Ferrocement

Pier Luigi Nervi fundou *Nervi & Bartoli* em 1932, através do qual desenvolveu e aplicou o ferrocimento como material prático de construção. Seu controle sobre o projeto e execução permitiu-lhe inovar sem depender de empreiteiros externos, garantindo que suas ideias para estruturas finas cascas e nervuras poderiam ser totalmente realizadas. Os elementos de ferrocimento pré-fabricados usados nos Salões de Exposições de Turim e no Palazzetto dello Sport foram fabricados por sua própria empresa, demonstrando a integração da inovação material, projeto estrutural, e economia de construção.

15.4.11.3 Roebling e Cabos

John Roebling (1806–1869), embora não discutido em profundidade neste capítulo, merece ser mencionado como o pioneiro das pontes de suspensão da corda. A companhia dele, *John A. Roebling's Sons Company*, ambas as pontes projetadas e fabricados os cabos de arame usados neles – uma integração vertical que permitiu Roebling para manter o controle rigoroso sobre a qualidade do material. A Ponte de Brooklyn (1883), concluída após a morte de Roebling por seu filho Washington, demonstrou o potencial de cabos de corda para estruturas de suspensão de longo alcance e estabeleceu o paradigma para o design moderno da ponte suspensa.

15.4.11.4 Linhas comuns

Vários padrões emergem dessas comparações:

Companhia como laboratório. Cada engenheiro usou sua firma como uma plataforma para experimentar e empurrar os limites do que poderia ser alcançado com seu material escolhido, Eiffel com ferro e aço, Nervi com ferrocimento, Roebling com corda de arame.

Envolvimento direto na construção. Todos os três estavam profundamente envolvidos

CÓPIA PARA REVISÃO

no processo de construção real, que lhes deu conhecimento íntimo de como seus projetos seriam construídos e permitiu-lhes manter o controle de qualidade.

Integração de projeto e engenharia. A capacidade de projetar e construir sob a mesma empresa permitiu que esses engenheiros fundissem aspectos estéticos e funcionais perfeitamente, resultando em estruturas que eram tanto visualmente impressionantes quanto estruturalmente sonoras.

Dominância material. Cada um tornou-se o principal praticante de seu material estrutural escolhido, desenvolvendo técnicas e aplicações que outros adotaram mais tarde e refinaram.

Este padrão do designer-construtor-empreendedor, enquanto menos comum hoje dada a separação de design e construção na prática moderna, permanece o modelo para alcançar a integração da estrutura e arquitetura que caracteriza as maiores obras de engenharia estrutural.

15.5 Morfogênese estrutural: Figuras-chave

Nas páginas seguintes, você encontrará as figuras-chave que ajudaram a estabelecer o que poderia ser chamado de *morfogênese estrutural*:. a ideia de que a forma estrutural pode ser gerada por restrições, em vez de escolhida pelo sabor. Aqui, morfogênese (literalmente, "fazer de forma"significa o processo pelo qual a geometria emerge das demandas de carga, condições de suporte, limites materiais, estabilidade e construcibilidade. Estes engenheiros e arquitetos aprenderam a "deixar a estrutura falar", seja através de correntes suspensas e modelos funiculares, membrana e experimentos casca, estudos de tensão-rede, ou posterior pesquisa computacional de formas. O que você verá é que muitas formas celebradas não foram simplesmente inventadas; Eles eram *descoberto* como configurações de equilíbrio nas quais forças, materiais e geometria se estabelecem em uma coerente – e muitas vezes elegante – por todo.

Engenheiros e arquitetos são mais confortáveis com estruturas que podem ser matematicamente descritas: uma reta viga, um arco (circular, parabólico, ou catenária), ou um casca definido por superfícies quadrículas.[42] Não só estas formas são "agradáveis", mas também fazem a busca por uma solução matemática tratável.

Mas podemos procurar uma superfície igualmente agradável que atenda a dois critérios: (a) apelo estético, e (b) solidez estrutural?

Esta seção discute a busca por tais formas de pesquisa por engenheiros notáveis. Estudos

[42]Como cone, cilindro, elipsoide, cone elíptico, cilindro elíptica, hiperbolóide elípitico, parabolóide, cilindro hiperbólico, parabolióide hiperbótico, paraboloide, esfera e esferóide.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

de Boller e D'Acunto, 2021; Boller e Schwartz, 2020 recentemente, abordaram esta questão examinando o trabalho de Frei Otto, Isler e Musmeci (Tabela 15.5).

Tabela 15.5: Achadores de formulários

Catenária		
Huygens	Tensão	Fio pendurado
Poleni	Compressão	St. Cúpula de Peter
Gaudí	Compressão	Sagrada Família
Saarinen	Compressão	St. Louis Arch
Membrana		
Isler	Compressão	Casca telhados
Musmeci	Compressão	Ponte Basento
Frei Otto	Tensão	Estádio de Munique

15.5.1 Catenária

Historicamente, o primeiro problema de "forma-encontrar" foi a busca pela forma – a equação matemática descrevendo – um cabo pendurado entre dois pontos. Embora finalmente uma equação matemática tenha sido encontrada, a história dos estudos catenários no final do século XVII é fascinante para o leitor moderno. Foi um impulso para o desenvolvimento do cálculo por Leibniz e os Bernoullis.

É uma história sobre competitividade (de três figuras imponentes), ego (Leibniz querendo provar a supremacia de seu cálculo), comunicações secretas (extenso uso de cifras), correspondência privada (entre Leibniz e Huygens), ciúme (entre o Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli, pressão de publicação (pelo editor do *Acta Eruditorum*[43]), e muito mais.

Além disso, era um "amor de família", como todos os protagonistas estão conectados. Huygens era o mentor de Leibniz, que foi conselheiro de Jakob Bernoulli, que era irmão de Johann Bernaulli, pai de Daniel Bernouli e conselheiro de Euler.

Para detalhes analíticos, consultar §30.3.3

15.5.1.1 Poleni (1683-1761)

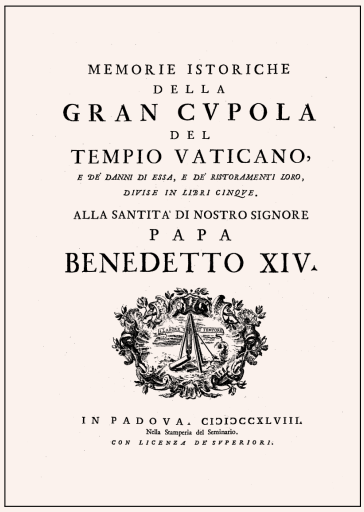
O primeiro exemplo conhecido de busca de formulários *Aplicação* foi de Giovanni Poleni, que foi convidado para investigar rachaduras em St. A cúpula de Pedro em Roma (§4.4.3-Fig. 15.28a).

[43] O principal jornal científico da Europa na época.

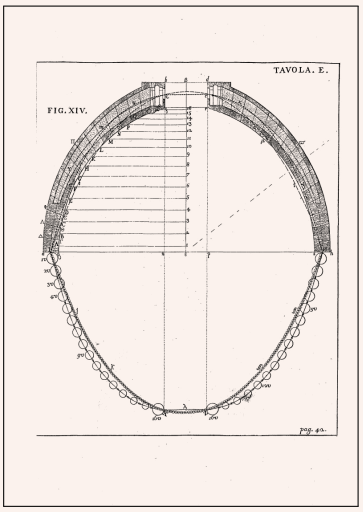
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Após uma investigação inicial dos chamados "três matemáticos", Poleni foi encarregado de apresentar um relatório. Nele, ele avaliou a estabilidade da cúpula cortando-a em 50 cortes e comparando a forma de cada fatia com a de uma catenária invertida. Sabe-se que um cabo suspenso carrega tensão pura (Poleni, 1748) (Fig. 15.28b).


MEMORIE ISTORICHE
DELLA
GRAN CVPOLA
DEL
TEMPIO VATICANO,
E DE' DANNI DI ESSA, E DE' RISTORAMENTI LORO,
DIVISE IN LIBRI CINQVE.
ALLA SANTITA' DI NOSTRO SIGNORE
PAPA
BENEDETTO XIV.
IN PADOVA. CIↃIↃCCXLVIII.
Nella Stamperia del Seminario.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

(a) Relatório de Poleni



(b) A comparação de Poleni de uma fatia de cúpula com uma catenária

Figura 15.28: A investigação de Poleni sobre St. A redoma de Peter está rachando (Poleni, 1748)

15.5.1.2 Antoni Gaudí (1852-1926)

O exemplo mais saliente de projeto estrutural baseado em escalar modelos teve que esperar alguns séculos, até o projeto de Gaudí do *Sagrada Família* em Barcelona no início de 1900. Como já era bem conhecido, inverter uma catenária (a forma assumida por um cabo flexível sob seu próprio peso) produz um *Perfeito* arco sob compressão pura (Huerta, 2006).

> A linha reta pertence aos homens, a curvada a Deus.
>
> Atribuído a Antoni Gaud(Totalmente citado, nenhuma fonte primária verificada)

Gaudí embarcou em formas para a catedral construindo um modelo de escala *Catenóides* (cascas obtido girando uma curva catenária sobre um eixo), como mostrado na figura. 15.29a.. Este foi realmente um substituto muito inteligente para um problema de outra forma complexo. Observamos que, embora muitos tenham explorado a forma de uma única catenária, Gaudí pode ter sido o primeiro a explorar uma assembleia de catenárias onde alguns estão ligados a outros. Figura 15.29b mostra um modelo de gesso da catedral onde a nave alta é característica de uma catenária.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Modelo catenoide de Gaudí para a Sagrada Família (Dragicevic e Jansen, 2012)



(b) Modelo de gesso

Figura 15.29: A Sagrada Família de Gaudí

15.5.1.3 Eero Saarinen (1910-1961)

Eero Saarinen foi um arquiteto que se aproveitou da ajuda de engenheiros estruturais para projetar estruturas de referência. Ele combinou sua sensibilidade formal arquitetônica com os requisitos científicos e técnicos necessários para realizar obras inovadoras e originais (Rega, 2013 PDF). Ele projetou duas estruturas de referência nos Estados Unidos, ambas inspiradas na catenária: (a) Aeroporto de Dulles (analisado no Capítulo 39.1); e (b) o Arco da Porta de St. Louis.

A visão formal do arquiteto foi possível pelas estritas regras da matemática e mecânica, segundo as quais a forma ideal de um arco destinado a transferir seu próprio peso para o solo sem tração tensões é representada pela invertida Catenária de equilíbrio.

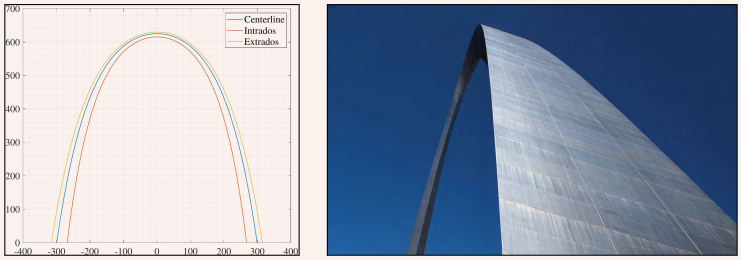
Consciente de suas limitações em análise estrutural, Saarinen procurou a ajuda de Hannskarl Bandel para obter a forma final do arco. Quando Saarinen tentou demonstrar sua forma desejada com uma corrente suspensa em suas mãos, ele não conseguiu alcançar o efeito levemente alongado, "'espero"' que ele queria. Bandel pediu a corrente, retornou em poucos dias, e produziu a curva de Saarinen substituindo alguns dos elos de tamanho constante por links variáveis,[44] mudando assim o peso, a distribuição do peso e a forma. Ao avaliar a resistência do arco de 630 pés ao vento, Bandel determinou que ele tinha que adicionar mais peso aos primeiros 300 pés do arco para baixar o centro de gravidade. Isso exigiu 25.980 toneladas de concreto.

O arco tem 625 pés de altura por 600 pés de largura em sua base. A seção transversal é um triângulo equilátero, e a área transversal diminui linearmente com a altura. Os lados correspondentes diminuem de 54 pés na base para 17 pés no topo (Fig. 15.30a). Os cálculos

[44] Exame de perto da Fig. 15.28b Parece mostrar contas de tamanho variável no trabalho de Poleni para St. O cofre do Peter.

CÓPIA PARA REVISÃO

das dimensões do arco estão longe de ser simples[45] (MATLAB O código está listado no apêndice I.1.2), e na verdade foi esta notável interação entre um arquiteto e um engenheiro estrutural que tornou isso possível.



(a) Dimensões (b) O Arco

Figura 15.30: O Arco da Porta de Saarinen

15.5.2 E Membranas

Enquanto Gaudí e Saarinen experimentaram curvas de catenária para determinar a forma perfeita de um telhado ou um arco, Frei Otto, Isler e Musmeci experimentaram com superfícies... o primeiro em tensão, os outros em compressão.

15.5.2.1 Frei Paul Otto (1925-2015)

Frei Paul Otto era um arquiteto alemão versátil *e.*. Engenheiro estrutural. Ele trabalhava em formas de busca para superfícies de membranas de tração (Rasch e Otto, 1996), construção ramificada (principalmente em compressão) (Ap e Faia, 2018) (Fig. 15.31a), e a análise das membranas suspensas (tensão) (Otto, Trostel e Schleyer, 1973) (Fig. 15.31b).

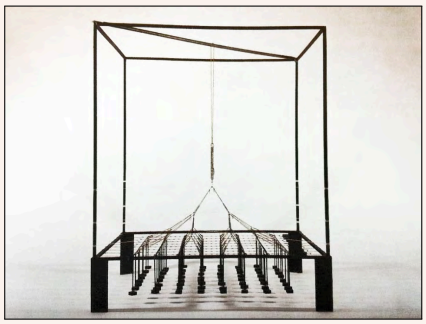
Otto não era apenas um perito experimentalista e arquiteto, mas estava igualmente à vontade com a complexa mecânica e matemática associada com a análise analítica de estruturas de membranas de tração (Fig. 15.31c).

15.5.2.2 Heinz Isler (1926-2009)

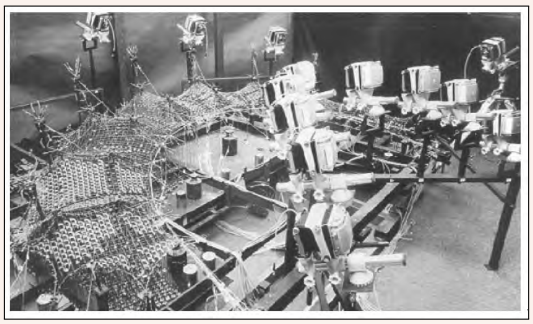
Esta abordagem foi seguida pelo engenheiro suíço Heinz Isler (Chilton e Isler, 2000), que projetou *Natural* (i.e., não está definido analiticamente) cascas. Em seu método de "membrana livre de suspensão", Isler criou formas por tecido embebido livremente; então, para aumentar o rigidez do casca, ele dobrou suas bordas com base em sua própria experiência. Ele endureceu os modelos ou congelando-os ao ar livre em tempo frio ou adicionando uma mistura de cimento. Finalmente, ele os escalou e reproduziu sua geometria funicular (Brew, 2007). Isler também usou cálculos simples, baseados no

[45] Cálculos, envolvendo funções hiperbólicas, foram levados para a sexta casa decimal, sem o benefício das calculadoras e computadores modernos.

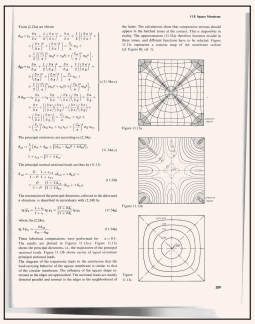
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Estudo de estrutura ramificada



(b) Testes de modelo do Estádio de Munique



(c) Análise da membrana de tração (Otto, Trostel e Schleyer, 1973)

Figura 15.31: Frei Otto

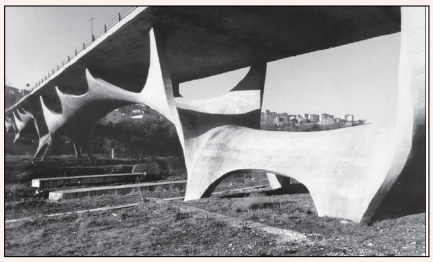
pressuposto de que não existe momento fletor, para estimar a magnitude das forças – embora uma ação flexural insignificante exista perto dos suportes.



(a) Modelo de Gaudí (source)



(b) Isler natural casca



(c) Ponte Musmeci (source)

Figura 15.32: Exemplos modernos de pesquisa de formas através de modelos físicos

15.5.2.3 Sergio Musmeci (1926-1981)

Sergio Musmeci era um engenheiro multifacetado que, mais do que a maioria, explorou a dependência recíproca entre estrutura e forma arquitetural em sua maneira única. Ele era um experimentalista talentoso que entendia o fluxo de força[46] e, consequentemente, derivaram dela. Ele considerou que essa forma (não tensões) deve ser o principal desconhecido.

A estrutura mais associada com Sergio Musmeci é a famosa ponte sobre o rio Basento (Fig. 15.33a–15.33b). Ele é suportado por uma única superfície de torção contínua cujos dedos estendidos alternadamente inclinam-se para o convés ou acedem ao chão, gerando quatro extensões de cerca de setenta metros cada. A ponte é de aproximadamente 300 M

[46] Para estruturas muito mais complexas do que as de Nervi.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

longo e é composto por um deck de caixa concreto armado suportado por uma curva dupla contínua casca do mesmo material. O casca, que forma quatro espaços iguais de 69,2 M cada, tem uma espessura de 0,30 M e é caracterizada por costelas mais profundas em ambos os limites laterais. Ele carrega o convés da ponte por meio de 16 pares de suportes colocados em intervalos iguais de 17.30 M ao longo do eixo longitudinal e 12h Eu estou transversalmente. O RC casca é reforçado por duas redes de ϕ16 Barras de aço mm, com um espaçamento uniforme de 0,2 M, localizado nos intrados e extrados com cobertura de concreto igual. As duas costelas mais profundas em ambos os lados do casca são fornecidas com reforço adicional (Marmo et al., 2019).

Musmeci realizou extensos testes experimentais (Fig. 15.33c) ambos para a pesquisa de formulários *e.*. Análise.[47] Isso foi necessário para o complexo que se seguiu ao reforço (Fig. 15.33d). Deve-se acrescentar que ele complementou sua modelagem em escala com a aplicação das equações de Laplace e métodos diferença finita.

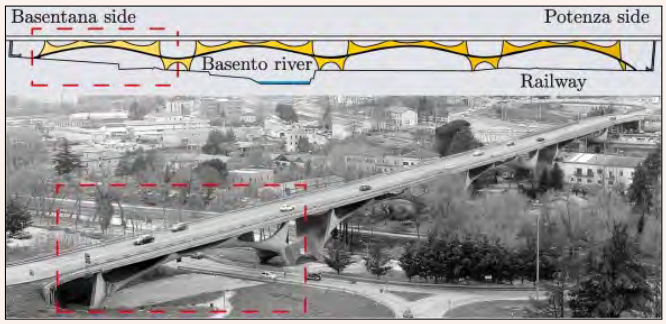
Assim como o Hipódromo de Zarzuela, em Madri, a ponte foi declarada "monumento do interesse cultural"pelo Ministério Italiano do Patrimônio e Cultura.

> De acordo com Musmeci, a forma de uma estrutura não é simplesmente o resultado dos cálculos; é também um veículo para comunicar, em nível expressivo, a noção de que tudo o que é essencial ao comportamento estrutural [. . .] deve também ser parte da forma visível. Isso é parte da mensagem.
>
> (Brodini, 2013)

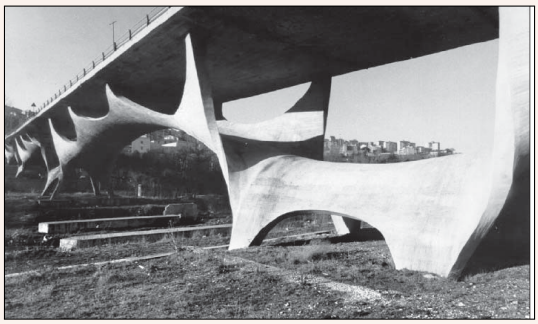
A ponte, mais do que muitas outras estruturas, tem sua forma e funcionalidade em harmonia, mas seu valor arquitetônico/estético é discutível. No entanto, é uma combinação singular que vale a pena estudar.

[47] O modelo de microconcreto foi testado em ISMES, Bergamo.

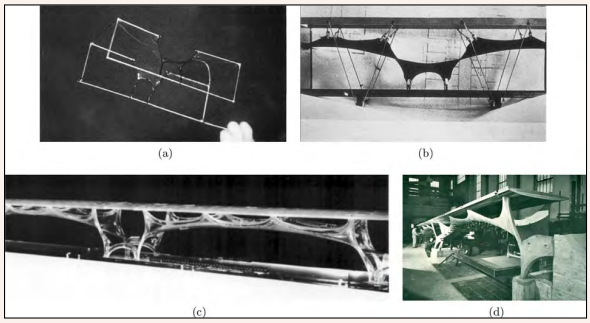
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



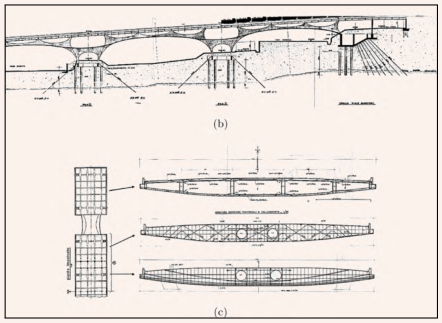
(a) Ponte completa (Marmo et al., 2019)



(b) Detalhes da ponte (Desideri et al., 2013)



(c) Testes de modelo: (a) sabão, (b) neopreno, (c) plexiglass, (d) microconcreto (Marmo et al., 2019)



(d) Reforço (Marmo et al., 2019)

Figura 15.33: Ponte de Musmeci sobre o rio Basento

15.5.3 Estruturas recíprocas

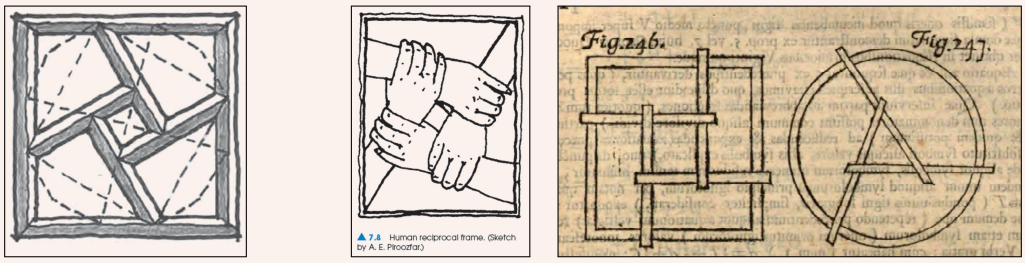
O princípio da reciprocidade baseia-se no uso de elementos de carga que, sustentando-se uns aos outros ao longo de seus vãos e nunca nas extremidades, compõem uma configuração espacial sem clara hierarquia estrutural (Pugnale e Sassone, 2014). Em outras palavras, todos os membros da estrutura dependem um do outro para o apoio mútuo, e nenhuma subestrutura é estável até que toda a estrutura esteja completa. Finalmente, a remoção de um único elemento estrutural torna cada parte da estrutura móvel com relação a cada outra parte.

O layout icônico de uma estrutura recíproca é mostrado na figura. 15.34.

15.5.3.1 Desenvolvimento Histórico

O mais antigo exemplo conhecido é dado por Villard de Honnecourt (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858) Por volta de 1240. Figura 15.35a mostra seu esboço de uma estrutura recíproca, com o texto que acompanha descrevendo o problema: *Ensi poe's ovrer a um tor u a um maison de bas, si sunt trop cor*Traduzido como "como trabalhar em uma torre ou casa se o vigas são muito curtos."

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) (Larsen, 2007) (b) Wallis, 1695

Figura 15.34: Estruturas recíprocas: Conceitos ilustrativos

Este esquema foi mais tarde considerado por Leonardo da Vinci em dois de seus códices.[48] Em seu Códice Madrid I (Da Vinci, 1490), encontramos um esboço semelhante (Fig. 15.35b). Em seu Códice Atlanticus (Da Vinci, 1505), vemos uma variação mais complexa sobre esse tema (Fig. 15.35c).

Claro, nem de Honnecourt nem Leonardo forneceu uma solução analítica para o complexo problema da estrutura recíproca. Isso teve que esperar Wallis, 1695, cuja análise matemática das forças na estrutura recíproca é possivelmente o primeiro exemplo registrado de um abrangente análise estrutural de uma estrutura não trivial.[49]

Wallis apresentou assim o primeiro cálculo estrutural em que todos esses elementos foram combinados (Houlsby, 2014):

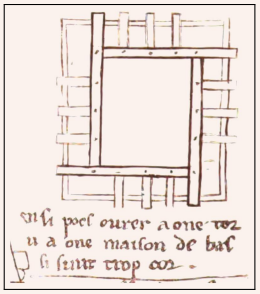
- Apresentação de um desenho claro da estrutura, em que as juntas são etiquetadas;
- Exploração de uma simetria quadruplicada para simplificar a análise subsequente;
- Uma análise baseada na aplicação sistemática de um princípio simples (equilíbrio moment de cada viga) para todos os membros da estrutura, resultando em 25 equações lineares simultâneas;
- Uma eliminação sistemática entre as equações para resolver para as 25 variáveis;
- Do resultado obtido, extração de importantes conclusões estruturais sobre cargas em membros salientes na estrutura.

Uma nota sobre John Wallis (1616-1703): Ele era um clérigo e matemático inglês que recebeu crédito parcial pelo desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Ele é creditado com a introdução do símbolo ∞ para representar o conceito de infinito. Ele também usou $1/\infty$

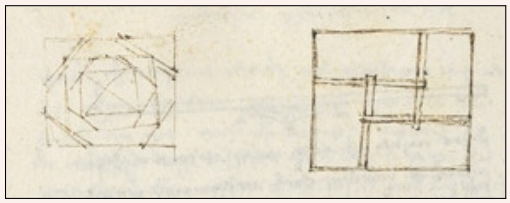
[48] O códice era o ancestral histórico do livro moderno com conteúdo escrito à mão. Um códice, muito parecido com o livro moderno, é ligado por empilhar páginas e proteger um conjunto de bordas - uma forma análoga à moderna encadernação de livros. O códice substituiu rolos anteriores de papiro e comprimidos de cera, oferecendo várias vantagens: Poderia ser aberta imediatamente a qualquer ponto do texto, permitindo escrever em ambos os lados da folha, e poderia conter textos longos. Não nos referimos aos números de página em um códice, mas sim a um *fólio*.

[49] Como observado antes, John Wallis foi quem introduziu o símbolo do infinito ∞ em 1655.

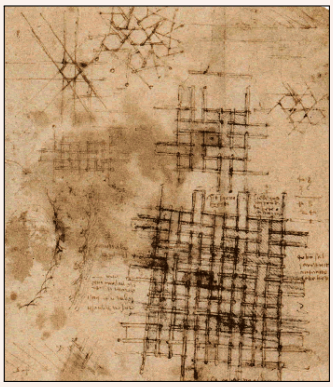
CÓPIA PARA REVISÃO



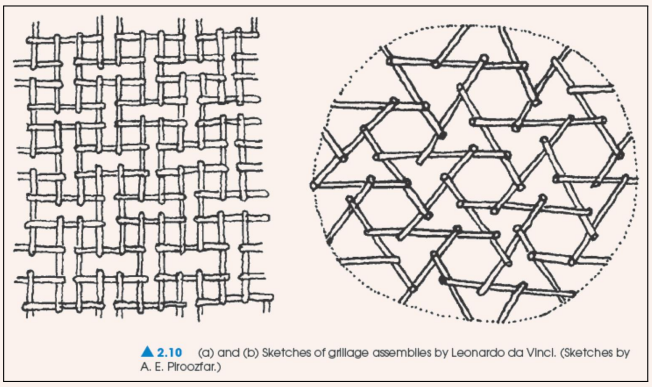
(a) De Honnecourt, 2006 Caderno fol. E XLIII



(b) Da Vinci, 1490 Códice de Madrid, Folio 49

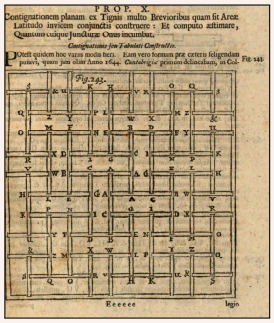


(c) Da Vinci, 1505, Codex Atlanticus, Folio 899v

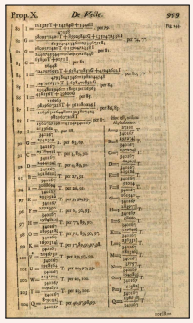


(d) O esboço de Leonardo explicou (Larsen, 2007)

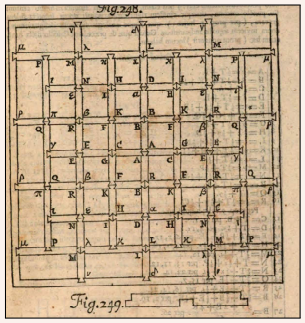
Figura 15.35: Primeiros exemplos de estruturas recíprocas



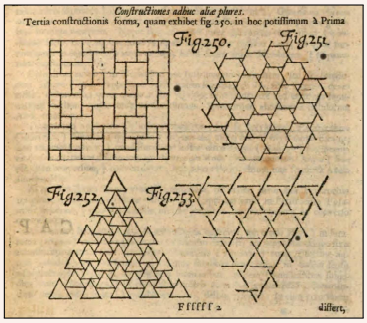
(a) Formulação de problemas



(b) Resolvendo 25 equações com 25 desconhecidos



(c) Carregar caminho



(d) Variações sobre um tema

Figura 15.36: Análises de estruturas recíprocas por Wallis, 1695

para um infinitesimal. Ele era contemporâneo de Newton e um dos maiores intelectuais do renascimento da matemática.

CÓPIA PARA REVISÃO

15.5.3.2 Revival Moderno

Agora, o termo "reciproca pórticos" parece ter substituído ''estruturas recíprocas," e seu estudo parece ter sido revivido por Olga Popovic através de sua dissertação (Popovic, 1996), livro seminal (Larsen, 2007), e inúmeras outras publicações (Popovic Larsen, 2014).

Figura 15.37 foca-se no que é provavelmente o mais conhecido recíproco pórtico no Japão, *Salão de Exposições Seiwa* projetado por Kazuhiro Ishii. É difícil acreditar que análises estruturais detalhadas foram realizadas; Em vez disso, parece que prevaleceu o julgamento de engenharia do arquiteto e excelente artesanato.

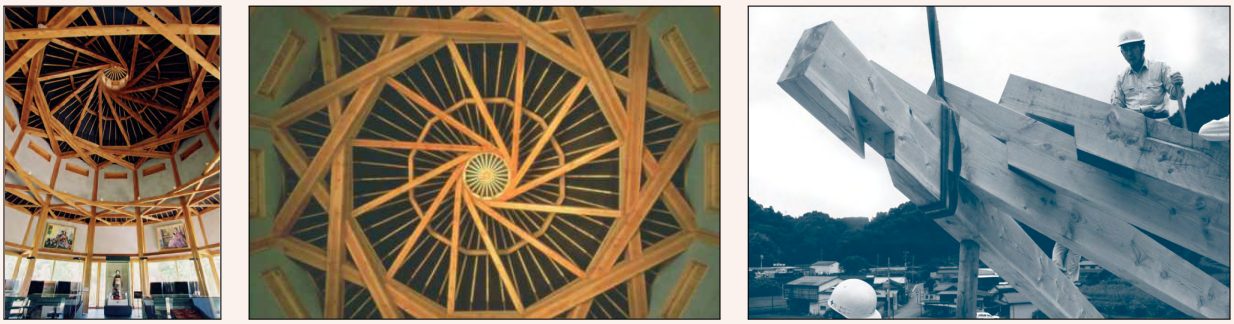


Figura 15.37: Salão de Exposições Seiwa (Japão) (Popovic, 1996)

Como arquiteto, Popovic não se ocupa em cálculos, e na verdade parece haver poucos exemplos como esse (Schrama, 2021). Sua única concessão à mecânica é a definição paramétrica de um módulo recíproco pórtico (Fig. 15.38):

- Número de vigas$n$)
- Raio através dos suportes externos (r_o)
- Raio através de pontos de interseção viga (r_i)
- Elevação vertical dos suportes exteriores para os pontos de intersecção viga (H)
- Espaçamento vertical das linhas centrais do vigas em seus pontos de intersecção (h_2)
- Comprimento do vigas na encosta (L)

15.5.4 Otimização Matemática: Maxwell, Michell, Baker e Beghini

Nesta seção, traçamos a evolução das principais diretrizes de design desde princípios fundadores até aplicações modernas. Começamos com o jornal seminal por Maxwell, 1864c, que não abordava considerações de design diretamente. Isto é seguido por Michell, 1904 o papel de referência (considerado o primeiro artigo abordando otimização estrutural), e finalmente, Baker e Beghini aplicação moderna destes princípios.

CÓPIA PARA REVISÃO

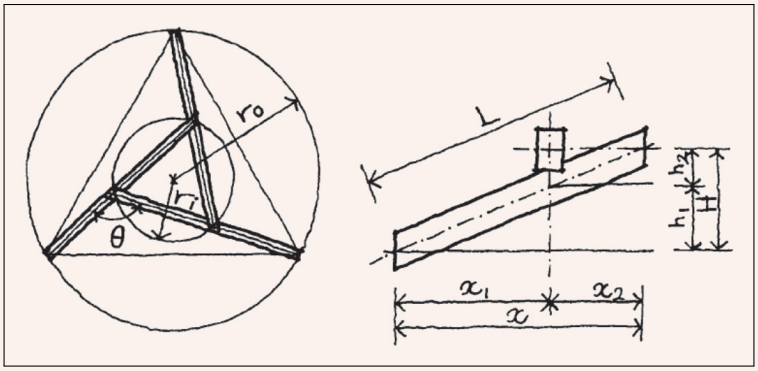


Figura 15.38: Parametrização de um módulo recíproco (Popovic, 1996)

15.5.4.1 Maxwell (1831-1879)

Enquanto o jornal seminal de Maxwell (Maxwell, 1864c) lançou as bases para o método trabalho virtual, foi seu trabalho subsequente (Maxwell, 1864b) que foi mais impactante para a profissão (ver §15.5.4.2).

Resumindo o que ele escreveu:

1. Em qualquer sistema de pontos em equilíbrio em um plano sob a ação de repulsões e atrações, a soma dos produtos de cada atração multiplicada pela distância dos pontos entre os quais atua é igual à soma dos resultados das repulsionações multiplicado cada um pela distância dos pontos entre os quais atua.
2. Multiplique cada carga pela altura do ponto em que atua, e cada tensão pelo comprimento da peça em que age, e adicione todos esses produtos juntos.
3. Em seguida, multiplicar as pressões verticais sobre os suportes do pórtico cada um pela altura em que atua, e cada pressão pelo comprimento da peça em que age, e adicionar os produtos juntos. Esta soma será igual à anterior.

Simplificando: *a soma dos caminhos de carga de tensão da estrutura menos a soma das trajetórias de compressão é igual a um valor relacionado às forças externas aplicadas*:

$$\sum F_T L_T - \sum F_C L_C = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{\Delta}_i \tag{15.1}$$

Maxwell continua dizendo:

> A importância deste teorema para o engenheiro surge da circunstância de que a força de uma peça é, em geral, proporcional à sua seção, de modo que se a resistência de cada peça for proporcional ao tensão que ela tem que suportar, seu peso será proporcional ao produto do tensão multiplicado pelo comprimento da peça. Portanto, essas somas de produtos dão uma estimativa da quantidade total de material que deve ser usado para sustentar tensão e pressão respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

(Maxwell, 1864c)

15.5.4.2 Michell (1870-1959)

Enquanto para todos os fins práticos Maxwell derivava (indirectamente) o princípio de trabalho virtual, ele não imaginava aplicar sua derivação ao projeto ideal das estruturas.[50]

Isso foi feito por Michell, 1904, que seguiu o trabalho de Maxwell (Eq. 15.1). Ele determinou o layout ideal de um treliça para uma única caixa de carga quando o valor absoluto do axial tensão em qualquer barra não deveria exceder um determinado limite. Sua solução e a condição de projeto receberam considerável atenção durante o século XX.[51]

> A pórtico portanto atinge o limite da economia do material possível em qualquer estrutura pórtico sob as mesmas forças aplicadas, se o espaço ocupado por ele pode ser submetido a uma pequena deformação, tal que o deformações em todas as barras do pórtico são aumentados em frações iguais de seus comprimentos, não menos do que a mudança fracionária de qualquer elemento do espaço. Se o espaço submetido à deformação se estende ao infinito em todas as direções, o volume do pórtico é um mínimo relativo a todos os outros; Caso contrário, tem sido mostrado ser um mínimo em relação àqueles dentro da mesma fronteira atribuída.
>
> A condição $e = \varepsilon$ pode evidentemente ser satisfeito quando todas as barras de um pórtico têm tensões do mesmo sinal. A deformação do teste a ser aplicada é então uma dilatação ou contração uniforme (de acordo com o pórtico está em tensão ou compressão) de um espaço que envolve o pórtico e estende-se para qualquer limite finito ou ao infinito no prazer.
>
> O mínimo mais simples pórticos [treliças] desta classe especial são:
>
> I Gravatas e suportes submetidos a um único par de forças iguais e opostas.
> II Triangular e tetraédrico pórticos sob forças aplicadas nos ângulos da figura, e agindo ao longo de linhas que se cruzam dentro da figura.
> III As catenárias em geral, os pontos de aplicação das forças aplicadas, bem como as próprias forças, sendo dadas.
>
> Em todos estes casos, o volume mínimo do pórtico é
>
> $$V_m = \frac{\sum l[f]}{P} = \frac{\partial W}{\varepsilon P} = \frac{\sum \varepsilon F r \cos\theta}{\varepsilon P} = \frac{\sum F r \cos\theta}{P}$$
>
> Onde F é uma das forças aplicadas, r A distância de seu ponto de aplicação R De um ponto arbitrário O, θ O ângulo entre RO E a direção de F, e P é o permitido tensão no material.
>
> ...

[50] Por analogia, Eshelby, 1970 definiu uma série de integrais de contornos que são independentes do caminho em virtude do teorema da conservação de energia sem atribuir qualquer interpretação física (por assim dizer, apenas para a beleza da matemática e mecânica). Como ele nunca procurou atribuir um significado físico à sua multiplicidade de equações, uma delas chamou a atenção de Rice, 1968, que encontrou que corresponde à taxa de liberação de energia de uma rachadura e assim definiu a integral do contorno que veio para carregar seu nome.

[51] O problema mais complexo de uma disposição ideal de um treliça para cargas alternativas parecia receber menos atenção.

CÓPIA PARA REVISÃO

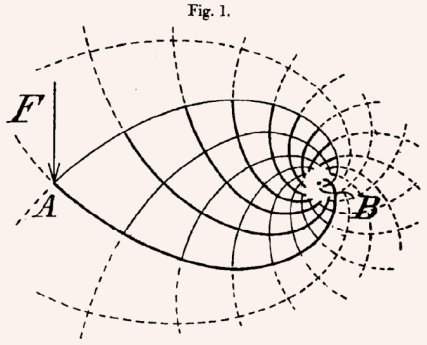
> Um pórtico (é ótimo se ele) atinge o limite de economia do material possível em qualquer pórtico-estrutura sob as mesmas forças aplicadas, se o espaço ocupado por ele pode ser submetido a uma pequena deformação apropriada, tal que o deformações em todas as barras do pórtico são aumentados por frações iguais de seus comprimentos, não menos do que a mudança fracionária de comprimento de qualquer elemento do espaço.
>
> (Michell, 1904)

Michell continua dizendo que uma classe mais geral de pórticos satisfaz a condição $e = \varepsilon$ consiste daqueles cujas barras, antes e depois da deformação, formam curvas de *Sistemas ortogonais*.. Aqui é exatamente onde Michell se conecta com o segundo papel de Maxwell, 1864b.

Michell deu os desenhos ideais de algumas estruturas (treliças), mostrados na figura. 15.39.

1. (Fig. I.) A single force F applied at A, and acting at right angles to the line AB, is balanced by an equal and opposite force and a couple, of moment F × AB, applied at B.

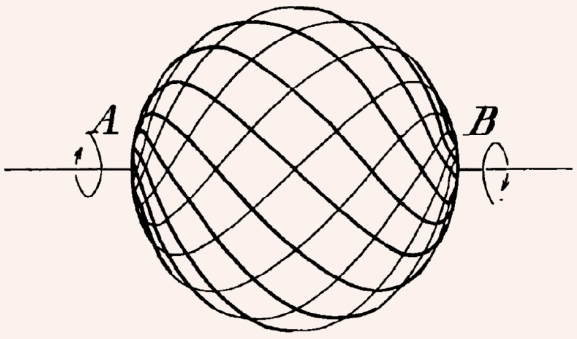
Fig. 1.



The minimum frame is formed of two similar equiangular spirals having their origin at B and intersecting orthogonally at A, together with all the other spirals orthogonal to these and enclosed between them.

4. (Fig. 5.) Equal and opposite couples applied at points A, B on the straight line AB.

Fig. 5.



The minimum frame consists of the series of rhumb-lines inclined at 45° to the meridians of the sphere having its poles at A and B.

Figura 15.39: Desenhos ideais (Michell, 1904)

Pode-se razoavelmente afirmar que através de seu jornal, Michell era o "pai"de *otimização estrutural*.

Isso deu origem ao chamado *Estruturas Michell*Os que são projetados de acordo com estes princípios (como o treliça em Fig. 15.40).

15.5.4.3 Baker e Beghini

O trabalho de Michell parece ter sido explorado por Baker, 1992 para o projeto de sistemas laterais baseados em energia. Isso foi mais estendido por Beghini et al., 2014, que conectou arquitetura e engenharia através de otimização topológica estrutural (Fig. 15.41).

Exemplo: Treliça Design

CÓPIA PARA REVISÃO

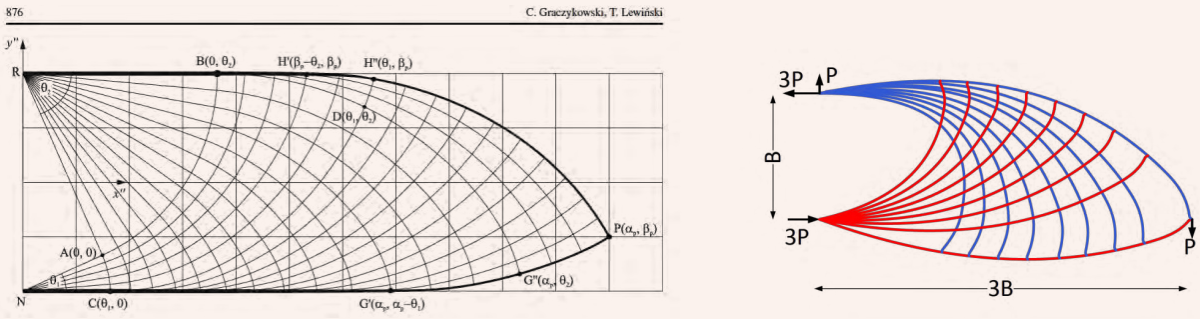


Figura 15.40: Michell treliça

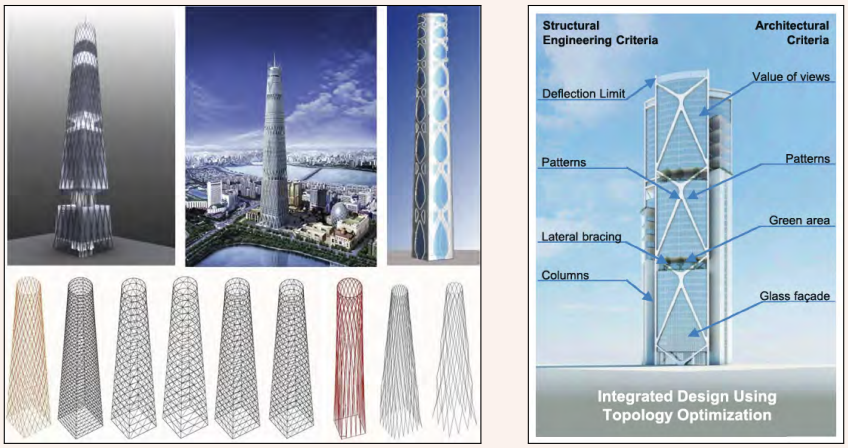
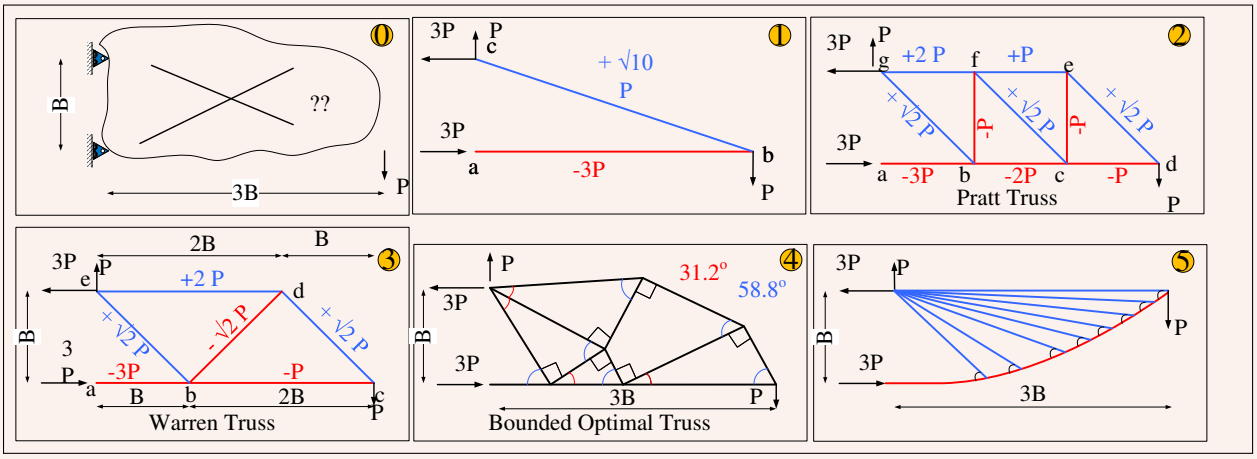


Figura 15.41: Otimização da topologia estrutural (Beghini et al., 2014)

Adaptado de "Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies" por Baker et al., 2015.

Procuramos projetar um treliça suportado em dois nós e carregando uma carga vertical em outro, ignorando o peso próprio.

CÓPIA PARA REVISÃO



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Two bar Truss									
1	a-b	3.000		3.000		9.0	-9.0	9.0	
2	b-c	3.162	3.162		10.0		10.0	10.0	
Sum		**6.162**			**10.0**	**9.0**	**1.0**	**19.0**	**19.0**
Warren Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	2.000		1.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
4	d-e	2.000	2.000		4.0	0.0	4.0	4.0	
5	b-e	1.414	1.414		2.0	0.0	2.0	2.0	
6	b-d	1.414		1.414		2.0	-2.0	2.0	
Sum		**9.243**			**8.0**	**7.0**	**1.0**	**15.0**	**15.0**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Pratt Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	1.000		2.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
4	d-e	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
5	e-f	1.000	1.000		1.0		1.0	1.0	
6	f-g	1.000	2.000		2.0		2.0	2.0	
7	b-g	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
8	c-f	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
9	b-f	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
10	c-e	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
Sum		**11.243**			**9.0**	**8.0**	**1.0**	**17.0**	**17.0**

Os detalhes da análise não são mostrados aqui; no entanto, os resultados são resumidos abaixo para diferentes configurações treliça.

Pilar Eu é proporcional ao volume total de material (assumindo o mesmo permitido tensão em tensão e compressão). A deflexão (J) é proporcional ao volume do material (I).

	Carregar Caminhos				Deflexão
	Carga de tensão $A = \frac{\sum F_T L_T}{PB}$	Carga Compressiva $B = \frac{\sum F_C L_C}{PB}$	$A - B$	$A + B$	$\frac{\Delta}{\frac{\sigma B}{E}}$
①	10	9	1.	19	19
②	9↘	8↘	1. →	17↘	17↘
③	8↘	7↘	1. →	15↘	15↘
④	7.7↘	6.7↘	1. →	14.47↘	14.47↘
⑤	8.52	7.52	1.	16.04	16.04

CÓPIA PARA REVISÃO

Graczykowski e Lewiński, 2010 Analisou isso treliça e obteve a configuração mostrada em ⑤.

15.5.5 Coda: Quando os arquitetos e engenheiros colidiram

O século XIX foi um período de rápida industrialização e avanço tecnológico, e este período viu tensão significativa, competição, e até mesmo animosidade entre *arquitetos* e.. *Engenheiros*.. Esses dois grupos profissionais muitas vezes se encontravam em desacordo sobre o papel de *estética* versus *Funcionalidade*, o *legado artístico* da arquitetura clássica versus a *potencial inovador* de materiais modernos como ferro e aço. Esta tensão tomou diferentes formas ao longo do século: Às vezes como um concurso cabeça-a-cabeça entre dois rivais nomeados competindo pela mesma comissão, às vezes como uma solução já realizada de um engenheiro encontrar resistência do estabelecimento arquitetônico após o fato. Três episódios ilustram o alcance deste conflito, a competição Torre Eiffel de Bourdais em Paris, a recepção do Palácio de Cristal de Paxton em Londres, e as críticas enfrentadas pela Ponte Brooklyn de Roebling em Nova York, A sociedade muda de lugar *Romantismo* e.. *Historialismo* do início do século 19 para o *Modernismo industrial* que definiu sua última metade.

15.5.5.1 Caso Um: Bourdais contra Eiffel (Paris, 1889)

A competição entre Jules Bourdais (1835-1915), um arquiteto classicamente treinado, e Gustave Eiffel (1832–1923), um engenheiro inovador (ver §15.4.2 para uma descrição mais completa de sua carreira), para o projeto da torre monumental para a Feira Mundial de 1889 em Paris encapsula os temas deste capítulo. Era uma competição entre tradição e modernidade, entre os ideais clássicos do *École des Beaux-Arts* e os princípios racionais de engenharia do *École Centrale*.

Dois Graduados da École Centrale Ambos os homens compartilharam uma base educacional comum no *École Centrale des Arts et Manufactures*.. Fundada em 1829, a escola foi projetada para produzir engenheiros para a economia francesa industrializada rapidamente, com foco na engenharia prática e aplicações industriais ao invés dos estudos clássicos da arquitetura. Seu currículo enfatizou matemática, mecânica, física e química... treinando estudantes para resolver problemas complexos do mundo real usando princípios científicos.

Seus caminhos divergiram após a formatura. Bourdais prosseguiu seus estudos no *École des Beaux-Arts*, o centro da arquitetura clássica na França, que enfatizou simetria, proporção, e referências históricas à Grécia antiga e Roma. Ele se tornou um campeão da arquitetura clássica, projetando edifícios como *Palais du Trocadéro*, que incorporava os ideais de Beaux-Arts de monumentalidade e decoração elaborada.

Eiffel, em contraste, seguiu uma carreira na engenharia, desenvolvendo experiência em ferro forjado e técnicas de construção pré-fabricadas. Seu trabalho em pontes e viadutos, como o Viaduto Garabit, demonstrou seu domínio da dinâmica estrutural e resistência

CÓPIA PARA REVISÃO

ao vento. Ao contrário de Bourdais, Eiffel acreditava na honestidade dos materiais e na ideia de que a beleza de uma estrutura deveria emergir de sua funcionalidade e precisão de engenharia, não da ornamentação aplicada.

As Propostas Competitivas Para a Exposição de 1889, Bourdais propôs uma estrutura monumental em pedra na forma de um gigante pilar— a "Torre do Sol" (*Tour Soleil*Reminiscência de monumentos triunfais romanos (Bourdais, 1881). O desenho era grandioso, pesado e ornamentado, aderindo aos ideais estéticos clássicos de simetria e permanência. Era para ser revestida de granito e coroada com iluminação elétrica que iluminaria toda Paris.

O projeto da Eiffel, desenvolvido com os engenheiros Maurice Koechlin e Émile Nouguier e o arquiteto Stephen Sauvestre, foi radicalmente diferente: Uma torre de 300 metros feita de peças de ferro pré-fabricadas (Lemoine, 2002). Era moderno, elegante e uma celebração da tecnologia industrial. A estrutura de ferro exposta simbolizava a racionalidade e honestidade da engenharia moderna.

O Resultado O governo francês acabou escolhendo o projeto de Eiffel, reconhecendo a importância simbólica da engenharia moderna para uma nação que busca demonstrar suas proezas industriais. A decisão não foi sem controvérsia: muitos críticos, especialmente artistas e intelectuais, inicialmente se opunham ao projeto de Eiffel. Um grupo de parisienses proeminentes, incluindo o escritor Guy de Maupassant, assinou uma petição chamando a estrutura proposta de "monstrosidade"e um "deshonor para Paris"

A proposta de Bourdais recebeu apoio dos tradicionalistas da comunidade arquitetônica francesa, mas sua torre de alvenaria teria sido muito mais cara, mais lenta para construir e menos estruturalmente inovadora. A Torre Eiffel, concluída a tempo e abaixo do orçamento, tornou-se o símbolo da Exposição - e eventualmente de Paris.

15.5.5.2 Caso Dois: Paxton e o Palácio de Cristal (Londres, 1851)

Ao contrário do Bourdais, o conflito de Joseph Paxton não era contra um único rival chamado, mas contra o estabelecimento arquitetônico mais amplo. Paxton, um jardineiro e designer de estufa por formação em vez de um arquiteto acadêmico, propôs uma enorme estrutura pré-fabricada de ferro e vidro para a Grande Exposição de 1851 - um tipo de edifício derivado diretamente de sua experiência projetando grandes conservatórios, radicalmente diferentes de tudo que a profissão arquitetônica produzia. Um relato contemporâneo detalhado do projeto e construção do edifício foi publicado no mesmo ano que abriu (Berlyn e Fowler, 1851).

Seu projeto enfrentou resistência da *Instituto Real de Arquitetos Britânicos (RIBA)* e de arquitetos proeminentes do dia. *Decimus Burton*, que inicialmente apoiou Paxton mas veio de um treinamento clássico, e *A.W.N. Pugin*, o principal campeão do Revival Gótico, ambos representavam valores arquitetônicos tradicionais em desacordo com o uso radical de materiais industriais por Paxton. A crítica se centralizou menos em qualquer projeto alternativo concorrente e mais em um desconforto maior: que um edifício montado a partir de componentes de ferro e vidro produzidos em massa, ao invés de alvenaria crafted de

CÓPIA PARA REVISÃO

acordo com precedente histórico, não poderia ser apropriadamente chamado arquitetura em tudo.

Apesar desta resistência, o Palácio de Cristal foi construído em menos de seis meses – uma façanha sem precedentes de construção pré-fabricada – e tornou-se, como a Torre Eiffel décadas depois, o símbolo duradouro da exposição que foi construída para abrigar.

15.5.5.3 Caso Três: Roebling e a ponte do Brooklyn (Nova York, 1869–1883)

A ponte de Brooklyn de John Roebling enfrentou um padrão institucional similar ao da oposição cabeça-a-cabeça. O projeto de Roebling, uma ponte suspensa sem precedentes, usando cabo de aço de sua própria invenção, *Richard Upjohn*, um arquiteto gótico proeminente Revival, e *Frederick Law Olmsted*, o arquiteto paisagista e planejador urbano por trás do Central Park, ambos objetados à estética industrial de cabos expostos e aços invadindo o caráter visual da cidade (McCullough, 1972). Roebling documentou o progresso do projeto ele mesmo em seus relatórios anuais para os diretores da companhia ponte (Roebling, 1877 PDF).

Como em Paxton, a objeção era menos um projeto concorrente do que um desconforto institucional mais amplo com a estética de engenharia deslocando os arquitetônicos em estruturas cívicas proeminentes. Roebling não viveu para ver a ponte completada – ele morreu de complicações após um acidente de pesquisa antes da construção começar, e seu filho Washington Roebing, incapacitado pela doença durante o projeto, supervisionou sua conclusão Em grande parte através do trabalho de sua esposa, Emily Warren Roebling. A ponte acabada, como o Palácio de Cristal de Paxton e a torre Eiffel, tornou-se um dos marcos decisivos de sua cidade.

15.5.5.4 Legado

Nos três episódios, o padrão é o mesmo: A solução de um engenheiro, pré-fabricada, industrial e estruturalmente ousada, encontra resistência de um estabelecimento arquitetônico defendendo tradições estéticas e materiais herdadas símbolo de sua cidade e sua idade. A competição Bourdais-Eiffel foi a mais direta dos três, um concurso formal cabeça-a-cabeça com um vencedor declarado; Paxton e Roebling enfrentaram a oposição difusa de instituições e críticos reagindo ao trabalho já em andamento. No entanto, os três demonstram que a engenharia pode ser arte. Essa estrutura em si, honestamente expressa, poderia alcançar o *venustas* que Vitruvius tinha exigido ao lado *Firmitas* e.. *utilitas*.

O legado clássico de Bourdais continuou na França, e sua abordagem encontrou ecos no movimento da Cidade Belo e o classicismo Beaux-Arts que dominava a arquitetura cívica americana nos anos 1930. Mas a torre, o palácio e a ponte anunciaram cada um, em sua própria cidade e sua própria década, a chegada de uma nova era: Um em que o *Progettista*O engenheiro que projeta e constrói, que deixa a estrutura falar... moldaria cada vez mais o ambiente construído.

CÓPIA PARA REVISÃO

O concurso nos remete ao tema central deste capítulo: a questão de se a forma deve seguir o funcionamento, se beleza pode emergir da necessidade estrutural, e se o engenheiro pode alcançar o que antes era considerado a província exclusiva do arquiteto. A resposta, escrita em ferro contra três linhas do céu, era sim.

15.6 A Geração de Computador

O surgimento do método dos elementos finitos permitiu que arquitetos, e às vezes engenheiros, explorassem formas cada vez mais desafiadoras e empurrassem o envelope para os limites do que alguém ousaria empreender sem suporte computacional. Arquitetos começaram a explorar formas estruturais impossíveis de conceber sem análise computacional, enquanto engenheiros projetaram edifícios muito altos capazes de resistir cargas extremas de vento (Burj Khalifa), pontes de longo alcance que representam efeitos secundários como vibração (Milênio Bridge), e estruturas complexas de concreto incorporando efeitos a longo prazo como fluência e encolhimento (Millau Viaduct). Vou me limitar a três praticantes, dois deles bastante controversos.

15.6.1 Arquitetos "Excepcionais"

Embora não seja bem assim *progettisti* no sentido tradicional, alguns arquitetos desafiam engenheiros estruturais a analisar e projetar adequadamente suas geometrias complexas. A seguir estão estruturas impressionantes nascidas nas mentes criativas dos arquitetos e traduzidas para a realidade através da experiência de engenheiros estruturais trabalhando nos limites da possibilidade computacional.

Vou me concentrar em apenas dois exemplos notáveis, enquanto o trabalho de um terceiro (Saarinen) foi anteriormente abordado.

15.6.1.1 Félix Candela (1910-1997)

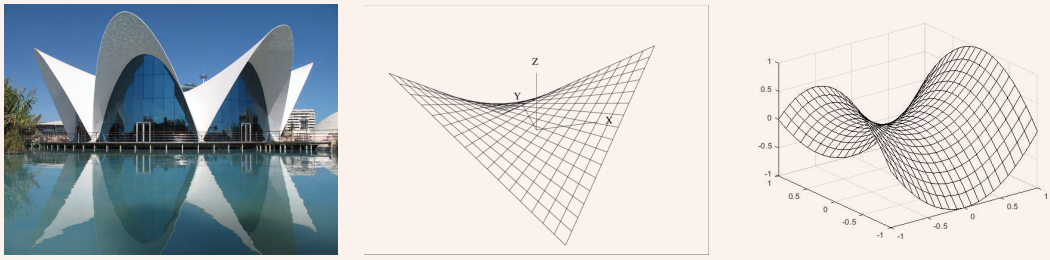
Félix Candela Outeriño (Madrid, 1910 - Raleigh, Carolina do Norte, 1997) nasceu na Espanha e estudou arquitetura na Escuela Técnica Superior de Arquitectura em Madrid, graduando-se em 1935. No entanto, após sua participação na Guerra Civil Espanhola como engenheiro para o lado republicano e um breve internamento em um campo de concentração francês, ele emigrou para o México em 1939, onde passaria a maior parte de sua carreira e alcançaria o nível internacional Reconhecimento.

Como Nervi, Candela concebeu edifícios de forma holística, funcionando simultaneamente como arquiteto, engenheiro e empreiteiro. Ele foi pioneiro no uso de hiperbólico-parabolóide (HP) cascas, uma forma estrutural particularmente eficiente graças à sua curvatura dupla que permite cargas a serem realizadas principalmente através da ação da

CÓPIA PARA REVISÃO

membrana em vez de dobrar. No entanto, ele não foi o primeiro a estudar ou construir tais formas (Espion, 2016)- Ele foi precedido por Fernand Aimond (Aimond, 1936) na França e Giorgio Baroni (Currà e Russo, 2018) na Itália. No entanto, o formulário HP permaneceu relativamente desconhecido na prática arquitetônica até que o trabalho inovador de Candela nos anos 1950 trouxe à atenção internacional.

O exemplo mais icônico da HP de Candela é, sem dúvida, o Restaurante Los Manantiales em Xochimilco, México, concluído em 1957. O projeto foi um sucesso que inspirou inúmeras estruturas semelhantes em todo o mundo. O eficiente sistema estrutural, com suas características bordas para cima curvadas, resulta em uma estrutura notavelmente esbelta casca com uma espessura de apenas 40 mm, envergando 30 Eu estou internamente. No seu centro, o casca atinge uma altura de 5.8 M, enquanto as bordas sobem para 9.9 M. Os suportes são conectados por hastes de tensão sob a construção do chão, projetadas para resistir ao impulso horizontal gerado na base casca. O próprio Candela considerava esta estrutura leve e elegante como o seu trabalho mais significativo, um testamento do casamento de eficiência estrutural e poesia arquitetônica que caracterizava sua abordagem ao projeto casca.



(a) Restaurante Los Manantiales em Xochimilco

(b) Presos por linhas retas

(c) Presos por parábolas

Figura 15.42: Félix Candela é hiperbólico-parabolóide cascas

15.6.1.2 Frank Gehry (1929-2025)

Frank Owen Gehry (Toronto, 1929-2025) não é um engenheiro, mas um arquiteto, e como tal ele não pertence adequadamente a este panteão de grandes engenheiros. No entanto, seu trabalho tem desafiado tão profundamente a profissão de engenharia estrutural - empurrando os limites do que é computacional e construcionalmente possível - que uma exceção deve ser feita.

Gehry pode ser visto como arquiteto *e.*. escultor. Considerando que as extravagâncias arquitetônicas de Calatrava eram geralmente compostas por linhas retas e curvas simples, Gehry é obcecado com superfícies complexas curvadas de tal sofisticação geométrica que até mesmo sua representação da superfície digital tem sido objeto de Dissertações de doutorado (Shelden, 2002 PDF). Seus prédios desafiam categorias estruturais convencionais, exigindo abordagens inteiramente novas para análise, fabricação e construção.

CÓPIA PARA REVISÃO

Enquanto a maioria dos arquitetos hoje em dia confiam rotineiramente no software existente (como SAP2000, RISA ou programas similares) que os engenheiros estruturais podem usar para analisar e projetar seus edifícios, o trabalho de Gehry provou ser tão geometricamente complexo que O software era inadequado. Consequentemente, ele estabeleceu um grupo de tecnologia separado dentro de sua prática para adaptar e modificar CATIA - software aeroespacial originalmente desenvolvido por Dassault Systèmes para analisar as superfícies curvas dos aviões (Gehry, Lloyd e Shelden, 2020). Esta adaptação de ferramentas computacionais aeroespaciais para o projeto arquitetônico fez da prática de Gehry sinônimo de tecnologia computacional de ponta e processos de fabricação CAD/CAM, mudando fundamentalmente como geometrias arquiteturais complexas poderiam ser realizadas.

A estrutura mais icônica de Gehry é o Museu Guggenheim em Bilbao, completada em 1997.[52] Suas curvas impressionantes de titânio, mostradas na figura. 15.43a, exemplificar o uso de ferramentas computacionais especializadas tanto para design e análise estrutural. Os enormes espaços internos cavernosos do edifício, tornados possíveis apenas através de sofisticada modelagem computacional, fornecem um cenário apropriado para obras de arte contemporâneas igualmente curvas, como o aço maciço de Richard Serra (um dos meus escultores minimalistas favoritos) esculturas (Fig. 15.43b).



(a) Museu Guggenheim em Bilbao (b) Richard Serra's "Band"'

Figura 15.43: Bilbao Guggenheim de Frank Gehry e a escultura de Richard Serra

15.6.1.3 Santiago Calatrava (1951-)

Santiago Calatrava Valls (Benimàmet, Valência, 1951) estudou arquitetura na Universidade Politécnica de Valencia, graduando-se em 1974, e depois seguiu engenharia civil no ETH Zurique, onde completou seu doutorado em 1981. Apesar de estudar na ETH durante

[52] Bilbau era uma cidade industrial economicamente depressiva no norte da região basca da Espanha, e o museu Guggenheim representou uma ousada (e finalmente bem sucedida) tentativa de reviver a cidade econômica e culturalmente através do turismo arquitetônico - uma estratégia agora conhecido como "Efeito de Bilbau"

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Christian Menn Não há indicação de colaboração entre eles. O estilo arquitetônico de Calatrava é distinto, eclético, exuberante e imediatamente reconhecível: uma fusão da lógica estrutural com a ambição escultural. Uma avaliação crítica de seu trabalho inicial é fornecida por (McQuaid, 1993 PDF).

Apesar de Calatrava ser arquiteto e engenheiro estrutural, eu o coloquei nesta seção arquitetônica porque seu maior impacto foi visual e formal ao invés de através de contribuições fundamentais para a ciência da engenharia estrutural (como exemplificado por figuras como Fazlur Khan). Sua abordagem prioriza a expressão arquitetural sobre otimização estrutural, vendo cada projeto como simultaneamente construção e escultura.

Suas estruturas variam do relativamente simples e austero - como a Ponte Alamillo em Sevilha[53] Ou a Estação Ferroviária de Stadelhofen em Zurique, para o flamboyant e escultural, como a ponte Margaret Hunt Hill em Dallas ou a estação TGV do Aeroporto Saint-Exupéry em Lyon. Enquanto as obras mais simples ecoam o princípio de Sullivan que forma segue a funçãoCalatrava não se esforça para ser minimalista e não busca as formas estruturais ideais perseguidas por engenheiros como Maillart ou Nervi. Para ele, a estrutura serve a dupla função como solução de engenharia e afirmação artística, priorizando o drama visual sobre a eficiência estrutural.

Essa abordagem tem gerado tanto aclamação e crítica. O trabalho de Calatrava tem sido frequentemente atormentado por atrasos, custos excessivos e litígios (Daley, 2013). O exemplo mais notório é a Cidade das Artes e Ciências em sua nativa Valência, a maior coleção mundial de seu trabalho, incluindo uma sala de apresentações, pontes, um planetário, uma casa de ópera, um museu de ciência, uma calçada coberta, e hectares de reflexão Piscinas. Originalmente orçamentado em aproximadamente $405 milhões, o complexo acabou custando quase três vezes esse valor e resultou em vários processos, ilustrando a tensão entre ambição arquitetural e pragmatismo de engenharia que caracteriza grande parte de seu trabalho.

15.6.2 Engenheiros estruturais: O Cinco Percenter

Começarei citando a introdução provocativa de um excelente livro de (Llunji, 2022 PDF), o que oferece uma avaliação preocupante do estado atual da engenharia estrutural:

> Há mais engenheiros no mundo do que arquitetos. Mais de cinco milhões. No entanto, hoje em dia, na engenharia estrutural há talvez apenas 10 verdadeiros designers no mundo - não mais do que isso. Todos os outros são técnicos e apoiadores de idéias arquitetônicas; Cumpridores dos desejos do arquiteto, geralmente servos, muito raramente parceiros e nunca líderes. Parece duro, mas é verdade. Em nosso atual mundo digital pós-industrial, a engenharia civil não se encontra mais na vanguarda do

[53] De particular interesse para estudantes de engenharia estrutural é o livro por Pollalis, 1999, que descreve cada passo do projeto e construção da Ponte Alamillo, explicando as intenções arquitetônicas de Calatrava. Isso inclui cálculos de engenharia relevantes e detalhes técnicos. O livro também contém dados geométricos que permitem aos engenheiros modelar a estrutura, como discutido em §G.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Ponte Alamillo, Sevilha



(b) Estação TGV do Aeroporto Saint-Exupéry de Lyon

Figura 15.44: Calatrava: elegância estrutural na Ponte Alamillo contra a visualmente complicada Estação Lyon Saint-Exupéry TGV.

> desenvolvimento social. Engenheiros, em sua busca pela automatização de análise estrutural e design, estão se tornando chatos, perdendo sua 'sofisticação' e alguma de sua criatividade, e transformando-se em suporte puramente técnico para arquitetos, com menor criatividade Entrada no projeto final. Em algum lugar ao longo do caminho, os engenheiros estruturais tornaram-se "sujeitos"da tecnologia em vez de estar na frente das inovações tecnológicas. De acordo com relatórios recentes, há um consenso de que a automatização está diminuindo o prestígio e a autoridade da comunidade de engenharia, e a coordenação digital está mudando a forma como a indústria opera. A maioria de nós trabalhando na indústria de engenharia estrutural sabe que nosso ramo foi atingido por um grande terremoto de mudanças, o que pode tornar irrelevante o papel dos engenheiros e que é uma preocupação importante entre os engenheiros estruturais praticantes ao longo de todo o Mundo. ... Há muitas vozes na indústria de construção que minimizam o papel de um engenheiro. Agora que quase todas as fases de projeto estrutural é automatizada, há aqueles que pensam que projeto estrutural pode nem mesmo precisa ser feito por engenheiros estruturais em tudo. Se um computador (programa) pode fazê-lo, o operador poderia ser um técnico com conhecimento elementar de estruturas. No entanto, esta expansão da engenharia digital pode ser "uma espada de dois gumes" porque o uso inábil de ferramentas de computador pode resultar em falhas de construção pelos quais os engenheiros serão culpados. É importante ressaltar a noção de que o software em si não é defeituoso; Em vez disso, o principal problema se relaciona com como e por quem essas ferramentas são usadas. Novas ferramentas exigem novas formas de trabalhar, que por sua vez requerem novos métodos de garantia da qualidade. ... Talvez 95% dos projetos que fizemos até este ponto, será o trabalho de técnicos ou automação, deixando tarefas verdadeiramente incomuns de engenharia estrutural, o resto 5%, como a definição de engenharia estrutural Outros, ao qual este autor pertence, ver o futuro através da lente de "arquiteto estrutural" onde o engenheiro estrutural do futuro será mais arquitetônico equipado e arquiteto do futuro vai ser mais estruturalmente Inclinado.
>
> (Llunji, 2022)

Esta avaliação dura ressoa profundamente com a realidade da prática contemporânea. A transformação da engenharia estrutural a partir de uma disciplina criativa, exequível por figuras como Nervi, Torroja e Khan, em um trabalho computacional bastante rotineiro representa uma mudança fundamental na identidade da profissão. O conceito de cinco

CÓPIA PARA REVISÃO

por cento capta uma verdade desconfortável: essa criatividade estrutural genuína, do tipo que empurra fronteiras e cria novos paradigmas, está se tornando cada vez mais rara em um mundo dominado por software padronizado e prática inversa ao risco.

Eu não posso concordar mais com a declaração de Llunji na medida em que identifica a marginalização dos engenheiros estruturais dentro do processo de projeto arquitetônico, onde eles se tornaram realmente colaboradores ou, mais frequentemente, consultores técnicos subservientes ao invés de Parceiros criativos iguais. Os grandes construtores do passado, de Eiffel a Calatrava, ficariam consternados ao ver sua profissão reduzida a verificação de código e verificação da trajetória.

No entanto, engenheiros estruturais não se limitam a construções e pontes, e a salvação da profissão pode estar precisamente em domínios completamente dissociados da arquitetura. Os engenheiros continuam criticamente necessários para realizar análises sofisticadas de estruturas que os arquitetos nunca tocam: represas, plataformas offshore, contenção nuclear, estruturas aeroespaciais, dispositivos biomédicos e inúmeras aplicações industriais. Essas disciplinas exigem conhecimento de engenharia estrutural bem além do nível exigido pela prática tradicional da construção, que abrange comportamentos não lineares, resposta dinâmica, análise probabilística e mecanismos de falha que empurram os limites do Capacidade computacional e intuição de engenharia.

Esses domínios exigem engenheiros que permaneçam verdadeiros designers, lutando com desafios sem precedentes que exijam tanto sofisticação computacional quanto julgamento de engenharia muito além da análise rotineira do edifício. Quer analisando a resposta sísmica de uma barragem em arco de concreto, o comportamento fatigante de uma plataforma offshore sob carga de ondas, ou a integridade de contenção de um reator nuclear, esses engenheiros trabalham nas fronteiras do conhecimento estrutural onde Soluções padronizadas de software são inadequadas e a solução criativa de problemas torna-se essencial. Nestes campos especializados, a profissão, em sua forma mais essencial, sobrevive e prospera além da sombra da arquitetura ou prática estrutural[54].

Llunji, 2022 A avaliação sombria, no entanto, oferece esperança para esse precioso 5% de engenheiros estruturais que continuam a ultrapassar limites e definir o futuro da disciplina. Embora vários engenheiros em todo o mundo possam se qualificar para esta categoria de elite, eu me limitarei a examinar duas das figuras contemporâneas mais notáveis: um designer de ponte e um engenheiro de arranha-céus cujo trabalho exemplifica a relevância contínua da criatividade estrutural em nossa era computacional.

[54]O autor tem fornecido experiência técnica para grupos de cidadãosC-10) desafiando a segurança da Estação Nuclear Seabrook em New Hampshire, onde o envelhecimento das estruturas de contenção de concreto apresentam desafios de engenharia sem precedentes, (NRC-ML19312B609, 2019). Este caso exemplifica o trabalho de cinco por cento que exige criatividade. Nenhum código de projeto existente aborda adequadamente os complexos mecanismos de degradação envolvidos, o software padrão não pode modelar os processos térmico-mecânico-químicos acoplados, e a análise requer síntese de décadas de pesquisa em durabilidade do concreto, mecânica da fratura, e avaliação probabilística. Tais problemas, onde a segurança pública está em equilíbrio e as abordagens de engenharia convencional se mostram inadequadas, representam o núcleo essencial da engenharia estrutural que nenhuma quantidade de automação pode substituir.

CÓPIA PARA REVISÃO

Curiosamente, em ambos os casos, a busca pela forma "ideal" permanece por excelência - uma busca que, em um sentido profundo, nos leva de volta à era pré-Galileana quando a forma geométrica foi o aspecto mais desafiador de projeto estrutural. Na construção de alvenaria, a força raramente era a preocupação dominante; A arte estava em alcançar estabilidade e beleza através da geometria pura. Foi só quando Galileu começou a analisar a relação entre tamanho, peso e força material que forma e força se tornaram inextricavelmente ligadas. Os engenheiros estruturais mais criativos de hoje vêm em círculo, usando poder computacional não apenas para verificar a adequação, mas para descobrir novas formas que expressam o fluxo de forças com elegância e eficiência sem precedentes.

15.6.2.1 Edifícios de Alto Nível

Na virada do século XXI, houve uma competição renovada entre as principais cidades em todo o mundo para o edifício mais alto, com Chicago e Nova York liderando a acusação enquanto novos concorrentes como Dubai surgiram. Esta corrida pela altura empurrou engenheiros estruturais para aquele precioso território de cinco por cento, onde abordagens convencionais de design se mostraram inadequadas e a resolução criativa de problemas tornou-se essencial.

A seguinte passagem (Seabrook, 2001 PDF) oferece uma visão histórica concisa dos sistemas estruturais empregados em arranha-céus de Nova York ao longo do século passado. Escrito sob a perspectiva de um jornalista científico intimamente envolvido com a prática de engenheiros estruturais, ele traça a evolução da alvenaria e construção de ferro fundido, através dos arranha-céus de aço primitivos, para o tubular e núcleo baseado sistemas que caracterizam o design moderno de arranha-céus. Além de seu valor descritivo, o texto capta uma mudança no pensamento estrutural: de construção conservadora, intensiva em massa para sistemas mais refinados e eficientes em carga informados por ferramentas analíticas melhoradas, materiais e métodos de fabricação.

> Durante os últimos cento e vinte anos, três grandes tipos de estruturas foram empregadas em edifícios altos na cidade de Nova York. O primeiro tipo foi usado nos edifícios de ferro fundido dos anos 18 e 90, em que a "carga de gravidade"— o peso do edifício — era transportada principalmente pelas paredes exteriores. Este tipo de estrutura cria espaços de fábrica e armazém (e, agora, lofts residenciais) que são relativamente livres de apoio interno pilares - mais bens imóveis utilizáveis para os inquilinos - mas, quando combinado com piso de madeira vigas e edifício mais indulgente códigos, também torna os prédios vulneráveis ao colapso. Em um incêndio, o chão tende a desabar, e o ferro pórtico perde força e implode. A segunda geração de edifícios altos, que inclui o Metropolitan Life Building (1909), o Woolworth Builde (1913) e o Empire State Builder (1931), são estruturas pórtico, nas quais um esqueleto de aço soldado ou rebitado pilares e vigas, muitas vezes envolto em concreto, corre através de todo o edifício. Este tipo de construção faz uma estrutura extremamente forte, mas não tão atraente. Os interiores estão cheios de pesados, carregados e paredes, e, enquanto você se move para o centro destes edifícios, mais criptas parecem. Charlie Thornton, da empresa de engenharia estrutural baseada em Manhattan da Thornton-Tomasetti Engineers, um designer líder das estruturas de edifícios altos modernos, disse-me recentemente, "Um edifício como o Empire State Building é

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

> muito projetado e superconstruído. O prédio não precisava de todo esse apoio. Esses engenheiros não entendiam o jeito que nós os entendemos. Eles usavam regras de slide para resolvê-los, enquanto nós temos computadores. E então eles erraram no lado da cautela. A maioria dos arranha-céus erguidos desde os anos sessenta usam um terceiro tipo de estrutura, uma síntese dos melhores aspectos dos dois tipos anteriores de estrutura. As estruturas do perímetro desses prédios se assemelham a tubos. Dentro, um enorme núcleo oco feito de aço e/ou concreto contém muitos dos serviços: elevadores, escadas e banheiros. Porque o núcleo e perímetro pilares carregam muito da carga, os designers poderiam eliminar o interior pilares, com o resultado de que há mais espaço aberto para os inquilinos. E, porque pórtico estruturas requerem trabalhadores de ferro para soldar ou rebitar o vigas ao suporte pilares no local, que é tanto caro e perigoso, reduzindo a extensão do pórtico significa que mais da estrutura pode ser fabricado fora do local, tornando o construção mais segura e econômica para se erguer. Finalmente, melhorias na metalurgia aumentaram a resistência do aço estrutural nestes edifícios, permitindo que os engenheiros reduzam ou eliminem o uso de concreto no suporte da estrutura. Concreto armado, embora seja mais resistente ao fogo do que o aço, é complicado e caro trabalhar com, especialmente em Manhattan, onde restrições de tráfego e espaço em locais tornam difícil trazer as frotas diárias de betoneiras necessárias para um grande Trabalho. Os andares da maioria dos prédios altos erguidos desde os anos 60 são muito mais leves do que os dos edifícios antigos. Em um típico andar de escritórios de arranha-céus, três ou quatro polegadas de concreto cobre uma plataforma de aço ondulado, cujo peso é suportado por I-vigas ou, no caso das Torres Gêmeas, por longas "treliças' - tiras leves de aço que são montadas por teias cruzadas de barras quadradas ou cilíndricas, criando um espaço oco abaixo de cada superfície do chão. Este espaço permite que os construtores instalem dutos de aquecimento e resfriamento dentro dos pisos, ao invés de em um teto abaixo deles - uma inovação que significa que o desenvolvedor pode aumentar o número de andares em todo o edifício.
>
> (Seabrook, 2001)

15.6.2.1.1 Leslie Robertson (1928-2021) Leslie Earl Robertson, o engenheiro estrutural do recorde das Torres Gêmeas (World Trade Center), Seu histórico incomum: sair do ensino médio aos 16 anos, servir como técnico de eletrônica da Marinha, então ganhar um diploma em ciência na UC Berkeley antes da transição de Eletricidade para engenharia estrutural. Demonstrado que o talento da engenharia criativa emerge de lugares inesperados.

Quando Robertson ficou sem dinheiro em Seattle, em 1958 e pegou um emprego na empresa de engenharia estrutural então chamada Worthington-Skilling, ele começou o que se tornaria um processo lendário de auto-educação. Trabalhando à noite e fins de semana, ele aprendeu conceitos fundamentais como a deflexão da inclinação e o método Hardy Cross, desenvolvendo a intuição estrutural profunda que nenhum programa de computador poderia fornecer.[55]

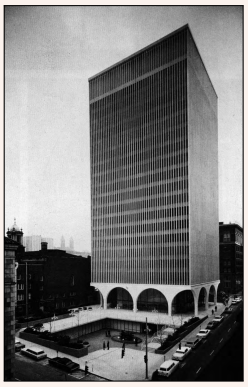
Cinco anos depois, a firma entrou em uma competição para construir o que seria os edifícios mais altos já construídos: As duas torres do World Trade Center. Apesar de não

[55] De fato, quando tais cálculos manuais são realizados para estruturas cada vez mais complexas, desenvolve-se uma compreensão do comportamento estrutural que não pode ser alcançado através de simulações computacionais repetidas. Isso é análogo aos estilistas que usaram o *Método de carga experimental* Em comparação com aqueles que confiavam apenas em modelos de computador. O autor tem defendido um retorno a tal compreensão fundamental em avaliações de segurança nuclear, onde modelos computacionais devem ser validados por julgamento de engenharia desenvolvido através da análise dos primeiros princípios.

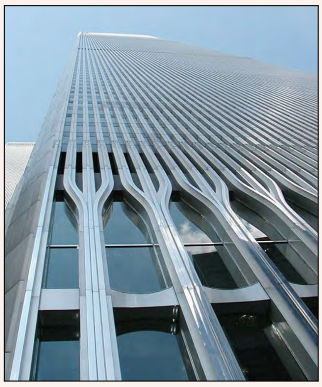
CÓPIA PARA REVISÃO

ter projetado nada mais alto do que o edifício IBM de vinte andares em Seattle, a empresa tinha uma vantagem crucial: O arquiteto Minoru Yamasaki, que os havia selecionado para esse projeto, também era o arquiteto do World Trade Center.

Na reunião de apresentação crucial, John Skilling fez seu arremesso usando apenas um bloco de desenho, cavalete e marcadores - sem apresentações em PowerPoint ou animações elaboradas por computador.[56] A simplicidade era profunda: Yamasaki, que sofria de acrofobia, queria elementos estruturais ao redor do perímetro do prédio para ajudar os ocupantes a se sentirem seguros em grandes alturas. A solução de Skilling era uma estrutura de tubo puro que levou o conceito tubular de Khan mais longe do que nunca.



(a) Edifício IBM em Seattle



(b) World Trade Center "Tridentes"



(c) Centro Financeiro Mundial de Xangai

Figura 15.45: Yamasaki e Robertson: De Seattle protótipo para influência global

Aos 35 anos, Robertson se mudou para Nova York para supervisionar a construção do que seria o prédio mais alto do mundo. Os desafios de engenharia o empurraram para um território desconhecido: determinando os limiares de percepção humana para o movimento horizontal (Chen e Robertson, 1972), desenvolvendo amortecedores viscoelásticos para controlar as oscilações induzidas pelo vento (Mahmoodi et al., 1987), e criando sistemas estruturais que nunca haviam sido testados em tal escala.

Os trágicos acontecimentos de 11 de setembro de 2001, submeteram o projeto de Robertson ao teste final não intencional. A análise estrutural do colapso das torres - detalhado em jornais seminais por Eagar e Musso, 2001 e.. Bažant e Zhou, 2002 ...revelou que enquanto os edifícios sobreviveram ao impacto da aeronave, temperaturas sustentadas acima de 800°C dos incêndios resultantes comprometeram a resistência do aço, levando ao colapso progressivo. Esta análise forense em si representou cinco por cento de engenharia. Entendendo mecanismos de falha que nenhum código havia previsto e nenhuma análise padrão poderia prever.

A carreira de Robertson incluía outras estruturas icônicas como o Centro Financeiro

[56] Um contraste refrescante com as apresentações atuais dependentes de tecnologia!

CÓPIA PARA REVISÃO

Mundial de Xangai e a Torre do Banco da China em Hong Kong, cada uma apresentando desafios únicos que exigiam soluções criativas além da prática convencional. Suas memórias (Robertson, 2017) crônica uma carreira gasta resolvendo problemas que nunca haviam sido resolvidos antes.

Estrutura revelada: A Pandemia Passeios de Caminhada A pandemia COVID-19, que esvaziou as ruas das grandes cidades do mundo em 2020, inesperadamente iluminou a relação entre arquitetura e engenharia de uma nova maneira. Michael Kimmelman, crítico de arquitetura para *O New York Times*, iniciou uma série de passeios virtuais pela cidade de Nova York durante o confinamento, acompanhado por arquitetos, historiadores e - significativamente para este capítulo - engenheiros estruturais. Como Kimmelman observou, ao longo dos anos, os arquitetos não foram os únicos a inscrever o horizonte de Nova York, a imagem do último século americano, através do éter urbano. Entre outros, engenheiros estruturais, poetas práticos de imaginação e importância muitas vezes imponentes, também descobriram como escalar essas alturas. Engenheiros que alcançam *venustas* Não através de ornamento aplicado, mas através da expressão eloquente de *Firmitas*.

Em uma turnê notável pelos arranha-céus de Manhattan, Kimmelman andou na mesma rota duas vezes: Primeiro com o arquiteto Annabelle Selldorf, depois com o engenheiro estrutural Guy Nordenson da Universidade de Princeton. Os dois profissionais, vendo os mesmos prédios - Seagram Building, Black Rock (CBS Builder), o AT&T Building, e Park Avenue 432... oferece interpretações complementares mas distintas desses marcos. Onde Selldorf enfatizou a experiência espacial e intenção arquitetônica, Nordenson revelou a engenhosidade estrutural escondida dentro: a combinação inovadora de aparelhos pórticos e momento pórticos no Edifício Seagram, os enormes amortecedores pêndulos dentro da pen-fina Park Avenue 432 que suavizam as oscilações induzidas pelo vento, e as "feats da engenharia estrutural" que fazem contemporâneo Supermontagens possíveis. Do Edifício Seagram, Nordenson comentou: Para mim, Seagram é o edifício mais notável de Nova York. Ele epítome as relações entre talentos criativos que precisam se unir para fazer algo arquitetônico notável acontecer Renascimento *progettisti* e recorda a insistência de Vitruvius que o arquiteto (em sua época, sinônimo de construtor e engenheiro) deve dominar várias disciplinas para alcançar a excelência.

Estas viagens paralelas demonstraram, no microcosmo, as formas complementares mas distintas que arquitetos e engenheiros percebem o ambiente construído – e o empobrecimento que resulta quando qualquer perspectiva está ausente. O engenheiro estrutural vê o que Vitruvius chamou *Firmitas*:. O fluxo de forças através de pilares e núcleos, a dança da tensão e compressão que mantém uma torre em pé contra o vento e gravidade. O arquiteto atende *utilitas* e.. *venustas*:. como os espaços servem aos propósitos humanos e como as formas agradam ao olho. Quando estas perspectivas convergem, como fizeram nas grandes obras de Nervi, Torroja e Khan, o resultado é arquitetura estrutural que satisfaz a tríade vitruviana completa. Kimmelman mais tarde colecionou essas caminhadas *A Cidade Íntima: Caminhando em Nova York* (2022), um livro que desempacotou a história, planos,

CÓPIA PARA REVISÃO

leis, feitos de engenharia estrutural, destaques arquitetônicos e realidades cotidianas que constituem a vida urbana (Kimmelman, 2020). Para o engenheiro estrutural, estas excursões oferecem um modelo de engajamento público que revela, em vez de ocultar, a contribuição essencial da disciplina para o ambiente construído – demonstrando que *Firmitas*, corretamente expressado, pode se tornar uma fonte de *venustas*.

Entre os engenheiros contemporâneos cujo trabalho Nordenson destacou durante sua turnê foi William Baker de Skidmore, Owings & Merrill, a própria firma que tinha projetado vários dos marcos do centro da cidade que passaram. As conquistas de Baker representam talvez o exemplo mais claro do que os cinco por cento podem realizar quando a sofisticação computacional é casada com uma intuição estrutural profunda.

15.6.2.1.2 William Baker (1953-) Se alguém identificasse o mais proeminente e criativo engenheiro estrutural contemporâneo, alguém que dominava as modernas ferramentas computacionais enquanto avançava para além dos princípios inovadores de Fazlur Khan, seria William Frazier Baker, um parceiro do Lendário Skidmore, Owings & Merrill em Chicago. Baker representa a evolução dos cinco por cento. um engenheiro que usa o poder computacional não como substituto para a criatividade, mas como uma ferramenta para alcançar expressões estruturais anteriormente impossíveis.

O design de arranha-céus super-alta como o Burj Khalifa 828 metros de Baker em Dubai exemplifica este novo paradigma. Enquanto cargas verticais podem ser gerenciadas com concreto ultra-alta resistência, o desafio governante reside em forças laterais - efeitos ventos e sísmicos que criam um comportamento dinâmico tridimensional complexo requerendo análises sofisticadas muito além da prática padrão.

O projeto Burj Khalifa, projetado pelo arquiteto Adrian Smith e projetado por Baker (ambos em SOM), ilustra a tensão contínua entre visão arquitetural e realidade de engenharia. Enquanto o arquiteto pode tomar a atenção do público, a concepção estrutural - o sistema de núcleos com buttressed, a geometria responsiva ao vento, o complexo esqueleto interior - representa pura criatividade de engenharia "' cinco por cento'.

Atribuições teóricas de Baker, documentadas em (Baker, Skidmore et al., 2013), estenda o legado de Khan para a era computacional:

> Talvez o parâmetro estrutural mais importante em um edifício alto seja a estrutura arquitetural, ou forma, do prédio. Não só define a complexidade da torre, como geralmente influencia significativamente as forças do vento no edifício. O vento é a consideração estrutural dominante no projeto de prédios altos. O vento flui em torno de um edifício alto, muitas vezes são instáveis. À medida que o vento passa, o fluxo se separa do lado da torre, criando uma série de vórtices que causam diferenciais de pressão através do edifício. Embora os efeitos de arrasto do vento em uma torre sejam importantes, essas forças geralmente não são a preocupação controladora. São as forças do vento cruzado causadas pelo vazamento de vórtice, em conjunto com os harmônicos naturais da torre, que podem levar a grandes forças perpendiculares à direção do vento. Devido à velocidade dos eventos de vento que ocorrem normalmente e ao alcance normal da largura do edifício, haverá certos eventos de ventos onde o derramamento de vórtice combina com os harmônicos naturais da torre.

CÓPIA PARA REVISÃO

(Baker, Skidmore et al., 2013 PDF)

O legado de Baker está não só nos prédios que ele projetou, mas em provar que mesmo na nossa era automatizada, o casamento da visão de engenharia e criativa permanece insubstituível. Seu livro recente (Baker e McRobie, 2025) *Geometria e Equilíbrio: Século 21 Mecânica estrutural* codifica essa filosofia, demonstrando como princípios fundamentais de geometria e equilíbrio podem guiar os engenheiros em direção a soluções inovadoras que a análise computacional por si só não pode descobrir.

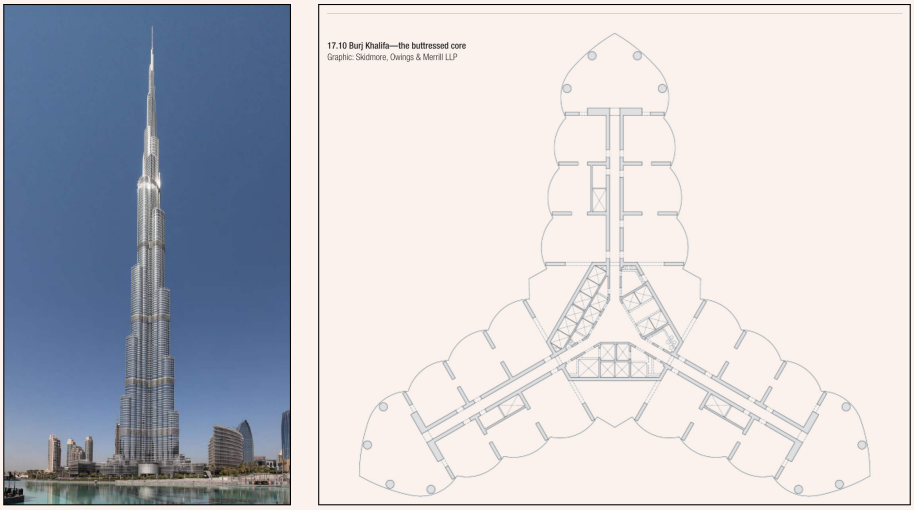


Figura 15.46: Baker e Burj Khalifa: Sofisticação computacional a serviço da ambição arquitetural (Baker, Skidmore et al., 2013 PDF)

Além de projetos individuais, a equipe de Baker na SOM foi pioneira em otimização da topologia estrutural como uma ferramenta de design, superando o fosso entre eficiência de engenharia e expressão arquitetural. A aproximação deles, detalhada em (Beghini et al., 2014), representa um novo paradigma:

> Uma das questões predominantes que a indústria da construção enfrenta no mundo atual é o equilíbrio entre engenharia e arquitetura: tradicionalmente, o objetivo do arquiteto tem se focado mais na estética, ou "forma" de uma estrutura, enquanto que o objetivo de um engenheiro tem sido focado na estabilidade e eficiência, ou sua 'função'. Neste trabalho, discutimos a importância de uma estreita colaboração entre essas disciplinas, e oferecemos uma abordagem alternativa para gerar novas ideias de design integrado por meio de um framework de otimização de topologia estrutural sob medida, que pode potencialmente ser de benefício para as comunidades de engenharia arquitetônica e estrutural.
>
> (Beghini et al., 2014)

Este trabalho, contextualizado e ilustrado em §15.5.4.3, demonstra como os cinco por cento usam ferramentas computacionais não para substituir a criatividade, mas para descobrir novas formas que expressam lógica estrutural com clareza e elegância sem

CÓPIA PARA REVISÃO

precedentes. O legado de Baker está não só nos prédios que ele projetou, mas em provar que mesmo na nossa era automatizada, o casamento da visão de engenharia e criativa permanece insubstituível.

15.6.2.2 Pontes: Michel Virlogeux (1946–)

Michel Virlogeux representa o epítome da excelência em engenharia francesa, produto do sistema educacional de elite nacional: École Polytechnique e École Nationale des Ponts et Chaussées, complementados por um doutorado em engenharia estrutural. Depois de estabelecer sua reputação na SETRA (a agência do governo responsável pelos estudos técnicos de estradas e rodovias), ele passou para consultoria independente, onde sua visão criativa poderia florescer sem restrições burocráticas.

Virlogeux exemplifica os cinco por cento através de seu projeto de mais de 100 pontes, notavelmente a Ponte da Normandia e o Viaduto Millau (Fig. 15.47). Suas pontes paradas por cabo alcançar a excelência estética não através da decoração aplicada, mas reduzindo o design à sua essência estrutural - uma filosofia que ecoa os grandes engenheiros-artistas do passado. No entanto, a aparente simplicidade destas estruturas mascara extraordinária complexidade analítica: não linearidades geométricas causadas por grandes deformações de cabos, interações dinâmicas com o vento e mecanismos intrincados de redistribuição de carga que exigem análises computacionais sofisticadas muito além da prática padrão.

A complexidade do projeto de pontes com cabos multi-espalhamento é ilustrada pela avaliação técnica de Virlogeux:

> A melhor solução, e a mais elegante, é distribuir rigidez entre os diferentes membros estruturais (o convés, pinos e pilares) para equilibrar efeitos de flexão produzidos por cargas vivas assimétricas e limitar deflexões. De um extremo para o outro, várias soluções podem ser comparadas:
>
> - Um deck com rigidez suficiente para resistir momentos fletores induzido por cargas vivas. Esta solução só é aplicável para pontes de cabo-permanecido pequenas e médias.
> - Pílons com alta rigidez de flexão, por exemplo, tendo a forma de um V invertido longitudinalmente, com uma transferência de forças de dobra nos cais abaixo para limitar a rotação no nível do convés. Nestas condições é possível ter um deck muito fino e flexível.
> - Distribua rigidez entre todos os membros estruturais, convés e torres.
>
> Como dito acima, o projeto estrutural deve permitir variações de comprimento produzidas no convés pela instalação de continuidade prostressando tendões nos vãos após terem sido fechados, fluência e encolhimento do concreto que se desenvolvem depois de fechar os vãos, e variações de temperatura. Todas as soluções práticas serão analisadas uma de cada vez.
>
> (Virlogeux, 2001)

O Viaduto Millau, concluído em 2004, é talvez a ponte mais elegante que já foi construída: uma estrutura simétrica com seis vãos de 342 metros e dois vãos finais de 240 metros, subindo 245 metros acima do Vale Tarn. O projeto exigia inovações em modelagem computacional, metodologia de construção e ciência de materiais que empurrassem

CÓPIA PARA REVISÃO

os limites do que era considerado viável. Descrições técnicas detalhadas podem ser encontradas em (Virlogeux et al., 2005), enquanto (Bergsjö e Pettersson, 2016) fornece leitura essencial para os alunos de análise da ponte por cabo, complementando o tratamento mais acessível de Virlogeux em (Virlogeux, 2001).

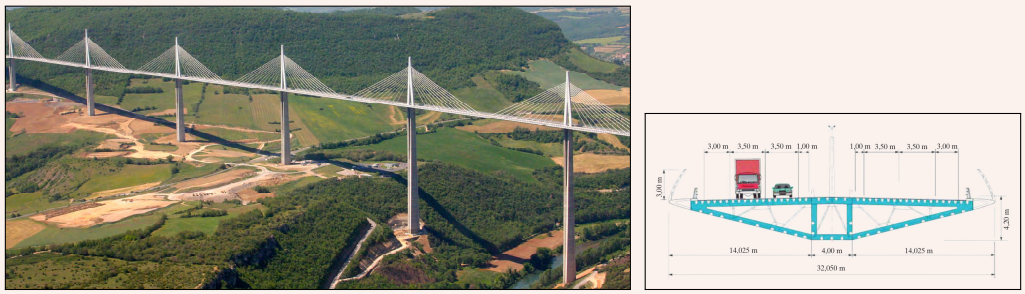


Figura 15.47: Virlogeux e o Viaduto Millau: Poesia estrutural em escala sem precedentes (Virlogeux et al., 2005)

A abordagem de Virlogeux ao design revela o julgamento sofisticado que distingue os cinco por cento dos praticantes de rotina. Agudamente consciente do delicado equilíbrio entre eficiência estrutural e excelência estética, uma tensão que remonta a Vitruvius, ele enfrentou este dilema diretamente no projeto Millau. Figura 15.48 mostra quatro soluções estruturalmente adequadas para enrijecer pontes de longa distância, cada uma oferecendo diferentes trocas entre economia material e complexidade da construção. Mas Virlogeux rejeitou todas as quatro alternativas como esteticamente inaceitáveis, escolhendo em vez disso a solução mais elegante visível no viaduto concluído. Esta decisão requeria um deck adicional rigidez e uma análise mais sofisticada, provando que às vezes a eficiência e a economia devem ceder, por muito breves que sejam, à busca da beleza estrutural.

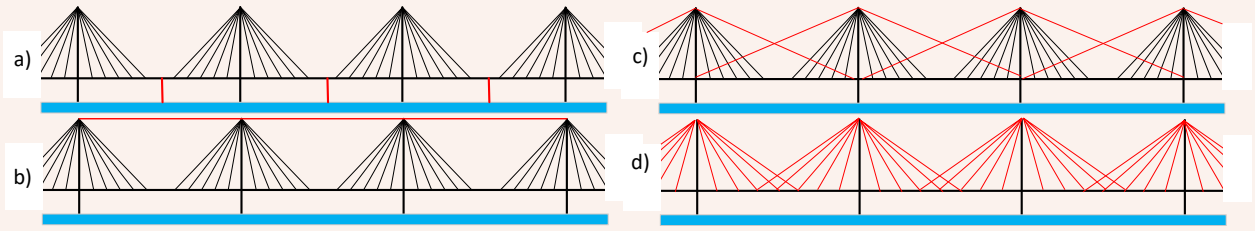


Figura 15.48: Sistemas estruturais alternativos para pontes com cabos de vários canais, todos rejeitados por Virlogeux por razões estéticas (Virlogeux et al., 2005)

Essa disposição de escolher beleza em vez de pura otimização distingue Virlogeux da 95% Que pode selecionar automaticamente a solução mais econômica. Ao contrário de Maillart, cujo gênio estava em alcançar a otimização simultânea da estrutura, economia e beleza, Virlogeux reconheceu que em certos contextos - particularmente na escala dos principais marcos da infraestrutura - a busca pela excelência estética justifica Sofisticação

CÓPIA PARA REVISÃO

estrutural adicional. Suas pontes são monumentos não só para a capacidade de engenharia, mas para a relevância contínua do julgamento estético em uma profissão cada vez mais automatizada. Eles provam que mesmo em nossa era computacional, os cinco por cento que combinam domínio técnico com visão artística permanecem indispensáveis para criar infra-estrutura que eleva tanto a paisagem quanto o espírito humano.

15.7 Vitruvius Revisitado

O tratado de Vitruvius (século I, a.C.) foi redescoberto durante o Renascimento, e seus princípios para as exigências estruturais foram confirmados e refinados por gerações sucessivas de arquiteto-engenheiros. Esses princípios fundamentais não foram particularmente desafiados até Billington, 1983b Inventado o termo *Arte estrutural* e defini-lo de uma maneira notavelmente reminiscente de seus ilustres antecessores: Vitruvius, Alberti e Palladio.

Esta seção desafiará a própria noção de arte estrutural e tentará desconstruí-la, não para diminuir as conquistas dos grandes construtores de engenheiros, mas para esclarecer o quadro conceitual através do qual entendemos seu trabalho.

15.7.1 Desconstruindo a Arte Estrutural

Após a publicação do que eu considero o melhor livro didático sobre casca estruturas já escrito, *Estruturas finas de concreto*,[57] Billington, 1965 desenvolveu um profundo interesse na estética estrutural. Este interesse evoluiu através de numerosos relatórios internos em Princeton (Billington e Mark, 1970; Billington, Mark e Abel, 1972; Billington, 1984a; Billington, 1979; Billington, 1983a; Billington, 1984b) Antes de culminar em seu trabalho marco (Billington, 1983b).

Neste livro seminal, *A Torre e a Ponte*, Billington identificou uma tradição estética na engenharia estrutural moderna que ele argumentou ser independente da arquitetura - uma tradição que ele chamou de *Arte estrutural*.. O trabalho capta seus pensamentos sobre a intersecção da engenharia estrutural, arquitetura e arte, propondo que um projeto estrutural atinja o status de *Arte estrutural* Quando ele alcança a excelência em três áreas: *eficiência, economia e elegância*.. As revisões do livro selecionaram as principais estruturas de Thomas Telford, John Roebling, Gustave Eiffel, Benjamin Baker (representando a era dourada das estruturas de ferro no final do século XIX), e Maillart, Nervi, e outros da era concreta do início do século XX.

[57] A partir de relações básicas familiares a todos os alunos e apoiadas por excelentes ilustrações, Billington deriva o comportamento parcial de oitava ordem equação diferencial governando casca. Ele então simplifica para abordar vários tipos casca e - o que é extremamente raro em textos de análise rigorosos - adapta a teoria à prática real do projeto.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

As exigências de Billington para a arte estrutural são, em essência, uma reformulação dos princípios enunciados no século 1 a.C. (Tabela 15.6), com uma diferença crucial. Seus antecessores consideravam essas virtudes essenciais para *Todos* estruturas dignas, enquanto Billington se reserva o qualificador de arte estrutural apenas para essas estruturas que cumprem seus critérios específicos.

Tabela 15.6: Virtudes arquitetônicas de Vitruvius a Billington

Vitruvius	**Alberti**	**Palladio**[58]	**Billington**
~ 20 a.C.	1452	1570	1983
	Todas as estruturas		*Arte Estrutural*
Força*Firmitas*)	Utilidade (*Comodità*)	Utilidade	Eficiência
Utilidade (*Utilitas*)	Duração (*Perpetuità*)	Conveniência	Economia
Beleza*Venutas*)	Beleza*Bellezza*)	Duração & Beleza	Elegância

Este trabalho influente catalisou inúmeras teses e trabalhos subsequentes de estudantes que analisaram as obras de "artistas estruturais"usando um modelo bem estabelecido: descrever a estrutura, colocá-la em contexto histórico, avaliar sua beleza e elegância, e realizar cálculos para confirmar hipóteses de projeto.

Inúmeras publicações desde então aprovaram o termo, mas poucas questionaram criticamente. Afinal de contas, Billington era uma figura imponente que cobria a lacuna entre arquitetura e estruturas. Foi muito mais fácil abraçar sua visão carismática do que examinar seus fundamentos filosóficos.

15.7.2 O que é Art?

Mas o que, precisamente, é arte? Eu diria que o único propósito da arte é incutir nos humanos *uma comunicação infecciosa de emoções*Uma manifestação profundamente pessoal e altruísta de sentimentos internos. As sete formas de arte tradicionais são: pintura, escultura, arquitetura, música e dança, literatura, teatro e cinema. Por definição, ninguém serve a um propósito utilitário. A arquitetura aparece nesta lista apenas para o prazer estético derivado da bela construção. Por exemplo, ambos Palladio Villa Rotonda (Fig. 15.49a) e Casa Malaparte[59] em Capri (Fig. 15.49b) (Iacovou, 2024) são obras-primas arquitetônicas que funcionam como pura expressão artística. No entanto, sua concepção estrutural tem pouca influência em seu mérito artístico.

A arte é sempre *expressão* e não pode servir como um adjetivo aplicado a objetos funcionais (embora “artístico” pode ser apropriado). Não podemos falar de ’pen-art’ simplesmente

[58] A própria formulação de Palladio na verdade inclui quatro termos: Utilidade, Conveniência, Duração e Beleza, além da divisão tripartida usada por Vitruvius, Alberti e Billington; Os dois últimos estão combinados aqui para preservar o alinhamento da linha na mesa.

[59] Projetado por Adalberto Libera, com substancial redesenho e autoria direta de Curzio Malaparte.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Villa Rotonda (Palladio)



(b) Casa Malaparte, Capri

Figura 15.49: Arquitetura como arte pura: Forma liberada da expressão estrutural

porque uma caneta fonte Montegrappa é bonita (Fig. 15.50a) ou evoca emoção. Apesar de sua beleza e habilidade, ela continua sendo fundamentalmente uma ferramenta funcional - uma bela caneta, certamente, mas não arte.

Da mesma forma, existe uma ponte para nos transportar do ponto A ao ponto B. Pode ser uma bela construção, mas não devemos chamá-la de arte. Quando Maillart projetou sua Ponte Salginatobel, seu objetivo não era criar arte estrutural, mas construir uma ponte funcional que também seria bela e graciosamente integrada com seus arredores (Fig. 15.50b).



(a) Peneira de Fonte, Montegrappa



(b) Ponte Salginatobel por Maillart

Figura 15.50: Função e beleza: A caneta e a ponte

Tendo desafiado a atribuição de "arte estrutural" para muitas estruturas tão marcadas por Billington, a pergunta permanece: existe realmente uma coisa como arte estrutural? A resposta é sim, mas exemplos são extraordinariamente raros. Para se qualificar, o propósito final de uma estrutura deve ser exclusivamente beleza visual e comunicação emocional, ao mesmo tempo que requer as habilidades de um engenheiro estrutural para sua realização. Isto incluiria a Torre Eiffel (construída como peça central da Feira Mundial de 1889 para

CÓPIA PARA REVISÃO

celebrar a grandeza francesa, Fig. 15.51a), o Portão do Arco em St. Louis (Fig. 15.51b), ou o Globo de Ciência e Inovação da Swiss Expo 2002 (Fig. 15.51c).



(a) Torre Eiffel (b) Portão Arch, St. Louis (c) Exposição Suíça 2002

Figura 15.51: Arte estrutural autêntica: estrutura como expressão pura

É preciso enfatizar que quando Maillart ou Nervi conceberam suas pontes e estádios, a arte certamente não era seu objetivo principal. O objetivo deles era projetar infra-estrutura funcional que acontecesse para alcançar a beleza através da simplicidade estrutural e elegância.[60] Esta beleza representa um valor acrescentado tremendo, mas emerge da busca de lógica estrutural, não expressão artística.

Isso levanta uma questão fundamental: Por que inventar um novo termo quando Vitruvius articulou os princípios essenciais há 2.000 anos? Seu *Firmitas, Utilitas, Venutas* estabeleceu que todas as estruturas dignas devem satisfazer três condições: força, utilidade e beleza. Isso tem sido interpretado muitas vezes para sugerir que se os dois primeiros requisitos são cumpridos, o terceiro segue automaticamente. Os três pilares de Billington, eficiência, economia e elegância, representam pouco mais do que a terminologia atualizada para os princípios vitruvianos 15.6). Para Vitruvius, essas condições definiram uma estrutura digna. Para Billington, seu cumprimento cria "arte estrutural"'

É por isso que eu rejeito o termo *Arte estrutural* em favor de *Arquitetura estrutural*- uma designação mais modesta e precisa.

15.7.3 Arquitetura Estrutural: Manifesto de Llunji

Enquanto Billington *A Torre e a Ponte* Alcançou ampla influência, um manifesto menos conhecido recentemente publicado pelo engenheiro estrutural Montenegrin Miloš Lunji merece igual, se não maior, atenção (Llunji, 2022).

Este texto essencial desconstrui sistematicamente o conceito de arte estrutural, destaca suas limitações, critica aqueles que o abraçaram cegamente, e argumenta por reviver o

[60] Uma das minhas melhores memórias da escola secundária envolve um professor de matemática que, quando lutamos para adivinhar a equação de uma curva rosa, nos disse: "A curva é simples e bonita, deve ter uma equação igualmente simples e bela"($r = a\cos(n\theta)$).

CÓPIA PARA REVISÃO

termo *Arquitetura estrutural*- Originalmente cunhado por Nervi (Nervi, 1963). Eu não posso concordar mais fortemente com a análise de Llunji.

Eu já informei a avaliação de Llunji da profissão de engenharia estrutural em §15.6.2.. Suas recomendações fornecem uma conclusão adequada para esta seção controversa:

> Se aceitarmos que nossa profissão está em crise, e se quisermos torná-la atraente novamente, devemos introduzir mudanças drásticas na educação dos estudantes de engenharia, o que deixa muito a desejar. Gerações mais jovens preferem escolher arquitetura em vez de engenharia porque não identificam mais a prática da engenharia civil com criatividade e inovação. Devemos enfatizar e promover o lado criativo de nossa profissão, desta forma reinventando uma imagem reconhecível e abrindo as portas fechadas do protagonismo da engenharia.
>
> (Llunji, 2022)

Se falamos de arte estrutural ou arquitetura estrutural, provavelmente abordamos o mesmo território emocional e estético, mas acho que este último termo é mais preciso e intelectualmente honesto. No final, atribuímos às palavras os significados mais convenientes para nossos propósitos, e como a Julieta de Shakespeare nos lembra:

> O que há em um nome? O que chamamos de rosa
> Por qualquer outro nome, cheiraria tão doce.
>
> Romeu e Julieta, Ato 2, Cena 2

A grandeza de Maillart, Nervi, Torroja e seus contemporâneos não está em ter criado "arte', mas em ter demonstrado que as estruturas funcionais, concebidas com profundo entendimento de materiais e forças, podem alcançar uma beleza que rivaliza com qualquer Criação artística. Eles nos lembram que o maior chamado da engenharia estrutural não é imitar a arte, mas descobrir a poesia inerente dentro da lógica da própria construção.

15.8 Conclusão

Esta viagem através da intersecção entre engenharia e arquitetura - desde a Roma antiga até a era digital - revela uma profissão em transformação. Rastreamos a evolução dos princípios fundamentais de Vitruvius através dos grandes construtores de engenharia da era industrial até os praticantes computacionais atuais, testemunhando realizações extraordinárias e tendências preocupantes.

Os engenheiros e arquitetos perfilados neste capítulo representam o que Llunji chama de "cinco por cento- aqueles praticantes raros que transcendem os cálculos de rotina para alcançar uma genuína criatividade estrutural. Da elegância racional de Eiffel à poesia estrutural de Nervi, das inovações tubulares de Khan à sofisticação computacional de

CÓPIA PARA REVISÃO

Baker, essas figuras demonstram que grande projeto estrutural emerge não dos algoritmos de software, mas do casamento de Mestria técnica com visão criativa.

Mas como vimos, a profissão enfrenta um desafio existencial. A democratização das ferramentas computacionais diminuiu paradoxalmente o papel dos engenheiros estruturais, reduzindo muitos a técnicos e apoiadores de ideias arquitetônicas ao invés de parceiros criativos no processo de design. Este desafio é agora agravado pelo surgimento da inteligência artificial, Que promete ainda mais automatização de tarefas rotineiras de engenharia. Enquanto a IA pode servir como uma ferramenta poderosa para o engenheiro criativo, acelerando cálculos, explorando alternativas de design e lidando com análises repetitivas, também ameaça corroer ainda mais o engajamento intelectual que distingue a verdadeira engenharia de Apenas computação.

O perigo não está na própria IA, mas em excesso de confiança sobre ela. Assim como a disponibilidade de software elemento finito produziu engenheiros que podem executar análises complexas sem entender a física subjacente, AI corre o risco de criar praticantes que podem gerar projetos sem compreender os princípios fundamentais que governar o comportamento estrutural. O engenheiro sábio usará IA como Nervi usou seu aparelho de teste ou Baker emprega otimização topológica: como uma ferramenta para verificar e refinar idéias concebidas através da compreensão, nunca como substituto do julgamento de engenharia.

O caminho para frente não reside em rejeitar a tecnologia, mas em redescobrir os princípios fundamentais: geometria, equilíbrio, comportamento material[61]- que permitem soluções verdadeiramente inovadoras. O engenheiro que entende por que um arco catenário funciona, que pode visualizar tensão flui através de uma viga, que compreende a relação entre forma e força, sempre terá algo insubstituível: A habilidade de distinguir entre plausível e ideal, entre cálculo e perspicácia. *Confie, mas verifique* deve tornar-se a palavra de ordem da era IA, abraçar o poder da ferramenta enquanto mantém a independência intelectual para questionar sua saída.

Para o aspirante engenheiro estrutural ou arquiteto que procura juntar-se a esses preciosos 5%, os seguintes textos fornecem base essencial:

1. *The Ten Books on Architecture*, Vitruvius, 1960 Os princípios fundamentais que permanecem válidos após dois milênios
2. *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*, Alberti, 1485 — Síntese renascentista da teoria clássica e aplicação prática
3. *I quattro libri dell'architettura*, Palladio, 1570 — Sistemas proporcionais e arquitetura da estrutura
4. "The tall office building artistically considered", Sullivan, 1896 - A base filosófica da expressão estrutural moderna

[61]Ou como repetido inúmeras vezes nos três livros seguintes: Equilíbrio, compatibilidade, modelo de constirução.

CÓPIA PARA REVISÃO

5. *Philosophy of structures*, Torroja, Polivka e Polivka, 1958 Intuição estrutural contra cálculo mecânico
6. *Structures*, Nervi, 1956b - A integração da engenharia e visão artística
7. "Design of high-rise buildings", Khan, 1965 Abordagem sistemática para sistemas estruturais de arranha-céus
8. *Towards a new architecture*, Le Corbusier, 1931 Princípios modernistas e suas implicações estruturais
9. *The Tower and the Bridge*, Billington, 1983b - A afirmação canônica da estética estrutural
10. *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*, Llunji, 2022 - Uma crítica necessária e caminho para a renovação

A tabela seguinte narra as principais figuras discutidas, revelando a evolução da intuição experimental através do rigor matemático à sofisticação computacional:

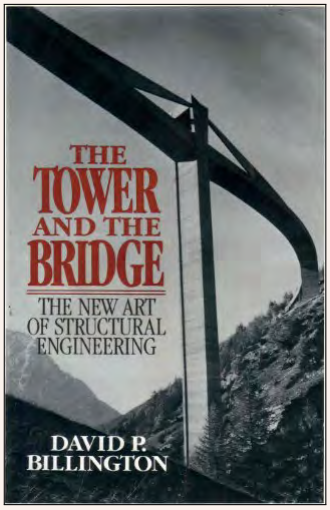
Tabela 15.7: A evolução de projeto estrutural aproxima-se

Nome	Anos	País (Praticar)	Arquiteto ou Engenheiro	Primário Inovação
		Métodos empíricos & Intuição Estrutural		
Eiffel	1832–1923	França	Engenheiro	Construção racional de ferro
Gaudí	1852–1926	Espanha	Arquiteto	Geometria catenária
Maillart	1872–1940	Suíça	Engenheiro	Arcos de concreto com três torções
Perret	1874–1954	França	Arquiteto	Arquitectura de concreto exposto pórtico
Nervi	1891–1979	Itália	Engenheiro	Ferrocement cascas
Morandi	1902–1989	Itália	Engenheiro	Concreto protendido
Saarinen	1910–1961	US	Arquiteto	Formas de concreto expressivas
Candela	1910–1997	México	Arquiteto	Parabolóide hiperbólico cascas
		Encontrando Formas Físicas		
Otto	1925–2015	Alemanha	Arquiteto	Estruturas de tensão
Isler	1926–2009	Suíça	Engenheiro	Método de membrana suspensa
Musmeci	1926–1981	Itália	Engenheiro	Pontes experimentais de concreto
Khan	1929–1982	US	Engenheiro	Sistemas de construção tubulares
Menn	1927–2018	Suíça	Engenheiro	Concreto protendido pontes
		Desenho Computacional		
Robertson	1928–2021	US	Engenheiro	Supertall sistemas de construção
Gehry	1929–2025	US	Arquiteto	Fabricação digital
Calatrava	1951–	Espanha	Arch./Eng.	Engenharia escultural
Virlogeux	1946–	França	Engenheiro	Pontes complexas paradas por cabo
Baker	1953–	US	Engenheiro	Otimização de topologia

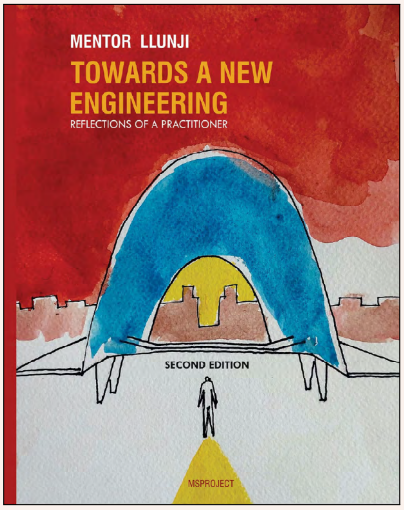
A jornada intelectual de Billington para Llunji (Figura 15.52) reflete a nossa evolução do que significa praticar engenharia estrutural como uma disciplina criativa. Enquanto Billington celebrava as conquistas estéticas de grandes engenheiros, Llunji nos desafia a

CÓPIA PARA REVISÃO

examinar se a profissão perdeu seu caminho na busca da eficiência computacional sobre a excelência criativa.



(a) A Torre e a Ponte (Billington, 1983b)



(b) Em direção a uma nova engenharia (Llunji, 2022)

Figura 15.52: Da celebração à crítica: Perspectivas evolutivas sobre criatividade estrutural

O caminho para a frente não requer abandonar a tecnologia, nem recuar na nostalgia, mas sim cultivar o que Baker chama de "geometria e equilíbrio", as percepções fundamentais que permitem aos engenheiros usar ferramentas computacionais como instrumentos de descoberta em vez de substituir o pensamento. Só entendendo os princípios que guiaram as pontes de Maillart e o cascas de Nervi podem hoje os engenheiros esperam criar estruturas dignas de unir essa distinta linhagem.

A escolha de cada nova geração de engenheiros estruturais continua sendo a mesma que confrontou Eiffel e Torroja: Você se contenta em servir como técnico e apoiante de ideias arquitetônicas, ou deseja juntar-se aos 5% que usam lógica estrutural para criar novas formas de beleza? A resposta não está na sofisticação do seu software, mas no profundo entendimento de como materiais e forças conspiram para criar estrutura e através da estrutura, significado.

CÓPIA PARA REVISÃO



Caravaggio, Martha e Mary Madalena (1598)

O ativo e contemplativo vive em diálogo: A estrutura serve à arquitetura como Martha serve a Mary. Chamadas distintas, dependência mútua, cada uma essencial para o todo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 16

Terrae Motus: Mitos, crenças e representações de terremotos

Abstract

Este capítulo examina o terremoto como um catalisador persistente para a imaginação humana através de culturas e períodos históricos. Começando com o mais antigo mitológico As estruturas em que os eventos sísmicos foram atribuídos a animais subterrâneos, cósmicos desequilíbrio, ou as lutas de gigantes aprisionados—ele traça o progressivo elaboração da interpretação do terremoto através das estruturas formais da religião, as investigações racionais da filosofia, e os recursos expressivos da literatura, arquitetura, arte, música e cinema. Um padrão consistente surge: Onde quer que seja terremotos ocorrem com frequência suficiente para entrar na memória cultural, eles geram Frameworks explicativos que atribuem agência, incorporam o evento dentro de uma moral ou cósmica ordem, e exigir resposta comunitária. O capítulo argumenta que este interpretativo A insistência de que o tremor da terra Quer dizer *Algo... é.. Não deslocado, mas progressivamente transformado pelo avanço do conhecimento natural: da teoria pneumática de Aristóteles através da crise do Iluminismo de Lisboa para A elegia secular da literatura e arte do século XX. O terremoto, isso O capítulo sugere que está entre os mais produtivos de todos os fenômenos naturais estudo de como as sociedades humanas confrontam os limites da ordem, estabilidade, e Entendendo.*

16.1 Introdução 659
16.2 Mitologia 660
16.2.1 Japão 661
16.2.2 Noroeste do Pacífico 664
16.2.3 Américas 665
16.2.4 Outras Tradições 666
16.2.5 Síntese: Mito como memória sísmica 667
16.3 Religião 667
16.3.1 Bíblia 668
16.3.2 Grécia 672
16.3.3 Índia 678
16.3.4 Islamismo 681
16.3.5 Mesoamérica 683
16.3.6 Xintoísmo 685
16.3.7 Síntese: A religião e o significado da catástrofe sísmica . 688
16.4 Filosofia 693
16.4.1 Aristotle 694
16.4.2 Eratóstenes 694
16.4.3 Lucretius e Plínio 695
16.4.4 O terremoto de Lisboa como evento filosófico 695
16.4.5 Reconstrução 698
16.5 Literatura 699
16.5.1 Terremotos na literatura . . . 699

CÓPIA PARA REVISÃO

16.5.2 O Terremoto de Lisboa de 1755 e o Debate sobre Iluminação . . . 700
16.5.3 O Terremoto de Messina de 1908 . . . 702
16.5.4 Síntese: Literatura e a Memória Cultural dos Terremotos . 703
16.6 Arquitetura . . . 704
16.6.1 Pirro Ligorio . . . 704
16.6.2 Gibellina . . . 704
16.7 Arte . . . 708
16.7.1 Rock Art e Traços de Falha . 708
16.7.2 Pintura . . . 710
16.7.3 Coleção Kozak . . . 711
16.7.4 Coleção Amelio . . . 712
16.8 Música . . . 714
16.9 Cinematografia . . . 714
16.10 Conclusão . . . 716
16.11 Epílogo: De Namazu a Roswell . . . 716

16.1 Introdução

Como alguns outros capítulos[1] deste livro, este capítulo aborda outro tópico temático relacionado a um grande estressor[2] de estruturas: terremotos, e mais especificamente sua relação com o subconsciente humano. Em outras palavras, examina como os terremotos moldaram nossa imaginação coletiva e influenciaram a mitologia, religião, filosofia e as artes.

Antes de prosseguir, é útil esclarecer três domínios intimamente relacionados mas distintos através dos quais os humanos tentaram interpretar fenômenos naturais: mitologia, religião e filosofia. Esses domínios não são rigidamente separados. como se tornará evidente, os limites entre eles são muitas vezes porosos, e a influência dos terremotos no pensamento humano raramente cai perfeitamente em uma categoria sozinho.

Mitologia refere-se a narrativas tradicionais que explicam fenômenos naturais através de histórias simbólicas envolvendo seres sobrenaturais ou forças cósmicas. No contexto dos terremotos, os mitos frequentemente atribuem o tremor da terra às ações de animais, divindades ou poderes subterrâneos. A mitologia é tratada primeiro neste capítulo, pois representa a camada mais antiga e universal da interpretação humana.

Religião fornece um quadro mais estruturado de crenças e práticas em que terremotos podem ser interpretados como manifestações da vontade divina, punição, advertência ou teste moral dentro de uma ordem teológica mais ampla. Crucialmente, as tradições religiosas são frequentemente enraizadas em narrativas mitológicas anteriores ou absorvidas. A fronteira entre as duas é historicamente fluida ao invés de fixa. Um mito que atribui

[1] A gênese deste meu interesse surgiu quando visitei a cidade de Gibellina, com um terremoto§16.6.2), e refletiu sobre como a sociedade tem literalmente encoberto isso

[2] No contexto de análise estrutural, a *Estressor* denota qualquer ação ou influência que induza tensões ou deformações dentro de uma estrutura. Abrange cargas externas (como gravidade, vento, terremoto, efeitos térmicos ou impostos deslocamentos), bem como efeitos ambientais ou dependentes do tempo (por exemplo gradientes de temperatura, encolhimento, ou fluência). Em suma, um estressor é qualquer causa física capaz de gerar esforços internos, tensões, ou deformações dentro de um sistema estrutural.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

terremotos a um deus subterrâneo inquieto pode, ao longo do tempo, ser incorporado em um sistema religioso formal com seus próprios rituais, clero e textos canônicos. Por esta razão, algumas das tradições do terremoto discutidas neste capítulo resistem à estrita classificação como puramente mitológica ou puramente religiosa, e o leitor deve ter isso em mente.

Filosofia, em contraste, busca explicações racionais fundamentadas no raciocínio e observação. Da antiguidade em diante, filósofos têm tentado entender terremotos como processos naturais governados por princípios subjacentes, movendo assim a interpretação da narrativa mítica para uma investigação sistemática – uma trajetória que levou ao Sismologia moderna.

Dada a amplitude incomum do assunto deste capítulo – domínios de expansão Isso está fora do escopo típico de um texto de engenharia estrutural. 16.1 fornece um mapa temático para orientar o leitor antes da cobertura detalhada começar.

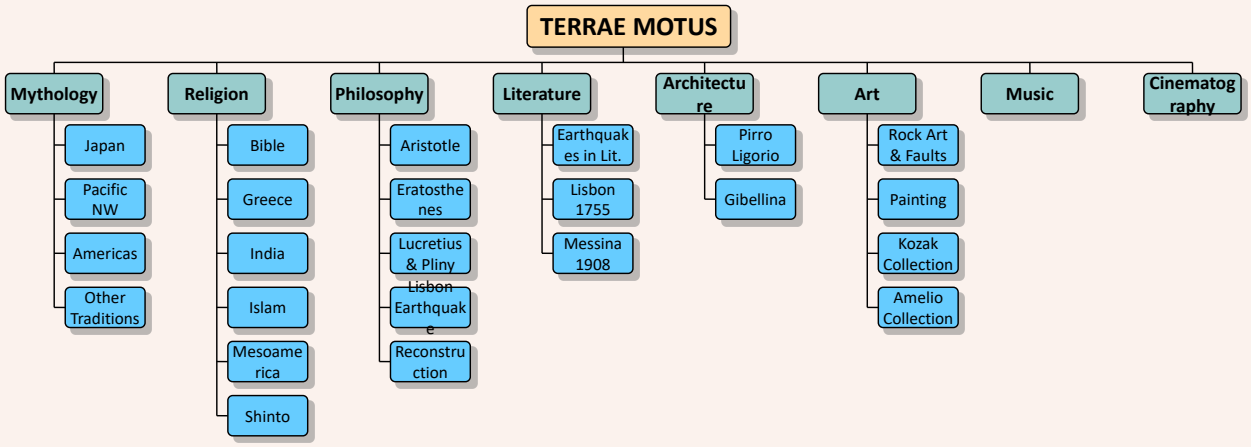


Figura 16.1: Estrutura temática do capítulo

16.2 Mitologia

Um Paul Dirac famosamente escreveu

> É compreensível porque pessoas primitivas, que estavam muito mais expostas às forças dominantes da natureza do que nós somos hoje, deveriam ter personificado essas forças com medo e tremor. Mas hoje em dia, quando entendemos tantos processos naturais, não temos necessidade de tais soluções.
>
> Dirac, 1963 *"The Evolution of the Physicist's Picture of Nature"*

CÓPIA PARA REVISÃO

Muito antes do surgimento de religiões organizadas ou explicações filosóficas, as sociedades humanas tentaram *Compreender os terremotos através da mitologia*.. Esses mitos não estavam inseridos em sistemas teológicos formais, mas pertenciam a tradições orais que interpretavam fenômenos naturais através de narrativas simbólicas. Em tais relatos, terremotos eram muitas vezes atribuídos aos movimentos de animais ou seres sobrenaturais que acreditavam apoiar ou habitar a Terra. Essas explicações refletem tentativas precoces de impor significado e causalidade em eventos que pareciam súbitos, violentos e incompreensíveis.

A ubiquidade das narrativas mitológicas de terremoto em culturas amplamente separadas é notável. Do Japão e Ásia Central ao Pacífico Noroeste da América do Norte e Mesoamérica, sociedades sem contato um com o outro chegaram a quadros explicativos estruturalmente semelhantes: uma vasta criatura se agita sob a terra; Um guardião sobrenatural falha em vigilância; Forças cósmicas opostas caem temporariamente fora de equilíbrio. Que tais narrativas devem emergir independentemente em todo o mundo fala com um impulso cognitivo humano compartilhado – a necessidade de ancorar a terrível arbitrariedade da catástrofe sísmica dentro de uma história que atribui agência, causação, e, finalmente, significado.

16.2.1 Japão

A Tradição Namazu

No Japão, a predominante - embora não a única - explicação folclórica para terremotos é centrada na existência de um peixe-gato subterrâneo gigante (*Namazu*). A crença desenvolveu-se gradualmente ao longo de vários séculos a partir das tradições nativas do povo japonês, influenciado em parte por ideias cosmológicas chinesas. De acordo com esta visão, o gigante Namazu viveu em águas subterrâneas sob o Santuário de Kashima na província de Hitachi (atual Prefeitura de Ibaraki). Uma grande rocha conhecida como *Kaname-ishi* Acreditava-se que a "pedra de fundação"ou a "pedra de pivô"prendevam a criatura e impediam que ela se movesse. 16.2c).

Só a pedra, no entanto, era considerada insuficiente para conter os Namazu. O sistema dependia da divindade Kashima (*Takemikazuchi-no-kami*), um deus associado com trovão e poder marcial, pressionando sobre a pedra para manter o bagre imóvel (Fig. 16.2c). Todos os anos, durante o décimo mês lunar.. *Kannazuki*Kashima deveria deixar seu posto e viajar para Ise para assistir à reunião anual das principais divindades japonesas no Grande Santuário. Durante sua ausência, a divindade local Ebisu (ou Ibizu) foi encarregado de manter a pressão sobre a pedra. Se Kashima negligenciasse seu dever, ou se Ebisu não tivesse conseguido conter a criatura durante a ausência do deus, os Namazu se contorceriam sob a terra, causando terremotos (Fig. 16.2b). Acreditava-se que a gravidade do tremor correspondia diretamente à magnitude dos movimentos do bagre.

As dimensões culturais e sociais da tradição Namazu cristalizaram dramaticamente

CÓPIA PARA REVISÃO

seguindo o grande Ansei Edo terremoto de 1855, que gerou um notável corpus de impressões em blocos de madeira conhecidos como *Namazu-e* (“ fotos de peixe gato,’ ’ Figs. 16.2a–16.2e), (Smits, 2006). Estas impressões retratam o bagre em uma ampla gama de papéis narrativos e satíricos: Atravessando a cidade enquanto a divindade Kashima está ausente (Fig. 16.2b", sendo subjugado ou punido pelo deus em seu retorno"(Fig. 16.2c), e em um registro mais ambivalente, presidindo sobre cenas de redistribuição econômica em que os plebeus lucram com a destruição dos bens acumulados de comerciantes ricos (Figs. 16.2a e.. 16.2d) (Smits, 2006). Este último tema, os Namazu como agente de *Yonaoshi* Reflete uma corrente popular em que o terremoto, por todo seu terror, também foi percebido como uma força de nivelamento que interrompeu hierarquias sociais entrincheiradas (Fig. 16.2e).



(a) Povo de Edo atacando os Namazu por causar o terremoto de 1855



(b) Namazu se esvaindo enquanto a cidade queima



(c) Deidade Kashima subjugando o peixe-gato causador de terremotos



(d) Catfish como uma divindade popular trazendo mudanças sociais favoráveis



(e) Kashima ou Ebisu com a pedra de fundação

Figura 16.2: Exemplos de *Namazu-e* Impressões retratando o peixe-gato gigante responsável por terremotos (Miyata e Takada, 1995)

A origem precisa da conexão entre Namazu e terremotos permanece incerta. É possível

CÓPIA PARA REVISÃO

que a idéia mais ampla de um peixe gigante apoiando a terra tenha sido transmitida da China através das tradições budistas. Alguns templos chineses retratam o Bodhisattva Guanyin em pé no topo de um grande peixe parecido com o Namazu japonês. Enquanto o pensamento chinês certamente influenciou a cosmologia japonesa, a associação específica e persistente entre um peixe-gato gigante e terremotos parece ter se desenvolvido de forma única no Japão (Ludwin e Smits, 2007). A escolha de um bagre é sugestiva: A criatura é de baixo, praticamente invisível, e capaz de um movimento repentino e poderoso, um símbolo adequado para as forças ocultas do mundo subterrâneo.

Curiosamente, há algumas evidências etno-sismológicas sugerindo que bagre e outros peixes com alimentação de fundo exibem comportamento incomum nas horas ou dias anteriores aos terremotos, possivelmente em resposta às mudanças na química das águas subterrâneas, eletromagnético campos, ou precursores micro-sísmicos. Se os observadores japoneses realmente notaram tais anomalias comportamentais e as incorporaram ao mito, ou se o bagre servia puramente como uma figura simbólica, continua a ser uma questão em aberto - mas a possibilidade de que a tradição Namazu preservasse um núcleo de observação empírica dentro de sua mitológica pórtico merece consideração (Ludwin e Smits, 2007).

Explicações Cosmológicas: Yin, Yang e Competindo Frameworks

Ao lado da tradição Namazu, uma explicação mais filosófica dos terremotos circulava no Japão, enraizada na filosofia natural chinesa. O *Ansei Kenmonroku* (Records of Things Vine and Heard in the Ansei Era, c. 1854) interpreta terremotos através da teoria cosmológica de Yin (*Em*) e Yang (*yō*): A água (puramente Yin) normalmente domina o reino subterrâneo e suprime o fogo (puro Yang), mas terremotos ocorrem quando este equilíbrio é interrompido e fogo subterrâneo temporariamente supera a água. A analogia com fenômenos vulcânicos e geotérmicos é impressionante, e pode refletir uma intuição – no entanto pré-científico – que o calor está implicado na agitação da terra.

Significativamente, algumas folhas impressas após o terremoto de 1855 Ansei empregaram ambos os quadros simultaneamente, enquanto explicitamente descrevevam a explicação do bagre como uma teoria não sofisticada A cosmologia como paralela, e às vezes competindo, as estruturas explicativas ilustram que culturas pré-científicas não eram uniformemente crédulas. eles debateram, classificaram e às vezes explicitamente descartou contas concorrentes de causa natural.

As impressões de Namazu-e e a retificação mundial

O terremoto de Ansei–Edo de 1855, estimado em magnitude 7.0-7.1, atingiu Edo (atual Tóquio) no segundo dia do décimo mês de Ansei 2, causando incêndios devastadores e entre 4.000 e 10.000 mortes (Miyata e Takada, 1995; Smits, 2006; Abe, 2000). Dentro de dois dias, as impressoras começaram a produzir *Namazu-e* "As folhas que constituem um dos Corpos mais notáveis de imagens populares de desastres na história pré-moderna.

CÓPIA PARA REVISÃO

A distribuição geográfica dos danos deu ao evento particular ressonância política: A destruição caiu desproporcionalmente em residências samurais e apoiadores dos Tokugawa *Bakufu*, cuja autoridade já estava enfraquecida pela abertura forçada do Japão ao comércio exterior após as visitas do Comodoro Perry de 1853-54, enquanto alguns distritos comuns escaparam relativamente ilesos Smits, 2006. Artistas exploraram essa assimetria através do conceito de *Yonaoshi* ("Retificação do mundo'): Os Namazu apareceram não só como destruidor, mas como agente de nivelamento, presidindo à redistribuição da riqueza da elite para os artesãos e comerciantes que lucrariam com a reconstrução. Porque as críticas diretas ao governo Tokugawa carregavam severas penalidades, este comentário político foi incorporado em simbolismo, alegoria visual e jogo de palavras *Namazu-e* Não apenas ilustrações de um evento sísmico, mas documentos culturais ricos refletindo as tensões sociais e políticas do final do período Edo (Wakamizu, 2003) (ver Fig. 16.2).

16.2.2 Noroeste do Pacífico

Ao longo da costa de Cascádia, terremotos e tsunamis foram interpretados através de mitológico narrativas envolvendo poderosos seres sobrenaturais cujos movimentos eram acreditados para sacudir a terra e enviar grandes ondas para a costa. Em uma região sentada no topo do Zona de Subdução Cascadia, uma das configurações tectônicas mais sísmicas e tsunamigenicamente perigosas do mundo, tais narrativas podem codificar memórias culturais de eventos geológicos genuinamente catastróficos, incluindo o grande terremoto e o tsunismo Janeiro de 1700 e eventos anteriores no registro holoceno.

Thunderbird e baleia

O tema mais conhecido do terremoto na região envolve uma luta entre o Thunderbird, um poderoso espírito celeste associado com trovões e tempestades, e a baleia, uma criatura das profundezas do oceano. De acordo com muitas tradições, seus violentos encontros fizeram o solo tremer e o mar surgir... um emparelhamento que corresponde precisamente à assinatura co-sísmica do tsunami de uma grande ruptura da Zona de Subdução Cascádia. Entre o povo Quileute da costa de Washington, as tradições orais descrevem uma grande batalha em que o tremor da terra e a inundação da costa estavam inextricavelmente ligados. Imagens semelhantes aparecem entre os Yurok do norte da Califórnia, sugerindo que o motivo se estende por grande parte da região mais ampla, Fig. 16.3b.. A persistência e o alcance geográfico dessas histórias, combinadas com sua ligação consistente de terra tremendo com a inundação costeira, levou alguns pesquisadores a argumentar que o ciclo Thunderbird-Whale preserva uma memória genuína do megathrust pré-histórico terremotos (Ludwin e Smits, 2007).

Espíritos Paisagísticos e Memória Geológica

Outras tradições da região de Puget Sound associam terremotos e mudanças repentinas na paisagem com seres serpentes sobrenaturais habitando características geográficas

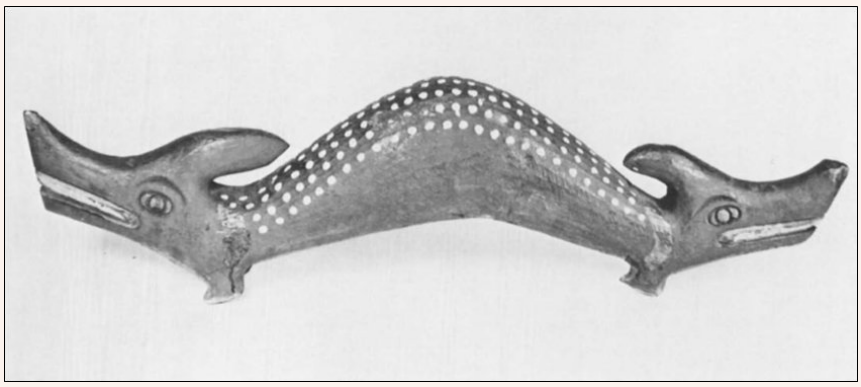
CÓPIA PARA REVISÃO

particulares. Um exemplo notável é o "Pedra do Espírito" perto de Fauntleroy em West Seattle, tradicionalmente ligado por povos indígenas locais a uma entidade sobrenatural conhecida como *A'Yahos*, descrito em termos que correspondem de perto aos efeitos físicos de terremotos ou grandes deslizamentos de terra: Repentino e violento tremor, a transformação do terreno familiar, e a libertação de forças destrutivas de dentro da terra. A serpente de duas cabeças associada com distúrbios da terra está espalhada por culturas do noroeste do Pacífico, aparecendo em numerosos contextos cerimoniais incluindo o *Sxwayxwey* Máscaras de povos da Costa Salish. Esta figura pode ser entendida como uma codificação simbólica da dualidade tectônica: uma força simultaneamente subterrânea e superficial, conectando o interior oculto da terra à paisagem visível acima, fig. 1. 16.3a.

As tradições do Noroeste do Pacífico são de particular interesse para os sismólogos modernos porque o registro geológico da região é incomummente bem restrito. O terremoto de Cascádia 1700 está documentado na estratigrafia geológica, florestas fantasma, camadas de areia tsunami, pântanos costeiros submersos e em registros históricos japoneses de um tsunima órfão. Isto A convergência de evidências geológicas, históricas e indígenas orais para um único evento catastrófico deu credibilidade renovada à hipótese de que essas narrativas preservam a memória genuína do evento 1700 e talvez das rupturas anteriores da Cascádia (Ludwin e Smits, 2007), levantando questões profundas sobre a capacidade da tradição oral de servir como repositório de informações geológicas através de escalas de tempo de séculos ou Milênios.



(a) Máscara Sxwayxwey da Colúmbia Britânica continental.



(b) Uma representação cerimonial Quileute.

Figura 16.3: Objetos cerimoniais da costa noroeste do Pacífico representando sísmico Espíritos.

16.2.3 Américas

Do outro lado da Mesoamérica e da costa do Pacífico... uma região de sísmico intenso e vulcânico atividade ao longo da borda leste do anel de fogo do Pacífico - mitologia

CÓPIA PARA REVISÃO

terramoto desenvolvido em estreita correspondência geográfica com os perigos geológicos experimentados por Os povos que habitavam essas paisagens.

Mesoamérica e os códices

No centro e norte do México, manuscritos pictóricos conhecidos como códices retratam terremotos e em alguns casos registram o número de eventos e suas datas, sugerindo que os eventos sísmicos foram integrados em sistemas históricos, calendricos e divinatórios. Na tradição asteca, o sinal do dia *Ollin* ('movimento' ou 'terramoto') manteve um lugar proeminente no calendário ritual de 260 dias, o *tonalpohualli*, e a idade cósmica atual – o Quinto Sol – foi nomeado *Nahui Ollin* ('Quatro Movimento'), profetizado para terminar em um terremoto catastrófico. A Pedra do Sol Asteca (*Piedra del Sol*), um dos objetos mais icônicos da civilização pré-colombiana, coloca o *Ollin* glifo no centro de sua composição – uma declaração visual da centralidade cósmica do terremoto que vai muito além da simples explicação popular, representando em vez disso um sofisticado engajamento filosófico com a recorrência e imprevisibilidade de eventos sísmicos.

16.2.4 Outras Tradições

Enquanto as seções anteriores têm focado em tradições regionais bem documentadas, a mitologia do terremoto é um fenômeno genuinamente global, e uma série de tradições adicionais merecem breve consideração.

Na Escandinávia, como mencionado acima, a mitologia nórdica atribuiu terremotos às convulsões de Loki, o deus trapaceiro, que foi condenado a ficar preso sob a terra com uma serpente pingando veneno em seu rosto. Sua dor se contorceu temporariamente quando sua esposa Sigyn pegou o veneno em uma tigela, e renovou com violência particular quando ela virou de lado para esvaziar-lo - fez o chão acima tremer. O mito é notável por seu enquadramento moral: O terremoto é consequência da punição divina, uma externalização da transgressão e do sofrimento.

Na Índia, o *Shatapatha Brahmana* e outros textos antigos descrevem a terra como descansando sobre as costas de um grande javali (*Varaha*), um avatar de Vishnu, enquanto tradição popular em várias regiões atribuía terremotos aos movimentos de um grande elefante ou da tartaruga-mundo sobre cujas costas a terra era equilibrada. As tradições do Sul e Sudeste Asiático participaram, assim, do motivo amplamente difundido de 'terra apoiada por animais' discutido acima. Na cosmologia filosófica hindu, terremotos também foram interpretados através da lente de *karma* e tempo cósmico: certos eventos sísmicos foram associados com as transições entre idades cósmicas (*Yugas*), emprestando-lhes um significado escatológico análogo ao asteca *Nahui Ollin*.

No Oriente Médio, antigos textos mesopotâmicos de Sumer e Babylon registram eventos terremotos e os atribuem à raiva de divindades específicas, particularmente o deus da tempestade. Alguns estudiosos argumentaram que a destruição de cidades antigas ao

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

longo do sistema de falhas da Transformação do Mar Morto, uma estrutura sismicamente ativa que atravessa o Levante, é refletida em relatos bíblicos de destruição divinamente ordenada, incluindo a queda de Jericó e a destruição de Sodoma e Gomorra. Enquanto as conexões causais entre textos específicos e eventos geológicos específicos permanecem debatidas, o padrão mais amplo de atividade sísmica na região e sua influência potencial nas tradições religiosas e mitológicas é um assunto interdisciplinar em curso Pesquisa.

16.2.5 Síntese: Mito como memória sísmica

As tradições pesquisadas neste capítulo revelam um padrão global consistente: as culturas humanas situadas em regiões sismicamente ativas desenvolvem estruturas mitológicas que codificam, explicam e dão significado moral e social à experiência dos terremotos. Esses quadros diferem em suas imagens específicas... guardiães animais, forças serpentinas, desequilíbrio cósmico, punição divina... mas eles compartilham uma lógica estrutural comum. Eles designam a agência para o terremoto (é causado por um ser); Eles incorporam essa agência em uma narrativa de supervisão ou tutela (o ser é normalmente controlado, mas às vezes escapa ou ataca); e frequentemente ligam o terremoto a processos mais amplos de renovação social ou cósmica.

Várias dessas tradições parecem ter conteúdo empírico genuíno ao lado de suas estruturas simbólicas. As histórias do Noroeste do Pacífico ligando o solo tremer à inundação costeira correspondem com precisão à assinatura co-sísmica de tsunami dos eventos megathrust Cascadia. O agrupamento geográfico da arte rupestre relacionada ao terremoto sobre falhas ativas em Baja California e no sul da Califórnia sugere que os locais de imagens mitológicas foram, em alguns casos, determinados por fenômenos sísmicos observados. A tradição japonesa do comportamento anômalo de bagres pode preservar um núcleo de observação sobre precursores animais para eventos sísmicos. Nada disso requer que creditemos essas tradições com a compreensão científica no sentido moderno; Mas sugere que a atenção cuidadosa às tradições mitológicas e orais pode, em alguns casos, produzir informações de genuína relevância geológica.

O estudo da mitologia do terremoto não é apenas um exercício na história cultural. Ele ilumina a profunda necessidade humana de dar sentido à catástrofe, enquanto também demonstra que a fronteira entre narrativa mitológica e observação empírica é muitas vezes mais permeável do que poderia parecer.

16.3 Religião

A interpretação religiosa dos terremotos difere do mitológico em grau de elaboração institucional em vez de na espécie. Onde a mitologia oferece narrativa explicações enraizadas na tradição oral e no imaginário simbólico, a religião incorpora essas explicações

CÓPIA PARA REVISÃO

dentro de estruturas formais de doutrina, liturgia e texto sagrado – dando o terremoto um lugar fixo dentro de uma ordem teológica maior e gerando prescrito Respostas comuns à catástrofe sísmica. Ainda assim, como a introdução deste capítulo Observado, a fronteira entre os dois domínios é historicamente fluida em vez de fixa: As narrativas mitológicas são frequentemente absorvidas em sistemas religiosos, transformados em o processo, mas nunca completamente apagado. As tradições pesquisadas nesta seção ilustrar essa dinâmica com clareza particular.

Através das tradições examinadas abaixo... Judeo... Cristão, Grego, Hindu, Budista, Islâmico, Mesoamericano, e japonês... um padrão consistente surge. Terremotos nunca são apenas eventos geológicos; eles são sempre comunicações, quer da presença divina, Raiva divina, desequilíbrio cósmico ou iminência escatológica. O teológico específico o conteúdo dessa comunicação varia enormemente de tradição para tradição, mas a O reflexo interpretativo em si – a insistência de que o tremor da terra significa algo, que é dirigido à humanidade e exige uma resposta – parece ser universal. É precisamente este reflexo que a tradição filosófica, pesquisada em §16.4, será submetido ao seu primeiro exame crítico sustentado.

16.3.1 Bíblia

Dentro da tradição judaica, Deus freqüentemente se manifesta através do natural Fenômenos. Terremotos, tempestades, fogo e inundações são interpretados não apenas como Ocorrências geológicas ou meteorológicas, mas como expressões visíveis da presença divina, Poder, e vontade. Este quadro interpretativo é contínuo, mas distinto do Tradições mitológicas pesquisadas acima: Onde o mito atribui a agência sísmica ao subterrâneo criaturas ou forças cósmicas, religião bíblica incorpora o terremoto dentro de um teológico Uma narrativa de aliança, julgamento e redenção... uma em que o tremor da terra é inseparável da condição moral da humanidade. O terremoto bíblico serve, dependendo do contexto, como teofania, como instrumento de intervenção milagrosa, ou como o Memória codificada de genuína catástrofe geológica absorvida pela narrativa sagrada.

Teofania e Presença Divina

Um exemplo marcante de terremoto como a teofania[3] ocorre durante o revelação no Monte Sinai:

[3]Do grego *Teofânia* ($\theta\varepsilon o\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha$), Composto de *Theos* ($\theta\varepsilon o\varsigma$), “deus’, ’e *phainein* ($\varphi\alpha\iota\nu\varepsilon\iota\nu$), "aparecer"ou "aO termo denota uma manifestação direta e perceptível do divino dentro A ordem criada, distinta de *epifania* (*epifanéia*, $\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha$), que mais amplamente designa uma aparência ou chegada divina, e de *Apocalipse* (*ApokalýPsis*, $\alpha\pi o\kappa\alpha\lambda\upsilon\psi\iota\varsigma$), significando uma revelação ou revelação de conhecimento oculto. Na tradição hebraica, o Theophany no Sinai pertence a um gênero literário bem definido, em que vulcânico, sísmico, e fenômenos atmosféricos coletivamente sinalizam a aproximação de *YHWH* (o Tetragrama, transliterado *Yod-hē-wāW-hē*), o Deus de Israel. O tratamento acadêmico clássico permanece Jeremias, 1965.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

> Todo o monte Sinai estava coberto de fumaça porque o Senhor tinha caído sobre ele no Forma de fogo. A fumaça jorrou no céu como fumaça de uma fornalha, e o Toda a montanha tremeu violentamente. (Êxodo 19:18)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



Figura 16.4: *Israel no Monte Sinai* (1703) por Jan Luyken. A gravura ilustra a teofania sísmica como uma total reviravolta ambiental, onde o irregular, instável A renderização dos picos sugere o tremor violento da terra em resposta a A presença divina.

O terremoto aqui não permanece sozinho, mas faz parte de um complexo maior de vulcânicos e fenômenos atmosféricos – fogo, fumaça, escuridão – através do qual a presença divina é - Não, não 16.4). Uma convergência similar de sísmica e sinais atmosféricos aparecem na *Livro dos Juízes*:

> A terra tremeu, e os céus caíram, as nuvens também lançaram água; O, o As montanhas derreteram de antes do SENHOR.[a]
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments
>
> [a]Juízes 5:4. Os franceses Tradução, igualmente evocativa, diz: *"La terre trembla, les cieux Chanceler, les nuées déversèrent de l'eau, les montagnes s'affaissèrant devant Le Seigneur* (Louis Segond, 1910). O verbo hebraico traduzido por "derretido"(*Nāzalû*) carrega o sentido de fluir ou dissolver, sugerindo a Liquefação ou desestabilização da paisagem diante do divino Um detalhe de potencial interesse sismológico.

CÓPIA PARA REVISÃO

Em ambas as passagens, o tremor da Terra funciona como um reconhecimento cósmico do divino A própria paisagem respondendo à presença de Deus.

Terremoto como intervenção milagrosa

O Novo Testamento contém vários episódios em que terremotos Acompanhe momentos de importância religiosa decisiva. No momento de Cristo Morte, Matthew registra que a terra tremeu, as rochas se dividiram, e o "Os túmulos foram abertos"(Mateus 27:51-53)—uma passagem notavelmente ausente do outro Evangelhos, e um em que o evento sísmico serve como uma ratificação cósmica do crucificação. Da mesma forma, o relato da ressurreição em Mateus 28:2 registra que "lá"Foi um grande terremoto, pois um anjo do Senhor desceu do céu

Um episódio mais íntimo de intervenção sísmica milagrosa ocorre em Atos 16:19-40, Quando Paul e Silas Estão presos em Philippi E continuar a rezar e cantar hinos apesar de suas correntes (Fig. 16.5). Sua perseverança é recompensada dramaticamente:

> De repente, veio um grande terremoto, de modo que as fundações da prisão foram abalados; e imediatamente todas as portas foram abertas e todos as correntes estavam desapertado. (Atos 16:26)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



Figura 16.5: Apedrejamento do Apóstolo Filipe em Hierápolis, Frígia (Jan Luyken, 1685).

Aqui o terremoto não funciona nem como teofania nem como julgamento, mas como Uma expressão sísmica da solidariedade divina com os fiéis perseguidos. O padrão é consistente com a teologia bíblica mais ampla em que catástrofe natural, Ao invés de ser arbitrária, é sempre propositivo: serve, castiga, entrega, ou revela.

CÓPIA PARA REVISÃO

Eventos geológicos na narrativa bíblica

Algumas narrativas bíblicas parecem corresponder a eventos geológicos identificáveis, elevando a questão de quanta memória religiosa antiga pode preservar os traços da sísmica real Catástrofes. A travessia do rio Jordão e o subsequente Destruição dos muros de Jericó estão entre os mais frequentes Discutimos exemplos. Ambos os eventos ocorrem ao longo da greve principal - desliza Jordan Valley Culpa, uma das estruturas mais sismicamente ativas no Levante-se. Um forte terremoto poderia ter induzido o colapso do quase As margens verticais do rio... compostos de marl macio e argila aluvial particularmente suscetível à desestabilização sísmica, bloqueando temporariamente o fluxo A montante e permitindo que o leito rio abaixo drenasse o suficiente para cruzar. O quê Empresta esta hipótese peso incomum é a precisão geográfica do relato bíblico Ele mesmo: Joshua 3:16 nomeia especificamente a cidade de *Adam* (identificado com moderno Damiya) como o local onde as águas ''piled—precisamente o site Onde colapsos de bancos induzidos por terremoto foram historicamente documentados em múltiplos ocasiões, incluindo em 1267, 1546, 1906, e mais recentemente em 1927, quando uma magnitude 6.2 O terremoto bloqueou o rio por mais de 21 horas. A recorrência de Este fenômeno na mesma localização geográfica dá considerável plausibilidade a leitura sísmica da narrativa de Joshua. Mais danos sísmicos podem ter contribuído até o colapso das muralhas de Jericó (Fig. 16.6). A destruição de Jericho já foi catalogado como um evento sísmico em uma crônica do século XV, e Escavações arqueológicas em Tell-Sultan Revelaram Camadas de destruição consistentes com danos causados pelo terremoto (Nur e Burgess, 2008).



Figura 16.6: A Batalha de Jericó (c. 1560) por Virgil Solis (Coleção Kozac).

A destruição de Sodoma e Gomorra tem sido similarmente ligado a um grande terremoto ao longo do mesmo sistema de falhas, possivelmente acompanhado por Liberações explosivas de gás natural e betume... ambos abundantemente documentados ao longo da falha Estruturas da Transformação do Mar MortoAssim como vulcânico atividade na região. Esta conexão já foi notada na seção anterior Tradições mitológicas do Oriente Médio (§16.2.4).

CÓPIA PARA REVISÃO

Uma hipótese mais especulativa mas amplamente discutida conecta o Êxodo narração com a erupção catastrófica de Santorini (Thera), um dos eventos vulcânicos mais poderosos do mundo antigo, datado de aproximadamente o século XVII ou XVI a.C... A hipótese, desenvolvida em várias formas por estudiosos incluindo Nur e Burgess, 2008 Propõe que a intensa atividade sísmica e vulcânica associada a esta erupção pode ter desencadeou uma cascata de distúrbios ambientais através do Mediterrâneo oriental Lembrando-se das pragas bíblicas, incluindo a prolongada escuridão associada com Nuvens de cinzas vulcânicas – e que distúrbios sísmicos podem ter contribuído para o alteração dos níveis de água descritos na narrativa do cruzamento Êxodo. Em um lugar mais popular tratamento da mesma hipótese, Jacobovici e Cameron, 2006 Pontos para uma inscrição hieróglifo no museu de Ismailiya e argumenta que O "Mar Vermelho"do relato bíblico pode se referir a uma bacia de água doce rasa, Lake El-Bala, que secou após a construção do Suez Canal no século XIX, e cujo nível de água pode ter sido suscetível a rápidas mudanças induzidas por sismicamente.

Se tais interpretações geológicas estão ou não corretas, elas ilustram um Fenômeno mais amplo e bem estabelecido: comunidades habitando sísmicamente ativas paisagens codificam sua experiência de eventos catastróficos dentro de narrativas que são simultaneamente histórico, teológico e mitológico. A fronteira entre estes Categorias, como a introdução deste capítulo observou, raramente são fixas. Neste sentido, o A Bíblia participa da mesma dinâmica fundamental identificada através do mitológico as tradições pesquisadas acima – o impulso humano para tornar a terrível imprevisibilidade de A Terra tem significado dentro de uma estrutura narrativa maior.

16.3.2 Grécia

Entre os antigos gregos, A interpretação dos terremotos ocuparam uma posição de uma vez mitológica, religiosa, e - como a seguinte seção irá -Incipiente filosófico. Os limites entre esses domínios eram, no grego O mundo, particularmente fluido: a mesma divindade poderia ser invocada em um contexto de culto, narrado em verso mitológico, e submetido a críticas racionais dentro de uma única geração de Pensadores. Portanto, é impossível tratar a resposta religiosa grega aos terremotos em completo isolamento das tradições mitológicas já pesquisadas acima; mas sim, Os dois devem ser entendidos como camadas sucessivas de uma tradição interpretativa contínua.

Poseidon Enosichthon: O Shaker da Terra

A atribuição de terremotos a Poseidon Não era apenas um conveniência mitológica, mas uma questão de culto religioso ativo. Poseidon entediava, entre seus muitos epítetos, o título *Enosichthon* ($\varepsilon\nu o\sigma\iota\chi\theta\omega\nu$- "Terra-Shaker'— e *Ennosigaios* ($\varepsilon\nu\nu o\sigma\iota\gamma\alpha\iota o\varsigma$"Aquele que balança o "Esses epítetos já aparecem em Homero" e.. Hesíodo, atestando a antiguidade da associação. Na *Ilíada*O movimento de Poseidon através da paisagem é descrito em termos que Não deixe ambiguidade sobre seu caráter sísmico:

CÓPIA PARA REVISÃO

> Ele seguia adiante, e as florestas altas e as montanhas tremiam sob o Pés imortais de Poseidon enquanto se movia. (O que é isso*Ilíada*XIII.18
>
> Homer, 1924 The Iliad

Embora Poseidon seja lembrado na ordem olímpica posterior principalmente como o deus do Mar, camadas mais antigas de tradição sugerem um papel mais arcaico e mais amplo. Antes de sua A identidade tornou-se principalmente marítima, ele parece ter sido associado com a terra Ele mesmo, com o mundo mineral sob a crosta, e com as forças ocultas capazes de Ruptura surficial violenta. Nesta concepção mais antiga, terremotos e tempestades eram manifestações de sua raiva. O gradual estreitamento de seu domínio para o mar, enquanto O terremoto manteve seu nome, reflete o caráter estratificado da religião grega Tradição: novas estruturas teológicas foram colocadas sobre as mais velhas sem completamente Deslocando-os.

Terremotos na Grécia não foram explicados apenas por referência a Poseidon, mas respondeu através da prática religiosa. Sacrifícios foram oferecidos para aplacar o deus após grandes eventos sísmicos, e seus santuários eram freqüentemente situado em zonas costeiras e geologicamente ativas. A conexão entre sísmica instabilidade e presença divina foi assim institucionalizada no culto, não meramente narrado no mito.

Encelado e Gigantomachy

A tradição de Poseidon, na qual o movimento ativo de um deus causa a terra Para sacudir, coexistiu no pensamento religioso grego com um estruturalmente diferente Conta enraizada na mitologia da Gigantomaquia— o Grande guerra primordial entre os deuses olímpicos e os gigantes nascidos na terra. Em Esta tradição, terremotos são causados não pela passagem de um deus mas pelo Lutas aprisionadas de um inimigo cósmico derrotado.

Enceladus ($Εγκελαδος$) O mais poderoso dos Giants e o adversário tradicional de Athena Na Gigantomachy, foi derrubado pela lança da deusa e enterrado sob a ilha da Sicília... ou, na tradição mais precisa de Virgil e Statius, sob o Monte Etna Ele mesmo. Os fogos vulcânicos de Etna foram Preso a ser o sopro de Enceladus; Seu tremor é o resultado de sua transformação Ferido do lado de baixo da montanha. Virgil dá ao mito o seu mais célebre Expressão latina:

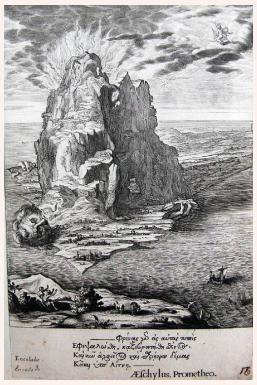
> Fama est Enceladum semustum fulmine corpus
> Urstri Mole Hac, Ingentemque Insuper Aetnam
> Impositam ruptis flammam exspirare caminis,
> e fessum quotiens mutet latus, intremere omnem
> Murmure Trinacriam et Caelum subtexere fumo.
>
> A história é contada que Enceladus, seu corpo está com um raio
> está preso sob toda esta massa, e sobre ele
> Etna gigante sopra fogo de suas fornalhas estouradas;
> E quando ele se move de lado,
> Toda a Sicília treme e geme, e o céu está coberto de fumaça.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

> Vergilius Maro, 2008 The Aeneid

A lógica teológica da tradição Enceladus difere em um respeito crucial Da de Poseidon. Onde Poseidon é uma divindade soberana cuja raiva ou O movimento produz efeitos sísmicos como um subproduto de seu poder, Enceladus é Um prisioneiro... um representante das forças terrestres primordiais (nascida de Gaia) e o sangue de Urano) que a ordem olímpica derrotou e reprimiu. Sua existência contínua sob a terra é um sinal não do poder divino, mas Da vitória divina: O terremoto é a última convulsão de um derrotado ordem pré-cósmica, prova de que os olimpianos subjugaram mas não totalmente extinguiu a violência inerente à própria terra. Esta leitura do o terremoto como a persistência da força primordial suprimida sob um A ordem cósmica imposta não tem paralelo na tradição de Poseidon, e ela antecipa, na forma mitológica, a lógica estrutural da serpente-derrota Narrações examinadas em §16.3.2.



(a) Encélado enterrado no mar, carregando Sicília e Monte Etna em sua barriga



(b) Gilt-bronze Enceladus, de Gaspar Mercy, Versalhes

Figura 16.7: O mito de Enceladus

A persistência cultural de Encélado não é paralela entre os sísmicos Números pesquisados neste capítulo. Seu nome não apenas sobreviveu no aprendizado Alusão ou metáfora poética: Entrou na língua grega como o comum Substantivo comum para terremoto..*Egkelados* ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\alpha\delta o\varsigma$E ele permanece Então, em grego moderno até hoje.[4] Isto não é uma sobrevivência à maneira de um lugar Nome ou constelação: É a mitologia tornando-se a linguagem. Cada Falante grego que relata um terremoto invoca, conscientemente ou não, Um inimigo cósmico derrotado aprisionado sob a Sicília. A interpretação sísmica tão profundamente incorporado na cultura que durou mais do que a teologia, o culto,

[4] A etimologia conecta o nome a O verbo *enkeleuô* ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\varepsilon\dot{\upsilon}\omega$), "Exortar" ou "Soar a carga"— — uma etimologia que preserva O caráter marcial do gigante mesmo quando o nome passou da mitologia em um discurso comum.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

o império, e a civilização que o produziu, persistindo como vivo vocabulário em mais de dois milênios e meio. A observação atribuído a Dirac na epígrafe para §16.2Que a compreensão moderna dos processos naturais tem a interpretação mitológica obsoleta.. Contraexemplo não em qualquer argumento teológico, mas em um dicionário: O, o A palavra grega moderna para terremoto é um mito.

Essa figura permaneceu potente além do mundo antigo em outros registros também. Em Versalhes, Louis A implantação sistemática de XIV dos deuses olímpicos Emblemas da supremacia real incluíam uma fonte monumental de Enceladus.. *Bosquet de l'EncÉlade*, projetado c. 1675 e executado em bronze dourado por Gaspar Mercy de Cambrai (Fig. 16.7b). A fonte retrata o gigante meio enterrado sob as rochas da Sicília, água saindo de sua boca Um lugar de fogo vulcânico, uma transposição visual da imagem Virgiliana para O vocabulário hidráulico do jardim formal. A escolha não foi acidental. A subjugação de Encélado diante do Rei Sol espelhos, em Barroco Registre, a mesma lógica cósmica que o enterrou sob Etna.

Geografia sagrada e paisagem sísmica

Uma característica recorrente da prática religiosa grega é a situação deliberada dos santuários em locais onde a Terra exibia comportamento incomum ou estranho: Fontes térmicas, Emissões gasosas, fissuras no solo e zonas de atividade sísmica persistente. Tal Os lugares eram entendidos não apenas como geologicamente interessantes, mas como *Enargeis*Onde o divino estava estranhamente perto do A superfície do mundo.

O exemplo mais célebre é o santuário de Apolo Em.. Delphi, Fig. 16.8. Agora está bem estabelecido que o Delphic Oráculo estava situado diretamente acima de uma falha sísmica ativa, e que o profético Inspiração da *Pythia* Pode ter sido ajudada materialmente pelo Inalação de vapores de hidrocarbonetos, principalmente etileno.. calcário subjacente (Broad, 2006; De Boer e Sanders, 2005). O local sagrado assim, devia parte de sua autoridade religiosa às condições geológicas que os gregos interpretado como sinais de proximidade divina. Que Apolo deveria ter escolhido esta fratura, o solo que emite vapor como sua sede de profecia foi, dentro da imaginação religiosa grega, Totalmente consistente. O deus falou através da instabilidade da própria terra. É sim Vale a pena notar que esta leitura geológica da autoridade de Delphi – a naturalização do O que os gregos experimentaram como divinos antecipa o projeto filosófico de Separando natural da causa sobrenatural, tomada em §16.4.

Este padrão de lugares sagrados posicionados acima das estruturas sísmicas estende-se além de Delphi e foi identificado em vários outros santuários principais na Anatólia Egeu e Mundo grego (Piccardi, 2007). A convergência de significado religioso e A atividade geológica nestes locais quase certamente não foi coincidência: Comunidades que repetidamente experimentavam distúrbios sísmicos em um local específico, naturalmente interprete essa perturbação como evidência da presença divina, e com o tempo formalizaria

CÓPIA PARA REVISÃO



Figura 16.8: Tholos de Delphi, um templo circular construído entre 380 e 360 aC dentro do Santuário de Athena Pronaia em Delphi, Grécia.

essa interpretação através da construção de um santuário. A geografia sagrada do O mundo grego foi, neste sentido, parcialmente escrito pela própria terra.

O terremoto de AD 60 e a Transformação do Sagrado Narrador

O terremoto de AD 60 fornece um dos mais Exemplos instrutivos de como um evento geológico real foi absorvido, e posteriormente transformada, narrativa religiosa. A crise sísmica deste período afetou um amplo arco da Anatólia ocidental, e seus efeitos são rastreáveis em ambos O registro físico e as tradições religiosas de dois grandes locais: Hierapolis e Colossos. Em ambos os casos, o que O registro geológico sugere que uma ruptura catastrófica do solo foi posteriormente narrada como uma intervenção divina milagrosa (Piccardi, 2007). Ambos os sites ilustram assim o A mesma dinâmica subjacente: evento geológico absorvido em memória religiosa, transformado mas Não apagado.

Em.. **Hierapolis**, Há fortes arqueológicos e geológicos Provas para a colocação deliberada da principal delegacia sagrada diretamente acima de um Traço de falha ativo, que parece estender-se do templo de Apolo Para a grande fonte térmica. Muito antes da chegada dos colonos gregos, o local tinha foi considerado como um lugar de comunicação com o submundoMuito Provavelmente por causa das emissões gasosas localizadas e atividade hidrotérmica associada com a zona de falhas. Estas forças subterrâneas, interpretadas dentro da religião grega imaginação como o sopro das divindades ctônicas, Emprestou o site seu caráter sagrado muito antes de adquirir sua personalidade helenística e mais tarde cristã Associações.

O apóstolo Filipe Diz-se que chegou a Hierapolis Por aí AD 70-80. Sua chegada é enquadrada na tradição por dois extraordinários Fenômenos: A aparição de um dragão acompanhado por um violento terremoto e relâmpago, e a súbita abertura de um grande abismo no meio da cidade, que Engoliu sete mil homens junto com a serpente-deusa Echidna. Agora há evidências convincentes de que esta narrativa preserva a memória do

CÓPIA PARA REVISÃO

AD 60 terremotos, que parecem ter aberto uma longa ruptura de superfície ao longo O rastro da estrada principal pela cidade... precisamente o "abismo"da tradição. A figura serpente aqui participa na gramática simbólica mais ampla discutida abaixo (§16.3.2).

Em.. **Colossos**, Um processo paralelo de codificação religiosa é Discernível. A tradição registra que os pagãos tentaram destruir o cristão local santuário desviando um curso de água para submergir. Invocado pelo padre Archippus, O Arcanjo Miguel apareceu e, golpeando a rocha com seu cajado, abriu uma fissura na terra que canalizou as águas para longe do santuário, Fig. 16.9.. O novo acordo Que cresceu em torno desta fissura tomou seu nome – Chonae ($\chi\omega\nu\alpha\iota$, "Funnel")—diretamente a partir da característica geológica. A evidência sugere fortemente que Esta fissura milagrosa foi na verdade uma ruptura de falhas associada com o AD 60 E que a reorganização da drenagem descrita na tradição reflete Uma mudança real na paisagem induzida por sismos (Piccardi, 2007). O Teológico Mas a transformação está completa. o que a geologia produziu, narrativa religiosa atribuído à intervenção angélica.



Figura 16.9: Ícone russo do século 18 que retrata o milagre do Arcanjo Miguel em Chonae.

Serpentes, dragões e a linguagem simbólica do poder sísmico

A aparência de serpentes e dragões nas tradições Hierapolis e Colossos Não é incidental. Como discutido em §16.2.4 e.. §16.2.3, A figura da serpente constitui um dos símbolos mais comuns e persistentes Veículos para forças sísmicas e ctônicas através de culturas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

No grego religioso tradição, esta associação é particularmente ricamente desenvolvida. O Python Mortos por Apolo em Delphi, a Echidna de Hierápolis, e o dragão esmagados pelo Arcanjo Michael em Colossos todos participam de um simbólico comum Gramática: uma poderosa força serpentina subterrânea, associada à instabilidade geológica e ordens religiosas mais antigas, é superada por uma nova autoridade divina ou apostólica.

Este padrão... Serpente derrotada por Deus ou Santo acima de um sismicamente ativo O site sugere que a cristianização da Anatólia não simplesmente deslocou os mais velhos A interpretação religiosa grega dos terremotos, mas absorveu e retraduziu. O O dragão de Hierapolis e o Python de Delphi pertencem à mesma família simbólica; O, o A diferença reside em Apolo ou no Apóstolo Filipe que está triunfante acima do abismo. Em ambos os casos, a narrativa religiosa codifica o encontro de uma comunidade com uma terra instável e perigosa, e resolve esse encontro através da afirmação do poder divino sobre a força ctônica. A mesma gramática simbólica vai reaparecer no Figura hindu de Shesha (§16.3.3) e a naga budista Mucalinda (§16.3.3), confirmando o alcance transcultural da serpente como metáfora sísmica.

16.3.3 Índia

O subcontinente indiano, situado na convergência da tectônica indiana e eurasiana Placas, é uma das regiões mais sismicamente ativas do mundo. É por isso Não surpreende que ambas as grandes tradições religiosas que se originaram lá– Hinduísmo e Budismo–desenvolvidas estruturas teológicas sofisticadas para interpretar o tremor da terra, estruturas que têm comparação com as do bíblico e Tradições gregas pesquisadas acima, enquanto permanecendo distintamente enraizadas em suas próprias instalações cosmológicas.

Hinduísmo

A tradição cosmológica hindu oferece um dos relatos mais elaborados de a relação entre fenômenos sísmicos e ordem divina. Como observado no anterior Seção sobre mitologia (§16.2.4), a terra foi concebida em vários tradições como repousando sobre um grande elefante, Em si mesmo de pé em uma tartaruga mundial, cujos movimentos produziram terremotos. O *Shatapatha Brahmana* oferece um mais teologicamente Desenvolvida conta, descrevendo a terra como sustentada por *Varaha*, O, o Javali avatar de Vishnu, que o resgatou das águas primordiais em o início do tempo cósmico. Neste quadro, instabilidade sísmica não é apenas uma Fenômeno físico, mas teológico: reflete o esforço contínuo de divino Poder para manter a ordem contra a ameaça sempre presente de dissolução cósmica.

Esta dimensão escatológica está mais completamente articulada na doutrina do *Yugas*, as quatro sucessivas idades cósmicas descritas no *Puranas* e o *Mahabharata*. Cada um A idade é caracterizada por uma deterioração progressiva da ordem moral e física, A transição entre as idades é marcada por eventos naturais catastróficos — inundações, incêndios, e terremotos entre eles. A idade atual, o *Kali Yuga*, É entendido como um período de desordem máxima, no qual distúrbios sísmicos estão entre os Sinais de dissolução

CÓPIA PARA REVISÃO

cósmica*Pralaya*). O paralelo estrutural com os astecas *Nahui Ollin* E o seu Profecia de terremoto terminal, anotada em §16.2.3 e desenvolveu-se mais Em §16.3.5, é impressionante: através de tradições muito separadas, o Os números do terremoto são o instrumento da conclusão escatológica.

A figura serpente central para a cosmologia sísmica hindu é *Shesha* (também chamado de *Ananta*, O Endless), a grande naga cósmica sobre cujas bobinas Vishnu reclinam-se no intervalo entre os ciclos mundiais. Shesha é entendida para sustentar a própria terra, e é sua agitação – seu bocejo, em alguns Contagens... Isso faz o chão tremer. A imagem, assim, codifica dentro de um único figura mitológica tanto a forma serpentina encontrada ao longo deste capítulo como um metáfora sísmica transcultural (ver §16.3.2) e a lógica cosmológica de uma terra permanentemente suspensa acima da dissolução. Fig. 16.10a mostra Vishnu reclinando-se na serpente cósmica Shesha, Templo Dashavatara, Deogarh, Madhya Pradesh, Índia, C. 500 CE (Gupta) Ponto final). As bobinas de Shesha sob a terra são entendidas para causar terremotos quando A serpente se agita. Alivio de pedra, *In situ*.

Dentro deste quadro, eventos sísmicos individuais poderiam ser interpretados através da lente de *karma*A lei moral de causa e efeito, como consequências de Transgressão humana coletiva. Este reflexo interpretativo, de origem antiga, persistiu com notável vitalidade no período moderno. Quando um terremoto catastrófico ocorreu O Bihar região do nordeste da Índia em 15 de janeiro 1934, matando aproximadamente 20.000 pessoas, Mahatma Gandhi publicamente "Declarou punição divina pelo pecado da intocabilidade"— o Exclusão sistemática de comunidades de castas baixas de plenos sociais e religiosos Participação. A declaração provocou uma refutação imediata e celebrada de Rabindranath Tagore[5], que argumentou que atribuindo uma catástrofe natural para um O pecado social era moralmente irresponsável e intelectualmente regressivo, indigno de um líder Da estatura de Gandhi (Paranjape, 2011). A troca é historicamente significativa bem além de seu contexto imediato: Reproduz, em um registro indiano moderno, o mesmo confronto entre interpretações teológicas e racionais da catástrofe do terremoto que tinha convulsionado pensamento europeu quase dois séculos antes, no rescaldo do Terramoto de Lisboa em 1755 (§16.5.2).[6]

A troca é uma tréplica pontiaguda para a demissão confiante expressa por Dirac Página 660 na epígrafe para §16.2,[7] que presumiu que o moderno A compreensão dos processos

[5]Rabindranath Tagore (1861-1941), Poeta, filósofo e compositor bengali, premiado com o Prêmio Nobel de Literatura em 1913 O primeiro escritor não europeu a recebê-lo e autor do hino nacional tanto da Índia como de Bangladesh.

[6]O terremoto de Lisboa em 1755 (§16.5.2) provocou um debate estruturalmente idêntico na Europa Iluminação, com Voltaire e Rousseau ocupando papéis análogos aos de Tagore e Gandhi respectivamente, e com Leibniz's doutrina de *Otimismo*Que este é o O melhor de todos os mundos possíveis... como a posição teológica sob ataque. O paralelo entre os dois episódios, separados por dois séculos e dois continentes ainda idênticos em sua lógica subjacente, é discutido ainda mais na §16.5.2.

[7]Hoje em dia, quando entendemos tantos processos naturais, Não temos necessidade de tais soluções (Dirac, 1963). O terremoto de Bihar 1934 sugere que o impulso para interpretar a catástrofe natural em termos teológicos é Mais durável do que o comentário de Dirac indica.

CÓPIA PARA REVISÃO

naturais tornou a interpretação teológica da Catástrofe obsoleta. O terremoto Bihar de 1934 sugere o contrário.

Budismo

A tradição budista oferece um relato distinto, mas complementar de terremotos, um enraizado menos na escatologia cosmológica do que na biografia da Buda Ele mesmo. O *Pali Canon*, O, o O mais antigo corpo sobrevivente das escrituras budistas, registra que os terremotos acompanharam cada dos oito grandes momentos da existência terrena do Buda: sua concepção, seu nascimento, Sua renúncia à vida mundana, sua realização da iluminação sob o Bodhi Árvore, Seu primeiro sermão em Sarnath, Seu anúncio de Sua morte iminente, sua passagem para a final *parinirvana*, e.. a distribuição de suas relíquias. Neste contexto, o terremoto não é um instrumento A própria Terra, testemunhando eventos de significado espiritual supremo, tanto quanto a terra tremeu na crucificação e ressurreição no Evangelho de Mateus (§16.3.1).

Uma das personificações mais visuais desta teologia sísmica é o episódio de *Mucalinda*, O rei Naga que se levanta de baixo da terra para proteger o Buda meditando de uma tempestade com seu capô espalhado. A imagem concentra-se em uma única composição o capítulo de motivos centrais: A serpente como o poder subterrâneo, a terra como sede da força transformadora, e a relação entre essa força e a mais alta realização espiritual. Fig. 16.10b mostra O Buda abrigado pelo rei Naga Mucalinda, região Angkor, Camboja, 12o Século CE (Khmer, estilo Bayon atrasado). A serpente sobe de baixo da terra para proteger o Buda meditante, incorporando a concepção budista do poder subterrâneo como perigoso e, quando bem entendido, protetor.



(a) *Anantashayana Vishnu*:. Vishnu reclinada na serpente cósmica Shesha.



(b) Buda abrigado pelo rei Naga Mucalinda.

Figura 16.10: Serpentes cósmicas como forças estabilizadoras e protetoras em hindu e budista Iconografia.

O *Anguttara Nikaya* enumera as causas de terremotos de uma forma particularmente sistemática, distinguindo entre eventos sísmicos causados por vento e água agindo

CÓPIA PARA REVISÃO

sobre a terra, aqueles causados pelo poder espiritual de grande Ascetas, e aqueles que acompanham os eventos da vida de um Buda. Este tripartite A classificação é de considerável interesse: representa uma tentativa precoce de distinguir entre causas naturais, humanas e transcendentes de fenômenos sísmicos, antecipando-se em sua estrutura – se não em seu conteúdo – o esforço filosófico posterior para separar natural De causa sobrenatural que é examinada em §16.4.

Enquanto o budismo se espalhava do subcontinente indiano para a Ásia Central, China, Tibete, e Japão, sua teologia sísmica foi absorvida e modificada pelo cosmológico As estruturas das culturas receptoras. No Japão, como observado em §16.2.1, As ideias budistas sobre um grande peixe que sustenta a terra parecem ter contribuído para O desenvolvimento da *Namazu* tradição, ilustrando a permeabilidade de fronteiras religiosas quando as tradições se encontram através de geográfico e cultural Fronteiras. No Tibete, Os terremotos foram incorporados ao *Vajrayana* A estrutura da cosmologia tântrica, onde eles poderiam sinal a atividade de poderosos espíritos subterrâneos (*Nagas*) requerendo propiciação ritual. O *Naga*Um serpentino sendo associado com Água, submundo e perturbação sísmica... assim se junta ao longo catálogo de serpentes figuras encontradas ao longo deste capítulo como veículos simbólicos para as forças ocultas da terra (veja também §16.3.2).

16.3.4 Islamismo

Dentro da tradição islâmica, Os terremotos ocupam uma posição considerável peso teológico, aparecendo no Alcorão ambos como sinais de poder divino operante no mundo atual e como prenúncios da convulsão escatológica que vai inaugurar o último dia. Este duplo caráter... terramoto como O signo divino contemporâneo e como final cósmico dá a teologia islâmica do sismo eventos de uma amplitude e intensidade que convidam a comparação tanto com o bíblico quanto com o hindu Tradições pesquisadas acima§16.3.1, §16.3.3), enquanto restava enraizada em suas próprias premissas teológicas distintas.

Surah 99: Al-Zalzalah

O tratamento mais concentrado e teologicamente explícito dos terremotos no Alcorão É Surah 99, Intitulado *Al-Zalzalah* ('O Terremoto').[8] É um dos mais curtos Capítulos do Alcorão, que consistem em apenas oito versos, mas está entre os mais Eschatologicamente carregado. O capítulo começa com uma visão da convulsão sísmica cósmica:

> *Bismi llĀhi r-raḥmĀni r-raḥīm*
> Em nome de Alá, o Mais Gracioso, o Misericordioso.

[8] O título árabe *al-zalzalah* deriva do Raíz quadriliteral *z-l-z-l*, transmitindo violentas e repetitivas tremores– formação onomatopéica cujo próprio som promulga o fenômeno que descreve. O mesmo raiz produz o verbo *Zalzala* E o substantivo *Zilzal*, ambos usados na Alcorão para denotar convulsão sísmica ou escatológica.

CÓPIA PARA REVISÃO



Figura 16.11: Tradução caligráfica de Surah 99:1-8 (*Al-Zalzalah*)

1. *IdhŪm zulzilati l-arḍu zilzĀlahā*
   Quando a terra é abalada com seu terremoto final,
2. *Wa-akhrajati l-arḍUATHQĀlahā*
   E a terra traz seus fardos,
3. *Wa-qĀla l-insĀnu mĀ lahā*
   E o homem diz: O que está acontecendo com ele
4. *Yawma'idhin tuḥAddithu akhbĀrahā*
   Naquele dia, ele vai relatar suas notícias,
5. *Bi-anna rabbaka awḥĀ lahā*
   Porque seu Senhor o inspirou.
6. *Yawma'idthin yaṣDuru n-nĀsu AshtĀtan li-yuraw aṁĀlahum*
   Naquele dia, o povo partirá em grupos dispersos para mostrar suas ações.
7. *Fa-man yaMal MithqĀla dharratin khayran yarah*
   Então, quem fizer o bem de um átomo, verá
8. *Wa-man yaMal MithqĀla dharratin sharran yarah*
   E quem fizer o peso do mal de um átomo, verá.

Abdel Haleem, 2004 The Qur'an: A New Translation
Surat (99:1-8) al-Zalzalah (O Terremoto)

O terremoto aqui não é meramente um evento físico, mas o instrumento cósmico Divulgação: a própria terra, convulsionada aos seus fundamentos, libera os segredos que tem e todas as ações humanas são visíveis à luz do julgamento divino. O paralelo estrutural com a doutrina hindu de *Pralaya* e o Profecia asteca de *Nahui Ollin* é impressionante a este respeito: através de tradições amplamente separadas no espaço e tempo, o terremoto figura como a mecanismo de conclusão escatológica e ajuste moral (ver §16.3.7).

CÓPIA PARA REVISÃO

Terremotos como sinais divinos

Além de sua função escatológica, terremotos aparecem no Alcorão e na *Hadith* A literatura... os relatórios coletados das palavras e ações do Profeta[9]Como *Ayat* ("sinais"[10]) de poder divino e presença operante dentro do Criada ordem. Nesta capacidade, eles funcionam de forma análoga aos terremotos teofânicos da tradição bíblica (§16.3.1): Não são eventos naturais arbitrários mas purpor comunicações de Deus para a humanidade. O Profeta Muhammad é relatado em vários *Hadith* ter interpretado terremotos como admoestações divinas, e jurisprudência islâmica estendeu este Princípios sistematicamente: Os terremotos estão entre os meios pelos quais Deus atrai o atenção da humanidade à sua condição moral.

Esta leitura gerou uma resposta litúrgica específica. Depois de um grande terremoto, tornou-se costume em muitas comunidades muçulmanas para executar o *Salat al-khusuf*,[11] uma oração especial de súplica e Penitencia... Analógica em sua lógica para as respostas sacrificiais aos eventos sísmicos antiga prática religiosa grega (§16.3.2), e para as oferendas votivas feito no Japão após grandes terremotos (§16.2.1).

16.3.5 Mesoamérica

A interpretação religiosa dos terremotos na Mesoamérica Difere dos pesquisados acima em um aspecto fundamental: Em nenhum outro lugar no mundo antigo Foi uma catástrofe sísmica tão completa e sistematicamente integrada ao formal estrutura do pensamento religioso. Nos Astecas tradição, o terremoto foi não apenas um sinal de desagrado divino ou uma manifestação teofânica do poder divino; era o destino cosmológico do próprio mundo, embutido no centro da calendário ritual e codificado nos objetos mais sagrados da civilização.

O Quinto Sol e Nahui Ollin

Cosmologia asteca defendia que o mundo atual era o quinto em um sucessão de idades cósmicas, cada uma presidida por um sol diferente e cada uma terminada por Uma catástrofe diferente: inundação, vento, chuva de fogo e escuridão destruíram os quatro mundos precedentes. A idade atual, o Quinto Sol, foi nomeado *Nahui Ollin* Quatro movimentos ou quatro terremotos foi profetizado para terminar não por inundação ou

[9] O *Hadith* ('relato" ou 'narrativa') constituem, Ao lado do Alcorão, as principais fontes normativas da lei islâmica e teologia. O As coleções mais autoritárias são as *Sahihayn* ('as duas coleções de som' ') de al-Bukhari e ibn muçulmano al-Hajjaj.

[10] Árabe *āyāt*, plural de *āya*Denotando ambos os Os versos individuais do Alcorão e os sinais do poder divino visíveis na criação Ordem. O termo é cognate com o hebraico *ot*, "assinar" refletindo o comum Raiz semítica - *O que é isso*.

[11] Árabe *"Alāt"al-khusūf*, literalmente "a oração do eclipse"' estendida por analogia jurística (*Qiyas*) para cobrir terremotos e outros extraordinários naturais eventos. A oração consiste em duas unidades (*Rak'at*) com recitação estendida, realizado na congregação, e concluído por um sermão de admoestação (*khutba*).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

fogo, mas por uma catastrófica terremoto.[12] Esta profecia não era um elemento periférico do pensamento religioso asteca, mas sim seu Centro cosmológico: O mundo atual viveu sob uma sentença sísmica permanente, e o função do ritual, incluindo o sacrifício humanoFoi em parte para Determinem essa convulsão terminal alimentando o sol e mantendo a ordem cósmica.

O *Ollin* Glyph foi colocado no centro da *Piedra del Sol* (a chamada "Aztec Sun Stone"'), um dos objetos mais icônicos da civilização pré-colombiana, agora no Museu Nacional de Antropología na Cidade do México. Sua posição central é uma declaração visual da primazia cosmológica do terremoto: Todo o tempo, todo o ritual, toda a história irradia para fora do destino sísmico do mundo.

> O Nahui Ollin, 4 Terras Terrestres, será o nome deste sol que agora existe. [. . .] Haverá terremotos, haverá fome, e então nosso fim Ele virá. (O que é isso*Anales de Cuauhtitlan*)
>
> León-Portilla, 1963 Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind

Resposta Ritual e a Deferência da Catástrofe

A integração da profecia do terremoto na prática religiosa asteca tinha profundo Consequências rituais. Se o terremoto terminal pudesse ser adiado mantendo cósmico Ordem, então falha ritual... Impiedade, negligência de sacrifício, transgressão moral.. Precipite-o. Todo terremoto foi, portanto, potencialmente um antegosto do A convulsão final, um lembrete da fragilidade do mundo atual e da necessidade de manutenção ritual. Isso deu aos eventos sísmicos uma urgência nos astecas imaginação religiosa que foi muito além de qualquer coisa na Bíblia ou Islâmica Tradições: Um terremoto não foi apenas um aviso divino, mas um ensaio em potencial para O fim do mundo.

O sinal do dia *Ollin* no calendário ritual era de acordo tratado com gravidade particular. Pessoas nascidas em um *Ollin* O dia foi.. Acredita-se ser marcado por uma relação especial com as forças sísmicas, *Ollin* O próprio dia era considerado propício para certos rituais e inauspiciosos para outros. O calendário e o geológico não eram, portanto, meramente relacionados analogicamente Mas estruturalmente fundido: O tempo em si foi organizado ao redor do ritmo sísmico Catástrofe.

Continuidade com a Tradição Mitológica

Como observado em §16.2.3, o *Ollin* glifo e o conceito de *Nahui Ollin* aparecem não só em contextos religiosos astecas, mas nos códices de várias culturas mesoamericanas, sugerindo que a integração de fenômenos sísmicos em O pensamento cosmológico e calendrico era uma tradição regional de considerável antiguidade ao invés de uma inovação

[12] O Nahuatl termo *Ollin* Denota movimento, e por extensão terremoto; É o décimo sétimo dos vinte dias de sinais do *tonalpohualli*, O calendário ritual de 260 dias. O prefixo Número *Nahui* ('4') identifica a posição calendrica específica do dia em que a atual era mundial foi criada e no qual está destinada ao fim.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

especificamente asteca. O sistema religioso asteca representa assim a expressão mais desenvolvida de um maior engajamento mesoamericano com terremotos que se estendeu desde a gravação calendrical através de narrativa mitológica para formal doutrina teológica e prática ritual.

A este respeito, o caso Mesoamericano está no extremo final de um espectro que funciona através de todas as tradições pesquisadas neste capítulo. Onde a tradição bíblica Interpreta terremotos como intervenções divinas ocasionais dentro de um outro estábulo criou ordem, e onde a tradição islâmica os incorpora dentro de uma escatologia que permanece futuro e contingente, a tradição asteca fez o terremoto terminal premissa estrutural de todo o seu sistema cosmológico e ritual. O mundo não apenas risco de terminar em terremoto; Ele estava constitutivamente destinado a fazê-lo, e todo o A vida religiosa foi organizada em resposta a essa certeza.



Figura 16.12: O *Piedra del Sol* (Aztec Sun Stone), com o *Ollin* glifo no seu centro.

16.3.6 Xintoísmo

A relação entre terremotos e pensamento religioso no Japão É incomum bem documentado, abrangendo quase um milênio de textual, artístico e ritual Provas. Como discutido em §16.2.1A tradição mitológica popular centrado no peixe-gato subterrâneo gigante *Namazu* desde que o explicação popular dominante para eventos sísmicos no Japão pré-moderno. O que requer ênfase Aqui está o grau em que esta tradição mitológica foi absorvida no formal Estruturas de Xintoísmo prática religiosa – ilustrando com particular clareza a fronteira fluida entre mitologia e religião identificada na Introdução para este capítulo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Kashima e a teologia da restrição

O núcleo teológico da tradição do terremoto xintoísta é a figura de *Takemikazuchi-no-kami*, consagrado no Kashima Santuário Na atual Prefeitura de Ibaraki e seu papel como divino retentor do *Namazu*.. Dentro da prática de Xintoísmo, a narrativa mitológica tornou-se a base de uma relação ritual ativa entre comunidade e sua divindade protetora: O calendário do santuário incluiu cerimônias explicitamente dirigidos a manter a retenção divina do peixe-gato, e peregrinos viajavam para Kashima para buscar proteção contra terremotos (Fig. 16.13). A parte superior desta ilustração mostra a pedra No Santuário de Kashima, enquanto abaixo do deus Takemikazuchi está prendendo o peixe-gato gigante ŌNamazu com sua espada. ŌNamazu vive abaixo das ilhas do Japão e quando agravado é a causa de seus muitos terremotos. Takemikazuchi controla o bagre através do uso da pedra-chave. A ameaça de catástrofe sísmica, assim necessária Manutenção ritual contínua... estruturalmente análoga ao adiamento sacrificial asteca do terremoto terminal (§16.3.5).

O *Kannazuki*, O décimo mês lunar durante o qual Kashima viajou para a grande assembléia de divindades em Ise, foi considerado como um período de vulnerabilidade sísmica aumentada, compensada pela oração intensificada, oferendas, e Ritos de purificação. O calendário ritual foi assim organizado em parte ao redor do ritmo de Risco sísmico.



Figura 16.13: O Santuário de Kashima (Prefeitura de Ibaraki), sede da *Takemikazuchi-no-kami* e o principal local da sísmica xintoísta ritual de proteção no Japão pré-moderno.

Terremoto, purificação e renovação

O *Namazu-e* Impressões de 1855, discutidas em §16.2.1 Como documentos populares, merecem ser reconsiderados aqui como religiosos. Muitos eram explicitamente Talismânico em função: Mostrando uma imagem de Takemikazuchi Sujeitando o peixe-gato foi

CÓPIA PARA REVISÃO

entendido para Conferir proteção contra mais catástrofes sísmicas, colocando as impressões dentro A esfera de devoção doméstica da prática xintoísta (Fig. 16.14). O *Namazu* o próprio, como um ser de extraordinário e terrível poder, foi uma *Kami*[13]— not Apenas uma criatura a ser suprimida, mas uma força a ser propiciada e incorporada em A economia religiosa da comunidade.

Isso encontra sua expressão mais profunda no conceito de *Yonaoshi* ('Retificação do mundo'). Dentro do quadro xintoísta, corrupção social e ritual A negligência acumula-se como formas de poluição*Kegare*); catastrófico eventos, incluindo terremotos, poderiam ser entendidos como purificação violenta, dolorosa Mas as restaurações necessárias do equilíbrio (Smits, 2006). Esta teologia de catastrófico A renovação encontra paralelos estruturais entre as tradições pesquisadas neste capítulo: Julgamento bíblico e redenção§16.3.1), Hindu *Pralaya* (§16.3.3), e a visão asteca de Sucessivas eras do mundo§16.3.5). Através das tradições, o terremoto raramente é meramente destrutivo: É também o prelúdio violento para um mundo novo.



Figura 16.14: Um talismânico *Namazu-e* Impressão retratando *Takemikazuchi-no-kami* Submetendo o bagre.

Xintoísmo, budismo e sincretismo sísmico

Nenhum relato da tradição do terremoto xintoísta seria completo sem reconhecer a influência do budismo. No Japão, Xintoísmo e Budismo coexistiram para Mais de um milênio na fusão sincrética conhecida como *shinbutsu-shūgō*[14], e o A interpretação dos

[13]O termo *Kami* Denota as presenças sagradas ou poderes que animam fenômenos naturais dentro da visão de mundo xintoísta possuindo um poder incomum inspirador, benevolente ou terrível, como descrito Pelo estudioso Motoori Norinaga (1730–1801).

[14]Literalmente "A fusão de Kami e Buddhas", esse sincretismo dominava os religiosos japoneses A vida do período Nara (710-794) AD) até a separação forçada do Duas tradições dos Meiji Governo em 1868.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

terremotos não era exceção. Eschatológico budista Quadros- Incluindo a doutrina de *mappō* Os últimos dias do dharma, análogos ao Hindu *Kali Yuga* Discutido em.. §16.3.3- –estavam"rapidamente assimilados às ansiedades sísmicas xintoístas, produzindo uma resposta religiosa em camadas que se baseava simultaneamente em ambas as tradições. A tradição do terremoto xintoísta representa o culminar de um longo processo de síntese cultural, no qual indígenas Mitologia, cosmologia chinesa e estrutura escatológica budista eram progressivamente integrado em uma interpretação religiosa coerente da catástrofe sísmica.

16.3.7 Síntese: A religião e o significado da catástrofe sísmica

As tradições pesquisadas nesta seção revelam um padrão de notável consistência através de culturas e períodos históricos muito separados. Em cada tradição examinada, Os terremotos estão inseridos em um quadro teológico que realiza três coisas Ao mesmo tempo: Ele atribui significado ao evento sísmico (não é aleatório, mas propositivo); Ele localiza esse significado dentro de uma ordem moral (o terremoto comunica algo sobre a relação entre a humanidade e o divino); E gera uma comunidade prescrita Resposta (sacrifício, oração, purificação, manutenção ritual). O conteúdo específico de significando, o quadro moral específico, e a resposta ritual específica diferem Mas a estrutura tripartida em si é universal.

Três temas transversais merecem ênfase particular. A primeira é a convergência de Pensamento escatológico. O hindu *Pralaya*, O Último Dia Islâmico, o Asteca *Nahui Ollin*E o budista *mappō* Todos coloquem o terremoto em ou perto do evento terminal da história cósmica – uma convergência estrutural que se mantém através tradições sem contato histórico um com o outro, e isso fala para um compartilhado resposta cognitiva à experiência de catástrofe sísmica já observada na Síntese mitológica (§16.2.5).

O segundo é a persistência da interpretação moral dos terremotos através de Períodos históricos. A atribuição reflexiva de eventos sísmicos à punição divina por transgressão humana – documentada na Bíblia, na prática do culto grego, em hindu *karma* Teologia, no Islâmico *Hadith* tradição, e nos astecas O sistema ritual não se dissolveu com o advento da modernidade. A interpretação de Gandhi do terremoto de Bihar em 1934 como punição pelo pecado da intocável demonstra que este reflexo teológico manteve sua aderência bem no século XX, provocando Os mesmos contra-argumentos racionalistas de Tagore que Voltaire tinha nivelado contra leituras providencialistas do terremoto de Lisboa quase dois séculos antes (§16.5.2). Os dois episódios são separados por dois séculos e dois continentes mas idênticos em sua lógica subjacente: o mesmo confronto entre teológico e Interpretações racionais da catástrofe, jogadas em diferentes registros culturais.

O terceiro tema é a situação sistemática de lugares sagrados acima geologicamente ativos Estruturas... documentadas em Delphi, Hierapolis, Colossos, e no Santuário de Kashima, sugestiva de uma tendência mais ampla para interpretar zonas de instabilidade sísmica como zonas de Presença divina aumentada. Neste sentido, a interpretação religiosa dos

CÓPIA PARA REVISÃO

terremotos não é apenas uma resposta a eventos sísmicos após o fato; Ela molda a geografia sagrada da própria paisagem, inscrevendo o significado teológico no próprio terreno em que As comunidades constroem seus santuários. O que começa como o terror se torna, através do Mediando trabalho de narrativa religiosa, evidência da presença divina e poder.. Eventualmente, como mostra a próxima seção, a ocasião para o primeiro desafio filosófico para aquela leitura.

É precisamente essa teologização abrangente da experiência sísmica... - A insistência Que o terremoto *Quer dizer* algo, que é dirigido à humanidade, que ele Não exige apenas resistência, mas interpretação e resposta – que o filosófico A tradição será submetida ao seu primeiro exame crítico sustentado em §16.4.

A universalidade do padrão documentado nesta seção convida a um mais profundo Pergunta: Não apenas *Isso* interpretações teológicas do terremoto A catástrofe persistiu através de culturas e séculos, mas *Por quê* eles Resultou tão notávelmente durável... Sobrevivendo ao surgimento da filosofia natural, O Iluminismo e a sismologia moderna. A resposta já era articulado com precisão característica por Spinoza Três séculos e meio atrás:

> Os homens nunca seriam supersticiosos, se pudessem governar todos os seus Circunstâncias por regras estabelecidas, ou se elas sempre foram favorecidas pela fortuna: mas sendo frequentemente conduzidos para os estreitos onde as regras são inúteis, e sendo muitas vezes mantido flutuando lamentavelmente entre esperança e medo pela Região de Confiança dos favores cobiçados da fortuna, eles são consequentemente, na maior parte, muito propensa à credulidade. Superstição, então, é Engendrados, preservados e fomentados pelo medo.
>
> Spinoza, 1670 Tractatus Theologico-Politicus

O terremoto, de todos os fenômenos naturais, mais perfeitamente instancia o A condição que Spinoza descreve: Ele ataca sem aviso, desafia a previsão, e sobrepuja cada regra pela qual os seres humanos normalmente governam seus Circunstâncias. Que deveria gerar superstição e que a superstições deve provar tenacidade – portanto, não é uma curiosidade da ignorância pré-moderna mas uma consequência estrutural do próprio evento. É precisamente isso reconhecimento de que a tradição filosófica, examinada na seção seguinte, Tentará responder não com mitos ou rituais, mas com razão.

As sete tradições pesquisadas acima, e os oito motivos recorrentes que eles compartilham, podem ser Esquematicamente nas duas tabelas que se seguem. Mesa 16.1 resumos, para cada tradição, o papel teológico primário atribuído ao terremoto, o agente divino ou cósmico considerado responsável, a presença ou ausência de um escatológico dimensão, a resposta ritual prescrita, e as principais fontes textuais. Mesa 16.2 mapeia os oito motivos transculturais mais significativos contra o tradições nas quais são atestadas, identificando suas manifestações específicas e seu significado analítico.

Dois padrões que as tabelas tornam visíveis merecem um breve comentário aqui. Primeiro, o **serpente ou dragão como agente sísmico*** Atestado através de cinco tradições que abrangem Índia, Japão, Grécia e Mesoamérica... é de fato o único mais amplamente

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

distribuído motivo em todo o capítulo, mais universal mesmo do que as leituras escatológicas com que a síntese abre. Sua ausência das tradições bíblicas e islâmicas não é Acidental: Essas são precisamente as duas tradições com a teologia mais desenvolvida de agência divina direta, em que nenhuma criatura ctônica intermediária é necessária para explicar o tremor da terra. A presença ou ausência da serpente funciona como um marcador diagnóstico para a estrutura teológica subjacente de cada tradição.

Segundo, o pilar de **ausências** na Tabela 16.2 é tão analiticamente significativa como o pilar de presenças. Budismo sozinho, entre todas as tradições pesquisado, consistentemente recusa a leitura moral dos terremotos como punição O terremoto na estrutura budista é ratificação cósmica, não retribuição. Grécia Só falta uma dimensão escatológica desenvolvida. Essas ausências não são lacunas no evidências, mas características estruturais das próprias tradições, e eles impedem o superficialmente atraente conclusão de que todas as respostas religiosas aos terremotos são Basicamente o mesmo.

Tabela 16.1: Tradições religiosas e o terremoto: Um resumo comparativo.

Tradição	Papel primário do terremoto	Agente / locus	Escatológico?	Resposta ritual	Fontes-chave
Bíblia (Judeo-Christian)	Teofania; instrumento de libertação ou julgamento milagroso; Memória geológica codificada	*YHWH* / Deus diretamente	Imagens sísmicas em Apocalipse implicam eventos terminais	Oração; Oferenda votiva; Penitencia comum	Êxodo 19:18; Atos 16:26; Matt. 27–28; Nur e Burgess, 2008
Grécia (Religião helênica)	Teofania da ira divina*Enosichthon*); Zonas de falha como loci de presença sagrada e profecia; Persistência da força primordial derrotada Encarcerados sob a terra	Poseidon *Enosichthon*; Enceladus e os gigantes ctônicos; Forças geológicas subterrâneas	Nenhum identificado	Sacrifício animal a Poseidon; Deliberado assento de santuários acima Traços ativos de falhas	*Ilíada* XIII,18; Vergilius Maro, 2008 The Aeneid; Piccardi, 2007; Broad, 2006
Hinduísmo	Instabilidade cósmica; consequências cármicas da transgressão coletiva; sinal de aproximação *Pralaya*	Shesha / Vishnu; Coletivo *karma*	Sim..*Pralaya*, dissolução terminal do cosmos	Propiciação ritual; interpretação através da teologia do karma	*Shatapatha Brahmana*; *Puranas*; Gandhi, câmbio de tagore (1934) (Paranjape, 2011)

Continuando na próxima página

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 16.1 *(continuação)*

Tradição	Papel primário do terremoto	Agente / locus	Escatológico?	Resposta ritual	Fontes-chave
Budismo	ratificação cósmica dos eventos de vida do Buda; Esquema de tricausação distinguindo causas naturais, humanas e transcendentes	A Terra como cosmos responsivos; *Nagas*	Parcial..*mappō* doutrina; Aumento sísmico perto do fim da idade dharma	Propiciação ritual de *Nagas*; Peregrinação	*Pali Canon*; *Anguttara Nikaya*
Islamismo	Sinal divino*Ayat*) de admoestação moral no presente; Instrumento de revelação cósmica no último dia	TodosāH diretamente; Alcorão como autoridade canônica	Sim–Surah 99 coloca o terremoto na inauguração do último dia	*Salāt al-khusūf* (Oração especial congregacional de penitência)	Surah 99 (*Al-Zalzalah*); *Tinhaīth* Coleções
Mesoamérica (Aztec)	Destino cosmológico da atual era mundial; Cada terremoto, um ensaio para a convulsão terminal	*Ollin* Força; estrutura de calendário cósmica	- Sim, constitutivo. O mundo está destinado a acabar com o terre-moto*Nahui Ollin*)	Sacrifício humano; manutenção ritual calendário para adiar o terremoto terminal	*Anales de Cuauhtitlan*; *Piedra del Sol*; León-Portilla, 1963
Xintoísmo (Japão)	A agressão de Namazu requer a restrição divina; purificação catastrófica (*Yonaoshi*) e retificação mundial	Namazu (peixe-gato gigante); Take-mikazuchi como confidente	Parcial..*mappō* Absorvido pelo sincretismo budista	Cerimônias do santuário de Kashima; *Namazu-e* Talismãs; Ritos de purificação	*Namazu-e* Impressões (1855); Smits, 2006; Registros do santuário de Kashima

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 16.2: Recorrendo motivos transculturais na interpretação religiosa de terremotos. ✓ = Motivo atestado; × = Não tem motivo, ou.. Marginal.

Motif	*Bíblia*	*Grécia*	*Hinduísmo*	*Budismo*	*Islamismo*	*Mesoamérica*	*Xintoísmo*	Significado
Serpente / Dragão como agente sísmico	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	O motivo mais amplamente distribuído. O corpo serpentino mapeia traços de falhas e solo Ruptura; Sua derrota por um deus ou santo codifica a imposição da ordem divina sobre Força ctônica. Ausente das duas tradições com a teologia mais desenvolvida da agência divina direta (Bíblia; Islamismo).
Terremoto como terminação escatológica	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	Presente em todas as tradições com uma escatologia desenvolvida. O terremoto representa como o mecanismo de fechamento cósmico – a expressão física de um final simultaneamente geológico, moral e teológico. Só a Grécia não tem essa dimensão.
Locais sagrados localizados acima de falhas geológicas	✓	✓	×	×	×	✓	✓	Comunidades experimentando repetidamente distúrbios sísmicos em um local interpretado instabilidade como proximidade divina. Geologia moldou geografia sagrada: O terror tornou-se o evidência da presença divina.
Terremoto como castigo moral / Consequência cármica	✓	✓	✓	×	✓	×	✓	A leitura mais histórica e duradoura... sobrevivendo à modernidade (Gandhi, 1934). O budismo, por si só, recusa-o. O terremoto é a ratificação cósmica, não Retribuição. Provoca uma refutação racionalista idêntica em todas as épocas.
Resposta ritual comum prescrita	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Universal em todas as tradições. O terremoto exige não apenas resistência, mas ativa Ritual comum. A forma varia enormemente (oração ao sacrifício) mas a estrutura Lógica... Terremoto como comunicação propositiva que requer uma resposta é idêntica.

Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Tabela 16.2 *(continuação)*

Motif	*Bíblia*	*Grécia*	*Hinduísmo*	*Budismo*	*Islamismo*	*Mesoamérica*	*Xintoísmo*	Significado
Catástrofe como purificação e renovação	✓	×	✓	×	×	✓	✓	O terremoto é tão gerativo quanto destrutivo. Prelúdio violento para um mundo feito Novo. Converte terror em teleologia: A catástrofe serve a um propósito maior que o próprio. Notavelmente ausentes de estruturas gregas e islâmicas.
Memória codificada de eventos geológicos reais	✓	✓	×	×	×	×	✓	Algumas narrativas religiosas são comprovadamente respostas a geológicas específicas eventos (a falha do Vale de Jordan colapsa codificada nos Joshua e Jericho narrativas; O, o AD 60 terremotos de Anatolian absorvidos pelo tradições de Hierapolis e Colossos; o caráter vulcânico e sísmico de Etna mitologizada como as convulsões aprisionadas de Enceladus; 1855 Ansei Edo terremoto cristalizado no *Namazu-e* Corpus). O evento físico é absorvido por uma narrativa religiosa Não apagado.
Um animal de apoio cujo movimento causa terremotos	×	×	✓	✓	×	×	✓	Distinto do motivo da serpente: O animal cósmico que sustenta a Terra, cujo Movimento inadvertida causa instabilidade sísmica. Atestado independentemente através de Tradições tão geograficamente separadas como Índia e Japão (elefante cósmico / Tartaruga; Shesha; Namazu).

16.4 Filosofia

Filósofos há muito especulam sobre as causas dos terremotos. Um dos.. As primeiras explicações são atribuídas a Thales de Mileto, que acreditava que A terra flutuava sobre a água; distúrbios neste meio subjacente foram por isso, pensavam capazes de produzir tremores. Outro pré-socrático filósofos elaboraram mais: Anaximenes propôs que o ar comprimido Preso sob a superfície fez o chão rachar e levantar, enquanto Anaximander e Diógenes de Apolonia procuraram explicações enraizadas no Interação dos quatro elementos fundamentais: Terra, água, ar e fogo (De Boer e Sanders, 2005). Essas tentativas

CÓPIA PARA REVISÃO

iniciais, por mais especulativas que sejam, estabeleceu o hábito intelectual de procurar física em vez de puramente Causas mitológicas para fenômenos sísmicos – o primeiro desafio sustentado para o reflexo interpretativo documentado através das tradições religiosas de §16.3.

16.4.1 Aristotle

Entre as teorias antigas mais influentes estava a explicação pneumática proposto por Aristóteles. De acordo com esta visão, os terremotos foram produzidos por Ventos subterrâneos presos em cavidades abaixo da superfície da terra. Enquanto estes ventos lutavam para escapar, eles fizeram o chão tremer ou Fratura. A teoria de Aristóteles mostrou-se notavelmente persistente e permaneceu o estrutura intelectual dominante para interpretar terremotos para muitos séculos.

Explicações cosmológicas comparáveis desenvolvidas de forma independente em outros Culturas. Na China antiga, os terremotos às vezes eram atribuídos a perturbações no equilíbrio das forças cósmicas expressas através da interação dos cinco agentes fundamentais (*Gogyo*) associado com Yin e Yang (Guidoboni e Poirier, 2004). Embora emolduradas de forma diferente, essas idéias compartilhadas com a filosofia grega, a tentativa de interpretar os terremotos como resultado de processos naturais subjacentes ao invés de causas puramente mitológicas.

16.4.2 Eratóstenes

Uma contribuição significativa, mas muitas vezes negligenciada para o filosófico e A compreensão geográfica dos terremotos foi feita por Eratóstenes de Cirene (c. 276–194 a.C.), a bibliotecária de Alexandria celebrou acima de tudo por sua medição notavelmente precisa da circunferência da Terra. Em sua *Geographika*Eratóstenes empreendeu o que pode ser considerado Primeiro mapeamento geográfico sistemático da atividade sísmica no mundo antigo. Ao invés de tratar terremotos como eventos isolados ou aleatórios, ele procurou identificar as regiões em que ocorreram com maior frequência e para Relacionar sua distribuição com características físicas mais amplas da paisagem.

Eratóstenes observou que a atividade sísmica estava concentrada ao longo da costa Zonas e nas proximidades de regiões vulcânicas.. Significado que não receberia uma explicação física rigorosa até que o Era moderna. Ele notou o caráter sísmico das cadeias da ilha do Mediterrâneo e atribuiu a instabilidade de certas costas à ação do canais subterrâneos de água conectando o mar a cavidades subterrâneas. Quando Estas conexões ocultas foram interrompidas, a terra em expansão era responsável por Abaixar ou sacudir. Esta teoria hidráulica dos terremotos, embora no final das contas incorreta, representou uma tentativa genuína de integrar fenômenos sísmicos em um Geografia física coerente da Terra.

O significado da contribuição de Eratóstenes está menos na exatidão de qualquer mecanismo específico que não seja a sua abordagem metodológica: Catalogando Zonas

CÓPIA PARA REVISÃO

sísmicas e relacionando-as com características geográficas e geológicas, O reconhecimento moderno de que o terremoto não é uniforme distribuído, mas é governado por propriedades estruturais da crosta terrestre. Seu O trabalho representa assim um importante momento de transição entre mitológicos interpretação e sistemática investigação natural, (Dragoni, 2005).

16.4.3 Lucretius e Plínio

Um tratamento filosófico particularmente importante aparece no trabalho do Poeta e filósofo romano Lucrécio (Lucretius, 1995). Seu poema épico *De Rerum Natura* (*Sobre a natureza das coisas*), escrito na primeira Século a.C., procurou explicar os fenômenos naturais através de epicureus Filosofia. No Livro VI, Lucretius discute terremotos e atribui-os a movimentos de ar aprisionados dentro das cavidades da terra. Quando estes subterrâneos Os ventos acumulam-se e procuram uma saída, eles produzem vibrações que tremem O chão ou até mesmo fazê-lo se abrir. Esta interpretação reflete um uma tentativa mais ampla de entender o mundo natural através de mecanismos físicos Em vez de intervenção divina.

Autores antigos frequentemente elaborados sobre esta teoria pneumática. Alguns escritores Comparando a terra com uma esponja cuja cavidade interna permite que os ventos Circulam através de passagens subterrâneas. Quando o ar acumulado excede o capacidade destas cavidades, a pressão resultante produz sons ruborizantes, terra trêmula, e ocasionalmente fissuras através das quais o vento escapa. Tais explicações foram ecoadas por autores e poetas clássicos posteriores, incluindo Sallust e Lucan, que descreveram os terremotos como consequência das forças Movendo-se dentro dos espaços escondidos da terra.

Outra fonte antiga importante é Plínio, o Ancião *Naturalis História* (AD 77-78), um trabalho enciclopédico que examinou numerosos fenômenos naturais, incluindo terremotos (Pliny the Elder, 1906). Plínio observado que os choques sísmicos ocorreram com mais frequência em certas regiões, particularmente nas áreas marítimas, embora regiões montanhosas não estivessem isentas. Ele também notou padrões sazonais, sugerindo que os terremotos ocorreram mais frequentemente em outono e primavera... uma observação mais tarde repetida por Kant. Pliny mais longe registrou que os animais muitas vezes se comportavam de formas incomuns antes dos terremotos, um das primeiras referências documentadas ao que mais tarde se tornaria uma recorrente Tema na lenda do terremoto.

16.4.4 O terremoto de Lisboa como evento filosófico

A discussão filosófica dos terremotos foi transformada pelo catastrófico terremoto que atingiu Lisboa em 1 Novembro 1755–Todos os Santos Dia. O desastre matou dezenas de milhares de adoradores em igrejas desmoronando e desencadearam incêndios e tsunamis que Devastou a cidade por dias, Fig. 16.15a.. Não destruiu apenas uma capital; Convulsionou a vida intelectual da Europa. Poucos eventos naturais na história gravada têm desencadeou um debate filosófico tão concentrado e consequente, e não Outro terremoto

CÓPIA PARA REVISÃO

serviu simultaneamente como ponto de referência para a teologia, moral filosofia, ciência natural e imaginação literária. O evento será encontrado novamente na seção seguinte sobre literatura (§16.5.2), onde suas reverberações literárias são examinadas em -Detalhe. A preocupação aqui é com suas dimensões filosóficas.

O terremoto atingiu o auge do Iluminismo Europeu, em um momento em que a opinião educada estava disposta a considerar o mundo natural como racionalmente ordenado e, em última análise, benigno. Expôs, com brutal imediatismo, Os limites dessa confiança. A pergunta teológica que ele colocou não era nova: como o levantamento das tradições religiosas em §16.3 Não, não, não a atribuição reflexiva da catástrofe sísmica ao castigo divino teve respostas estruturadas da Bíblia para o Islâmico *Hadith* e o A doutrina hindu de *karma*.. O que era novo era o público: Educado Europeus equipados com as ferramentas conceituais da filosofia racionalista e recém impaciente com as respostas tradicionais. O mesmo confronto entre interpretações teológicas e racionais do terremoto que estruturaram o Gandhi, troca de tagores após o terremoto Bihar de 1934 (§16.3.3Foi aqui jogado pela primeira vez no centro da vida intelectual europeia.

16.4.4.1 Voltaire e Rousseau como interlocutores filosóficos

Voltaire Reagiu com uma velocidade e intensidade emocional incomum até para ele. Em sua *PoÈme sur le dÉsastre de Lisbonne* (1756) (Voltaire [Arouet, 2009), Ele rejeitou a filosofia otimista mais intimamente associada com LeibnizA doutrina se desenvolveu sistematicamente na *Essais de Théodicée* (Leibniz, 1710) Que este mundo constitui o melhor de todos os mundos possíveis, e que todo mal aparente é finalmente conciliável com um projeto benevolente maior. Esta filosofia A posição é discutida ainda mais em §16.5.2 no contexto do dimensões literárias do debate de Lisboa; O que importa aqui é sua filosofia Alvo. O otimismo de Leibniz representava a teodicia dominante do Iluminismo: sistemática, racional e aparentemente consistente com as ordens universo que a ciência Newtoniana tinha revelado. Voltaire's *PoÈme* Atacou-o como moralmente indefensável diante de inocentes O sofrimento, e ao fazê-lo forçou a questão do mal natural de volta para o centro de atenção filosófica.

Jean-Jacques Rousseau "Respondeu em um célebre Carta de agosto 1756 (Rousseau, 1967) que mudou os termos do debate em uma direção filosófica conseqüente. Seu argumento central era que a escala da destruição de Lisboa não poderia ser atribuída apenas à natureza: grande parte do sofrimento foi consequência da forma como a sociedade humana tinha organizado Ele mesmo. Se os habitantes de Lisboa tivessem vivido em menor, mais dispersos Os assentamentos, a catástrofe teria sido muito menos mortal. Foi o.. concentração da população em estruturas urbanas densas, muitas delas mal construído, que transformou um evento geológico em uma catástrofe humana do primeiro Ordem. O terremoto, nesta leitura, não foi uma refutação da ordem divina, mas Uma revelação da desordem humana: uma exposição das vulnerabilidades que o ser humano A sociedade cria para si mesma.

CÓPIA PARA REVISÃO

Este argumento representa talvez a mais antiga declaração sistemática do que A ciência contemporânea do desastre chama *construção social de Vulnerabilidade*:. o reconhecimento de que a destruição de qualquer perigo natural é inseparável do ambiente construído e arranjos sociais através dos quais Uma comunidade o confronta (Blaikie et al., 1994; Wisner et al., 2004). Rousseau's - Que o terremoto não.. Matar dezenas de milhares de pessoas; A cidade de Lisboa.. força analítica nos dias atuais, e antecipa em dois séculos o estrutura através da qual engenheiros modernos e pesquisadores de desastres avaliam sísmica Risco.

16.4.4.2 Kant

Immanuel Kant Aproxime-se do terremoto de Lisboa a partir de um Diretriz filosófica diferente, produzindo três ensaios científicos sobre o sujeito nos meses imediatamente após o desastre. Rejeitando os dois fatalismo teológico e interpretações baseadas em puro acaso, Kant argumentou que a catástrofe deve ser entendida como a consequência exata de estável Leis naturais. A natureza, nesta visão, opera de acordo com princípios regulares Em vez de forças arbitrárias. Catástrofes não refutam a existência de Ordem natural; Em vez disso, eles revelam os processos dinâmicos através dos quais o A Terra evolui.

Kant enfatizou que o mundo natural não pode ser interpretado apenas a partir de um Perspectiva centrada no homem. A Terra segue sua própria regularidade e economia, e transformações geológicas ocorrem de acordo com as leis que podem produzir ambos Mudança gradual e ruptura súbita. O próprio universo está em contínuo transformação, e transições dentro da natureza nem sempre são pacíficas. Ainda Essas mudanças ainda ocorrem dentro de um quadro ordenado governado por leis naturais.

Desta perspectiva, o terremoto de Lisboa não se torna um evento sem sentido mas uma manifestação dinâmica dos processos que moldam a Terra. Natural As catástrofes devem, portanto, ser entendidas como parte da evolução mais ampla de O planeta. A aceitação da mudança dentro do corpo da natureza dá desastre Uma dimensão filosófica diferente: Em vez de puro caos, catástrofe representa uma possível expressão das transformações legais que estruturam O mundo natural. Neste sentido, a resposta de Kant a Lisboa marca um decisivo momento na história da filosofia natural: O ponto em que o terremoto Deixa de ser, principalmente, um problema teológico e torna-se, em vez disso, uma ciência Uma. As dimensões literárias do debate de Lisboa.. *Candide*, A novela de Kleist, e o corpo de literatura que eles geraram... são examinados em §16.5.2.

Assim, desde o início da especulação grega até o cadinho do Iluminismo de Lisboa, terremotos serviram como catalisador persistente para a filosofia reflexão, forçando os pensadores a confrontar questões fundamentais sobre estrutura do mundo natural, os limites da providência divina, e O lugar da humanidade dentro de um universo às vezes violento e imprevisível. Ele foi Kant quem primeiro articulou a resposta que os dois séculos seguintes de A ciência da Terra justificaria: O terremoto não significa nada, exceto o que o As leis da natureza exigem.

CÓPIA PARA REVISÃO

16.4.5 Reconstrução

O desastre também teve uma consequência material imediata de significado duradouro. O Marquês de Pombal reconstrução do bairro Baixa é um momento fundador do planejamento urbano moderno e da engenharia sísmica – a questão filosófica de como a humanidade deve responder à catástrofe respondida, no caso de Pombal, em tijolo e pedra. No entanto, a realização arquitetônica não pode ser separada das condições políticas que tornaram possível. A resposta de Pombal foi, desde o início, um exercício no que poderia ser chamado autoritarismo iluminado: saqueadores foram enforcados publicamente, desertores capazes foram pressionados a trabalho de socorro pelo exército, e nova construção foi imediatamente proibida em toda a cidade para evitar a reconstrução caótica que frustrou o plano análogo de Wren para Londres após o incêndio de 1666. Em cinco meses, uma estrutura estratégica.. *Dissertação* de Manuel da Maia... tinha estabelecido os princípios de planejamento para a nova Baixa; Em dois anos, uma radical reconfiguração legal da propriedade transferiu terras da aristocracia e das autoridades eclesiásticas para a classe mercante emergente, efetivamente engenharia de um terremoto político para acompanhar o físico (Brand e Nicholson, 2013).

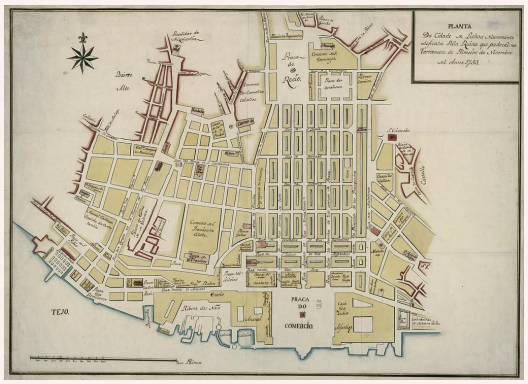
As inovações técnicas incorporadas no plano não foram menos conseqüentes. A nova Baixa foi colocada em uma grade ortogonal racional, Fig. 16.15bUma ordem cartesiana imposta aos escombros da cidade medieval... com dimensões de blocos padronizadas, alturas de construção uniformes, e uma clara hierarquia de ruas nomeadas pelas guildas que as ocupariam. Observações de liquefação em áreas ribeirinhas levaram a fundações conduzidas sobre estacas de madeira; a taxa de sobrevivência superior dos edifícios em madeira levou ao desenvolvimento do *Gaiola* Sistema, gaiolas de madeira interna montadas diagonalmente... sentadas independentemente dentro das paredes do perímetro da alvenaria... a primeira tipologia de construção deliberadamente resistente à sísmica na história europeia. As ruas foram ampliadas para que até mesmo o colapso simultâneo de edifícios em ambos os lados deixaria um corredor de evacuação entre eles. Componentes foram pré-fabricados fora do local para permitir montagem rápida, e paredes de fogo que se estendem acima da linha do telhado foram feitas padrão por toda parte. O plano representava assim uma interseção produtiva de pesquisa empírica pós-desastre e implementação técnica em larga escala que não seria sistematicamente replicada até o século XX.

Brand e Nicholson, 2013 O estudo comparativo de Lisboa e do pós-terremoto Christchurch conclui que o sucesso da reconstrução pombalina repousava em três pilares interdependentes: a demolição completa da devastada Baixa, o reelaborado obrigatório dos limites da propriedade, e uma visão urbana firmemente fundamentada nas melhores práticas internacionais (Brand e Nicholson, 2013). Cada um deles exigia a superação dos direitos de propriedade individuais em nome da resiliência coletiva – uma subordinação do interesse privado à necessidade pública que só era possível porque Pombal tinha, e estava disposto a usar, poder executivo concentrado. A lição extraída não é que autoritarismo seja desejável em si mesmo, mas essa reconstrução pós-desastre de qualidade duradoura historicamente

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Lisbonne



(b) reconstrução do bairro Baixa

Figura 16.15: Lisbonne, antes e depois

exigiu uma unidade da autoridade de tomada de decisão, uma clareza da visão técnica, e uma vontade de agir com rapidez e a determinação que processos democráticos deliberativos raramente permitem[15].. Em Lisboa de Pombal, a resposta filosófica à catástrofe não foi expressa apenas em tijolo e pedra: foi imposto por decreto.

16.5 Literatura

16.5.1 Terremotos na literatura

Terremotos também deixaram sua marca na literatura, onde aparecem como referências históricas e como poderosos dispositivos dramáticos ou simbólicos. Muito antes O Iluminismo transformou o terremoto em um veículo para a filosofia debate, eventos sísmicos já haviam entrado na imaginação literária como marcadores de memória coletiva. Um dos primeiros exemplos é o terremoto do Estreito de Dover 6 Abril 1580, que parece ter sido o maior terremoto registrado em As crônicas históricas da Inglaterra, Flandres e do norte da França. O evento foi suficientemente memorável que entrou na consciência cultural do período, e cerca de onze anos depois, Shakespeare Incorporou uma referência passageira a ele em *Romeu e Julieta*.. Em Atue Eu, Cena III, a enfermeira recorda:

> Desde o terremoto, há onze anos.
>
> Ato I, Cena III Shakespeare, 1597 Romeo and Juliet

[15]Este modelo nem sempre foi transplantado com sucesso. A reconstrução de Beirute pós-guerra civil *Solidere* é um contra-exemplo preventivo: O centro histórico foi arrasado, seu tecido social dissolvido, e o resultado amplamente condenado como um simulacro temático da cidade que substituiu.

CÓPIA PARA REVISÃO

Embora breve, esta observação funciona como uma âncora cronológica, sugerindo que o terremoto permaneceu vivo na memória coletiva quando Shakespeare Compôs a peça – um pequeno mas contando ilustração de como os eventos sísmicos se alojam em tempo cultural.

No final do século XVIII, os desastres naturais eram cada vez mais empregado na literatura como dispositivos dramáticos em moral e filosofia narrativas. O terremoto de Lisboa de 1755 em particular afetou profundamente o o clima intelectual da Europa e inspirou um corpo de obras literárias que transformou o terremoto em um veículo simbólico para explorar temas de justiça divina, sofrimento humano e a fragilidade da civilização. Notável Exemplos incluem a tragédia *Morra Lissabonner* (1758) por Christian Gottlieb Lieberkühn (Lieberkühn, 1758), O romance poético *Les Incas* (1777) por Jean-Franç- Ois Marmontel (Marmontel, 1777)E Heinrich von Kleist's Romancela celebrada *Das Erdbeben no Chile* (escrito c. 1806, publicado em 1810) (Kleist, 1810). Em todos estes O terremoto não é apenas um fenômeno físico, mas uma narrativa catalisador que expõe tensões morais, contradições sociais e filosóficas perguntas sobre o destino, providência e a natureza da sociedade humana.

16.5.2 O Terremoto de Lisboa de 1755 e o Debate sobre Iluminação

As dimensões filosóficas do terremoto de Lisboa foram examinadas em §16.4.4:. Resposta naturalista de Kant, Rousseau leitura proto-sociológica de vulnerabilidade, e agressão de Voltaire em Otimismo leibniziano como uma posição filosófica. O que a seção atual examina é a resposta literária paralela - as maneiras em que o mesmo evento gerou não apenas argumentos, mas poemas, sátiras, e ficção que carregavam seus perguntas a uma audiência muito mais ampla e deu-lhes uma permanência que filosófica Prosa sozinha não podia garantir. As duas dimensões são inseparáveis: Voltaire foi simultaneamente o filósofo de Lisboa e sua maior voz literária, e a distinção entre sua filosofia A raiva e sua fúria poética são, na prática, difíceis de desenhar.

Voltaire

Voltaire's *PoÈme sur le dÉsastre de Lisbonne* (1756) Deu o terremoto sua voz literária mais famosa. O poema não é uma obra filosófica argumento, mas de raiva filosófica: Exige saber como qualquer teoria de Otimismo pode sobreviver à visão de crianças esmagadas sob os escombros de Lisbon.

> Direz-vous, en voyant cet amas de vitimes :
> "Dieu s'est vengé, leur mort est le prix de leirs crimes" ?
> Que crime, quelle faute ont commis ces enfants
> Sur le sein maternel écrasés et sanglants ?
>
> Voltaire [Arouet, 2009 *"Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien"*

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A passagem pode ser feita como: *Você vai dizer, vendo este monte de Vítimas: 'Deus está vingado; A morte deles é o preço de seus crimes? O quê Crime, que culpa essas crianças cometeram, esmagaram e sangraram em seus O peito da mãe* A acusação não é dirigida apenas a teologia Otimismo, mas em qualquer contexto interpretativo... Religioso ou filosófica... que tenta racionalizar o sofrimento infligido ao Inocente. O terremoto, em Voltaire's mãos, torna-se um Refutação: uma prova por catástrofe de que o mundo não é ordenado para humanos Benefício, e que os sistemas intelectuais construídos sobre essa premissa são moralmente indefensável.

Três anos depois, em *Candide, optimismo* (1759) (Voltaire [Arouet, 1759), Voltaire Voltou para Lisbon em um registro muito diferente. O romance, possivelmente o mais lido Sátira filosófica no cânone ocidentalÏve heroi através as ruínas da cidade, onde ele testemunha o terremoto e suas consequências, Incluindo um auto-da-fÉ conduzida pela Inquisição para evitar o futuro eventos sísmicos. A justaposição é deliberadamente grotesca: Teologia oficial Respondendo à catástrofe geológica com assassinato judicial. Na figura de Dr. Pangloss, Que mantém através de cada desastre que "Tudo é para o melhor em todos os mundos possíveis,"Voltaire criou um dos grandes emblemas da literatura Uma figura cujo otimismo alegre se torna, em O rosto de Lisboa, uma forma de cegueira moral.

Kleist

Heinrich von Kleist novella *Das Erdbeben em Endereço de correio* ('O Terremoto no Chile', escrito c. 1806, publicado 1810) (Kleist, 1810) é o mais formalmente realizado tratamento literário de um terremoto na Europa A literatura, e aquela que mais diretamente envolve as questões filosóficas posado por Lisboa– embora seu cenário seja Santiago no momento do terremoto catastrófico de 1647. Sua Dois protagonistas, JeróNimo e.. Josépha, estão no ponto de execução por transgredir Os códigos morais da cidade quando o terremoto destrói a prisão e o andaime Da mesma forma, libertando-os em um mundo transformado.

O que se segue na novela está entre as explorações mais sutis de catástrofe e ilusão na literatura alemã. O terremoto cria, brevemente, Uma espécie de Éden social: Hierarquias normais são suspensas, estranhos ajudam outro, e os sobreviventes experimentam uma solidariedade transitória que atravessa as rígidas estratificações da sociedade colonial. Kleist parece, por um momento, estar escrevendo uma narrativa de *Yonaoshi*Mundo Retificação 'no sentido japonês discutido em §16.2.1—in que o terremoto funciona como um violento, mas finalmente redentor social Nivelador.

Mas esta ilusão está despedaçada com a característica violência kleistiana. O sobreviventes se reúnem em uma igreja para um sermão de Ação de Graças, e o pregador, restabelecendo a ordem teológica que o terremoto havia suspendido, identifica a catástrofe como punição divina para o moral transgressões das quais JeróNimo e.. Josépha tinha sido acusado. A congregação, sua.. Os medos teológicos reacenderam, se voltam contra o casal e os matam. Ordem... social, teológica, violenta... reafirma-se sobre o momento abertura criada pela

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

catástrofe. O terremoto não redime; Apenas.. fornece a ocasião para uma brutalidade mais sistemática.

Kleist's A novela dramatiza assim, ao nível de narrativa, o mesmo confronto entre teológico e racional interpretações de terremoto que Voltaire e.. Rousseau Eu tinha conduzido como argumento filosófico (§16.4.4). O terremoto é lido pelo pregador como Julgamento divino; pela comunidade momentânea de sobreviventes como libertação; E por Kleist's Narração irônica como uma revelação do violência latente em toda a ordem social. Nenhuma dessas leituras foi confirmada. Todos são expostos como imposições interpretativas sobre um evento geológico que está, em Em si, indiferente ao significado humano. Neste sentido, *Das Erdbeben em Endereço de correio* pode ser lido como o cumprimento literário da trajetória filosófica que corre de Voltaire através de Kant (§16.4.4): O terremoto como ocasião para despojar longe de ficção consoladora e confrontando o mundo como ele é.

16.5.3 O Terremoto de Messina de 1908

Se o terremoto de Lisboa foi o catalisador para a filosofia do Iluminismo, Terremoto de Messina de 28 Dezembro 1908 foi a grande catástrofe sísmica de a moderna imaginação literária europeia, embora sua resposta literária fosse Elegíaco e patriótico em caráter ao invés de filosófico na Lisboa Sentido. O terremoto e tsunami associado, atingindo ambas as costas do Estreito de Messina no início da manhã, matou uma estimativa 80.000 a 120.000 pessoas e destruiu duas cidades quase inteiramente, tornando-se O evento sísmico mais mortal da história europeia.

A escala do desastre provocou uma resposta imediata dos italianos Mundo literário. Giovanni Verga, o grande siciliano romancista realista, escreveu sobre os sobreviventes "firmes nas ruínas de seu Lamentável cidade'- - invocando a linguagem da resistência e identidade que Tornar-se-ia central para a memória cultural do evento. Luigi Capuana, Um fundador da *Verismo* movimento, descreveu a destruição com uma direta característica: O terremoto teve Só precisou de um minuto para extinguir o que levou gerações a construir. Essas respostas, coletadas na publicação *Scilla e Cariddi* (Barzilai, 1909) produzido pela Associação dos Italianos Imprensa Periódica em auxílio de órfãos do terremoto, ilustrar como o Messina A catástrofe foi absorvida em um discurso de solidariedade nacional e Um processo estruturalmente análogo ao social e leituras políticas codificadas nos japoneses *Namazu-e* As digitais foram discutidas Em §16.2.1.

A resposta literária mais duradoura ao terremoto de Messina veio, no entanto, de um escritor que viveu isso quando criança. O poeta Salvatore QuasimodoQuem receberia o Prêmio Nobel em Literatura em 1959... mudou-se para Messina com sua família na imediata Depois do desastre, como seu pai tinha sido colocado lá como uma ferrovia Oficial para ajudar no esforço de resgate. Em seu poema *Ao meu pai*, Escrita décadas depois, Quasimodo Relembraram a cena com uma precisão imagética que preserva a experiência de catástrofe através A distância dos anos:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Dove sull'acque viola era Messina,	Onde Messina colocava violeta sobre as águas,
Tra fili espezzati e macerie	entre os fios mutilados e escombros,
Você vai lungo binari e scampi	Você anda pelos trilhos e interruptores
Col tuo berretto di gallo isolano.	Na boina de seus ilhéus.
Il terremoto ribolle da due giorni,	Por dois dias, o terremoto ferve
è dicembre d'uragani	É o furacão de dezembro
E é avvelenato.	e um mar envenenado.

La terra impareggiabile, Quasimodo, 1958 *"Al padre"*

A imagem de Messina mentindo "violeta sobre as capturas das águas com letra"economia o que pesquisas de engenharia registram em estatísticas de danos: Uma cidade inteira dissolvidos em ruínas na beira do mar. Que o terremoto deveria ""Ferver' por três dias codifica, na compressão do poeta, a experiência de Depois dos choques, estendendo a destruição para além do evento inicial sismológico, bem como interesse literário.

O contraste com Lisboa é instrutivo. Messina gerou elegia e nacional solidariedade onde Lisboa gerou filosofia e crise teológica. O A diferença não reflete apenas a distância cultural entre 1755 e 1908 mas uma mudança significativa no quadro intelectual dentro do qual terremotos foram interpretados: No início do século XX, a causa natural da O terremoto não estava mais em séria disputa, e a questão do divino O julgamento havia recuado do centro do discurso educado. O quê E o que a literatura de Messina reflete... era o humano Experiência de catástrofe: tristeza, solidariedade, memória e o trabalho de Reconstruindo. Nesta mudança do teológico para o experiencial, o Resposta literária ao terremoto reflete a trajetória intelectual mais ampla traçada ao longo deste capítulo, desde a mitologia até a religião e filosofia para o acerto secular com forças naturais que caracterizam Era moderna.

16.5.4 Síntese: Literatura e a Memória Cultural dos Terremotos

As tradições literárias examinadas nesta seção revelam o quão consistentemente grande eventos sísmicos têm servido como catalisadores para cultural e intelectual E como a natureza desse ajuste de contas mudou com o tempo. Shakespeare's breve alusão ao terremoto de 1580 funciona como um marcador mnemônico, evidência de que eventos sísmicos se alojam em memória coletiva e tornar-se pontos de referência para o tempo cultural. A literatura de Lisboa desempenha uma função diferente e mais ambiciosa: Ele transforma um Catástrofe geológica em uma discussão, colocando o terremoto como evidência em uma disputa filosófica sobre a estrutura do mundo e da humanidade Uma disputa cuja infra-estrutura filosófica foi criada por Kant, Voltaire, e Rousseau, como examinado em §16.4.4, e cuja expressão literária é examinada aqui. A literatura de Messina, Contraste, é pós-filosófico. Ele chora, comemora e carrega testemunha, mas não mais pergunta se o terremoto significa algo no Sentido teológico.

Esta trajetória... de marcador mnemônico, através do catalisador filosófico, para Elegia secular... reflete o arco mais amplo traçado ao longo deste capítulo: O, o gradual deslocamento de mitológico, religioso, e providencialista interpretações de terremotos por

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

estruturas enraizadas em investigação natural e Experiência humana. Dirac's Asserção confiante, citada em A abertura de §16.2, que a compreensão moderna do natural processos tornaram a interpretação teológica do desastre obsoleto, encontra sua evidência mais persuasiva não em qualquer argumento filosófico, mas na O próprio registro literário: Na distância entre Voltaire's *PoÈme*Que não poderia descrever Lisboa sem enfrentar Deus... e Quasimodo poema, em que Deus está completamente ausente, e o terremoto ferve por três dias em um mar envenenado.

16.6 Arquitetura

16.6.1 Pirro Ligorio

Outro marco importante na história intelectual dos terremotos é o trabalho de Pirro Ligorio, Quem escreveu o *Libro di diversi terremoti* em 1570. Este tratado coletou e avaliou criticamente as teorias contemporâneas sobre fenômenos sísmicos, e representa uma das primeiras tentativas sistemáticas no mundo ocidental, submeter terremotos a análises racionais em vez de interpretação teológica –colocá-la diretamente dentro da tradição examinada neste capítulo. Notavelmente, o trabalho também contém o que se acredita ser o Primeiro projeto para uma estrutura resistente a terremotos na arquitetura ocidental História, Um detalhe que marca Ligorio como uma figura de transição entre a tradição filosófica pesquisado acima e a tradição de engenharia examinada em capítulos posteriores deste Trabalho. O manuscrito foi redescoberto e publicado em um moderno acadêmico Edição de Emanuela Guidoboni (Ligorio, 2005) em 2005.[16]

16.6.2 Gibellina

Em 15 de janeiro de 1968, um terremoto devastador de magnitude 6.4 atingiu a cidade do Vale Belice no oeste da Sicília, Matando quase 400 pessoas e deixando aproximadamente 100.000 sem-teto. Entre as cidades totalmente destruídas estava Gibellina, uma pequena comunidade agrícola de cerca de 6.000 habitantes fig. 1. 16.16a.. A destruição foi total: blocos inteiros desmoronaram, o tecido medieval da rua foi destruído, e sobreviventes fugiram para improvisar cidades de tendas no campo circundante, Fig. 16.16b.. O que se seguiu foi um dos esforços de reconstrução mais prolongados e politicamente carregados na história italiana. O estado italiano respondeu lentamente e caoticamente; As casas

[16]Um outro exemplo notável de A investigação inicial do terremoto é atribuída a Anthemius de Tralles (c. 474–c. 558), um dos Arquitetos principais de Hagia Sophia, quem Parece que construiu um dispositivo mecânico usando vapor para simular sísmica vibrações sob a casa de um vizinho – de acordo com as fontes, uma legal Adversário, fazendo isso talvez o primeiro registro de instância artificial Simulação de terremotos (Dragoni, 2005; Downey, 1946). Que o arquiteto de Um dos edifícios mais testados na história também deveria ser creditado com a primeira simulação de terremoto é uma coincidência que vale a pena Preservando.

CÓPIA PARA REVISÃO

de emergência não foram entregues por anos, e a população deslocada definhou em quartéis temporários - alguns por mais de uma década. O terremoto tornou-se um símbolo da negligência do sul da Itália por Roma, e o vale de Belice uma palavra para fracasso institucional e a diferença entre o próspero norte e os pobres *Mezzogiorno*. Escritores, intelectuais e sindicalistas reuniram-se em torno dos sobreviventes, e a reconstrução das cidades de Belice acabou se tornando ligada com debates mais amplos sobre planejamento urbano, identidade cultural, ea política de desastre no pós-guerra Itália (Musolino, 2017).

Foi nesse contexto que o artista Alberto Burri (1915-1995) concebeu uma das respostas mais extraordinárias à destruição na história da arte terrestre. Burri já estava entre os artistas do pós-guerra mais famosos da Itália, reconhecidos internacionalmente por sua *Sacchi* (pinturas feitas de sacos de estopa costurados), seus plásticos queimados, e acima de tudo seu *Cretti* As telas revestidas de misturas à base de caulim que, ao secarem e encolherem, produziram teias de rachaduras reminiscentemente lembrando terra seca, lama seca, ou inevitavelmente... terra fraturada por terremotos. O salto da tela para a paisagem foi conceitualmente audacioso, mas visualmente coerente: Em Gibellina, Burri simplesmente continuou o que sempre fez, mas em escala civilizacional (Forty, 2013).

Entre 1984 e 1989, e então concluída postumamente em 2015, Burri dirigiu o revestimento de todo o campo de escombros da velha Gibellina sob um manto contínuo de concreto branco (Forty, 2013), Fig. 16.16c.. O processo não foi de apagamento, mas de fossilização. o concreto seguiu a grade de ruas pré-existente, preservando os contornos das estradas, pátios e pegadas da casa como uma série de fitas brancas levantadas separadas por fissuras navegáveis. Essas fissuras deliberadamente "quebraram"na superfície ecoam tanto as rupturas sísmicas que causaram a devastação e o tratamento característico da superfície de suas telas, agora ampliadas para a escala de um bairro urbano inteiro. O trabalho final mede aproximadamente 300 por 400 M, cobre cerca de 80.000 metros quadrados, e é legível como uma forma coerente da fotografia aérea e satélite. Está entre as maiores instalações de arte terrestre Já criado.

Eu visitei o.. *Cretto* em 2008 e foi atingido por sua quietude estranha.[17] Caminhando por seus estreitos corredores brancos em alguns lugares mal largos o suficiente para duas pessoas passarem um se move através do que é essencialmente uma tumba comunal. As paredes sobem até o peito ou ombro, envolvendo o caminhante em um labirinto de absoluta brancura. Não há som, pequena sombra, e nenhuma referência visual além do concreto em si e do céu acima. A experiência é simultaneamente arquitetônica e funerária, abstrata e intensamente específica: Sob os pés de alguém está uma cidade inteira, selada e silenciosa. O *Cretto* Não representa perda; Ele *É* Perda, dada a forma material (Forty, 2013).

O destino dos sobreviventes exigiu mais do que um monumento. A 20 quilômetros de distância, em um local plano na planície abaixo, uma colônia substituta – Gibellina Nuova – era para ser construída do zero, Fig. 16.17a.. O prefeito da nova cidade, Ludovico Corrao,

[17] Foi esta visita a Gibellina que despertou meu interesse em escrever este capítulo, como observado na Introdução.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Gibellina antes



(b) Gibellina destruída



(c) Creto de Burri

Figura 16.16: Gibellina destruída e enterrada em concreto

era um advogado, político e patrono apaixonado das artes que viram no desastre uma oportunidade improvável: A chance de construir uma cidade que seria, a partir de suas fundações, uma obra de arte total (Badami, 2012). Corrao convidou uma extraordinária constelação de arquitetos, artistas e designers italianos e internacionais para contribuir com a nova cidade, transformando o que poderia ter sido um exercício rotineiro na habitação social em um dos experimentos mais ambiciosos da A fusão do urbanismo e da arte contemporânea tentou em qualquer lugar no século XX. Entre aqueles que contribuíram com edifícios, estruturas urbanas ou esculturas públicas estavam Oswald Mathias Ungers, Franco Purini, Pietro Consagra, Ludovico Quaroni, Vittorio Gregotti, Alessandro Mendini, e Mimmo Paladino (Venezia, 1989). A armadura cívica que unia essas contribuições foi fornecida por Franco Purini e Laura Thermes *Sistema delle Piazze* (1990), Fig. 16.17bUma sequência de três praças públicas interconectadas, cercadas por um pórtico tufa de dois níveis, pavimentada em mármore e pedra de lava, e rosqueada por um pequeno canal alimentando uma série de fontes, projetadas para servir como dobradiça social entre os bairros residenciais e Monumental cenário para as obras de arte distribuídas por toda a cidade. No total, mais de oitenta arquitetos e artistas deixaram sua marca em Gibellina Nuova, e a cidade se tornou–na intenção pelo menos— um museu ao ar livre de design modernista e pós-modernista.

Curiosamente, e apropriadamente, Fig. 16.17c mostra uma escultura, atribuída a Pietro

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Pietro Consagra *Porta del Belice*



(b) Franco Purini, Laura Thermes, *Sistema delle Piazze*





(c) Pietro Consagra *Cobra*



(d) Pietro Consagra *Teatro Frontale*

Figura 16.17: Gibellina Nuova

Consagra, um dos artistas sicilianos que mais contribuíram extensivamente para o projeto de museu ao ar livre de Corrao, apresenta uma sinuosa Forma tubular em metal patinado cuja morfologia de bobinamento convida quer por design ou pela lógica da forma abstrata encontrando a sua própria Ressonância... comparação com as figuras serpentinas discutidas ao longo de todo Este capítulo como veículos transculturais para a força sísmica e ctônica. Consagra, um abstracionista comprometido da escola italiana do pós-guerra, provavelmente teria resistido a uma leitura explicitamente mitológica (ele era um marxista ardente); ainda a convergência de uma escultura serpentina em uma cidade reconstruída após catastrófica terremoto, em uma região cuja violência geológica é codificada no O chão debaixo da *Cretto*, é difícil de descartar como puramente fortuito.

Teatro Frontale de Pietro Consagra, Fig. 16.17dÉ talvez o monumento mais emblemático da utopia não realizada de Gibellina Nuova: Concebido pelo escultor como uma "escultura viva"' em vez de um teatro convencional, sua fileira de arcos de concreto elevadíssimos - rebar ainda exposto ao céu siciliano - é uma elegia não intencional para as ambições da reconstrução pós-terremoto.

No entanto, o experimento não foi sem falhas profundas e instrutivas[18].. Por toda sua

[18]O destino de Matera *Sassi* oferece um contraponto instrutivo para a dupla tragédia de Gibellina. Evacuado por decreto do governo na década de 1950 Bases de pobreza e insalubridade *Cristo si è fermato ad Eboli* (1945) fizeram das cavernas uma palavra para o sul A miséria italiana... o antigo assentamento troglodita não

CÓPIA PARA REVISÃO

ambição cultural, Gibellina Nuova foi experimentada por muitos de seus habitantes e acima de tudo pelos idosos como profundamente alienante (Musolino, 2017). A velha Gibellina tinha sido uma densa e labiríntico cidade montanhosa do tipo comum na Sicília: ruas de apenas dois metros de largura, casas empilhadas umas contra as outras, vizinhos separados por uma parede ou uma escadaria compartilhada, vida pública conduzida em piazzas escalou para a conversação ao invés de espetáculo. A nova cidade, em contraste, foi espalhada por uma planície plana em um plano disperso de baixa densidade, com avenidas largas, rotundas monumentais, e conjuntos esculturais que não tinham relação com o grão do urbanismo siciliano tradicional (Badami, 2012). Os prédios eram impressionantes como objetos individuais, mas não geraram o recinto espacial e intimidade social que estruturaram a vida diária na cidade original. Moradores mais velhos se viram incapazes de orientar-se, incapaz de caminhar até vizinhos, incapazes de reproduzir os hábitos e rituais de uma vida. Muitos falavam da nova cidade como um lugar de exílio em vez de voltar. A comunidade recebeu arquitetura, mas não a cidade que perderam.

Gibellina é assim a mais visualmente presa, e talvez a mais instrutiva, estudo de caso na intersecção da sismologia, arquitetura e urbanismo. O *Cretto* é um monumento insubstituível à perda; Gibellina Nuova é uma lição de precaução na lacuna entre visão arquitetônica e vida social. Juntos, eles constituem a meditação mais concentrada sobre o terremoto e o ambiente construído para ser encontrado em qualquer lugar do mundo.

16.7 Arte

16.7.1 Rock Art e Traços de Falha

Dois exemplos convincentes ligam imagens de terremoto diretamente a estruturas geológicas ativas, e juntos ilustram a gama de evidências disponíveis para este tipo de Desde observação geológica até interpretação cultural.

Na Sierra de São Francisco em Baja Califórnia, O site conhecido como *Cueva de la Serpiente* (Caverna da Serpente) preserva um mural aproximadamente oito metros de comprimento representando um grande chifre serpente cercada por quase 50 humanos E figuras de animais, Fig. 16.18.. Observe o balanço visual das figuras humanas e animais ao redor do Serpente central, sugestiva de movimento lateral dinâmico através do painel. A composição não é estática. O arranjo das figuras cria um visual de balanço ritmo, como se a serpente estivesse tecendo dinamicamente através do painel, reunindo O mundo humano e animal em seu movimento. Imediatamente na frente da caverna, o Arroyo faz uma brusca deflexão

foi demolido, mas Simplesmente abandonado. Uma lei de 1986 permitiu reocupação, reconhecimento da UNESCO Seguiu-se em 1993, e o *Sassi* são hoje um prosperando, se fortemente Turismo, bairro urbano mais uma vez. Onde Gibellina foi apagada e Re-inventada, Matera foi esvaziada e recuperada. O tecido original sobreviveu, e com ele a possibilidade de voltar.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



Figura 16.18: Cueva de la Serpiente mural, Sierra de São Francisco, Baja California.

para leste antes de retomar seu rumo norte Uma anomalia de drenagem consistente com uma tendência leste-oeste Strike - falha de deslizamento Compensando o canal de transmissão. O Coincidência da imagem e da geologia não prova, claro, a causa; Mas.. levanta a questão de saber se as pessoas que escolheram este local e pintaram esta parede Entenderam, em seus próprios termos, que o terreno aqui se movia diferente do solo Em outro lugar.

Um segundo exemplo é o *Caverna Pintada de Chumash* nas montanhas de Santa Ynez ao norte de Santa Barbara, Fig. 16.19, situado perto do ativo Arroyo Parida Erro. Os pictógrafos encontrados no local.. formas interligadas, padrões irradiantes, e figuras cuja geometria sugere Moção em vez de repouso – foram interpretados por alguns pesquisadores como possíveis respostas culturais à atividade sísmica sentida, embora esta interpretação continue a ser debatida entre os arqueólogos, muitos que, em vez disso, relacionam as imagens com a experiência visionária xamânica.

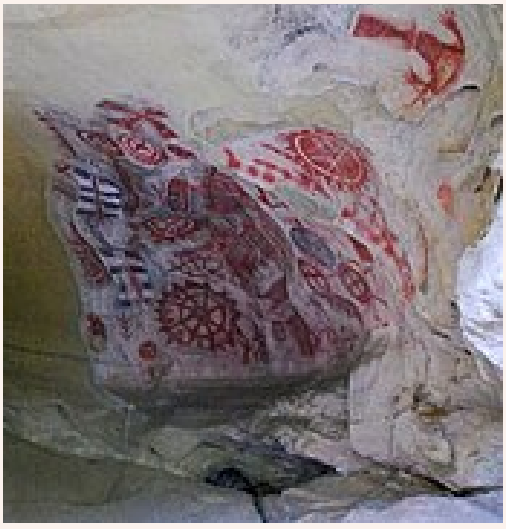


Figura 16.19: Pictógrafos na Caverna Pintada de Chumash, Montanhas Santa Ynez, Califórnia.

As duas interpretações não precisam ser mutuamente exclusivas. Dentro de um cosmológico O quadro em que terremotos e estados visionários são ambos entendidos como

CÓPIA PARA REVISÃO

Manifestações do poder subterrâneo, pouca distinção seria feita entre as duas experiências. O que pode ser dito com mais confiança é que O local era improvável ter sido selecionado arbitrariamente. Sua localização dentro de um Tectonicamente, a paisagem ativa sugere que o próprio cenário possuiu um reconhecido significado, mesmo se esse conhecimento foi expresso através de simbólico ou conceitos cosmológicos muito diferentes daqueles usados na geociência moderna.

Tomado junto com outros exemplos discutidos neste capítulo, um padrão mais amplo Surge. Paisagens propensas a terremotos freqüentemente dão origem à serpente Mitologias, uma conexão que talvez seja Não é difícil de entender. A serpente é uma criatura subterrânea dinâmica capaz de emergência súbita e força destrutiva, e se move no sinuoso, A moda lateral lembra o movimento de ruptura das falhas ou a propagação de ondas sísmicas através do solo não consolidado. Da serpente de Baja Califórnia para os de duas cabeças *Sisiut* do Pacífico Noroeste, A figura aparece repetidamente como uma metáfora transcultural para forças que são reais, recorrentes, e de outra forma difícil de explicar.

Além da própria serpente, terremoto americano Mitologia Muitas vezes situa eventos sísmicos dentro de narrativas cosmológicas de destruição e renovação cíclica. O Asteca Tradição de sucessivas eras mundiais, cada uma delas Terminado por catástrofe, encontra surpreendentes paralelos narrativos através de Mesoamericano Tradições. Similar idéias aparecem em outro lugar do mundo; O conceito japonês de *Yonaoshi* ('Retificação do mundo') fornece um tal exemplo e será discutido na seção seguinte.

16.7.2 Pintura

Terremotos encontraram expressão nas artes visuais, onde os pintores têm Tentou representar tanto a violência física do evento quanto o humano Resposta à catástrofe. As representações artísticas oscilam entre duas Tradições: O, o *Peinture de gênero*, que se concentra na vida cotidiana confrontado com o desastre, e *Peinture d'histoire*, que eleva O evento a um nível histórico e simbólico mais amplo.

Durante o século XIX, um exemplo notável é a obra de Léopold Robert, que pintou cenas inspiradas no resultado de um terremoto em Nápoles por volta de 1830. A ênfase não é apenas na própria destruição, mas sobre o drama humano que se desenrola na paisagem urbana devastada.. arquitetura, populações deslocadas, e sofrimento emocional.. Fascínio romântico mais amplo com catástrofe e sublime, Fig. 16.20a.

Na América Latina, Fernando Botero abordou explicitamente o tema em *Terremoto em Popayán*, inspirado no terremoto destrutivo de 1983 que atingiu a histórica cidade colombiana. A interpretação de Botero se transforma a catástrofe em uma poderosa narrativa visual, combinando seu distintivo figuras volumétricas com cenas de devastação urbana, Fig. 16.20b.

As discussões acadêmicas enfatizaram o duplo papel da catástrofe como ambos evento histórico e assunto estético. Sylvie Wuhrmann rastreou o evolução das imagens do

CÓPIA PARA REVISÃO

terremoto de cenas de gênero à pintura da história, de Jean-Pierre Saint-Nosso a Léopold Robert Wuhrmann, 1994. Michel Ribon explorou a estética da catástrofe, argumentando que desastres como como os terremotos ocupam um lugar significativo na história da arte representação porque eles confrontam artistas com os limites da ordem, estabilidade, e controle humano Ribon, 1999.



(a) Léopold Robert, *Napolitaine pleurant sur les ruines de sa maison après un tremblement de terre* (c. 1830)



(b) Fernando Botero, *Terremoto em Popayán* (1999)

Figura 16.20: Duas respostas artísticas à catástrofe sísmica

16.7.3 Coleção Kozak

De grande interesse é a coleção privada de Jan Kozák (Kozak, Moreira e Oldroyd, 2005), um geocientista tcheco no Instituto Geofísico da Academia de Ciências Tcheca, que mais de quatro décadas reuniu uma da maior série de representações pré-fotográficas do mundo Desastres: Mais de 2.300 itens cobrindo terremotos, vulcânicos erupções e tsunamis. Um subconjunto de 875 slides foi doado ao Centro de Pesquisa da Universidade da Califórnia, Berkeley, digitalizada pela biblioteca Nisee-PEER, e disponibilizada online; Esse portal não é mais acessível ao público.

A coleção engloba inúmeras representações da Lisboa de 1755 terremoto (Keller, 1998; Kozak, Moreira e Oldroyd, 2005), o terremoto de Nápoles de 1830 (renderado por Léopold Robert), e numerosos *Namazu-e* (Giacomoni, 2005). Seu formulário publicado mais acessível é o volume co-autora do geofísico Vladimír Cermák (Kozák e Cermák, 2010), que se baseia na coleção para fornecer Reproduções de páginas inteiras de gravuras raras, mapas antigos, e esboços, Cada um acompanhado por texto sobre o fundo geofísico e histórico do evento e da origem da imagem. Sismos em destaque incluindo os de Basileia (1356), Constantinopla (1762) e São Francisco (1868 e 1906), ao lado de erupções vulcânicas e tsunamis abrangendo do século XIV ao XIX. O trabalho une o História da ciência e história da arte, documentando como pré-moderno Sociedades observadas, registradas e interpretadas como catástrofes sísmicas antes do advento da fotografia.

CÓPIA PARA REVISÃO

16.7.4 Coleção Amelio

O terremoto também foi objeto de um importante e único coleção de arte moderna (*Terrae Motus*) (Fondazione Amelio, 1987). Após o terremoto que atingiu Irpinia e Basilicata em 23 Novembro de 1980, o negociante de arte contemporânea napolitano Lucio Amelio (1931-1994) — convencido de que apenas a força da arte poderia levar a Renascer... convidou artistas de renome internacional para contribuir funciona respondendo à catástrofe. A Fundação Amelio foi formalmente criado em novembro de 1982 para dar ao projeto base institucional, e a coleção cresceu para abranger mais de 70 pinturas e esculturas por mais de 50 artistas italianos e internacionais, entre eles Joseph Beuys, Andy Warhol, Keith Haring, Robert Mapplethorpe, Cy Twombly, Gerhard Richter, Anselm Kiefer, Christian Boltanski, Mimmo Paladino, e Nino Longobardi.



(a) Andy Warhol: *O destino está pronto*



(b) Anselm Kiefer *Et la terre shake encore, d'avoir vu la fuite des géants*



(c) Robert Mapplethorpe: Terrae Motus pentaptych

Figura 16.21: Contribuições selecionadas para a Coleção Amelio

Três obras ilustram a gama de respostas artísticas que Amelio elicionou. Entre os mais célebres está Warhol *O destino está pronto*, Fig. 16.21a, Uma reinterpretação Pop Art da primeira página do jornal napolitano *Il Mattino* publicado nos dias imediatamente após o terremoto. Joseph Beuys contribuiu *Terremoto em Palazzo* (1981), e instalação montada de ferramentas artesanais pessoalmente recuperadas de vilas destruídas pelo terremoto... uma mesa de alfaiate, um sapateiro banco, um rack de barril-fabricante - descontextualizado e espalhado com cacos de vidro, potes de barro entre parede e móveis, e um único ovo equilibrado em equilíbrio precário, evocando a fragilidade e deslocamento Deixada por catástrofe. Robert Mapplethorpe respondeu com um pentaptych de cinco grandes formatos Gelatina prateada (impressões de prata)*Denis Speight com Thorns*, *Jack com Coroa*, *Crânio*

CÓPIA PARA REVISÃO

e ossos cruzados, *Jill Chapman*, *Dennis "Espero com flores"*, 1983), organizado em torno dos símbolos da Paixão de Cristo; O painel central retrata um plinto crânio-e-espinho no Entrada para a igreja barroca de Santa Maria delle Anime del Purgatorio Ad Arco em Nápoles, fotografado durante a jornada napolitana do artista, Fig. 16.21c[19]. Anselm Kiefer[20] *Et la terre shake encore, d'avoir vu la fuite des Géants* traduz a Batalha de Waterloo em uma metáfora para sísmica Catástrofe: Terracota aplicada diretamente na tela abre uma grande ferida através da superfície pintada, atravessada por marcas negras e poético vagando inscrições, fundindo pintura com o próprio material da terra, Fig. 16.21b.

A coleção foi exibida pela primeira vez em um mosteiro reabilitado em Nápoles em 1984, então exibido no Grand Palais em Paris em 1987, que deu Projeto reconhecimento internacional. Amelio deixou a coleção para o Estado italiano; Desde novembro de 1992 está em exibição permanente no Grande Galleria da Reggia di Caserta do século XVIII[21], onde o As obras são mostradas em rotação dentro dos Apartamentos Reais, colocando a energia da arte contemporânea em diálogo direto com a grandeza barroca do Palácio Bourbon.

[19] Não faça zoom demais, afinal de contas é Mapplethorp!

[20] Para outra pintura de Kiefer, consulte a página 712.

[21] A localização permanente do *Terrae Motus* coleção Na Reggia di Caserta não foi acidental, mas o resultado de uma deliberada e a decisão emocionalmente carregada pelo próprio Amelio. Antes de sua morte 1994, Amelio fez duas visitas ao então Bispo de Caserta, Raffaele Nogaro, acompanhado pela primeira vez pelo superintendente Gian Marco Jacobitti, e uma vez só. Ele pediu a Nogaro para assinar um documento prometendo seu compromisso pessoal, como uma autoridade moral pública, para garantir o instalação da coleção no Reggia. A razão que Amelio deu foi Não é ambíguo. Nápoles, ele disse ao bispo, já tinha roubado tudo de Ele sem qualquer gratidão, e sua decisão de deixar a coleção para Caserta não foi impulsionada por rancor ou desejo de vingança, mas por um profundo desilusão com sua cidade natal, que nunca tinha reconhecido adequadamente sua contribuição cultural apesar do fato de que ele passou décadas Transformando sua galeria na Piazza dei Martiri em um centro de Arte contemporânea internacional. Bispo Nogaro, contando esses encontros em uma carta aberta de agosto de 2009 escrita enquanto concluía sua pastoral Amelio, descreveu que carregava dentro de si um profundo e não resolvido Triste por causa dessa falta de reconhecimento. Amelio morreu no dia 2 Julho de 1994, A coleção foi formalmente instalada na Reggia mais tarde naquele ano em de acordo com seu legado testamentário, que legalmente ligava coleção para o palácio Vanvitelli. O assunto não descansou lá. na anos após a morte de Amelio, tentativas repetidas foram feitas por membros de a família Amelio e por operadores culturais napolitanos para remover *Terrae Motus* de Caserta e transferi-lo para um edifício em Nápoles. Nogaro se opôs publicamente a essas tentativas, reafirmando tanto a força legal de O legado testamentário e o que ele chamou de dívida cultural e moral de A gratidão que a cidade de Caserta devia à doação. A disputa ilustra uma tensão que percorre toda a história do coleção: Embora o terremoto que inspirou isso tenha atingido a Campanian sertherland e Amelio era ele próprio Napolitano, a coleção terminou sua jornada não em Nápoles, mas em um palácio real Bourbon trinta quilômetros para o norte, precisamente porque seu criador sentiu que Nápoles ele falhou.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

16.8 Música

Desastres naturais, incluindo terremotos, também encontraram expressão em Composições musicais. Um dos primeiros exemplos notáveis é Antoine Brumel (c. 1460–c. 1520, que compôs o célebre *Missa Et Ecce terrae motus* "E eis que a terra tremeu", muitas vezes referido O título deriva do relato evangélico descrevendo o terremoto que acompanhou a morte de Cristo; O trabalho é notável por sua textura polifônica de doze vozes, uma das mais ambicioso da Renascença (Cumming, 2001).

Johann Sebastian Bach expressivamente retrata o mesmo terremoto em ambos O, o *Paixão de acordo com St. John* (1724) e o *Paixão De acordo com St. Matthew*[22] (1729), traduzindo o tremor violento de a terra em forma orquestral e coral através de tensão harmônica e orquestração dramática.

Joseph Haydn conclui de forma similar *Sete últimas palavras de Cristo A Cruz* (versão orquestral, 1785) com um movimento explicitamente intitulado *Il Terremoto*, evocando o terremoto do Evangelho com dinâmica súbita força (Webster, 2001).

O papel dos terremotos na dramaturgia musical durante o reinado de Louis XIV foi examinado por La Gorce (La Gorce, 1996), que documentam Como compositores e designers de palco implantaram efeitos musicais para transmitir Destruição sísmica para audiências.

16.9 Cinematografia

Terremotos encontraram representação no cinema documentário, onde o filme Combinação de testemunho visual, entrevistas de sobreviventes e imagens de arquivo pode comunicar aspectos da catástrofe que permanecem abstratos em ciência Contas. Na verdade, um dos primeiros documentários conhecidos de qualquer Desastre natural é *O desastre de Messina* (1909), produzido pela A firma italiana Cines no rescaldo imediato do terremoto de 1908 O mais mortal da história europeia. Notavelmente, contemporâneo Os revisores o elogiaram precisamente por mostrar sobreviventes em vez de ruínas, Reconhecendo que o poder distintivo do cinema estava em sua capacidade de documentar sofrimento humano em vez de destruição física sozinho.

A memória cultural do terremoto de 1908 tornou-se um Assunto do documentário: John Dickie's *Messina: Cidade sem memória?* (2008) examina como a destruição total da arquitetura da cidade Heritage o deixou sem a identidade histórica visível que a maioria dos italianos As cidades possuem, uma ausência ainda parecia um século depois.

Mais recentemente, o cineasta iraniano Kianoush Ayari documentou o 2003 Bam terre-

[22] Meu favorito

CÓPIA PARA REVISÃO

motoUm dos eventos sísmicos mais destrutivos do Irã moderno História. Seu filme recebeu reconhecimento internacional, incluindo os Roma Prêmio de documentário, e é tanto um registro histórico quanto uma reflexão sobre trauma coletivo e resiliência.

Coda

Uma contribuição mais recente e filosófica ambiciosa para o documentário Engajamento com catástrofe sísmica e o ambiente construído é *Arquiteto* (Kossakovsky, 2024), escrito e dirigido pelo cineasta russo Viktor Kossakovsky.. O filme é quase sem palavras meditação em pedra e concreto como os materiais fundamentais da civilização, estruturado em torno de um projeto paisagístico pelo arquiteto italiano Michele De Lucchi e filmada com uma extraordinária fotografia de drones.

O itinerário de Kossakovsky se move entre locais da antiga construção e modernos Destruição de uma forma que fala diretamente das preocupações deste capítulo: As ruínas do templo de Baalbek no Líbano (pg. 50Incluindo o enigmático megalito inacabado, assim chamado *Pedra da Mulher Grávida*, cortado da pedreira mas Nunca se moveu, uma cicatriz na paisagem que levanta as mesmas perguntas irresponsáveis Sobre ambição humana e tempo geológico como Burri's *Cretto*— os escombros de cidades na Turquia devastadas pelo terremoto catastrófico de fevereiro de 2023, a destruição causada pela guerra na Ucrânia, e, crucialmente para este capítulo, Gibellina Nuova Ele mesmo, filmado de cima como o ar livre Museu de esculturas modernistas que Corrao Construído a partir de As ruínas da cidade original. O filme também permanece no elemento beleza de simples arcos de alvenaria e formas abobadas (cf. Capítulos 32 e.. 31), cuja lógica estrutural – o resolução da força através de geometria pura (cf. Capítulo 8O diretor não se apresenta apenas como um técnico Mas como uma espécie de sabedoria civilizacional que concreto e aço A construção foi abandonada.

O argumento subjacente de *Arquiteto*, articulado por De Lucchi em O diálogo escasso do filme, é que a destruição dos terremotos, da guerra, e a extração industrial é inseparável de uma pergunta mais profunda sobre como e Por que construímos: "Quando projetamos algo", observa ele, Essa pergunta... que também está em outro registro, Pergunta feita por todas as tradições examinadas neste capítulo –dá *Arquiteto* Uma alegação de estar entre os mais pesquisados cinematográficos meditações sobre a relação entre catástrofe e o ambiente construído. Para uma história de uma disciplina nascida do humano Insiste em entender por que as coisas estão e porque elas caem... - O filme fornece uma meditação artística final especialmente adequada. Isso nos lembra que.. Mesmo após a mecânica da estabilidade e colapso terem sido compreendidos, As ruínas continuam a exigir interpretação.

CÓPIA PARA REVISÃO

16.10 Conclusão

Os oito domínios pesquisados neste capítulo... Mitologia, religião, filosofia, literatura, arquitetura, arte, música e cinema.. Meditação em uma única pergunta: O que isso significa quando o solo abaixo de nossa Pés não são confiáveis?

As primeiras respostas atribuir agência: um bagre se agita, uma serpente muda, O gigante derrotado vira sob a montanha. A religião elabora este reflexo em estrutura formal, incorporando o terremoto dentro de uma ordem moral e exigindo Resposta comum. São temas de filosofia que refletem em exame crítico.. processo culminando no debate de Lisboa, onde a raiva de Voltaire, Rousseau A proto-sociologia da vulnerabilidade, e o naturalismo de Kant juntos marcam transição decisiva: O terremoto deixa de ser essencialmente um teológico Problema e se torna um problema científico. Literatura e arte registram isso transição com sensibilidade particular: A distância entre Voltaire's *Poème*Que não poderia descrever Lisboa sem confrontar Deus A eleição de Quasimodo para Messina, na qual Deus está completamente ausente, é a distância que dois séculos de inquérito natural viajaram.

O que une esses domínios não é apenas um assunto compartilhado, mas um assunto comum É uma situação difícil. Cada cultura que viveu com terremotos teve que responder A mesma pergunta, e cada resposta realiza o mesmo trabalho fundamental: Ele transforma o terror em sentido. A narrativa mitológica, a teológica Framework, o argumento filosófico, o memorial arquitetônico que sela Uma cidade inteira em concreto. Não são substituições sucessivas de uma outra mas sucessivas camadas de uma contínua resposta humana à descoberta Que a terra não é o alicerce estável que exigimos.

Dirac's Demissão confiante, citada na abertura de §16.2, presumiu que o entendimento moderno tinha feito interpretações mitológicas e teológicas da catástrofe obsoleta. O A evidência deste capítulo sugere o contrário. Explicação científica tem Deslocou o peixe-gato, a serpente e o gigante aprisionado, mas não Eliminou o reflexo interpretativo em si – a insistência de que um extraordinário O evento deve possuir não apenas uma causa física, mas um agente, uma intenção, e Um significado. Esse reflexo migrou para outros domínios em que observação permanece fragmentária e explicação incerta. Um de seus mais expressões modernas conspícuas não são encontradas sob a terra, mas no céu.

16.11 Epílogo: De Namazu a Roswell

Os mitos examinados neste capítulo não surgiram simplesmente da ignorância. Eles surgiu do encontro entre uma experiência inegável e um invisível Causa. A Terra moveu-se, e onde o mecanismo não podia ser observado, A imaginação fornecia um agente: Em Edo Japão, um peixe-gato gigante preso sob uma Pedra sagrada§16.2.1); Em outro lugar uma serpente, um prisioneiro gigante, uma divindade ofendida, ou um poder cósmico temporariamente

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

liberado de Restrição. O conhecimento científico eventualmente deslocou esses agentes em particular, mas não eliminou o impulso humano que os criou.

No mundo tecnológico moderno, esse impulso não desapareceu; Tem, sim Migrado para outros domínios em que a observação permanece fragmentária e explicação incerta, gerando ao longo do caminho sua própria literatura, arte, e cinema, tanto quanto o terremoto nas seções acima. Entre seus mais expressões visíveis – e aquele cuja linhagem mitológica é mais fácil de Trace... é a crença persistente de que luzes e objetos inexplicáveis reportados No céu há evidências de uma visita à inteligência.

O paralelo com Namazu está mais perto do que parece. Namazu não precisou Um único crente, apenas um nome, um santuário, e uma tradição de estampas em blocos de madeira, Tornar-se uma atração da imaginação popular (§16.2.1). Um O suposto incidente perto de Roswell, Novo México, em julho de 1947, exigiu pouco mais para tornar-se a lenda fundadora da moderna ufologia popular. Décadas de oficiais declarações, investigações e registros desclassificados fizeram notavelmente Pouco para deslocá-lo. Como a tradição Namazu, que sobreviveu a cada falha de Kashima ou Ebisu para explicar um terremoto em particular, a lenda Roswell Sobrevive às explicações oferecidas por ela... porque, como mito, nunca foi construída para ser falsificado. Foi construído para manter um lugar na imaginação que observação sozinho não poderia preencher.

O vocabulário evoluiu, mas a pergunta subjacente não. A cultura fenômeno muito discutido sob a designação *Voo não identificado objeto*, ou OVNI, agora é investigado sob a designação oficial mais ampla *fenômeno anômalo não identificado*Ou UAP. Em uso científico oficial, Um UAP é uma observação que ainda não pode ser identificada como uma aeronave ou um conhecido Fenômeno natural; A designação descreve o estado atual do O conhecimento do observador em vez da origem do próprio fenômeno (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). *Não identificado* Portanto, não significa *Inexplicável*E ainda menos isso significa *Extraterrestre*.

A distinção é facilmente obscurecida quando uma observação parece violar Expectativas físicas comuns. Um objeto pode parecer mover-se sem inércia, para Acelere além da capacidade de aeronaves conhecidas, ou desapareça instantaneamente. No entanto, uma aparente violação da física pode se originar não no objeto mas nas condições de observação: distância ou escala incertas, Perspectiva forçada, paralaxe, movimento da plataforma de sensores, atmosférica condições, artefatos instrumentais ou de vídeo-compressão, erros na estimativa Velocidade, ou a ausência dos metadados necessários para reconstruir o evento. Nasa Estudo independente descobriu que a análise de muitos relatórios UAP é impedida por Sensores mal calibrados, ausência de múltiplas medições, falta de sensores Metadados, e dados basais inadequados. Seu exame do conhecido "GoFast" gravação mostrou que a impressão de movimento extraordinário poderia Surgem em grande parte da velocidade da aeronave de observação e do paralaxe efeito (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023); O mesmo caso foi reanalisado em maior escala Detalhes do Escritório de Resolução Anomalia (All-domain Anomaly Resolution Office, 2024; All-domain Anomaly Resolution Office, 2025). Isto é, em uma escala muito

CÓPIA PARA REVISÃO

menor, o A mesma transição que o terremoto de Lisboa forçou na Europa do século XVIII (§16.4.4): Um evento lido pela primeira vez para seu significado é, em vez disso, submetido a reconstrução, medição e instrumentação. Nesses casos, O mistério é genuíno, mas sua fonte pode ser a insuficiência das evidências ao invés da inadequação da lei física.

Nada disso demonstra que a vida não existe em outro lugar do universo Nem requer que cada observação incomum seja descartada como trivial. A ciência começa com anomalias e avanços levando-as a sério. Mas é isso Também requer que a explicação permaneça proporcional à evidência. Estudo da NASA Não encontramos nenhuma evidência científica conclusiva de que os relatórios UAP existentes têm um Origem extraterrestre (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). A incapacidade de identificar um evento é, portanto, o início de uma investigação, não a conclusão que um A inteligência extraterrestre se revelou.

O fenômeno em si não precisa ser mítico para a narrativa construída ao redor para se tornar mitologia. Carl Jung fez este argumento em no final da década de 1950, descrevendo discos voadores como um mito moderno das coisas vistas em O céu (Jung, 1959)Anos antes de Roswell endurecer em lenda popular e décadas antes da UAP se tornar uma sigla oficial. Antigo A mitologia povoou as regiões inacessíveis sob a terra com poderosos seres cujos movimentos explicaram o tremor do chão; O moderno A narrativa povoa os pontos inacessíveis do céu com tecnologicamente Seres superiores cujas intenções explicam luzes, imagens e traços ambíguos. Seu vocabulário não é mais teológico, mas tecnológico: Espaçonave substituta carros celestes, propulsão avançada substitui o poder divino, e governo O segredo substitui os conselhos ocultos dos deuses. A estrutura subjacente permanece o mesmo. Um evento inexplicável é atribuído a um agente; O agente é.. Dotado de inteligência e propósito; E a ausência de provas decisivas é Incorporado à narrativa em vez de contar contra ela.

A ciência não exige que apaguemos a maravilha; Exige que nós disciplinamos Ele. A lição duradoura das tradições pesquisadas neste capítulo é, portanto Não que a humanidade tenha acreditado em coisas tolas e agora escapou deles. É sim que a distância entre observação e explicação é sempre terreno fértil para o mito. O bagre que uma vez dormiu sob o santuário de Kashima, tem, no imaginação popular, dado lugar a visitantes de além de Roswell; O impulso que abrigava um agora abriga o outro. Em ambos os casos, a primeira obrigação de A razão é a mesma: Para preservar o mistério sem convertê-lo prematuramente na agência.

CÓPIA PARA REVISÃO



La Caduta dei Giganti

A queda dos gigantes[a] 1532-1535. Fresco, Sala dei Giganti, Palazzo Te, Mântua.

[a] Nada a ver com terremotos ☹

CÓPIA PARA REVISÃO

Livro I: Uma breve história da mecânica e da análise estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Referências da Parte I

ABAQUS User's Manual (1978). Hibbitt, Karlsson e Sorensen. Providence, RI.

Abdel Haleem, M. A. S. (2004). *The Qur'an: A New Translation*. Oxford World's Classics. Oxford: Oxford University Press.

Abe, Y. (2000). "Namazu-e no ue no Amaterasu". Em: *Shiso*. Amaterasu above the catfish picture prints. Tokyo, pp. 25–52.

Accademia del Cimento (1667). *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*. Original Italian edition; English translation by W.E. Knowles Middleton, *The First Scientific Society*, 1971. Florence: Giunti.

Ackerman, J. S. (1949). "*ARS Sine Scientia Nihil EST*. Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan". Em: *The Art Bulletin* 31.2, pp. 84–111.

Administration, F. H. (1969). *Silver Bridge Collapse Report*. Rel. técn. FHWA-RD-69-1. Investigation into the failure of the Silver Bridge, Point Pleasant, West Virginia. U.S. Department of Transportation.

Aimond, F. (1936). "Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion". Em: *Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)* 4.

Al-Bīrūnī, A. R. (1910). *The Chronology of Ancient Nations*. Trad. por C. E. Sachau. An English version of the Arabic text of the Athār-ul-bākiya of Albīrūnī. London: W. H. Allen.

Alassi, S. (mar. de 2019). *Jacob Bernoulli's Role in the History of Elasticity: From a Discussion with a Craftsman to the Discovery of the Elasticity Rules*. Presentation at the History of Mathematics Seminar, Mathematical Institute, University of Oxford.

– (2020). "From the Mechanics of Jacob Bernoulli to Digital History of Science. Infrastructure, Tools, and Methods". Tese de dout. University of Basel.

Alberti, L. B. (1485). *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*. Nicolaus Laurentii, Alamanus.

– (1988). *On the Art of Building in Ten Books*. Trad. por J. Rykwert e N. Leach. MIT Press.

Alberti, L. B. e G. Tiraboschi (1804). *Della pittura e della statua di Leonbatista Alberti*. Vol. 34. Società tip. de'Classici italiani.

Alexander, K. D., R. Mark e J. F. Abel (1977). "The structural behavior of medieval ribbed vaulting". Em: *Journal of the society of architectural historians* 36.4, pp. 241–251.

Alexandria, H. of (1851). *The Pneumatics of Hero of Alexandria*. Trad. por B. Woodcroft. From the original Greek. London: Taylor Walton e Maberly.

CÓPIA PARA REVISÃO

All-domain Anomaly Resolution Office (mai. de 2024). *Effect of Forced Perspective and Parallax View on UAP Observations*. Information Paper. U.S. Department of Defense.
– (6 de fev. de 2025). *Case: "Go Fast": Case Resolution*. Case Resolution Report. U.S. Department of Defense.
Andrade, E. N. D. C. (1950). "Wilkins Lecture-Robert Hooke". Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences* 137.887, pp. 153–187.
Anonymous (ago. de 1724). "Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum". Em: *Acta Eruditorum* 43. Unsigned item (author not stated)., p. 366.
Antuña Bernardo, J. (2003). "Las estructuras de edificación de Eduardo Torroja Miret". Tese de dout. *Universidad Politécnica de Madrid; Escuela Técnica Superior de Arquitectura*.
Ap, L. e N. G. Faia (2018). "Form Finding Techniques of Branched Construction Developed by Frei Otto". Em: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 59.1, pp. 60–67.
Archimedes (-250). *De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)*. c. 250 BCE. English translation in *The Works of Archimedes*, ed. T. L. Heath, Cambridge University Press, 1897.
Archimedes e T. L. Heath (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.
Argyris, J. H. e S. Kelsey (1960). *Energy theorems and structural analysis*. Vol. 60. Springer.
Aristotle (2000). *Mechanica*. Ed. por M. J. T. Lewis. Translated and introduced by Michael J. T. Lewis. Traditional attribution to Aristotle; authorship disputed. Oxford: Oxford University Press.
Arnold, D. (2003). *The Encyclopedia of Ancient Egyptian Architecture*. Princeton University Press.
Babbage, C. (1864). *Passages from the Life of a Philosopher*. London: Longman, Green, Longman, Roberts, e Green.
Backus, J. (1957). *The FORTRAN Automatic Coding System*. Rel. técn. New York: IBM.
Bacon, F. (2000). *Novum Organum*. Cambridge University Press.
Badami, A. (2012). "L'investimento in arte e cultura per fondare una città e generare una comunità a Gibellina. Intervista a Ludovico Corrao". Em: *Archivio di Studi Urbani e Regionali* 105, pp. 66–86.
Bag, A. (2003). "Aryabhata's Contributions to Mathematics and Astronomy". Em: *Indian Journal of History of Science* 38.2, pp. 123–135.
Baker, W. F. (1992). "Energy-based design of lateral systems". Em: *Structural Engineering International* 2.2, pp. 99–102.
Baker, W. F. e A. McRobie, ed. (2025). *The Geometry of Equilibrium: James Clerk Maxwell and 21st-Century Structural Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, p. 322.
Baker, W. F., O. Skidmore et al. (2013). "Structural possibilities". Em: *The tall buildings reference book*. Routledge, pp. 229–240.

CÓPIA PARA REVISÃO

Baker, W. F. et al. (2015). “Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies”. Em: *Engineering Journal American Institute of Steel Construction* 52.3, pp. 203–217.

Balasubramaniam, R. (2000). “The Corrosion Resistance of the Iron Pillar of Delhi”. Em: *Current Science* 79.4, pp. 45–54.

Banū Mūsā ibn Shākir (850). *The Book of Ingenious Devices*. Arabic. Original Arabic manuscript, Baghdad. English translation in Donald R. Hill (ed. and trans.), *The Book of Ingenious Devices*, Dordrecht: Reidel, 1979. Baghdad: House of Wisdom.

Bardini, G. e G. M. Gianella (2014). “On the Evolution of the Idea of Curvature, from Newton to Gauss’ Theorema Egregium”. Em: *Applied Mathematical Sciences* 8.167, pp. 8361–8376.

Barnes, J. (1984). *The Complete Works of Aristotle, Volume One: The Revised Oxford Translation*. Vol. 1. Princeton University Press.

Barrallo, J., S. Sanchez-Beitia e P. Onati (2005). “Mathematical Models of Gothic Structures”. en. Em: *Renaissance Banff: Mathemetics, Music, Art, Culture*, p. 8.

Bartholomew, A. (1840). *Specifications for Practical Architecture: Preceded by an Essay on the Decline of Excellence in the Structure and in the Science of Modern English Buildings: with the Proposal of Remedies for Those Defects*. J. Williams.

Bartlett, C. (2014). “The design of the Great Pyramid of Khufu”. Em: *Nexus Network Journal* 16.2, pp. 299–311.

Barzilai, S., ed. (1909). *Scilla e Cariddi: Pubblicazione dell’Associazione della Stampa Periodica Italiana a beneficio del Patronato Regina Elena per gli orfani del terremoto*. Contributions by Giovanni Verga, Luigi Capuana, Arthur Conan Doyle, Benedetto Croce, Antonio Fogazzaro and others. Published in aid of earthquake orphans following the Messina disaster of 28 December 1908. Roma: Tipografia Roma di E. Armani & W. Stein, p. 159.

Bažant, Ž. (1976). “Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete”. Em: *Journal of Engng. Mech., ASCE* 102.2, pp. 331–344.

– (1984). “Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal”. Em: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.

Bažant, Z. P. e Y. Zhou (2002). “Why did the world trade center collapse?—Simple analysis”. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 2–6.

Beeckman, I. (1939). *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634*. Ed. por C. de Waard. 4 vols., 1939–1953. La Haye: Martinus Nijhoff.

Beghini, L. et al. (2014). “Connecting architecture and engineering through structural topology”. Em: *Engineering Structures* 59, pp. 716–726.

Behnia, M. A. (2021). “Sustainability and hydraulic design in ancient Persian qanats”. Em: *Journal of Hydraulic Engineering* 147.3.

Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. Alemão. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.

Benedetti, G. B. (1585). *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. Original Latin text. Turin: Heirs of Melchior Sessa.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Benouville, L. (1891). *Note sur l'effondrement de la voûte du chœur de la cathédrale de Beauvais (1284)*. Unpublished manuscript / report. Referenced in 19th-century architectural structural studies.

Benvenuto, E. (1991a). *An Introduction to the History of Structural Mechanics; Part I: Statics and Resistance of Solids*. Springer-Verlag.

– (1991b). *An introduction to the History of Structural Mechanics; Part II: Vaulted structures and Elastic Systems*. Springler-Verlag.

Bergsjö, C. e M. Pettersson (2016). *A Simulation of the Millau Viaduct*. Rel. técn. KTH, Royal Institute of Technology in Stockholm.

Berlyn, P. e C. Fowler (1851). *The Crystal Palace: Its Architectural History and Constructive Marvels*. London: James Gilbert.

Bernoulli, J. (dez. de 1694). "Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae". Em: *Acta Eruditorum*. Bernoulli's published reply to Christiaan Huygens's critique of the elastica, pp. 580–584.

– (1744). *Varia Posthuma*. Ed. por N. I. Bernoulli. Posthumous mathematical works edited by Nicolaus (I) Bernoulli. Basel: H.A. Gosse & Soc.

Bernoulli, Daniel (1726). "1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142". Em: *Die Werke* 3, pp. 119–135.

– (1738). *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. Opus academicum ab auctore, dum Petropoli ageret, congestum*. Latin. With engraved title vignette and 12 folding plates. Argentorati: Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, p. 304.

– (1744). "Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observantibus extensi una cum solutione problematum quorundam novorum eo pertinentium". Em: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 3. Originally written in 1728; published in the 1744 Bologna edition, pp. 57–84.

Bernoulli, Jakob (1677–1705). *Meditationes*. Manuscript. Scientific diary manuscript, 367 pages, 287 entries. Available digitally at Bernoulli-Euler Online (BEOL). Basel University Library.

– (jun. de 1690a). "Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum". Em: *Acta Eruditorum*. Contains the famous elastica challenge problem concerning the bending of elastic beams, presented in cipher, pp. 288–290.

– (mai. de 1690b). "Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)". Em: *Acta Eruditorum*. Short challenge notice; see also a follow-up item in the same year on p. 360., pp. 218–220.

– (1691). *Dialogue with a Craftsman. Didactic exchange preceding the elastica challenge*. In *Acta Eruditorum*, Leipzig. Often cited as an introductory "dialogue" attached to Bernoulli's early announcements on the elastica (1691–1694). No separate standalone edition is known.

– (1692). *Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*. BirkhauserMed. CLXX; Ref. UB: L Ia 3. Die Werke von Jakob Bernoulli.

CÓPIA PARA REVISÃO

Bernoulli, Jakob (jun. de 1694). “Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus”. Em: *Acta Eruditorum*. Includes Bernoulli’s solution of the elastica and the “Golden Theorem”; reprinted in *Opera* (1744), pp. 576–600., pp. 262–276.

– (1744a). “Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, vol 1”. Em: *Geneve: Cramer-Philibert*.

– (1744b). *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Latin e French. Ed. por G. Cramer. 2 vol. Posthumous collected works, excluding *Ars Conjectandi*. Contains *Varia posthuma* and biography by J.J. Battier (1705). Geneva: sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert.

– (1855). “Letter to G. W. Leibniz, December 1687”. Em: *Die Mathematischen Werke von Jakob Bernoulli*. Ed. por C. I. Gerhardt. Vol. 3. Originally written in 1687; first published in this 1855 edition. Leipzig: B. G. Teubner, pp. 1–5.

Bernoulli, Johann (jun. de 1696). “Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur”. Em: *Acta Eruditorum* 15. Announcement of the brachistochrone (curve of fastest descent) problem, pp. 269–271.

Bernoulli, Johann (1691a). *Integral Calculus. Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque; conseriptae in usum Ill. Marchionis Hopitalii, cure auctor Parisiis ageret annis*. In Opera III.

– (1691b). “Letter to Leibniz”. Em: *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*. Ed. por Spiess, Otto. Vol. 1. Basel: Birkhäuser.

– (jun. de 1691c). “Solutio problematis funicularii”. Em: *Acta Eruditorum*, pp. 274–276.

– (jun. de 1697a). “Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona”. Em: *Acta Eruditorum*. Solution to the brachistochrone problem, showing the curve of fastest descent is a cycloid, pp. 269–271.

– (jan. de 1697b). *Programma [extending the brachistochrone challenge]*. Extension of the brachistochrone challenge deadline to Easter 1697. Groningen.

– (1713). *Opera Omnia*. Collected works including contributions to calculus and mechanics. Lausanne e Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.

– (1725). “Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717”. Em: *Nouvelle Mécanique ou Statique*. Ed. por P. Varignon. Vol. 2. Contains Johann Bernoulli’s 1717 letter on virtual velocities. Paris: Claude Jombert. Cap. Section IX, pp. 174–176.

Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.

Billington, D. (1979). *Robert Maillart’s Bridges; The art of Engineering*. Princeton University Press.

– (1983a). *Structural Studies*. Rel. técn. Department of Civil Engineering, Princeton University.

– (1983b). *The Tower and the Bridge*. Princepton University Press.

– (1984a). *Structures and the Urban Environment*. Rel. técn. Lecture notes, CE 262. Department of Civil Engineering, Princeton University.

– (1984b). *Structures and the Urban Environment*. Rel. técn. Catalogue and Commentary on the slides. Department of Civil Engineering, Princeton University.

CÓPIA PARA REVISÃO

Billington, D. e R. Mark, ed. (1970). *Civil Engineering–history, Heritage, and the Humanities: Background Papers from the First National Conference on Civil Engineering–History, Heritage and the Humanities*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D., R. Mark e J. Abel, ed. (1972). *The Maillart Papers: From the Second National Conference on Civil Engineering: History, Heritage and the Humanities: Commemorating the Hundredth Anniversary of the Birth of Robert Maillart*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Blaikie, P. et al. (1994). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. London: Routledge.
Blasjo, V. (2017). *Transcendental curves in the Leibnizian calculus*. Academic Press.
Boller, G. e P. D'Acunto (2021). "Structural design via form finding: Comparing Frei Otto, Heinz Isler and Sergio Musmeci". Em: *History of Construction Cultures*, pp. 431–438.
Boller, G. e J. Schwartz (2020). "Modelling the form. Heinz Isler, Frei Otto and their approaches to form-finding". Em: *Proceedings of Seventh Conf. Constr. Hist. Soc.,(3-5 April 2020, Cambridge, UK)*, pp. 565–76.
Bony, J. (1983). *French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries*.
Bos, H. J. M. (1974). "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus". Em: *Archive for history of exact sciences* 14.1, pp. 1–90.
Bourdais, J. (1881). *Projet de phare monumental pour Paris, élévation*. Original drawing, Musée d'Orsay, Paris.
Boyer, C. B. e U. C. Merzbach (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.
Brackenridge, J. B. (1992). *The critical role of curvature in Newton's developing dynamics*.
Brand, D. e H. Nicholson (2013). "Learning from Lisbon: Contemporary cities in the aftermath of natural disasters". Em: *Approaches to Disaster Management-Examining the Implications of Hazards, Emergencies and Disasters*. IntechOpen.
Branner, R. (1962). *Le Maitre de la cathédrale de Beauvais*. Vol. II, pp. 77–92.
– (1997). "The Collapse of the Tower and Choir at Beauvais Cathedral". Em: *The Engineering of Medieval Cathedrals*. Ed. por R. Mark e P. Mellars. Ashgate, pp. 141–158.
Bravais, A. (1850). "Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace". Em: *Journal de l'École Polytechnique* 19, pp. 1–128.
– (1866). *Etudes cristallographiques*. Gauthier-Villars.
Brew, J. S. (2007). "Computational Analysis of Heinz Isler's Shell Structures". Em: *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*. Venice, Italy, pp. 1–8.
Broad, W. J. (2006). *The Oracle: Ancient Delphi and the Science Behind Its Lost Secrets*. Penguin Books.
Brodini, A. (2013). "Le coperture a grande luce nell'opera di Sergio Musmeci". Em: *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. Ed. por P. Desideri et al. U. Allemandi, pp. 253–262.
Brownbridge, A. (1986). *Ancient Chinese Bridge Architecture*. Asian Historical Press.
Brühwiler, E. (2010). "Eminent Structural Engineer: Christian Menn—Bridge Designer and Builder". Em: *Structural Engineering International* 20.4, pp. 470–472.

CÓPIA PARA REVISÃO

Bukowski, J. (2008). "Christiaan Huygens and the Problem of the Hanging Chain". Em: *The College Mathematics Journal* 39.1, pp. 2–11.

Buridan, J. (1971). *John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo*. Ed. por J. Hubert. Latin text. Paris: Vrin.

– (1991). *John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics*. Ed. por M. Clagett. Latin text with English translation. Madison: University of Wisconsin Press.

Bush, V. (1931). "The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations". Em: *Journal of the American Society of Mechanical Engineers* 53, pp. 107–116.

Butzer, K. W. (1976). "Early Hydraulic Civilization in Egypt: A Study in Cultural Ecology". Em: *University of Chicago Press* 11, pp. 123–145.

Cannone, M. e S. Friedlander (2003). "Navier: blow-up and collapse". Em: *Notices of the AMS* 50.1, pp. 7–13.

Capecchi, D., G. Ruta e P. Trovalusci (2010). "From classical to Voigt's molecular models in elasticity". Em: *Archive for history of exact sciences* 64.5, pp. 525–559.

Carnot, L. (1783). *Essai sur les machines en général*. First edition. Published anonymously as "par un officier du Corps Royal du Génie." Second edition with author's name: Dijon: Defay; Paris: Nyon, 1786. Dijon: [s.n.]

– (1803). *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*. Substantially revised and expanded version of the *Essai sur les machines en général* (1783). Paris: Deterville.

Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.

Cauchy, A. L. (1822). "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques". Em: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 9–13.

– (1823). "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques". Em: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 2. Paris: De Bure Frères, pp. 42–56.

– (1827). *Exercices de mathématiques*. Vol. 2. Contains key papers on elasticity theory. Paris: De Bure Frères.

– (1828). "Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique". Em: *Exercises de Mathematiques*. Vol. 3. De Bure Frères, pp. 160–187.

– (1829). "Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle". Em: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 4. Paris: De Bure Frères, pp. 129–139.

– (1841). *Oeuvres Complètes de Cauchy*. Gauthier-Villars.

Caus, S. de (1615). *Les Raisons des Forces Mouvantes avec Diverses Machines tant Utilles que Plaisantes*. Treatise on hydraulics and mechanics; introduced the term "Travail" (work) for force times displacement. Second edition Paris, 1624. Frankfurt: Jan Norton.

Charle, C. (2004). "Le scandale de Panama: Une affaire d'État à la fin du XIXe siècle". Em: *Revue Historique* 312.4, pp. 847–872.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Charlton, T. M. (1982). *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge: Cambridge University Press.
Châtelet, É. du (1740). *Institutions de Physique*. Paris: Prault.
Chen, P. W. e L. E. Robertson (1972). "Human perception thresholds of horizontal motion". Em: *Journal of the structural division* 98.8, pp. 1681–1695.
Child, J. (1920). *The Early Manuscripts of Leibniz*. Translations of various latin manuscripts of Leibniz. Chicago, London: The Open Court Publishing Company, p. 238.
Chilton, J. e H. Isler (2000). *The architecture of Heinz isler*. Thomas Telford.
Ching, F. D. (2011). *A visual dictionary of architecture*. John Wiley & Sons.
Chiorino, C. e C. M. Olmo (2010). *Pier Luigi Nervi: l'architecture comme défi*. Silvana Editoriale.
Cité de l'architecture & du patrimoine (abr. de 2015). *La Cité radieuse: 1945-1952, Marseille, Le Corbusier*. Francês. Rel. técn. Museum educational resource produced for the Éduthèque platform. Paris: Cité de l'architecture & du patrimoine, p. 12.
Clagett, M. (1964). "Nicole Oresme and Medieval scientific thought". Em: *Proceedings of the American Philosophical Society* 108.4, pp. 298–309.
– (1995). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Two: Calendars, Clocks, and Astronomy*. American Philosophical Society.
– (1999). *Ancient Egyptian Science, Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.
Clapeyron, B.-P.-E. (1834). "Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur". Em: *Journal de l'École Polytechnique* 14.23. Work completed 1833; published 1834, pp. 153–190.
Clapeyron, B. (1857). "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés". Em: *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 45, pp. 1076–1080.
Clark, E. e R. Stephenson (1850). *The Britannia and Conway Tubular Bridges: With General Inquiries on Beams and on the Properties of Materials Used in Construction*. Vol. 2. London: Day, Son e John Weale.
Clausius, R. (1850). "Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen". Em: *Annalen der Physik* 155.3, pp. 368–397.
– (1854). "Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie". Em: *Annalen der Physik* 169.12, pp. 481–506.
– (1879). *The Mechanical Theory of Heat*. Trad. por T. A. Hirst. 2nd. Translation of *Die mechanische Wärmetheorie*. London: Macmillan.
Clebsch, A. (1862a). *Theorie der elasticität fester körper*. BG Teubner.
– (1862b). *Theorie der Elasticität fester Körper*. Posthumously edited by Gustav Kirchhoff. Leipzig: B.G. Teubner.
– (1866). *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Ed. por B. de Saint-Venant. Traduit de l'allemand et annoté avec des additions par M. Barré de Saint-Venant. Paris: Mallet-Bachelier.
Clough, R. W. (1960). "The finite element method in plane stress analysis". Em: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*.

CÓPIA PARA REVISÃO

Clough, R. W. (1962). *The stress distribution of Norfork Dam*. Rel. técn. California Univ Berkeley Institute of Engineering Research.
– (2004). "Early history of the finite element method from the view point of a pioneer". Em: *International journal for numerical methods in engineering* 60.1, pp. 283–287.
Clough, R. W. e E. L. Wilson (1999). "Early finite element research at Berkeley". Em: *Fifth US National Conference on Computational Mechanics*, pp. 1–35.
Clough, R. e J Penzien (1975). *of Structures*. McGraw-Hill.
Clough, R. e E. Wilson (1962). "Stress analysis of a gravity dam by the finite element method". Em: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Coe, M. D. (2005). *The Maya*. Thames & Hudson.
Cohen, I. B. (2002). "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion". Em: *The Cambridge Companion to Newton*. Ed. por I. Cohen e G. Smith.
– (2013). *Introduction to Newton's "Principia"*. Harvard University Press.
Coleman, B. D. e W. Noll (1963). "The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity". Em: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13.1, pp. 167–178.
Como, M. (2013). *Statics of historic masonry constructions*. Vol. 1. Springer.
Coolidge, J. L. (1952). "The unsatisfactory story of curvature". Em: *The American Mathematical Monthly* 59.6, pp. 375–379.
Copernicus, N. (1995). *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*. Prometheus Books.
Corazzi, R. (2012). "La curva "lossodromica" e la spina pesce". Em: *DISEGNARECON*, pp. 85–92.
Corbusier, L. (1954). *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*. Vol. 1. Harvard University Press.
– (1955). *Le Modulor 2*. Paris: Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui.
Corbusier, L. e P. Jeanneret (1929). "Les cinq points d'une architecture nouvelle". Francês. Em: *Œuvres complètes 1910–1929*. Ed. por W. Boesiger. First delivered as a lecture at the Weissenhof Siedlung, Stuttgart, in 1927; reprinted in later editions of the Œuvre complète. Erlenbach-Zurich: Les Éditions d'Architecture.
Corporation, S. R. (1951). *UNIVAC I System Description*. Rel. técn. New York: Sperry Rand.
Coulomb, C (1773a). "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture". Em: *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences*. Foundational work on earth pressure and slope stability, pp. 343–382.
Coulomb, C. (1773b). "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*". Em: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
– (1773c). "Mémoires de mathématique et de physique". Em: *Academie Royale des Sciences* 7.
Courant, R (1943). "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49, pp. 1–23.

CÓPIA PARA REVISÃO

Cross, H. (1932). "Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments". Em: *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 96.1. *Includes all subsequent discussions*, pp. 1–78.
– (1936). *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Rel. técn. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering . . .
Cross, H. e N. D. Morgan (1932). *Continuous frames of reinforced concrete*. J. Wiley & Sons, Incorporated.
Crotti, F. (1888). *La Teoria dell'Elasticità ne' suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*. Milan: Ulrico Hoepli.
Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.
Culmann, K. (1866). *Die Graphische Statik*. Meyer e Zeller, Zürich.
Cumming, J. E. (2001). "Brumel, Antoine". Em: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. por S. Sadie. 2ª ed. Vol. 4. London: Macmillan, pp. 485–490.
Curatola, G. e G. Scarcia (2003). *Persepolis: The Great Stairway*. Getty Publications.
Currà, E. e M. Russo (2018). "Reinforced concrete in Italy through the works of two generations of engineers: Mario and Giorgio Baroni". Em: *6th International Congress on Construction History (6ICCH 2018):"Building Knowledge, Constructing Histories*, pp. 9–13.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
– (1505). *Codex Atlanticus*. Pinacota Ambrosania, Milan.
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.
D'Alembert, J. l. R. (1747). "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration". Em: *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin* 3, pp. 214–219.
Daley, S. (2013). "A Star Architect Leaves Some Clients Fuming". Em: *The New York Times*.
Daniels, P. T. e W. Bright, ed. (1996). *The World's Writing Systems*. New York: Oxford University Press.
Davis, M. (2018). *The universal computer: The road from Leibniz to Turing*. AK Peters/CRC Press.
De Belidor, B. (1729). *Architecture hydraulique ou l'Art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie*. C. Jombert.
De Boer, J. Z. e D. T. Sanders (2005). *Earthquakes in Human History: The Far-Reaching Effects of Seismic Disruptions*. Princeton University Press.
De Honnecourt, V. (1858). *Album de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle: manuscrit publié en fac-simile, annoté, précédé de considérations sur la renaissance de l'art français au XIXe siècle et suivi d'un glossaire*. Imprimerie Imperiale.
– (2006). *The Medieval Sketchbook of Villard de Honnecourt*. Ed. por T. Bowie. Reprints the 1959 Indiana University Press edition (introduction and captions by Theodore Bowie), using plates from R. Willis's 1859 English facsimile, which in turn reproduces the engraved plates of the 1858 Lassus & Darcel edition (De Honnecourt, 1858). Dover Publications.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

De l'Orme, P. (1561). *Nouvelles inventions pour bien bastir et a petits fraiz*. Francês. Illustrated treatise presenting geometric and constructive rules for economical building, including proportional design methods. Paris: Federic Morel.
Deakin, R. (2007). "Catenary Curve". Em: Technical paper on the mathematical derivation of the catenary.
DeJong, M. J. (2009). "Seismic assessment strategies for masonry structures". Tese de dout. Massachusetts Institute of Technology.
Descartes, R. (1637a). *Discours de la méthode*. Originally published with *La Géométrie*, *La Dioptrique*, and *Les Météores*. Leiden: Jan Maire.
– (1897a). *Oeuvres de Descartes*. Ed. por C. Adam e P. Tannery. 11 vols., 1897–1913. Paris: Léopold Cerf; later Vrin/CNRS reprints.
Descartes, R. (1898). *Oeuvres de Descartes*. Vol. 2: *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*. Ed. por C. Adam e P. Tannery. Paris: Leopold Cerf.
Descartes, R. (1927). *Selections*. C. Scribner's sons.
Descartes, R. (1637b). *La Géométrie*. Leiden: Jean Maire.
– (1644). *Principia Philosophiae*. English title: Principles of Philosophy. Part II contains the laws of motion and conservation principles. Amsterdam: Ludovicus Elzevirius.
– (1897b). *Correspondance de René Descartes*. Ed. por C. Adam e P. Tannery. Vol. 2. Œuvres de Descartes. Letter to Marin Mersenne, 11 October 1638, pp. 542–544. Paris: Léopold Cerf.
Desideri, P. et al. (2013). *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. U. Allemandi.
Devlin, K. (2011). *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*. New York: Walker & Company, p. 192.
Diderot, D. e J. l. R. d'Alembert (1751). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. First volume published 1751; final volume 1772. Paris: Briasson, David e Le Breton, Durand.
Dirac, P. A. M. (1963). "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature". Em: *Scientific American* 208.5. Based on a 1958 lecture; includes Dirac's comments on religion and primitive explanations of nature, pp. 45–53.
Downey, G. (1946). "Byzantine Architects, their Training and Methods". Em: *Byzantion* 18, pp. 99–118.
Dragicevic, P. e Y. Jansen (2012). *List of Physical Visualizations*. Last accessed 2022-03-30.
Dragoni, M. (2005). *Terrae motus. La sismologia da Eratostene allo tsunami di Sumatra*. Frontiere. Torino: UTET Libreria. 394 pp.
Drake, S. (1970). *The Genesis of Fluid Mechanics 1640–1780*. Vol. 6. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag.
– (1976). "A further reappraisal of impetus theory: Buridan, Benedetti, and Galileo". Em: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 7.4, pp. 319–336.
Dreyfuss, H. (1960). *The Measure of Man: Human Factors in Design*. New York: Whitney Library of Design.
Dugas, R. (1988). *A history of mechanics*. Courier Corporation.

CÓPIA PARA REVISÃO

Dugas, R. (1955). *A History of Mechanics*. Dover Publications.
Duhem, P. (1891). *Hysteresis dans les phénomènes capillaires. Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides*. Paris: Gauthier-Villars.
– (1893). *Introduction à la mécanique chimique*. Paris: Carré.
– (1911). *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale*. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars.
d'Alembert, J (1761). "Démonstration du principe de la composition des forces". Em: *Opuscules mathématiques* 1, pp. 169–179.
– (1773). "Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces". Em: *Opuscules mathématiques* 6, pp. 360–370.
D'Ayala, D. e E Tomasoni (2008). "The structural behaviour of masonry vaults: Limit state analysis with finite friction". Em: *Structural Analysis of Historic Construction: Preserving Safety and Significance, Two Volume Set*. CRC Press, pp. 67–82.
Eagar, T. W. e C. Musso (2001). "Why did the World Trade Center collapse? Science, engineering, and speculation". Em: *Jom* 53.12, pp. 8–11.
Eckert, J. P. e J. W. Mauchly (1946). *Description of the ENIAC and the ENIAC Project*. Rel. técn. Philadelphia: University of Pennsylvania.
Einstein, A. (1935). "Emmy Noether". Em: *The New York Times*. Obituary letter to the editor.
– (1954). *Ideas and Opinions*. Originally compiled from Mein Weltbild (1934), translated by Sonja Bargmann. Includes essay "On the 300th Anniversary of Galileo's Death." New York: Crown Publishers.
Elizalde, R. R. (2025). "Beauvais Cathedral: The Ambition, Collapse and Legacy of Gothic Engineering". Em: *Heritage* 8.6, p. 203.
Engesser, F. (1889). "Über den Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit". Em: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 33, pp. 927–928.
Eshelby, J. (1970). "Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics". Em: *Inelastic Behavior of Solids*. Ed. por M. Kanninen et al. New York, N.Y.: McGraw-Hill, pp. 77–115.
Espion, B. (2016). "Pioneering hypar thin shell concrete roofs in the 1930s". Em: *Beton-und Stahlbetonbau* 111.3, pp. 159–165.
Établissements Eiffel, C. des (19th Century). *Historical Works and Projects of the Eiffel Company*. French. Founded by Gustave Eiffel in 1866, famous for the Eiffel Tower and other engineering achievements.
Euclid e T. L. Heath (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications.
Euler, L. (1728). "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*". Em: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, pp. 64–77.
– (1732). "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*". Em: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 70–84.
– (1741). "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". Em: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, pp. 128–140.

CÓPIA PARA REVISÃO

Euler, L. (1744a). “Additamentum I: De curvis elasticis”. Em: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Ed. por C. Carathéodory. Vol. 24. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series I. Reprint of the 1744 Lausanne and Geneva edition with editorial notes. Basel: Birkhäuser, pp. 231–308.
– (1744b). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Euler’s definitive formulation of the elastica, building on the earlier work of Jakob Bernoulli and Daniel Bernoulli. Lausanne e Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, pp. 245–297.
– (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. 2 volumes. Enestrom Index E101–E102. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet.
– (1757a). “Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides”. Em: *Opera Omnia*. Vol. 12. Series 2. Basel: Orell Füssli, pp. 92–132.
– (1757b). *Principes généraux du mouvement des fluides*. Vol. 11. Presented 1755; published 1757, pp. 274–315.
– (1759). “Sur la force des colonnes”. Em: *Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin* 13. Enestrom number E238. Original French version of Euler’s classic column buckling paper., pp. 252–282.
– (1760). “De motu rectilineo tremulo linearum”. Em: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 6. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 315–347, pp. 208–242.
– (1771). “ *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*”. Em: *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 381–413.
– (1780). “De formulis differentialibus, quas frustra hactenus quaesivit geometria flexionum et tensionum”. Em: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 559–586, pp. 36–61.
– (1862). “De oscillationibus annulorum elasticorum”. Em: *Opera Postuma*, pp. 129–131.
Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press.
Felippa, C. A. (2001). “A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts”. Em: *Computers & Structures* 79.14, pp. 1313–1324.
Fernández Casado, C. (1980). *Historia del puente en España: Puentes romanos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Ferrers, N. M., ed. (1871). *Mathematical Papers of George Green*. London: Macmillan.
Fishman, R. (1982). *Urban Utopias in the Twentieth Century: Ebenezer Howard, Frank Lloyd Wright, Le Corbusier*. MIT press.
Fletcher, R. (2004). *The cross and the crescent: the dramatic story of the earliest encounters between Christians and Muslims*. Penguin UK.
Florensky, P. (1996). *Beyond Vision: Essays on the Perception of Art*. Trad. por W. Salmond. London: Reaktion Books.
Fondazione Amelio (1987). *Terrae Motus: Naples, Tremblement de Terre*. italian, french. Exhibition catalogue, Grand Palais, Paris, 28 March – 11 May 1987. Naples: Guida, p. 302.

CÓPIA PARA REVISÃO

Forty, A. (2013). “Happy Ghost of a Possible City: Il Cretto, Gibellina”. Em: *AA Files* 66, pp. 101–108.
Foundation, P. S. (2001). *Python Language Reference, Version 2.0*. Python 2.0 release documentation.
Fourier, J.-B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot.
Fourier, J. (1798). “Mémoire sur la Statique, Contenant la Démonstration du Principe des Vitesses Virtuelles”. Em: *Journal de l’École Polytechnique* 5. Reprinted in *Œuvres de Fourier*, ed. G. Darboux, Gauthier-Villars, Paris, 1888–1890, pp. 20–60.
Fraser, C. G. (1991). “Mathematical technique and physical conception in Euler’s investigation of the elastica”. Em: *Centaurus* 34.3, pp. 211–246.
Freedberg, D. (2003). *The eye of the lynx: Galileo, his friends, and the beginnings of modern natural history*. University of Chicago Press.
Galerkin, B. G. (1915). “Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates”. Em: *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* 19.7, pp. 897–908.
Galilei, G. (1594). *Le mecaniche*. Ed. por A. Favaro. Vol. 2. Edizione Nazionale; cite “Della vite”, p. 185 for the “quanto si guadagna di forza ...” passage. Firenze: Barbera.
– (1623). *Il Saggiatore*. The Assayer. Rome: Giacomo Mascardi.
– (1632). *”Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican”*. Originally published by Elzevir, The Neterlands, 1638. Translation by Stillman Drake and Foreword by Albert Einstein. University of California press.
– (1638). *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. English translation: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Leiden: Elzevir.
Galilei, G. e S. Drake (1990). “Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)”. Em: *New York: Anchor Books*.
Gallagher, R. (1964). *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*. AGARDograph 69. Report to the 14th Meeting, Structures and Materials Panel, AGARD, NATO. Oxford: Pergamon Press.
– (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gauthey, E.-M. (1813). *Œuvres de M. Gauthey: Traité de la construction des ponts*. Vol. 2. Firmin Didot.
Gautier, H. (1765). *Traité des ponts*. Vol. 1. Veuve Duchesne.
Gehry, F., M. Lloyd e D. Shelden (2020). “Empowering design: Gehry partners, Gehry technologies and architect-led industry change”. Em: *Architectural Design* 90.2, pp. 14–23.
George, A. R. (1993). *House Most High: The Temples of Ancient Mesopotamia*. Winona Lake, IN: Eisenbrauns.
Germain, S. (1821). *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques*. Paris: Courcier.
Giacomoni, P., ed. (2005). *La Terra Trema*. Kozach Collection. Rovereto: Museo Arte Moderna e Contemporanea.
Gillings, R. J. (2019). “Mathematics in the Time of the Pharaohs”. Em: *Mathematics*. Chapman e Hall/CRC, pp. 9–17.

CÓPIA PARA REVISÃO

Giorgio Martini, F. di (ca. 1480). *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*. Manuscript treatise on architecture, engineering, and military art, written ca. 1478–1490.

Girard, A. (1634). “Notes et annotations (sur les cordes pendantes)”. French. Em: *Les Oeuvres mathématiques*. Marginal annotation by Girard in Stevin’s posthumous work. Leiden: Bonaventure & Abraham Elzevier.

Girard, P.-S. (1798). *Traité analytique de la résistance des solides*. One of the earliest systematic treatments of structural mechanics, providing illustrative diagrams of Galileo’s and Mariotte’s theories. Paris: Imprimerie de la République.

Gleick, J. (2016). *Time Travel: A History*. Pantheon.

Goldberg, J. E. (1934). “Wind stresses by slope deflection and converging approximations”. Em: *transactions of the American Society of Civil Engineers* 99.1, pp. 962–975.

Goodman, R. E. (1999). *Karl Terzaghi: The Engineer as Artist*. Contains a detailed account of the Terzaghi–Fillunger dispute and its historical context. Reston, VA: ASCE Press.

Goss, V. G. A. (2009). “The history of the planar elastica: insights into mechanics and scientific method”. Em: *Science & Education* 18.8, pp. 1057–1082.

Graczykowski, C. e T. Lewiński (2010). “Michell cantilevers constructed within a half strip. Tabulation of selected benchmark results”. Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.6, pp. 869–877.

Graham, A. (1978). *The Mohist Canon*. Cambridge University Press.

Graham, H. D. e N. Diamond (2004). *The rise of American research universities: Elites and challengers in the postwar era*. JHU Press.

Grant, E. (1977). *Physical science in the middle ages*. Cambridge University Press.

Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840*. 3 vol. Excellent on the French school. Basel: Birkhäuser.

Gravesande, W. J. (1722). *Essai d’une nouvelle theorie sur le choc des corps, fondee sur l’experience*. Also issued in the *Journal litteraire de La Haye*, tome XII, pp. 1–54 (1722). La Haye: T. Johnson.

Greco, C. (2008). *Pier Luigi Nervi: dai primi brevetti al palazzo delle esposizioni di Torino 1917-1948*. Quart Verlag.

Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Reprinted in *Mathematical Papers of George Green*, edited by N. M. Ferrers, London: Macmillan, 1871. Nottingham: T. Wheelhouse.

– (1837). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. Em: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.

– (1839a). “On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. Em: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.

– (1839b). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. Em: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.

CÓPIA PARA REVISÃO

Green, G. (1842). "On the Propagation of Light in Crystallized Media". Em: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 121–140.
Guidoboni, E. e J.-P. Poirier (2004). *Quand la Terre Tremblait*. Paris: Odile Jacob.
Hall, A. R. (1951). *Robert Hooke and horology*.
Halpern, A., D. Billington e S. Adriaenssens (2013). "The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi". Em: *Proceedings of IASS Annual Symposia*. International Association for Shell e Spatial Structures (IASS), pp. 1–7.
Hardy, A. (2007). *The Indian Temple: Architecture and Engineering*. Oxford University Press.
Harvey, W. (1628). *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*. An Anatomical Exercise on the Motion of the Heart and Blood in Living Beings. Frankfurt: Guilielmi Fitzeri.
Hassan Fangary, A. A. (2010). "Graphics analysis of gothic vaults". M.S. Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya.
Haytham, I. al (1989). *The Optics of Ibn al-Haytham: Books I–III on Direct Vision*. Trad. por A. I. Sabra. Vol. 40. Studies of the Warburg Institute. London: Warburg Institute.
Herodotus (1921). *The Persian Wars*. Trad. por A. D. Godley. Vol. 2. Loeb Classical Library 118. Book IV.87–88 (Darius' bridge over the Bosporus, built by Mandrocles of Samos). Cambridge, MA: Harvard University Press.
Heyman, J. (1998a). *Structural analysis; A historical approach*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1966). "The stone skeleton". Em: *International Journal of Solids and Structures* 2.2, pp. 249–279.
– (1967). "Beauvais cathedral". Em: *Transactions of the Newcomen Society* 40.1, pp. 15–35.
– (1982). *The Masonry Arch*. Ellis Horwood Series in Engineering Science. Chichester: Ellis Horwood.
– (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. en. Cambridge University Press.
– (1998b). *Structural Analysis; A Historical Approach*. Cambridge University Press.
– (2003). "Truesdell and the History of the Theory of Structures". Em: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 9–20.
Heyman, J. e G Poleni (1988). "Poleni's problem." Em: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84.4, pp. 737–759.
Heyman, J. et al. (1992). "How to design a cathedral: some fragments of the history of structural engineering." Em: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Civil Engineering*. Thomas Telford-ICE Virtual Library, pp. 24–29.
Hill, D. R. (2019). *Islamic science and engineering*. Edinburgh University Press.
Hodge, A. T. (1992). *Roman Aqueducts and Water Supply*. Duckworth.
Hogendijk, I (1994). "Pure mathematics in Islamic civilization". Em: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* 1, pp. 70–79.
Homer (1924). *The Iliad*. Trad. por A. T. Murray. Vol. 170. Loeb Classical Library. 2 vols. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Hon, G. e Y. Zik (2009). "Kepler's optical part of astronomy (1604): Introducing the ecliptic instrument". Em: *Perspectives on Science* 17.3, pp. 307–345.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Honigmann, C. e D. P. Billington (2003). “Conceptual design for the Sunniberg Bridge”. Em: *Journal of Bridge Engineering* 8.3, pp. 122–130.
Hooke, R. (1665). *Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon*. Royal Society of London. London: Jo. Martyn e Ja. Allestry.
– (1676). *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*. Imprint dated 1676; actually published October 1675. London: John Martyn.
– (1678). *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*. London: John Martyn.
– (1705). *The Posthumous Works of Robert Hooke*. Ed. por R. Waller. The decipherment of the arch anagram appears in Waller’s prefatory “Life of Dr. Robert Hooke”. London: Sam. Smith e Benj. Walford.
Houlsby, G. T. (2014). “John Wallis and the numerical analysis of structures”. Em: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 207–217.
structural engineering, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1859. Oxford English Dictionary.
structural engineer, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1867. Oxford English Dictionary.
Hrennikoff, A. (1941). “Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 8, pp. 169–175.
Huerta, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas: Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
– (2006). “Structural Design in the Work of Gaudí”. Em: *Architectural Science Review* 49.4, pp. 324–339.
– (2009). “The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman”. Em: *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*.
– (2018). “Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet”. Em: *Building Knowledge, Constructing Histories*. Ed. por I. Wouters et al. Proceedings of the 6th International Congress on Construction History (6ICCH), Brussels, Belgium, July 9–13, 2018. London: CRC Press/Balkema, pp. 773–780.
Huff, D. (2005). “From Median to Achaemenian palace architecture”. Em: *Iranica Antiqua* 40, pp. 371–395.
Huxtable, A. L. (2017). *Pier Luigi Nervi*. Pickle Partners Publishing.
Huygens, C (1673). “1673 Horologium oscillatorium”. Em: *Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometrical (Paris: AF Muguet)*.
Huygens, C. (16 de nov. de 1691). *Lettre à G.W. Leibniz*. Francês. Ed. por J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (24 de ago. de 1694). *Lettre à G.W. Leibniz*. Francês. Ed. por J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (1888a). “Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691”. Em: *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*. Ed. por D. B. de Haan et al. Vol. 10. Letter dated 1 September 1691. The Hague: Martinus Nijhoff, pp. 127–134.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Huygens, C. (1888b). *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*. Correspondance 1638-1656. Société Hollandaise des Sciences; Martinus Nijhoff, pp. 35–40.
– (1986). *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations*. Iowa State University Press.
Iacovou, P. (2024). "The construction of Casa Malaparte as living images". Em: *Journal of Architecture/ Architectural History (Taylor & Francis)*.
Inwood, S. (2002). *The Man Who Knew Too Much: The Strange and Inventive Life of Robert Hooke, 1635–1703*. London: Macmillan.
Irons, B. M. (1966). "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods". Em: *AIAA Journal* 4.11, pp. 2035–2037.
Istituto Geografico De Agostini, ed. (1956). *Leonardo da Vinci*. Memorial edition arising from the 1938 Leonardo Exposition in Milan. New York: Reynal & Company. 518 pp.
Jacobovici, S. e J. Cameron (2006). *The Exodus Decoded*. History Channel documentary.
Jakob Bernoulli (s.d.).
James, J. (1982). *Chartres: The Masons Who Built a Legend*. London: Routledge & Kegan Paul.
Jammer, M. (1957). *Concepts of Force*. Reprinted by Dover Books on Physics. Harvard University Press.
Jeremias, J. (1965). *Theophanie: Die Geschichte einer alttestamentlichen Gattung*. Alemão. Neukirchen-Vluyn: Neukirchener Verlag, p. 181.
Jones, B., A. Sereni e M. Ricci (2010). "Building Brunelleschi's Dome: A Practical Methodology Verified by Experiment". Em: *Journal of the Society of Architectural Historians* 69.1, pp. 39–61.
Jung, C. G. (1959). *Flying Saucers: A Modern Myth of Things Seen in the Skies*. Trad. por R. F. C. Hull. London: Routledge & Kegan Paul.
Kant, I. (2023). *Metaphysical foundations of natural science*. Newcomb Livraria Press.
Kaplan, R. (2000). *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*. Oxford University Press.
Kästner, A. G. (1786). *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. 4. Auflage. Göttingen: Keyser.
Keller, S. (1998). "Sections and Views: Visual Representation in Eighteenth-Century Earthquake Studies". Em: *British Journal for the History of Science* 31, pp. 129–159.
Kennedy, E. S. (1971). "Al-Biruni's Masudic canon". Em: *Al-Abhath* 24.1-4, pp. 59–81.
Kepler, J. (1609). *Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis*. Prague: Typographia Jonae Rosini.
– (1855). *Joannis Kepleri Astronomi Opera Omnia*. Ed. por H. Zimmer. Francofurti.
Khan, F. R. (1965). "Design of high-rise buildings". Em: *ASCE Symposium on Steel, Chicago*.
Khāzinī, A. al-Rahman al (2001). *The Balance of Wisdom*. Ed. por A. S. Hamdan. Originally written in 1121 CE. Cairo: Dar al-Fikr al-Arabi.
Kim, R. D. Y. (2016). "Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses". Thesis. Kansas State University.
Kimmelman, M. (29 de abr. de 2020). *https://www.nytimes.com/2020/04/29/arts/design/new-york-virtual-tour-virus.htmlThe Hidden Feats That Built New York's Towering Skyscrapers*. Critic's Notebook. Published Apr. 29, 2020; updated May 4, 2020.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

King, R. (2010). *Brunelleschi's Dome: The story of the great cathedral in florence*. Random House.
Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.
Kirchhoff, G. (1859). "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". Em: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40, pp. 51–88.
Kleinert, A. (dez. de 2015). "Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler". Em: *Prace Komisji Historii Nauki PAU* IVX, pp. 13–35.
Kleist, H. v. (1810). "Das Erdbeben in Chili". Em: *Erzählungen*. Vol. 1. Written c. 1806; first published 1807 under the title *Jeronimo und Josephe*. Berlin: Realschulbuchhandlung, pp. 1–62.
Kossakovsky, V. (2024). *Architecton*.
Kozák, J. e V. Cermák (2010). *The Illustrated History of Natural Disasters*. Dordrecht: Springer, p. 231.
Kozak, J., V. Moreira e D. Oldroyd (2005). *Iconography of the 1755 Lisbon Earthquake*. Prague: Academia.
Kramer, S. N. (1963). *The Sumerians: Their History, Culture, and Character*. Chicago: University of Chicago Press.
Krinsky, C. H. (1967). "Seventy-eight Vitruvius manuscripts". Em: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 30.1, pp. 36–70.
Kron, G. (1944). "Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures". Em: *Journal of the Franklin Institute* 238.6, pp. 399–442.
Kurrer, K.-E. (2003). "The development of the deformation method". Em: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 57–87.
Kurrer, K. (2008). *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn.
La Gorce, J. d. (1996). "Tempêtes et Tremblements de Terre dans l'Opéra Français sous le Règne de Louis XIV". Em: *Le Mouvement en Musique à l'Epoque Baroque*. Ed. por H. Lacombe. Metz: Editions Serpenoise, pp. 171–188.
Lagrange, J.-L. (1788). *Mécanique Analytique*. Foundational work reformulating mechanics using variational principles. Paris: Veuve Desaint.
– (1798). "Sur le principe des vitesses virtuelles". Em: *Journal de l'École polytechnique* 2.5. Prairial an VI (May–Jun 1798)., pp. 115–118.
Lamé, G e B Clapeyron (1831). "Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes". Em: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences* 4, pp. 463–562.
Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris: Bachelier.
Lamé, G. e B. P. E. Clapeyron (1833). "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide". Em: *Annales de chimie et de physique* 47, pp. 250–256.
Larsen, O. P. (2007). *Reciprocal frame architecture*. Routledge.
Le Corbusier (1931). *Towards a new architecture*. Republished in 2013. Courier Corporation.
Lehner, M. (1997). *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Thames & Hudson.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Leibniz, G. W. (1684). “Demonstratio generalis corporum solidorum resistentiam in flexu determinandi”. Em: *Acta Eruditorum*. Leibniz addresses the bending resistance of solid bodies, comparing inextensional and extensional theories., pp. 334–336.
– (mar. de 1686a). “Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii”. Latim. Em: *Acta Eruditorum*. English title: A Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others Concerning a Natural Law, pp. 161–163.
– (1686b). “De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum”. Em: *Acta Eruditorum* 1686.VI, pp. 292–300.
– (1690). “Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio”. Em: *Acta eruditorum*, pp. 358–360.
– (jun. de 1691a). “De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos”. Em: *Acta Eruditorum*, pp. 277–281.
– (1691b). *Description of the Stepped Reckoner*. Contemporary account of Leibniz’s calculating machine.
– (24 de jul. de 1691c). “Letter to Christiaan Huygens”. Em: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Vol. III, 5. Akademie-Ausgabe. Letter discussing Johann Bernoulli’s catenary solution and the quadrature of the hyperbola. Berlin: Akademie Verlag.
– (2 de mar. de 1691d). “Letter to Huygens”. Em: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Ed. por Preussische Akademie der Wissenschaften. Vol. 5. Reihe III: Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. Akademie-Ausgabe III, 5. Berlin: Akademie Verlag, pp. 58–64.
– (jun. de 1691e). “On the curve formed by a heavy flexible cord”. Em: *Acta Eruditorum*. Discusses plans to study the bending of beams and bows in future correspondence.
– (1710). *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l’homme et l’origine du mal*. The only major philosophical work published by Leibniz in his lifetime. *Printing and the Mind of Man*, no. 177. Amsterdam: Isaac Troyel.
– (1858). “Historia et origo calculi differentialis (1714)”. Em: *Leibniz GW Mathematische Schriften. In* 7, pp. 392–410.
– (1901). “Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690”. Em: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Ed. por Société Hollandaise des Sciences. Vol. 9. The Hague: Martinus Nijhoff.
– (1923). *Samtliche Schriften und Briefe. Philosophische Schriften. Vols. 1-3*.
– (1969). *Philosophical Papers and Letters*. D. Reidel.
Leibniz, G. W. e L. E. Loemker (1956). *Philosophical Papers and Letters*. Ed. por L. E. Loemker. Chicago: University of Chicago Press.
Lemoine, B. (2002). *The Eiffel Tower*. New York: Princeton Architectural Press.
León-Portilla, M. (1963). *Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind*. Translated from the Spanish by Jack Emory Davis. Norman: University of Oklahoma Press.

CÓPIA PARA REVISÃO

Levien, R. (2008). "The elastica: a mathematical history". Em: *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*. Text reproduced with author's permission.
Levy, S. (1953). "Structural analysis and influence coefficients for delta wings". Em: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20.7, pp. 449–454.
Lieberkühn, C. G. (1758). *Die Lissabonner: ein bürgerliches Trauerspiel*. Bound with *Die Insel der Pucklichten, ein Lustspiel*. First edition. [Halle]: Carl Gottfried Meyer.
Ligorio, P. (2005). *Libro di diversi terremoti*. Ed. por E. Guidoboni. Edizione Nazionale delle Opere di Pirro Ligorio, Libri delle antichità, Torino 28. Critical edition of the manuscript (Archivio di Stato di Torino, cod. Ja.II.15), written 1570–71 during the Ferrara earthquake sequence. Introduction in Italian and English. Roma: De Luca Editori d'Arte.
Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Crown.
Llunji, M. (2022). *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*. Msproject.
Londe, P. (1987). "The Malpasset dam failure". Em: *Engineering Geology* 24.1-4, pp. 295–329.
López, G. (2006). "Poleni's Manuscripts about the Dome of Saint Peter's". Em: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History* 2.
Lori, T. (2009). *Pier Luigi Nervi*. Motta Architectura.
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4ª ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Lovelace, A. (1843). "Notes by the Translator". Em: *Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*. Ed. por L. F. Menabrea. London: Richard e John Edward Taylor.
Lucretius, T. C. (1995). *De Rerum Natura*. Trad. por A. M. Esolen. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
Ludwin, R. S. e G. Smits (2007). "Folklore and Earthquakes: Native American Oral Traditions from Cascadia Compared with Written Traditions from Japan". Em: *Myth and Geology*. Ed. por L. Piccardi e W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 67–94.
MacDonald, W. L. (1982). *The Architecture of the Roman Empire, Volume II: An Urban Appraisal*. Yale University Press.
Mahmoodi, P et al. (1987). "Performance of viscoelastic dampers in world trade center towers". Em: *Dynamics of structures*. ASCE, pp. 632–644.
Maier, G. (2007). Private Communication.
Maney, G. A. (1915). "Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution". Em: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Maor, E. (2001). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*.
Mark, R. (1978). "Structural experimentation in Gothic architecture: Large-scale experimentation brought Gothic cathedrals to a level of technical elegance unsurpassed until the last century". Em: *American Scientist* 66.5, pp. 542–550.
Mark, R., J. F. Abel e K. O'Neill (1973). "Photoelastic and finite-element analysis of a quadripartite vault". Em: *Experimental Mechanics* 13.8, pp. 322–329.
Mark, R. e R. A. Prentke (1968). "Model analysis of Gothic structure". Em: *The Journal of the Society of Architectural Historians* 27.1, pp. 44–48.

CÓPIA PARA REVISÃO

Markowsky, G. (1992). “Misconceptions about the golden ratio”. Em: *The College Mathematics Journal* 23.1, pp. 2–19.
Marmo, F. et al. (2019). “On the form of the Musmeci’s bridge over the Basento river”. Em: *Engineering Structures* 191, pp. 658–673.
Marmontel, J.-F. (1777). *Les Incas, ou La destruction de l’empire du Pérou*. 2 vol. 2 vols. First edition. Paris: Lacombe.
Marshack, A. (1972). *The Roots of Civilization: The Cognitive Beginnings of Man’s First Art, Symbol and Notation*. New York: McGraw-Hill.
MATLAB User’s Guide (1984). The MathWorks. Natick, MA.
Maxwell, J. (1864a). “On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces”. Em: *Philosophical Magazine* 27, pp. 250–261.
– (1864b). “On reciprocal figures and diagrams of forces”. Em: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 250–261.
– (1864c). “On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames”. Em: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 294–299.
– (1890). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...* Vol. 2. University Press.
McCullough, D. (1972). *The Great Bridge: The Epic Story of the Building of the Brooklyn Bridge*. New York: Simon & Schuster.
McDonough, J. K. (2016). “Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years”. Em: *Philosophical Review* 125.1, pp. 1–34.
McQuaid, M. (1993). *Santiago Calatrava : structure and expression*. New York, N.Y: Museum of Modern Art.
Menn, C. (1990). *Prestressed concrete bridges*. Springer Science & Business Media.
– (1996). “The place of aesthetics in bridge design”. Em: *Structural engineering international* 6.2, pp. 93–95.
Menninger, K. (2013). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Courier Corporation.
Michell, A. G. M. (1904). “LVIII. The limits of economy of material in frame-structures”. Em: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47, pp. 589–597.
Michell, G. (1989). *The Stepwells of India*. Mapin Publishing.
Mieroop, M. Van de (2024). *A history of the ancient Near East ca. 3000-323 BC*. John Wiley & Sons.
Miller, D. M. (2017). “The Parallelogram Rule from Pseudo-Aristotle to Newton”. Em: *Archive for History of Exact Sciences* 71.2, pp. 157–191.
Miller, G. A. (1916). *Historical introduction to mathematical literature*. Macmillan.
Miyata, N. e M. Takada, ed. (1995). *Namazu-e: Jishin to Nihon Bunka*. Tokyo: Satofuni Shuppan.
Mohr, C. O. (1868). “Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen”. Alemão. Em: *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover* 14. [Contributions to the Theory of Timber and Iron Constructions], pp. 20–52, 397–400.
– (1874). *Lehrbuch der Mechanik*. F. Vieweg.

CÓPIA PARA REVISÃO

Mohr, C. O. (1882a). "Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre". Alemão. Em: *Der Civilingenieur* 28.2, pp. 113–156.
– (1882b). "Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre". Em: *Der Civilingenieur* 28, pp. 113–156, 193–235.
Mohr, O. (1892). "Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen". Alemão. Em: *Der Civilingenieur* 38. [The Calculation of Trusses with Rigid Joint Connections], pp. 577–594.
Moody, E. A. (1951). "Galileo and Avempace: The Dynamics of the Leaning Tower Experiment (I)". Em: *Journal of the History of Ideas*, pp. 163–193.
Moorey, P. R. S. (1999). *Ancient Mesopotamian materials and industries: the archaeological evidence*. Eisenbrauns.
Morandi, R. e F. Piccarreta (1972). "Roof structure of the new hangars by the International Fiumicino Airport (Rome): design, model tests". Em: *IABSE congress report*. International Association for Bridge e Structural Engineering.
Moseley, H. (1843). *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. John Weale.
Mozi (2013). *The Mozi: A Complete Translation*. Trad. por I. Johnston. Originally compiled in the 5th century BCE. Hong Kong: The Chinese University Press.
Müller-Breslau, H. F. B. (1886). *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit*. Alemão. [The Newer Methods of Strength of Materials and Statics of Building Structures, Based on the Law of Virtual Displacements and the Theorems on Strain Energy]. Leipzig: Baumgärtner.
– (1887). *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. Alemão. 1ª ed. Vol. 1. [Graphical Statics of Building Structures]. Systematic treatment of influence lines. Leipzig: Baumgärtner.
Murray, S. (1989). *Beauvais Cathedral: architecture of transcendence*. Princeton University Press.
– (1998). "Notre-Dame of Paris and the anticipation of Gothic". Em: *The Art Bulletin* 80.2, pp. 229–253.
Musolino, M. (2017). "L'arte traumatica. Gibellina e la risemantizzazione delle sue rovine". Em: *Meridiana* 88, pp. 157–178.
Musschenbroek, P. van (1739). *Elementa Physicae Conscripta in usus Academicos*. Latin. Includes early experimental studies on the tensile strength of materials. Lugduni Batavorum: Petrum vander Eyk.
Napier, J. (1614). *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Edinburgh: Andrew Hart.
NASA (1968). *NASTRAN User's Manual*. Rel. técn. Washington, D.C.: National Aeronautics e Space Administration.
NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team (set. de 2023). *Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team Report*. Rel. técn. Washington, DC: National Aeronautics e Space Administration.

CÓPIA PARA REVISÃO

National Institute of Standards and Technology (NIST) (set. de 2005). *Final Report on the Collapse of the World Trade Center Towers: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster*. NCSTAR 1. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards e Technology.

Naveh, J. (1987). *Early History of the Alphabet: An Introduction to West Semitic Epigraphy and Palaeography*. 2nd. Jerusalem: Magnes Press.

Navier, C (1821). "Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques". Em: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 177–181.

– (1823). *Rapport à Monsieur le Ministre de l'Intérieur sur le projet d'un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées*. Report on the proposed suspension bridge at the Champs-Élysées, highlighting the intersection of engineering, mathematics, and architectural aesthetics. Paris: Imprimerie Royale.

– (1826). *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. First edition. Second edition published in 2 volumes, 1833-1838. Paris: Carilian-Gœury.

– (1827a). "Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques". Em: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* 7, pp. 375–393.

– (1827b). "Mémoire sur les lois du mouvement des fluides". Em: *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France* 6. Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822, pp. 389–440.

– (1830). *Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*. 2ª ed. Augmentée d'une notice sur le pont des Invalides. Paris: Carilian-Gœury.

– (1833). *Résumé des Leçons Données sur L Application de la mécanique a L'etablissement des constructions et des machines*. 2nd edition.

– (1864). *Résumé des leçons données a l'École des ponts et chaussées [. . .]. Troisième édition avec des notes et des appendices, par M. Barré de Saint-Venant*.

Needham, J. (1959). *Science and Civilization in China*. Cambridge University Press.

Nelli, G. B. e A. Ceccherelli (1753). *Discorsi di architettura del senatore Giovan Batista Nelli con la vita del medesimo dedicata all'illustriss. signore Bindo Simone Peruzzi e due ragionamenti sopra le cupole di Alessandro Cecchini architetto*. per gli eredi Paperini.

Nemore, J. de (1250). *Liber de Ratione Ponderis*. 13th century. Critical edition by E. A. Moody and M. Clagett in *The Medieval Science of Weights*, University of Wisconsin Press, 1952.

Nervi, P. (2018). *Aesthetics and Technology in Building: The Twenty-first-century Edition*. Translated from the Italian by Robert Einaudi. University of Illinois Press.

Nervi, P. L. (1956a). *Structures*. F. W. Dodge Corporation.

– (1956b). *Structures*. Translated from the Italian *Costruire correttamente* by Giuseppina and Mario Salvadori. F.W. Dodge Corporation.

– (1963). *Buildings, projects, structures, 1953-1963*. Praeger.

Nervi, P. L., G. Neri et al. (2014). *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*. CittàStudi Edizioni.

CÓPIA PARA REVISÃO

Neufert, E. (1970). *Architects' Data*. Trad. por R. Herz. First English translation of *Bauentwurfslehre* (1936). London: Lockwood.
Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. Vol. 9. Courier Corporation.
– (2012). *A history of ancient mathematical astronomy*. Vol. 1. Springer Science & Business Media.
Newmark, N. M. (1959). "A method of computation for structural dynamics". Em: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, pp. 67–94.
Newton, I. (1680). *Index Chemicus*. The Chimistry of Isaac Newton Project, Indiana University Digital Library Program.
– (1687). *Mathematical principles of natural philosophy*. English & Latin Version.
– (1704). *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. First edition. London: Sam. Smith e Benj. Walford.
– (1717). *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Dover Publications, 1952.
– (1736). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*. Trad. por J. Colson. Originally written in 1671. London: Henry Woodfall.
– (1960). "Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676". Em: *The Correspondence of Isaac Newton*. Ed. por H. W. Turnbull. Vol. 2. 1676–1687. Cambridge: Cambridge University Press. Cap. 187, pp. 110–161.
Nikolinakou, M. A. e A. J. Tallon (2006). "New Research in Early Gothic Flying Buttresses". en. Em: *Proc. Second Intern. Congress Construction History, Cambridge*, pp. 2347–2361.
Nikolinakou, M.-K., A. J. Tallon e J. A. Ochsendorf (2005). "Structure and form of early Gothic flying buttresses". Em: *Revue Européenne de Génie Civil* 9.9-10, pp. 1191–1217.
Noether, E. (1918). "Invariante Variationsprobleme". Em: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235–257.
Noll, W. (1958). "A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media". Em: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2.1, pp. 197–226.
NRC-ML19312B609 (2019). *Official Transcript of Proceedings; NextEra Energy Seabrook, LLC Seabrook Station, Unit 1; Docket Number: 50-443-LA-2;ASLBP Number:17-953-02-LA-BD01*. Newburyport, Massachusetts.
Nur, A. e D. Burgess (2008). *Apocalypse: earthquakes, archaeology, and the wrath of God*. Princeton University Press.
Oates, J. (1990). *Babylon*. See Chapter 2 for building materials and construction practice. London: Thames e Hudson.
Ochsendorf, J. A. (2002). "Collapse of masonry structures". Thesis. University of Cambridge.
Oikonomou, A. (2022). "The Use of Geometrical Tracing, Module and Proportions in Design and Construction, from Antiquity to the 18th Century". Em: *International Journal of Architectural Heritage* 16.10, pp. 1567–1587.
Oldfather, W., C. Ellis e D. M. Brown (1933). "Leonhard Euler's elastic curves". Em: *Isis* 20.1. Translation of *De curvis elasticis*, Additamentum I to *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, pp. 72–160.

CÓPIA PARA REVISÃO

Oppenheim, A. L. (1977). *Ancient Mesopotamia: Portrait of a Dead Civilization*. University of Chicago Press.
Oresme, N. (1351). *De configurationibus qualitatum et motuum*.
Otto, F., R. Trostel e F. K. Schleyer (1973). *Tensile structures; design, structure, and calculati on of buildings of cables, nets, and membranes*. MIT Press.
Oughtred, W. (1632). *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*. London: Augustine Mathewes.
Our history (2026). Institutional history: origin in 1908; name adopted in 1922. The Institution of Structural Engineers.
Palladio, A. (1570). *I quattro libri dell'architettura*. Domenico di Franceschi.
Palomo, M. (2017). "Describing Reality: Bernoulli's Challenge of the Catenary Curve and its Mathematical Description by Leibniz and Huygens". Em: *Leibniz and the Dialogue Between Sciences, Philosophy and Engineering, 1646–2016. New Historical and Epistemological Insights*, p. 334.
Panofsky, E. (1945). "An Explanation of Stornaloco's Formula". Em: *The Art Bulletin* 27.1, pp. 61–64.
Paranjape, M. R. (2011). "'Natural Supernaturalism?'The Tagore–Gandhi Debate on the Bihar Earthquake". Em: *The Journal of Hindu Studies* 4.2, pp. 176–204.
Pardies, I. G. (1710). *La statique ou la science des forces mouvantes*. S. Mabre-Cramoisy.
Parent, A. (1713). *Essais et recherches de mathématique et de physique, dans lesquels on traite de l'utilité des différentes sciences, et principalement de la mécanique, par rapport aux arts et métiers*. 3 volumes. Paris: Jean Anisson.
Parkinson, R. B. (1999). *Cracking Codes: The Rosetta Stone and Decipherment*. Berkeley: University of California Press.
Pascal, B. (1645). *La Machine Arithmetique*. Pamphlet describing Pascal's mechanical calculator. Paris.
Pearson, K (ago. de 1905). "On the Stability of Masonry Dams". Em: *Engineering*, p. 171.
Pearson, K. et al. (1907). *An experimental study of the stress in Masonry Dams*. Rel. técn. Technical Series, V. Drapers Company Research Memoirs (Technical Series).
Pedreschi, R. (2008). "Form, force and structure: a brief history". Em: *Architectural Design* 78.2, pp. 12–19.
Peiffer, J. (2006). "Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann". Em: *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]* 2.1b, Article–1.
Perga, A. of (1896). *Treatise on Conic Sections*. Trad. por T. L. Heath. Greek text with English translation. Cambridge: Cambridge University Press.
Peripatetic School (circa 4th century BCE). *Mechanical Problems*. Traditionally attributed to Aristotle, though likely compiled by later members of the Peripatetic school. Problem 3 possibly reflects the thought of Archytas of Tarentum.
Perret, A. (1952). *Contribution à une théorie de l'architecture*. Paris: Cercle d'études architecturales.
Perronet, J.-R. (1782). *La construcción de puentes en el siglo XVIII*. Spanish translation. Reverte.

CÓPIA PARA REVISÃO

Perronet, J. R. (1782–1788). *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orléans et autres*. 2 vols. with 67 engraved plates. Available at https://archive.org/details/chepfl-lipr-axd-20-01. Paris: Imprimerie Royale.

Petroski, H. (1997). "Engineering: Santiago Calatrava". Em: *American Scientist* 85.2, pp. 114–118.

Philoponus, J. (1993). *Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5*. Ed. por R. Sorabji e C. Wildberg. Trad. por C. Wildberg. Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth.

Piccardi, L. (2007). "The AD60 Denizli Basin Earthquake and the Apparition of Archangel Michael at Colossae". Em: *Myth and Geology*. Ed. por L. Piccardi e W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 95–105.

Picon, A. (1988). "Navier and the introduction of suspension bridges in France". Em: *Construction History* 4, pp. 21–34.

Pierrefeu, F. de e L. Corbusier (1942). *La maison des hommes*. Plon.

Piola, G. (1833). "La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni". Em: *Opuscoli Matematici e Fisici di Diversi Autori* 1, pp. 201–236.

Pisano, R., J. Coopersmith e M. Peake (2021). *Essay on Machines in General (1786)*. Vol. 47. Springer.

Pizzigoni, A. (2015). "Brunelleschi's Bricks". Em: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 56.2, pp. 137–148.

Plato (350 BC). *Laws*. Composed ca. 350 BCE. Online editio. Tufts University: Perseus Digital Library.

Pliny the Elder (1906). *Naturalis Historia*. Ed. por K. Mayhoff. Leipzig: Teubner.

Poincaré, H. (1905). *Science and hypothesis*. London: Walter Scott Publishing CO., LTD.

Poisson, S. D. (1829). "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques". Em: *Mémoires de l'Académie des Sciences* 8, pp. 357–570.

Poisson, S. D. (1831). "Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques". Em: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 10, pp. 549–605.

Poleni, G. (1748). *Memorie Istoriche Della Gran Cvpola Del Tempio Vaticano, E De'Danni Di Essa, E De'Ristoramenti Loro, Divise In Libri Cinqve*. Nella Stamperia del seminario.

Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.

Pope, T. (1811). *A Treatise on Bridge Architecture: In which the Superior Advantages of the Flying Pendent Lever Bridge are Fully Proved; with an Historical Account and Description of Different Bridges Erected in Various Parts of the World, from an Early Period, Down to the Present Time*. Alexander Niven.

Popovic, O. (1996). "Reciprocal frame structures". Tese de dout. University of Nottingham.

Popovic Larsen, O. (2014). "Reciprocal frame (RF) structures: real and exploratory". Em: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 119–134.

Povoledo, E. (2023). "A High-Maintenance Relationship for 637 Years, but Milan's Duomo Is Still Adored". Em: *The New York Times*.

CÓPIA PARA REVISÃO

Powell, G. (2008). "Structural analysis: Are we relying too much on computers? Part 1: The problem". Em: *Structure Magazine*, pp. 50–52.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Pugnale, A. e M. Sassone (2014). "Structural reciprocity: critical overview and promising research/design issues". Em: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 9–35.
Quasimodo, S. (1958). "Al padre". Em: *La terra impareggiabile*. Written for the 90th birthday of Gaetano Quasimodo and the 50th anniversary of the Messina earthquake of 28 December 1908. English title: *To My Father*. Milano: Mondadori.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin e Company.
Rankine, W. J. M. (1862). *A Manual of Civil Engineering*. London: Charles Griffin.
Rasch, B. e F. Otto (1996). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Rega, G. (2013). "Mechanics and Architecture: Nervi's Creative Knowledge Versus The Unsolved Contemporary Complexity". Em: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 54.2-3, pp. 243–252.
Renn, J., P. Damerow e P. McLaughlin (2002). "Aristotle, Archimedes, Euclid, and the origin of mechanics: The perspective of historical epistemology". Em: *Symposium Arquimedes, edited by José Luis Montesinos Sirera*, pp. 43–59.
Ribon, M. (1999). *Esthetique de la Catastrophe*. Editions Kime.
Rice, J. (1968). "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks". Em: *J. Applied Mechanics* 35, pp. 379–386.
Richards, E. G. (1998). *Mapping Time: The Calendar and Its History*. Oxford University Press.
Richardson, L. (fev. de 1911). "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam". Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A.* 210, pp. 307–357.
Ritz, W. (1909). "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." Em: *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*.
Robertson, L. E. (2017). *The Structure of Design: An Engineer's Extraordinary Life in Architecture*. The Monacelli Press, LLC.
Robins, G. e C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Transcription, translation, and commentary on EA 10057–10058. London: British Museum Press.
Robson, E. (2001). "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322". Em: *Historia Mathematica* 28.3, pp. 167–206.
– (2002). "Words and Pictures: New Light on Plimpton 322". Em: *American Mathematical Monthly* 109.2, pp. 105–120.
Roebling, W. A. (1877). *Report of the Chief Engineer of the New York and Brooklyn Bridge*. Annual report to the directors of the New York Bridge Company.

CÓPIA PARA REVISÃO

Rousseau, J.-J. (1967). “Lettre à M. de Voltaire [sur la Providence]”. Em: *Correspondance complète de Jean-Jacques Rousseau*. Ed. por R. A. Leigh. Vol. 4. Written 18 August 1756. Also known as *Lettre sur la Providence*. Genève: Institut et Musée Voltaire, pp. 37–50.
Sader, H. (2019). *The Phoenicians: A History*. Princeton: Princeton University Press.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855a). “Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l’équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s’exerçant simultanément”. Em: *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences de l’Institut Impérial de France* 14. Presented 1853; published 1855, pp. 233–560.
– (1864). “Mémoire sur l’établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l’élasticité pourrait les ramener à leur premier état”. Em: *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 70, pp. 473–480.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855b). *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l’équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s’exerçant simultanément*. Vol. 14, pp. 233–560.
Saint-Venant, B. de (1855c). “Mémoire sur la flexion des prismes rectangulaires”. French. Em: *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences de l’Institut de France* 14. Reprinted in *Mémoires de Mécanique*, Paris: Gauthier-Villars, 1883, pp. 233–560.
Salençon, J. (2018). “The Emergence of the Principle of Virtual Velocities”. Em: *Virtual Work Approach to Mechanical Modeling*. London: ISTE Press – Elsevier. Cap. 1, pp. 1–18.
Salencon, J. (mar. de 2017). *Equilibrium and Forces: from Aristotle to Lagrange*.
Saliklis, E. e J. Parker (2014). “The Maney-Goldberg Method: An Iterative Method Lost in the Mists of Time”. Em: *Proceedings of the IASS-SLTE 2014 Symposium “Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints”*. Ed. por R. Brasil e R. Pauletti. IASS. Brasilia, Brazil.
Saouma, V. E. e C. Barton (abr. de 1994). “Fractals, Fractures and Size Effects in Concrete”. Em: *Journal of Engineering Mechanics of the American Society of Civil Engineers* 120.4, pp. 835–854.
Saouma, V. E. e G. Fava (2006). “On Fractals and Size Effects”. Em: *International Journal of Fracture* 137, pp. 231–249.
Saouma, V. E., D. Natekar e E. Hansen (2003). “Cohesive Stresses and Size Effects in Elasto-Plastic and Quasi-Brittle Materials”. Em: *International Journal of Fracture* 119, pp. 287–298.
Saouma, V. E. e L. Perotti (2004). *Constitutive Model for Alkali Aggregate Reaction*. Rel. técn. Bienne, Switzerland: Report No. 2, Submitted to the Swiss Federal Agency of Water e Geology.
Saxony, A. of (1988). *Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis*. Ed. por A. Maier. Critical Latin edition. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.
Schmaltz, T. M. (2003). “Cartesian causation: body–body interaction, motion, and eternal truths”. Em: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 34.4, pp. 737–762.
Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform*. Austin: University of Texas Press.

CÓPIA PARA REVISÃO

Schrama, W. (2021). “A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames”. Em: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.
Seabrook, J. (nov. de 2001). “The Tower Builder”. Em: *New Yorker* 36.
Sebregondi, G. C. e R. Schofield (2016). “First Principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral”. Em: *Architectural history* 59, pp. 63–122.
Seidel, P. L. (1873). *Ueber ein verfahren, die gleichungen, auf welche die methode der kleinsten quadrate führt, sowie lineäre gleichungen überhaupt, durch successive annäherung aufzulösen*. Vol. 11. Verlag d. Akad.
Serlio, S. (1996). *Sebastiano Serlio on Architecture, Volume I*. Ed. por V. H. Veen e P. Hicks. Yale University Press.
Serrano, I. M. e B. D. Suceavă (2017). “A Medieval Mystery: Nicole Oresme’s Concept of Curvitas”. Em: *The Best Writing on Mathematics 2016*. Princeton University Press, pp. 238–248.
Shakespeare, W. (1597). *Romeo and Juliet*. First published in 1597; numerous modern editions available.
Sharer, R. J. e L. P. Traxler (2006). *The Ancient Maya*. 6th. Stanford University Press.
Shelby, L. (1972). “The Geometrical Knowledge of Mediaeval Master Masons”. Em: *Speculum* 47.3, pp. 395–421.
Shelden, D. R. (2002). “Digital surface representation and the constructibility of Gehry’s architecture”. Tese de dout. Massachusetts Institute of Technology.
Shukla, D. (1993). *Vaastu Shastra: Principles of Ancient Architecture*. Institute of Indology.
Smith, M. E. (1996). *The Aztecs*. Blackwell Publishing.
Smits, G. (2006). “Shaking Up Japan: Edo Society and the 1855 Catfish Picture Prints”. Em: *Journal of Social History* 39.4, pp. 1045–1078.
Southwell, R. V. (1935). “Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints"—I and II”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.
Spinoza, B. d. (1670). *Tractatus Theologico-Politicus*. Published under the pseudonym “Operibus Posthumis”; quoted from the translation of R. H. M. Elwes (1883), Preface. Hamburg: Henricum Künraht.
Stevin, S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst*. English translation: *The Principal Works of Simon Stevin*, ed. E. J. Dijksterhuis, C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, 1955. Leiden: Christoffel Plantijn.
– (1955–1966). *The Principal Works of Simon Stevin*. Ed. por D. J. Struik. Vol. 5 volumes. Mathematics, Engineering, Navigation, Fortification, Optics, Architecture, Music. Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger.
– (1987). *Les oeuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard*. chez Bonaventure & Abraham Elsevier, imprimeurs ordinaires de l’Université.
Strang, G. e G. J. Fix (1973). “An analysis of the finite element method(Book- An analysis of the finite element method.)” Em: *Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1973. 318 p.*
Straub, H. (1952). *A History of Civil Engineering*. London: Leonard Hill.

CÓPIA PARA REVISÃO

Sugimoto, K. (2008). “Earthquake-Resistant Design in Japanese Pagodas: A Historical Perspective”. Em: *Journal of Japanese Architecture* 12.3, pp. 45–67.
Sullivan, L. (mar. de 1896). “The tall office building artistically considered”. Em: *Lippincott’s Monthly Magazine*.
Sundaram, M. e G. K. Ananthasuresh (2009). *Gustave Eiffel and his Optimal Structures*. Vol. 14. 9. Indian Academy of Sciences, pp. 846–855.
Swanson, J. A. (1971). *ANSYS Engineering Analysis System*. Rel. técn. Pittsburgh: Swanson Analysis Systems.
Szabó, I. (1977). *Geschichte der mechanischen Principien*. In German; comprehensive history. Basel: Birkhäuser.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Rel. técn. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
The Baltimore Sun (1979). “Pier Luigi Nervi, famed architect, dies in Italy”. Em: *Proquest Historical Newspapers*.
The Economist (jul. de 2025). “How the Gulf’s rulers want to harness the power of science”. Em: *The Economist* 449.9311. Accessed: 2025-01-12, pp. 20–23.
The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments (1611). Authorized King James Version. London: Robert Barker, Printer to the King.
Thomson, W. (1848). “On an Absolute Thermometric Scale Founded on Carnot’s Theory of the Motive Power of Heat”. Em: *Philosophical Magazine* 33, pp. 313–317.
– (1851). “On the Dynamical Theory of Heat, with Numerical Results Deduced from Mr Joule’s Equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault’s Observations on Steam”. Em: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 20, pp. 261–288.
Thomson, W. L. K. (1855). “On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter”. Em: *Philosophical Magazine* 5, pp. 4–27.
Thrall, A., D. Billington e K. Bréa (2012). “The Maria Pia Bridge: A major work of structural art”. Em: *Engineering structures* 40, pp. 479–486.
Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. New York, U.S.A: McGraw-Hill.
Timoshenko, S. e J. Goodier (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw Hill.
Timoshenko, S. P. e J. M. Gere (1976). *Mechanics of Materials (Strength of Materials)*. 3ª ed. New York: McGraw-Hill.
Todhunter, I. e K. Pearson (1893). *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*. Two volumes, Edited and completed by Pearson, K. Cambridge University Press.
Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy’s almagest*. Princeton University Press.
Torricelli, E. (1644). *Opera geometrica*. Latim. Contains *De sphaera et solidis sphaeralibus*, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, and *De dimensione parabolae*. Florence: Amadoro Massa & Lorenzo de Landis.
Torroja, E. (1962a). “Hipódromo de la Zarzuela”. Em: *Informes de la Construcción* 14.137, pp. 19–38.
– (1962b). *The Structures of Architecture*. University of California Press.
– (2008). “Razón y ser de los tipos estructurales”. Em.

CÓPIA PARA REVISÃO

Torroja, E. e E. T. Miret (1958). *The structures of Eduardo Torroja: an autobiography of engineering accomplishment*. FW Dodge Corporation.
Torroja, E., J.-J. Polivka e M. Polivka (1958). *Philosophy of structures*. Univ of California Press.
Truesdell, C (1960). *The Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies 1638-1788: Introduction to Vol. X and XI of Leonhardi Euleri Opera Omnia*. This is the the definitive print source for Euler's works. Publication began in 1911, growing to scores of volumes comprising nearly all of Euler's works. Birkhäuser e the Euler Commission of Switzerland.
Truesdell, C. (1968). *Essays in the History of Mechanics*. Springer.
– (1976). "History of classical mechanics". Em: *Naturwissenschaften* 63.2, pp. 53–62.
Truesdell, C. e W. Noll (1965). "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". Em: *Handbuch der Physik*. Ed. por S. Flügge. Vol. III/3. Berlin: Springer.
Turnbull, S. (2003). *Japanese Castles 1540-1640*. Osprey Publishing.
Turner, M. J. et al. (1956). "Stiffness and deflection analysis of complex structures". Em: *journal of the Aeronautical Sciences* 23.9, pp. 805–823.
Turner, M. (1959). *The direct stiffness method of structural analysis*. Rel. técn. Technische Hockschule, Aachen, Germany.
Van Musschenbroek, P. (1729). *Physicae experimentales, et geometricae, de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine terrae, cohaerentia corporum firmorum dissertationes: ut et ephemerides meteorologicae Ultrajectinae*. apud Samuelem Luchtmans.
Varignon, P. (1725). *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*. Vol. 2. chez Claude Jombert.
Vashy, A. (1892). "Sur les Lois de Similitude en Physique". Em: *Annales Télégraphiques* 19, pp. 25–28.
Venezia, F. (1989). "Base: A Museum: Homage to Gibellina Vecchia, 1985: Gibellina Nuova, Sicily". Em: *Perspecta* 25, pp. 202–215.
Vergilius Maro, P. (2008). *The Aeneid*. Trad. por C. Day Lewis. Com introd. de J. Griffin. Oxford World's Classics. Translation first published: London, Hogarth Press, 1952. Oxford: Oxford University Press.
Vesalius, A. (1998–2009). *On the Fabric of the Human Body: A Translation of De Humani Corporis Fabrica Libri Septem*. Trad. por W. F. Richardson e J. B. Carman. Vol. 5 volumes. English translation of the 1543 edition. San Francisco: Norman Publishing.
Vignola, G. B. da (1969). *Canon of the Five Orders of Architecture*. Dover Publications.
Vinci, L. da (1881). *Les Manuscrits de Léonard de Vinci*. Manuscripts A–M, c. 1490–1519. Paris: Institut de France.
– (1938). *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. New York: Reynal & Hitchcock.
Viola, E., L. Panzacchi e F. Tornabene (2004). "Structural Analysis of Historical Masonry Arches". en. Em: *Restoration, International Conference of Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application*. Cesena, Italy, pp. 7–11.
Viollet-le-Duc, E.-E. (1854). *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. Vol. 1. Bance.

CÓPIA PARA REVISÃO

Viollet-le-Duc, E.-E. (1875). *Discourses on Architecture*. Translated from the French by Benjamin Bucknall. Boston: Ticknor e Company.
Virlogeux, M. (2001). "Bridges with multiple cable-stayed spans". Em: *Structural Engineering International* 11.1, pp. 61–82.
Virlogeux, M. et al. (2005). "Millau Viaduct, France". Em: *Structural Engineering International* 15.1, pp. 4–7.
Vitalis, L. (set. de 2021). *Pier Luigi Nervi, l'architecture biomimétique avant la lettre ?* Rapport de recherche hal-03359251. MAP – Modèles et simulations pour l'Architecture et le Patrimoine.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vitruvius e M. H. Morgan (1914). *The Ten Books on Architecture*. Harvard University Press.
Voigt, W. (1898). *Die fundamentalen Eigenschaften der Krystalle. 243 pp*.
Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner.
Voltaire [Arouet, F.-M. (1759). *Candide, ou l'Optimisme, traduit de l'allemand de Mr. le Docteur Ralph*. Published without author's name or place of publication. First edition; priority of the Cramer Geneva printing (299 pp.) established by Gagnebin (1952) and confirmed by Wade and Barber. *Printing and the Mind of Man*, no. 204. [Genève]: [Gabriel Cramer], p. 299.
– (2009). "Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien". Em: *Œuvres complètes de Voltaire*. Ed. por D. Adams e H. T. Mason. Vol. 45A. Written December 1755; first authorised edition Geneva: Cramer, 1756. 180 lines. Oxford: Voltaire Foundation, pp. 315–360.
Wagner, D. L. (1983). *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Collection of essays covering each of the seven liberal arts and their historical development. Bloomington: Indiana University Press.
Wakamizu, S. (2003). *Namazu wa Odoru*. Tokyo: Bungeisha.
Wallis, J. (1670). *Mechanica, sive de Motu Tractatus Geometricus*. London: Guliemi Godbid.
– (1695). *Opera mathematica*. Oxford University Press.
Wassell, S. R. (2008). "Andrea Palladio (1508-1580)". Em: *Nexus Network Journal* 10, pp. 213–226.
Webster, J. (2001). "Haydn's *Seven Last Words*: An Introduction". Em: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. por S. Sadie. 2ª ed. Vol. 11. London: Macmillan, pp. 171–173.
Weidman, P. (2009). "Modified shape of the Eiffel Tower determined for an atmospheric boundary-layer wind profile". Em: *Physics of Fluids* 21.6, p. 067102.
Westfall, R. S. (1980). *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.
Whiteside, D. T. (1969). *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume V: 1683–1684*. Editor and commentary by Derek T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press.
Wilkes, M. V. (1951). "The EDSAC". Em: *Journal of the British Institution of Radio Engineers* 11, pp. 327–331.

CÓPIA PARA REVISÃO

Willis, R. (1842). "On the Construction of the Vaults of the Middle Ages". Em: *Transactions of the Royal Institute of British Architects, I*.
– (1910). *On the construction of the vaults of the Middle Ages*. Royal Institute of British Architects.
Wilson, E. L. (1969). *SAP: A General Structural Analysis Program*. Rel. técn. Berkeley: University of California, Berkeley.
Wilson, E. (1960). "Matrix Analysis of Nonlinear Structures". Em: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa.*
Wilson, E. e R. Clough (1962). "Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis". Em: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Winchurch, M. E. (2007). *The Art of Thin Shell Design: A Comparison of Eduardo Torroja and Pier Luigi Nervi*. Undergraduate Thesis in the Department of Civil and Environmental Engineering.
Winkler, E. (1875). *Theorie der Brücken. Aeussere Kräfte gerader Träger*. Alemão. 2ª ed. Vorträge über Brückenbau 1. [Theory of Bridges: External Forces on Straight Beams]. Wien: Carl Gerold's Sohn.
Wisner, B. et al. (2004). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. 2ª ed. London: Routledge.
Wittkower, R. (1944). "Principles of Palladio's Architecture". Em: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 7.1, pp. 102–122.
Wolfe, M. I. e R. Mark (1976). "The collapse of the vaults of Beauvais Cathedral in 1284". Em: *Speculum* 51.3, pp. 462–476.
Wolfram, S. (1988). *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Redwood City, CA: Addison-Wesley.
Wuhrmann, S. (1994). "Le Tremblement de Terre entre Peinture de Genre et Peinture d'Histoire". Em: *Art + Architecture en Suisse* 45.4, pp. 330–339.
Wulff, H. E. (1968). "The Qanats of Iran". Em: *Scientific American* 218.4, pp. 94–105.
Young, T. (1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. Vol. 1. Lecture XXXIX, p. 463. London: Joseph Johnson.
Zammattio, C. (1980). *Leonardo the Scientist*. McGraw-Hill.
Zienkiewicz, O. (1967). *The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics*. First. McGraw-Hill, London.
Zienkiewicz, O. e Y. K. Cheung (1964). "Buttress Dams on Complex Rock Foundations". Em: *Water Power* 16, p. 193.
– (1965). "Stresses in Buttress Dams". Em: *Water Power* 17, p. 69.
Zienkiewicz, O. e R. Taylor (2000). *The finite element method: Solid mechanics*. Vol. 2. Butterworth-heinemann.
Zixuan, C., C. Jixun e Z. Zhigang (2018). "Curvature and Its Application in Huygens Isochronous Pendulum". Em: *2018 IEEE International Conference of Safety Produce Informatization (IICSPI)*. IEEE, pp. 661–666.

CÓPIA PARA REVISÃO

Índice temático — Parte I: História

-*Responsio ad Dn. Huminium*, 355
Libro di diversi terremoti, 696

Pont des Invalides, 183

abacus, 462
ABAQUS, 456
Abbasid Caliphate, 90
Académie des Sciences, 179
Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana, 171
Academy (Plato), 109, 110
Académie des Sciences, 98, 148
Accademia dei Lincei, 96, 142
Academia del Cimento, 97
acceleration, 161
Achaemenid period, 35
Acta Eruditorum, 234, 272, 281, 353
action at a distance, 147
ad quadratum, 570
ad quatratum, 73, 575
Ad quatratum*ad quatratum*, 116
ad triangulum, 73, 116, 570
Additamentum ad Problema Funicularium, 286
Additamentum I: De curvis elásticos*Additamentum I: De curvis elásticos*, 356
ADINA, 456
aeolipile, 113
aeroelastic analysis, 436
aircraft structures, 436
Al-Azhar, 114
Al-Baghdaadi, 494
Al-Biruni, 115
al-Bukhari, 675
Al-Hakim bi-Amr Allah, 114
Al-Khazin, 115
Al-Khwarizmi, 91
Al-Khwarizmi*Kitāb al-mukhtaar*, 16
Al-Ma'mun, 90
Al-Mayl, 493
Alberti, Leon Battista, 110, 117, 555, 565
definitor, 565
Alexander the Great, 109
Alexandria, 110, 111, 113
Alhazen, 114
Altissimum planetam tergeminum observavi, 142
American Society of Mechanical Engineers (ASME), 391
Ammann, Othmar, 602
anagram, 152, 198
Anagrams and ciphers, 142, 152, 153, 159, 198
Analisador Mecânica, 179
Analitique Mécanique, 526
analysis, 174
Ananta, 671
anatomical observation, 95
anatomical revolution, 95
Andreas Vesalius, 95

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Anfangsgründe der Mathematik, 261
Anguttara Nikaya, 673
anisotropy, 385
Ansei Edo earthquake, 654
Ansei Kenmonroku, 656
Anthemius of Tralles, 697
anthropometry, 564, 568
anthropomorphic, 478
Análise dimensional, 145
Análise estrutural; Uma abordagem histórica, 10
Apollo, 668, 669
Apollonius (son of Apollonius of Perga), 112
Apollonius of Perga, 112
applied mechanics, 389
Arab-Islamic
  iwan, 38
  muqarnas, 38
  qanāt, 38
Arab-Islamist
  Al-Khwarizmi, 38
  Córdoba, 38
  Omar Khayyam, 38
Arcetri, 144
arch, 112
  Etruscan, 44
  Persia, 36
  Roman, 44
Archimedes, 111, 115, 488
Archimedes Palimpsest, 111
Archimedis, 40
Archippus, 669
Architect
  Candela, 628
  Gehry, 629
  Otto, 613
  Saarinen, 612
architect-engineer, 388
architecte, 389
architects
  Paladio, 46
  Phidias, 18
  Vitruvius, 45
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 391
Archytas, 39
arcitect
  Gaudi, 611
Argyris, John, 435
Aristotelian
  grip, 92
Aristotle, 92, 109, 114, 486
Aristotélico
  Mecânico, 157
Arquiteto, 707
Arroyo Parida fault, 701
artificial intelligence, 647
Arşin, 575
assembly by superposition, 440
astronomical
  observation, 93
astronomy, 94
Aswan, 114
Athena, 666
Automata, 113
axiom, 110
axiomatic field theory, 393
Aztec
  world-ages, 702

Baalbeck, 50
Baalbek, 707
Babbage, 466
Babylonians, 15, 17
Bach, J.S., 706
Bacon, Francis, 92, 137
Bacon, Roger, 115
Baghdadi, 494
Baixa, Lisbon, 690
Baja California, 701
Baker, William, 638
balance, 115
  laws, 359, 378, 393, 397
Bandel, Hannskarl, 612

CÓPIA PARA REVISÃO

Banu Musa, 91
Basel, 164, 170
  mathematical school, 166
Basra, 114
Bayt al-Hikma, 90
beam
  bending, 192
  cantilever, 141
  cantilevered, 224
  deflection, 174
  equation, 397
Beeckman, Thomas, 225
Beghini, Alessandro, 639
Belice Valley, 697
Bellarmine, Robert, 143
Belopoeica, 114
bending, 187
  moment, 271, 318
  unsymmetrical sections, 187
Benedetti, 498
Benouville, Léon, 67
Benvenuto, Edoardo, 488
Berkeley, 470
Bernoulli
  Daniel, 168, 271, 340, 523
  Family, 164
  Jakob, 165, 243, 258, 271, 318, 340, 354
  Johann, 167, 256, 271, 313, 349, 516, 524
Bibliotheque nationale de France, 116
Bihar earthquake, 1934, 672
Billington, David P., 642
BIM, 473
biomechanics, 456
biomimetic architecture, 597
blood circulation, 95
Bodhi tree, 672
Bossut, Charles, 238
Botero, 703
boundary value problem, 311, 392
Boyle, Robert, 98
brachistochrone, 167, 304
Brahe, Tycho, 93, 158
bridge
  Dell'Academia, 563
  Alamillo, 631
  Alcantara, 44
  Alexandre III, 583
  Anji, 47
  Bosphorus, 38
  Brooklyn, 608
  Darius, 36
  du Gard, 132
  Hellespont, 38
  invalides, 183
  Königsberg, 174
  Menai, 181
  Millau, 640
  Morandi, 602
  Navier, 180
  Neuilly (de), 135
  Pont des Invalides, 183
  Pont du Gard, 44
  Ponte Maria Pia, 584
  Salginatobel, 588
  Shushtar, 36
  Sunniberg, 603
  Tacoma Narrows, 170
  Telford, 183
  Vieille-Brioud, 135
  xerxes, 36
Brumel, A., 706
Bruneleschi, 79, 80
Bruno, Giordano, 507
brutalism, 589
Bubnov–Galerkin method, 443
buckling, 174
Buddha, 672
Buddhism, 672
bundled tube, 604
Buonarroti, Michelangelo, 76
buoyancy, 111, 116
Buridan, Jean, 495
Burj Khalifa, 639

CÓPIA PARA REVISÃO

Burri, Alberto, 697
Buyid dynasty, 114
Byzantine Empire, 115

cable-stayed bridge, 640
Cairo, 114
Calatrava, Santiago, 630
calculus, 174, 271
  invention, 158
  variations, 171, 174, 271
Cambridge tripos, 362
Candela, Félix, 628
capcity-demand, 232
Capuana, L., 695
Caravaggio, M., 103, 249, 358, 398, 460, 542, 650
Carnot's theorem (impact), 539
Carnot, Lazare, 537
Cartesian coordinates, 146
Cascadia suduction, 657
Castiglian, Alberto, 174
Castigliano, Alberto, 406, 436
  theorems, 406
catenaria, 279
catenary, 167, 271, 610
  Bernoulli, Jakob, 280
  Galileo, 276
  Huygens, 278
  Leonardo, 276
  Stevin, 277
catenoid, 611
catenária, 275
catfish, 654
cathedral
  Beauvais, 63
    1284 collapse, 65
    1573 collapse, 68
    astronomical clock, 64
  dimensions, 53
  Duomo of Milan, 71
  Gothic, 51
  notable, 53
  Santa Maria del Fiore, 80
  St Peter, 76
CATIA software, 629
Catoptrica, 113
Cauchy
  stress tensor, 379
Cauchy, Augustin-Louis, 185, 311, 359, 369
  equations of motion, 379
  stress principle, 379
  stress tensor, 370
  tetrahedron, 370
  theorem, 370
Celebre catenariae problema, 355
center of gravity, 108, 109, 111, 115
  Torricelli's principle, 517
chain model, 77
Champollion, Jean-François, 21
Chartres, 116
du Châtelet, Emilie, 529
chevet, 55
China
  Hampi, 48
  Khajuraho, 48
Chumash Painted Cave, 701
Châtelet, EmilieDu Châtelet, Emilie, 197
Cicero, 111
cipher, 198
civil engineer, 390
Ciência e religião (separação), 93
Clapeyron, Benoît, 403
classical orders, 129
classification
  Greek, 42
Clausius, 378, 380
Clausius-Duhem inequality, 381
Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 242, 411
Clootcrans, 501, 526
Clough, Ray W., 438, 447
Codex, 120
  Madrid, 228
Cogito, ergo sum, 146
Coleman, Bernard, 378, 386

CÓPIA PARA REVISÃO

Collegium Experimentale Sive Curiosum, 166
column
buckling, 192, 271
Comité Européen du Béton, 591
Commentari Academia Petropolitanae, 171
Compagnie des Établissements Eiffel, 585
computation, advent of, 431
computational
mechanician, 391
methods, 431
conchoid, 82
Concinnitas, 556
concrete, 560
Condoglia marble, 73
Conhecimento é poder., 93
conic sections, 112
Conon of Samos, 110
Consagra, P., 700
Consagra, Pietro, 699
conservation
laws, 378
mass, 359, 378
of motion, 146
constitutive
relations, 359, 372, 397
theory, 382, 393
constraints
inequality, 537
unilateral, 537
continuity equation, 378
continuum mechanics, 186, 196, 271, 360, 388
general formulation, 360
mathematical foundations, 359
modern, 391
synthesis, 396
coordinate
system
zodiac, 15
transformation, 440
Copernicus, Nicolaus, 94, 138
Corpo de Ponts e ChaussÉes, 179, 182
Corrao, L., 707
Corrao, Ludovico, 699
Coulomb, Charles-Augustin de, 175, 236, 367, 369, 455
Courant, Richard, 444
Cramer, Gabriel, 354
creep, 392
Cretto, Grande, 698
Cross, Hardy, 414
crystal lattices, 385
Cueva de la Serpiente, 701
Culmann, Carl, 587
Culmann, Karl, 188
cuneiform, 13, 14, 19
Yale Babylonian Collection 7289, 13, 15
Curator of Experiments, 150
Curie family, 164
Curva transcendental, 275
curvatura, 273
Curvatura Laminae Elasticae, 166, 355
Curvatura raios em diaphanis non uniformibus*Curvatura raios em diaphanis non uniformibus*, 355
curvature, 251, 272, 311
Bernoulli, Jakob, 258
Bernoulli, Johann, 256
Kästner, 261
Leibniz, 255
Newton, 253
Oresme, 252
cycloid, 272

d'Alembert, Jean le Rond, 183, 312
principle, 529, 532
da Vinci, Leonardo, 117, 222, 227, 276, 497, 565
Architect, 122
Engineer, 121
notebooks, 119
Vitruvian Man, 565
dams
finite element analysis, 449

CÓPIA PARA REVISÃO

stress analysis, 432
Darcy, Henry, 455
De Architectura, 46, 112, 548
De Beghinselen der Weeghconst, 139
De Honnecourt, V., 88
De Humani Corporis Fabrica, 95
De Linea em quam flexile se pondera proprio curvat*De Linea em quam flexile se pondere proprio curvat*, 355
De Lucchi, M., 707
De motu corporum in gyrum, 158
De motu gravium naturaliter descententium et proiectorum, 142, 517
De Planorum Aequilibiis (Arquimedes), 488
De ratione ponderis, 494
De Re Aedificatoria*De Re Aedificatoria*, 117, 555
De Revolutionibus Orbium Coelestium, 138, 143
deductive reasoning, 110
deformation, 383
consistent, 408
Degrau Reckoner, 162
della Porta, Giovanni Battista, 114
Della Scienza Meccanica, 142
delta wing problem, 436
density measurement, 115
Descartes, René, 93, 146, 272, 276, 489, 510
detrusion, 240
Di giro em giro, 81
Dialogo sopra I devido massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano, 143
Diferencial
Cálculo, 169
differential
equations, 274
diffusion, 454
dimensional analysis, 145
Dioptra, 113
Diplom-Ingenieur, 390
Dirac, P., 653, 667, 672, 696, 708
Dirac, Paul, 540
Discorsi (Galileo), 504
Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & Eu me movimenti locali, 140, 144
Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali, 355
Discours de la méthode, 146
Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences, 223
displacement
method, 410, 436
dissipation inequality, 381
Diálogo sobre os dois principais sistemas mundiais, 223
dome, 112
Arab-Islamic, 38
Dositheus of Pelusium, 110
Dreyfuss, Henry, 569
Dugas, René, 195
Duhem, Pierre, 378, 380
Durer
Melencolia, 24
dynamic, 142, 148
analysis, 449
temporal discretization, 434

E pur si muove, 143
earth pressure, 189
earthquake, 15
mythology, 702
earthquake-resistant design
earliest Western, 697
Ebisu, 654
Echidna, 669, 670
École
Ponts et Chaussées, 100, 181, 187, 206, 366, 389
ÉcoleGenie de Mezieres*Génie de Mézières*, 100

CÓPIA PARA REVISÃO

ÉcolePolitécnica*Politécnica*, 178, 179, 185, 206, 366, 389
Egypt, 28
  hypostyle hall, 28
  Imhotep, 28
  Karnak temple, 28
  mastaba, 28
Egyptians, 15, 19
Eiffel, Gustave, 583
Einstein, Albert
  on the Modulor, 569
elastic
  body, 390
  curve, 174
  energy, 302
  hypothesis, 340
  resistance, 335
elastician, 391
elasticidade, 180
élasticité, 389
elasticity, 190, 195, 280, 388
  continuum theory, 359
  molecular theory, 359
  paradigm shift, 360
  theory, 191, 194, 390
electrical conduction, 454
Elementa Physicae, 225
Elementa super demonstraçãoem ponderam, 494
Os Elementos, 18, 110, 272
elephant, cosmic, 671
Elixir of Life, 159
ellipse, 112
elliptic
  functions, 325
  integrals, 280, 321
Elzevir, 100, 144
elásticoa, 166, 169, 251, 279
elásticoa- Nove espécies, 321, 323
Empedocles, 484
empirical
  design, 116
  method, 137
Empirismo moderno, 93
Enceladus, 666
Encyclopédie, 100, 184
energy
  balance, 359, 378, 380
  Bernoulli's usage, 526
  methods, 393, 397
  minimization, 312
  principles, 360
engineer, 388
  etymology, 23
engineering
  education, 206, 377
  practical, 189
Enlightenment, 100, 168
Enlil, 481
Ensaios na história da teoria das estruturas: Em honra de Jacques Heyman, 10
entropy production, 381
equilibrium, 115, 174
  condition, 140
  equations, 372
Equilíbrio dos Aviões*No Equilíbrio dos Aviões*, 40
Erasmus program, 171
Eratosthenes, 110
Ergonomics, 569
Escher, M., 270
Escolástica medieval, 93
Especimen alterum calculi diferencialis em dimetienda espirali logaritmica, loxodromis naturarum, & Areis triangulorum sphaericorum, 291
Espécime alterum calculi diferencialis*Espécime alterum calculi diferencialis*, 355
Essai sur les machines en général (Carnot), 538
Essai sur une aplicação des rÈgles de maximis et minimis À quelques problÈmes de

CÓPIA PARA REVISÃO

Statique Relatifs ùma arquitetura, 236
Estética e Tecnologia em Construção*Estética e Tecnologia em Construção*, 593
Euclid, 91, 110, 115, 272
Euclid of Megara, 110
Eudemus of Pergamum, 111
Euler, Leonhard, 155, 170, 174, 244, 271, 310, 338
  Genuina principia, 349
  Methodus inveniendi, 312, 354
Euler-Bernoulli beam theory, 340
Euler-Lagrange equation, 297, 313, 537
Evolute/involute, 263
Evolutione describitur, 260
Exercício Anatômico de Motu Cordis et Sanguinis em Animalibus, 95
experimental
  mechanics, 142
extrados, 57

fatigue, 392
fault
  strike-slip, 701
Fermat's principle, 305
Fermat, Pierre de, 273
ferrocement, 595
ferrocemento, 595
Festigkeitslehre, 390
Festival da colheita de Basileia, 292
field theory, 392
filament, 223
finite difference method, 431
  mesh discretization, 433
finite element, 328, 393, 442
  generalization, 454
Firmitas*Firmitas, utilitas, venustas*, 554
Firmitas*Firmitas*, 553
first principles, 360
five percent, 632
five points of a new architecture, 566
flexibility
  matrix, 420
  method, 191, 408, 441
flexural
  rigidity, 326, 340
fluid mechanics, 454
Fluxos, 158, 162, 273
flying buttresses, 56, 62, 116
folio, 120
force, 111, 161, 174, 477
  centrifugal, 148
  equilibrium, 139
  flow, 592
  impressed, 496, 499, 522
  innate, 492, 521
  method, 408, 436, 441
  parallelogram, 499, 500, 522, 530, 533
  parallelogram of, 139
  path, 112
  polygon, 189, 391
  system, 140
  transmission, 114
  versus stiffness method, 453
form
  finding, 609
  follows function, 580, 631
Fourier, Joseph, 366, 455, 537
fourth-order differential equation, 311
fracture mechanics, 393
frame-indifference, 393
free body diagram, 232
French school, 360
  achievements, 396
friction, 487
fulcrum, 236
functional, 299, 312
functionalism, 566
fundamental theorem, 159, 203
funicular polygon, 189
Funicularia, 279
Fédération Internationale de la Précontraine, 591
Föppl, August, 393

CÓPIA PARA REVISÃO

gaiola, 691
galenic theory, 95
Galerkin method, 443
  finite element interpretation, 443
Galerkin, Boris, 443
Galilei, Galileo, 96, 140, 141, 222, 276, 352, 369, 504
Gallagher, Richard H., 452
Gandhi, M.K., 672
Gaudi, Antoni, 611
Gauss, Carl Friedrich, 434
Gauss–Seidel iteration, 434
Gautier, Hubert, 130
Gehry, Frank, 629
generalized coordinates, 534
Genuina principia, 271
Genuina principia doctrinae de statu aequilibiri, 356
geomechanics, 456
Geometria Deutsch, 71
geometric motion (Carnot), 538
geometry, 38, 71, 110, 250
  angles, 15
  operative, 570
  seked, 30, 33
  triangles, 15
Germain, Sophie, 197
Gesamtkunstwerk, 74
Gibellina, 697, 707
di Giorgio Martini, Francesco, 565
Girard, Albert, 235
Goldberg, Joseph Ely, 416
Golden
  rule of mechanics, 505
  theorem, 258
graphical
  methods, 61, 129
  statics, 587
Gravitas, 487, 499
Gravitas secundum situm, 494, 526
gravity
  specific, 115
Greece
  Archimedis, 40
  Parthenon, 41
  Peripatetic school, 39
  Phidias, 41
  trabeated, 41
Greeks, 16, 22
Green, George, 186, 359, 384
Gregotti, Vittorio, 699
gualandrino, 84
Guggenheim Museum Bilbao, 630
Guidoboni, Emanuela, 697

habilidades de pensamento, 42
Hagia Sophia, 697
Hamilton's principle, 309
Hamilton, William, 480
hand calculation, 431
hanging basket, 222
harmony, 556
Harun al-Rashid, 90
Harvey, William, 95
Haydn, J., 706
heaviness, 487
heliocentrism, 94, 142
Hennebique, François, 597
Hero of Alexandria, 113
Hesiod, 665
Heyman, Jacques, 61, 66
Hieron II, 110
Hipparchis, 30
Historia et Origo Calculi Diferencialis, 273
history
  big picture
    historically, 8
    thematically, 7
  coverage approach, 7
  why, 6
*História*Força de materiais*força de materiais*, 10
*História*Força de materiais*resistência dos materiais*, 194
*História*Mecânica*Mecânica*, 10, 195, 196

CÓPIA PARA REVISÃO

História da Força dos Materiais*História da Força dos Materiais*, 194
História da Teoria da Elasticidade*História da Teoria da Elasticidade*, 194
História da Teoria das Estruturas, 10
Homer, 665
de Honnecourt, Villard, 71, 74, 116, 564, 616
Hooke's law
  generalized, 386, 392
Hooke, Robert, 98, 150, 388, 455
Horação, 148
Horologium Oscillatório, 148
house arrest, 143
Hrennikoff, Alexander, 443
Hungary, 116
Huygens' Principle, 149
Huygens, Christiaan, 147, 148, 162, 264, 271, 278, 348, 511
hydraulic systems, 113
hydrodynamics, 169
hydrostatics, 111, 115
hyperbola, 112
hyperelasticity, 360, 384
  significance, 397

I Ching, 16
IBM 701, 448
IBM 704, 448, 449
Ibn al-Haytham, 114
Ibn-Sinna, 493
Imhotep, 28
impetus, 492
inclination, 492
inclined plane, 139, 506
incorporeal, 492
indeterminate structures, 398
India
  Iron Pillar of Delhi, 48
  stepwells, 48
inductive reasoning, 137
inertia, 487
infinito
  ∞, 617
influence lines, 191, 419
ingénieur
  17th-18th century, 389
  militaire, 389
  ponts et chaussées, 389
Inquisição, 143
Instituições de físico, 529
Institution of Civil Engineers, 390
Instituto Eduardo Torroja, 591
integro-differential equation, 339
intellectual history, 89
internal energy, 380
Intrados, 57
Introductio em analysin infinitorum, 172, 273
Irons, Bruce M., 456
Islamic Golden Age, 91
Isler, Heinz, 613
ISMES, 597
isoparametric elements, 456
isoperimetric problem, 308, 311
isostatic lines, 595
isotropic materials, 386
isotropy, 385
iterative methods, 434

Jacobovici, S., 664
Jacquier, François, 76
Japan
  Himeji, 48
  shinbashira, 48
Japanese aesthetics, 556
Jerónimo, 694
John Hancock Center, 604
Johnson, K., 476
Jordanus de Nemore, 494
Joséphe, 694
Jung, C. G., 710

Kali Yuga, 671
Kaname-ishi, 654
Kannazuki, 654
Kant, I., 689, 694

CÓPIA PARA REVISÃO

karma, 482, 671
Kashima Shrine, 678
Kepler, 158
  Johannes, 31, 94, 507
  laws, 94
Kepler, Johannes, 115
Khan, Fazlur, 604
Khayyam, Omar, 115
Kimmelman, Michael, 637
kinematics, 195
Kirchhoff, Gustav, 311, 455
Kitab Mizan al-Hikma, 115
Kleist, H. von, 692, 694
Koechlin, Maurice, 626
Kossakovsky, V., 707
Kozac Collection, 664
Kron, Gabriel, 435
Kästner, Abraham, 261

l'Hôpital, Guillaume de, 305
La Construction la plus avantageuse des digues, 238
La Géométrie, 146
La Hire, Philippe de, 389
La Science des Ingénieurs, 389
Laboratório de pesquisa, 118
Lagrange
  Joseph-Louis, 184, 275, 311, 366, 368, 533
  multipliers, 536
Lagrangian, 537
Lambot, Joseph-Louis, 597
lamina, 316
Lamé constants, 386, 397
Lamé, Gabriel, 366, 375
land art, 698
Laon, 116
lateral load resistance, 604
LaTeX, 473
Latim encriptado, 152
lattice analogy, 443
Le Corbusier, 565
  Modulor, 568
  red and blue series, 568
Le Meccaniche, 96
LeçOns données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'aplication de la mécanique à L'établissement des constructions et des machines, 179
League of Nations, 588
least action principle, 308
left-handedness, 118
Lehrbuch der Mechanik, 190
Lei inversa da atração, 159
Leibniz, G., 162, 163, 255, 271, 273, 349, 519
Leibniz, G.W., 672, 689
As leis, 485
Letter to a craftsman, 290
lever, 108, 109, 113
  law of, 111
Lever law
  Archimedes, 488
Liber Abaci, 16
Libera, Adalberto, 643
Lieberkuhn, C.G., 692
light
  Huygens' Principle, 149
lightness, 487
Ligorio, Pirro, 696
limit analysis, 393
line of thrust, 54
linha neutra, 179
Linteria, 279
Llunji, Miloš, 645
load
  distribution, 112, 120
loads
  moving, 419
local details, 70
Longitudinal Challenge, 148, 150
Love, Augustus Edward Hough, 390
loxodrome, 81
lunar eclipse, 113
Lyceum, 109

CÓPIA PARA REVISÃO

Macedon, 109
MacNeal, Richard H., 449
Madrilenian rationalism, 591
Mahabharata, 671
Maillart, Robert, 587
major disputes, 205
Manderla, Heinrich, 411
Um manual de mecânica aplicada, 189
Marcellus, 111
Mariotte, Edme, 369
Marmontel, J.-F., 692
mastaba, 28
master mason, 116
material
  behavior, 115, 196, 382
  failure, 195
  frame indifference, 383
  strength, 141
  symmetry, 359, 383, 385, 393
Mathematica, 471
mathematical
  modeling, 138
  notation, 174, 275
  physics, 360
mathematicians
  Aryabhata, 17
  classical
    Al-Biruni, 16
    Al-Khwarizmi, 16
    Archimedes, 17
    Aristarchus, 15
    Brahmagupta, 14, 16
    Euclid, 18
    Euler, 17
    Fibonacci, 16
    Hipparchus, 15
    Leibniz, 16
    Ptolemy, 15
    Sacrobosco, 16
    Thales of Miletus, 15
  Descartes, 146
  Euler, 170
  Fathers Boscovich, 76
  Huygens, 147
  Jones, W., 17
  Lambert, J.H., 17
  Le Seur, 76
  Leibniz, 161
  Lindemann, F., 17
  Madhava, 17
  Newton, I., 17
mathematics, 92
  Euler's identity, 18
  Fibonacci numbers, 18
  Golden Ratio, 13, 18, 41
  Leibniz–Gregory series, 17
  mechanics, 39
  Pythagorean triples, 14
  quadrature of the circle, 17
  Rhind Papyrus, 17
  superior highly composite number, 14
mathematization, 178, 185, 205
MATLAB, 471
matrix
  historical development, 420
  partitioning, 440
  structural analysis, 434
Maxwell's reciprocal theorem, 193
Maxwell, James Clerk, 192, 404, 436, 455, 620
Mayan
  Chichen Itza, 27
  Tikal, 27
Maçonaria, 71
measurement
  braccia, 73
  byzantine foot, 571
  cubit, 30, 33
  earth circumference, 91
  historical units, 575
  seked, 29, 30
  Système international d'unités, 16
  Tlacxitl, 33
Measurement*Pied de roi*, 572

CÓPIA PARA REVISÃO

Meaux, 116
*mÉcanique*Analítica*Analítica*, 185, 312, 368, 533
*mÉcanique*Aplique-se*Apliquée*, 389
*mÉcanique*Rationalelle*Rainelle*, 389
Le meccaniche, 505
Mechanica, sive motus scientia analyticale exposita, 171
mechanical
  advantage, 108, 113
  engineer, 390
Mechanical advantage, 505
mechanician, 388
mechanics
  general, 389
  human body, 120
  impact, 114
  lever, 40, 47
  materials, 388
  rational, 166
  solid, 390
  solids, 388
  theoretical, 189
mechanistic worldview, 147
Medici, 142
Meditação CLXX, 355
Meiji government, 680
membrane structures, 613
Mencke, Otto, 286
Mendini, Alessandro, 699
Menelaus of Alexandria, 115
Menn, Christian, 602, 630
Mersenne, Marin, 232, 512
Merv, 115
mesh refinement, 456
Mesoamerica
  aztec, 26
  cosmological narratives, 702
Mesopotamia, 13
  Etemenanki, 26
  Ziggurats, 25
Messina disaster, 707
Messina: Cidade sem memória?, 707
Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, 159, 253
Methodus inveniendi lineas curvas*Methodus inveniendi lineas curvas*, 171, 312, 356
Methodus universalis determinandae curvaturae fili, 356
Metrica, 114
Mezzogiorno, 697
Michael, Archangel, 669
Michell
  Anthony, 621
  structures, 622
  truss, 621
Micrografia, 98
middle third rule, 241
Mignot, Jean, 75
military engineering schools, 100
Millau Viaduct, 640
mirror writing, 118
Missa Et Ecce terrae motus, 706
Mo Jing, 108
modular construction, 599
Mohist, 47
Mohr's
  circle, 191, 372
  theorems, 405
  unit load method, 191
Mohr, Otto, 190, 372, 405, 436
Mohr-Coulomb criterion, 191
molecular theory, 360
moment, 111
  activity (Carnot), 538
  curvature relationship, 340
  distribution, 414, 463
  three-moment equation, 397
momentum
  balance, 359, 378, 379
  balance (angular), 380
  conservation, 146
Monge, Gaspard, 366

CÓPIA PARA REVISÃO

Monier, Joseph, 597
monoclinic symmetry, 385
morphogenesis, 609
Morra Graphische Statik*Morra Graphische Statik*, 188
Morra neueren Methodeen der Festigkeitslehre, 407
Moseley, Henry, 191
motion, 174, 487
  impetus, 477
  pendulum, 148, 264
Mozi, 108
Mucalinda, 672
Muhammad, Prophet, 675
multiphysics analysis, 456
Museion (Alexandria), 111, 113
Muslim ibn al-Hajjaj, 675
Musmeci, Sergio, 614
van Musschenbroek, Peter, 98, 225
Mémoire sur les lois du mouvement des corps solides, 180
Müller-Breslau
  Heinrich, 407
  principle, 419

nagas, 673
Nahui Ollin, 671
Namazu, 654
NASTRAN, 454
natural philosopher, 388
natural philosophy, 92, 483
Naucrates, 112
Navier, Claude Louis, 179, 359, 374, 403
  bridge, 180
Nero, 113
Nervi, Pier Luigi, 593
Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza s'essa non passa per le matemmatiche dimostrazioni, 75
Neufert, Ernst, 569
Neugebauer, Otto, 113
neutral axis, 229
Newmark's method, 451
Newmark, Nathan M., 451
Newton
  Isaac, 97, 156, 161, 253, 521
  laws, 161
  mechanics, 360
  third law, 159
Nht, 481
Nile River, 114
Noether, Emmy, 198
Noll, Walter, 383, 386, 391
nonlinear analysis, 449
Nordenson, Guy, 637
Norfork Dam, 449
Norinaga, Motoori, 679
Nouguier, Émile, 626
Nouvelle Mécanique ou Statique, 524, 526
Novum Organum, 137
Nullius em verba, 98
number systems
  binary, 13, 16
  decimal, 13, 14, 16
  duodecimal, 13–16
  Hindu-Arabic numerals, 16
  sexagesimal, 13–16
number theory, 174
Nur, A., 664

objectivity principle, 359, 383
observation, 114
Opera Omnia, 167
operator
  variation, 329
optimization, 310, 339
Opus spicatum, 81
Oresme, 92, 252, 496
Orla reta e bússola, 272
orthotropic materials, 385
Otto, Frei, 613

Pacific Northwest
  earthquake mythology, 702
Padua, 142

CÓPIA PARA REVISÃO

Paixão de acordo com St. John, 706
Paixão De acordo com St. Matthew, 706
Paladino, Mimmo, 699
Palazzetto dello Sport, 594
Palazzo dello Sport, 594
Pali Canon, 672
Palladio, 110
Palladio, Andrea, 128, 558, 565
Pamphylia, 111
pandemic
  architecture during, 637
Pangloss, 693
Pannini, G.P., 216
Papiro*Plimpton 322*, 13
papyrus
  Moscow, 21, 29
  Rhind, 21, 29
parabola, 112
parallelogram of velocities, 109
Parent, Antoine, 236, 369
parinirvana, 672
partes minúcias*partes minúcias*, 15
partial differential equation, 454
Pascal, Blaise, 149
Paul III, 144
Paul, Saint, 662
Pearson, Karl, 432
Pedra da Mulher Grávida, 707
pendulum, 148
  motion, 264
Perga, 111
Pergamum, 111
Peripatetic school, 39, 109, 478
perpetual motion, 116
Perret, A., 588
Persia
  Persepolis, 35, 38
  qanat, 37
Petrarch, 42
phenomenological approach, 360
Phidias (astronomer), 110
Philip, Apostle, 669
Philoponus, 492
philosopher's stone, 159
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 92, 151, 158, 161, 264, 521
Phoenicians, 13, 22
Phoronomy, 533
photoelasticity, 597
Physicae experimentales*Físicos experimentais*, 356
physical model, 77
Picardy, 116
pinnacle, 54, 58
planetary motion, 94
plastic limit analysis, 61
plasticity, 392
Plato, 485
Pliny the Elder, 113
Plotinus, 491
plágio, 159
pneumatic devices, 113
Pneumatica, 113
Poisson's ratio, 359
  experimental refutation, 396
Poisson, Siméon, 177
Poisson, Siméon, 311, 366, 373
Poleni, 77
polymath, 357
  Al-Biruni, 16
  Eratosthenes, 110
  Galileo, 144
  Hooke, 98
  Leibniz, 162
  Mersenne, 147
Pombal, Marquis of, 690
Ponte dell'Accademia, 563
Poseidon, 665
Posidonius, 490
Positional gravity, 494
postulate, 110
potential energy, 316
potential-based formulation, 360
pralaya, 671

CÓPIA PARA REVISÃO

Prandtl, Ludwig, 393
prefabrication, 598
Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement (Carnot), 538
Principia Philosophiae (Descartes)-Hyperpage, 146, 232
principle
  continuity, 539
  virtual work, 407, 477, 505, 507, 526
  virtual work Torricelli, 518
Princípio de Alembert, 184
Os Princípios Mecânicos de Engenharia e Arquitetura, 191
Problema funicular, 355
Problema novum, 355
Problemas Mecânicos, 39, 109, 113, 478, 488
Professor Lucasiano, 157
progettista, 580
Progettista, 608
proportion, 556
  geometric tracing, 570
  systems, 558
Provando e riprovando, 97
Przemieniecki, J. S., 453
Ptolemy, 91
pulley, 109, 113
Puranas, 671
Purini, Franco, 699
pyramid
  Giza, 28
  saqqara, 28
  Templo Mayor, 27
Pythagorean triangle, 576
Python, 472
Pêndulo cicloidal, 148

quadpartite, 54
Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura, 293
Quadrivium, 42
quantity of matter, 495
Quaroni, Ludovico, 699
Quasimodo, S., 695, 696
quaternião, 480
Eu Quattro Libri dell'Architetura, 46, 128, 558
Quimistry, 159
Quinto Acuto, 81

Racconto storico della vita di Galileu, 141
radius of curvature, 318
Ramberg–Osgood equation, 450
Rankine, William, 136, 189
Raphael
  School of Athens, 12
Rapport et Mémoire sur les Ponts Suspendus, 181
rational mechanics, 389
Rayleigh, Lord (John William Strutt), 443
Rayleigh–Ritz method, 443
Razém y ser de los tipos estrutura, 590
reciprocal
  diagrams, 192
  theorem, 404
Reformation, 144
Regola delli cinque ordini d'architetura*Regola delli cinque ordini d'architetura*, 129
Reims, 116
reinforced concrete, 598
reinterment, 144
Renaissance
  architectural treatises, 555
reversible process, 539
revolution
  anatomical, 95
Richardson
  extrapolation, 433
  method, 433
Richardson, Lewis Fry, 432, 433
rigid body, 114
Ritter, Wilhelm, 587
Ritz, Walther, 443
Robertson, Leslie, 635
Romanesque, 52

CÓPIA PARA REVISÃO

Rome, 144
  Colosseum, 44
  Pantheon, 44
Roriczer, Matthias, 71
rose, 646
rotational motion, 148
Rousseau, J.-J., 672, 689, 694
Royal Society, 98
résistance des matériaux, 390

Saarinen, Eero, 612
Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento, 97
Sagrada Famiglia, 80
Sagrada Família, 611
Sagredo, 143
Saint-Venant's principle, 188
Saint-Venant, Adhémar, 187, 241, 242, 366, 375
Salginatobel bridge, 588
Salviati, 143
Sanjar, Sultan, 115
Santa Maria del Fiore, 79
Santa Ynez Mountains, 701
SAP (Structural Analysis Program), 449
Sarnath, 672
scaling
  laws, 141
  proportion, 46
scholastic method, 93
school of Athens, 41
science, 92
Scientia est unum et ars est aliud, 75
Scientific
  Progresso, 107
scientific
  method, 140
  revolution, 92
scientists
  classical
    Archimedes, 40
    Aryabhata, 48
    Mozi, 47
    Shastra, 48
    Zhang Heng, 47
  Imhotep, 28
Scienza o arte del costruire*Scienza o arte del costruire?*, 593
screw, 113, 506
Sears Tower (Willis Tower), 604
Seidel, Philipp Ludwig von, 434
seismic activity
  cultural responses to, 701
Seljuk Empire, 115
Seneca, 113
Serlio, Sebastiano, 128
serpent
  as seismic metaphor, 702
  horned, Baja California, 701
Serra, Richard, 630
Seven Bridges of Königsberg, 174
sexpartite, 54
Shaddai, 482
Shakespeare, 646
Shakespeare, W., 692, 696
Shatapatha Brahmana, 671
shell structures, 590
  hyperbolic, 591
  hyperbolic paraboloid, 628
Shesha, 671
Shibusa, 556
Shinbashira, 48
Sicily, 697
Sidereus Nuncius, 142
Sierra de San Francisco, 701
Silas, 662
simple machines, 113, 507
Simplicio, 143
sisiutl, 702
Sistema Thayer, 206
size effect, 145
Skidmore, Owings & Merrill, 604, 638
slide rule, 463
slope-deflection method, 412

CÓPIA PARA REVISÃO

Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras, 142
Snell's law, 308
Sobre o cálculo do equilíbrio e Rigidez de Pórticos, 404
Sociedade Real, 157
solidity, 232
Solutio problematis catenarii, 355
Solutio problematis de invenienda curva, 356
Solutio problematis funicularii, 355
Southwell, Richard Vynne, 417
sphere and cylinder, 111
Spina di pesce, 81
Spinoza, B., 682
springs, 153
St. Petersburg, 171
stability, 169, 174, 190
  floating bodies, 111
  theory, 392
statically indeterminate structures, 403
statics, 108, 111, 139, 195, 499
  Archimedis, 40
  graphical, 188
Stevin, Simon, 114, 139, 277, 500
stiffness
  global matrix, 441
  matrix, 420, 440
  method, 410, 411, 441
Stoicism, 491
Stokes, George Gabriel, 390, 455
straightedge and compass, 272
strain, 194, 196, 225
  displacement relations, 372
  energy, 309, 315, 359
strength, 222
  of materials, 119, 190, 195, 390
stress, 194, 196, 228
  concentration, 188
  concept of, 369
  pre-history, 369
  principal, 186, 191, 371, 380
  resultants, 350
  tensor, 186, 359, 370
    Cauchy, 392
    importance, 397
    symmetry, 371, 380
  transformation, 191
structural
  analysis, 360, 396
  analyst, 391
  architecture, 645
  art, 642
  behavior, 117
  clarity, 558
  elegance, 599
  experimentation, 580
  expression, 599
  failures, 182
  forms, 598
  intuition, 592
  morphogenesis, 609
  necessity, 627
  optimization, 174, 593, 622
  stability, 195
  theory, 396
structural engineering
  etymology, 401
Studia humanitatis, 42
substructuring, 435
successive over-relaxation (SOR), 434
Sur la force des colonnes, 356
Sur une Aplicação de RèGles de maximis et minimis à Quelques problèMes de Statique Relatifs à Arquitetura, 176
symmetry
  condition, 380
  group, 385
sympathy, 490, 491
Syracuse, 110
system integration, 70

Tagore, R., 672
Takemikazuchi-no-kami, 679
Takemikazuchi-no-kami, 654
tall building design, 604

CÓPIA PARA REVISÃO

Tangency, 272
tangent, 273
Technische Hochschulen, 390
telescópio, 142
Ten Books on Architecture, 45
tension, 285
Teorema Egregium, 262
ThéOrie des machines simples, 176
Theorie der Elasticitño fester KÖrper, 242, 411
thermal conduction, 454
Thermes, Laura, 699
thermodynamics
  consistency, 360, 383
  first law, 380
  laws, 378
  restrictions, 359, 393
  restrictions on constitutive relations, 386
  second law, 381
thin concrete forms, 590
Thomson, Lord Kelvin, 378, 380, 390
three moment equation, 403
three-hinged arch, 587
thrust line, 112
Tibet, 673
time integration
  finite difference, 434
timekeeping
  calendar, 14
    Republican, 16
  time, 15, 16
Timoshenko, Stephen, 194, 390
Todhunter, Isaac, 194, 432
topology optimization, 622
Torre de Pisa, 140
A Torre e a Ponte, 642
Torricelli, Evangelista, 516
Torroja, Eduardo, 590
torsion, 187, 239
Torsão, 176
tortoise, cosmic, 671
tracery, 116
Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum, 252
traction vector, 370, 379
TraitÉ des ponts, 179
Traité de Dynamique, 184, 479, 527
Traite des ponts, 130
Traité de l'équilibre des licores, 149
transverse isotropy, 385
Tribologia, 176
triclinic symmetry, 385
triforium, 55
Trivium, 42
Truesdell, Clifford, 196, 378, 391
Trump, Donald, 143
truss
  analysis, 188
trust but verify, 647
von Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, 281
tubular structure, 604
Turner, M. Jonathan, 438
Tutte l'opere d'architetura, 128
tychonic system, 94

U.S. Army Corps of Engineers, 449
Ungers, Oswald Mathias, 699
Unidadeé D'Habitation, 568
university transformation, 93
untouchability, 672
urban planning, 44
Urbano VIIIUrbano VIII (Papa), 143
UT Pendet contínuo flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum, 78, 153
UT tensio, sic vis, 234
utilitas, 553

Vaastu Shastra, 48
Vajrayana, 673
Varaha, 671
variational
  calculus, 339
  formulation, 169

CÓPIA PARA REVISÃO

methods, 163, 310
principles, 309, 316, 360, 393
Varignon
Pierre, 245, 479, 524, 526
theorem, 527
Vaucelles, 116
vault, 112
ribbed, 58
vector, 189, 501
mechanics, 139
vectorial, 219, 424
velaria, 279
Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano, 72
venustas, 553
Verga, G., 695
Vermeer, J., 430
Verrocchio, Andrea, 118
Vers une Arquitetura, 565
Vesica Piscis, 82
Victoria Amazonica, 597
Vignola, Giacomo Barozzi da, 129
Viollet-le-Duc, Eugène, 52, 60, 78, 581
Virlogeux, Michel, 640
virtual work, 140
Virtus*virtus*, 491
Vis insita, 521
Vis viva, 163, 311, 520, 521, 527, 532, 539
Vis viva*Vis viva controvérsia*, 520
viscoelasticity, 393
Vishnu, 671
Vitruvian triad, 553
Vitruvius, 8, 45, 74, 112, 547, 564
Voigt, Woldemar, 385
Voltaire, 672, 689, 693, 694, 696
vortex theory, 147
voussoir, 54
Vérité, Auguste-Lucien, 64

Wallis, John, 516, 519
Warhol, A., 704
water-powered saw, 116
wedge, 109, 113
weight
specific, 115
weighted residuals, 443
West Point, 206
wheel and axle, 113
Williot-Mohr diagram, 191
Wilson, Edward L., 448
Winkler, Emil, 419
Witelo, 115
wooden architecture, 48
work
Carnot's moment of activity, 538
World Trade Center, 635
Wright,Frank Lloyd, 587
Wright-Patterson Conference (1965), 452
writing
abjad, 22
acrophonic principle, 22
alphabet, 13, 22
Arabic alphabet, 22
Brahmic scripts, 23
Chinese characters, 20
clay tokens, 19
Demotic, 21
Epic of Gilgamesh, 19
Hammurabi, 19
Hebrew alphabet, 22
Hieratic, 21
hieroglyphs, 13, 19
Ishango bone, 18
Latin alphabet, 22
Lebombo bone, 18
Phoenician alphabet, 22
phono-semantic compounds, 20
Proto-Sinaitic, 22
Rosetta Stone, 21
tally sticks, 18
vowels, 22
wrought iron construction, 584

yin-yang, 656
yonaoshi, 702

CÓPIA PARA REVISÃO

Yonaoshi, 654, 656
Young, Thomas, 155, 239
yugas, 671

Zarzuela Hippodrome, 591
Zienkiewicz, Olgierd C., 455

+, div , ∞, 253

Índice Chemicus, 160
Índice Librorum Prohibitorum, 143
Ópera geométricaa, 516
Óptimas, 97

CÓPIA PARA REVISÃO

Partes II–IV

Parte II

Introdução (Fundamentos; Métodos Analíticos)

Parte III

Intermediário; Métodos Numéricos

Parte IV

Avançado; Não Linear & Outros Tópicos

Os apêndices seguem a Parte IV

CÓPIA PARA REVISÃO

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Sumário: Partes II–IV (Análise)

Sumário: Partes II–IV (Análise) 777

Lista de Figuras: Partes II–IV (Análise) 814

Lista de Tabelas: Partes II–IV (Análise) 832

Lista de Exemplos: Partes II–IV (Análise) 837

Lista de Pontos-Chave: Partes II–IV (Análise) 844

17 Introdução 847
- 17.1 O quadro geral . . . 847
  - 17.1.1 Arquitetura . . . 848
  - 17.1.2 Engenharia estrutural . . . 849
    - 17.1.2.1 Projeto estrutural . . . 849
    - 17.1.2.2 Análise . . . 851
    - 17.1.2.3 Avaliação de segurança . . . 852
  - 17.1.3 Disciplinas integradas em análise estrutural . . . 852
- 17.2 Elementos: Primário esforços internos . . . 853
- 17.3 Carregar elementos de transferência . . . 853
- 17.4 Tipos de estrutura . . . 854
- 17.5 Transformação de ferramentas de engenharia . . . 858
- 17.6 Cursos de engenharia estrutural . . . 860

18 Carregar 861
- 18.1 Introdução . . . 862
- 18.2 Classificação de cargas . . . 862
  - 18.2.1 Vertical . . . 862
  - 18.2.2 Lateral . . . 863
    - 18.2.2.1 Vento . . . 863
    - 18.2.2.2 Sísmico . . . 867
  - 18.2.3 Hidrostático e terra . . . 869
    - 18.2.3.1 Ex 18.1: Carga Hidrostática . . . 869
  - 18.2.4 Carga de impacto . . . 870
  - 18.2.5 Secundário . . . 871
  - 18.2.6 Térmico . . . 872

CÓPIA PARA REVISÃO

18.2.6.1 Ex 18.2: Expansão térmica/tensão . . . 874
18.3 Considerações . . . 874
18.3.1 Cargas projetadas . . . 874
18.3.2 Colocação de carga . . . 875
18.3.3 Combinações de carga . . . 875
18.3.4 Carregar caminho . . . 877
18.3.5 Áreas tributárias . . . 880
18.3.5.1 Ex 18.3: Áreas tributárias . . . 881
18.3.6 Resposta estrutural . . . 882

19 Reações **885**
19.1 Introdução . . . 886
19.1.1 Tipos de suportes . . . 886
19.1.2 Equilíbrio . . . 887
19.1.3 Equações das condições . . . 889
19.1.4 Determinação estática . . . 889
19.1.5 Instabilidade geométrica . . . 891
19.1.6 Diagramas de corpo livre . . . 891
19.2 Exemplos . . . 892
19.2.1 Ex 19.1: Carga hidrostática . . . 892
19.2.2 Ex 19.2: Transferência de carga . . . 893
19.2.3 Ex 19.3: Biapoiado viga . . . 894
19.2.4 Ex 19.4: Carga parabólica . . . 894
19.2.5 Ex 19.5: Três vãos . . . 895
19.2.6 Ex 19.6: Três dobradiças . . . 896
19.2.7 Ex 19.7: Suportes inclinados . . . 898
19.2.8 Ex 19.8: Estrutura da grade . . . 899
19.2.9 Ex 19.9: Equilíbrio do avião . . . 900
19.2.10 Ex 19.10: Barcaça Jumbo . . . 901
19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilíbrio de um corpo flutuante (prova hidrostática) 904
19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; Nervi . . . 906

20 Treliças **910**
20.1 Introdução . . . 910
20.1.1 Suposições . . . 911
20.1.2 Assinar convenção . . . 912
20.1.3 Determinação e estabilidade . . . 912
20.2 Métodos de análise . . . 914
20.2.1 Método das juntas . . . 914
20.2.1.1 Ex 20.1: Treliça análise; método de articulações . . . 915
20.2.1.2 Ex 20.2: 3D treliça . . . 918
20.3 Método das seções . . . 921
20.3.1 Método das seções . . . 921

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

20.3.2 Ex 20.3: Método das seções . . . 923
20.4 Junta/matriz . . . 923
20.4.1 Ex 20.4: Simples treliça; método de articulação/matriz . . . 925
20.4.2 Ex 20.5: Complexo treliça; método de articulação/matriz . . . 927

21 Esforços internos em Membros Flexurais **931**
21.1 Introdução . . . 932
21.1.1 Abordagem de engenharia: De tensões a esforços internos . . . 932
21.1.2 Esforços internos para 2d/3d reta/curvada vigas . . . 933
21.1.3 Por que isso é importante . . . 935
21.1.4 Convenções de sinais de design . . . 936
21.2 Carregar, cisalhamento, relações momento . . . 937
21.2.1 Forma diferencial . . . 937
21.2.2 Forma integral . . . 938
21.3 Exemplos . . . 939
21.3.1 Ex 21.1: Viga com carga inclinada . . . 940
21.3.2 Ex 21.2: Inclinado pórtico . . . 941
21.3.3 Ex 21.3: Pórtico com carga hidrostática . . . 944
21.3.4 Ex 21.4: Carga linearmente variável . . . 946
21.3.5 Ex 21.5: Pórtico; Exemplo de telhado inclinado . . . 947
21.3.6 Ex 21.6: Reciproca pórtico . . . 948
21.3.7 Ex 21.7: 3D pórtico . . . 952

22 Deflexões; Curva elástica **956**
22.1 Introdução . . . 956
22.2 Equação diferencial . . . 957
22.2.1 Ex 22.1: Integração dupla . . . 958
22.2.2 Ex 22.2: Deflexão máxima . . . 959
22.2.3 Ex 22.3: Forma de esqui ideal . . . 960
22.2.4 Ex 22.4: Flutuando viga . . . 961
22.3 Curvatura . . . 964
22.3.1 Ex 22.5: Roda de bicicleta . . . 966
22.3.2 Ex 22.6: Rigidez de uma mola helicoidal . . . 972
22.3.3 Curvatura-deformação relação . . . 973
22.3.3.1 Ex 22.7: Interruptor bimetálico . . . 974
22.3.4 Método da área de Curvatura (área do momento) . . . 975
22.3.4.1 Assinar convenção . . . 975
22.3.4.2 Teorema da área de primeira curvatura . . . 976
22.3.4.3 Teorema da segunda área de curvatura . . . 977
22.3.4.3.1 Ex 22.8: Área de curva, cantilevered viga . . . 978
22.3.4.3.2 Ex 22.9: Curvação do momento, biapoiado viga . . . 978
22.3.4.4 Deflexão máxima . . . 979
22.3.4.4.1 Ex 22.10: Deflexão máxima . . . 980

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

22.3.4.5 Relação de curvatura da temperatura . . . 981
22.3.4.5.1 Ex 22.11: Pórtico submetido a carregamento de temperatura . . . 981
22.3.4.6 Ex 22.12: Comprimento de plástico . . . 984
22.3.4.7 Peso elástico/conjugado . . . 985
22.3.4.7.1 Ex 22.13: Conjugar viga; carga concentrada . . . 986
22.3.4.7.2 Ex 22.14: Conjugar viga; variável I . . . 987

23 Cisalhamento e Torsão **990**
23.1 Cisalhamento deformação (transverso) . . . 990
23.1.1 Cisalhamento, elemento infinitesimal . . . 991
23.1.1.1 Ex 23.1: Deflexão cantilevered viga . . . 991
23.1.2 Cisalhamento distribuição; $\tau(y)$ . . . 992
23.1.3 Coeficiente Cisalhamento . . . 993
23.1.4 Cisalhamento fator . . . 993
23.1.5 Cisalhamento deformação v_s, Timoshenko . . . 995
23.2 Deformações torcionais . . . 995
23.2.1 S^t Venante ou Torção Uniforme . . . 996
23.2.2 Vlasov ou torção não uniforme . . . 997
23.2.2.1 Ex 23.2: Torção não uniforme de uma seção I . . . 1003

24 Complementar Trabalho virtual **1006**
24.1 Introdução . . . 1007
24.2 Derivação simplificada do princípio da complementaridade trabalho virtual 1007
24.2.1 Derivação . . . 1007
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti Reciproca Theorem . . . 1010
24.2.3 Externo trabalho virtual $\delta\overline{W}^*$ . . . 1011
24.2.4 Interno trabalho virtual $\delta\overline{U}^*$ . . . 1011
24.3 Exemplos . . . 1013
24.3.1 Ex 24.1: Viga . . . 1013
24.3.2 Ex 24.2: Pórtico; Deflexões . . . 1014
24.3.3 Ex 24.3: Pórtico, rotação . . . 1015
24.3.4 Ex 24.4: Suporte flexível . . . 1016
24.3.5 Ex 24.5: Cantilever suportado por cabo . . . 1018
24.3.6 Ex 24.6: Deformação torsional e flexural . . . 1019
24.3.7 Ex 24.7: Flexural e cisalhamento deformações em uma viga . . . 1021
24.3.8 Ex 24.8: Efeitos térmicos em uma viga . . . 1022
24.3.9 Ex 24.9: Pipeline . . . 1023
24.3.10 Ex 24.10: Treliça; Simples . . . 1024
24.3.11 Ex 24.11: Treliça; complexo . . . 1025
24.3.12 Ex 24.12: Treliça com cambero inicial . . . 1026
24.3.13 Ex 24.13: Treliça com secundário tensões . . . 1027
24.3.14 Ex 24.14: Anel circular . . . 1029

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

24.3.15Ex 24.15: Primavera 1031

25 Método **1035**
25.1 Introdução 1036
25.2 O método força/flexibilidade 1041
25.2.1 Exemplos 1043
25.2.1.1 Ex 25.1: Viga com haste de gravata 1043
25.2.1.2 Ex 25.2: Análise do edifício de aço pórtico 1044
25.2.1.3 Ex 25.3: Treliça, uma força redundante 1048
25.2.1.4 Ex 25.4: Treliça: Duas forças redundantes 1050
25.2.1.5 Ex 25.5: Treliça: Carga térmica 1053
25.2.1.6 Ex 25.6: Primavera apoiada viga 1054
25.2.1.7 Ex 25.7: Queen post 1056
25.2.1.8 Ex 25.8: Matriz de flexibilidade; Curvado viga 1059
25.3 Equações de três momentos 1062
25.3.1 Ex 25.9: Continuando viga 1065
25.3.2 Ex 25.10: Continuando viga 1066

26 Forças em termos de Deslocamentos **1069**
26.1 Introdução 1069
26.1.1 Assinar convenção 1070
26.1.2 Métodos de análise 1070
26.2 Deformações axiais 1071
26.3 Flexão 1072
26.3.1 Equação diferencial 1072
26.3.2 Forças finais nodais para as iniciais 1075
26.3.3 Forças equivalentes nodais para elementos de flexão 1076
26.3.3.1 Uniformemente cargas distribuídas 1076
26.3.3.2 Cargas concentradas 1077

27 Rigidez à Mão **1079**
27.1 Introdução 1079
27.2 Deflexão de inclinação; Solução direta 1080
27.2.1 Exemplos 1082
27.2.1.1 Ex 27.1: Cantilevered viga 1082
27.2.1.2 Ex 27.2: Continuando viga 1083
27.2.1.3 Ex 27.3: Duas-espanheiras viga 1084
27.2.1.4 Ex 27.4: Duas voltas, desvio inicial 1085
27.2.1.5 Ex 27.5: Pórtico 1087
27.2.1.6 Ex 27.6: Caixa de bueiro 1089
27.3 Distribuição do momento 1090
27.3.1 Introdução 1091
27.3.1.1 Ex 27.7: Continuando viga 1094
27.4 Deflexão de inclinação; Distribuição do momento; Gauss-Seidel 1096

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

27.4.1 Ex 27.8: Deflexão de inclinação/distribuição do momento/Gauss-Seide 1096

28 Linhas de influência **1099**
28.1 Introdução . . . 1099
28.2 Procedimento . . . 1100
28.2.1 Ex 28.1: Linhas de influência para um biapoiado viga . . . 1100
28.2.2 Ex 28.2: Biapoiado viga com overhangs . . . 1103
28.3 MüPrincípio de Iler-Breslau . . . 1103
28.3.1 Derivação . . . 1103
28.3.1.1 Ex 28.3: MüIler-Breslau; Cisalhamento Linha de influência . . . 1104
28.3.1.2 Ex 28.4: MüIler-Breslau; Momento Linha de influência . . . 1105

29 Análise elástica de segunda ordem **1106**
29.1 Introdução . . . 1107
29.2 Grande deslocamentos, estável . . . 1107
29.2.1 Ex 29.1: Instabilidade geométrica . . . 1107
29.2.2 Ex 29.2: Impacto da carga axial na deformação flexural . . . 1109
29.2.3 Ex 29.3: Grande deflexão do cantilever viga . . . 1112
29.3 Pequeno deslocamentos, instável . . . 1116
29.3.1 Barras rígidas discretas . . . 1116
29.3.1.1 Sistema de barra única . . . 1116
29.3.1.1.1 Ex 29.4: Flambagem de duas dobradiças rígidas pilar 1118
29.3.2 Sistemas contínuos . . . 1120
29.3.2.1 Euler flambagem cargas . . . 1120
29.3.2.1.1 Ex 29.5: Flambagem de dobradiças pilar . . . 1122
29.3.2.1.2 Ex 29.6: Flambagem de fixo-fixado pilar . . . 1123
29.3.2.1.3 Ex 29.7: Flambagem de torção fixa pilar . . . 1125
29.3.2.1.4 Ex 29.8: Pilar com suportes elásticos . . . 1126
29.3.2.1.5 Ex 29.9: Constrangido flambagem . . . 1128
29.3.2.1.6 Ex 29.10: Torre de água . . . 1129
29.3.2.2 Analogia com vibração livre . . . 1132
29.3.2.3 Fatores de comprimento efetivos K . . . 1133
29.3.2.4 Inelástico pilares . . . 1136

30 Estruturas de cabos **1139**
30.1 Introdução . . . 1139
30.2 Cargas concentradas . . . 1140
30.2.1 Ex 30.1: Cabo funicular . . . 1141
30.2.2 Ex 30.2: Cabo funicular inclinado . . . 1143
30.2.3 Ex 30.3: Gôndola bi-cabo . . . 1144
30.3 Cargas distribuídas; . . . 1144
30.3.1 Equação de equilíbrio . . . 1145
30.3.2 qdx; Carga lateral; Parabola . . . 1146
30.3.2.1 Geometria . . . 1146

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

30.3.2.2 Esforços internos 1151
30.3.2.3 Esticamento elástico 1151
30.3.2.4 Axial equivalente rigidez 1153
30.3.2.5 Caso especial: acorde horizontal 1156
30.3.2.5.1 Ex 30.4: Geometria inclinada do cabo 1156
30.3.2.5.2 Ex 30.5: Forças de cabo inclinadas 1157
30.3.2.5.3 Ex 30.6: Torre com cara 1158
30.3.2.5.4 Ex 30.7: Ponte de suspensão 1160
30.3.2.5.5 Ex 30.8: Cabo inextensível; temperatura 1162
30.3.2.5.6 Ex 30.9: Cabo extenso: flecha 1162
30.3.2.5.7 Ex 30.10: Cabo extenso. térmica 1163
30.3.2.5.8 Ex 30.11: Cabo extenso. Prostress 1163
30.3.3 $q\mathrm{d}s$; catenária 1164
30.3.3.1 Geometria 1164
30.3.3.2 Forças 1166
30.3.3.3 Acorde de catenária inclinado 1166
30.3.3.3.1 Ex 30.12: Enfie-se em um cabo inclinado 1168
30.3.3.3.2 Ex 30.13: Suporte a cabo de ônibus 1168
30.3.4 Comparação entre a parábola e as soluções baseadas em catenárias 1171
30.3.4.1 Ex 30.14: Catenária vs parábola 1171

31 Análise dos Arcos de Alvenaria (Voussoir) 1174
31.1 Introdução 1174
31.2 Algumas notas históricas 1175
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1175
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1176
31.2.3 Casal; 1670-1744 1180
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1181
31.2.5 Coulomb;1736-1806 1182
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1183
31.2.7 Soluções elásticas 1184
31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884 1184
31.2.7.2 Winkler; 1835-1888 1184
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1186
31.2.8.1 Ex 31.1: Carga falha de um voussoir; O método de Pippard 1188
31.3 Generalização do método de Pippard; Smars 1192
31.4 Algoritmo 1196
31.5 Considerações finais 1199
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1199
31.5.2 Linha de empurrões 1200
31.5.3 Linha de impulso e pippard 1201

32 Arcos e Curvos Vigas 1204

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

32.1 Arcos circulares 1206
32.1.1 Três arcos circulares dobradiças 1206
32.1.1.1 Teorema de Eddy 1207
32.1.1.2 Exemplos 1207
32.1.1.2.1 Ex 32.1: Três arcos dobradiças; carga concentrada; analítico 1207
32.1.1.2.2 Ex 32.2: Três arcos dobradiças; carga concentrada 1209
32.1.1.2.3 Ex 32.3: Três arcos dobradiças; Carga uniforme . 1210
32.1.2 Dois arcos circulares dobrados 1213
32.1.3 Arco circular sem dobras 1213
32.1.3.1 Ex 32.4: Arco circular sem dobras 1214
32.1.4 Solução generalizada 1221
32.1.4.1 Derivação 1221
32.1.4.1.1 Centro de gravidade 1221
32.1.4.1.2 Derivação 1223
32.1.4.1.3 Verificação 1227
32.1.5 Soluções baseadas em matemática 1228
32.2 Forma ideal de um arco 1228
32.2.1 Ex 32.5: Arco perfeito 1229
32.3 Arcos parabólicos 1229
32.3.1 Exemplos 1230
32.3.1.1 Ex 32.6: Arco parabólico de três torções 1230
32.3.1.2 Ex 32.7: Dois arcos parabólicos de corte transversal 1230
32.3.2 Arco fixo com carga simétrica 1234
32.3.2.1 Ex 32.8: Arco parabólico sem dobra 1236
32.3.3 Base de acordo e efeitos de temperatura 1239
32.3.3.1 Ex 32.9: Carga térmica no arco parabólico 1242
32.4 Curvado vigas 1243
32.4.1 Viga de arco 1243
32.4.1.1 Ex 32.10: Viga de arco 1243
32.4.2 Helicoidal 1246
32.4.2.1 Geometria 1246
32.4.2.2 Equilíbrio 1248
32.4.2.2.1 Ex 32.11: Arco helicoidal; carga concentrada . . . 1249

33 Pratos **1252**
33.1 Teoria das placas grossas: REISSNER-Mindlin 1253
33.1.1 Relações cinemáticas 1253
33.1.2 Relações constitutivas 1255
33.1.3 Equilíbrio 1256
33.2 Teoria da placa fina: Kirchhoff 1257
33.2.0.1 Ex 33.1: Idealização de chapa fina contra grossa 1258
33.2.1 Relações fundamentais 1258

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

33.2.2 Equação diferencial . . . 1259
33.2.3 Tensões . . . 1260
33.2.3.1 Ex 33.2: Recuperando tensões dos resultados do momento da placa . . . 1261
33.2.3.2 Ex 33.3: Placa quadrada sob pressão uniforme . . . 1262
33.2.3.3 Ex 33.4: Sensibilidade de deflexão da placa para espessura . . . 1263
33.2.4 Placas circulares . . . 1263
33.2.4.1 Ex 33.5: Placa circular apertada sob pressão uniforme . . . 1267
33.2.5 Formulação variada . . . 1268
33.3 Resumo . . . 1269

34 Cascas **1271**
34.1 Teoria geral . . . 1272
34.1.1 Definições . . . 1272
34.1.2 Suposições . . . 1274
34.1.3 Forçar relações deslocamento . . . 1276
34.1.3.1 Equilíbrio . . . 1278
34.1.3.2 Conjunto completo de equações de equilíbrio . . . 1284
34.1.3.3 Compatibilidade . . . 1284
34.1.3.4 Resumo . . . 1288
34.1.3.5 Tensão-deformação-forças . . . 1289
34.1.3.5.1 Tensão-Deformação . . . 1289
34.1.3.5.2 Esforços . . . 1290
34.1.3.6 Expressões finais (forças em termos de deslocamentos) . . . 1291
34.1.4 Simplificações . . . 1293
34.1.4.1 Raso cascas . . . 1293
34.1.4.1.1 Suposições . . . 1293
34.1.4.1.2 Aplicação de suposições . . . 1294
34.1.4.1.3 Equação profunda viga . . . 1295
34.1.4.1.4 Laje equação . . . 1296
34.1.4.1.5 Equação para raso cascas . . . 1297
34.1.4.2 Teoria da membrana . . . 1297
34.1.4.2.1 Suposições . . . 1298
34.1.4.2.2 Teoria . . . 1298
34.1.4.2.3 Classificação . . . 1298
34.1.4.2.4 Especialização . . . 1299
34.2 Análise de um único barril (circular cilíndrico casca) . . . 1302
34.2.1 Introdução . . . 1302
34.2.2 Teoria da membrana . . . 1304
34.2.2.1 Tensão resultados . . . 1304
34.2.2.1.1 Erros . . . 1307
34.2.2.1.2 Correção . . . 1308

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

34.2.2.2 Deslocamentos 1309
34.2.3 Teoria desleixada 1312
34.2.3.1 Equações de equilíbrio 1312
34.2.3.2 Formulação 1313
34.2.3.2.1 Solução especial para carga uniforme 1316
34.2.3.2.2 Comparação: membrana *V.S* Raso Casca 1317
34.2.3.2.3 Ex 34.1: Comparação da membrana & Raso casca 1320
34.2.3.3 Solução geral 1320
34.2.3.3.1 Deslocamento w 1321
34.2.3.3.2 M_ϕ 1323
34.2.3.3.3 Outros termos; Procedimento 1324
34.3 Estaticamente indeterminado cascas 1327
34.3.1 Borda viga 1328
34.3.1.1 Borda vertical vigas 1328
34.3.1.2 Borda horizontal vigas 1331
34.3.2 Borda pré-stressada viga 1331
34.3.2.1 Ex 34.2: Desenho de cilíndrico casca 1333
34.3.3 MATLAB®código e exemplo numérico 1344

35 Dinâmica I **1346**
35.1 Fundações filosóficas 1347
35.2 Quando é que uma análise dinâmica se guarda 1348
35.3 Princípios fundamentais 1349
35.3.1 Princípio de d'Alembert e equilíbrio dinâmico 1349
35.3.2 O oscilador de liberdade individual 1349
35.3.3 Frequência natural e Ponto 1350
35.3.3.1 Ex 35.1: Computação ω_n, T_n, e f_n para um sistema SDOF . . 1351
35.3.4 Amortecimento e a proporção Amortecimento 1351
35.4 Vibração Livre 1353
35.4.1 Vibração livre 1353
35.4.2 Vibração Livre Arrasada 1354
35.4.3 Decremento logarítmico 1354
35.4.3.1 Ex 35.2: Estimando amortecimento de decremento logarítmico 1355
35.5 Vibração Forçada: Excitação harmônica 1356
35.5.1 Resposta harmônica sem danos 1356
35.5.2 Resposta harmônica abafada 1357
35.5.2.1 Ex 35.3: Resposta harmônica: amplificação e fase 1358
35.6 Resposta à carga arbitrária 1359
35.6.1 Resposta de impulso e Impulso da Unidade 1359
35.6.1.1 Ex 35.4: Resposta de impulso da unidade de um sistema SDOF amortecido 1359
35.6.2 O Duhamel Integral 1360

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

35.6.2.1 Ex 35.5: Carregamento de passo súbito: A amplificação dinâmica Fator de 2 . . . 1361
35.6.2.2 Ex 35.6: Carga de pulso retangular e espectro de choque . . . 1362
35.6.3 Análise de Fourier e Resposta à Frequência . . . 1364
35.6.3.1 Ex 35.7: Resposta de frequência a uma máquina periódica Força com dois harmônicos . . . 1365
35.7 Apoio Excitação e Resposta ao Terremoto . . . 1366
35.7.1 Equação de movimento para a Excitação Base . . . 1366
35.7.2 Espectros de resposta . . . 1367
35.7.2.1 Ex 35.8: Desenho sísmico de uma única história usando um espectro de resposta . . . 1368
35.8 Sistemas com múltiplos graus de liberdade . . . 1370
35.8.1 Equações de movimento . . . 1370
35.8.2 Vibração Livre: Modos Naturais . . . 1370
35.8.3 Análise Modal . . . 1371
35.8.4 Participação modal na resposta ao terremoto . . . 1372
35.8.4.1 Ex 35.9: Análise modal de um edifício 3-DOF sob carregamento sísmico . . . 1372
35.9 Sistemas contínuos . . . 1374
35.9.1 Vibração Axial de Barras . . . 1374
35.9.2 Vibração transversal de Vigas . . . 1375
35.9.2.1 Ex 35.10: Frequência natural de uma ponte de aço e Verificação de ressonância dos pedestres . . . 1376
35.10 Dinâmica não linear . . . 1377
35.10.1 Fontes de não linearidade . . . 1377
35.10.2 Histerese e dissipação de energia . . . 1378
35.10.2.1 Ex 35.11: Viscoso equivalente amortecimento de um bilinear Histerese loop . . . 1379
35.10.3 Dutilidade e Design de Capacidade . . . 1380
35.10.3.1 Ex 35.12: Dutilidade demanda e redução de força para um concreto armado pórtico . . . 1380
35.11 Considerações Práticas . . . 1382
35.11.1 Amortecimento em Estruturas Real . . . 1382
35.11.2 Interação estrutura-solo . . . 1382
35.11.3 Ajustados Dampers de Massa . . . 1382
35.11.4 Ex 35.13: Projeto de um amortecedor de massa sintonizado para um edifício alto . . . 1383
35.11.5 Isolamento Base . . . 1384
35.11.6 Ex 35.14: Projeto de um prédio hospitalar isolado . . . 1384
35.12 Considerações finais . . . 1386
35.12.1 Cuidado com os métodos de um praticante . . . 1386
35.12.2 Nota de encerramento: Limites da teoria linear . . . 1386

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

36 Elementos de Projeto estrutural **1388**
36.1 Introdução . . . 1389
36.1.1 Análise e desenho; Um processo iterativo . . . 1389
36.1.2 Segurança . . . 1390
36.2 Desenho permitido tensão (asd) . . . 1391
36.2.1 Ex 36.1: Asd; flexura . . . 1392
36.3 Projeto do fator de carga e resistência (LRFD) . . . 1392
36.4 Exemplos de códigos de projeto baseados em lrfd . . . 1395
36.4.1 Aplicação: Resistência plástica das seções R/C viga . . . 1396
36.4.1.1 Ex 36.2: Força máxima. Revisão . . . 1401
36.4.1.2 Ex 36.3: Força máxima. Design I . . . 1401
36.4.1.3 Ex 36.4: Força máxima. Design ii . . . 1402
36.4.1.4 Ex 36.5: Análise exata . . . 1403
36.4.2 Aplicação: Resistência plástica de R/C pilares . . . 1405
36.4.2.1 Ex 36.6: R/C pilar, *c* Conhecido . . . 1410
36.4.2.2 Ex 36.7: R/C pilar, *e* Conhecido . . . 1411
36.4.3 Concreto protendido . . . 1414
36.4.3.1 Ex 36.8: Estudo de caso: Noz ponte pista . . . 1415
36.5 Engenharia baseada em desempenho (PBE) . . . 1419

37 Desenho de um arco estaticamente indeterminado **1421**
37.1 Ex 37.1: Desenho de um arco estaticamente indeterminado . . . 1421
37.2 Ex 37.2: A temperatura muda em um arco . . . 1428

38 Fermi Solutions (Análise aproximada) **1432**
38.1 Esforços internos . . . 1433
38.1.1 Formas defletidas & Pontos de inflexão . . . 1433
38.1.2 Momentos em termos de apoio . . . 1436
38.1.3 Analisa métodos . . . 1438
38.1.3.1 Cargas verticais . . . 1438
38.1.3.2 Cargas horizontais . . . 1442
38.1.3.2.1 Método do portal . . . 1442
38.1.3.2.1.1 Ex 38.1: Método do portal; Edifício de subida baixa . . . 1444
38.1.3.2.1.2 Ex 38.2: Solução Matlab . . . 1455
38.1.3.2.2 Método Cantilever . . . 1456
38.1.3.2.2.1 Ex 38.3: Método Cantilever; Edifício de elevação alta . . . 1457
38.2 Resposta estrutural . . . 1458
38.2.1 Subsistema de eixo . . . 1458
38.2.1.1 Ex 38.4: Subsistema de eixo . . . 1459
38.2.2 Cisalhamento parede . . . 1460
38.2.2.1 Ex 38.5: Parede de concreto cisalhamento . . . 1460

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

38.2.3 Muralha de madeira 1462
38.2.3.1 Ex 38.6: Muralha de madeira 1463
38.2.4 Deflexões laterais 1464
38.2.4.1 Parede curta 1464
38.2.4.2 Muro alto 1464
38.2.4.3 Paredes e lintel 1466
38.2.4.4 Pórticos 1467
38.2.4.4.1 Ex 38.7: Construindo deflexão transversal aproximada 1469

39 Desenhos preliminares **1473**
39.1 Ex 39.1: Aeroporto Dulles 1473
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel 1480
39.3 Ex 39.3: Magazini Generali 1488
39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington 1492
39.5 Ex 39.5: Desenho de um arco de duas voltas 1499
39.6 Ex 39.6: A temperatura muda em um arco 1507
39.7 Ex 39.7: Arco parabólico com variação secante de I 1510

40 Introdução ao Método da rigidez direta **1514**
40.1 Por que matriz análise estrutural? 1514
40.2 Idealização estrutural 1516
40.3 Assinar convenção 1518
40.4 Sistemas de coordenadas 1518
40.5 Flexibilidade *vs.* Rigidez 1519
40.6 Graus de liberdade 1520
40.7 Estático *vs.* Indeterminação cinemática 1522
40.8 Análise estrutural/mecânica; Um problema de valor limite 1523

41 Elemento Matrizes de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$ **1525**
41.1 Rigidez definição do termo 1525
41.2 Treliça elemento 1527
41.3 Viga: Euler-Bernoulli 1527
41.4 Elemento 2D pórtico (também conhecido como elemento viga-pilar) 1528
41.5 Elemento da grade 1529
41.6 Elemento 3D viga-pilar 1529
41.7 Timoshenko viga 1532
41.7.1 Deformação adicional 1532
41.7.2 Modificação do elemento matriz de rigidez 1533
41.8 Torção Vlasov 1534

42 Método; Eu, Estruturas Ortogonais **1537**
42.1 Introdução 1537
42.2 Teoria 1538

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

42.2.1 Flexibilidade revisitado . . . 1539
42.2.2 Método da rigidez direta . . . 1539
42.2.3 De elemento para estrutura . . . 1540
42.3 Exemplos . . . 1541
42.3.1 Ex 42.1: Ortogonal viga . . . 1541
42.3.2 Ex 42.2: Ortogonal pórtico . . . 1543
42.3.3 Ex 42.3: Grelha . . . 1550
42.3.4 Ex 42.4: Híbrido pórtico . . . 1554
42.3.5 Ex 42.5: Grade híbrida . . . 1558

43 Matrizes de Transformação 1563
43.1 Introdução . . . 1563
43.2 Alguma teoria . . . 1565
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ Relacionamento . . . 1565
43.2.2 Direção cossenos . . . 1565
43.3 Matrizes de transformação para elementos de estrutura . . . 1568
43.3.1 Dois casos . . . 1568
43.3.1.1 2D pórtico . . . 1568
43.3.1.2 Grelha . . . 1569
43.3.1.3 Vlasov viga . . . 1570
43.3.1.4 2D treliça . . . 1571
43.3.2 3D pórtico . . . 1571
43.3.3 Rotações Eulerianas . . . 1572
43.3.4 Torção do eixo de elementos . . . 1574
43.3.5 3D treliça . . . 1576

44 Método da rigidez direta 1578
44.1 Objetivos . . . 1578
44.2 Teoria . . . 1579
44.3 Discretização . . . 1581
44.3.1 Sem restrições vs restritas . . . 1581
44.3.2 Discretização estrutural . . . 1582
44.4 Implementação de computador . . . 1583
44.4.1 Condições de contorno, `[id]` Matriz . . . 1583
44.4.2 **LM** vetor . . . 1584
44.4.3 Assembléia global matriz de rigidez . . . 1585
44.4.4 Procedimento passo a passo . . . 1586
44.5 Exemplos . . . 1587
44.5.1 Ex 44.1: Pórtico . . . 1588
44.5.1.1 Preliminares . . . 1588
44.5.2 Ex 44.3: Treliça . . . 1598

45 Propriedades Matemáticas de Matriz de rigidez; Questões Computacionais 1602
45.1 Matrizes mal condicionadas . . . 1603

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

45.1.1 Valores próprios 1603
45.1.1.1 Interpretação física dos autovalores 1605
45.1.2 Número da condição 1608
45.1.3 Ill-conditioned matrizes de rigidez 1608
45.1.3.1 Ex 45.1: Inquilinoso 1611
45.2 Considerações numéricas 1612
45.2.1 Inversão vs decomposição 1612
45.2.2 Numeração Nodal 1612

46 Tópicos Especiais **1616**
46.1 Condensação/subestruturação 1617
46.2 Equações de estática e cinemática 1618
46.2.1 Matriz estática $\mathcal{B}$ 1618
46.2.1.1 Derivação 1618
46.2.1.2 Determinado estaticamente 1618
46.2.1.2.1 Ex 46.1: Determinar estaticamente a matriz estática 1619
46.2.1.2.2 Ex 46.2: Viga matriz estática 1620
46.2.1.3 Estaticamente indeterminado 1621
46.2.1.3.1 Ex 46.3: Estaticamente indeterminada matriz estática 1621
46.2.1.4 Identificação de forças redundantes 1623
46.2.1.4.1 Ex 46.4: Seleção de forças redundantes 1623
46.2.1.5 Instabilidade cinemática 1625
46.2.2 Cinemática matriz $\mathcal{A}$ 1626
46.2.2.1 Ex 46.5: Cinemática matriz: treliça exemplo 1627
46.2.3 Estática - cinemática matricial relacionamento 1627
46.2.3.1 Determinado estaticamente 1627
46.2.3.2 Estaticamente indeterminado 1628
46.3 Relações cinemáticas através do inverso da matriz estática 1629
46.4 Rigidez-flexibilidade relações 1630
46.4.1 De rigidez a flexibilidade 1630
46.4.1.1 Ex 46.6: Matriz de flexibilidade 1631
46.4.2 De flexibilidade a rigidez 1631
46.4.2.1 Ex 46.7: Flexibilidade para rigidez 1633
46.4.2.2 Ex 46.8: Matriz de rigidez de um elemento curvo 1634
46.4.3 Duplaidade entre os métodos flexibilidade e rigidez 1636
46.5 Abordagem de transformação congruente para **K** 1636
46.5.1 Ex 46.9: Transformação congruente 1638
46.5.2 Ex 46.10: Transformação congruente de um pórtico 1640
46.6 Elementos especiais 1642
46.6.1 Deslocamento rígido. 1642
46.6.2 Semi-rígido vigas 1644
46.6.3 Variável seções transversais 1650
46.7 Fontes de deriva lateral no momento 1652

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

47 Cálculo Variacional em Mecânica: O Marco Euler-Lagrange 1666
47.1 Introdução . . . 1667
47.2 Euler . . . 1667
47.2.1 Preliminares . . . 1667
47.2.2 Forma diferente de $\delta\Pi$ . . . 1669
47.2.3 Equação de Euler . . . 1670
47.2.4 $\delta\Pi$ . . . 1671
47.2.5 Observações . . . 1672
47.2.6 Condições de contorno . . . 1672
47.2.6.1 Ex 47.1: Euler: Axial . . . 1674
47.2.6.2 Ex 47.2: Euler: flexura . . . 1675
47.3 Princípio da Energia Potencial Total . . . 1676
47.4 Hamilton . . . 1680
47.4.1 Dinâmico; Euler/Lagrange . . . 1680
47.4.1.1 Sistema discreto . . . 1680
47.4.1.2 Sistema de continuidade . . . 1682
47.4.2 Ex 47.3: Hamilton . . . 1684
47.5 General Hu-Washizu Princípio de Variação . . . 1687
47.6 Diagramas de Pseudo-Tonti . . . 1691
47.6.1 Princípio de D'Alembert . . . 1691
47.6.2 Equações de Hamilton . . . 1691
47.6.3 Equações de Lagrange . . . 1692

48 Princípios Variacionais e Energia em Análise estrutural 1696
48.1 Introdução . . . 1697
48.1.1 Termodinâmica . . . 1697
48.1.2 Relações básicas . . . 1698
48.1.3 Definições . . . 1699
48.1.4 Termos reais . . . 1699
48.1.5 Expressões virtuais . . . 1700
48.1.6 Observações . . . 1701
48.1.6.1 Trabalho interno versus deformação energia . . . 1701
48.1.6.2 Caminho independência do trabalho externo . . . 1702
48.1.7 Aplicações para elementos 1D . . . 1703
48.1.7.1 Energia complementar, elástico linear U^* . . . 1703
48.1.7.2 Energia, elástico linear U . . . 1704
48.1.7.3 Energia virtual complementar deformação δU^* . . . 1704
48.1.7.4 Energia virtual deformação δU . . . 1706
48.1.8 Resumo de VW e CVW . . . 1708
48.2 Aproxime-se . . . 1709
48.3 Trabalho virtual . . . 1710
48.3.1 Princípio da complementaridade trabalho virtual (PCVW) . . . 1710
48.3.1.1 Derivação . . . 1710

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

48.3.1.2 Ex 48.1: PCVW, cantilevered cônico viga 1713
48.3.2 Ex 48.2: Três arcos semi-circulares dobradiças 1714
48.3.3 Princípio de trabalho virtual (PVW) 1715
48.3.3.1 Derivação 1715
48.3.3.2 Ex 48.3: PVW, cantilever cônico 1717
48.4 Princípios da energia potencial 1719
48.4.1 Princípio da energia potencial total (PTPE) 1719
48.4.1.1 Derivação 1719
48.4.1.2 Ex 48.4: PEPT, primavera e massa 1721
48.4.1.3 Ex 48.5: PTPE; Preso viga com varieble I 1722
48.4.2 Princípio da energia potencial total complementar (PTCPE) 1723
48.5 Os teoremas de Castigliano 1723
48.5.1 Primeiro teorema 1723
48.5.1.1 Ex 48.6: Não linear elástico treliça 1725
48.5.2 Segundo teorema 1726
48.5.2.1 Ex 48.7: Castigliano 2; Cantilevered viga 1727
48.5.2.2 Ex 48.8: Castigliano 2; deflexão de um uniformemente carregado viga usando o segundo teorema de Castigliano 1728
48.5.2.3 Ex 48.9: Castigliano 2, não linear 1728
48.5.2.4 Ex 48.10: Castigliano 2, deflexão da primavera 1728
48.6 Método Rayleigh-Ritz 1729
48.6.1 Derivação 1729
48.6.1.1 Ex 48.11: Rayleigh Ritz uniformemente carregado biapoiado viga 1730
48.6.1.2 Ex 48.12: Métodos de variação 1732
48.7 Resumo 1739

49 Funções de Interpolação **1742**
49.1 Introdução 1742
49.1.1 Características de funções de forma 1742
49.1.2 Triângulo de Pascal 1743
49.1.3 Sistemas de coordenadas 1745
49.1.3.1 Cartesiano 1745
49.1.3.2 Natural 1745
49.1.3.3 Triangular 1746
49.1.4 Continuação 1750
49.2 Funções de forma 1750
49.2.1 Formulação direta 1750
49.2.1.1 Treliça elemento; linear 1750
49.2.1.2 Generalização 1751
49.2.1.3 Elemento triângulo constante deformação 1752
49.2.1.4 Elemento retangular bilinear 1753
49.2.1.5 Elemento trilinear de tijolo 1755

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

49.2.2 Funções de interpolação lagrangeanas . . . 1756
49.2.2.1 Quadrilaterais . . . 1756
49.2.2.2 Triângulos . . . 1757
49.2.2.3 Treliça elemento; Quadrático . . . 1758
49.2.2.4 Viga . . . 1759
49.2.3 Funções de interpolação hermítica . . . 1762
49.2.3.1 Viga funções de forma revisitado . . . 1763
49.2.3.2 Elementos quadrilaterais . . . 1765
49.2.3.2.1 Quadrilateral Linar (q4) . . . 1765
49.2.3.2.2 Quadráticos quadriláteros . . . 1766
49.2.3.2.2.1 Elemento de serendipidade (q8) . . . 1766
49.2.3.2.2.2 Elemento Lagrangiano (Q9) . . . 1767
49.2.3.3 Elemento variável (hierárquico) . . . 1770
49.2.3.4 Elemento triangular (t6) . . . 1772

50 Formulação de elementos lineares **1774**
50.1 Introdução . . . 1774
50.2 Elemento finito . . . 1775
50.2.1 Introdução . . . 1775
50.2.2 Deformação deslocamento relações . . . 1775
50.2.2.1 Membros do Axial . . . 1776
50.2.2.2 Membros de flexão . . . 1776
50.2.3 Virtual deslocamento e deformações . . . 1776
50.2.4 Formulação do elemento matriz de rigidez . . . 1777
50.2.5 Tensão recuperação . . . 1778
50.3 Aplicação . . . 1779
50.3.1 Treliça elemento . . . 1779
50.3.2 Elemento de flexão . . . 1779
50.4 Requisitos gerais de elementos . . . 1780
50.5 Erro de discretização e taxa de convergência . . . 1782
50.6 Caráter inferior das soluções mínimas baseadas em energia . . . 1783
50.7 Equilíbrio e compatibilidade na solução . . . 1784

51 Elementos **1786**
51.1 Introdução . . . 1787
51.2 Formulação de elementos . . . 1789
51.2.1 Elemento de barras . . . 1789
51.2.2 Quadrilateral (q4); Formulação detalhada . . . 1790
51.2.3 Elementos triangulares . . . 1794
51.2.3.1 Triângulo T3 . . . 1794
51.2.3.2 Triângulo T6 . . . 1796
51.2.4 Ex 51.1: Operadores Jacobianos . . . 1797
51.3 Integração numérica . . . 1798

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

51.3.1 Newton-Cotes 1799
51.3.2 Quadratura Gauss-legendre 1801
51.3.2.1 Lendre polinomial 1803
51.3.2.2 Quadratura Gauss-Legendre para $n = 2$ 1803
51.3.3 Regiões retangulares e prismas 1804
51.3.4 Regiões triangulares 1804
51.4 Tensão recuperação; Nodal tensões 1804
51.5 Cargas equivalentes nodais 1807
51.5.1 Carga de gravidade 1807
51.5.2 Carga de tração 1808
51.5.3 Inicial deformações/tensões; Carga térmica 1810
51.5.4 Ordem de integração 1811
51.5.4.1 Integração total 1811
51.5.4.2 Integração reduzida 1811
51.5.4.3 Seletiva integração reduzida 1813
51.6 Parasítico cisalhamento / elementos incompatíveis 1813
51.6.1 Q4, o problema 1813
51.6.2 Q6, a solução 1814
51.6.3 Qm6, mais melhorias 1815
51.7 -Dófice rotacional. 1816

52 Métodos Residuais Ponderados **1818**
52.1 Introdução 1819
52.2 Formulação geral 1819
52.2.1 Operadores diferenciais 1819
52.2.1.1 Ex 52.1: Verifique simetria e definição positiva do membro 1D axial 1820
52.2.2 Formulação residual 1820
52.3 Métodos residuais ponderados 1822
52.3.1 Método de colocação de pontos 1823
52.3.2 Método de recolocação do subdomínio 1823
52.3.3 Método dos mínimos quadrados 1823
52.3.4 Método Galerkin 1823
52.3.4.1 Ex 52.2: Vibração de cordas 1824
52.4 Aplicações do método Galerkin para problemas de elasticidade 3D 1826
52.4.1 Derivação da forma fraca 1826
52.4.2 Fe discretização 1828
52.4.2.1 Ex 52.3: Matriz de rigidez de um elemento viga 1829
52.4.2.2 Ex 52.4: Transferência de calor 1832

53 Dinâmica II **1835**
53.1 Introdução 1836
53.2 idealização para análise dinâmica 1837

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

53.2.1 Axial *vs* Flexural Rigidez 1837
53.2.2 Modelo 1838
53.2.2.1 Ex 53.1: Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral 1841
53.3 Formulação de problemas 1842
53.3.1 Formulação variada 1842
53.3.2 Representação em massa 1844
53.3.3 Amortecimento 1845
53.3.3.1 Ex 53.2: Calibrando os coeficientes de Rayleigh amortecimento para um edifício cisalhamento 1847
53.3.3.2 Ex 53.3: Base analítica: Vibração livre das condições iniciais gerais 1848
53.3.4 Técnica numérica: Métodos Euler 1849
53.3.4.1 Ex 53.4: Método Euler 1850
53.4 Discretização do tempo 1851
53.4.1 Implícito 1852
53.4.1.1 O método de Newmark 1852
53.4.1.1.1 Derivação 1852
53.4.1.1.2 Newmark β Método implícito 1853
53.4.1.2 Método Hilber-hughes-taylor 1855
53.4.2 Integração de tempo explícita 1857
53.4.2.1 Sistemas lineares 1857
53.4.2.2 Sistemas não lineares 1860
53.5 Métodos numéricos para análise dinâmica 1861
53.5.1 Método de Diferença Central 1861
53.5.2 Ex 53.5: Passo de estabilidade da diferença central 1861
53.5.3 Método Newmark-Beta 1862
53.5.4 Superposição Modal vs. Integração Direta 1862
53.6 Sistemas contínuos 1863
53.6.1 Vibração Axial de Barras 1863
53.6.1.1 Ex 53.6: Velocidade de onda e axial frequências naturais de uma haste de aço 1864
53.6.2 Vibração transversal de Vigas 1865
53.7 Dinâmica não linear 1866
53.7.1 Fontes de não linearidade 1866
53.7.2 Dutilidade e Design de Capacidade 1866
53.8 Considerações Práticas 1867
53.8.1 Amortecimento em Estruturas Real 1867
53.8.2 Interação estrutura-solo 1867
53.8.3 Ajustados Dampers de Massa 1867
53.8.4 Isolamento Base 1868
53.9 Resumo 1868

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

54 Introdução **1872**
54.1 Introdução . . . 1873
54.1.1 Fontes de não linearidades . . . 1873
54.1.2 Por que uma análise não linear . . . 1875
54.2 Tipos de análises estruturais não lineares . . . 1875
54.3 Carga incremental/deslocamento . . . 1878
54.4 Segurança . . . 1878
54.4.1 Terminologia . . . 1878
54.4.2 Segurança & Cargas . . . 1879
54.5 Códigos de design . . . 1880
54.5.1 Introdução . . . 1880
54.5.2 Evolução: Antiguidade . . . 1882
54.5.2.1 Mesopotâmia; hamurabi . . . 1882
54.5.2.2 Roman; Vitruvius . . . 1883
54.5.3 Tempos modernos . . . 1883
54.5.3.1 Design permitido, ASD . . . 1885
54.5.3.2 Resistência à carga e projeto de fatores, LRFD . . . 1885
54.5.3.3 Engenharia sísmica baseada em desempenho . . . 1886
54.5.4 Resumo . . . 1887

55 Plasticidade I; Fibras & Continuum (Para Elemento finito Análise) **1889**
55.1 Introdução . . . 1890
55.2 Condições de produção plástica . . . 1890
55.2.1 Modelos independentes de pressão hidrostática . . . 1891
55.2.2 Modelos dependentes de pressão hidrostática . . . 1893
55.3 Observações do laboratório . . . 1895
55.3.1 Metais . . . 1895
55.3.2 Concreto . . . 1896
55.4 Falhas microscópicas . . . 1896
55.4.1 Ligações químicas . . . 1896
55.4.2 Fracassados e frágeis . . . 1897
55.4.3 Deslocamento . . . 1898
55.5 Fundamentos da plasticidade . . . 1899
55.5.1 Introdução . . . 1899
55.5.2 Módulo elástico Tangent . . . 1900
55.5.2.1 Derivação generalizada . . . 1900
55.5.2.1.1 Rende-te. Modelo de endurecimento isotrópico . . . 1900
55.5.2.1.2 Regra de fluxo . . . 1900
55.5.2.1.2.1 Kuhn-Tucker condições . . . 1902
55.5.2.1.3 Condição de consistência . . . 1902
55.5.2.1.4 Módulo Tangent . . . 1902
55.5.2.2 Módulo Tangent; Engenharia . . . 1903
55.5.2.3 Ex 55.1: Módulo Tangent . . . 1904

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

56 Plasticidade II; Seções: 1908
56.1 Introdução . . . 1909
56.2 Framework teórico: Suposições e resultados-chave . . . 1909
56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$ . . . 1910
56.3.1 A partir do momento relação curvatura . . . 1912
56.3.1.1 Ex 56.1: Análise seccional não linear. analítico . . . 1912
56.3.2 Da relação entre o Tensão e o Deformação . . . 1915
56.3.2.1 Ex 56.2: Deitou-se. Aço . . . 1916
56.3.2.2 Ex 56.3: Deitou-se. Concreto/ACI . . . 1920
56.4 Curvação do momento, generalização . . . 1923
56.4.1 Abordagem analítica . . . 1923
56.4.1.1 Ex 56.4: Curvação do momento de uma seção I R/C . . . 1925
56.4.1.2 Diagrama de interação $M - N$ . . . 1930
56.4.2 Aproximação numérica . . . 1930

57 Plasticidade III; Estrutura: Rendem-se Linhas 1935
57.1 Introdução . . . 1936
57.2 Elementos lineares (vigas, pórticos) . . . 1938
57.2.1 Kinematic; Limite superior . . . 1938
57.2.1.1 Ex 57.1: Fixo viga; Carga central . . . 1941
57.2.1.2 Ex 57.2: Fixo viga; carga offset . . . 1941
57.2.1.3 Ex 57.3: Continuando viga . . . 1941
57.2.1.4 Ex 57.4: Ortogonal pórtico . . . 1942
57.2.1.5 Ex 57.5: Inclinado pórtico . . . 1943
57.2.2 Estáticos; Encaixe mais baixo . . . 1944
57.2.2.1 Ex 57.6: Cantiliver I Proped . . . 1947
57.2.2.2 Ex 57.7: Cantiliver II Propped . . . 1947
57.2.2.3 Ex 57.8: Fixado viga . . . 1948
57.2.2.4 Ex 57.9: Inclinado pórtico . . . 1949
57.3 Elementos planos (lajes) . . . 1954
57.3.1 Estáticos: Encaixe mais baixo . . . 1955
57.3.1.1 Ex 57.10: Quadrado laje . . . 1955
57.3.2 Cinemática: Limite superior . . . 1956
57.3.2.1 Ex 57.11: Rectangular laje . . . 1958
57.4 Análise do Pushover . . . 1959
57.5 Analogias entre a análise dos limites inferiores e . . . 1960
57.5.1 Análise do Pushover . . . 1960
57.5.2 Plasticidade amassada . . . 1963

58 Mecânica do dano 1967
58.1 PROPOSTA DE ESCRITÓRIO POR ChatGPT . . . 1967
58.1.1 Motivação e fundamentos físicos (~1.5 páginas) . . . 1967
58.2 Framework termodinâmico (~2 páginas) . . . 1967

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

58.3 Dano isotrópico escalar: O modelo Mazars~4 páginas) 1968
58.4 Tensão, assimetria de compressão e o efeito unilateral~2 páginas) 1968
58.5 Dano... acoplamento de plasticidade (~2 páginas) 1968
58.6 Regularização e objetividade de malha (~3 páginas) 1968
58.7 Aplicação para elementos viga e pilar (~3 páginas) 1969
58.8 Identificação do parâmetro e guia prático (~1.5 páginas) 1969
58.9 Notas bibliográficas e leitura adicional (~0,5 páginas) 1969

59 Análise não linear. Material **1970**
59.1 Raízes numéricas achadas 1971
59.1.1 Métodos Newton 1971
59.1.1.1 Introdução 1971
59.1.1.2 Série Taylor e linearização 1972
59.1.1.2.1 Ex 59.1: Método de Newton, escalar 1974
59.1.1.3 Convergência e estimativa de erro 1976
59.1.1.4 Considerações finais 1977
59.1.1.4.1 Ex 59.2: O método de Newton. vetor 1977
59.1.2 Método Secante 1978
59.1.3 Explícito 1979
59.2 Relação com mecânica estrutural; implícita 1980
59.3 Métodos de integração 1981
59.3.1 Controle de carga 1983
59.3.1.1 Método Newton-raphson/rigidez tangente 1983
59.3.1.2 Modificado Newton-Raphson 1986
59.3.1.3 Secant Newton 1986
59.3.1.4 Critérios de convergência 1988
59.3.1.5 Tabela sumária 1989
59.3.2 Deslocamento controle 1991

60 Análise não linear; Geométrico **1995**
60.1 Geométrico matriz de rigidez 1996
60.1.1 Derivação 1996
60.1.1.1 Forma fraca 1996
60.1.1.2 Deformação 1996
60.1.1.3 Energia interna deformação 1997
60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ 1998
60.1.2 Instabilidade elástica; Análise de bifurcação 1999
60.1.2.1 Ex 60.1: Pilar flambagem 2000
60.1.2.2 Ex 60.2: Pórtico flambagem; Solução Matlab 2002
60.1.2.3 Ex 60.3: Pórtico flambagem; Solução matemática 2004
60.1.2.4 Ex 60.4: Impacto da carga axial na deformação flexural . . . 2005
60.2 Análise explícita incremental 2008
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflexão do cantilever viga 2010

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

60.3 $P-\Delta$ revisitado . . . 2014
60.3.1 Ex 60.6: Flambagem carga sem $\mathbf{K}_{geom}$ . . . 2014

61 Não linear. Formulação do elemento 2018
61.1 Introdução . . . 2019
61.2 Treliça elemento . . . 2019
61.2.1 Sistema de coordenadas para o elemento 2D treliça . . . 2021
61.2.2 Determinação do Estado . . . 2022
61.3 Viga-pilar formulações de elementos . . . 2022
61.3.1 Rigidez-baseado em 2D viga-pilar elemento . . . 2023
61.3.1.1 Sistema de coordenadas no elemento 2D baseado em viga . . . 2025
61.3.1.2 Determinação do Estado . . . 2026
61.3.1.3 "Escondido" erro . . . 2030
61.3.1.4 Análise não linear usando método baseado em rigidez . . . 2030
61.4 Seção de camada/fibra . . . 2034
61.4.1 Flexibilidade método 2D viga-pilar elemento . . . 2037
61.4.1.1 Sistema de coordenadas no elemento 2D baseado em viga . . . 2041
61.4.1.2 Determinação do Estado . . . 2042
61.4.1.2.1 Sem iteração em nível de elemento . . . 2043
61.4.1.2.2 Com Newton-Raphson iterações em nível de elemento 2045
61.4.1.3 Análise não linear usando método baseado em flexibilidade 2050
61.4.1.3.1 Sem iteração em nível de elemento . . . 2050
61.4.1.3.2 Com iterações de Newton-Raphson em nível de elemento . . . 2054
61.4.2 Rigidez *vs.* flexibilidade elementos baseados . . . 2058
61.5 Formulação de elementos 2D de comprimento zero . . . 2062
61.5.1 Sistema de coordenadas em elemento 2D de comprimento zero . . . 2063
61.5.2 Determinação do estado do elemento . . . 2064
61.6 Elemento de seção de comprimento zero . . . 2066
61.6.1 Matriz de rigidez . . . 2067
61.6.2 Sistema de coordenadas . . . 2068
61.6.3 Determinação do estado do elemento . . . 2068
61.7 Integração numérica . . . 2070
61.8 Força do elemento . . . 2070

62 Modelos constitutivos para a plasticidade distribuída e lumpida 2072
62.1 Introdução . . . 2073
62.1.1 Termoelasticidade linear . . . 2074
62.1.2 Modelos heurísticos . . . 2075
62.2 Plasticidade distribuída . . . 2076
62.2.1 Modelos de aço . . . 2076
62.2.1.1 Introdução . . . 2076
62.2.1.2 Modelo bilinear com endurecimento isotrópico . . . 2077

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

62.2.1.2.1 Tensão-deformação relação . . . 2077
62.2.1.2.2 Determinação para o modelo bilinear . . . 2078
62.2.1.3 Modelo Menegotto-pinto . . . 2078
62.2.2 Modelos de concreto . . . 2087
62.2.2.1 Efeito do confinamento . . . 2087
62.2.2.2 Modelo Kent e Park modificado . . . 2088
62.2.2.2.1 Tensão-deformação relação . . . 2088
62.2.2.2.2 Determinação para modelos de kent e parque modificados . . . 2097
62.2.3 Modelo de dano anisotrópico com danos efetivos e recuperação . . . 2100
62.2.3.1 Modelo constitutivo . . . 2100
62.2.3.2 Formulação uniaxial multifibras . . . 2102
62.2.3.3 Determinação para o modelo de danos anisotrópicos . . . 2103
62.2.3.3.1 Carga de tensão: . . . 2103
62.2.3.3.2 Carregamento de compressão: . . . 2104
62.2.3.4 Modelo de dano anisotrópico com permanente deformações . . . 2111
62.2.3.4.1 Esquema numérico uniaxial . . . 2111
62.2.4 Bond-slip . . . 2114
62.2.5 Elemento de seção de comprimento zero . . . 2117
62.3 Plasticidade amassada . . . 2119
62.3.1 Comprimento de plástico . . . 2120
62.3.1.1 Potenciais localizações de rótulas plásticas . . . 2120
62.3.1.2 Deformação da curvatura ($\Delta(\phi)$) . . . 2121
62.3.1.3 Concreto armado eficaz e curvatura . . . 2122
62.3.1.4 Deformação em termos de comprimentos rótula plástica . . . 2123
62.3.1.4.1 Concreto armado . . . 2123
62.3.1.4.2 Aço . . . 2127
62.3.1.5 Ex 62.1: Rótula plástica em um aço pilar . . . 2129
62.3.2 Cisalhamento modelo de falha (estado limite material) . . . 2129
62.3.2.1 Introdução . . . 2129
62.3.2.2 Cisalhamento estado limite modelo . . . 2130
62.3.3 Modelos histeréticos de Ibarra incorporando dissipação de energia 2134
62.3.3.1 Modelos de histerese . . . 2139
62.3.3.1.1 Modelo de pico orientado . . . 2140
62.3.3.1.2 Modelo Pinching . . . 2141
62.3.3.2 Modos de degradação da força . . . 2146
62.3.3.2.1 Modo básico de degradação da força . . . 2149
62.3.3.2.2 Modo de degradação da força pós-copiação . . . 2150
62.3.3.2.3 Descarregando o modo de degradação . . . 2152
62.3.3.2.4 Recarregando aceleradamente o modo de degradação rigidez . . . 2153
62.3.3.3 Resumo . . . 2154

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

62.3.4 Modelo de Ghannoum . . . 2155
62.3.4.1 Curva de espinha dorsal . . . 2155
62.3.4.2 Comportamento cíclico . . . 2155

63 Ciência e Arte da Modelo 2159
63.1 Introdução . . . 2160
63.1.1 Elemento finito verificação de malha/análise . . . 2163
63.1.2 Conceitos de verificação e validação do modelo . . . 2163
63.2 Geração da malha . . . 2165
63.2.1 Macroelementos . . . 2166
63.2.1.1 Ex 63.1: Pilar modelagem . . . 2170
63.2.1.2 Ex 63.2: Viga modelagem . . . 2171
63.2.2 Seção transversal . . . 2171
63.2.3 "Pegue e cacete" . . . 2172
63.2.4 Considerações finais . . . 2172
63.3 Determinações dos parâmetros de deterioração . . . 2173
63.3.1 Calibração . . . 2173
63.3.1.1 Identificações de parâmetros . . . 2174
63.3.2 Banco de dados dos parâmetros de modelagem . . . 2174
63.3.2.1 Peer/Berry . . . 2174
63.3.2.1.1 Propriedades . . . 2176
63.3.2.1.2 Resumo das capacidades de flexão . . . 2178
63.3.2.1.3 Exemplo . . . 2178
63.3.2.2 Stanford/Lignos . . . 2178
63.3.2.3 UTSA/Ghannoum . . . 2182
63.3.2.4 Continuum elemento finito/Dolati . . . 2182
63.3.2.5 ACI-437-A . . . 2182

Intermezzo: Da análise para a identificação do parâmetro 2183

64 Dados e Dúvidas: Incertezas e análise de sensibilidade 2186
64.1 Introdução . . . 2187
64.2 Qualidade dos dados e fontes de dúvida . . . 2187
64.3 incerteza Quantificação e Análise . . . 2188
64.3.1 Caracterização da incerteza de entrada . . . 2188
64.3.1.1 Tipos de incertezas . . . 2189
64.3.1.2 Representação Matemática . . . 2189
64.3.2 Dependência e Amostragem Correlacionada . . . 2190
64.3.2.1 Covariância e Correlação . . . 2190
64.3.2.1.0.1 Ex 64.1: Matriz de correlação . . . 2190
64.3.2.2 Covariância espacial . . . 2191
64.3.2.3 Covariância temporal . . . 2192
64.3.2.4 Gerando amostras correlacionadas . . . 2193
64.3.3 Propagação da incerteza . . . 2193

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

64.3.3.1 Simulação de Monte Carlo (MCS) . . . 2193
64.3.3.2 Amostra de hipercubos latinos (LHS) . . . 2193
64.3.3.2.0.1 Ex 64.2: Hipercubo latino: Trabalhou como exemplo com duas variáveis . . . 2196
64.3.3.3 Alternativas aproximadas e substitutas para amostragem direta . . . 2198
64.3.3.3.1 Método de Estimativa de Pontos (PEM) . . . 2198
64.3.3.3.1.1 Ex 64.3: Exemplo do Método Estimativo de Pontos . . . 2199
64.3.3.3.2 Um de cada vez (série de Taylor-diferença finita estimativa TSFD) . . . 2199
64.3.3.3.2.1 Ex 64.4: Taylor Series Diferença finita Método Exemplo . . . 2200
64.3.3.3.3 Expansão do caos polinomial (PCE) . . . 2201
64.3.3.3.3.1 Ex 64.5: Expansão do caos polinomial . . . 2202
64.3.4 Interpretação da incerteza de saída . . . 2203
64.4 Análise de Sensibilidade . . . 2203
64.4.1 Método Morris . . . 2204
64.4.1.1 Ex 64.6: Método Morris . . . 2208
64.4.2 Índices de Sensibilidade Baseados em Variância Sóbol . . . 2209
64.4.2.1 Índices de primeira ordem . . . 2209
64.4.2.2 Interação e índices de efeito total . . . 2210
64.4.2.3 Interpretação . . . 2210
64.4.2.4 Computação e custo . . . 2210
64.4.2.5 Relação com a exibição de Morris . . . 2211
64.4.3 Comparação dos métodos de propagação e sensibilidade . . . 2211
64.4.4 Determinação de importantes variáveis aleatórias . . . 2211
64.4.4.1 Ex 64.7: Método Morris. identificação de variáveis importantes . . . 2212
64.4.5 Diagramas de Tornado . . . 2216
64.5 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro . . . 2216

65 Decisões: Método de identificação do parâmetro 2219
65.1 Identificação do parâmetro como um problema inverso . . . 2220
65.2 Aplicações e Quadro de Decisão . . . 2221
65.2.1 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro . . . 2222
65.2.2 Quadro de decisão: Qual método quando? . . . 2222
65.3 Qualidade e Robustidade dos Dados . . . 2222
65.3.1 Fontes de Contaminação de Dados . . . 2222
65.3.2 Estimação do Consenso Robusto: RANSAC . . . 2223
65.3.2.1 Algoritmo . . . 2223
65.4 O Algoritmo de Marquardt . . . 2227
65.4.1 Abordagens de modelagem e seleção de modelos . . . 2227
65.4.2 Não linear ponderado Mínimos quadrados . . . 2228

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

65.4.3 Etapa de atualização de Levenberg–Marquardt e interpretação do algoritmo . . . 2228
65.4.4 Ex 65.1: Adaptando-se a um modelo hiperbólico não linear . . . 2228
65.4.5 Escala, limites e regularização . . . 2231
65.4.6 Identificação . . . 2231
65.4.6.1 Aproximação da incerteza local . . . 2232
65.4.7 Modelo Discrepância . . . 2233
65.5 Identificação do parâmetro bayesiano . . . 2233
65.5.1 Identificação do parâmetro bayesiano: Configuração . . . 2234
65.5.2 Estimativa de MAP e estimativas de pontos . . . 2234
65.5.3 Amostragem posterior e MCMC para parâmetros . . . 2235
65.5.4 Ex 65.2: Regressão bayesiana com base quadrática e Metrópolis.. . . . 2235
65.5.5 Exemplo trabalhado: Inferência Bayesiana para parâmetros de degradação . . . 2236
65.5.6 Quando usar a identificação Bayesiana . . . 2237
65.6 O algoritmo de Marquardt na prática . . . 2237
65.6.1 Prática dos mínimos quadrados . . . 2239
65.6.1.1 Programa de Identificação do Parâmetro MATLAB: Descrição 2239
65.7 Fluxos de trabalho híbridos e melhores práticas . . . 2248
65.7.1 Calibração e validação . . . 2248
65.7.2 Aplicações estruturais . . . 2248
65.7.3 Quadro de Decisão do Fluxo de Trabalho . . . 2248
65.8 Ponte para Engenharia sísmica baseada em desempenho . . . 2249

66 Intermezzo **2253**
66.1 Limitações do projeto de fatores de carga e resistência (LRFD) . . . 2253
66.2 Por que se mudar para Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) 2254
66.3 Os Quatro Componentes de PBEE . . . 2255
66.4 Estrutura do Livro . . . 2256

67 Análise de Riscos **2257**
67.1 Introdução . . . 2258
67.2 Relacionamento de recorrência . . . 2258
67.3 Modelo de atenuação . . . 2261
67.3.1 Fundamentos . . . 2261
67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997) . . . 2262
67.3.3 Avaliação paramétrica . . . 2263
67.4 Análise de risco sísmico determinista . . . 2265
67.5 Análise de risco sísmico probabilístico . . . 2266
67.6 Hora da ocorrência . . . 2268
67.7 Curvas de perigo sísmico . . . 2268
67.8 Mapas de perigo sísmicos . . . 2270
67.9 Desagregação de riscos sísmicos . . . 2271

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

67.10 Alvo espectros de resposta . . . 2273
67.11 Simulação estocástica movimento do solo . . . 2276
67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal . . . 2277
67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) . . . 2279
67.12 Funções de excitação do tempo de perseverança . . . 2281
67.12.1 Primeira geração de ETEFs . . . 2282
67.12.2 Segunda geração de ETEFs . . . 2282
67.12.3 Terceira geração de ETEFs . . . 2284
67.12.4 Quarta geração de ETEFs . . . 2284
67.12.5 Quinta geração de ETEFs . . . 2285
67.13 Ex 67.1: Análise de riscos sísmicos . . . 2287

68 Análise de Risco Sísmico II **2292**
68.1 Introdução . . . 2293
68.2 Taxa anual de excessos . . . 2294
68.3 Curva de Perigo . . . 2295
68.4 Análise de risco sísmico da engenharia (ESRA) . . . 2296
68.4.1 Ex 68.1: Cálculos do Período de Retorno . . . 2297
68.5 Análise Probabilística de Risco Sísmico (PSHA) como SHA + ESRA . . . 2297

69 Análise estrutural **2300**
69.1 Introdução . . . 2301
69.2 Definições básicas . . . 2302
69.3 Capacidade e demanda . . . 2303
69.3.1 Exigir relações de capacidade . . . 2303
69.3.2 Métodos de estimativa da demanda . . . 2304
69.3.3 Princípios do projeto de capacidade . . . 2305
69.4 Métodos de análise sísmica . . . 2306
69.4.1 Análise de Push-Over (POA) . . . 2306
69.4.1.1 Ex 69.1: Exemplo de curva da demanda . . . 2312
69.4.1.2 Ex 69.2: Análise de push-over; Exemplo prático . . . 2313
69.4.2 Análise Dinâmica Incremental (IDA) . . . 2343
69.4.3 Análise de Múltiplas Listras (MSA) . . . 2345
69.4.4 Análise de Nuvem (CLA) . . . 2348
69.4.5 Análise do Tempo de Endurance (ETA) . . . 2349
69.4.6 Resumo . . . 2351
69.5 O que vem a seguir . . . 2353

70 Análise de Danos **2355**
70.1 Introdução . . . 2356
70.2 Estados limites . . . 2357
70.2.1 Hierarquia de Estados limites . . . 2358
70.2.2 Quadro Probabilístico . . . 2358
70.2.3 Implementação no Framework PBEE . . . 2359

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

70.2.4 Calibração e validação . . . 2359
70.2.5 Considerações Multi-Objetivo . . . 2359
70.2.6 Conexão com índices de danos . . . 2360
70.3 Índices de danos . . . 2360
70.3.1 Índices de danos e critérios de desempenho . . . 2360
70.3.2 Transição para avaliação de danos probabilísticos . . . 2362
70.3.3 Representação Probabilística de Danos . . . 2363
70.3.4 Métricas de Danos e Parâmetros da Demanda de Engenharia (PED) 2363
70.3.5 Região de Confiança Em Avaliação de Danos . . . 2364
70.3.6 métricas de danos quantitativos . . . 2364
70.4 Desempenhos . . . 2366
70.4.1 Estrutura de Engenharia Baseada em Desempenho . . . 2366
70.4.2 Níveis de Desempenho e Critérios de Aceitação . . . 2368
70.4.3 Integrando Estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho 2369
70.5 Transição para Curvas de fragilidade e avaliação de risco . . . 2371

71 Análise de perdas **2373**

72 Avaliação de Risco Probabilística (⊇ PBEE)[23] **2376**
72.1 Novos Paradigmas: Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) 2377
72.1.1 Limitações de carga e fator de resistência projeto (LRFD) . . . 2377
72.1.2 Parte I: Objetivos explícitos de desempenho . . . 2378
72.1.2.1 Método . . . 2378
72.1.2.2 Limitações de PBEE-1 . . . 2378
72.1.2.3 Design vs. Análise . . . 2380
72.1.3 Parte II: Quantificação direta das consequências funcionais e econômicas 2380
72.1.3.1 Introdução . . . 2380
72.1.3.2 Quadro geral . . . 2381
72.1.3.3 Diferenças entre o PBEE 1 e o PBEE 2 . . . 2383
72.1.4 Procedimento para implementação do PBEE . . . 2385
72.2 Da resposta aos danos: Curvas de fragilidade . . . 2386
72.2.1 Fundamentos e Definições . . . 2387
72.2.2 Desenvolvendo Curvas de fragilidade . . . 2388
72.2.3 Representações matemáticas . . . 2388
72.2.4 Função contínua *vs.* Matriz Discreta . . . 2389
72.3 Papel no Framework PBEE . . . 2391
72.4 Ex 72.1: Exemplo completo de PBEE . . . 2392
72.5 Marcos históricos e documentos fundamentais . . . 2397

APÊNDICES

Parte 1: Materiais Fundamentais de Referência

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

A Unidades **2400**
A.1 Si unidades . . . 2400
A.2 Prefixos métricos e multiplicadores . . . 2401
A.3 Unidades & fatores de conversão . . . 2401
A.4 Resumo da força, comprimento, trabalho e tensão em várias unidades métrica . . . 2402
A.5 Conversão de quantidades físicas da métrica para unidades imperiais . . . 2402

B Cargas, Design Empírico Baseado **2403**
B.1 Carregamentos mortos . . . 2404
B.2 O vento está carregado . . . 2404
B.2.1 Ex B.1: Carga do vento . . . 2406
B.3 Terremotos . . . 2407
B.3.1 Ex B.2: Terramoto, carga em um Pórtico . . . 2416
B.3.2 Ex B.3: Terremoto em um prédio alto . . . 2417
B.4 Cargas da ponte . . . 2418
B.5 Combinações de carga . . . 2419
B.6 Redução de carga ao vivo . . . 2420
B.6.1 Ex B.4: Redução de carga ao vivo I . . . 2421
B.6.2 Ex B.5: Redução de carga ao vivo II . . . 2422
B.7 Colocação de carga . . . 2422

C Equações Diferenciais Linear homogêneas **2424**
C.1 Resumo das equações diferenciais de governo . . . 2424
C.2 Soluções . . . 2425
C.3 Estabilidade I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ . . . 2426
C.4 Estabilidade ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2427
C.5 Viga base elástica; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2428

D Arcos elásticos; Análises Avançadas **2430**
D.1 Introdução . . . 2431
D.2 Arco circular de três torções . . . 2431
D.2.1 Procedimento de análise . . . 2432
D.2.2 Carga concentrada . . . 2433
D.2.3 Peso próprio . . . 2439
D.2.4 Carga uniformemente distribuída . . . 2443
D.2.4.1 Deflexão . . . 2444
D.2.5 Arco circular de três torções: validação . . . 2445
D.2.6 Conclusão . . . 2447
D.3 Arco circular de duas dobradiças . . . 2448
D.3.1 Procedimento de análise . . . 2448
D.3.2 Carga concentrada . . . 2448
D.3.3 Peso próprio . . . 2459
D.3.4 Carga uniformemente distribuída . . . 2467

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

D.3.5 Arco circular de duas voltas: validação . . . 2471
D.3.6 Conclusão . . . 2474
D.4 Arco circular sem dobras . . . 2474
D.4.1 Procedimento de análise . . . 2474
D.4.2 Carga concentrada . . . 2475
D.4.3 Peso próprio . . . 2488
D.4.4 Carga uniformemente distribuída . . . 2496
D.4.5 Arco circular sem dobras: validação . . . 2501
D.4.6 Conclusão . . . 2503
D.5 Conclusão . . . 2503

Parte 2: Tabelas de Análise e Projeto Estrutural

E Tabelas de análise cilíndricas 2506

F Projeto do Barrel Casca Telhados 2519

G Data Set da Ponte de Alamillo 2548

H Identicons: hash visual 2552
H.1 Introdução aos Identicons . . . 2553
H.2 Algoritmos da Geração de Identicons . . . 2554
H.3 GitHub vs. Implantações de Identicon da Bolsa Stack . . . 2555
H.4 Nossa implementação MATLAB . . . 2556
H.5 Segmentos do Código Central . . . 2558
H.6 Usando o Programa . . . 2559
H.7 Vantagens e Aplicações . . . 2560
H.8 Conclusão . . . 2561

Parte 3: Implementações de Código

I MATLAB®, Matemática Códigos 2562
I.1 Parte I: Métodos de Análise Fundamental e Computacional . . . 2564
I.1.1 Matriz estática de um treliça B . . . 2564
I.1.2 Forma de arco St Louis . . . 2566
I.1.3 Arbitrário três arcos circulares articulados; Mathematica . . . 2568
I.1.4 Recolher arcos de alvenaria . . . 2579
I.1.5 Principal . . . 2579
I.1.6 Grande desvio de uma viga . . . 2590
I.2 Parte II: Projeto estrutural e Análise . . . 2595
I.2.1 Desenho de cilíndrico cascas . . . 2595
I.2.2 Análise aproximada pórtico; método cantilever . . . 2607
I.2.3 Torção não uniforme . . . 2619
I.2.4 Ortogonal pórtico . . . 2621
I.2.5 Ortogonal híbrido pórtico . . . 2625

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

I.2.6 Pórtico; Conectado 2628
I.2.7 Método da rigidez direta; pórtico 2632
I.2.8 Código principal 2632
I.2.9 Matriz de rigidez de membros não prismáticos 2644
I.2.10 Linhas isostáticas 2650
I.2.11 Desenho evolucionário 2656
I.2.12 Principal 2656
I.2.13 Pilar diagrama de interação 2662
I.2.14 Métodos variados; Mathematica 2665
I.2.15 Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral 2676
I.2.16 Isoparamétrico elementos 2678
I.3 Parte III: Modelagem material e comportamento constitutivo 2689
I.3.1 Plástica incremental 2689
I.3.2 Modelos constitutivos 2693
I.3.3 Modelo bilinear 2694
I.3.4 Endurecimento 2698
I.3.5 Histerese 2701
I.3.6 Giuffre monegotto pinto modificado 2720
I.3.7 Parque Kent modificado 2725
I.3.8 Ibarra 2730
I.3.8.1 Histerese 2730
I.3.8.2 Histerese belisca 2749
I.3.9 Estado limite cisalhamento 2771
I.4 Parte IV: Métodos e identificação de parâmetros 2792
I.4.1 Programa de Identificação do Parâmetro 2792
I.4.2 Programa principal e orquestração central 2793
I.4.3 Integração de dados I/O e planilha 2802
I.4.4 Otimização fluxo de trabalho e funções auxiliares 2814
I.5 Parte V: Fundamentos numéricos e estatísticos 2827
I.5.1 Levenberg-Marquardt 2827
I.5.2 Técnicas numéricas 2828
I.5.3 FFT e filtros Butterworth 2828
I.5.4 Decomposição em valores singulares 2831
I.5.5 Pré-condicionamento 2833
I.5.6 Consenso de amostragem aleatória (RANSAC) 2835
I.5.7 Hipercubo latino 2839
I.5.8 Regressão bayesiana com base quadrática 2844
I.5.9 Simulação de Monte Carlo via cadeias de Markov 2851
I.6 Parte VI: Otimização e ajuste de parâmetros 2853
I.6.1 Levenberg-Marquardt 2853
I.6.2 Implementação personalizada 2853

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

I.6.3 Uso da função incorporada . . . 2856
I.7 Parte VII: Confiabilidade sísmica e incerteza . . . 2858
I.7.1 Análise de perigo sísmico . . . 2858
I.7.2 Engenharia sísmica baseada em desempenho . . . 2861
I.8 Parte VIII: Utilidade . . . 2866
I.8.1 Identicon . . . 2866

J Exemplos do MathCad **2872**

Parte 4: Métodos Numéricos e Estatísticos

K Filtragem de Registros Sísmicos (Transformações de Fourrier Rápido) **3038**
K.1 Como calcular a transformação de Fourier . . . 3040

L Revisão da Álgebra Linear **3044**
L.1 Em matrizes . . . 3045
L.1.1 Definições . . . 3045
L.1.2 Operações de matriz elementar . . . 3046
L.1.3 Determinantes . . . 3047
L.1.4 Inversão . . . 3048
L.2 Soluções de equações lineares . . . 3049
L.2.1 Estratégias . . . 3049
L.2.2 Descomposição . . . 3049
L.2.2.1 Eliminação de Gauss . . . 3050
L.2.2.2 Eliminação Gauss-Jordan . . . 3050
L.2.2.3 **LU** Descomposição . . . 3051
L.2.2.4 A decomposição de Cholesky . . . 3053
L.2.2.5 Decomposição de valor singular . . . 3054
L.2.2.6 Decomposição QR . . . 3056
L.2.3 Métodos indiretos . . . 3056
L.2.3.1 Gauss Seidel . . . 3056
L.3 Características matriciais e melhorias computacionais . . . 3057
L.3.1 Singularidade e hierarquia . . . 3057
L.3.2 Autovalores e autovetores . . . 3058
L.3.3 Número da condição . . . 3059
L.3.4 Pré-condicionamento . . . 3059
L.3.4.1 Pré-condicionamento esquerdo . . . 3060
L.3.4.2 Pré-condicionamento direito . . . 3061
L.4 Exemplos . . . 3062
L.4.1 Ex L.1: Eliminação de Gauss . . . 3063
L.4.2 Ex L.2: Eliminação Gauss-Jordan . . . 3063
L.4.3 Ex L.3: **lu** Descomposição . . . 3064
L.4.4 Ex L.4: A decomposição de Cholesky . . . 3065
L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel . . . 3066

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel . . . 3067
L.4.7 Ex L.7: Decomposição de valor singular . . . 3068
L.4.8 Ex L.8: Pré-condicionamento . . . 3069

M Probabilidade e Estatística **3072**
M.1 Introdução à probabilidade e estatística . . . 3072
M.2 Conceitos fundamentais em probabilidade . . . 3073
M.2.1 Determinista *vs.* Probabilística . . . 3073
M.2.2 Definição . . . 3074
M.2.3 Probabilidade condicional . . . 3074
M.2.4 Tipos de variáveis aleatórias . . . 3075
M.3 Ferramentas estatísticas para análise de probabilidade . . . 3075
M.3.1 Função de distribuição cumulativa . . . 3077
M.3.2 Intervalo de confiança . . . 3077
M.4 Medidas estatísticas . . . 3078
M.4.1 Momentos e medidas de tendência central . . . 3078
M.4.2 Relações entre variáveis . . . 3081
M.5 Distribuição . . . 3082
M.5.1 Distribuições univariadas . . . 3082
M.5.1.1 Comparação . . . 3085
M.5.2 Distribuição Bivariada . . . 3087

N Índice de confiabilidade **3090**

Parte 5: Teoria Avançada e Otimização

O Mecânica de Corpos Deformáveis, um Primer **3097**
O.1 Introdução . . . 3098
O.1.1 Notação . . . 3098
O.1.2 Tensores . . . 3100
O.1.2.1 Operações . . . 3101
O.1.2.2 Rotação de eixos . . . 3102
O.1.2.3 Transformação de tensores . . . 3104
O.1.2.4 Valores principais dos tensores simétricos de segunda ordem 3104
O.1.3 Interpretação física de invariantes tensão . . . 3106
O.2 Campos de vetor; mecânica de corpos deformáveis . . . 3107
O.2.1 Forças . . . 3107
O.2.2 Tensor de Cauchy tensão . . . 3108
O.2.2.1 Tensores hidrostáticos e desviatórios . . . 3110
O.2.2.2 Representação geométrica de tensão estados . . . 3110
O.2.3 Cinemática . . . 3111
O.2.3.1 Posição e deslocamento . . . 3111
O.2.3.2 Deformações . . . 3112
O.3 Leis fundamentais de mecânica do contínuo . . . 3114

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

O.3.1 Leis de conservação . . . 3114
O.3.2 Fluxos . . . 3115
O.3.3 Conservação da massa; equação de continuidade . . . 3116
O.3.4 Conservação do momento; equação de movimento . . . 3116
O.3.5 Conservação de energia; Primeiro princípio da termodinâmica . . . 3119
O.4 Equações constitutivas . . . 3121
O.4.1 Caso geral em 3D . . . 3121
O.4.2 Caso isotrópico transversamente . . . 3123
O.4.3 Casos especiais em 2D . . . 3123
O.5 Observações fenomenológicas . . . 3124
O.5.1 Carregar, deslocamento e testes de controle . . . 3124
O.5.2 Resposta pré/pós-pico do material de aço e concreto . . . 3125
O.6 Localização da deformação . . . 3127
O.6.1 Provas experimentais . . . 3127
O.6.1.1 σ- Diagrama de bacalhau, modelo de Hillerborg . . . 3127
O.7 Condições de contorno . . . 3130
O.8 Diagrama Tonti . . . 3131
O.9 Conceito de esforço interno . . . 3133

P Homenagem a Westergaard **3134**
P.1 Campo da ponta de crack tensão . . . 3135
P.1.1 Função Airy Tensão . . . 3135
P.1.2 Solução . . . 3137
P.2 Interação da estrutura de fluidos . . . 3142

Q Região de Confiança e Métodos Levenberg-Marquardt **3156**
Q.1 Região de confiança . . . 3157
Q.2 Algoritmo . . . 3161
Q.3 Formulação em MATLAB® . . . 3161
Q.4 Visualização em tempo real . . . 3164

R Vetor Cálculo; Um Primer **3165**
R.1 Definições básicas . . . 3166
R.1.1 Derivação para um escalar . . . 3166
R.1.1.1 Ex R.1: Tangente para uma curva . . . 3168
R.1.2 Divergência . . . 3168
R.1.2.1 Vetor . . . 3168
R.1.2.1.1 Ex R.2: Divergência de um vetor . . . 3170
R.1.2.2 Tensor de segunda ordem . . . 3170
R.1.3 Gradiente . . . 3171
R.1.3.1 Campo escalar . . . 3171
R.1.3.1.1 Ex R.3: Gradiente de um campo escalar I . . . 3171
R.1.3.1.2 Ex R.4: Gradiente de um campo escalar ii . . . 3172
R.1.3.2 Campo de vetor . . . 3173

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

R.1.3.2.1 Ex R.5: Gradiente de um campo vetorial 3174
R.2 Teoremas integrais 3174
R.2.1 Integral de um vetor 3174
R.2.2 Linha integral 3175
R.2.3 Integração por partes 3175
R.2.4 Gauss; Teorema da divergência 3175
R.2.4.1 Ex R.6: Interpretação física do teorema da divergência . . . 3176
R.2.5 Teorema de Stoke 3177
R.2.6 Verde; Teorema do gradiente 3177
Referências das Partes II–IV **3178**

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lista de Figuras: Partes II–IV (Análise)

17.1 Análise estrutural; O quadro geral . . . 848
17.2 Tipos de forças em elementos estruturais (1d) . . . 854
17.3 Aspectos básicos dos sistemas de cabos . . . 854
17.4 Aspectos básicos dos arcos . . . 855
17.5 Tipos de.. . . . 855
17.6 Variações nas configurações pós e vigas . . . 856
17.7 Diferentes viga tipos . . . 856
17.8 Formas básicas de pórticos . . . 857
17.9 Exemplos de estruturas suportadas pelo ar . . . 858
17.10 Formas básicas de cascas . . . 858
17.11 Sequência de cursos de engenharia estrutural . . . 860

18.1 Mapa de neve dos Estados Unidos . . . 863
18.2 Airfoil, equação de Bernoulli. . . . 864
18.3 Mapa do vento dos Estados Unidos . . . 865
18.4 Efeito da carga do vento nas estruturas . . . 866
18.5 Mapa sísmico dos Estados Unidos . . . 867
18.6 Terra e cargas hidrostáticas em estruturas . . . 870
18.7 Cargas projetadas . . . 875
18.8 Colocação de carga para maximizar momentos . . . 876
18.9 Transferência de carga em prédios R/C . . . 878
18.10 Uma ou duas ações em lajes . . . 879
18.11 Mecanismos de transferência de carga em catedrais góticas e arcos rasos . . . 880
18.12 Conceito de áreas afluentes para carregamento estrutural dos membros . . . 881
18.13 Carregar a vida de uma estrutura, (Lin e Stotesbury, 1981) . . . 883

19.1 Exemplos de limites de reações . . . 887
19.2 Equilíbrio de momentos, de Leonardo (Da Vinci, 1490), para Calder . . . 889
19.3 Reações inclinadas apoio móvel . . . 890
19.4 Grau de indeterminação estática . . . 890
19.5 Reações são simultâneas . . . 891
19.6 Diagramas de corpos livres de uma viga submetido a diferentes cargas . . . 892

CÓPIA PARA REVISÃO

20.1 Estaticamente indeterminado treliça . . . 913
20.2 Relação entre forças e comprimentos . . . 914
20.3 Apresentando forças com flechas . . . 915
20.4 Método de união/matriz, diagramas de corpos livres . . . 924
20.5 Complexo estaticamente determinado treliça . . . 925

21.1 Interno tensões . . . 932
21.2 Esforços internos em rectilinear e curvado vigas . . . 934
21.3 Esforços internos . . . 936
21.4 Cisalhamento e convenções de sinal momento para design . . . 936
21.5 Convenções de sinais de design . . . 936
21.6 Diagrama de corpo livre de um segmento infinitesimal viga . . . 937
21.7 Variações de carga, e momentos . . . 939

22.1 Curvatura e deformações . . . 964
22.2 Convenção de sinais para o método da área de curvatura para curvaturas opostas da viga . . . 976
22.3 Métodos da área de curva . . . 976
22.4 Deflexão máxima usando o método de área do momento . . . 980
22.5 Conjugar vigas . . . 986

23.1 Deformação pura cisalhamento . . . 991
23.2 Elemento Infinitesimal submetido a cisalhamento tensão . . . 991
23.3 Cisalhamento tensão e coeficiente . . . 993
23.4 Relações de rotação da torção . . . 996
23.5 Por que a dobra ocorre . . . 998
23.6 Torção não uniforme (McGuire e Winter, 1968)) . . . 999
23.7 I viga submetido a torção . . . 1001

24.1 Forças virtuais e reais em uma estrutura arbitrária . . . 1008
24.2 Maxwell-Betti teorema recíproco . . . 1011

25.1 Estaticamente indeterminada estrutura de 3 cabos . . . 1037
25.2 Cantilever equipado viga . . . 1039
25.3 Problema ilustrativo para o método flexibilidade . . . 1040
25.4 Ilustração do método flexibilidade com duas desconhecidas . . . 1042
25.5 Exemplos de estruturas inspiradas por rainhas . . . 1058
25.6 Equação de três momentos, derivação . . . 1063
25.7 Equação de três momentos, termos de carga . . . 1065

26.1 Assinar convenção para o método rigidez . . . 1070
26.2 Formulação de problemas de flexão para termos rigidez . . . 1072

27.1 Exemplo ilustrativo para o método de deflexão da inclinação . . . 1080

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

27.2 Conceitos-chave da distribuição do momento 1091

28.1 MüPrincípio de Iler-Breslau 1104

29.1 Estabilidade de uma barra rígida 1117
29.2 Estabilidade de uma barra rígida com imperfeição inicial 1118
29.3 Biapoiado viga pilar; Segmento diferencial; Efeito de força axial p 1120
29.4 Dois sistemas dinâmicos 1132
29.5 Comprimentos efetivos para viga e pórticos 1134
29.6 Pilares comprimentos eficazes em um multi-baia multi- andares pórticos . .1134
29.7 Gráfico de alinhamento para conexões semiflexíveis (American Institute of Steel Construction, 2016) 1135
29.8 Inelástico flambagem 1137
29.9 Euler flambagem, e curva de ssrc pilar 1137

30.1 Verificação da teoria do cabo 1142
30.2 Geometria do cabo # 1 1145
30.3 Geometria do cabo # 2 1147
30.4 Geometria de um cabo inclinado submetido a carga transversal horizontal uniforme 1153
30.5 Cabo rigidez 1154
30.6 Coordenadas de referência alternativas da catenária 1165
30.7 Catenária com acorde inclinado, (Cella, 1999) 1167
30.8 Comparação entre catenária e soluções parabólicas 1172

31.1 O que é um vousoir 1175
31.2 Análises do Arch de la Contrate 1176
31.3 Raízes quadráticas e cúbicas de grande número métodos por de Belidor, B. F., 1757 1177
31.4 A mesa de Belidor para dimensionar o suporte vertical (*Pied-droit*) de arcos de acordo com De La Hire; de Belidor, B. F., 1757 1177
31.5 Análises de arcos (de Belidor, B. F., 1729) 1179
31.6 Critérios de falha do Belidor (Brandonisio e De Luca, 2020) 1179
31.7 Análises de arcos (Couplet, 1729) 1181
31.8 Modelos de gesso de Danyzy, 1732 1181
31.9 Voussoirs sem fricção analisam por Coulomb, 1773 1183
31.10 O princípio de Moseley é a menor resistência (Moseley, 1869) 1184
31.11 Ponte Voussoir de Charles Mosca (turin) analisada por (Castigliano, 1879) .1185
31.12 Análise elástica do Winkler de arcos (Winkler, 1880) 1185
31.13 Aparelho experimental usado por Pippard, Tranter e Chitty, 1936 para investigar a estabilidade dos arcos de vooussóis. 1186
31.14 Fracasso gradual de um vousoir Pippard, Tranter e Chitty, 1936 1187
31.15 Voussoirs analisa por Pippard e Baker, 1943 1188

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

31.16 Fluxo de forças através dos blocos em um arco 1193
31.17 Determinação do conjunto de forças na origem 1195
31.18 MATLAB®Gerou sequência de dobradiças em um vousoir 1197
31.19 Mecanismos de colapso; impulsos do pilar (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF) 1200
31.20 Polígono funicular invertido e linha de impulso correspondente e excentricidade 1201
31.21 Modo de falha de três dobradiças semicirculares 1202
31.22 Sequência de locais de dobradiças 1202

32.1 Momento resistindo forças em um arco ou sistema de suspensão, em comparação com uma viga, (Lin e Stotesbury, 1981) 1205
32.2 Estáticos de um arco de três torções 1206
32.3 Dois arcos articulados, analogia com a extremidade fixa (Lin e Stotesbury, 1981) 1213
32.4 Centro de gravidade de um vousoir 1222
32.5 Equilíbrio de um vousoir infinitesimal 1223
32.6 Arco parabólico ideal para uma carga uniforme 1228
32.7 Arco parabólico sem dobras; diagrama de corpo livre 1235
32.8 Efeito da fixação inicial e mudança de temperatura 1239
32.9 Escadaria em espiral no museu Louis (paris), e Catedral Sagrada Família (Barcelona) 1247
32.10 Geometria da estrutura curva no espaço 1247
32.11 Diagrama de corpo livre de uma estrutura curva no espaço 1248

33.1 Deslocamentos e tensões em uma placa 1253
33.2 Esforços internos 1256
33.3 Tensão distribuição 1261
33.4 Equilíbrio de uma placa circular elemento infinitesimal 1265

34.1 Elemento diferencial casca, geometria, tensões, e seus resultados 1273
34.2 Cinemática de elemento diferencial 1273
34.3 Equilíbrio do elemento diferencial casca 1275
34.4 Elemento diferencial casca, V_x tensão resultados 1279
34.5 Elemento diferencial, curvaturas principais 1280
34.6 Elemento diferencial, estado inicial e deformado 1284
34.7 Elemento diferencial, estado inicial e deformado; cisalhamento deformação causado pelo aumento no comprimento dos lados positivos 1286
34.8 Elemento diferencial, estado inicial e deformado; Rotação 1287
34.9 Superfície média do elemento diferencial 1289
34.10 Classificação de cascas 1299
34.11 Exemplos de cascas onde a suposição da membrana é (principalmente) válida 1300
34.12 Diagramas de corpo livre de hiperboloide e dome elemento infinitesimal 1300
34.13 Diagrama de corpo livre de um elemento circular infinitesimal casca . . . 1303

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

34.14 Tensão distribuição resultante em uma circular completa casca 1306
34.15 Efeito de borda 1308
34.16 Carga de linha aplicada corretiva em circular casca 1309
34.17 Sine série enredo 1309
34.18 Analogias estaticamente indeterminadas 1327
34.19 Circular cascas descansando em um suporte elástico 1329

35.1 O oscilador idealizado de um único grau de liberdade 1350
35.2 Curvas de amplificação dinâmica conceitual para um oscilador SDOF amortecido sob força harmônica 1358
35.3 Aceleração espectro de resposta S_a Como uma função do período natural T_n para várias proporções amortecimento. 1368
35.4 Primeiros três formas modais de um biapoiado 1371
35.5 Histerese elastoplástica bilinear em loop sob carga cíclica simétrica. 1378

36.1 Interações iterativas do engenheiro arquiteto-estrutural 1389
36.2 Exigência e capacidade em uma viga 1390
36.3 Segurança 1390
36.4 Distribuição de probabilidade funções de C e.. D 1393
36.5 Probabilidade de fracasso em termos de β 1395
36.6 Estado limite análise de uma seção rachada concreto armado 1396
36.7 Whitney tensão bloco 1398
36.8 Pilar corpo livre e diagramas de interação 1406
36.9 Pilar corpo livre, condição equilibrada 1407

38.1 Rotações de canto compatíveis 1434
38.2 Desvio de um simples viga 1434
38.3 Deflexão do portal pórtico com rígido pilares sob carga vertical 1434
38.4 Deflexão do portal pórtico sob carga vertical 1435
38.5 Exemplo de portal pórtico sujeito a carga lateral 1435
38.6 Forma defletida e diagrama do momento; Portal pórtico com carga lateral .1436
38.7 Deflexões em termos de rigidez de suporte 1437
38.8 Pórtico sob carga vertical; Localização aproximada dos pontos de inflexão .1439
38.9 Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais; Momentos de vigas 1440
38.10 Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais; pilar forças axiais 1441
38.11 Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais 1441
38.12 Análise aproximada de pórticos submetidos a cargas laterais; pilar cisalhamento 1443
38.13 Análise aproximada de pórticos submetidos a cargas laterais; Momento da viga 1443
38.14 Cisalhamento deformação em um edifício curto,(Lin e Stotesbury, 1981) .1465

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

38.15 Deformação de flexão em um prédio alto, (Lin e Stotesbury, 1981) 1465
38.16 Deflexão em uma estrutura de construção composta por duas paredes finas e lintéis, (Lin e Stotesbury, 1981) 1466
38.17 Deformação de uma dobrada (Lin e Stotesbury, 1981) 1467
38.18 Cisalhamento e deflexão flexural de um subsistema rígido pórtico, (Lin e Stotesbury, 1981) 1468
38.19 Deflexão lateral da carga vertical não simétrica, (Lin e Stotesbury, 1981) . 1468

40.1 Tempo dependente deformação; Arrepio e encolhimento 1517
40.2 Construindo cargas térmicas 1517
40.3 Convenção de Assinatura, Design e Análise (Fig. 26.1) 1518
40.4 Elementos esforços internos e Dof local 1519
40.5 Independente deslocamentos 1520
40.6 Sistema de coordenadas local e global 1520
40.7 Graus de indeterminação estática e cinemática 1522
40.8 Problema de valor limite 1524

41.1 Definição do termo rigidez K_{ij} 1526
41.2 Rigidez coeficientes para vários tipos de elementos 1526
41.3 Elemento 3D viga-pilar 1529
41.4 Individual rigidez termos em um 3D viga-pilar elemento 1531
41.5 Deformação parasitária causada por deformações impostas 1533
41.6 Forças finais e deslocamentos de um elemento de torção com contenção de dobra 1536

42.1 Viga exemplo para comparar os métodos flexibilidade e rigidez 1538
42.2 Exemplo de viga para determinar o grau de indeterminação cinemática . 1540

43.1 Local$\mathbf{k}^e$) e global ($\mathbf{K}^e$) Elemento matrizes de rigidez 1564
43.2 Matriz de transformação para um 2D viga-pilar 1564
43.3 Transformação do vetor 3D arbitrário 1566
43.4 2D pórtico rotação de elementos com relação a Z (ou z) 1568
43.5 Rotação do elemento da grade 1569
43.6 Matriz de transformação para o vlasov viga 1570
43.7 2D treliça rotação 1571
43.8 Rotação 3D reduzida 1573
43.9 Caso especial de transformação 3D para membros verticais 1574
43.10 Rotação complexa em 3D 1575

44.1 Dof sem restrições e constrangido 1582
44.2 Exemplo de discretização estrutural 1582
44.3 Exemplo para [**ID**] Determinação da matriz 1584
44.4 Exemplos de **LM** Tarefas 1585
44.5 Assembléia do processo global matriz de rigidez 1586

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

45.1 Mapeamento de deslocamentos em forças 1603
45.2 Mapeando uma unidade deslocamento círculo em uma elipse de força, (Gavin, 2012). 1604
45.3 Problema do teste de autovalor 1607
45.4 Assemblage de membros resultando em mal-condicionado **K** 1609
45.5 Matrizes condicionadas em termos K_1 K_2 1610
45.6 Importância da numeração nodal 1613
45.7 Requisitos de armazenamento para a estrutura matriz de rigidez 1614

46.1 Cinemática de um elemento treliça 1626
46.2 Elemento estável e estaticamente determinado 1630
46.3 Viga com deslocamento rígido 1642
46.4 Fbd de viga com deslocamento rígido 1643
46.5 Flexível, rígida e semi-rígida vigas 1645
46.6 Deformações de um semi-rígido vigas 1646
46.7 $\overline{K}_{22}$ Coeficiente para conexões semi-flexíveis 1649
46.8 Extratos do manual de constantes pórtico (Portland Cement Association, 1947) 1650
46.9 Viga com seção variável 1651
46.10 Seção com profundidade linear variável; Estudo paramétrico 1652
46.11 Seção com profundidade variável parabólica; Estudo paramétrico 1653

47.1 Operadores diferentes e diferenciais 1668
47.2 Exemplos de essenciais e naturais condições de contorno 1673
47.3 Tonti diagrap para o método de energia potencial total 1679
47.4 Diagrama Tonti para Hu-Washizu, (Červenka, 1994) 1692
47.5 Diagramas de Tonti para Lagrange, Hamilton e D'Alembert 1693

48.1 Definição da tração 1698
48.2 Deformação e densidades de energia complementares deformação 1699
48.3 Energia potencial 1701
48.4 Efeitos da história de carga em U e.. W_i 1702
48.5 Diagramas ilustrativos dos princípios de obras virtuais e complementares 1710
48.6 Minimizações em mecânica quântica e clássica 1721
48.7 Resumo dos métodos de variação 1740
48.8 A dualidade dos princípios variacionais 1741

49.1 Sistema de coordenadas naturais em linha reta 1746
49.2 Sistema de coordenadas naturais para um triângulo 1747
49.3 Integração sobre um triângulo 1749
49.4 Axial elemento finito 1750
49.5 Elemento triângulo constante deformação 1752
49.6 Elemento retangular bilinear 1754
49.7 Funções de forma para 4 nós quadriláteros elemento 1755

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

49.8 Elemento retangular trilinear sólido 1755
49.9 Funções de forma para 3 nós elemento triangular linear 1758
49.10 Elemento de barras quadráticas com três nós 1758
49.11 Flexural elemento finito 1759
49.12 Funções de forma para flexão de elemento uniforme viga. 1761
49.13 Elemento 4 nós isoparamétrico 1765
49.14 Serendipity e quadrilatros quadráticos Lagrangianos 1766
49.15 Triângulos Pascal para elementos quadrilaterais e triângulos 1766
49.16 Serendipity isoparamétrico quadrática: Elemento global e pai 1767
49.17 Funções de forma para 8 nós quadriláteros elemento 1768
49.18 Funções de forma para 9 nós quadriláteros elemento 1771
49.19 Numeração nodal para elementos isoparamétricos 1771
49.20 Funções de forma para 6 nós elemento triangular quadrático 1773

50.1 Completude e compatibilidade 1781
50.2 h, p e.. r convergência 1783
50.3 Continuidade do interelemento de tensão 1784
50.4 Continuidade do interelemento de deformação 1785

51.1 Mapa bidimensional de alguns elementos 1787
51.2 Elementos reais e pais 1787
51.3 Iso, super e sub-paramétrico elementos 1789
51.4 Elemento diferencial no sistema de coordenadas curvilíneas 1793
51.5 Produto cruzado de dois vetores 1793
51.6 Elemento com possíveis jacobianos singulares 1794
51.7 Integração numérica Newton-Cotes 1799
51.8 Integração Gauss-Leendre sobre uma superfície 1804
51.9 Integração numérica sobre um triângulo 1805
51.10 Extrapolação de 4 nós quad gauss pontos (Felippa, 1999) 1806
51.11 Carregamento de gravidade 1808
51.12 Carga de tração em elementos isoparamétrico 1809
51.13 Carga de tração em elementos contíguos isoparamétrico 1810
51.14 Modos independentes para um elemento bilinear 1812
51.15 Modos hourglas em elemento quadrático subintegrado 1813
51.16 Elemento retangular bilinear submetido à flexão; Elemento bilinear e geometria correta 1814
51.17 Deslocamentos associado com modos incompatíveis para o elemento q6 . 1815
51.18 Lado deslocamentos induzido pela perfuração do D.O.F 1816

53.1 Axial *vs* Rigidez da flexão 1838
53.2 Redução de sem restrições quando axial é ignorada 1839
53.3 Modelo de construção para carga sísmica 1839
53.4 Diagrama de corpo livre de um nó 1840

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

53.5 Massa e rigidez proporcional amortecimento 1846
53.6 Euler para a frente vs Euler métodos atrasados 1851

54.1 Não linearidade geométrica, grande deflexão exemplo**B**), 29.2.3 1874
54.2 Não linearidade material, fibras**D**) 1874
54.3 Não linearidade material, seção (**D**) 1874
54.4 Linear *vs.* Análises não lineares 1875
54.5 Tipos de.. 1877
54.6 Curva de deflexão de carga e varia gama de resposta 1880
54.7 Códigos de design na antiguidade 1882
54.8 *Beton-reglement f uEisenbetonbau* 1884
54.9 Exemplos de códigos modernos de design 1885
54.10 Níveis de desempenho 1887
54.11 Comparação de várias estruturas de design 1888

55.1 Superfície de escoamento; Definição 1891
55.2 Modelos independentes de pressão hidrostática 1891
55.3 Pressão dependente superfícies de escoamento 1893
55.4 Modelos dependentes de pressão hidrostática 1894
55.5 Tensão-deformação de metais; Efeito baushinger 1895
55.6 Micro-cracks de concreto 1896
55.7 Ligações químicas 1897
55.8 Títulos delicados e frágeis 1897
55.9 Deslocamento 1898
55.10 Resposta elastoplástica 1899
55.11 Modelos endurecidos 1901

56.1 Arbitrário seção transversal considerado para a determinação de $M - \Phi$ . .1923
56.2 Procedimento incremental para determinar $M - \Phi$ analiticamente 1924
56.3 Momento curvatura e momento diagramas força axial (interação) 1930
56.4 Discretização de um seção transversal em camadas 1931
56.5 Abordagem incremental para determinar $M - \Phi$ numericamente 1932

57.1 Rende as linhas em lajes 1955
57.2 Determinação das linhas de rendimento em retangular lajes 1957
57.3 Solução estática de ligação inferior *V.S* Análise do Pushover 1961

59.1 Método Newton 1973
59.2 Esquema de integração explícito 1980
59.3 O método de Newton explicou (para controle de carga) 1983
59.4 Método Newton-Raphson para controle de carga 1985
59.5 Método de Newton-Raphson modificado, tangente inicial 1987
59.6 Incremental secante, método quase-newton 1987
59.7 O método de Newton. carga versus controle deslocamento 1992

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59.8 O método de Newton. deslocamento controle (compare com a figura 59.3) .1992
59.9 Método Newton-Raphson; deslocamento controle 1993

60.1 Níveis de análise estrutural 2009
60.2 Explícita abordagem incremental à não linearidade geométrica 2009
60.3 Determinação da carga flambagem sem geometria matriz de rigidez 2015

61.1 Sistema de coordenadas para 2D treliça 2021
61.2 Esforços internos e correspondente deslocamentos para o método baseado em 2D rigidez 2026
61.3 Determinação do estado para o método baseado em rigidez 2028
61.4 Fluxograma de análise não linear usando o método baseado em rigidez . .2031
61.5 Seções de fibra - distribuição de seções de controle e subdivisão de seção em fibras 2035
61.6 Distribuição transversal não linear tensão 2036
61.7 Elemento 2D sem modos rígidos de corpo 2038
61.8 Assinar convenção na seção de força 2039
61.9 Esforços internos e correspondente deslocamento para o método baseado em 2D flexibilidade 2041
61.10 A relação entre os modos rígidos do corpo e nenhum modo rígido do corpo2041
61.11 Determinação do estado para o método baseado em flexibilidade sem iteração de elementos 2043
61.12 Determinação do Estado (Taucer, Spacone e Filippou, 1991a) 2046
61.13 Determinação do estado de elementos e seção 2047
61.14 Fluxograma de análise não linear usando método baseado em flexibilidade w/o elemento iteração 2059
61.15 Fluxograma de análise não linear usando método baseado em flexibilidade w/elemento iteração 2060
61.16 Comparação de rigidez baseado *vs.* flexibilidade formulação baseada . . .2061
61.17 Elemento 2D de comprimento zero 2063
61.18 Gráfico de fluxo do elemento 2D de comprimento zero para determinação do estado do elemento 2064
61.19 Elemento de seção de comprimento zero, equilíbrio 2066
61.20 Sistema de coordenadas para o elemento de seção de comprimento zero . .2068
61.21 Fluxograma para elemento de seção zero 2069

62.1 Modelos de plasticidade misturados e distribuídos 2074
62.2 Modelos histeréticos 2075
62.3 Comparação de módulo Tangent; plasticidade vs. Menegotto-Pinto 2077
62.4 Determinação para o modelo bilinear 2079
62.5 Comparação dos modelos de carga cíclica reversa: plasticidade *vs.* Menegotto-Pinto 2080
62.6 Menegotto pinto (Menegotto e Pinto, 1973) Modelos de aço 2080

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.7 Determinação (1) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2083
62.8 Determinação (2) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2084
62.9 Determinação (3) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2085
62.10 Determinação (4) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al. . . . 2086
62.11 Efeito de confinamento na resistência do concreto (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928) . . . 2087
62.12 Confinada *vs.* Resistência ao concreto compressivo não confinada (Mander, Priestley e Park, 1988) . . . 2088
62.13 Papel dos estribos no fornecimento de confinamento de concreto . . . 2088
62.14 Modelo de material concreto em compressão . . . 2090
62.15 Modelo de material concreto sob carga cíclica em compressão . . . 2093
62.16 Modelo de material concreto sob carga cíclica em tensão . . . 2095
62.17 Determinação (1) para o modelo de kent e parque modificado . . . 2098
62.18 Determinação (2) para o modelo de kent e parque modificado . . . 2099
62.19 Cracks induzidos por compressão, tensão, tensão e compressão . . . 2101
62.20 Deformação-tensão curva para modelo de dano anisotrópico sem permanente deformação . . . 2107
62.21 Determinação (1) para o modelo de dano anisotrópico . . . 2108
62.22 Determinação (2) para o modelo de danos anisotrópicos . . . 2109
62.23 Determinação (3) para o modelo de dano anisotrópico . . . 2110
62.24 Deformação-tensão curva para modelo de dano anisotrópico com permanente deformação . . . 2114
62.25 Modelo de escorregar . . . 2115
62.26 Modelo de ligação simplificado . . . 2116
62.27 Curva de deslizamento da ligação . . . 2117
62.28 Localização de linha neutra . . . 2118
62.29 Identificação das zonas plásticas . . . 2120
62.30 Deflexão da deformação flexural de um elemento . . . 2121
62.31 Efetivo momento de inércia em R/C . . . 2123
62.32 Localização de comprimentos de plástico (Park e Paulay, 1991) . . . 2125
62.33 Dica deslocamento de um R / C cantilevered viga com a suposição de plasticidade grudada . . . 2126
62.34 Dica deslocamento de um aço cantilevered viga com a suposição de plasticidade grudada . . . 2128
62.35 Modelo de plasticidade com falha cisalhamento . . . 2131
62.36 Estado limite cisalhamento falha . . . 2131
62.37 Cisalhamento resposta primavera . . . 2132
62.38 Estado limite pilar resposta . . . 2133

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

62.39 Respostas individuais 2134
62.40 Ciclo de histerese representativo 2135
62.41 Perda de força suavizante 2136
62.42 Degradação da força cíclica reversa 2136
62.43 Histerese modelo espinha dorsal 2138
62.44 Curva de espinha dorsal para flexão (Ghannoum, 2020) 2139
62.45 Modelos peak-orientados e beliscantes 2140
62.46 Ciclo básico de modelo orientado para o pico 2141
62.47 Reversão de carga e atualização do estado alvo 2141
62.48 Aumentando a história de carga cíclica seguindo o modelo orientado para o pico 2142
62.49 Ciclo básico do modelo de pinching 2143
62.50 Determinação do ponto de ruptura 2143
62.51 Determinação do primeiro ponto de ruptura 2145
62.52 Atualização do ponto de interrupção 2145
62.53 Recarregando além do ponto de ruptura 2146
62.54 Aumentando o histórico de carga cíclica seguindo o modelo de beliscão . 2147
62.55 Resultados do laboratório estrutural da UCSD (Ibarra, 2004) 2148
62.56 Modo básico de degradação da força 2149
62.57 Modo de degradação da força pós-copiação 2151
62.58 Descarregando o modo de degradação 2152
62.59 Desativando a interrupção 2153
62.60 Recarregando aceleradamente o modo de degradação rigidez 2154
62.61 Curva de espinha dorsal (Ghorbani et al., 2022) 2156
62.62 Modelo de histerese baseada em curvas cúbicas (Suselo, 2021) 2157

63.1 Elemento finito processo (inspirado por Bathe, 1996) 2160
63.2 Complexidade de modelo uniformemente distribuída 2161
63.3 Pitfalls da análise linear comparada com a análise não linear 2162
63.4 Elementos finitos para análise não linear de pórticos 2166
63.5 Pilar conexão final 2167
63.7 Pilar-viga conexões 2168
63.6 Viga ou pilar elementos 2169
63.8 Seção transversal modelando em camadas 2172
63.9 Modelo de cantilever idealizado de rc viga-pilar (Haselton et al., 2016) . . 2175
63.10 Tipos de confinamentos (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) 2175
63.11 Interface gráfica do usuário para o banco de dados de desempenho estrutural (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) 2176

64.1 Comparação de MCS e LHS 2195
64.2 Exemplo de uma trajetória para $k = 2$. 2205
64.3 Sobrepondo ou aglomerando pontos de diferentes trajetórias Morris. . . . 2206
64.4 Variável aleatória e sua função de distribuição cumulativa (CDF). 2207

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64.5 Resposta periódica de uma variável aleatória x_i.. Tamanhos fixos podem não detectar variações periódicas. 2207
64.6 Comparação dos métodos de trajetória (a) e ponto radial (b) $k = 3$ RVs em hiperespaço quântico. 2208
64.7 Inicialização e pós-inicialização no procedimento de rastreamento do ponto radial modificado 2213
64.8 Exemplo de sensibilidade (Gakuhari, 2021) 2217
64.9 Análise de sensibilidade identifica parâmetros candidatos; A identificação dos parâmetros determina os valores suportados pelas observações 2217

65.1 Princípio da abordagem de identificação do sistema: Refinamento iterativo de parâmetros para minimizar discrepância modelo-dados. 2221
65.2 Exemplo ilustrativo de regressão linear com RANSAC 2224
65.3 RANSAC aplicado à degradação do concreto: Estudo de caso (Gakuhari, 2021) 2225
65.4 Fluxograma do procedimento de identificação do parâmetro 2238
65.5 Interface gráfica para uma única função residual e cinco variáveis. Veja Fig. 65.7 para um exemplo mais abrangente. 2239
65.6 Arquivo de dados de entrada para o Levenberg... Otimização não linear dos mínimos quadrados 2242
65.7 Painel para o Levenberg, otimização não linear de mínimos quadrados. 12 alvos previstos e 8 variáveis. 2245
65.8 Integração da caracterização do local, desenvolvimento de modelos, incerteza, identificação dos parâmetros, análise estrutural, e avaliação da fragilidade 2250

66.1 Quatro componentes de PBEE 2256

67.1 A lei de recorrência do Gutenberg-richter 2259
67.2 Classificação de fontes sísmicas 2261
67.3 Classificação das distâncias de local a fonte 2264
67.4 Investigação paramétrica em GPS 2264
67.5 Análise de risco sísmico determinista 2265
67.6 Análise de risco sísmico probabilístico 2267
67.7 O modelo de probabilidade de Poisson 2269
67.8 Amostra de curvas sísmicas de risco 2269
67.9 Amostras de nós mapas perigosos 2271
67.10 Amostras de parcelas sísmicas para a universidade de pedra colorada . . 2272
67.11 Comparação de diferentes espectros de resposta 2273
67.12 Comparação de seleção e escala para IPPA, SBPA e TBPA 2275
67.13 Amostra etef 2283
67.14 Cav of eta40lc01 versus alvo 2285
67.15 Energia histerética de ETA20kd01 contra alvo 2286

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

68.1 Curva de perigo. O enredo esquerdo ilustra o conceito de períodos de retorno, enquanto o plano direito mostra uma curva de perigo para um local específico. 2295
68.2 Análise de risco sísmica da engenharia 2298
68.3 Análise de Riscos Sísmicos Probabilísticos (PSHA). 2298

69.1 Probabilisitc natureza de capacidade e demanda 2304
69.2 Curva de capacidade 2307
69.3 Cargas laterais para análise push-over 2309
69.4 Localização e imagem da ponte 2314
69.5 Pilares e dimensões do píer 2316
69.6 Seções transversais dos pilares e do eixo 2317
69.7 Relação tensão-deformação para carregamento monotônico de concreto confinado e não confinado (Mander, Priestley e Park, 1988) 2318
69.8 Forma deformada do pilar e diagrama de curvatura; adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2319
69.9 Curvações de momento e momentos plásticos 2320
69.10 Espectro de resposta análise (C_S) 2324
69.11 Deslocamento espectro de resposta análise 2324
69.12 Permissíveis elementos resistentes ao terremoto (AASHTO, Seismic, 2011) 2326
69.13 Reforçando o modelo de aço tensão-deformação 2328
69.14 Curvação do momento (adaptada de (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2330
69.15 Distribuição do momento na altura do píer 2331
69.16 Forma deformada do pilar e diagrama de curvatura; adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2331
69.17 Modelo Risa 2334
69.18 Diagrama de interação para os três necessários 2336
69.19 Momentos de plástico 2336
69.20 Definição do eixo de Caltran(CALTRANS, 2013) 2338
69.21 Modelo elástico modificado após formação do primeiro rótula plástica . . 2340
69.22 Modelo elástico modificado após formação do segundo rótula plástica . . 2341
69.23 Mecanismo de colapso com formação de 4 rótulas plásticas 2342
69.24 Colapso conceitual baseado no método IDA 2346
69.25 Colapso conceitual baseado no método MSA 2348
69.26 Geração de função de capacidade baseada em ETA 2351
69.27 Destaque de quatro estratégias diferentes (Hariri-Ardebili, Saouma e Porter, 2016) 2354
69.28 Complexidades relativas da análise sísmica 2354

70.1 Relacionamentos entre um DI e dois DVs (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 2365
70.2 PBEE: A Grande Imagem 2366
70.3 Objetivos de desempenho sísmico mínimos recomendados para edifícios (Porter, 2003) 2369

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

72.1 Descrição conceitual da primeira geração de PBEE; (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003) . . . 2379
72.2 Ilustrações discretas de níveis de desempenho, (FEMA, 2012) . . . 2379
72.3 Quatro componentes de PBEE . . . 2382
72.4 Comparação de fragilidade sísmica, vulnerabilidade e curvas de perigo . 2388
72.5 Relação entre curva de fragilidade e matriz de probabilidade de dano . . 2390
72.6 Diferentes aspectos da fragilidade sísmica . . . 2391

B.1 Efeito da carga do vento nas estruturas (Schueller, 1996) . . . 2405
B.2 Pressão aproximada do vento para resistência à força de vento . . . 2406
B.3 Vibrações de um prédio . . . 2408
B.4 Zonas sísmicas dos Estados Unidos, (ICBO, 1994) . . . 2409
B.5 Carregar o caminhão . . . 2418
B.6 Colocação de carga para maximizar momentos . . . 2423

D.1 Geometria do arco circular . . . 2432
D.2 Arco circular de três torções sob carga concentrada . . . 2433
D.3 Relacionamento de β com respeito a θ . . . 2435
D.4 Fbd de três torções, arco circular sob carga concentrada . . . 2435
D.5 Lotes de esforços internos para arco circular de três torções sob carga concentrada . . . 2438
D.6 Arco circular de três voltas sob o próprio peso . . . 2439
D.7 Um arco circular de três voltas sob o peso próprio . . . 2440
D.8 Tramas para arco circular de três voltas sob o peso próprio . . . 2442
D.9 Tramas para arco circular de três torções sob carga uniformemente distribuída . . . 2445
D.10 Arco circular de três torções sob auto-peso vs. Série de carga concentrada 2446
D.11 Arco circular de três torções sob uniformemente distribuir carga vs. série de carga concentrada . . . 2446
D.12 Sap 2000 - diagrama momentâneo de arco circular triangulado sob o peso próprio . . . 2446
D.13 Sap 2000 - força axial diagrama de arco circular com três torções sob o peso próprio . . . 2446
D.14 Sap 2000 - força cortante diagrama de arco circular com três torções sob o peso próprio . . . 2447
D.15 Arco circular de três torções sob auto-peso vs. Udl . . . 2447
D.16 Arco circular de três torções sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão 2447
D.17 Arco circular de duas voltas sob carga concentrada . . . 2449
D.18 Arco circular de duas pontas após remover o impulso redundante no pilar b 2450
D.19 Arco circular de duas voltas com força virtual aplicada . . . 2452
D.20 Fbd do arco circular original de duas voltas sob carga concentrada . . . 2455
D.21 Fbd para calcular a deflexão em arco circular de duas voltas . . . 2458
D.22 Tramas para arco circular de duas voltas sob carga concentrada . . . 2459

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

D.23 Arco circular de duas voltas sob o próprio peso 2460
D.24 Fbd de arco circular de duas pontas após remover o impulso redundante no pilar b′ 2461
D.25 Fbd do arco circular original de duas voltas sob o peso próprio 2465
D.26 Tramas para arco circular de duas voltas sob auto-peso 2467
D.27 Traços para arco circular de duas voltas sob Udl 2471
D.28 Arco circular de duas voltas sob peso próprio vs. Série de carga concentrada 2472
D.29 Arco circular de duas voltas sob uniformemente distribuir carga vs. Série de carga concentrada 2472
D.30 Sap 2000 - diagrama momentâneo de dois arcos circulares sob auto-peso 2472
D.31 Sap 2000 - diagrama de dois arcos circulares sob o peso próprio 2473
D.32 Sap 2000 - diagrama de dois arcos circulares sob o peso próprio 2473
D.33 Arco circular de duas voltas sob peso próprio vs.udl 2473
D.34 Arco circular de duas voltas sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão 2474
D.35 Arco circular sem dobra sob carga concentrada 2475
D.36 Arco circular sem dobras com momento virtual no 'b' 2478
D.37 Arco circular sem dobras com momento virtual em 'a' 2478
D.38 Fbd do arco circular original sem dobradiças sob carga concentrada . . . 2484
D.39 Lotes para arco circular sem dobradiças sob carga concentrada 2488
D.40 Arco circular sem dobra sob o próprio peso 2489
D.41 Esforços internos em arco circular sem dobradiças 2493
D.42 Lotes para arco circular sem dobradiças sob o peso próprio 2496
D.43 Tramas para o arco circular sem dobradiças sob Udl 2501
D.44 Arco circular sem dobra sob auto-peso vs. Série de carga concentrada . . 2501
D.45 Arco circular sem dobra sob uniformemente distribuir carga vs. Série de carga concentrada 2502
D.46 Sap 2000 - diagrama momentâneo de arco circular sem dobradiças sob o peso próprio 2502
D.47 Sap 2000 - força axial diagrama de arco circular sem dobradiças sob auto-peso 2502
D.48 Sap 2000 - força cortante diagrama de arco circular sem dobradiças sob auto-peso 2502
D.49 Arco circular sem dobra sob o peso próprio vs.udl 2503
D.50 Arco circular sem dobra sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão 2503

K.1 Exemplos de sinais filtrados em Butterworth 3039
K.2 Comparação de filtros Butterworth para vários n 3040

M.1 Interconexão de conceitos incorporados na análise probabilística (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 3073
M.2 O conceito de espaço amostra e eventos mutuamente disjuntos (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 3074
M.3 Comparação de histogramas devido a 100 amostras por três vezes 3076
M.4 Comparação de histogramas devido a 1.000 a 100.000 amostras 3076

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

M.5 Exemplos de três funções de distribuição contínua . . . 3076
M.6 Relação entre PDF e CDF . . . 3077
M.7 Relação entre o PDF limitado e CDF . . . 3078
M.8 Ilustração do intervalo de confiança . . . 3078
M.9 Ilustração de média e mediana . . . 3079
M.10 Ilustração de Desvio Padrão . . . 3080
M.11 Ilustração de Esquema e Curtose . . . 3080
M.12 Ilustração de coeficientes de correlação . . . 3081
M.13 Comparação de várias funções de distribuição (e cumulativas) . . . 3087
M.14 Distribuição normal bivariada . . . 3088
M.15 Impacto da correlação ρ na distribuição normal bivariada . . . 3089

N.1 Definições de índice de confiabilidade . . . 3091
N.2 Probabilidade de falha em termos de índice de confiabilidade β . . . 3094

O.1 Transformação vetorial . . . 3103
O.2 Direções principais do tensor da ordem dois . . . 3105
O.3 Avião Octaédrico . . . 3106
O.4 Forças de superfície . . . 3108
O.5 Cauchy: tetraedro para tensão . . . 3108
O.6 Representação geométrica de tensão . . . 3111
O.7 Posição e vetores deslocamento . . . 3112
O.8 Fluxo através da área dS . . . 3115
O.9 Equilíbrio de tensões, coordenadas cartesianas . . . 3118
O.10 Prato da palestra de Hooke sobre molas . . . 3121
O.11 Controles de teste . . . 3125
O.12 Tensão-Deformação curvas de metais e concreto . . . 3126
O.13 Capturando localização experimental em espécimes de concreto uniaxialmente carregados . . . 3127
O.14 Modelo de crack fictício de Hillerborg . . . 3128
O.15 Concreto deformação amaciando modelos . . . 3129
O.16 Componentes do diagrama de Tonti (Felippa, 2000) . . . 3132
O.17 Diagrama de Tonti para mecânica de corpos deformáveis . . . 3132
O.18 Esforços internos em termos de tensões . . . 3133

P.1 Quebre em um prato infinito . . . 3138
P.2 Modos independentes de crack Deslocamentos . . . 3142
P.3 Pressões na represa devido à ação dinâmica da água (Westergaard, 1933) 3148
P.4 Distribuição aproximada de pressões (Westergaard, 1933) . . . 3150
P.5 Corpo de água que pode ser considerado para mover com represa. (Westergaard, 1933) . . . 3154
P.6 Massa amassada por unidade de área versus altura . . . 3155

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Q.1 Algoritmo da região de confiança 3159
Q.2 Fluxograma do procedimento de identificação do parâmetro 3163
Q.3 Interface gráfica de usuário para identificação do parâmetro de reação agregado álcali (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021) 3164

R.1 Diferenciação do vetor de posição **p** 3166
R.2 Curvatura de uma curva 3167
R.3 Campo de vetor cruzando uma região sólida 3168
R.4 Fluxo através da área dA 3169
R.5 Elemento infinito para a avaliação da divergência 3169
R.6 Gradiente de um vetor 3174

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lista de Tabelas: Partes II–IV (Análise)

18.1 Coeficientes de expansão térmica 873

20.1 Determinação estática e estabilidade de treliças 912
20.2 Equações de equilíbrio aplicáveis para treliças 913

22.1 Analogia entre dois conjuntos de relacionamentos 985
22.2 Conjugar viga 985

25.1 Carregar termos de ponto e uniforme cargas 1065

26.1 Rigidez vs flexibilidade métodos 1070
26.2 Rigidez vsflexibilidade análises 1071
26.3 Forças equivalentes nodais para cargas simples 1074

29.1 Essencial e natural condições de contorno para pilares 1122

33.1 Comparação das equações regentes na elasticidade e flexão da placa (Pilkey e Wunderlich, 1994) 1270

34.1 Resumo de equações e incógnitas em finos cascas 1277
34.2 Contribuições individuais para equações de equilíbrio em fino cascas . . . 1278
34.3 Sumário das principais equações governantes no magro cascas 1292
34.4 Suposições e equações para estruturas de membrana 1301
34.5 Comparação das distribuições resultantes da membrana sob diferentes cargas 1305
34.6 Comparação de membranas e soluções rasas para cargas uniformes 1319
34.7 Casca coeficientes (ϕ Mede-se a partir da coroa 1325

36.1 Índice de confiabilidade valores-alvo 1394

38.1 Comparação do subsistema de eixo, parede cisalhamento, e parede reprimida cisalhamento 1463

40.1 Graus de indeterminação estática e cinemática 1523
40.2 Essencial e natural condições de contorno 1523

CÓPIA PARA REVISÃO

43.1 Transformações 3D de elementos lineares 1572

44.1 Discretização de estruturas 1582

45.1 Impacto de matrizes mal condicionadas 1610

46.1 Definição de força interna para a matriz estática 1618
46.2 Condições para determinação estática, e instabilidade cinemática 1626

47.1 Funcionais na elasticidade linear 1688
47.2 Comparação entre energia potencial total e fórmulas Hu-Washizu 1691

48.1 Resumo das equações para vw, cvw, pe, cpe 1708
48.2 Caminhos alternativos para os princípios de trabalho virtual e princípio da complementar trabalho virtual 1709

49.1 Interpretação de funções de forma em termos de série polinomial (1d & 2d) 1744
49.2 Termos polinomiais em várias formulações de elementos (1d) & 2d) 1744
49.3 Características do elemento viga 1762
49.4 Funções de forma, e derivados naturais para elemento q8 1767
49.5 Coordenadas nodais (naturais) do elemento q9 1768
49.6 Funções de forma para elementos de nó variável 1772
49.7 Funções de forma e derivados para o elemento T6 1773

51.1 Pesos para fórmulas de quadratura Newton-Cotes 1800
51.2 Pontos de integração e pesos para fórmulas de geometria ao longo do intervalo$[-1,1]$ 1803
51.3 Coordenadas e pesos para integração numérica sobre um triângulo 1805
51.4 Coordenadas naturais dos nós quadrilaterais bilineares 1806
51.5 Integrações numéricas completas e reduzidas para elementos quadrilaterais 1812
51.6 Bilinsear e exato deslocamentos/deformações 1814

53.1 Condição de estabilidade para diferentes métodos 1854
53.2 Representativo amortecimento rácios para diferentes classes de estruturas 1867

54.1 Tabulação de níveis de análise estrutural 1876
54.2 Intercorrelação de diferentes níveis de análise 1878

57.1 Comparação de abordagens cinemáticas e estáticas para análise de carga limite 1938
57.2 Comparação entre análise de limites inferiores e análise Pushover 1963
57.3 Plasticidade e análise do limite inferior 1965

59.1 Paralelismo entre o método de quasi-newton em matemática e análise implícita em mecânica estrutural 1982
59.2 Variações do método de Newton-Raphson 1986

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

59.3 Comparação de algoritmos de controle de carga em análise não linear . . . 1990

61.1 Determinações de estado multinível . . . 2027
61.2 Comparação de flexibilidade com elementos baseados em rigidez . . . 2058

62.1 Confinada *vs.* Propriedades elásticas e de resistência não confinadas do concreto . . . 2092
62.2 Módulo tangente . . . 2138

63.1 Pilar conexões . . . 2167
63.2 Compatibilidade entre conexões . . . 2168
63.3 Modelando as opções de escolher e furar . . . 2172
63.4 Quantificação da deterioração . . . 2174
63.5 Propriedades materiais . . . 2176
63.6 Classificação transversal . . . 2177
63.7 Códigos do modo de falha . . . 2177
63.8 Geometria . . . 2177
63.9 Detalhes de confinamento . . . 2178
63.10 Detalhes de confinamento . . . 2178
63.11 Resumo dos testes de reforçados retangulares pilares (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) . . . 2179
63.12 Resultados do estudo de calibração para 30 testes experimentais (Haselton et al., 2008) . . . 2180

64.1 Terminologia adotada neste livro para quantificação de incertezas e análise de incerteza . . . 2189
64.2 Descrevedores qualitativos ilustrativos para a magnitude de um coeficiente de correlação de Pearson . . . 2191
64.3 Comparação de MCS e LHS . . . 2195
64.4 Comparação de métodos de incerteza e sensibilidade . . . 2211
64.5 Diferentes mas complementares papéis de análise de sensibilidade e identificação de parâmetros . . . 2218

65.1 Entradas de configuração do representante em `Log.xlsx` . . . 2241
65.2 Funções principais no programa de identificação de parâmetros . . . 2246
65.3 Funções auxiliares privadas usadas pelo leitor de planilhas e camada de agregação . . . 2246
65.4 Campos principais da estrutura de configuração `S` . . . 2246
65.5 Variáveis de tempo de execução selecionadas em `ParIdentificação` . . . 2247

67.1 Coeficientes dependentes do período de Boore, Joyner e Fumal, 1997 Modelo 2263
67.2 Estimado V_S baseado na classe do site . . . 2263

69.1 Comparação da Análise de Pushover e Análise Sísmica . . . 2311

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

69.2 NJ aproximam-se de estruturas projeto espectro de resposta 2315
69.3 Análises sequenciais para análise de pushover 2322
69.4 Propriedades de barras de aço reforçadas (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) 2328
69.5 Capacidades de momento para as três seções diferentes em uma faixa de forças axiais 2335
69.6 Resultados da análise; Não tem dobradiça 2339
69.7 Ajuste que leva à formação da primeira dobradiça 2340
69.8 Resultados da análise; Uma dobradiça 2340
69.9 Ajuste levando à segunda dobradiça 2341
69.10 Resultados da análise; Duas dobradiças 2341
69.11 Ajuste levando à terceira e quarta dobradiças 2342
69.12 Resumição de forças, momentos e.. 2343
69.13 Comparação de métodos sísmicos análise estrutural 2353

70.1 Razões de deriva interstory permitidas (IDR) para vários níveis de desempenho de acordo com ASCE 41-17 2370
70.2 Limiares do Índice de Danos e Estados Estruturais correspondentes 2370
70.3 Limites de demanda para capacidade (DRC) segundo FEMA 356 2371

72.1 A gama de danos de componentes estruturais e não estruturais para vários níveis de desempenho do edifício alvo (Tabela C1-2) (FEMA-356, 2000) . . 2380
72.2 Comparação entre o PBEE 1 e o PBEE 2 2384
72.3 Comparação de Contínuo vs. Representações de Fragilidade Discretas . . 2391
72.4 Documentos-chave no desenvolvimento histórico de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE). 2398

B.1 Peso unitário dos materiais 2404
B.2 Carga média bruta em prédios 2404
B.3 Pesos de materiais de construção 2411
B.4 Cargas mínimas distribuídas uniformemente, (ICBO, 1994) 2412
B.5 Variação da velocidade do vento acima do solo 2412
B.6 C_e Coeficientes para a carga do vento, (ICBO, 1994) 2412
B.7 Coeficientes de pressão do vento C_q, (ICBO, 1994) 2413
B.8 Fatores de importância para o vento e a carga do terremoto, (ICBO, 1994) . 2413
B.9 Pressão aproximada do vento p para a força eólica comum resistindo estruturas de construção 2414
B.10 Z fatores para diferentes zonas sísmicas, UBC1994 2414
B.11 S Coeficientes locais para carregamento de terremotos, (ICBO, 1994) 2414
B.12 Lista parcial de R_W para vários sistemas de estrutura, (ICBO, 1994) 2415

G.1 As coordenadas nodais de Alamillo (Pollalis, 1999) 2549
G.2 Propriedades dos membros de Alamillo (Pollalis, 1999) 2550

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

G.3 Alamillo's condições de contorno (Pollalis, 1999) 2550
G.4 Combinações de carga de Alamillo (Pollalis, 1999) 2551

L.1 Métodos de solução para equações lineares 3050
L.2 Pré-condicionamento; Comparação entre esquerda e direita 3060
L.3 Comparação do pré-condicionamento da matriz e decomposição de valor singular (SVD) 3062

N.1 Valores selecionados para estruturas de aço e concreto 3092
N.2 Confiabilidade das estruturas de aço e concreto 3093

O.1 Notações 3098
O.2 Deformação representações 3112
O.3 Exemplos de condições de contorno em análise estrutural 3131

P.1 Resultados numéricos correspondentes ao período, $T = \frac{4}{3}$ Segundo 3149

R.1 Semelhanças entre operadores de multiplicação e diferenciação 3166

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lista de Exemplos: Partes II–IV (Análise)

18.1 Carga Hidrostática . . . 878
18.2 Expansão térmica/tensão . . . 883
18.3 Áreas tributárias . . . 890
19.1 Carga hidrostática . . . 901
19.2 Transferência de carga . . . 902
19.3 Biapoiado viga . . . 903
19.4 Carga parabólica . . . 903
19.5 Três vãos . . . 904
19.6 Três dobradiças . . . 905
19.7 Suportes inclinados . . . 907
19.8 Estrutura da grade . . . 908
19.9 Equilíbrio do avião . . . 909
19.10 Barcaça Jumbo . . . 910
19.11 Rankine: Equilíbrio de um corpo flutuante (prova hidrostática) . . . 913
19.12 Palazzetto dello sport; Nervi . . . 915
20.1 Treliça análise; método de articulações . . . 924
20.2 3D treliça . . . 927
20.3 Método das seções . . . 932
20.4 Simples treliça; método de articulação/matriz . . . 934
20.5 Complexo treliça; método de articulação/matriz . . . 936
21.1 Viga com carga inclinada . . . 949
21.2 Inclinado pórtico . . . 950
21.3 Pórtico com carga hidrostática . . . 953
21.4 Carga linearmente variável . . . 955
21.5 Pórtico; Exemplo de telhado inclinado . . . 956
21.6 Reciproca pórtico . . . 957
21.7 3D pórtico . . . 961
22.1 Integração dupla . . . 967
22.2 Deflexão máxima . . . 968
22.3 Forma de esqui ideal . . . 969
22.4 Flutuando viga . . . 970
22.5 Roda de bicicleta . . . 975

CÓPIA PARA REVISÃO

22.6 Rigidez de uma mola helicoidal 981
22.7 Interruptor bimetálico 983
22.8 Área de curva, cantilevered viga 987
22.9 Curvação do momento, biapoiado viga 987
22.10 Deflexão máxima 989
22.11 Pórtico submetido a carregamento de temperatura 990
22.12 Comprimento de plástico 993
22.13 Conjugar viga; carga concentrada 995
22.14 Conjugar viga; variável I 996
23.1 Deflexão cantilevered viga 1000
23.2 Torção não uniforme de uma seção I 1012
24.1 Viga 1022
24.2 Pórtico; Deflexões 1023
24.3 Pórtico, rotação 1024
24.4 Suporte flexível 1025
24.5 Cantilever suportado por cabo 1027
24.6 Deformação torsional e flexural 1028
24.7 Flexural e cisalhamento deformações em uma viga 1030
24.8 Efeitos térmicos em uma viga 1031
24.9 Pipeline 1032
24.10 Treliça; Simples 1033
24.11 Treliça; complexo 1034
24.12 Treliça com cambero inicial 1035
24.13 Treliça com secundário tensões 1036
24.14 Anel circular 1038
24.15 Primavera 1040
25.1 Viga com haste de gravata 1052
25.2 Análise do edifício de aço pórtico 1053
25.3 Treliça, uma força redundante 1057
25.4 Treliça: Duas forças redundantes 1059
25.5 Treliça: Carga térmica 1062
25.6 Primavera apoiada viga 1063
25.7 Queen post 1065
25.8 Matriz de flexibilidade; Curvado viga 1068
25.9 Continuando viga 1074
25.10 Continuando viga 1075
27.1 Cantilevered viga 1091
27.2 Continuando viga 1092
27.3 Duas-espanheiras viga 1093
27.4 Duas voltas, desvio inicial 1094
27.5 Pórtico 1096
27.6 Caixa de bueiro 1098

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

27.7 Continuando viga 1103
27.8 Deflexão de inclinação/distribuição do momento/Gauss-Seidel 1105
28.1 Linhas de influência para um biapoiado viga 1109
28.2 Biapoiado viga com overhangs 1112
28.3 MüIler-Breslau; Cisalhamento Linha de influência 1113
28.4 MüIler-Breslau; Momento Linha de influência 1114
29.1 Instabilidade geométrica 1116
29.2 Impacto da carga axial na deformação flexural 1118
29.3 Grande deflexão do cantilever viga 1121
29.4 Flambagem de duas dobradiças rígidas pilar 1127
29.5 Flambagem de dobradiças pilar 1131
29.6 Flambagem de fixo-fixado pilar 1132
29.7 Flambagem de torção fixa pilar 1134
29.8 Pilar com suportes elásticos 1135
29.9 Constrangido flambagem 1137
29.10Torre de água 1138
30.1 Cabo funicular 1150
30.2 Cabo funicular inclinado 1152
30.3 Gôndola bi-cabo 1153
30.4 Geometria inclinada do cabo 1165
30.5 Forças de cabo inclinadas 1166
30.6 Torre com cara 1167
30.7 Ponte de suspensão 1169
30.8 Cabo inextensível; temperatura 1171
30.9 Cabo extenso: flecha 1171
30.10Cabo extenso. térmica 1172
30.11Cabo extenso. Prostress 1172
30.12Enfie-se em um cabo inclinado 1177
30.13Suporte a cabo de ônibus 1177
30.14Catenária vs parábola 1180
31.1 Carga falha de um voussoir; O método de Pippard 1197
32.1 Três arcos dobradiças; carga concentrada; analítico 1216
32.2 Três arcos dobradiças; carga concentrada 1218
32.3 Três arcos dobradiças; Carga uniforme 1219
32.4 Arco circular sem dobras 1223
32.5 Arco perfeito 1238
32.6 Arco parabólico de três torções 1239
32.7 Dois arcos parabólicos de corte transversal 1239
32.8 Arco parabólico sem dobra 1245
32.9 Carga térmica no arco parabólico 1251
32.10Viga de arco 1252
32.11Arco helicoidal; carga concentrada 1258

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

33.1 Idealização de chapa fina contra grossa 1267
33.2 Recuperando tensões dos resultados do momento da placa 1270
33.3 Placa quadrada sob pressão uniforme 1271
33.4 Sensibilidade de deflexão da placa para espessura 1272
33.5 Placa circular apertada sob pressão uniforme 1276
34.1 Comparação da membrana & Raso casca 1329
34.2 Desenho de cilíndrico casca 1342
35.1 Computação ω_n, T_n, e f_n para um sistema SDOF 1360
35.2 Estimando amortecimento de decremento logarítmico 1364
35.3 Resposta harmônica: amplificação e fase 1367
35.4 Resposta de impulso da unidade de um sistema SDOF amortecido 1368
35.5 Carregamento de passo súbito: A amplificação dinâmica Fator de 2 1370
35.6 Carga de pulso retangular e espectro de choque 1371
35.7 Resposta de frequência a uma máquina periódica Força com dois harmônicos 1374
35.8 Desenho sísmico de uma única história usando um espectro de resposta 1377
35.9 Análise modal de um edifício 3-DOF sob carregamento sísmico 1381
35.10 Frequência natural de uma ponte de aço e Verificação de ressonância dos pedestres 1385
35.11 Viscoso equivalente amortecimento de um bilinear Histerese loop 1388
35.12 Dutilidade demanda e redução de força para um concreto armado pórtico . . 1389
35.13 Projeto de um amortecedor de massa sintonizado para um edifício alto 1392
35.14 Projeto de um prédio hospitalar isolado 1393
36.1 Asd; flexura 1401
36.2 Força máxima. Revisão 1410
36.3 Força máxima. Design I 1410
36.4 Força máxima. Design ii 1411
36.5 Análise exata 1412
36.6 R/C pilar, *c* Conhecido 1419
36.7 R/C pilar, *e* Conhecido 1420
36.8 Estudo de caso: Noz ponte pista 1424
37.1 Desenho de um arco estaticamente indeterminado 1430
37.2 A temperatura muda em um arco 1437
38.1 Método do portal; Edifício de subida baixa 1453
38.2 Solução Matlab 1464
38.3 Método Cantilever; Edifício de elevação alta 1466
38.4 Subsistema de eixo 1468
38.5 Parede de concreto cisalhamento 1469
38.6 Muralha de madeira 1472
38.7 Construindo deflexão transversal aproximada 1478
39.1 Aeroporto Dulles 1482
39.2 Torre Eiffel 1489
39.3 Magazini Generali 1497
39.4 Ponte George Washington 1501

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

39.5 Desenho de um arco de duas voltas 1508
39.6 A temperatura muda em um arco 1516
39.7 Arco parabólico com variação secante de I 1519
42.1 Ortogonal viga 1550
42.2 Ortogonal pórtico 1552
42.3 Grelha 1559
42.4 Híbrido pórtico 1563
42.5 Grade híbrida 1567
44.1 Pórtico 1597
44.2 Viga 1602
44.3 Treliça 1607
45.1 Inquilinoso 1620
46.1 Determinar estaticamente a matriz estática 1628
46.2 Viga matriz estática 1629
46.3 Estaticamente indeterminada matriz estática 1630
46.4 Seleção de forças redundantes 1632
46.5 Cinemática matriz: treliça exemplo 1636
46.6 Matriz de flexibilidade 1640
46.7 Flexibilidade para rigidez 1642
46.8 Matriz de rigidez de um elemento curvo 1643
46.9 Transformação congruente 1647
46.10 Transformação congruente de um pórtico 1649
47.1 Euler: Axial 1683
47.2 Euler: flexura 1684
47.3 Hamilton 1693
48.1 PCVW, cantilevered cônico viga 1722
48.2 Três arcos semi-circulares dobradiças 1723
48.3 PVW, cantilever cônico 1726
48.4 PEPT, primavera e massa 1730
48.5 PTPE; Preso viga com varieble I 1731
48.6 Não linear elástico treliça 1734
48.7 Castigliano 2; Cantilevered viga 1736
48.8 Castigliano 2; deflexão de um uniformemente carregado viga usando o segundo teorema de Castigliano 1737
48.9 Castigliano 2, não linear 1737
48.10 Castigliano 2, deflexão da primavera 1737
48.11 Rayleigh Ritz uniformemente carregado biapoiado viga 1739
48.12 Métodos de variação 1741
51.1 Operadores Jacobianos 1806
52.1 Verifique simetria e definição positiva do membro 1D axial 1829
52.2 Vibração de cordas 1833
52.3 Matriz de rigidez de um elemento viga 1838

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

52.4 Transferência de calor 1841
53.1 Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral .1850
53.2 Calibrando os coeficientes de Rayleigh amortecimento para um edifício cisalhamento 1856
53.3 Base analítica: Vibração livre das condições iniciais gerais 1857
53.4 Método Euler 1859
53.5 Passo de estabilidade da diferença central 1870
53.6 Velocidade de onda e axial frequências naturais de uma haste de aço 1873
55.1 Módulo Tangent 1913
56.1 Análise seccional não linear. analítico 1921
56.2 Deitou-se. Aço 1925
56.3 Deitou-se. Concreto/ACI 1929
56.4 Curvação do momento de uma seção I R/C 1934
57.1 Fixo viga; Carga central 1950
57.2 Fixo viga; carga offset 1950
57.3 Continuando viga 1950
57.4 Ortogonal pórtico 1951
57.5 Inclinado pórtico 1952
57.6 Cantiliver I Proped 1956
57.7 Cantiliver II Propped 1956
57.8 Fixado viga 1957
57.9 Inclinado pórtico 1958
57.10Quadrado laje 1964
57.11Rectangular laje 1967
59.1 Método de Newton, escalar 1983
59.2 O método de Newton. vetor 1986
60.1 Pilar flambagem 2009
60.2 Pórtico flambagem; Solução Matlab 2011
60.3 Pórtico flambagem; Solução matemática 2013
60.4 Impacto da carga axial na deformação flexural 2014
60.5 Grande deflexão do cantilever viga 2019
60.6 Flambagem carga sem $\mathbf{K}_{geom}$ 2023
62.1 Rótula plástica em um aço pilar 2138
63.1 Pilar modelagem 2179
63.2 Viga modelagem 2180
64.1 Matriz de correlação 2199
64.2 Hipercubo latino: Trabalhou como exemplo com duas variáveis 2205
64.3 Exemplo do Método Estimativo de Pontos 2208
64.4 Taylor Series Diferença finita Método Exemplo 2209
64.5 Expansão do caos polinomial 2211
64.6 Método Morris 2217
64.7 Método Morris. identificação de variáveis importantes 2221

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

65.1 Adaptando-se a um modelo hiperbólico não linear 2237
65.2 Regressão bayesiana com base quadrática e Metrópolis.. 2244
67.1 Análise de riscos sísmicos 2296
68.1 Cálculos do Período de Retorno 2306
69.1 Exemplo de curva da demanda 2321
69.2 Análise de push-over; Exemplo prático 2322
72.1 Exemplo completo de PBEE 2401
B.1 Carga do vento 2415
B.2 Terramoto, carga em um Pórtico 2425
B.3 Terremoto em um prédio alto 2426
B.4 Redução de carga ao vivo I 2430
B.5 Redução de carga ao vivo II 2431
K.1 FFT 3052
L.1 Eliminação de Gauss 3072
L.2 Eliminação Gauss-Jordan 3072
L.3 **lu** Descomposição 3073
L.4 A decomposição de Cholesky 3074
L.5 Gauss-seidel 3075
L.6 Gauss-Seidel 3076
L.7 Decomposição de valor singular 3077
L.8 Pré-condicionamento 3078
N.1 Índice de confiabilidade 3102
R.1 Tangente para uma curva 3177
R.2 Divergência de um vetor 3179
R.3 Gradiente de um campo escalar I 3180
R.4 Gradiente de um campo escalar ii 3181
R.5 Gradiente de um campo vetorial 3183
R.6 Interpretação física do teorema da divergência 3185

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lista de Pontos-Chave: Partes II–IV (Análise)

17.1 Requisitos da análise estrutural 860
17.2 Projeto estrutural Requisitos 861
18.1 Condição para análise dinâmica 877
19.1 Equações do equilíbrio 896
19.2 Diagrama de corpo livre 900
21.1 Esforços internos em estruturas 942
21.2 Cisalhamento; Diferencial 947
21.3 Momento; Diferencial 947
21.4 Cisalhamento; Integral 947
21.5 Momento; Integral 948
22.1 Governando Equação diferencial Flexure 967
22.2 Proposição; Primeiro Teorema da Área Curvatura 985
22.3 Proposição: Segundo Teorema da Área Curvatura 986
23.1 Cisalhamento deformação 1004
23.2 Torção uniforme e não uniforme 1009
24.1 Primeira Lei da Termodinâmica 1017
24.2 Princípio de (Complementar) Trabalho virtual 1019
24.3 Teoria Reciproca de Maxwell-Betti 1019
25.1 Equações 1050
26.1 Relações de força em uma viga 1084
27.1 Método de Deflexão Deslizante 1090
27.2 Distribuição do Momento 1102
27.3 Distribuição do momento, deflexão da inclinação e Gauss-Seidel 1105
28.1 Linha de influência 1108
28.2 MüPrincípio de Iler-Breslau 1113
30.1 General Cable 1151
32.1 Teorema de Eddy 1216
40.1 Grau de liberdade 1529
40.2 Graus de liberdade de diferentes elementos 1530
41.1 Esforços internos para diferentes tipos de elementos 1536

CÓPIA PARA REVISÃO

44.1 Coração do Método da rigidez direta 1589
45.1 Matriz de rigidez autovalores 1615
45.2 Características do elemento Matriz de rigidez 1615
45.3 Número da condição 1617
45.4 Precisão e condição de doença 1619
46.1 Relacionamento 1640
46.2 Relacionamento 1641
46.3 Transformação Congruente 1646
47.1 Princípio de Hamilton 1690
48.1 Primeira lei da termodinâmica 1706
48.2 Princípio do trabalho virtual complementar 1722
48.3 Princípio do Virtual Deslocamento 1725
48.4 Princípio do Valor Estacionário da Energia Potencial 1729
48.5 Primeiro Teorema de Castigliano 1733
48.6 Segundo teorema de Castiglione 1736
50.1 Matriz de rigidez e Forças Elementares 1787
50.2 Critério de convergência 1790
57.1 Teoria do Limite Superior 1947
57.2 Teorema inferior 1953
63.1 Papel dos estudos Elemento finito 2172

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Parte II

Introdução (Fundamentos; Métodos Analíticos)

Este volume oferece o que é talvez o único tratamento abrangente de análise estrutural que abrange desde princípios fundamentais até métodos avançados computacionais e probabilísticos dentro de uma única estrutura unificada. Empregando uma notação consistente e uma abordagem filosófica coerente ao longo de todo, eu coloquei grande importância em bases teóricas rigorosas, reconhecendo que a compreensão profunda dos princípios subjacentes - não mera facilidade processual - é essencial para o bom julgamento de engenharia e a aplicação confiante de métodos para problemas além daqueles encontrados nos livros didáticos. Isto não é um trabalho para o fraco coração de engenheiro contente com tratamento superficial; Exige e recompensa o genuíno engajamento intelectual.

De métodos clássicos através de princípios energéticos, matriz análise estrutural, elementos finitos, análise não linear, e culminando em engenharia sísmica baseada em desempenho, este trabalho demonstra que a verdadeira mestria de análise estrutural repousa sobre Perspicácia teórica que transcende qualquer ferramenta computacional ou código de projeto.

Engenheiros criam coisas que ainda não existem. Você não pode olhar para cima o que você vai fazer em um livro. Então, o que você faz? Volte para a teoria. Isso permite que você desenhe em tudo o que já foi feito antes e sintetizar algo novo. Permite que você veja coisas e faça conexões que ninguém mais verá.

Esta geração de estudantes de engenharia em particular deve dominar a teoria. Agora, uma grande parte do trabalho do engenheiro é calcular as coisas. Mas acho que a IA logo nos levará para uma era pós-calculacional onde tudo é feito automaticamente. Nesta era, um engenheiro com uma educação teórica profunda realmente se destacará.

Baker, 2023 William Baker: Structural Engineer and Problem Solver

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 17

Introdução

Abstract

Este capítulo introdutório do Livro I fornece uma visão abrangente de seus princípios, aplicações e os papéis distintos dos profissionais dentro da indústria da construção. Inicialmente, apresenta uma perspectiva ampla de análise estrutural, preparando o palco para uma exploração mais profunda do assunto mais tarde. Delineia as responsabilidades e perspectivas específicas dos arquitetos em comparação com os engenheiros estruturais. O núcleo do capítulo é dedicado aos aspectos fundamentais da engenharia estrutural, incluindo design, análise e avaliações de segurança. A discussão se estende às várias disciplinas interligadas com análise estrutural, enfatizando a natureza interdisciplinar do campo. Uma parte significativa do capítulo introduz o conceito de esforços internos, propondo seu uso como uma alternativa simplificada para cálculos tensão em certos contextos. Esta abordagem facilita uma compreensão mais intuitiva de como as forças são geridas dentro de uma estrutura. Depois disso, o capítulo explora diferentes tipos de elementos de transferência de carga - como vigas, pilares e treliças - e seus papéis na distribuição de cargas em toda uma estrutura. Finalmente, o capítulo conclui examinando os diferentes tipos de estruturas, do mais básico ao complexo.

17.1 O quadro geral 847
17.1.1 Arquitetura 848
17.1.2 Engenharia estrutural 849
17.1.3 Disciplinas integradas em análise estrutural 852
17.2 Elementos: Primário esforços internos 853
17.3 Carregar elementos de transferência 853
17.4 Tipos de estrutura 854
17.5 Transformação de ferramentas de engenharia 858
17.6 Cursos de engenharia estrutural . . 860

17.1 O quadro geral

1 Primeiro, a Engenharia Estrutural está realmente focando em uma (ou mais) das seguintes tarefas, Fig. 17.1:

CÓPIA PARA REVISÃO

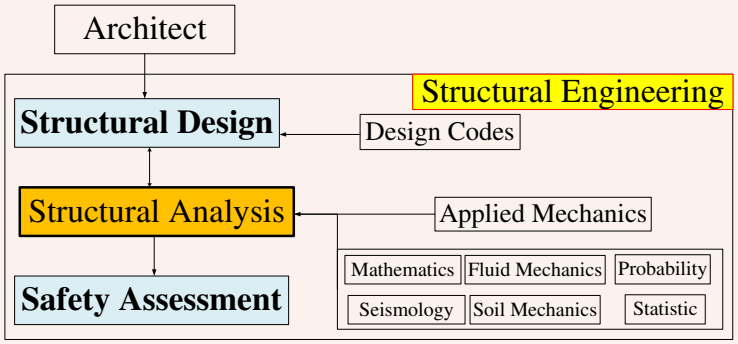


Figura 17.1: Análise estrutural; O quadro geral

Projeto de *Novo* estruturas (que seja um edifício, um avião, ou um submarino).

Análise de *Novo* estruturas (de novo edifícios, aviões, submarinos ou outros).

Avaliação de Segurança de qualquer estrutura.

17.1.1 Arquitetura

2 A arquitetura engloba a arte e ciência de projetar e construir edifícios e outras estruturas físicas. Vai além da mera construção para incluir considerações de estética, funcionalidade, contexto cultural e sustentabilidade ambiental.

3 Arquitetos são profissionais treinados no projeto e planejamento de estruturas, e trabalham em estreita colaboração com clientes para traduzir suas necessidades e desejos em projetos arquitetônicos tangíveis.

4 A arquitetura envolve a criação de espaços que não só servem para fins práticos, mas também evocam emoções, inspiram e contribuem para o ambiente construído de forma significativa.

5 É um campo multidisciplinar que se baseia em princípios de engenharia, arte, sociologia, psicologia e ciência ambiental para criar estruturas que são esteticamente agradáveis e funcionais. A arquitetura desempenha um papel significativo na formação de nossas cidades, comunidades e sociedades, refletindo valores culturais, avanços tecnológicos e aspirações sociais.

6 Os arquitetos enfatizam a abordagem geral, em vez de elementar para Design. No processo de design, eles conceituam um esquema de forma espacial como um sistema total. Eles são generalistas.

7 O projeto arquitetônico deve respeitar várias restrições Basicamente as mesmas estabelecidas por Vitruvius há dois mil anos§6.3.1).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Funcionalidade: Influência da estrutura adotada nos propósitos para os quais a estrutura foi erigida.

Estética: O arquiteto muitas vezes impõe suas preocupações estéticas ao engenheiro. Isto, por sua vez, pode colocar severas limitações no sistema estrutural.

Economia: Deve-se ter em mente que os dois maiores componentes de uma estrutura são trabalhos e materiais. O custo do projeto é relativamente insignificante.

8 O termo "arquitetura"ganhou amplo reconhecimento durante o período renascentista como o interesse pela arquitetura clássica foi revivido, e novos estilos e teorias arquitetônicas surgiram. Arquitetos como Andrea Palladio, Leon Battista Alberti e Filippo Brunelleschi desempenharam papéis cruciais na formação do discurso arquitetônico e no estabelecimento da arquitetura como uma profissão respeitada (capítulo 15).

17.1.2 Engenharia estrutural

9 A engenharia estrutural é um ramo não só da engenharia civil[1] mas também mecânica, naval e aeroespacial que lida com o projeto e análise de estruturas.

10 Engenheiros estruturais são responsáveis por garantir que as estruturas sejam seguras, estáveis e capazes de suportar as cargas e forças às quais podem ser submetidas durante sua vida útil.

11 O principal papel de um engenheiro estrutural é projetar estruturas que possam suportar seu próprio peso, bem como as cargas que eles podem experimentar a partir de fatores ambientais.

12 Eles devem considerar vários fatores, incluindo materiais usados, códigos de construção e regulamentos (quando aplicável), condições ambientais, e o uso pretendido da estrutura.

13 Como discutido em §11.2, o termo ”Engenharia Estrutural” emergiu tão tarde quanto meados do século 19 como uma extensão natural do campo então maduro da Mecânica (que se concentrava em membros estruturais únicos). Na verdade, pode-se argumentar que análise estrutural não é nada mais do que mecânica aplicada a sistemas de elementos.

14 Historicamente, nós tivemos primeiro ”construtores” (por exemplo. Imhotep para as pirâmides, Bruneleschi para a cúpula de Florença).

17.1.2.1 Projeto estrutural

15 Esta é uma das duas principais tarefas realizadas pelos engenheiros estruturais.

16 Com base nos desenhos de arquitetura, seja para um edifício ou um carro) e análise posterior, engenheiros projetam os elementos estruturais do prédio ou projeto de infraestrutura para transportar as cargas com segurança. Isso inclui selecionar materiais apropriados

[1] Historicamente, havia apenas dois tipos de engenharia: Militares e civis.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

(como concreto, aço, madeira ou materiais compostos), determinar as dimensões e geometria dos membros estruturais (como vigas, pilares, lajes, e fundações), e detalhar as conexões entre Esses elementos. Note que o seu é um processo iterativo como discutido em §36.1.1.

17 Para uma maior visão da relação entre arquitetos e engenheiros estruturais, o leitor é referido ao Capítulo 15.

18 Projeto estrutural deve cumprir com o existente *Códigos de Design*.. Isso é mais abordado em §36.

19 Há diferentes níveis de projeto estrutural:

Design conceitual: Esta fase inicial envolve gerar ideias e conceitos para a estrutura baseada em requisitos de projeto, condições do local e considerações arquitetônicas. Engenheiros e arquitetos colaboram para desenvolver um conceito básico de design que descreve a forma, função e layout geral da estrutura.

Desenho preliminar: Nesta fase, engenheiros realizam análises preliminares e cálculos para avaliar a viabilidade do projeto conceitual. Podem realizar análises estruturais aproximadas para estimar cargas, selecionar sistemas estruturais potenciais e determinar tamanhos preliminares de membros. O objetivo é desenvolver uma compreensão mais detalhada dos requisitos estruturais e identificar quaisquer grandes desafios de design.

Design Detalhado: Durante esta fase, engenheiros refinar o projeto baseado em análises e cálculos mais detalhados. Eles especificam as dimensões precisas, materiais e conexões para todos os elementos estruturais, incluindo vigas, pilares, lajes, e fundações. Desenhos detalhados, planos e especificações são criados para comunicar os requisitos de projeto a empreiteiros e equipes de construção.

Projeto de Construção: Este nível de design se concentra em preparar a estrutura para construção. Engenheiros desenvolvem planos de construção e sequências, incluindo sistemas de suporte temporário, cofragem e escoramento, para garantir a execução segura e eficiente do projeto no local da construção. Eles também abordam considerações relacionadas à construção, como disponibilidade de material, logística do local e agendamento.

Avaliação e Reforço: Nos casos em que estruturas existentes requerem avaliação ou reabilitação, engenheiros podem realizar avaliação e projetos reforço. Isso envolve inspecionar a estrutura, avaliar sua condição, identificar quaisquer deficiências ou fraquezas, e desenvolver estratégias reforço para fortalecer ou atualizar a estrutura para atender aos atuais padrões de segurança e requisitos de desempenho.

Estes níveis de projeto estrutural representam uma progressão da conceptualização para a construção, com níveis crescentes de detalhe e refinamento em cada fase. Uma colaboração eficaz entre arquitetos, engenheiros, empreiteiros e outros atores é essencial para garantir um resultado bem sucedido em cada nível de design.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

17.1.2.2 Análise

Para o contexto histórico, consultar §11.8

20 Enquanto este é precisamente o tópico abordado neste livro, análise nunca é um fim por si só, é apenas um passo essencial para projetar um nova estrutura ou avaliar a segurança de uma estrutura existente.

21 A análise pode variar desde o mero cálculo da mão (como coberto no Livro II), simulação de computador (Livro III) até análises complexas não lineares (Livro IV).

22 De um ponto de vista mecanicista,

Definition 17.1: Requisitos da análise estrutural

Todas as soluções de análise estrutural devem satisfazer

1. Estáticos (equilíbrio)
2. Relação constitutiva (tensão-deformação ou relações de força deslocamento
3. Cinemática (compatibilidade de deslocamento ou deformação/deslocamento relações)

23 No processo projeto estrutural, é dado um conjunto de forças, e dimensões de um componente estrutural (viga, pilar, laje, e então para

Estruturas aço/madeira Selecione a seção apropriada.

Concreto armado: Determine as dimensões do elemento e Reforço interno (número e tamanhos de barras de reforço).

24 Para novas estruturas, é um processo iterativo entre análise e design. Primeiro, um projeto preliminar é feito usando regras de polegares (melhor conhecido para engenheiros com experiência em design) analisados, e depois redesenhado, Capítulo 36.

25 Seguindo o processo de design (força de endereço)[2], devemos então verificar para

Serviço: Deflexões, larguras de fissura sob a carga aplicada. Compare com valores aceitáveis especificados no código de projeto.

Fracasso: e comparar a carga de ruptura com os tempos de carga aplicados os fatores apropriados de segurança.

Se o projeto não é aceitável, então deve ser modificado e reanalisado.

26 Em resumo, a análise é sempre necessária.

[2]Note que para aeronaves voando sobre o oceano, a capacidade de manutenção (capacidade para sustentar rachaduras) é realizada abeto, força posteriormente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 17.2: Projeto estrutural Requisitos

Projeto estrutural deve satisfazer:

1. Força$\sigma < \sigma_f$)
2. Rigidez (“pequenas deformações’)
3. Estabilidade (flambagem, rachando)

27 Curiosamente Torroja§15.4.6) considerados cálculos como um pensamento após, necessários apenas para avaliar a viabilidade de um projeto.

17.1.2.3 Avaliação de segurança

28 Esta é uma tarefa relativamente recente para engenheiros estruturais. Ela vem do envelhecimento das estruturas, e da necessidade de reavaliar sua integridade estrutural.

29 Erroneamente, alguns engenheiros avaliam a segurança com o cumprimento do código de projeto vigente[3].

30 Invariavelmente esta etapa, é uma das mais complexas para análise como contrariamente ao projeto (elastic linear), para avaliação de segurança não podemos mais assumir a resposta para ser linear (possivelmente devido à extensa fissuração ou deformação irreversível) e a análise Deve ser não linear.

17.1.3 Disciplinas integradas em análise estrutural

31 Análise estrutural, como uma disciplina, engloba a integração de princípios de múltiplas disciplinas. Alguns podem ser óbvios (mecânica), ou menos:

Mecânica (Solid) é a compreensão de membros individuais submetidos a estressores. Por sua vez análise estrutural aborda uma assembleia de elementos, cada um deles governado por equações fundamentais relevantes na mecânica.

Matemática Enquanto o cálculo variável único é omnipresente, cálculo multivariável (cálculo vetor), álgebra linear (métodos baseados em computador no Livro III), equações diferenciais, métodos variacionais.

Mecânica Fluida Como a equação de Bernouilli para carga do vento é um fator importante.

Mecânica do Solo é fundamental para determinar o tipo de suporte estrutural.

Sismologia é essencial para fornecer movimento do solo aceleração para análise sísmica.

[3]Por exemplo, quando o edifício de contenção nuclear de Seabrook foi encontrado com uma extensa rachadura devido a reações agregadas de Alcali, a Comissão Reguladora Nuclear se satisfez quando o proprietário da estrutura ‘‘tfraaked” o antigo código de projeto ACI-318 para avaliar Segurança!

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Probabilidade (e estatísticas) são ferramentas importantes na avaliação da segurança das estruturas. A função de resistência (PDF) é baseada em uma análise estatística dos testes laboratoriais, enquanto a demanda baseia-se no PDF da provável ocorrência de cargas.

17.2 Elementos: Primário esforços internos

32 esforços internos e tensões não são nada mais do que conceitos úteis feitos pelo homem. Só deformações pode ser medido fisicamente. Estes, por sua vez, podem ser relacionados com tensões através Módulo de Young, e então eles podem ser integrados sobre o seção transversal para definir forças axiais internas, cisalhamento, flexura e torção (§).

33 Eu me referiria ao primário Esforços internos o seguinte:

Axial N**:** cabos, elementos treliça, arcos, membrana, cascas

Flexural M**:** Vigas, pórticos, grades, placas

Torsional T**:** Grids, 3D pórticos

Cisalhamento V**:** Pórticos, grades, paredes.

34 Na realidade, dependendo do tipo de estrutura podemos ter um número desses esforços internos em combinação §17.4.

17.3 Carregar elementos de transferência

35 deve-se ter em mente que sob carga, uma estrutura se deforma e podemos medir deformação. Então, através da suposição de elasticidade nós relacionamos o deformação com tensões (que não pode ser medido *Per se*, e então, por simplicidade nós substituímos tensões por seus valores integrais, §O.9.

36 Assim, temos quatro básicos esforços internos, Fig. 17.2

Axial: cabos, elementos treliça, arcos, membrana, cascas

Flexural: Vigas, pórticos, grades, placas

Torsional: Grids, 3D pórticos

Cisalhamento: Pórticos, grades, paredes.

37 Note que esforços internos de diferentes tipos coabitam em vários arranjos, dependendo do tipo de elemento §40.4.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

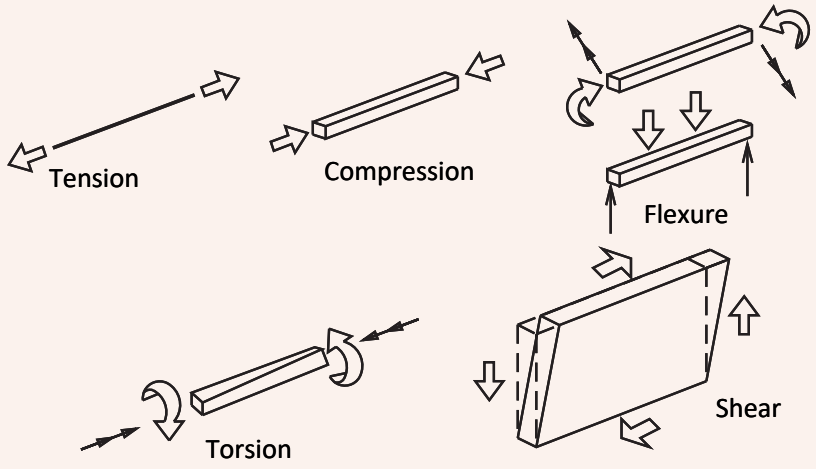


Figura 17.2: Tipos de forças em elementos estruturais (1d)

17.4 Tipos de estrutura

38 As estruturas podem ser classificadas da seguinte forma:

Tensão & Estruturas de compressão: Apenas, não cisalhamento, flexura, ou torção

Cabo (Tensão apenas): A alta resistência dos cabos de aço, combinados com a eficiência da tensão simples, torna os cabos estruturais ideais elementos para percorrer grandes distâncias, tais como pontes, e telhados de pratos, Fig. 17.3

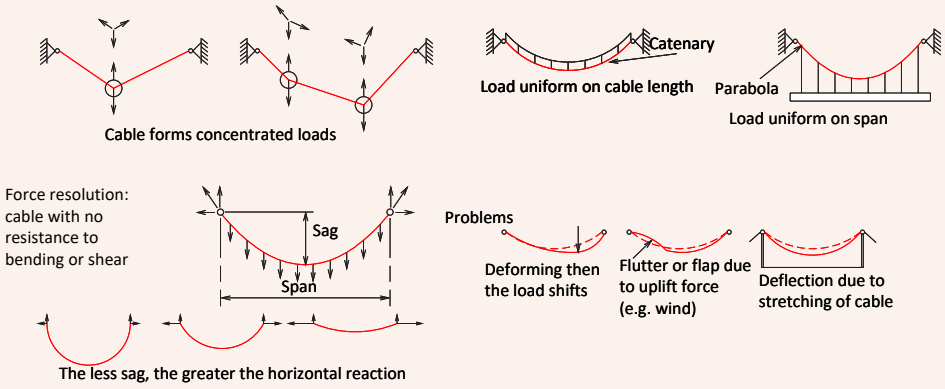


Figura 17.3: Aspectos básicos dos sistemas de cabos

Arcos (principalmente compressão) é uma estrutura de cabo revertida. Em um Arch, nós procuramos minimizar a flexão e transferir a carga através da axial Apenas forças. Arcos são usados para grandes telhados e pontes Fig. 17.4

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

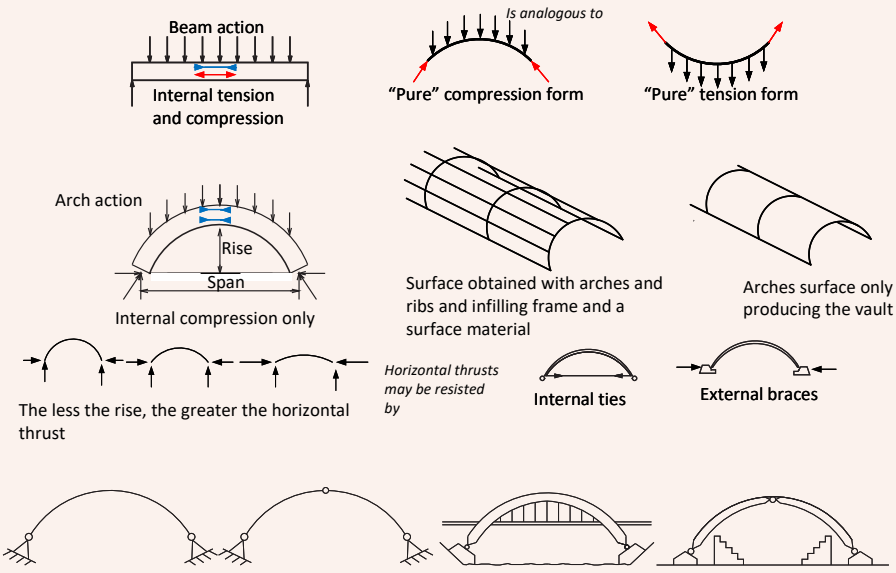


Figura 17.4: Aspectos básicos dos arcos

Treliças "tenho"*Pino conectado elementos que podem transmitir forças axiais apenas (tensão e compressão). Elementos são conectados por qualquer fenda, ferrada, ou* Prato de gusset *Conectores. No entanto, devido à construção Detalhes, pode haver..* secundário tensões *causado por relativamente rígido Conexões. Treliças são usados para vigas, telhados, pontes, torre elétrica, Fig. 17.5*

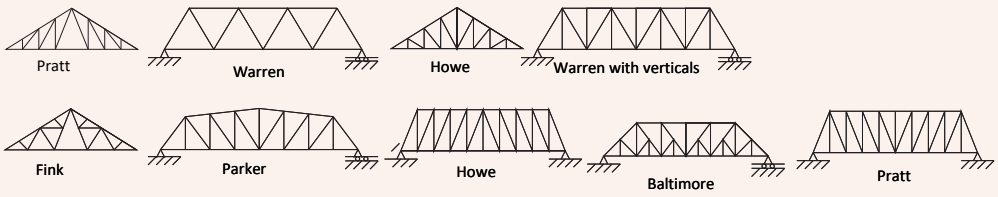


Figura 17.5: Tipos de..

Post e Vigas: Essencialmente um apoio pilar em que um "viga" Descansa, Fig. 17.6, e 17.7.

Vigas: Cisalhamento, flexura e às vezes forças axiais. Lembre-se disso $\sigma = \frac{Mc}{I}$ é aplicável apenas para *raso vigas*, i.e. De extensão/profundidade pelo menos igual a cinco. Considerando que R/C vigas são principalmente retangulares ou em forma de T, aço vigas são Normalmente eu moldei (se as flanges de cima não estiverem bem endurecidas, elas podem fivela, então devemos ter *Enrijece*).

Pórticos: A carga é coplanar com a estrutura. Axial, cisalhamento, flexura (com relação

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

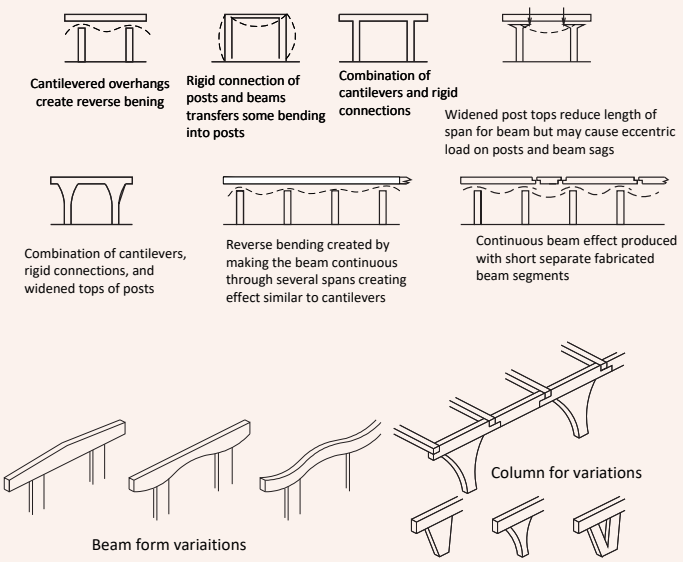


Figura 17.6: Variações nas configurações pós e vigas

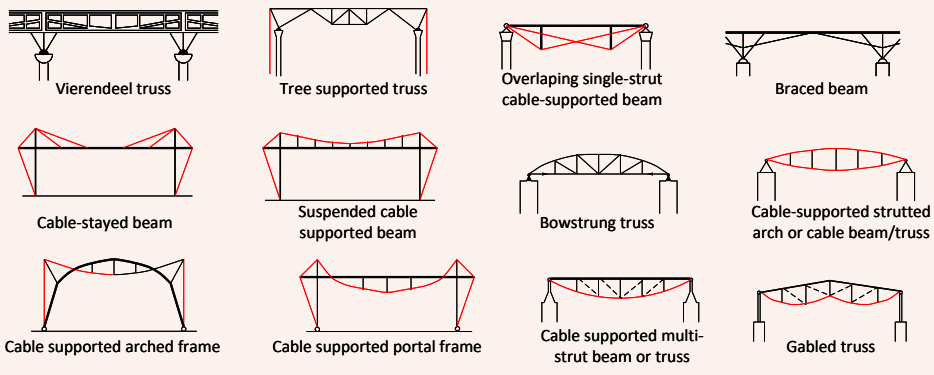


Figura 17.7: Diferentes viga tipos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

a um eixo em estruturas 2D e com relação a dois eixos em estruturas 3D), torção (apenas em 3D). O pórtico é composto de pelo menos um membro horizontal (viga) rigidamente conectados aos verticais[4]. Os membros verticais podem ter diferentes condições de contorno (que são geralmente governado pelas condições do solo). Pórticos são extensivamente usados para casas e edifícios, Fig. 17.8.

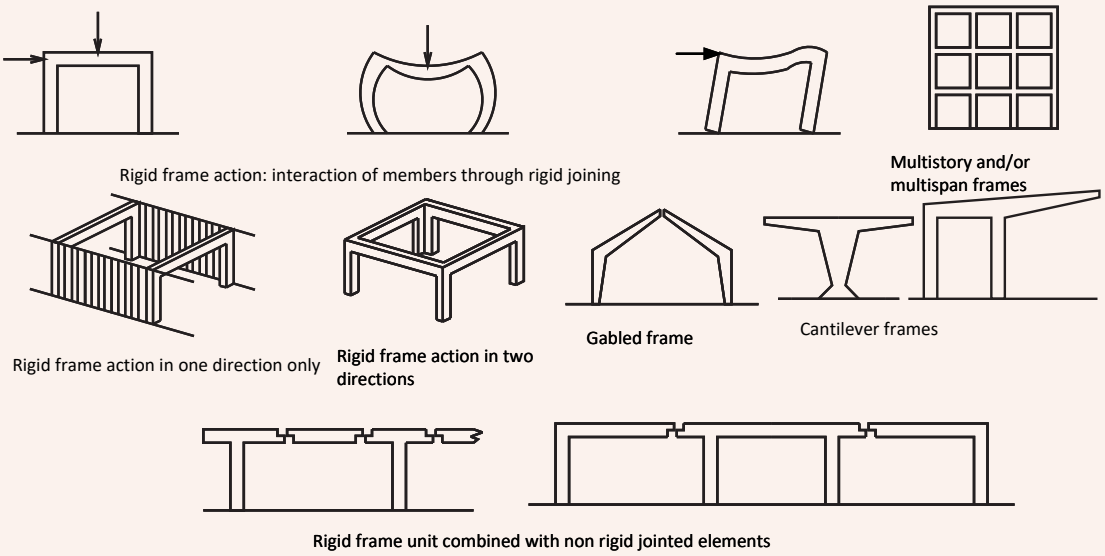


Figura 17.8: Formas básicas de pórticos

Grelhas e Pratos: A carga é ortogonal para o plano da estrutura. Flexão, cisalhamento, torção. Em uma grade, vigas estão em ângulos retos resultando em uma dispersão de cargas bidirecionais. Por causa das conexões rígidas entre o vigas, adicional rigidez é introduzido pela resistência torsional dos membros. Grids também podem ser *Estragado* para alcançar maior eficiência se o aspecto A proporção não é próxima de um. As placas são planas, rígidas, estruturas bidimensionais que transmitem verticalmente Carregar em seus suportes. Usado principalmente para *piso lajes*. *Pratos dobrados* é uma combinação de transversal e longitudinal viga ação. Usado para telhados de longo alcance. Note que o prato pode ser dobrado circularmente ao invés de longitudinalmente. Pratos dobrados são usados principalmente como telhados de longo alcance. No entanto, eles podem também ser usado como paredes verticais para suportar tanto vertical e horizontal -Cargas.

Membranas: Estruturas 3D compostas por uma superfície 2D flexível resistindo Apenas tensão. Eles geralmente são suportados por cabo e são usados para tendas e telhados de longo alcance Fig. 17.9.

[4]O precursor das estruturas pórtico foram os **Post e Lintel** onde o poste é vertical, em que a lintel está Simplesmente posado.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

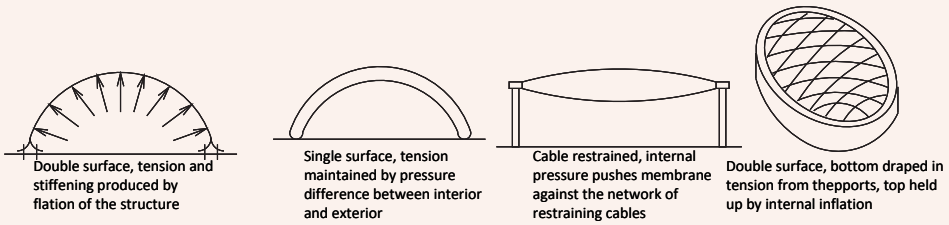


Figura 17.9: Exemplos de estruturas suportadas pelo ar

Cascas: Estruturas 3D compostas por uma superfície 2D curva, eles são geralmente moldadas para transmitir apenas axial de compressão tensões Fig. 17.10. Cascas são

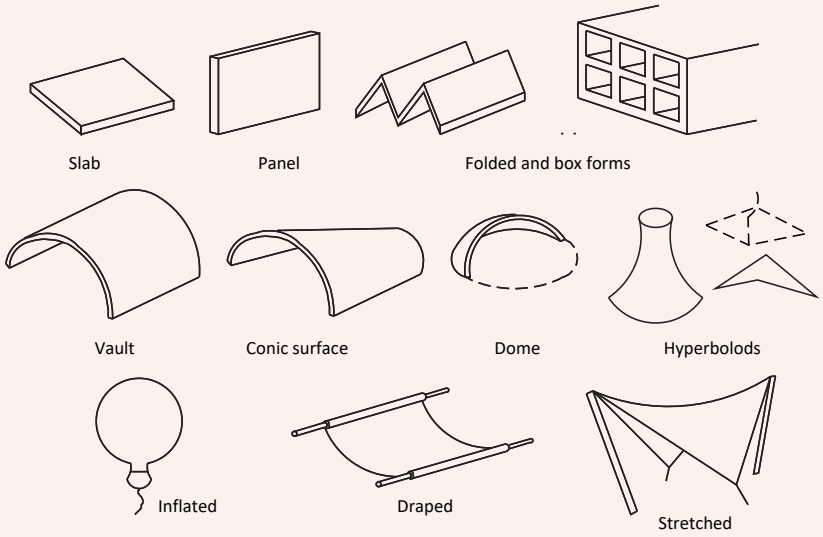


Figura 17.10: Formas básicas de cascas

classificados em termos de sua curvatura.

17.5 Transformação de ferramentas de engenharia

39 Como instrutor, tive que reconhecer que estamos vivendo em um mundo em evolução ao qual temos que nos adaptar *Antes* Nossos alunos.

40 Agora todos os alunos usam computadores desde o ensino médio (se não antes para jogos).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

41 A maioria dos programas de computador não tem mais manuais, ou curvas de aprendizado íngremes. Para um software ganhar confiança e apoio público tem que ser simples, elegante, intuitivo, salável. Isso afetou:

Escrevendo Os computadores revolucionaram nossas habilidades na escrita, à medida que o uso de computadores para processamento de texto se torna cada vez mais prevalente. Estudantes não mais

- Adquira caligrafia (técnica de escrever com a mão usando um instrumento de escrita).
- Pense bem antes de colocar idéias no papel (muito fácil de copiar/deletar/colar).

Em vez disso:

- WYSIWYG processador de texto (i.e. Palavra).
- Sistema de Preparação de Documentos com marcação de texto simples, LaTeX (semelhante ao HTML).
- Software de computador para verificação, validação, documentação e reutilização de cálculos matemáticos como o MathCad[5].

Computação Também evoluiu extensivamente, no início usamos Abaqus, regras de slides, e tivemos a capacidade de

- Realizar cálculos mentais (calculos aritméticos usando apenas o cérebro humano), ou seja, 78×3.
- Sinta os números $3200 \times 400 = 1,280,000$
- Realizar identidades trigonométricas simples, operações de cálculo $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ou $\int \frac{1}{x} dx$

No entanto, atualmente, confiamos (quase cegamente) em: Calculadoras programáveis, Excel, Matlab, Mathematica ou Mapple, Mathcad.

Línguas de Programação evoluído de Basic, Pascal, Fortran 90, Fortrann 2018, C, C++, Perl, Python e claro, estou perdendo muitos.

Redação Também evoluiu de elaboração de tabelas, "blue-prints", Auto-CAD, SolidWork, BIM (Modelagem de Informação Construtiva), REVIT e assim por diante.

42 Simplificando, devemos esperar ainda mais inovação no futuro próximo, possivelmente alimentada com IA.

43 Ainda precisamos ensinar algum do material deste livro para futuros engenheiros?

[5] Esperava-se que meus alunos enviassem todos os deveres de casa com o MathCad. Embora amplamente usado na indústria, infelizmente muitos colegas estão preocupados em iposar mais um software para aprender pelos alunos!

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

17.6 Cursos de engenharia estrutural

44 Educação de engenharia estrutural pode ser abordada de qualquer um dos dois Um de dois pontos de vista:

Architectural: Comece do design geral, e siga em direção detalhada Análise.

Educação: Elemental ao invés de abordagem global. A ênfase está ligada os elementos estruturais individuais e nem sempre no sistema total.

CVEN3525 procurará um equilíbrio entre essas duas abordagens.

45 Este é apenas o terceiro de uma longa série de cursos que podem ser feitos na Engenharia Estrutural, Fig. 17.11

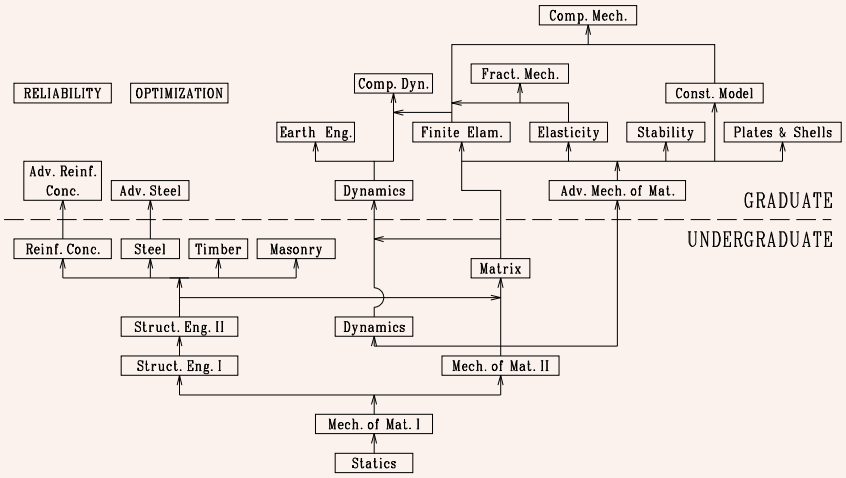


Figura 17.11: Sequência de cursos de engenharia estrutural

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 18

Carregar

Abstract

Este capítulo serve como uma introdução essencial ao conceito de cargas, que são fundamentais para análise estrutural.

Rejeitando o livro convencional de dependência em equações empíricas e tabulações extensas, este capítulo simplesmente fornece uma classificação abrangente e discussão detalhada de vários tipos de cargas. A classificação abrange cargas verticais, como cargas mortas e vivas, e cargas laterais, incluindo vento e forças sísmicas. Atenção especial é dada à derivação das equações dinâmicas de pressão (vento) e a discussão do comportamento da carga sob diferentes condições.

Abordagens empíricas de cargas estão, no entanto, cobertas pelo Apêndice B

O capítulo também introduz tópicos menos comumente abordados, como impacto e cargas secundárias, que são cruciais para entender o espectro completo de desafios em análise estrutural. Ao dissecar as características e efeitos de cada tipo de carga, este capítulo estabelece uma base robusta para a exploração do comportamento estrutural sob essas forças.

18.1 Introdução 862
18.2 Classificação de cargas 862
18.2.1 Vertical 862
18.2.2 Lateral 863
18.2.3 Hidrostático e terra 869
18.2.4 Carga de impacto 870
18.2.5 Secundário 871
18.2.6 Térmico 872
18.3 Considerações 874
18.3.1 Cargas projetadas 874
18.3.2 Colocação de carga 875
18.3.3 Combinações de carga 875
18.3.4 Carregar caminho 877
18.3.5 Áreas tributárias 880
18.3.6 Resposta estrutural 882

CÓPIA PARA REVISÃO

18.1 Introdução

1 Sem cargas, análise estrutural seria redundante. As cargas são os principais estressores em uma estrutura, e compreendê-los é fundamental. Na verdade, o propósito fundamental de uma estrutura é transferir uma carga do ponto A para apontar B.

2 Consequentemente, este é tipicamente o primeiro capítulo numérico em qualquer livro análise estrutural. Abrange dois tópicos principais: a) tipos de cargas e problemas associados; e b) equações empíricas baseadas em códigos para determinar as cargas de vento e sísmica.

3 Na minha opinião, essas equações empíricas podem ser confusas em um livro onde todos os outros tópicos são baseados na física/mecânica e derivam de derivação racional. Portanto, dividi a cobertura de cargas em duas partes: Este capítulo focará na classificação de carga e questões relacionadas, enquanto todos esses métodos baseados em código serão abordados no Apêndice B.

18.2 Classificação de cargas

4 Para uma cobertura detalhada de cargas, consulte o "Código Universal do Edifício"(UBC), (ICBO, 1994) E para o "Minimo Design Loads for Buildings and Other Structures"(ASCE/SEI 7-16, 2017).

18.2.1 Vertical

5 Cargas verticais em uma estrutura se referem às forças que agem para baixo devido à gravidade.

6 Cargas verticais caem em uma de duas categorias

Cargas Mortas:

7 São cargas permanentes resultantes do peso da própria estrutura, incluindo elementos como paredes, pisos, telhados e equipamentos fixos permanentes. Cargas mortas são estáticas e previsíveis, permanecendo constantes ao longo do tempo.

8 No processo de projeto, cargas mortas devem ser estimadas e verificadas no final de cada ciclo de projeto. Isso faz com que o processo de design *Iterativo.*

Cargas ao Vivo:

9 São cargas variáveis causadas pelo uso da estrutura, como pessoas, móveis, veículos e

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

equipamentos móveis. Cargas vivas podem mudar de magnitude e localização, tornando-as menos previsíveis do que cargas mortas.

10 Na análise de colocação de carga deve ser tal que o seu efeito (cisalhamento / momento) são maximizados.

11 Uma abordagem estatística é usada para determinar uma carga estática uniformemente distribuída que é equivalente ao peso da concentração máxima de ocupantes. Essas cargas são novamente definidas por ICBO, 1994 e.. ASCE/SEI 7-16, 2017.

Carga de neve

12 A carga de neve do telhado varia muito dependendo *Geográfico Localização e elevação*.. Eles variam de 20 a 45 psf, Fig. 18.1.

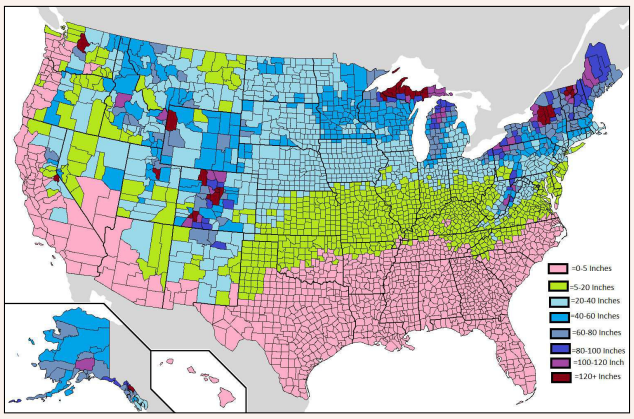


Figura 18.1: Mapa de neve dos Estados Unidos

18.2.2 Lateral

18.2.2.1 Vento

13 Carga de vento em uma estrutura refere-se à força exercida pelo vento na área da superfície de um edifício ou outra estrutura. Esta força é gerada pelo movimento das moléculas de ar e pode variar em magnitude e direção dependendo de fatores como velocidade do vento, direção do vento e forma do edifício, altura, localização geográfica, textura da superfície do edifício e rigidez do Estrutura.

14 As cargas de vento são particularmente significativas em *Edifícios altos*[1].

15 Vamos primeiro derivar o *equação de pressão dinâmica* Primeiro derivado por D. Bernoulli.

[1]A principal consideração pelo design de edifícios altos é o excessivo *deriva* causada por carga lateral (vento e possivelmente terremotos).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Vem dos princípios da energia cinética e massa de um fluido. A energia cinética (KE) para um objeto é dado por

$$KE = \frac{1}{2}mV^2$$

Onde m é a massa e V é a velocidade.

Para um fluido com densidade ρ, a massa m de um volume ΔV pode ser expresso como:

$$m = \rho \Delta V$$

Usando a expressão de massa acima, a energia cinética para um volume de fluido é:

$$KE = \frac{1}{2}(\rho \Delta V)V^2$$

Então, a energia cinética por unidade de volume é obtida dividindo-se por ΔV:

$$\frac{KE}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{18.1}$$

Isto representa a pressão dinâmica do fluido, quantificando a energia cinética por volume unitário devido ao movimento do fluido.

A unidade de pressão dinâmica q é pascals (Pa), que também é a unidade de energia cinética por volume unitário:

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Assim, a pressão dinâmica é uma forma de densidade energética.

[16] Se considerarmos um aerofólio , Fig. 18.2 o fluxo tem que ser mais rápido na parte superior (curvada) do que na inferior. Isso vai levar a uma redução na pressão estática acima da placa de ar comparado com abaixo dela. Essa diferença de pressão resulta em elevação.

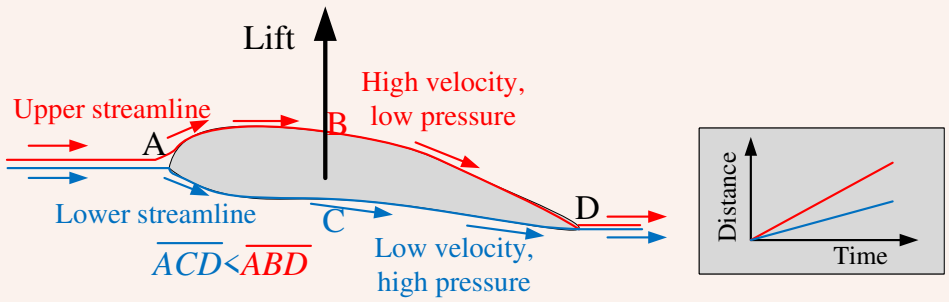


Figura 18.2: Airfoil, equação de Bernoulli.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

17 Substituindo o ar na Eq. 18.1, a densidade de massa do ar ρ é o peso do ar dividido pela aceleração da gravidade $g = 32.2$ ft/seg^2.. Ao nível do mar e uma temperatura de 15^{o}C (59^{o}F), o ar pesa 0,0765 lb/ft^3 Isso produziria uma pressão de

$$q_s = \frac{1}{2}\frac{(0.0765)\text{lb/ft}^3}{(32.2)\text{ft/sec}^2}\left(\frac{(5280)\text{ft/mile}}{(3600)\text{sec/hr}}V\right)^2 \tag{18.2}$$

ou[2]

$$q_s = 0.00256V^2$$

Onde V é a velocidade máxima do vento (em milhas por hora) e q_s Está dentro Psf. V Pode ser obtido de mapas de vento (nos Estados Unidos $70 \leq V \leq 110$), Fig. 18.3.

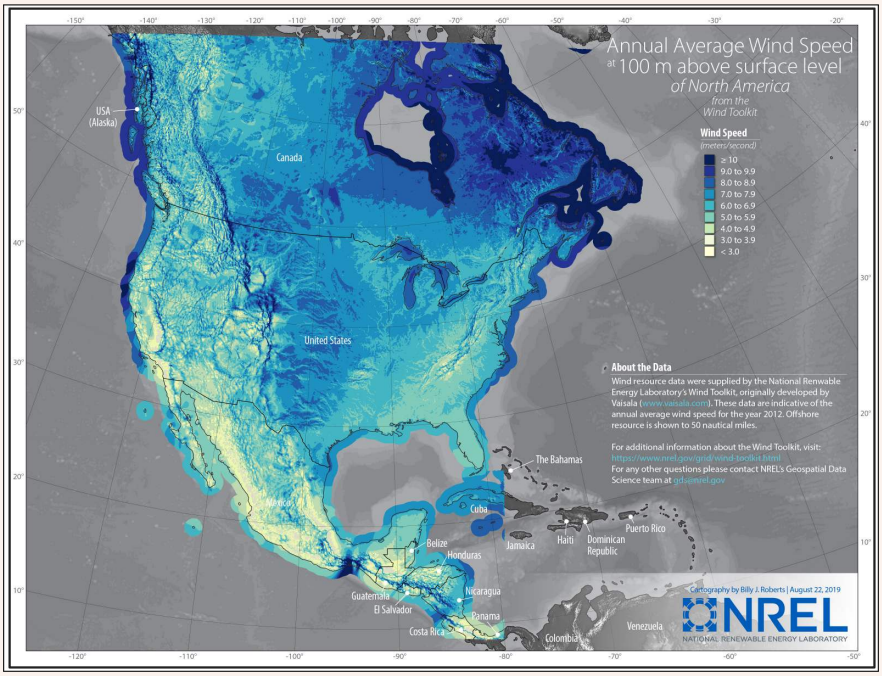


Figura 18.3: Mapa do vento dos Estados Unidos

18 Quando o vento atinge um prédio, deve desviar a estrutura porque o edifício age como um obstáculo. O comportamento do vento ao redor do prédio pode ser dividido em vários componentes chave, Fig. 18.4:

Lado de cima (Vento): À medida que o vento atinge a face do prédio, ele diminui e a pressão aumenta, criando uma região de alta pressão neste lado do vento.

Fluxos por toda parte: O vento então flui sobre e ao redor dos lados do edifício. À medida que passa por cima e ao redor das bordas, o vento acelera devido à área

[2]Lamentavelmente, a maioria dos livros didáticos em análise estrutural simplesmente apresentam esta equação sem derivação, deixando potencialmente os leitores com a suspeita de que ela é meramente empírica.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

transversal reduzida que pode fluir através (semelhante a como a água acelera em uma parte estreita de um fluxo). De acordo com o princípio de Bernoulli, à medida que a velocidade de um fluido (neste caso, ar) aumenta, sua pressão diminui.

O vento está no lado de baixo. Quando o vento passa sobre o pico do edifício e se move para baixo, em direção ao lado de Leeward, ele experimenta uma expansão e uma redução na velocidade. Esta transição cria um padrão de fluxo complexo caracterizado por turbulência e vórtices.

19 No lado de fora do prédio, vários fatores contribuem para a criação da sucção:

A recuperação da pressão está incompleta. Embora o vento diminua depois de passar pelo pico do prédio, a pressão não se recupera totalmente para as condições ambientais. A mistura de correntes de vento de diferentes direções (sobre o topo e ao redor dos lados) leva à turbulência, o que reduz a eficácia da recuperação de pressão.

Separação de Fluxo: À medida que o vento flui sobre o topo do edifício e para baixo no lado de fora, tende a separar-se da superfície devido ao gradiente de pressão adverso (movendo-se de baixa pressão no topo para maior pressão em direção ao solo). Esta separação cria uma região de baixa pressão diretamente contra o lado do prédio.

Vortices e Eddies: A separação do fluxo e a interação dos fluxos de vento podem produzir vórtices e redemoinhos ao redor dos cantos e bordas do edifício. Estas massas de ar girando são regiões de baixa pressão e contribuem para o efeito da pressão negativa global (sucção) no lado do sono.



Figura 18.4: Efeito da carga do vento nas estruturas

20 Para o edifício de alta elevação, é importante capturar a distribuição correta da pressão do vento. A velocidade do vento $V(z)$ em função da altura z Pode ser expressa pela equação da lei de poder (ASCE/SEI 7-16, 2017):

$$V(z) = V_{\text{ref}} \left(\frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^{\alpha}$$

onde:

- $V(z)$ é a velocidade do vento na altura z,
- V_{ref} é a velocidade do vento de referência na altura de referência z_{ref},
- α é o expoente dependente do terreno.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Esta equação pode ser combinada com Eq. 18.1 para obter a distribuição de pressão.

21 Detalhes da aproximação pericárdica para a análise de estruturas submetidas à carga do vento são dadas em §B.2.

18.2.2.2 Sísmico

22 Seismicidade envolve o estudo da ocorrência, frequência e magnitude de terremotos dentro de uma área específica, essencial para determinar o perigo sísmico associado a um local em particular, fig. 1. 18.5.. Fatores que influenciam a sismicidade incluem:

Placas Tectônicas: Movimentos e interações de placas tectônicas são as principais causas dos terremotos.

Dados Históricos do Terremoto: Registros de terremotos anteriores ajudam a prever futuras probabilidades de terremoto, locais e magnitudes potenciais.

Zonas de falha: Falhas ativas influenciam significativamente a sismicidade local com base em suas propriedades.

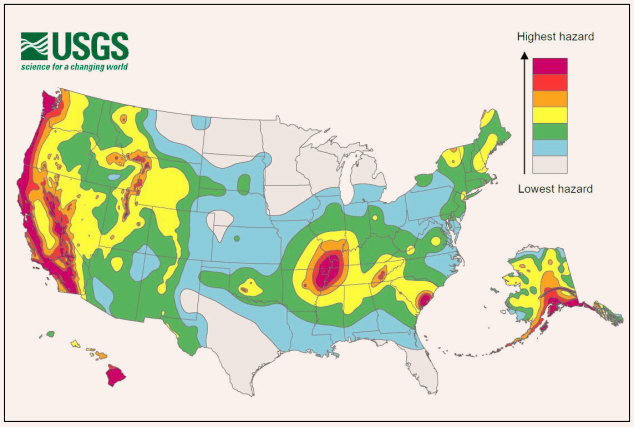


Figura 18.5: Mapa sísmico dos Estados Unidos

23 Movimento do solo durante um terremoto é caracterizado por:

Aceleração: A taxa de mudança de velocidade com o tempo, com aceleração do pico do solo (PGA) usado como uma medida da intensidade do terremoto.

Velocidade: A velocidade da onda cisalhamento V_s é o parâmetro crítico na sismologia para avaliar o comportamento do solo durante terremotos.

24 O frequência natural de uma estrutura é uma função de massa e rigidez. Para um simples single grau de liberdade, isso pode ser facilmente determinado.

25 Considere uma missa m Junto a uma mola com rigidez kE sem forças externas atuando. A equação de equilíbrio dinâmico é dada por:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Assumindo uma solução do formulário $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$:

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Substituindo de volta para a equação do equilíbrio:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos(\omega t + \phi) = 0$$

Para soluções não triviais ($A \neq 0$):

$$-m\omega^2 + k = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Assim, o frequência natural f é:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

26 A partir do acima, temos um critério para determinar quando uma análise dinâmica é necessária[3].

Definition 18.1: Condição para análise dinâmica

Uma análise dinâmica é necessária se o fundamental frequência natural de uma estrutura estiver próximo da frequência das cargas dinâmicas (como as frequências predominantes de movimento do solo em terremotos).

27 Por extensão à equação anterior, um edifício tem frequências naturais no qual tende a vibrar. Se a frequência do movimento do solo corresponder ao frequência natural (ressonância], o edifício pode experimentar oscilações exageradas e potencialmente prejudiciais.

28 Cargas sísmicas se manifestam em edifícios principalmente como forças laterais.

29 Estas forças são o resultado do edifício tentando resistir ao movimento transmitido pelo chão. A distribuição das forças laterais ao longo da altura do edifício normalmente aumenta com a altura devido ao efeito de alavanca (momento) aumentado enquanto você sobe o prédio.

30 As forças laterais induzem forças cortantes e momentos fletores nos elementos estruturais do edifício. As histórias mais baixas de um edifício multi-story tipicamente experimentam o mais alto forças cortantes porque carregam a carga de todas as histórias acima deles.

31 Se a massa e rigidez de um edifício não são simétricamente distribuídos ou se o chão treme não é uniforme, forças torcionais (rotacionais) também podem se desenvolver. Estas

[3] Isso é formalmente definido porque muitos estudantes e engenheiros lutam para fornecer uma explicação racional para quando uma análise dinâmica é necessária.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

forças podem distorcer o edifício, levando a complexas distribuições tensão e danos potencialmente significativos.

32 Todas as estruturas têm algum grau de amortecimento, que é a capacidade de dissipar energia. Durante um terremoto, amortecimento ajuda a reduzir a magnitude das vibrações, diminuindo assim o tensões e deformações no edifício.

33 Finalmente, para efetivamente gerenciar cargas sísmicas, os edifícios são projetados de acordo com padrões de projeto resistentes a terremotos. Esses padrões ajudam a garantir que as estruturas possam suportar eventos sísmicos sem perda significativa de vidas ou colapso. Estratégias de design chave incluem usar materiais que podem suportar grandes deformações, projetar para a ductilidade (a capacidade de se deformar sem quebrar), e incorporar elementos como paredes cisalhamento, resistentes ao momento pórticos, e isolantes de base.

34 Todos os acima serão cobertos em muito mais detalhes nos capítulos 35, 70 e.. 67.

18.2.3 Hidrostático e terra

35 Estruturas abaixo do solo devem resistir à pressão lateral da terra.

$$q = K\gamma h$$

Onde γ é a densidade do solo, $K = \frac{1-\sin\Phi}{1+\sin\Phi}$ é o coeficiente de pressão, h é a altura.

36 Para areia e cascalho, $\gamma = 120$ lb/ ft^3 e $\Phi \approx 30°$.

37 Se a estrutura estiver parcialmente submersa, também deve resistir à pressão hidrostática da água, fig. 1. 18.6.

$$q = \gamma_W h$$

Onde $\gamma_W = 62.4$ lbs/ft^3.

18.2.3.1 Ex 18.1: Carga Hidrostática

O porão de um prédio é 12 pés abaixo da classe. A água subterrânea está localizada em 9 ft abaixo do grau, que espessura de concreto laje é necessária para exatamente equilibrar A elevação hidrostática?

A pressão hidrostática deve ser contrariada pela pressão causada pelo peso do concreto. Desde então $p = \gamma h$ Equacionamos as duas pressões e resolvemos para h O, o altura do concreto laje

$$\underbrace{(62.4)\text{ lbs/ft}^3 \times (12-9)\text{ ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\text{ lbs/ft}^3 \times h}_{\text{concrete}} \implies h = \frac{(62.4)\text{ lbs/ft}^3}{(150)\text{ lbs/ft}^3}(3)\text{ ft}(12)\text{ in/ft} = 14.976\text{ in} \simeq 15.0\text{ inch}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

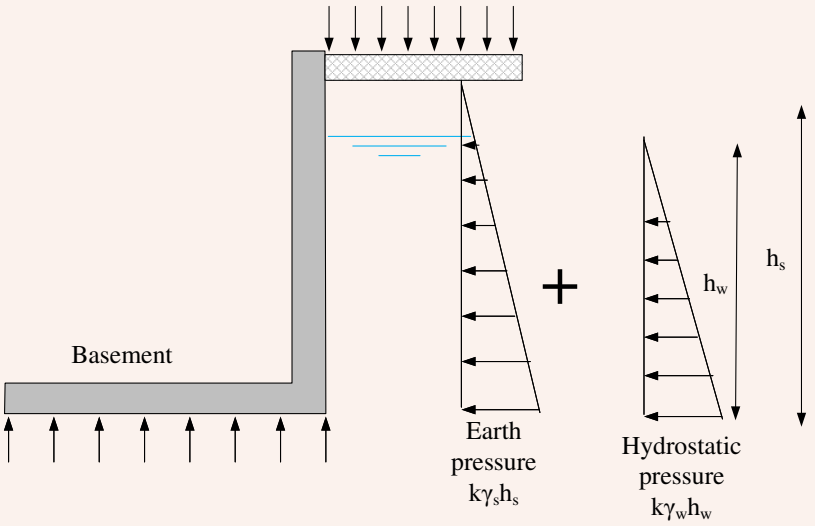


Figura 18.6: Terra e cargas hidrostáticas em estruturas

18.2.4 Carga de impacto

38 Cargas de impacto referem-se a forças aplicadas em uma estrutura por uma duração muito curta, mas com grande intensidade. Essas cargas podem resultar de uma variedade de fontes, tais como objetos caindo, colisões de veículos ou explosões.

39 A principal característica das cargas de impacto é que elas envolvem forças de alta energia atuando em curtos períodos, levando a tensão, vibração e danos estruturais potenciais.

40 A derivação das forças de impacto é relativamente simples.

41 A conservação do momento afirma que o impulso total antes de um impacto deve ser igual ao momento total após o impacto, desde que nenhuma força externa aja sobre o sistema. Este princípio pode ser expresso como:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

onde:

m_1, m_2	Massas dos corpos colidindo
v_1, v_2	Velocidades dos corpos antes da colisão
v_1', v_2'	Velocidades dos corpos após a colisão

42 Em colisões elásticas, a energia cinética também é conservada. No entanto, na maioria dos casos impactos envolvendo estruturas, a colisão é inelástica, o que significa que alguma energia cinética é convertida em outras formas de energia como calor ou é usada para deformar os corpos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

43 A energia cinética antes e depois do impacto é dada por:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + E_{\text{loss}}$$

Onde E_{loss} é a energia perdida devido à deformação inelástica, calor, etc.

44 Para determinar a força de impacto F, você pode usar o teorema impulso-momento que relaciona a força de um impacto com a mudança no momento ea duração do tempo Δt do impacto:

$$F = ma \implies F \simeq m\frac{\Delta v}{\delta t}$$

onde:

m	A massa do objeto
Δv	mudança de velocidade
Δt	duração do impacto

45 Para determinar a força de impacto de uma massa caindo de uma altura h igualamos a energia cinética obtida com potencial de energia perdida[4]:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

Ao impactar a superfície, o objeto desacelera para zero. Assumindo que o impacto dure Δt segundos, a força de impacto média F Vai ser

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

18.2.5 Secundário

46 Cargas secundárias em estruturas são aquelas que surgem do comportamento da própria estrutura ao invés de fontes externas. Estas cargas são importantes para considerar em análise estrutural porque podem afetar significativamente a integridade e desempenho de uma estrutura. Aqui estão alguns pontos-chave sobre cargas secundárias:

47 Cargas secundárias são tipicamente induzidas pela resposta da estrutura a cargas primárias, mudanças na temperatura ou outros fatores ambientais. Ao contrário de cargas primárias, como cargas mortas (o peso da própria estrutura) e cargas vivas (cargas de uso e ocupação), cargas secundárias muitas vezes não são aplicadas diretamente.

48 Tipos de Cargas Secundárias:

[4] Como Galileu descobriu, a velocidade dos objetos caindo da torre de Pisa são independentes de suas massas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Cargas térmicas: Isso é devido a variações de temperatura causando expansão ou contração de materiais. Por exemplo, cargas térmicas podem induzir tensões em um concreto laje devido às diferenças de temperatura entre suas superfícies superior e inferior.

Cargas de liquidação: Isso ocorre quando parte de uma estrutura se instala mais do que outras partes devido à compressão desigual do solo ou outros fatores, criando tensão dentro da estrutura.

Estágios de Construção: Durante a construção, cargas e sequências temporárias podem induzir efeitos secundários devido à progressiva adição de elementos estruturais e processos de construção.

Efeitos de excentricidade: Excentricidade refere-se ao desvio da carga aplicada do centroide de um membro estrutural. Isso pode induzir momentos adicionais e forças que precisam ser consideradas em análise estrutural.

Efeitos P-Delta: Os efeitos P-Delta ocorrem devido à ação combinada de cargas axiais (P) e cargas laterais (como vento ou forças sísmicas) causando deformação (delta) na estrutura. À medida que a estrutura se deforma, a distribuição das forças muda, levando a mais esforços internos que não estavam presentes em condições estáticas.

Não linearidade geométrica: Isso surge quando as deflexões dos membros estruturais se tornam significativas, levando a um comportamento não linear. É especialmente importante em estruturas com grandes deformações ou membros esbeltos.

Creep e Shrinkage: Ao longo do tempo, materiais como concreto sofrem deformação sob carga sustentada (creep) e redução de volume (encolher), o que pode levar a mais interno tensões.

49 Engenheiros devem considerar cargas secundárias durante o processo de projeto para garantir segurança estrutural e manutenção. Por exemplo, no projeto da ponte, efeitos secundários como aqueles devidos à curvatura do convés ou expansão térmica devem ser considerados para evitar falha estrutural ou deformação excessiva.

50 Analisar cargas secundárias requer técnicas sofisticadas de modelagem que expliquem propriedades do material, mudanças de geometria e interação entre diferentes partes da estrutura. Métodos avançados são comumente usados para prever como as estruturas reagirão a cargas secundárias.

18.2.6 Térmico

51 Se um membro é uniformemente aquecido (ou refrigerado) sem restrições, então ele vai Expandir (ou contrair). Esta expansão é dada por

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

Onde α é o coeficiente de expansão térmica, Mesa 18.1

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

	$\alpha\ (/^{\circ F})$
Aço	6.5×10^{-6}
Concreto	5.5×10^{-6}

Tabela 18.1: Coeficientes de expansão térmica

52 Se o membro é contido contra expansão, então uma compressão tensão $\sigma = E\alpha\Delta T$ é desenvolvido.

53 Para evitar o excesso devido ao carregamento térmico *expansão Articulações* são usados em pontes e edifícios.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

18.2.6.1 Ex 18.2: Expansão térmica/tensão

(Schueller, 1996) Um edifício baixo é cercado ao longo de um lado por uma alvenaria de 100 pés de comprimento ($\alpha = 3.6 \times 10^{-6}$ In./in./^{o}F, $E = 2,400,000$ Psi) parede de rolamento. A estrutura foi construída a uma temperatura de 60^{o}F e está localizado na parte norte dos Estados Unidos onde a faixa de temperatura está entre -20^o e +120^{o}F.

1. Assumindo que a parede pode mover-se livremente sem restrições de paredes cruzadas e fundação, a expansão da parede e contração (verão e inverno) são dadas por

$$\Delta L^{Summer} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F(120 - 60)^o F(100) \text{ ft}(12) \text{ in/ft} = 0.26 \text{ in} \quad (18.3)$$

$$\Delta L^{Winter} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F(-20 - 60)^o F(100) \text{ ft}(12) \text{ in/ft} = -0.35 \text{ in} \quad (18.4)$$

2. Agora assumimos (conservadoramente) que o livre movimento não pode ocorrer ($\Delta L = 0$) daí o a tensão resultante seria igual a $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = E\frac{\alpha \Delta T L}{L} = E\alpha\Delta T$

$$\sigma^{Summer} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F(120 - 60)^o F \quad (18.5)$$

$$= 518\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \text{ Tension} \quad (18.6)$$

$$\sigma^{Winter} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F(-20 - 60)^o F \quad (18.7)$$

$$= -691\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \text{ Compression} \quad (18.8)$$

$$(18.9)$$

Note que a tração tensões está além da capacidade de alvenaria, rachaduras ocorrerão.

18.3 Considerações

18.3.1 Cargas projetadas

54 Embora uma simples aplicação da trigonometria básica, os alunos muitas vezes têm dificuldade em projetar carga sobre uma superfície inclinada.

55 Isso é melhor ilustrado na Fig. 18.7 com

Lateral inertial force x	$W_1^x = w_1^x L;$	$W^n = W_1^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_1^x \frac{L_y}{L}$
Self weight y	$W_2^y = w_2^y L;$	$W^n = W_2^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_2^y \frac{L_x}{L}$
Wind Load	$W_3^x = w_3^x L_y;$	$W^n = W_3^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_3^x \frac{L_y^2}{L^2}$
Snow Load	$W_4^y = w_4^y L_x;$	$W^n = W_4^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_4^y \frac{L_x^2}{L^2}$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

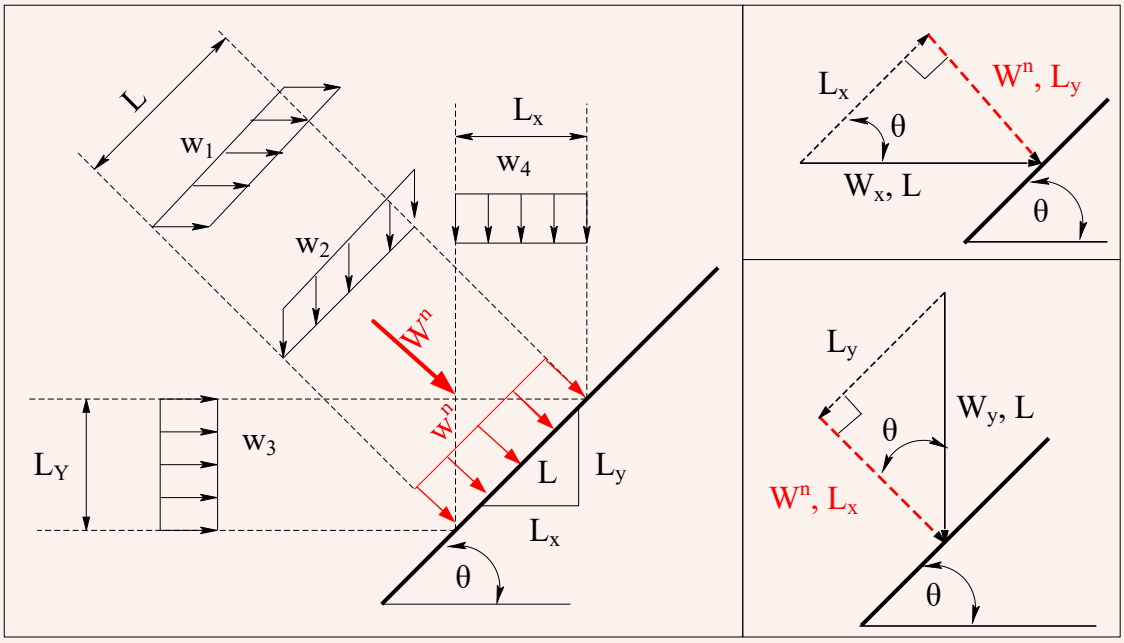


Figura 18.7: Cargas projetadas

18.3.2 Colocação de carga

56 Só que a carga morta é estática. A carga viva por outro lado pode ou não ser aplicada em um determinado componente de uma estrutura. Assim, o arranjo de colocação de carga resultando no mais alto esforços internos (momento +ve ou -ve, cisalhamento) em diferentes locais deve ser considerado.

57 Por um simples viga, Fig. 18.8 ilustra os três possíveis posicionamentos da carga viva. LL1 maximizará o momento positivo no centro da viga, enquanto LL3 maximizará a hora negativa no suporte certo.

58 A colocação de cargas (ao vivo) é, portanto, uma consideração crítica que influencia diretamente a segurança, estabilidade e desempenho de uma estrutura.

59 Leitor também deve consultar Chap 28 Que cobre *Linhas de influência* que são gráficos que mostram como a resposta (como força cortante, momento fletor, ou reação) em um ponto específico de uma estrutura muda à medida que uma carga unitária se move através da estrutura.

18.3.3 Combinações de carga

60 A combinação de carga em engenharia estrutural é um aspecto crucial do processo de projeto que garante edifícios e estruturas são seguros e eficientes sob várias condições de carregamento. Isso envolve analisar os efeitos de diferentes tipos de cargas agindo juntas,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

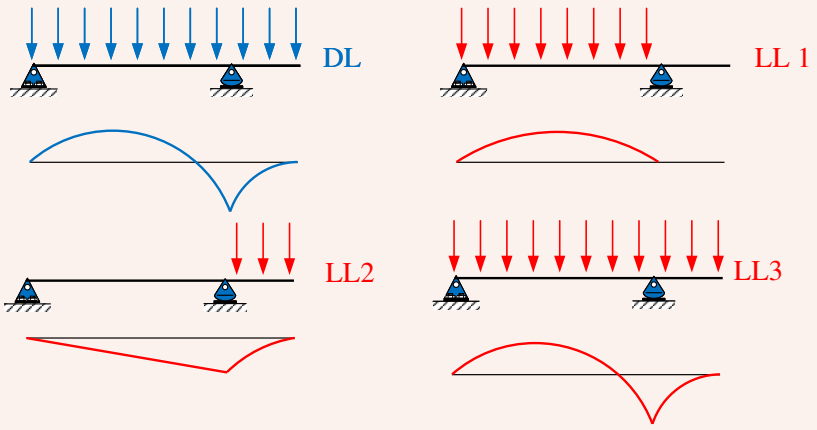


Figura 18.8: Colocação de carga para maximizar momentos

em vez de isoladamente, para garantir que a estrutura possa suportar múltiplos efeitos simultâneos sem falhas.

61 O objetivo principal das combinações de carga é garantir segurança estrutural. Considerando vários tipos de carga juntos, engenheiros podem projetar estruturas capazes de suportar condições extremas, como a ocorrência simultânea de vento e cargas sísmicas ou a combinação de cargas mortas e cargas vivas. Isso ajuda a evitar falhas estruturais que podem levar a danos, lesões ou mortes.

62 Combinações de carga permitem que engenheiros projetem estruturas economicamente sem overdesigning. Entendendo como diferentes cargas interagem, os engenheiros podem otimizar o uso do material e selecionar as soluções mais econômicas que ainda atendem aos requisitos de segurança. Isso ajuda a reduzir o custo global da construção, mantendo a integridade estrutural.

63 Combinações de carga ajudam os engenheiros a antecipar o comportamento das estruturas sob cenários raros, mas possíveis, como queda de neve pesada combinada com ventos fortes, ou cargas de ocupação completa durante um terremoto. Isso é crucial para projetar estruturas em áreas propensas a desafios ambientais específicos.

64 Ao projetar para várias combinações de carga, estruturas não só são feitas seguras para as condições imediatas, mas também são construídas para suportar mudanças e tensões durante seu ciclo de vida. Isso contribui para a longevidade e durabilidade da estrutura, que é especialmente importante em edifícios públicos e infraestrutura.

65 Estruturas muitas vezes servem a vários propósitos e devem acomodar diferentes tipos de cargas durante todo o seu uso. Por exemplo, um prédio multiusos pode precisar suportar diferentes tipos de ocupação, equipamentos ou pesos de armazenamento. Combinações

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

de carga garantem que a estrutura possa se adaptar a esses requisitos variados sem comprometer a segurança.

66 Os tipos comuns de combinações de carga incluem:

- Carga morta + carga viva
- Carga morta + carga de vento
- Carga morta + Carga sísmica
- Carga morta + carga de neve
- Carga ao vivo + carga do vento (para estruturas como estádios onde a ocupação e o vento podem coincidir)

67 Cargas vivas especificadas por códigos representam o máximo de cargas possíveis.

68 A probabilidade de todas essas cargas ocorrerem simultaneamente é remota. Assim, os códigos de construção permitem certa redução quando certas cargas são combinadas.

69 Consulte §B.5 para mais detalhes.

18.3.4 Carregar caminho

70 O conceito do caminho de carga é fundamental na engenharia estrutural, design e análise.

71 Compreender o caminho de carga envolve traçar a rota que as cargas tomam enquanto se movem dos seus pontos de aplicação através de vários componentes estruturais até serem transferidas com segurança para o solo.

72 Um caminho de carga deve ser contínuo. Isso significa que do ponto em que uma carga é aplicada, deve haver uma cadeia clara e ininterrupta de membros estruturais que levam essa carga para a fundação e, finalmente, para o solo abaixo. Qualquer descontinuidade no caminho de carga pode levar à falha estrutural.

73 Idealmente, um caminho de carga deve ser o mais direto e curto possível. Zigzag ou caminhos circulares podem levar ao aumento de forças em certas áreas, criando concentrações tensão que podem enfraquecer a integridade estrutural. Caminhos diretos ajudam a distribuir cargas mais uniformemente e reduzir as chances de falha.

74 A redundância nos caminhos de carga garante que se um caminho falhar, a carga ainda pode ser suportada por caminhos alternativos. Em outras palavras, uma estrutura deve ser *Estaticamente indeterminado*.

75 Uma distribuição adequada de cargas garante que nenhum elemento ou conexão esteja sobrecarregado. Isso envolve projetar o sistema estrutural de tal forma que as cargas se espalham tão uniformemente quanto possível através de vários membros estruturais, reduzindo o risco de falhas localizadas.

76 Um caminho de carga robusto pode tolerar algum grau de mudanças inesperadas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou falhas sem colapso catastrófico. Isso inclui a capacidade de lidar com sobrecargas inesperadas ou danos em parte da estrutura. A robustez de um caminho de carga está intimamente ligada à sua redundância e a resistência geral e ductilidade dos materiais usados.

77 Em estruturas complexas, é essencial que o caminho de carga siga uma hierarquia de rigidez, ou seja, elementos mais rígidos carregam a maioria das cargas. Isso ajuda a gerenciar como as cargas são canalizadas através da estrutura, garantindo que elementos mais flexíveis ou fracos não sejam submetidos ao excesso tensão.

78 Todos os componentes no caminho de carga devem ter deformações compatíveis, o que significa que eles devem se deformar de uma forma que não comprometa a integridade dos componentes adjacentes. Esta compatibilidade é crucial para manter a estabilidade global da estrutura sob carga.

79 Carregar caminho em uma estrutura é realizada através de uma hierarquia de elementos flexurais simples que são então conectados ao pilares, Fig. 18.9 ou por dois caminhos lajes

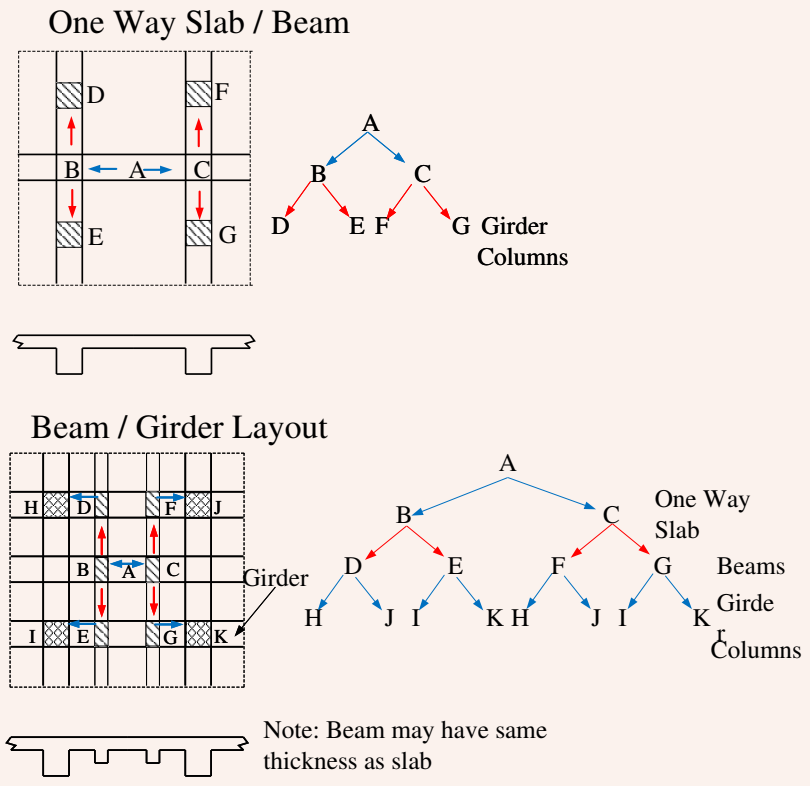


Figura 18.9: Transferência de carga em prédios R/C

como ilustrado na figura. 18.10.

CÓPIA PARA REVISÃO

80 Para um laje biapoiado mais de quatro suportes lineares, Podemos ter uma ação de um ou dois modos se a proporção a/b é maior ou menor que dois, respectivamente, Fig. 18.10.

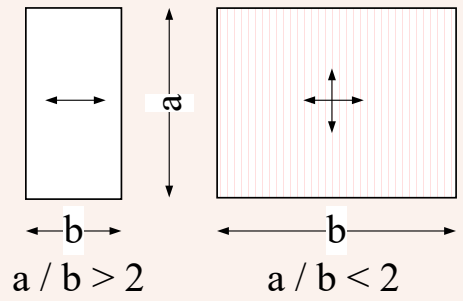


Figura 18.10: Uma ou duas ações em lajes

81 Considerando que estaremos focando no projeto de uma seção concreto armado ou aço, devemos ter em mente o seguinte:

1. A seção é parte de uma viga.
2. A viga ou viga é realmente parte de uma estrutura tridimensional em que a carga é transmitida de qualquer ponto da estrutura para o fundação através de qualquer uma das várias formas estruturais.

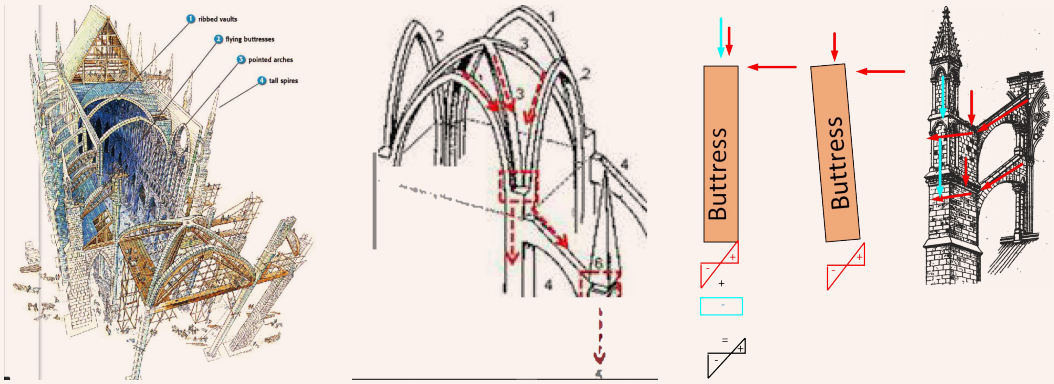
82 Catedral antiga (cap. 4, Fig. 4.7) os pedreiros tinham uma compreensão notavelmente sólida dos mecanismos de transferência de carga, como ilustrado na Fig. 18.11a.. O sistema estrutural de uma catedral gótica depende de uma interação de vários elementos-chave que coletivamente garantem estabilidade, permitindo grandes espaços abertos e janelas expansivas:

1. **Cofres de nervuras** Servir para suportar o telhado canalizando as cargas em linhas predefinidas, as costelas, que direcionam forças para pilares e cais. Essa abordagem esquelética reduz a massa do cofre e concentra as cargas em pontos específicos.
2. **Buttres voadores** desempenhar um papel crucial em resistir ao impulso horizontal exercido pelos cofres. Este impulso aumenta à medida que os cofres se tornam mais pontiagudos (menos semicircular). Os buttres voadores transferem estas forças laterais para longe das paredes principais para cais externos, permitindo que as paredes sejam abertas para grandes vitrais mantendo a estabilidade.
3. **Arcos apontados** são uma inovação arquitetônica e estrutural. Estruturalmente, reduzem o impulso horizontal comparado com arcos semicirculares, permitindo estruturas mais altas e finas. Architecturally, definem a estética gótica e permitem a inserção de aberturas grandes da janela, maximizando a luz interior.
4. **Espirais e torres**, muitas vezes localizado acima dos contrafortes ou na travessia da catedral, servir um duplo propósito. Primeiro, eles transferem cargas verticais

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

diretamente para o solo através de enormes cais. Segundo, seu peso fornece forças de compressão estabilizadoras que neutralizam a tração tensões que se desenvolvem nas pontas e arcos voadores sob cargas laterais. Este efeito estabilizador é conceitualmente semelhante aos pilares ponderados em pontes de arco, como o Pont Alexandre III em Paris, Fig. 18.11d, onde o impulso lateral é tomado por píers maciços (subterrâneos) e a adição das torres minimizam a tração tensões causada pela flexão induzida.



(a) Catedral gótica (b) Transferência de carga (c) Tensões no fundo da bunda



(d) Ponte Alexandre III

Figura 18.11: Mecanismos de transferência de carga em catedrais góticas e arcos rasos

18.3.5 Áreas tributárias

83 Muitas vezes precisamos de uma forma simplificada para atribuir a carga associada com um elemento estrutural sem a necessidade de uma análise complexa. Aqui é onde usamos o conceito de *área tributária*.

84 A área tributária é definida como a região de uma estrutura que transfere suas cargas (cargas mortas, cargas vivas, cargas de neve, etc.) para um componente estrutural específico. Esta área é tipicamente limitada pelos pontos médios ou as linhas centrais entre os membros estruturais adjacentes ou pelas fronteiras da própria estrutura. Aqui está como ele geralmente se aplica a diferentes componentes estruturais, Fig. 18.12:

Vigas: A área tributária para uma viga é a área de chão ou telhado que carrega sobre a

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

viga. Para uma viga suportando uma única via laje, a área tributária é muitas vezes calculada como a largura do laje entre os centros de adjacentes vigas multiplicado pela extensão da viga.

Pilares: Para um pilar, a área tributária é a área do chão apoiada pelo pilar. Esta área é determinada dividindo o chão em regiões com base nos pontos médios entre pilares. Cada pilar suporta a área ao redor até o ponto médio entre ela e o adjacente pilares.

Andar Lajes: No caso de um laje cargas de suporte diretamente, como na construção residencial, a área tributária pode ser toda a área do chão se o laje se estende de parede em parede.

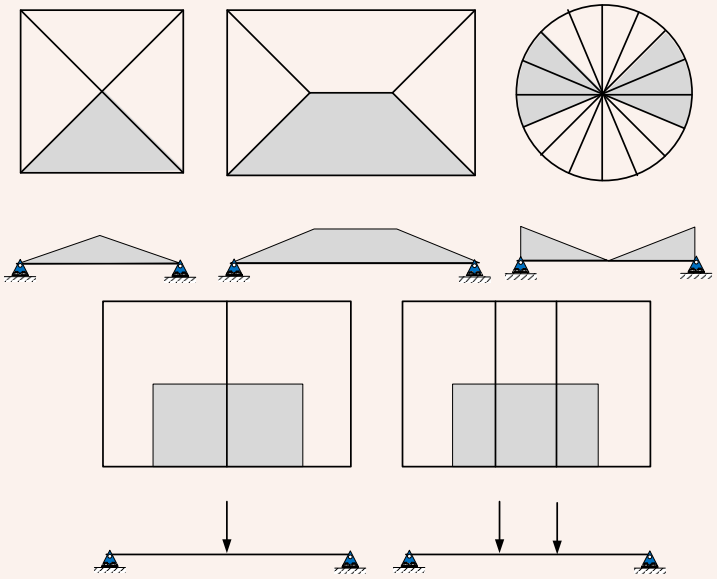


Figura 18.12: Conceito de áreas afluentes para carregamento estrutural dos membros

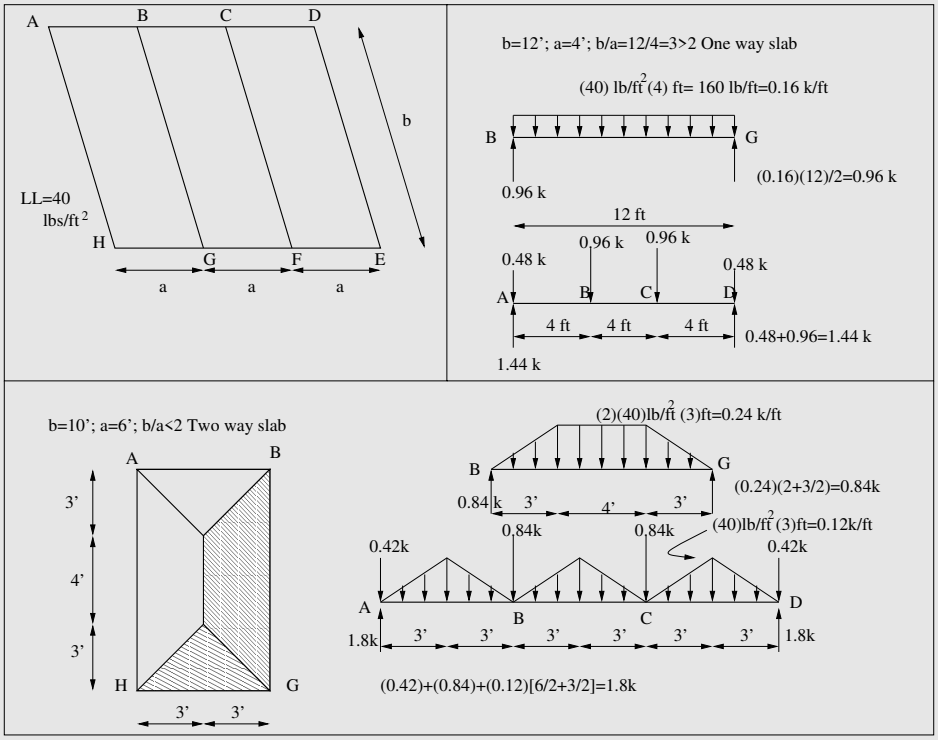
[85] Determinação de áreas tributárias em lajes é análoga à identificação das linhas de rendimento correspondentes, Fig. 57.1.

[86] Exemplo de cálculo da área tributária é dado em §19.2.2.

18.3.5.1 Ex 18.3: Áreas tributárias

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



18.3.6 Resposta estrutural

87 Concluímos este capítulo examinando o papel dos tipos individuais de cargas na resposta estrutural, Fig. 18.13.

88 Cargas de serviço, que normalmente incluem cargas mortas e vivas, devem manter a resposta estrutural bem dentro da faixa elástica linear. Ele terá uma capacidade de reserva substancial antes de atingir a resposta inelástica ou, em última análise, a carga de falha.

89 Com cargas incomuns, como ventos fortes ou atividade sísmica, é aceitável flertar com a resposta plástica.

90 O alcance plástico só deve ser violado em circunstâncias excepcionais, como durante um forte terremoto. Isso pode resultar em danos permanentes, no entanto a estrutura ainda estará de pé, vidas salvas. Isso será discutido mais tarde sob o *Engenharia sísmica baseada em desempenho*, Capítulo 72.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

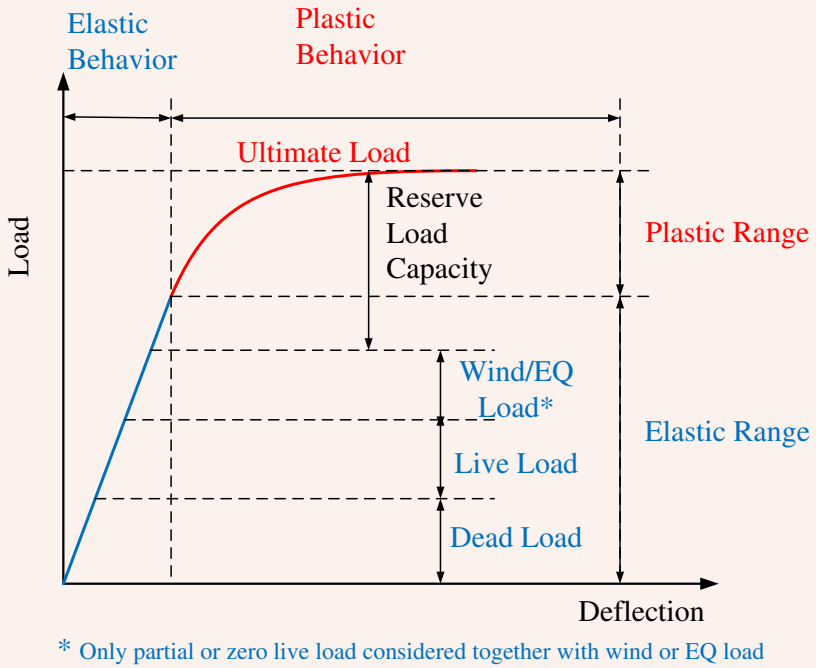


Figura 18.13: Carregar a vida de uma estrutura, (Lin e Stotesbury, 1981)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Atlas Farnese Titan Atlas levando a esfera celestial, é uma poderosa representação de cargas e distribuição de força

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

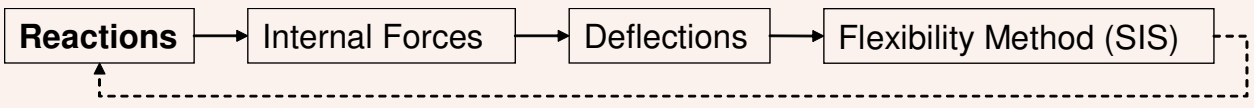
Capítulo 19

Reações

Abstract

Reações formam o segmento final de um caminho de carga e, portanto, têm implicações significativas para o projeto da fundação. Determinação das reações também pode simplificar o cálculo de esforços internos (próximo capítulo). Este capítulo tem realmente muito pouca mecânica subjacente além das equações de equilíbrio que devem ser cuidadosamente adaptadas à estrutura específica em consideração. A primeira seção deste capítulo aborda vários tópicos aparentemente não relacionados; no entanto, estes coletivamente fornecem insights cruciais que facilitam a determinação de reações. A segunda seção apresenta uma variedade de exemplos, progredindo em complexidade, para ilustrar esses conceitos na prática. Finalmente, como demonstrado na seguinte ilustração, determinar reações é o primeiro passo para resolver estruturas estaticamente indeterminadas usando o método flexibilidade.

19.1 Introdução 886
19.1.1 Tipos de suportes 886
19.1.2 Equilíbrio 887
19.1.3 Equações das condições . . . 889
19.1.4 Determinação estática 889
19.1.5 Instabilidade geométrica . . 891
19.1.6 Diagramas de corpo livre . . 891
19.2 Exemplos 892
19.2.1 Ex 19.1: Carga hidrostática . 892
19.2.2 Ex 19.2: Transferência de carga 893
19.2.3 Ex 19.3: Biapoiado viga . . . 894
19.2.4 Ex 19.4: Carga parabólica . . 894
19.2.5 Ex 19.5: Três vãos 895
19.2.6 Ex 19.6: Três dobradiças . . . 896
19.2.7 Ex 19.7: Suportes inclinados 898
19.2.8 Ex 19.8: Estrutura da grade . 899
19.2.9 Ex 19.9: Equilíbrio do avião . 900
19.2.10 Ex 19.10: Barcaça Jumbo . . 901
19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilíbrio de um corpo flutuante (prova hidrostática) 904
19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; Nervi 906



CÓPIA PARA REVISÃO

19.1 Introdução

1 Embora reconhecido como uma das noções fundamentais e primordiais da física, o conceito de força não foi realmente entendido historicamente (capítulo 14).

2 Existem três tipos de forças:

Carregar são quantidades vetoriais externas sobre uma estrutura de forma concentrada ou distribuída. Ou são forças ou momentos. Cargas são discutidas em detalhes no Capítulo 18.

Reações são as forças exercidas sobre a estrutura (carregada) pelos suportes. Eles são geralmente desconhecidos e devem ser determinados antes esforços internos pode ser determinado. Note que é muitas vezes errado que a terceira lei de Newton *Para cada ação, há uma reação igual e oposta* Provê um equilíbrio de duas forças, a ação e reação iguais e opostas. Mas a lei diz que se um corpo A exerce uma força F_a no corpo B, então o corpo B exercerá uma força igual e oposta F_b no corpo A.. Não há equilíbrio porque as forças F_a e.. F_b são exercidos em corpos diferentes, um no corpo A e o outro no corpo B.

Esforços internos são forças nas seções interiores de uma estrutura necessária para manter qualquer parte da estrutura em equilíbrio. Estes serão abordados no Capítulo 21.

19.1.1 Tipos de suportes

3 Na análise de estruturas (calculamentos manuais), é muitas vezes mais fácil (mas nem sempre necessário) começar determinando as reações.

4 Uma vez que as reações são determinadas, esforços internos são determinados em seguida; Finalmente, deformações (deflexões e rotações) são determinadas por último[1].

5 Reações são necessárias para determinar a carga da fundação.

6 Dependendo do tipo de estruturas, pode haver diferentes tipos de Condições de suporte, Fig. 19.1.

Rolo: fornece uma contenção em apenas uma direção em uma estrutura 2D, em estruturas 3D um rolo pode fornecer contenção em uma ou duas direções. Um rolo vai permitir rotação.

Hinge: permite rotação, mas não deslocamentos. Algumas dobradiças, permitem a tradução vertical mas sem rotação.

[1] Esta é a sequência de operações no método flexibilidade que se presta ao cálculo manual. No método rigidez, determinamos primeiro deslocamentos e reações. Este método é mais adequado para implementação de computador.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

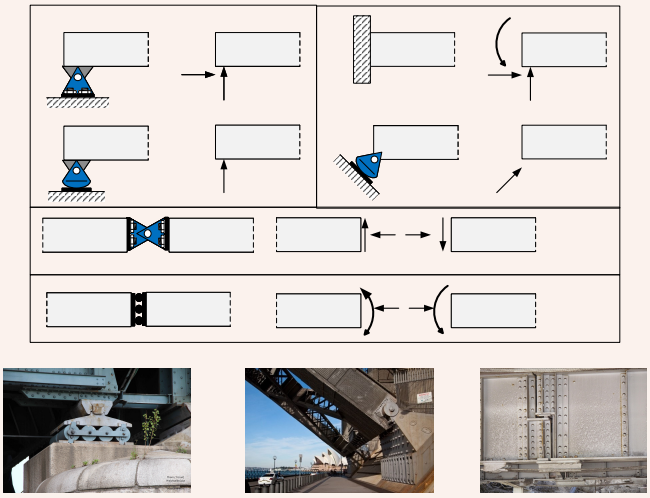


Figura 19.1: Exemplos de limites de reações

Engaste: impedirá a rotação e deslocamentos em todas as direções.

Estes são os suportes comuns, muitas outras combinações são possíveis para estruturas 3D.

19.1.2 Equilíbrio

7 As reações são determinadas a partir das equações apropriadas de equilíbrio estático.

8 Soma de forças e momentos, em um sistema estático deve ser igual a zero[2].

9 Em um sistema de coordenadas cartesianas 3D há um total de 6 equações independentes de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = \Sigma F_y = \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = \Sigma M_y = \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

10 Nem todas as equações são aplicáveis a todas as estruturas. Equações de equilíbrio para cada estrutura são

[2]Em um sistema dinâmico $\Sigma F = ma$ Onde m é a massa e a é a aceleração.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 19.1: Equações do equilíbrio

Tipo de Estrutura	Equações					
	Forças			Momentos		
	x	y	z	x	y	z
Viga, não forças axiais		ΣF_y				ΣM_z
Grelha			ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	
3D Treliça, Pórtico	ΣF_x	ΣF_y	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	ΣM_z
Set alternativo						
Vigas, não força axial					ΣM_z^A;	ΣM_z^B
2 D Treliça, Pórtico, Viga	ΣF_x				ΣM_z^A	ΣM_z^B
				ΣM_z^A	ΣM_z^B	ΣM_z^C

11 Para cálculos de reação, a carga aplicada externamente pode ser reduzida a uma força equivalente; no entanto, para esforços internos (cisalhamento e momento) devemos usar a distribuição de carga real.

12 A soma dos momentos pode ser tomada em relação a qualquer ponto arbitrário.

13 Enquanto as forças são representadas por um vetor, os momentos também são quantidades vetoriais e são representados por uma seta curva ou um vetor de flecha dupla.

14 É sempre preferível verificar cálculos por outra equação de equilíbrio.

- Antes de escrever uma equação de equilíbrio,

  1. Arbitrário decidir qual é o **+ve** Direção
  2. Assumir uma direção para as quantidades desconhecidas
  3. O lado direito da equação deve ser zero

  Se sua reação é negativa, então será em uma direção oposta à assumida.
- A soma das forças externas é igual e oposta às internas. Assim, a força/momento líquido é igual a zero.

15 Equilíbrio de momentos, foi considerado por Leonardo (Da Vinci, 1490 PDF) (follio 94) e por Alexander Carder em seus icônicos celulares Fig. 19.2.

16 Como uma nota lateral, e como já mencionado em §6.6.7Muitas vezes, acredita-se erroneamente que a terceira lei de Newton para cada ação, há uma reação igual e oposta "provê um equilíbrio de duas forças, a ação e reação dirigida igual e inversamente. Mas a lei diz que se um corpo A exerce uma força F_a no corpo B, então corpo B exercerá uma força

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

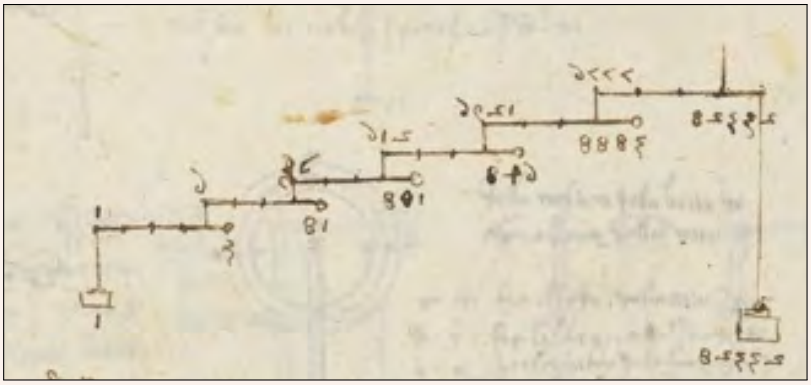




Figura 19.2: Equilíbrio de momentos, de Leonardo (Da Vinci, 1490), para Calder

igual e oposta F_b no corpo A.. Não há equilíbrio porque as forças F_a e.. F_b são exercidos em corpos diferentes, um no corpo A e o outro no corpo B (Cohen, 2002).

17 Um lembrete do teorema de Varignon §14.5.14: *A soma dos momentos de várias forças concorrentes sobre um ponto é igual ao momento do resultado dessas forças, ou alternadamente, o momento de uma força sobre um determinado ponto equivale à soma dos instantes de seus componentes.*

19.1.3 Equações das condições

18 Se uma estrutura tem uma dobradiça interna (que pode conectar duas ou mais subestruturas), então isso fornecerá uma equação adicional ($\Sigma M = 0$ Na dobradiça) que pode ser explorada para determinar as reações.

19 Essas equações são frequentemente exploradas em treliças (onde cada conexão é uma dobradiça) para determinar reações.

20 Em uma inclinação apoio móvel com S_x e.. S_y Projeção horizontal e vertical, então a reação R teria, figura 19.3

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{S_y}{S_x}$$

19.1.4 Determinação estática

Para o contexto histórico, consultar §11.4.6

21 Em estruturas estaticamente determinadas, as reações dependem apenas da geometria, condições de contorno e cargas.

22 Na literatura não anglo-saxônica, nos referimos a estruturas estaticamente determinadas e

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

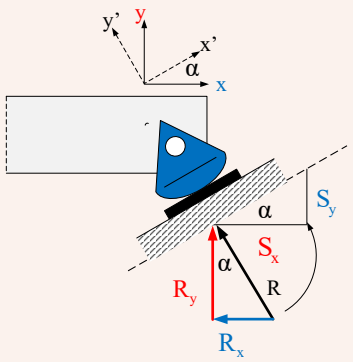


Figura 19.3: Reações inclinadas apoio móvel

estaticamente indeterminadas através dos termos mais elegantes de *isostático* e.. *hiperestático* respectivamente.

23 Se as reações não podem ser determinadas simplesmente a partir das equações de equilíbrio estático (e equações de condições se presentes), então as reações da estrutura são ditas estaticamente indeterminadas (ou hiperestáticas).

24 O grau de indeterminação estática é igual à diferença entre o número de reações e o número das equações de equilíbrio, figura 19.4

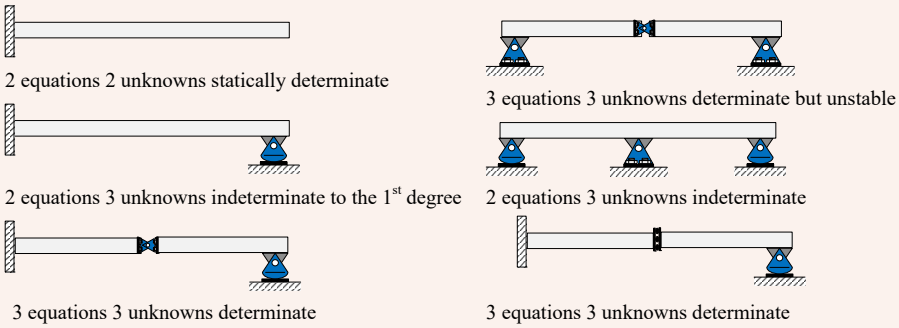


Figura 19.4: Grau de indeterminação estática

25 A falha de um suporte em um sistema estaticamente determinado resulta no colapso das estruturas. Assim, uma estrutura estaticamente indeterminada é mais segura do que uma determinada estaticamente.

26 Para estruturas estaticamente indeterminadas, as reações dependem também das propriedades do material (por exemplo. O módulo de Young e/ou cisalhamento) e o elemento seções transversais (por exemplo. comprimento, área, momento de inércia).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19.1.5 Instabilidade geométrica

27 A instabilidade geométrica ocorrerá se:

1. Todos *As reações são paralelas* e uma carga não paralela é aplicada à estrutura.
2. Todos *As reações são simultâneas* Como a figura 19.5

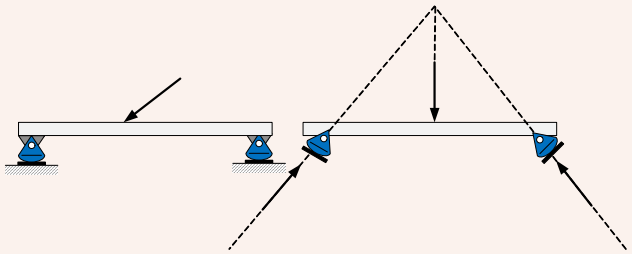


Figura 19.5: Reações são simultâneas

3. O número de reações é menor que o número de equações de equilíbrio, que é um mecanismo está presente na estrutura.

28 Matematicamente, isso pode ser mostrado se o determinante das equações de equilíbrio é igual a zero (ou as equações são interdependentes).

19.1.6 Diagramas de corpo livre

Definition 19.2: Diagrama de corpo livre

Diagramas de corpo livre são diagramas usados para mostrar a magnitude e direção relativa de todas as forças/momentos agindo sobre um objeto em uma determinada situação. Não é um desenho escalado, é um diagrama.

29 Os diagramas livres consistem em:

1. Uma versão simplificada do corpo
2. Forças mostradas como setas retas apontando na direção em que agem no corpo, momentos são mostrados como curvas com uma cabeça de flecha ou um vetor com duas cabeças de seta apontando na direcção em que atuam sobre o corpo
3. Um ou mais sistemas de coordenadas de referência
4. Por convenção (embora nem sempre seguido), reações às forças aplicadas são mostradas com marcas de haxixe através do caule do vetor

30 O número de forças e momentos mostrados depende do problema específico e das suposições feitas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

31 Todas as forças e momentos devem se equilibrar para zero.

32 Diagramas de corpos livres não representam necessariamente um corpo físico inteiro. Partes de um corpo podem ser selecionadas para análise. Isso permitiria calcular esforços internos, fazendo-os parecer externos, permitindo análise. Isso pode ser usado várias vezes para calcular esforços internos em diferentes locais dentro de um corpo físico.

33 O diagrama de corpo livre de viga submetido a diferentes tipos de carga é mostrado na figura. 19.6.

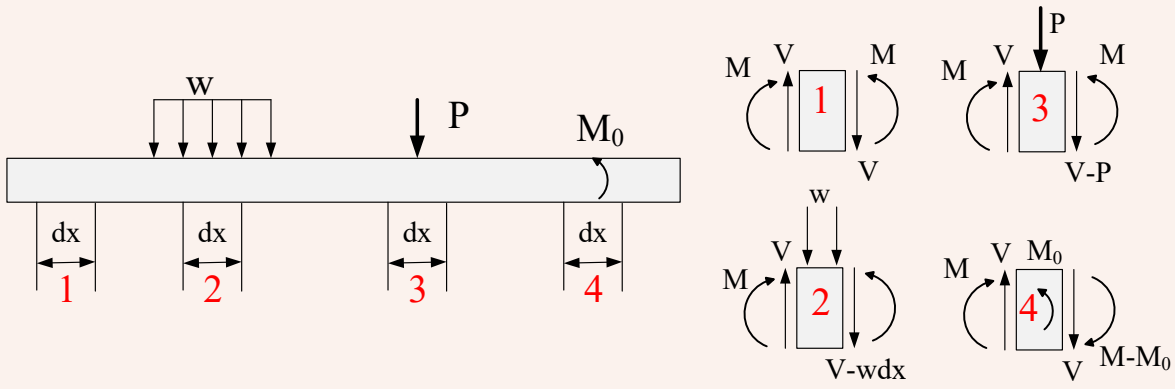


Figura 19.6: Diagramas de corpos livres de uma viga submetido a diferentes cargas

34 Na maioria dos problemas, o FBD é desenhado com base na forma não formada; para alguns problemas (envolvendo não linearidade geométrica) o FBD deve ser desenhado com base na forma deformada (§29), especialmente se alguma instabilidade ocorrer (§19.1.5).

19.2 Exemplos

19.2.1 Ex 19.1: Carga hidrostática

O porão de um prédio é 12 pés abaixo da classe. A água subterrânea está localizada 9 pés abaixo do nível, qual a espessura de concreto laje é necessária para equilibrar exatamente o aumento hidro-

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

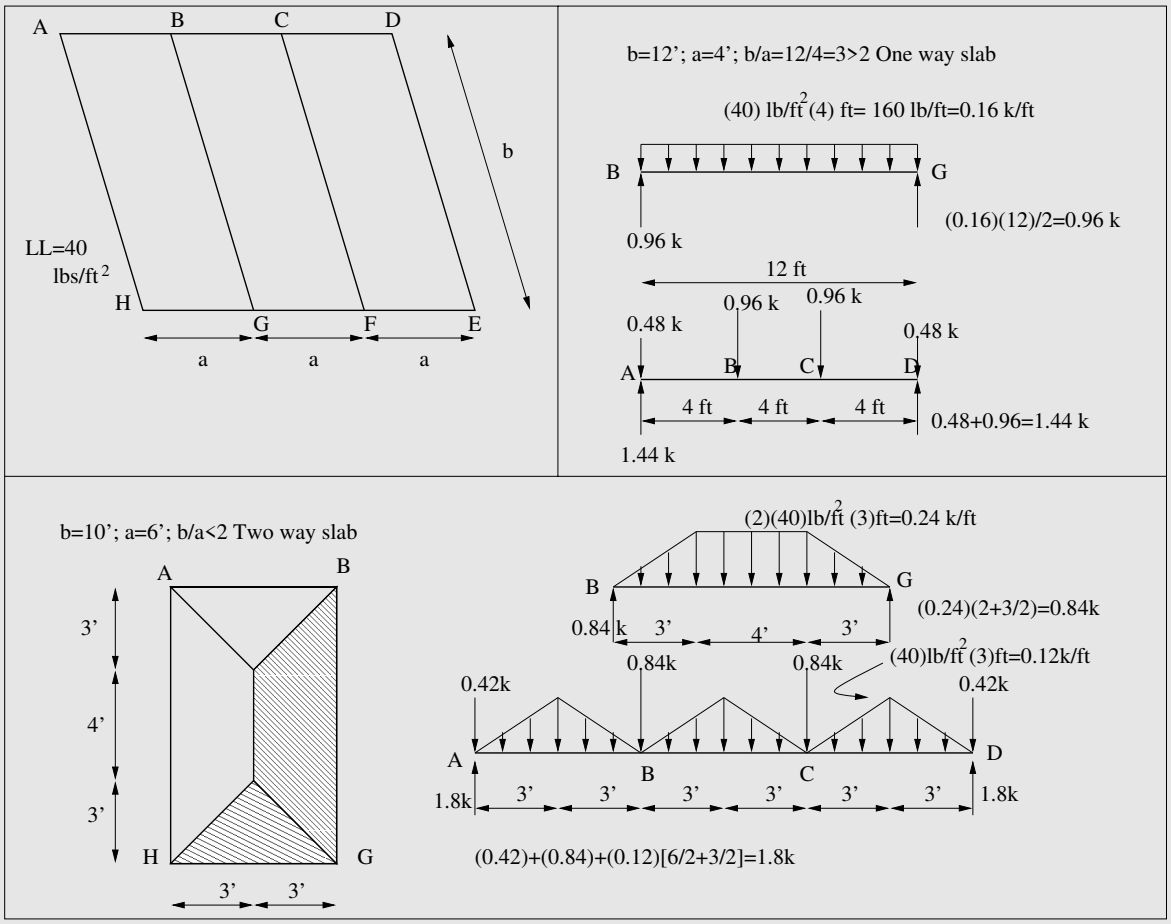
estático? A pressão hidrostática deve ser contrariada pela pressão causada pelo peso do concreto. Desde então $p = \gamma h$ Equacionamos as duas pressões e resolvemos para h A altura do concreto laje

$$\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{concrete}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq \boxed{15.0\ \text{inch}}$$

19.2.2 Ex 19.2: Transferência de carga

Um exemplo simples de transferência de carga está contido na figura seguinte.

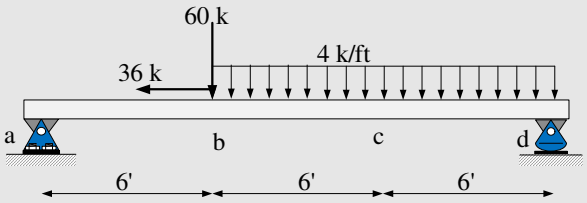


CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19.2.3 Ex 19.3: Biapoiado viga

Determine as reações dos seguintes biapoiado viga



A viga tem 3 reações, temos 3 equações de equilíbrio estático, portanto é estaticamente determinado.

$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow \quad & R_{ax} - 36\ \text{k} = 0 \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow \quad & R_{ay} + R_{dy} - 60\ \text{k} - (4)\ \text{k/ft}(12)\ \text{ft} = 0 \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^c = 0; \Rightarrow \quad & 12R_{ay} - 6R_{dy} - (60)(6) = 0
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix} =
\begin{Bmatrix} 36 \\ 108 \\ 360 \end{Bmatrix} \Rightarrow
\begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix} =
\begin{Bmatrix} 36\ \text{k} \\ 56\ \text{k} \\ 52\ \text{k} \end{Bmatrix}
$$

Alternativamente poderíamos ter usado outro conjunto de equações:

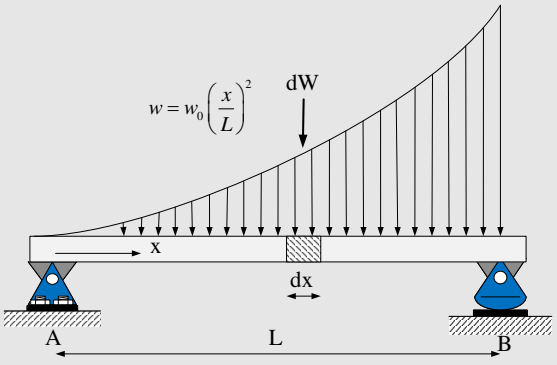
$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^a = 0; \quad (60)(6) + (48)(12) - (R_{dy})(18) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{dy} = 52\ \text{k} \uparrow \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^d = 0; \quad (R_{ay})(18) - (60)(12) - (48)(6) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{ay} = 56\ \text{k} \uparrow
\end{aligned}
$$

Cheque:

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; 56 + 52 - 60 - 48 = 0 \checkmark$$

19.2.4 Ex 19.4: Carga parabólica

Determine as reações de um comprimento biapoiado viga L submetido a uma carga parabólica $w = w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Há dois desconhecidos e duas equações de equilíbrio (ΣF_y e.. ΣM), nós criteriosamente começar com o segundo, como ele nos daria diretamente a reação em B Considerando um.. Elemento infinitesimal de comprimento dx, peso dW, e momento dM:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\int_{x=0}^{x=L} \underbrace{w_0\left(\frac{x}{L}\right)^2}_{w}\,dx}_{dW} \times x}_{dM} - (R_B)(L)}_{M} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{L} w_0 \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} w_0 L$$

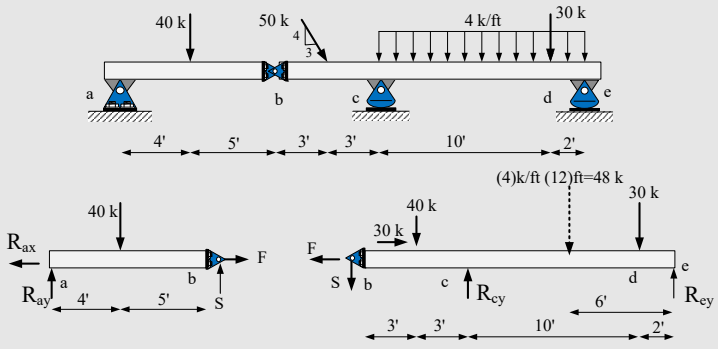
Com R_B determinado, nós resolvemos para R_A De..

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; R_A + \underbrace{\frac{1}{4} w_0 L}_{R_b} - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{w_0}{L^2}\frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} w_0 L = \frac{1}{12} w_0 L$$

19.2.5 Ex 19.5: Três vãos

Determine as reações para o período seguinte de três anos.



4 desconhecidosR_{ax}, R_{ay}, R_{cy} e.. R_{ey}), três equações de equilíbrio e Uma equação de condição ($\Sigma M_b = 0$), assim a estrutura é Estaticamente determinado. Embora haja muitas abordagens Para resolver para aqueles quatro desconhecidos (todos eles corretos), Alguns são mais simples. Neste

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

caso, é mais fácil de Quebrar a estrutura em duas subestruturas, e examinar o diagrama de corpo livre de cada uma delas separadamente. Isolando ab:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^b = 0; (9)(R_{ay}) - (40)(5) = 0 \qquad \Rightarrow R_{Ay} = 22.2\ \text{k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^a = 0; (40)(4) - (S)(9) = 0 \qquad \Rightarrow S = 17.7\ \text{k} \uparrow$$
$$\Sigma F_x = 0; \qquad \Rightarrow R_{ax} = 30\ \text{k} \leftarrow$$

Isolando ser:

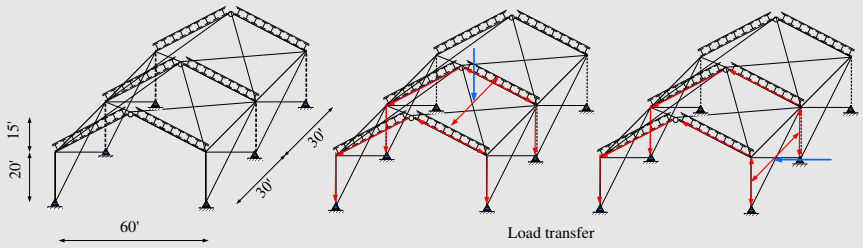
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^e = 0;$$
$$-(17.7)(18) - (40)(15) - (4)(12)(6) - (30)(2) + R_{cy}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{cy} = \frac{1,266.6}{12} = 105.6\ \text{k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^c = 0;$$
$$-(17.7)(6) - (40)(3) + (4)(12)(6) + (30)(10) - R_{ey}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{ey} = \frac{361.8}{12} = 30.15\ \text{k} \uparrow$$

Cheque

$$\Sigma F_y = 0; \uparrow; 22.2 - 40 - 40 + 105.6 - 4(12) - 30 + 30.15 = -0.050 \simeq 0. \checkmark$$

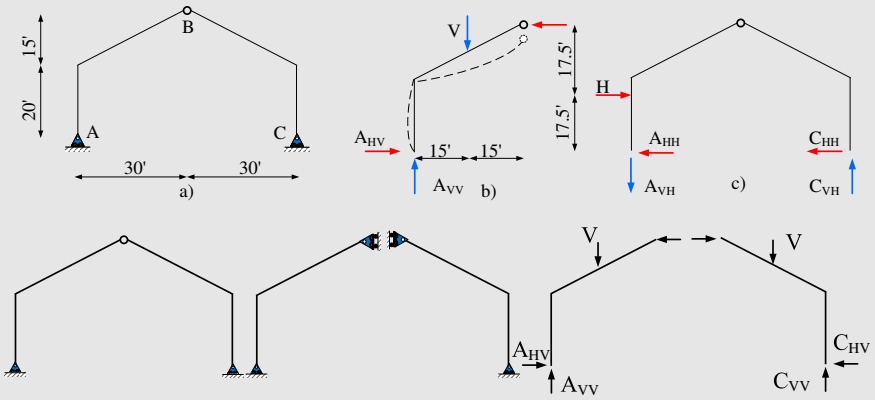
19.2.6 Ex 19.6: Três dobradiças

Para o gable de três voltas pórticos espaçado em 30 pés. no centro, determinar os componentes de reações no pórtico devido a: 1) Telhado carga morta, de 20 psf de área do telhado; 2) A neve está carregada 30 psf de projeção horizontal; 3) O vento está carregado de.. 15 psf de projeção vertical. Determine o Valores críticos do projeto para as reações verticais e horizontais.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Devido à simetria, não há nenhuma força vertical transmitida pela dobradiça para neve e carga morta, e assim podemos considerar apenas o lado esquerdo (ou direito) do pórtico. Cargas point equivalentes:

1. Telhado sem carga por um lado de pórtico é

$$DL = (20)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}\left(\sqrt{30^2+15^2}\right)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 20.2\ \text{k}\downarrow$$

2. Carga de neve por um lado de pórtico é

$$SL = (30)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(30)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 27.\ \text{k}\downarrow$$

3. Carga do vento por pórtico (ignorando a sucção) é

$$WL = (15)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(20+15)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 15.75\ \text{k}\rightarrow$$

Há 4 reações, 3 equações de equilíbrio e uma equação de condição ⇒ Estaticamente determinado. Alternativamente, por simetria Não há cisalhamento na dobradiça C, e teríamos para a subestrutura duas reações no suporte e uma (horizontal) na dobradura. Relação entre as reações horizontais e verticais em A devido a uma carga vertical centrada, A_{HV} e.. A_{VV} A determinação é feita, respectivamente, por meio da momento com respeito à dobradiça (b):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B &=& 0; & 15V-30A_{VV}+35A_{HV} &=& 0 \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y &=& 0; & A_{VV}-V &=& 0;\end{array}\right\}\ \begin{array}{rcl}A_{HV} &=& \frac{15A_{VV}}{35} \\ &=& .429A_{VV}\end{array}$$

Substituindo o telhado morto e a carga de neve que conseguimos

$$\begin{array}{rll}A_{VV}^{DL}=C_{VV}^{DL} & = & 20.2\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{DL}=C_{HV}^{DL} & =(.429)(20.2) & =8.66\ \text{k}\rightarrow \\ A_{VV}^{SL}=C_{VV}^{SL} & = & 27.\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{SL}=C_{HV}^{SL} & =(.429)(27.) & =11.58\ \text{k}\rightarrow\end{array}$$

As reações devido à carga do vento (assoprando da esquerda), são determinadas como segue:

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Reação vertical em A é determinado considerando toda a estrutura e tomando o momento com respeito ao C, (c)

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0; (15.75)(\frac{20+15}{2}) - 60A_{VH} = 0 \qquad \Rightarrow A_{VH} = 4.60\text{ k}\uparrow$$

   A_{VH} é a reação vertical em A devido à carga horizontal [a] e do equilíbrio das forças na y direção, temos $B_{VH} = -A_{VH} = -4.60\downarrow$ (note que a carga do vento não tem nenhum componente vertical).
2. A reação horizontal em B é determinado considerando a subestrutura direita e tomando momento com relação à dobradiça interna em B

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; 35C_{HH} - (4.6)(30) = 0 \qquad \Rightarrow C_{HH} = 3.95\text{ k}\leftarrow$$

3. Reação horizontal em A é tomado considerando toda a estrutura e soma de forças no x Direção:

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad 15.75 - 3.95 - A_{HH} = 0 \quad \Rightarrow A_{HH} = 11.80\text{ k}\leftarrow$$

   e note que A carrega a maior parte da carga horizontal.

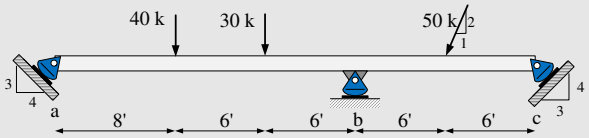
Finalmente, os suportes devem ser projetados para o Muito crítico (Plausível) combinação de reações:

$$\begin{aligned} H &= 8.66\text{ k} + 11.58\text{ k} + 11.8\text{ k} &&= 32.04\text{ k} \\ V &= 20.2\text{ k} + 27.0\text{ k} + 4.60\text{ k} &&= 51.8\text{ k} \end{aligned}$$

[a] A notação dupla é extensivamente usada em análise estrutural. X_{yz} tipicamente implica em quantidade X Em.. y devido a alguma ação z.

19.2.7 Ex 19.7: Suportes inclinados

Um exemplo de viga com apoio inclinado é mostrado abaixo



A priori identificaríamos 5 reações, no entanto temos 2 equações de condições (uma em cada suporte inclinado), assim com três equações de equilíbrio, temos um sistema estaticamente determinado.

$$\begin{aligned} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^b &= 0; \\ (R_{ay})(20) - (40)(12) - (30)(6) + (44.72)(6) - (R_{cy})(12) &= 0 \\ \Rightarrow 20R_{ay} &= 12R_{cy} + 391.68 \end{aligned}$$

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \frac{3}{4}R_{ay} - 22.36 - \frac{4}{3}R_{cy} = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.5625R_{ay} - 16.77$$

Resolvendo para essas duas equações:

$$\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ 0.5625 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 391.68 \\ 16.77 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.37\text{ k}\uparrow \\ -8.69\text{ k}\downarrow \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Os componentes horizontais das reações em a e c são

$$R_{ax} = \frac{3}{4}14.37 \quad = 10.78 \text{ k} \rightarrow$$
$$R_{cx} = \frac{4}{3}8.69 \quad = -11.59 \text{ k} \rightarrow$$

Finalmente resolvemos para R_{by}

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^a = 0;$$
$$(40)(8) + (30)(14) - (R_{by})(20) + (44.72)(26) + (8.69)(32) = 0$$
$$\Rightarrow R_{by} = 109.04 \text{ k} \uparrow$$

Nós checamos nossos resultados

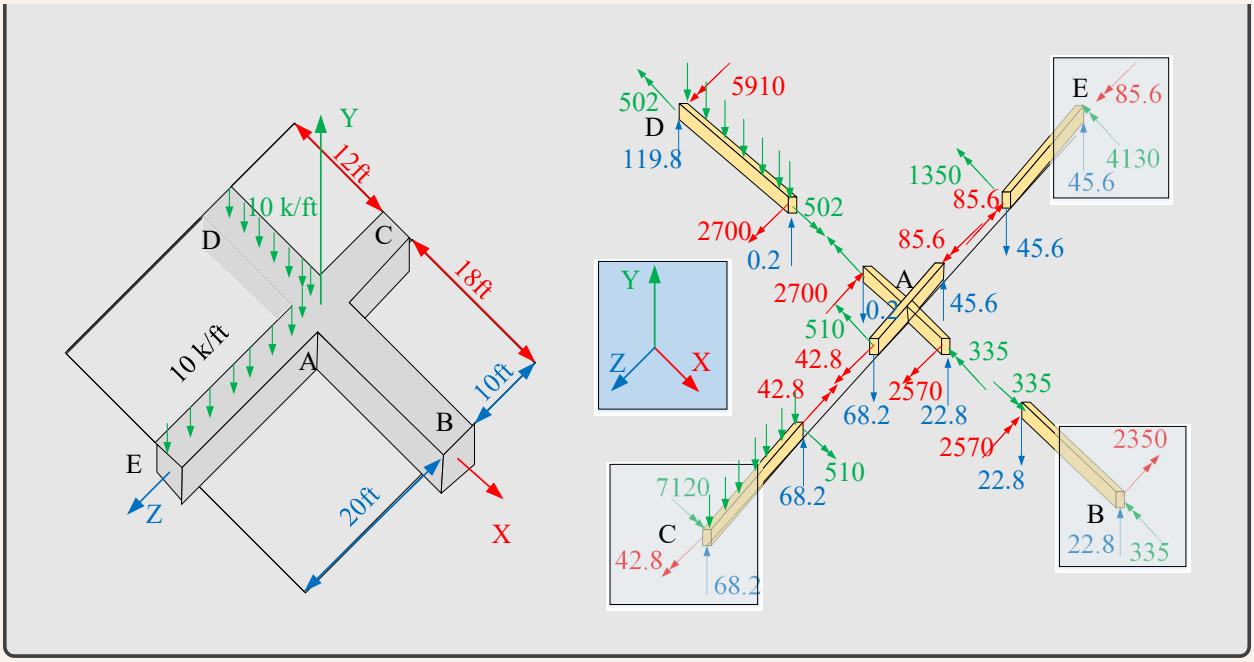
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; 14.37 - 40 - 30 + 109.04 - 44.72 - 8.69 \quad = 0 \checkmark$$
$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; 10.78 - 22.36 + 11.59 \quad = 0 \checkmark$$

19.2.8 Ex 19.8: Estrutura da grade

A seguinte estrutura da grade planar está rígidamente conectada nos quatro suportes B, C, D e E. Claramente, é estaticamente indeterminado para o 9^{th} grau ($4 \times 3 - 3$). Como veremos mais tarde, é cinematicamente indeterminado ao terceiro grau (três desconhecidos deslocamentos em A). Ele é analisado pela primeira vez pelo método rigidez, e reações de apoio em B, C e E são determinados. Nesse ponto, a grade é estaticamente determinada (três reações externas), e de estática simples (três equações de equilíbrio: ΣM_x, ΣF_y e.. ΣM_z Podemos determinar reações em D, e esforços internos. Note que não precisamos começar determinando as reações em D, e poderíamos prosseguir de qualquer um dos três suportes para o centro, e então "ande" em direção a D. Os resultados poderiam então ser verificados através da estática contabilizando apenas cargas externas e reações. Este exercício destaca o valor dos diagramas de corpos livres.

CÓPIA PARA REVISÃO

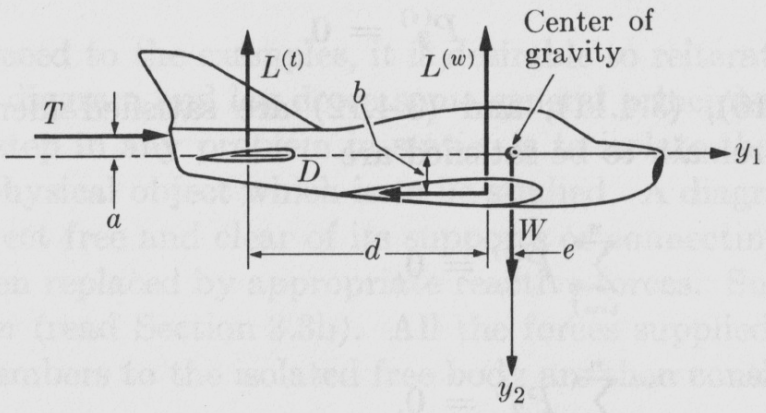
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



19.2.9 Ex 19.9: Equilíbrio do avião

De.. Statics of deformable solids
Bisplinghoff, Mar e Pian, 1965 Procuramos computar as forças necessárias para manter um avião em

equilíbrio no nível constante de vôo. A seguir está uma simplificada diagrama de corpo livre do avião com peso W.. Supõe-se que na velocidade de vôo do avião o arrasto D é conhecido. Procuramos calcular o elevador na asa $L^{(w)}$, o elevador na cauda $L^{(t)}$, e o impulso negativo T para um vôo de nível estável.



CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Este é claramente um problema de equilíbrio estático.

$$\rightarrow \Sigma F_{y1} = 0; \Rightarrow T - D = 0$$
$$\uparrow \Sigma F_{y2} = 0; \Rightarrow -L^{(w)} - L^{(t)} + W = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^a = 0 \Rightarrow Ta + Db + L^{(t)}(d+e) + L^{(w)}e = 0$$

ou

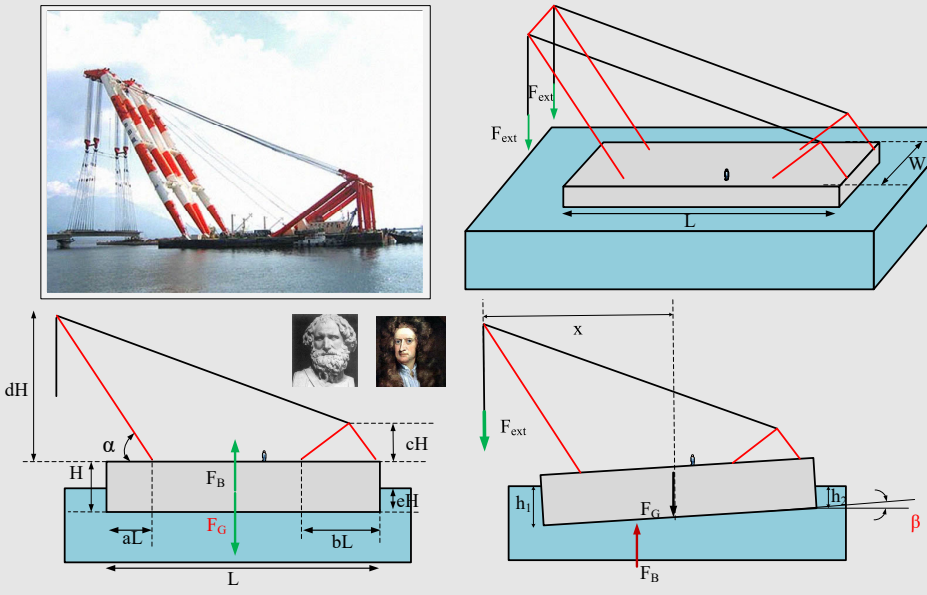
$$T = D$$
$$L^{(t)} = -\frac{D(a+b) + We}{d}$$
$$L^{(w)} = W + \frac{D(a+b) + We}{d}$$

e notamos que uma força de cauda para baixo é necessária para manter o equilíbrio

19.2.10 Ex 19.10: Barcaça Jumbo

Dimensiona uma barcaça de jumbo[a] que é levantar uma carga $2F_{ext}$.. Características da barganha são mostradas abaixo onde L, H, W e.. W, são o comprimento, altura, largura e peso, da barcaça; F_G e.. F_B são as forças de gravidade e flutuabilidade. Suponha que o centro de gravidade está em $L/2, W/2,$ e $H/2$.. Coeficientes a, b, c, d e.. e Supõe-se que seja conhecido.

Parte I Suponha que a barcaça é rígida



1. Suponha que não há carga externa, resolver para e (fração da altura da barcaça debaixo d'água).

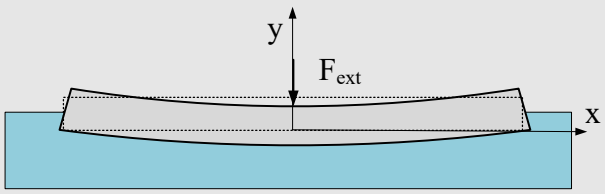
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Para uma força externa F_{ext},

   (a) Desenhe um claro diagrama de corpo livre
   (b) Escreva as equações aplicáveis e resolva para h_1, h_2 e.. β.
   (c) Determine a força máxima F_{max} Que pode ser levantada (antes que a água inunde o fundo da barcaça)

Parte II Suponha que a barcaça é flexível, que $F_{ext} \gg F_G$, e é aplicado em $L/2$.. Derive o governo equação diferencial em termos de vertical deslocamento y E a carga uniforme de flutuabilidade q_B.



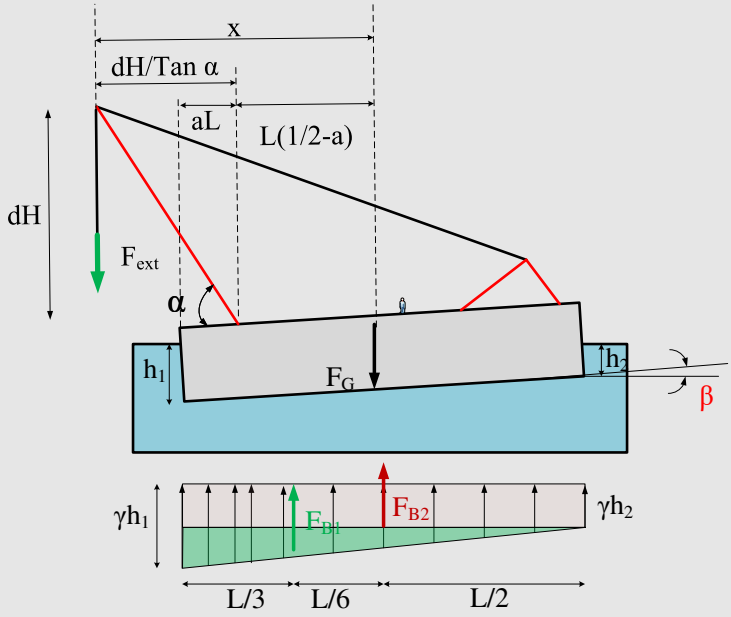
Parte I Barcaça rígida

1. Pela lei de Arquimede, o peso da barcaça é igual ao peso da água deslocada

$$F_G = \gamma.W.L.eH \Rightarrow e = \frac{F_G}{\gamma.W.L.W}$$

2. Para uma força externa F_{ext},

   (a) Diagrama de corpo livre



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(b) Escreva a equação(s) aplicável(es)

- Forças de flutuação:

$$F_B = F_{B1} + F_{B2}$$
$$F_{B1} = \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2}$$
$$F_{B2} = \gamma h_2 WL$$

- Geometria

$$x = \frac{dH}{\tan}\alpha + L\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

- Resumição de momentos com respeito ao centro

$$F_{ext}x - F_{B1}\frac{L}{6} = 0$$
$$F_{B1} = \frac{6F_{ext}x}{L}$$
$$\gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} = \underbrace{\frac{6F_{ext}}{L}\left[\frac{dH}{\tan\alpha} + L\left(\frac{1}{2} - a\right)\right]}_{A}$$

- Sumação das forças verticais

$$F_{B1} + F_{B2} - F_G - F_{ext} = 0$$
$$F_{B2} = F_G + F_{ext} - F_{B1}$$
$$\gamma h_2 WL = F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}$$
$$h_2 = \frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL}$$

- Resolva h_1

$$\gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} = A$$
$$h_1 = \frac{2A}{\gamma WL} - h2$$

- Resolva β

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{h_1 - h_2}{L}\right)$$

(c) Para a barcaça para "levantar", $h_2 = 0$ ou

$$\frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} = 0 \Rightarrow F_{ext} = \frac{F_G}{6x/L - 1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Parte II Barcaça flexível

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\
\frac{d^2M}{dx^2} &= q \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{q}{EI} \\
q &= -\gamma W y \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= -\frac{\gamma W y}{EI} \\
k^2 &= \frac{\gamma W}{4EI} \\
\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y &= 0
\end{aligned}$$

Que é a mesma equação de uma viga sobre base elástica. Solução da quarta ordem homogênea equação diferencial é da forma $y = e^{\alpha x}$, o que leva a

$$\begin{cases} \dfrac{d^4}{dx^4} - \alpha^4 y = 0 \\ \dfrac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 = -4k^4 \\ \alpha^2 = \pm 2ik^2 \\ \alpha = \pm\sqrt{\pm 2i}k \\ \quad = \pm(1 \pm i)k \end{cases}$$

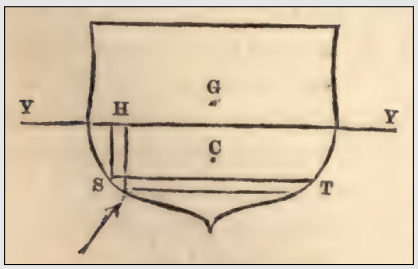
ou

$$y = e^{kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

[a] Inspirado pela leitura deste artigo

19.2.11 Ex 19.11: Rankine: Equilíbrio de um corpo flutuante (prova hidrostática)

Este exemplo segue a prova clássica de Rankine que a ação resultante de um líquido em um corpo flutuante é uma força vertical para cima igual ao peso do líquido deslocado, atuando através do centroide da volume deslocado (o centro de flutuabilidade). (Rankine, 1858, Art. 120)



CÓPIA PARA REVISÃO

Corpo flutuante (Rankine, Art. 120). Vamos YY Denotam a superfície livre horizontal do líquido. Considere uma pequena parte plana da superfície imersa da área S, cujo centroide está em uma profundidade vertical x Para baixo YY. A intensidade da pressão hidrostática nessa profundidade é

$$p = wx,$$

Onde w é o peso por unidade de volume do líquido. A pressão total agindo sobre S é, portanto, pS, agindo normal para a superfície.

Vamos α ser o ângulo entre a área do avião S e a superfície livre horizontal (equivalentemente, o ângulo entre a direção da pressão e a vertical).

- **Projeções.** A projeção horizontal da área inclinada S É

$$S_h = S\cos\alpha,$$

E a projeção vertical de S em um plano vertical perpendicular a um eixo de prisma horizontal é

$$S_v = S\sin\alpha.$$

- **Componentes horizontais.** Resolvendo a pressão pS em componentes, o componente horizontal atuando sobre S É

$$dF_H = pS_v = (wx)(S\sin\alpha).$$

Rankine mostra que, para cada elemento de superfície S, existe outro elemento de igual vertical Projeção na mesma profundidade, produzindo um componente horizontal igual e oposto. Consequentemente, somando toda a superfície imersa,

$$\sum dF_H = 0,$$

e a ação do fluido resultante não tem componente horizontal.

- **Componente vertical e líquido deslocado.** O componente vertical da pressão sobre S É

$$dF_V = pS_h = (wx)(S\cos\alpha).$$

A quantidade $(S\cos\alpha)\,x$ representa o volume de um prismático vertical pilar de líquido em pé A projeção horizontal de S E estendendo-se da superfície livre para a profundidade x. Multiplicando este volume por w dá o peso do líquido nesse prisma. Assim,

$$dF_V = w\,x\,S\cos\alpha$$

é uma força ascendente igual e oposta ao peso do líquido deslocado por essa porção prismática do corpo.

- **Flutuante resultante e sua linha de ação.** Somar os componentes verticais sobre todos os elementos da superfície imersa produz um único resultado ascendente

$$F_B = wV,$$

Onde V é o volume total deslocado. Porque cada contribuição elementar age através do centroide de sua prismática pilar, o resultado passa através do centroide do volume deslocado, denotado C, o centro da flutuabilidade.

- **Condições de equilíbrio.** Vamos W ser o peso do corpo flutuante, agindo através de seu centro de gravidade G. Equilíbrio requer

$$W = wV \quad \text{e} \quad G \text{ e } C \text{ pertencem à mesma linha vertical.}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Formulação integral moderna (suplemento). Enquanto Rankine estabelece este resultado através da decomposição geométrica, a mesma conclusão segue diretamente de uma formulação contínua moderna. O campo de pressão hidrostática é $p = wz$, onde z é a profundidade vertical abaixo da superfície livre. A força resultante exercida pelo fluido no corpo é

$$\mathbf{F} = \iint_{\partial V} p\,\mathbf{n}\,dS,$$

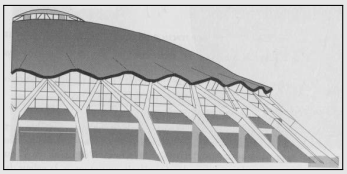
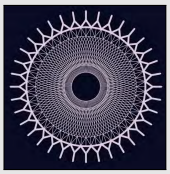
Onde $\mathbf{n}$ é a unidade externa normal para a superfície molhada. Aplicando o teorema da divergência (§R.1.2) para o componente vertical,

$$F_z = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}\,dV = \iiint_V w\,dV = wV,$$

mostrando que a força hidrostática resultante é vertical, para cima e igual ao peso do fluido deslocado. Sua linha de ação passa através do centroide de V, coincidindo com o centro de flutuação de Rankine.

19.2.12 Ex 19.12: Palazzetto dello sport; Nervi

Adaptado de Structure: An Architect's Approach
Howard, 1966, Mécanique des structures
Voldoire e Bamberger, 2008 e.. Structures
Schodek e Bechthold, 2014

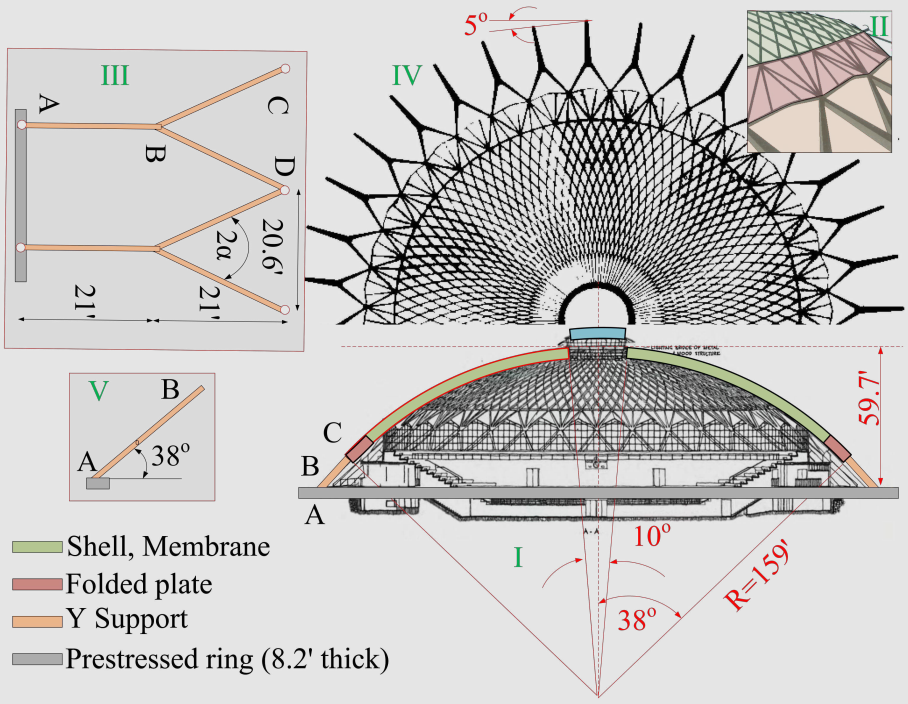
O famoso *Palazetto dello Sport*[a] foi projetado (e construído) por Pierl-Luigi Nervi em 1958 para as Olimpíadas de 1960 em Roma. Era uma estrutura deslumbrante tanto pela sua beleza, proeza técnica e método de construção. Fiel aos princípios orientadores de Sullivan, "forma segue função"é realmente celebrada aqui.

Geometria

Tem uma cúpula esférica (membrana casca com momentos mínimos/cisalhamento) uniformemente apoiada por placas dobradas (flexualmente rígidas) que, por sua vez, transferem a carga uniforme para suportes em forma de 36 Y. Eles, por sua vez, transferem a carga para um anel circunferencial na base.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Carregar

O peso[b] da cúpula é determinada a partir do peso médio por pé quadrado. Tomando casca e costelas juntas, com concreto a 150 lb/ft^3, nós temos 61 lb/ft^2; Adicionando o isolamento de vermiculita e a cobertura dará um total de 80 lb/ft^2 Carga total morta. O telhado da cúpula será tomado a 40 lb/ft^2. A área de uma zona de uma esfera entre dois círculos de latitude é dada pela fórmula $\pi R^2(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)$ Onde ϕ_1 é o ângulo de colatitude (ângulo medido a partir do pólo norte, ou topo, da cúpula).

$$\begin{array}{rrcl} \text{Cupola} & 2\pi(159)^2(\cos 0° - \cos 5°)(40)\ \text{psf} & = & 25\ \text{k} \\ \text{Shell} & 2\pi(159)^2(\cos 5° - \cos 38°)(80)\ \text{psf} & = & 2,655\ \text{k} \end{array}$$

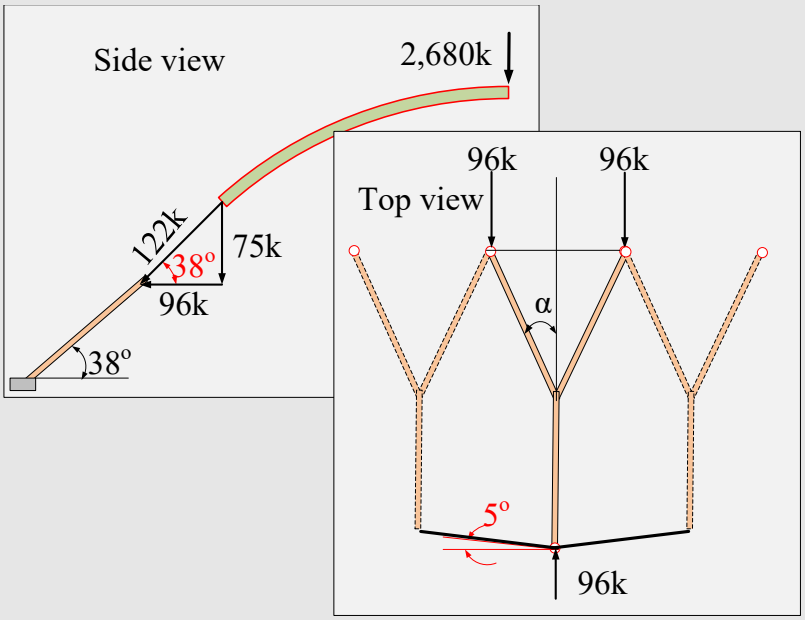
Assim, o peso total é 2.680 kips.

Forças

Cada butress carregará $N_{AB} = 2,655/36 \simeq 75$ Kips em cada um. Pelos seguintes diagramas de corpo livre:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



As forças correspondentes no ápice do apoio Y serão

$$N_{AB} = \frac{75}{\sin 38°} = 122 \text{ k}; \quad N_{AB}^{\text{hor}} = \frac{75}{\tan 38°} = 96 \text{ k}$$

Da geometria

$$\tan \alpha = \frac{20.6}{21} \Rightarrow \alpha = 26°$$

Por isso, o força axial em BC seria

$$N_{BC} = \frac{122}{2} \frac{1}{\cos 26°} = 68 \text{ k}$$

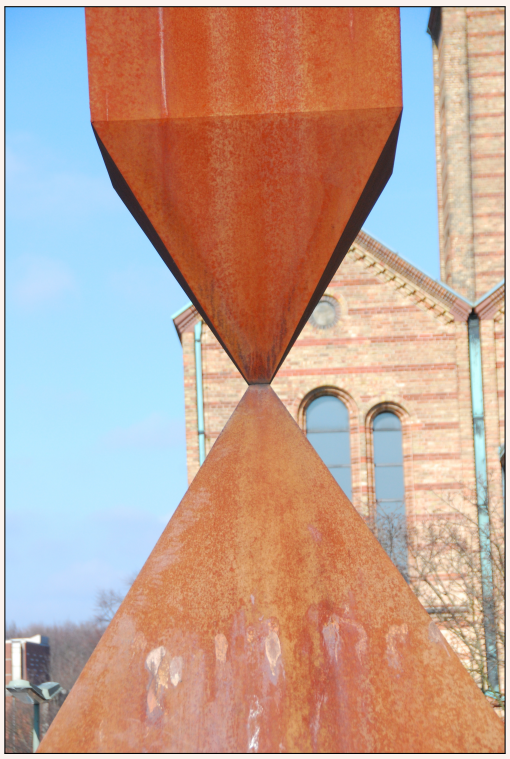
A força de protensão N_p necessário para equilibrar o componente horizontal de

$$N_p = \frac{N_{AB}^{\text{hor}}}{2 \sin 5°} = 550 \text{ k}$$

[a] No colegial, eu jogava handebol nessa estrutura icônica, o que me dá uma conexão muito pessoal com ela.

[b] Neste problema, vamos girar forças para o kip mais próximo.

CÓPIA PARA REVISÃO



Obelisco Quebrado, Barnett Newman, Berlim (2009)

Desafia a intuição e enfatiza o equilíbrio estrutural, assim como as reações na engenharia garantem estabilidade neutralizando cargas aplicadas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 20

Treliças

Abstract

Este capítulo fornece uma exploração detalhada da análise treliça, começando com uma introdução aos pressupostos fundamentais, convenções de sinais e definições de indeterminação estática interna/externa. As equações governantes são apenas aquelas de equilíbrio estático. A discussão então progride para três métodos analíticos primários: O método das juntas, o método das seções, e um método da matriz. Cada método é exaustivamente explicado através de procedimentos passo a passo, complementado por exemplos ilustrativos para aumentar a clareza e facilitar o entendimento prático.

20.1 Introdução 910
20.1.1 Suposições 911
20.1.2 Assinar convenção 912
20.1.3 Determinação e estabilidade 912
20.2 Métodos de análise 914
20.2.1 Método das juntas 914
20.3 Método das seções 921
20.3.1 Método das seções 921
20.3.2 Ex 20.3: Método das seções . 923
20.4 Junta/matriz 923
20.4.1 Ex 20.4: Simples treliça; método de articulação/matriz . 925
20.4.2 Ex 20.5: Complexo treliça; método de articulação/matriz 927

20.1 Introdução

1 Um treliça é uma estrutura composta por membros (geralmente retos) dispostos em triângulos interligados. Os membros são tipicamente conectados em suas extremidades por juntas consideradas presas (conexões como as que não transmitem momentos), o que permite ao treliça se comportar de uma maneira mecânica específica.

2 Tipos de treliças são mostrados na figura. 17.5.

CÓPIA PARA REVISÃO

20.1.1 Suposições

3 As conexões entre os membros da treliça são presumidas como juntas de alfinete. Isso significa que os membros estão conectados de tal forma que eles só podem transferir forças axiais (tensão ou compressão) e não transferir momentos. Esta suposição permite que cada articulação seja analisada como um nó em um sistema de força bidimensional, onde a soma das forças em cada direção deve ser zero.

4 Os membros são supostos para transportar forças apenas ao longo de seus comprimentos. Ou seja, cada membro está em compressão ou tensão, sem forças de flexão consideradas. Isso simplifica muito a análise reduzindo o número de fatores tensão considerados em cada membro.

5 Cargas (forças e reações) são presumidas para ser aplicadas apenas nas juntas do treliça. Esta suposição é crucial porque evita momentos fletores nos membros, aderindo à segunda suposição de forças axiais apenas.

6 Mesmo que as juntas sejam modeladas como juntas para transferência de força, elas são consideradas rígidas em suas próprias dimensões. Isso significa que nenhuma deformação ocorre nas articulações, e as relações angulares entre os membros conectados permanecem constantes.

7 Em muitas análises treliça, o peso dos próprios membros treliça é frequentemente negligenciado em comparação com as cargas que suportam. Isso simplifica os cálculos, embora em aplicações práticas, particularmente para grandes extensões ou materiais pesados, os pesos dos membros podem ser significativos e devem ser considerados.

8 O uso de treliças como estruturas eficazes de suporte de carga é evidente em sua aplicação generalizada em pontes, telhados e outras formas estruturais onde grandes extensões são necessárias.

9 Conceitualmente, um treliça pode ser pensado como um gigante viga que se estende entre dois suportes. Esta analogia é útil porque simplifica a compreensão de como um treliça funciona. Como uma viga, um treliça distribui cargas aplicadas em cima dele para os suportes em suas extremidades. No entanto, ao contrário de um sólido viga, um treliça faz isso de uma forma muito mais eficiente em termos materiais usando as configurações triangulares interligadas. Estes triângulos ajudam a distribuir as forças por toda a estrutura, minimizando o peso enquanto maximiza a força.

10 Os acordes superiores de um treliça geralmente estão em compressão. Estes são os membros horizontais ou inclinados no topo do treliça que se estendem de uma extremidade para a outra.

11 Por outro lado, os acordes inferiores de uma tensão treliça experimentam. Estes membros estão localizados no fundo do treliça, correndo paralelo aos acordes superiores.

12 Os membros diagonais em um treliça podem ser sujeitos a tensão ou compressão, dependendo de sua orientação e da geometria geral do treliça. Estas diagonais são cruciais

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

para transferir cargas entre os acordes superior e inferior e para manter a integridade estrutural do treliça. A direção e magnitude da força em um membro diagonal dependem da distribuição de carga e do tipo específico de treliça. Por exemplo, em um típico Pratt treliça, os membros verticais manuseiam a compressão enquanto os membros diagonais manipulam a tensão.

20.1.2 Assinar convenção

13 Tensão positiva, compressão negativa. Em um treliça o forças axiais são indicados como forças atuando nas juntas.

14 Equações básicas

$$\text{Tensão–força: } \sigma = \frac{P}{A}$$
$$\text{Tensão–deformação: } \sigma = E\varepsilon$$
$$\text{Força–deslocamento: } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \text{Equilíbrio: } \Sigma \mathbf{F} = 0$$

20.1.3 Determinação e estabilidade

15 Um treliça é considerado estaticamente determinado se o esforços internos em seus membros pode ser calculado usando apenas as equações de equilíbrio estático. Para planar treliças, estas são as equações afirmando que a soma das forças nas direções horizontal e vertical e a soma dos momentos sobre qualquer ponto deve ser zero.

16 if m é o número de membros, r o número de forças de reação, e j O número de juntas, então teríamos um total de $m + r$ desconhecidos e.. $2j$ (ou $3j$) equações de estática (2D ou 3D em cada junta). Se não temos equações suficientes de estática então o problema é indeterminado, se temos muitas equações então o treliça é instável, Tabela 20.1.

17 Um treliça pode ser estaticamente/externamente determinado ou indeterminado com relação às reações (mais de 3 ou 6 reações em 2D ou 3D, respectivamente).

18 A treliça pode ser internamente determinada ou indeterminada, tabela 20.1.

	2D	3D
Indeterminação estática		
Externo	$r > 3$	$r > 6$
Interno	$m + r > 2j$	$m + r > 3j$
Instável	$m + r < 2j$	$m + r < 3j$

Tabela 20.1: Determinação estática e estabilidade de treliças

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 If $m < 2j - 3$ (em 2D) o treliça não é internamente estável, e ele não permanecerá um corpo rígido quando ele é separado de seus suportes. No entanto, quando preso aos suportes, o treliça será rígido.

20 As reações podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio apropriadas mostrado em Def. 19.1 (pg. 19.1.2). Mesa 20.2 resume as equações de equilíbrio aplicáveis.

Tabela 20.2: Equações de equilíbrio aplicáveis para treliças

	Reações	Equilíbrio Nodal
2D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣM_Z,	ΣF_X, ΣF_Y
3D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z, ΣM_X, ΣM_Y, ΣM_Z	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z

21 O treliça em Fig. 20.1 tem 4 reações, portanto é externamente indeterminada. Ele também tem 6 juntas ($j = 6$), 4 reações ($R = 4$) e 9 membros ($m = 9$). Assim, temos um total de $m + R = 9 + 4 = 13$ desconhecidos e.. $2 \times j = 2 \times 6 = 12$ equações de equilíbrio, portanto o treliça também é internamente estático indeterminado.

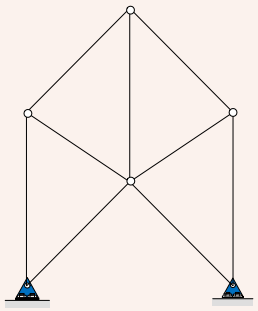


Figura 20.1: Estaticamente indeterminado treliça

22 Há dois métodos de análise para determinar estaticamente treliças

1. O Método das Juntas
2. O Método das Seções
3. Método Matrix

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

20.2 Métodos de análise

20.2.1 Método das juntas

23 O *método de articulações* analisa cada conjunto no treliça para determinar o interno forças axiais nos membros treliça. Os passos envolvidos são:

1. Determine se a estrutura é estaticamente determinada
2. Compute todas as reações
3. Esboce um diagrama de corpo livre mostrando todas as cargas conjuntas (incluindo reações)
4. Para cada conjunto, e começando com os carregados, aplicar o apropriado Equações de equilíbrio (ΣF_x e.. ΣF_y Em 2D; ΣF_x, ΣF_y e.. ΣF_z em 3D).
5. Porque treliça elementos só podem carregar forças axiais, o resultado Força$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$Deve estar ao longo do membro, Fig. 20.2.

$$\frac{F}{L} = \frac{F_x}{L_x} = \frac{F_y}{L_y}$$

6. Normalmente, é melhor começar com as reações de computação primeiro.
7. Então se mude para uma junta onde não estão presentes mais de duas forças desconhecidas, muitas vezes na fronteira do treliça.
8. Aplique as equações de equilíbrio estático em cada articulação:
9. Resolva essas equações para encontrar as forças nos membros adjacentes, onde valores positivos indicam tensão e valores negativos indicam compressão.
10. Sempre mantenha o controle do x e.. y componentes de uma força membro (F_x, F_y), Como isso poderia ser necessário mais tarde, quando se considera o equilíbrio da força em outra junta com a qual o membro está conectado, figura 20.2.

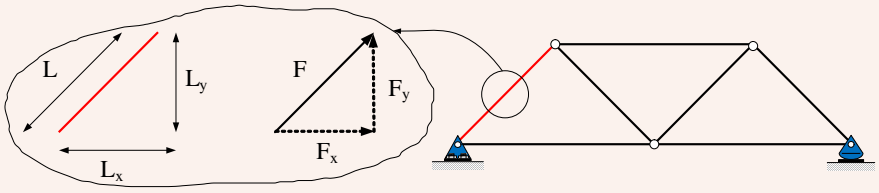


Figura 20.2: Relação entre forças e comprimentos

11. Mova-se para a próxima junta e repita o processo até que todas as forças dos membros sejam determinadas.

Este método é especialmente eficaz para menores treliças ou quando informações detalhadas sobre cada membro são necessárias.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24 Na análise treliça, não há convenção de sinais. Um membro é.. Supostamente sob tensão (ou compressão). Se após a análise, a força for considerada negativa, então isso implicaria que a suposição errada foi feita, e que o membro deveria estar sob compressão (ou tensão).

25 Em um diagrama de corpo livre, os esforços internos são representados por flechas atuando sobre as juntas e não como forças finais sobre o elemento em si. Isso é para tensão, a flecha está apontando para longe da articulação, e para compressão em direção à junta, Fig. 20.3.

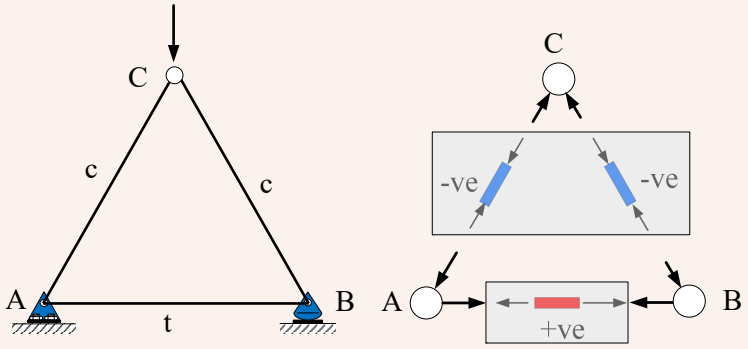
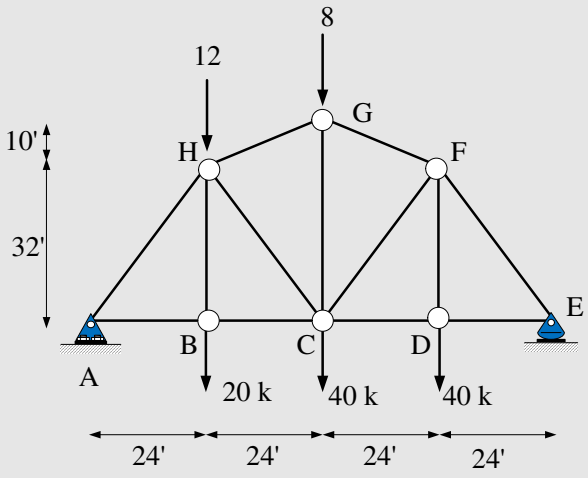


Figura 20.3: Apresentando forças com flechas

20.2.1.1 Ex 20.1: Treliça análise; método de articulações



1. $R = 3$, $m = 13$, $2j = 16$, e $m + R = 2j$✓

CÓPIA PARA REVISÃO

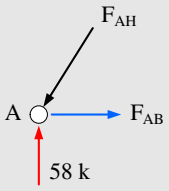
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Compute as reações

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^E = 0; \quad &\Rightarrow \quad (20+12)(3)(24) + (40+8)(2)(24) + (40)(24) \\
&\quad -R_{A_y}(4)(24) = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 58 \text{ kip } \uparrow \\
(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad 20 + 12 + 40 + 8 + 40 - 58 - R_{E_y} = 0 \\
&\Rightarrow \quad R_{E_y} = 62 \text{ kip } \uparrow
\end{aligned}
$$

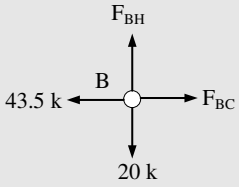
3. Considere cada conjunto separadamente:

Node A: Claramente AH está sob compressão, e AB sob tensão



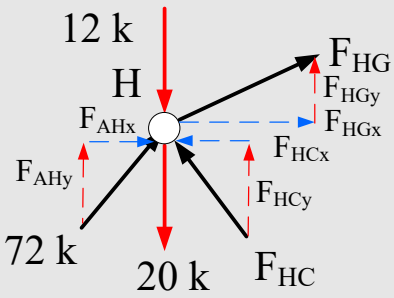
$$
\begin{aligned}
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_y} + 58 = 0 \\
&\quad F_{AH} = \tfrac{l}{l_y}(F_{AH_y}) \\
&\quad l_y = 32; l = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \\
&\Rightarrow \quad F_{AH} = \tfrac{40}{32}(58) = 72.5 \text{ kip C} \\
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_x} + F_{AB} = 0 \\
&\quad F_{AB} = \tfrac{L_x}{L_y}(F_{AH_y}) = \tfrac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

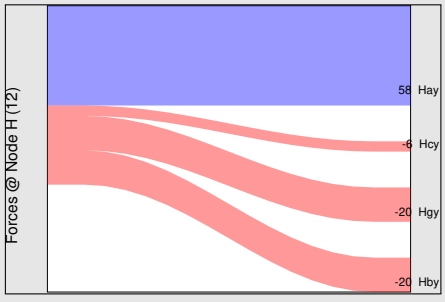
Node B:



$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BC} = 43.5 \text{ kip T} \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BH} = 20 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

Node H:





CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Além do diagrama de corpo livre, a figura certa ilustra o caminho de carga no nó H[a] Lote aluvial, que é o fluxo das forças verticais no nó H.

$$(+\rightarrow)\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{AH_x} - F_{HC_x} + F_{HG_x} = 0$$
$$\Rightarrow 43.5 - \frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) + \frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) = 0$$
$$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{AH_y} + F_{HC_y} - 12 + F_{HG_y} - 20 = 0$$
$$\Rightarrow 58 + \frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) - 12 + \frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) - 20 = 0$$

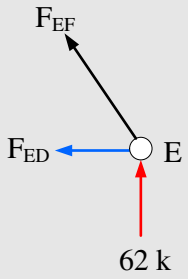
Isso pode ser escrito como mais convenientemente

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.921 \\ -0.8 & -0.385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.5 \\ 26.0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o que conseguimos $F_{HC} = -7.5$ e.. $F_{HG} = -52$, assim nós fizemos uma suposição errônea no diagrama de corpo livre do nó H, e a resposta final é

$$F_{HC} = 7.5 \text{ kip T}$$
$$F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

Node E:

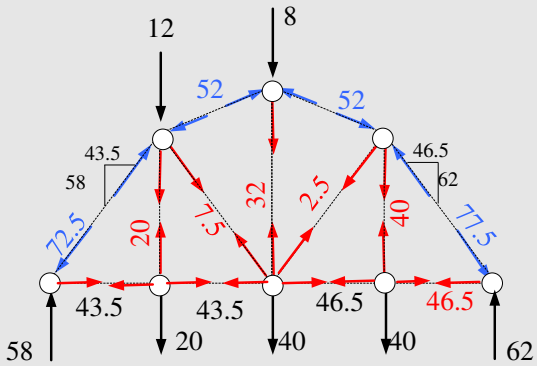


$$\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{EF_y} = 62 \Rightarrow F_{EF} = \frac{\sqrt{24^2+32^2}}{32}(62) = 77.5 \text{ kip C}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{ED} = F_{EF_x} \Rightarrow F_{ED} = \frac{24}{32}(F_{EF_y}) = \frac{24}{32}(62) = 46.5 \text{ kip T}$$

Os resultados desta análise estão resumidos

CÓPIA PARA REVISÃO

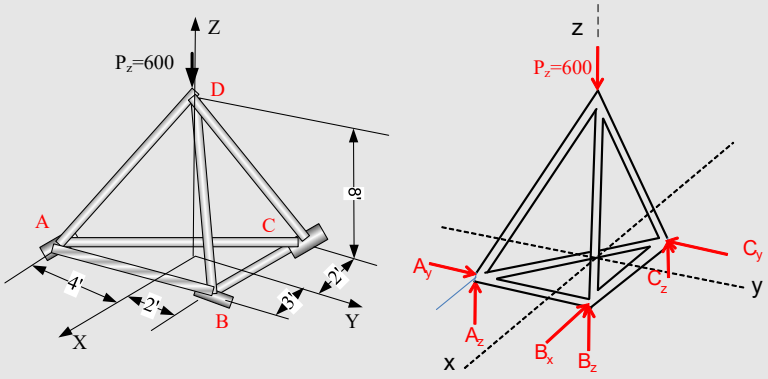
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Poderíamos verificar nossos cálculos verificando o equilíbrio de forças em um nó não usado anteriormente, como D

[a] Isso é um chamado *Diagrama aluvial*.

20.2.1.2 Ex 20.2: 3D treliça



$A(3,-4,0)$, $B(3,2,0)$, $C(-2,2,0)$, e $D(0,0,8)$. Nenhuma reação no x ou y direção (estrutura está no gelo, e não há carga lateral).

Procedimento

Resolva sequencialmente para

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Reações

$$\Sigma M_{AB} = 0 \Rightarrow C_z\checkmark$$
$$\Sigma M_{CB} = 0 \Rightarrow A_z\checkmark$$
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow B_z = 40.0\checkmark$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x\checkmark$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y\checkmark; C_y\checkmark$$

2. Junta B

$$L_{BD}$$
$$\Sigma F_z = 0; \Rightarrow F_{BD}\checkmark$$
$$F^x_{BD}$$
$$F^y_{BD}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{BA}\checkmark$$

3. junta A

$$\alpha\checkmark$$
$$L_{AD}\checkmark$$
$$\Sigma F_z = 0; F_{AD}\checkmark$$
$$\Sigma F_x = 0; F_{AC}\checkmark$$

4. Junta C

$$F^Z_{CD}\checkmark$$
$$\Sigma F_Z = 0 \Rightarrow F_{CD}\checkmark$$

Solução

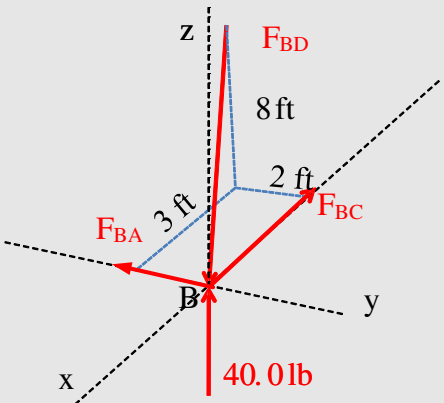
1. Considerando o diagrama de corpo livre do todo treliça

$$\Sigma M_{AB} = 0; C_z(5) - 600(3) = 0 \Rightarrow C_z = 360$$
$$\Sigma M_{CB} = 0; 600(2) - A_z(6) = 0 \Rightarrow A_z = 200$$
$$\Sigma F_z = 0; B_z + 200 + 360 - 600 = 0 \Rightarrow B_z = 40.0$$
$$\Sigma F_x = 0; B_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0; A_y - C_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0; A_y(3) + C_y(2) = 0; \Rightarrow A_y = C_y = 0$$

2. Junta B

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Joint B

$$L_{BD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{77}} F_{BD} + 40 = 0; \Rightarrow F_{BD} = 43.87 \text{lbf (C)}$$

$$\Sigma F_x = 0; F_{BD}^x - F_{BC} = 0$$

$$F_{BD}^x = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{3}{\sqrt{77}}(43.87)$$

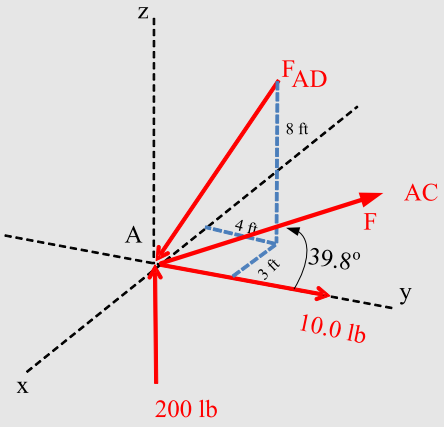
$$F_{BC} = 15.0 \text{lbf (T)}$$

$$\Sigma F_y = 0; F_{BD}^y - F_{BA} = 0$$

$$F_{BD}^y = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{2}{\sqrt{77}}(43.87)$$

$$F_{BA} = 10.0 \text{lbf (T)}$$

3. Junta A



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\tan(\alpha) = \frac{L_x}{L_y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = 39.8\,\text{deg}$$

$$L_{AD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{89}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{89}} F_{AD} + 200 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 236\text{lbf (C)}$$

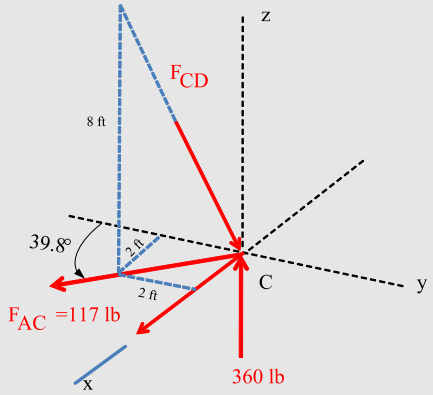
$$\Sigma F_x = 0; F_{AD}^X - F_{AC}^X = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{89}}(235.9) - F_{AC}\sin(39.8°) = 0 \Rightarrow F_{AC} = 117\text{lbf (T)}$$

Cheque

$$\Sigma F_y = 0 F_{AC}^Y - F_{AD}^Y + 10 = 0$$

$$117.2\cos(39.81^o) - \frac{4}{\sqrt{89}}(235.9) + 10.0 = 0 \checkmark$$

4. Junta C



$$\Sigma F_Z = 0; F_{CD}^Z + 360 = 0$$

$$\frac{-8}{\sqrt{72}} F_{CD} + 360 = 0$$

$$F_{CD} = 382\text{lbf (C)}$$

20.3 Método das seções

20.3.1 Método das seções

26 O *método de seções* oferece uma maneira mais rápida de encontrar as forças em membros específicos, particularmente útil em grandes treliças. Envolve:

CÓPIA PARA REVISÃO

1. Calculando as reações no treliça suporta usando o equilíbrio global do treliça.
2. Escolhendo uma seção que atravessa não mais do que três membros cujas forças são desconhecidas. Esta seção deve dividir o treliça em duas partes.
3. Analisando uma parte do treliça, garantindo que seja estaticamente determinada.
4. Aplique as equações de equilíbrio na seção
5. Resolvendo essas equações para determinar as forças nos membros cortados pela seção.

27 A soma de momentos sobre um ponto em particular (normalmente a interseção de dois membros cortados) permitiria a determinação de outras forças membros.

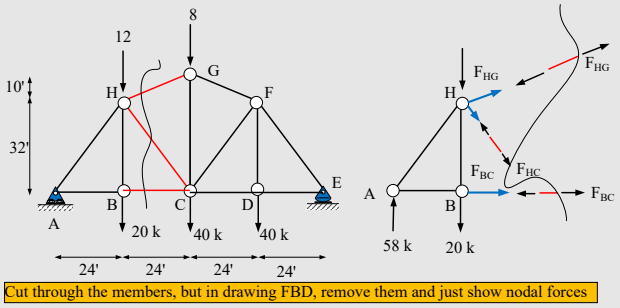
28 A soma das forças é usada para determinar forças em membros inclinados.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

20.3.2 Ex 20.3: Método das seções

Neste problema, procuramos determinar F_{BC} e.. F_{HG} no exemplo anterior. Cortando os membros HG, HC e.. BC, nós primeiro tomar o somatório de forças em relação a H



$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^H = 0 \Rightarrow R_{A_y}(24) - F_{BC}(32) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip, T}$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0;$$

$$\Rightarrow (58)(24)(2) - (20+12)(24) - F_{HG_x}(32) - F_{HG_y}(24) = 0$$

$$2784 - 768 - (32)(F_{HG})\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} - (24)(F_{HG})\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = 0$$

$$2,000 - (29.5)F_{HG} - (9.2)F_{HG} = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

20.4 Junta/matriz

29 Este é essencialmente o método das articulações (em esteróides) moldadas em forma de matriz. Simplificando, escrevemos todas as equações de equilíbrio em todos os nós, e depois as lançamos na forma de matriz.

30 Assim, procuramos determinar a matriz estática $\mathcal{B}$ que relaciona o vetor de todos os treliça $\{\mathbf{P}\}$ Forças nodais em coordenadas globais para todas as forças desconhecidas (elemento esforços internos em seu sistema de coordenadas e estrutura local reações externas), §46.2.1.2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{FF} & \mathcal{B}_{FR} \\ \mathcal{B}_{RF} & \mathcal{B}_{RR} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} + \underbrace{\{P\}}_{\mathbf{P}} = 0$$

ou

$$\text{Forças internas} - \text{forças externas} = 0$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

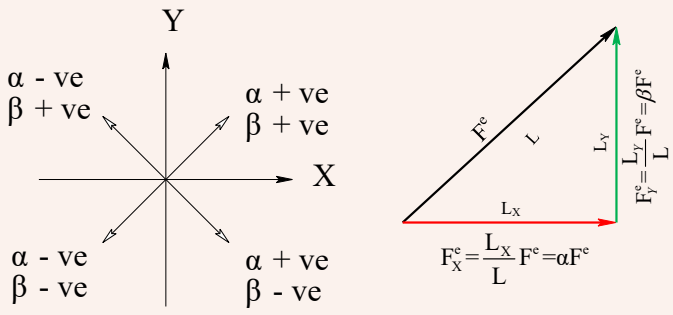
e podemos pensar em $\mathcal{B}$ (a matriz estática) como um "sistema físico", **F** a "resposta" e **P** Uma função de "força".

31 Este método pode ser resumido da seguinte forma

1. Selecione um sistema de coordenadas
2. Número as juntas e os elementos separadamente
3. Assuma
   (a) Todas as forças membros para ser positivo (i.e. tensão)
   (b) Todas as reações para ser positivo
4. Compute a direção dos cossenos em cada nó j e para Cada elemento e, Fig. 20.4a

$$\alpha_j^e = \frac{L_x}{L}$$
$$\beta_j^e = \frac{L_y}{L}$$

   Elemento e junta de ligação i para j terá $\alpha_i^e = -\alpha_j^e$, e $\beta_i^e = -\beta_j^e$E a matriz $[B]$ terá $2j$ Filas e.. $m + r$ pilares. Só pode ser invertido se for simétrico (i.e $2j = m + r$, estaticamente determinado).
5. Escreva as duas equações de equilíbrio em cada junta j em termos de Os desconhecidos (forças e reações dos membros)



(a) Direção cossenos (b) Forças conjuntas

Figura 20.4: Método de união/matriz, diagramas de corpos livres

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \alpha_j^e F_e + R_{x_j} + P_{x_j} = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \beta_j^e F_e + R_{y_j} + P_{y_j} = 0$$

6. Inverter a matriz para computar $\{F\}$ e.. $\{R\}$

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A MATLAB® implementação do código é dada em §I.1.1.

32 A vantagem deste método, é que uma vez o $[\mathcal{B}]$ Matriz tem Foi invertido, podemos facilmente analisar a mesma estrutura para diferentes casos de carga. Com os novos códigos de design em que cargas mortas e cargas vivas são separadamente fatoradas (capítulo 36), este método pode poupar esforços substanciais de reanálise. Além disso, quando as deflexões são determinadas pelo virtual método das forças (capítulo 24), as duas análises (carga real, e unidade virtual um) podem ser prontamente realizadas.

33 Este método pode ser o único apropriado para analisar estaticamente determine treliças qual solução está desafiando os dois métodos anteriores, Fig. 20.5.

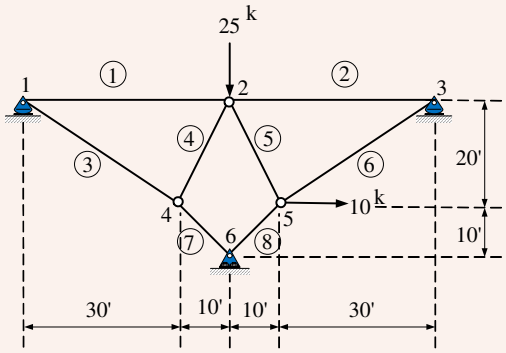
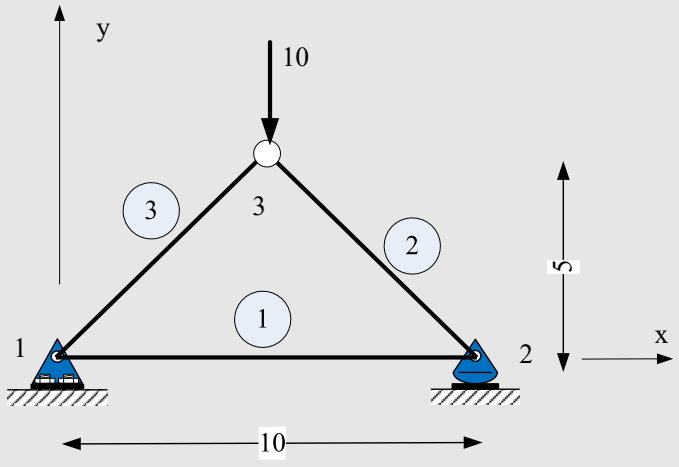


Figura 20.5: Complexo estaticamente determinado treliça

20.4.1 Ex 20.4: Simples treliça; método de articulação/matriz

Determine todas as forças membros para o seguinte



CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Primeiro determinamos as direções

Membro	Nós	α	β	α	β
1	1-2	Nó 1		Nó 2	
		$\alpha_1^1 = 1$	$\beta_1^1 = 0$	$\alpha_2^1 = -1$	$\beta_2^1 = 0$
2	2-3	Nó 2		Nó 3	
		$\alpha_2^2 = -.7071$	$\beta_2^2 = .707$	$\alpha_3^2 = .707$	$\beta_3^2 = -.707$
3	3-1	Nó 3		Nó 1	
		$\alpha_3^3 = -.707$	$\beta_3^3 = -.707$	$\alpha_1^3 = .707$	$\beta_1^3 = .707$

2. Em seguida, escrevemos as equações de equilíbrio

$$\begin{array}{lll} & & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & R_{1x} & R_{1y} & R_{2y} \end{matrix} \\ \text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 & \left[\begin{matrix} \alpha_1^1 & 0 & \alpha_1^3 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1^1 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \left\{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{matrix}\right\} = 0 \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \{F\} \qquad\qquad \{P\} \end{array}$$

Ou

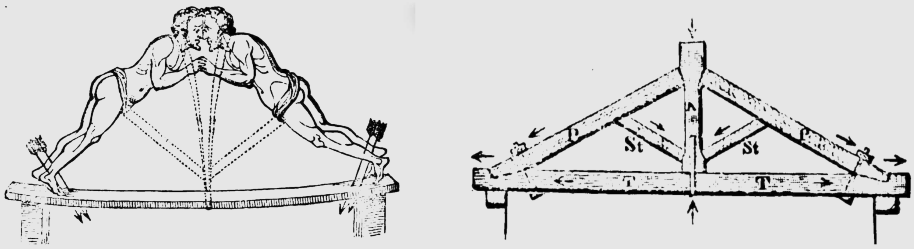
$$\begin{array}{ll} \text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & .707 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & .707 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & .707 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & .707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -.707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{[\mathcal{B}]} \underbrace{\left\{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{matrix}\right\}}_{\{F\}} + \underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{matrix}\right\}}_{\{P\}} = 0$$

Invertendo $[\mathcal{B}]$ Nós conseguimos de $F = -[\mathcal{B}]^{-1}P$

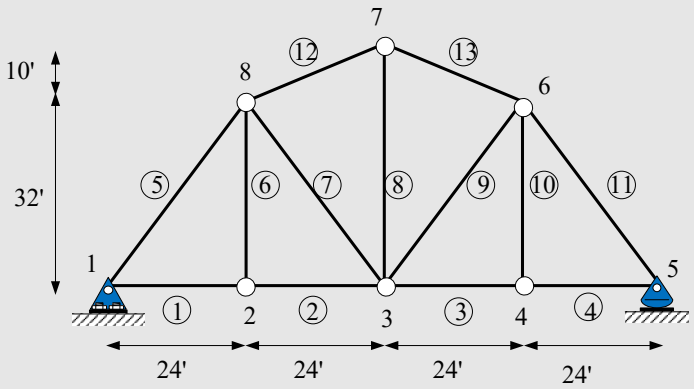
$$\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5 \\ -7.07 \\ -7.07 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{matrix}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



20.4.2 Ex 20.5: Complexo treliça; método de articulação/matriz



1. Determine a direção dos cossenos

$$\frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$
$$\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{10}{26} = 0.38$$
$$\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{24}{26} = 0.92$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Setup o $\mathcal{B}$ Matriz

$$
\begin{array}{ll}
\#1 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#2 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#3 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#4 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#5 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#6 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#7 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#8 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y
\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & & & & .6 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & .8 & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & 1 & & & & -.6 & & .6 & & & & & & & \\
 & & & & & & .8 & 1 & .8 & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & & -.6 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & .8 & & & & & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & -.6 & & .6 & & -.92 & & & \\
 & & & & & & & & -.8 & -1 & -.8 & & .38 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -.92 & .92 & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & -.38 & -.38 & & & \\
\hline
 & & & & -.6 & & .6 & & & & & .92 & & & & \\
 & & & & -.8 & -1 & -.8 & & & & & .38 & & & &
\end{array}\right]}_{[\mathbf{B}]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
F_1 \\ F_2 \\ \hline F_3 \\ F_4 \\ \hline F_5 \\ F_6 \\ \hline F_7 \\ F_8 \\ \hline F_9 \\ F_{10} \\ \hline F_{11} \\ F_{12} \\ \hline F_{13} \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{5_y}
\end{array}\right\}}_{?}
+
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -20 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \hline -8 \\ \hline 0 \\ -12
\end{array}\right\}}_{\checkmark}
= 0
$$

3. Inverter (usando *Matemática*)

```
b={
{ 1, 0., 0.,  0.,0.6,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0.,  1,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,0.8,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   1,  0.},
{-1, 1,  0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0.,0.,  0.,  0.,  0.,   1,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0.,-1,   1,  0.,  0.,  0.,-0.6, 0.,  0.6, 0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0., 0.8, 1.,  0.8, 0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0., 0., -1,   1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 1.,  0.,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  -1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,-0.6,   0.,   0., 0.,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0., 0.8,   0.,   0., 0.,
   0., 1.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.6, 0., 0.6,   0.,-0.92, 0.,
   0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.8,-1.,-0.8,   0., 0.38, 0.,
   0., 0.},
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,-0.92, 0.92, 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., -1,   0., 0.,  0.,-0.38,-0.38, 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0., -0.6, 0., 0.6, 0.,   0., 0.,  0., 0.92,   0., 0.,
    0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,-0.8, -1,-0.8, 0.,   0., 0.,  0., 0.38,   0., 0.,
    0., 0.}
}
p={0, 0, 0, -20,  0, -40 ,  0, -40,  0, 0,  0, 0, 0, -8,  0, -12}
m=Inverse[b].p
```

4. Resultados finais
   Fora[3]= -43.5, -43.5, -46.5, -46.5, 72.5, -20., -7.66598, -31.7344, -2.66598, -40., 77.5, 52.2822, 52.2822, -1.22125 10 , -58., -62.
   Que correspondem ao elemento desconhecido esforços internos e reações externas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Anselm Kiefer, *Daath* (1990)

Elementos rígidos e interligados refletem metaforicamente como treliças distribuem forças eficientemente através da triangulação, garantindo força e estabilidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

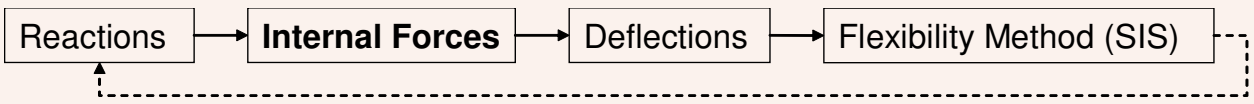
Capítulo 21

Esforços internos em Membros Flexurais

Abstract

Este capítulo, revisita e enfatiza a relação fundamental entre demanda externa e capacidade interna em sistemas estruturais - um conceito chave que é muitas vezes negligenciado (se não totalmente ausente) nos textos padrão análise estrutural. Assim, o capítulo é intencionalmente intitulado "Esforços internos", uma saída do tradicional e um tanto mundano título de "Cisalhamento e Diagramas Moment'. O capítulo começa abordando as relações entre tensões e resultante esforços internos. Posteriormente, identifica o pertinente esforços internos para cada estrutura. Então a carga, cisalhamento e relações momento são derivados. O capítulo conclui com uma série de exemplos progressivamente complexos.

21.1 Introdução 932
21.1.1 Abordagem de engenharia: De tensões a esforços internos 932
21.1.2 Esforços internos para 2d/3d reta/curvada vigas 933
21.1.3 Por que isso é importante . . 935
21.1.4 Convenções de sinais de design 936
21.2 Carregar, cisalhamento, relações momento 937
21.2.1 Forma diferencial 937
21.2.2 Forma integral 938
21.3 Exemplos 939
21.3.1 Ex 21.1: Viga com carga inclinada 940
21.3.2 Ex 21.2: Inclinado pórtico . . 941
21.3.3 Ex 21.3: Pórtico com carga hidrostática 944
21.3.4 Ex 21.4: Carga linearmente variável 946
21.3.5 Ex 21.5: Pórtico; Exemplo de telhado inclinado 947
21.3.6 Ex 21.6: Reciproca pórtico . . 948
21.3.7 Ex 21.7: 3D pórtico 952

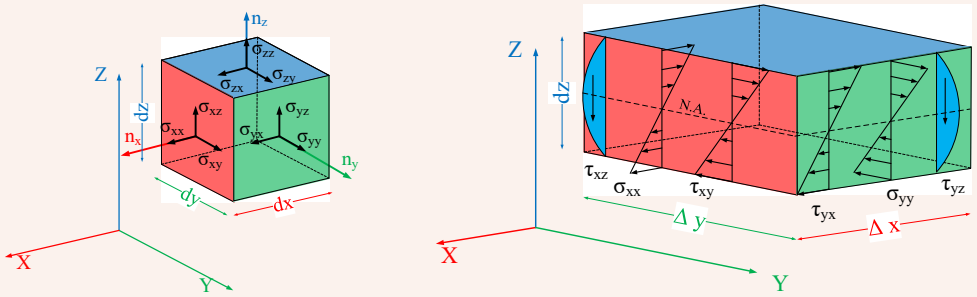


CÓPIA PARA REVISÃO

21.1 Introdução

21.1.1 Abordagem de engenharia: De tensões a esforços internos

1 Tensões (definido em §O.2.2) são definidos em um ponto infinitesimal, Fig. 21.1a e têm (tipicamente) uma distribuição linear como mostrado na figura. 21.1b para uma placa de espessura t.



(a) Internamente tensões em um ponto infinitesimal

(b) Tensão distribuição através de uma placa

Figura 21.1: Interno tensões

2 Transitando para esforços internos, essas não são entidades físicas que podem ser observadas diretamente; Em vez disso, o que podemos realmente gravar e observar são deformações. Aqueles por sua vez induzem tensões que novamente não podem ser medidos diretamente. Apenas problemas muito limitados e simples podem ser resolvidos analiticamente apenas com base na função tensões (tensão aéreo] ou mapeamento conformado). Numericamente, usaremos o contínuo elementos finitos onde a solução é expressa em termos de tensões. Estes tensões podem então ser integrados para calcular o correspondente esforços internos, que são necessários para verificar a conformidade com os requisitos de código

3 Para facilitar a análise em cenários complexos (que é praticamente todos os problemas), introduzimos o conceito de esforço interno.

4 Assim, esforços internos são conceituais *abstração* Costumava entender os efeitos de tensões em uma determinada área. Matematicamente, são as integrais de distribuições tensão sobre áreas específicas.

5 Forças são.. *definido* Como resultado,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Forças axiais $\mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz$

$$N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz;\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz;\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz$$

Momentos $\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz;\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz;\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

Cisalhamento $\mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz$

$$V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz;\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz$$

6 Thos por sua vez será usado como esforços internos, em várias combinações, dependendo do tipo de elemento estrutural.

21.1.2 Esforços internos para 2d/3d reta/curvada vigas

7 Dependendo do tipo de estrutura, haverá diferentes forças para lidar, Fig. 21.2.. Note que os momentos são mostrados como vetores de cabeça dupla em vez de setas curvas (como no exemplo na Seita. 19.2.8).

8 É costume supor que o membro está ao longo do x eixo, que axial e forças cortantes são denotados por N e.. VEnquanto a torção e os momentos são denotados por T e.. M.

9 Em termos de notação, é costume denotar o força axial ao longo do x eixo como a força normal e é denotado por N, enquanto os outros são forças cortantes V.. Da mesma forma, o momento ao longo do x É a torção TOs outros são momentos M.

10 quando se considera esforços internos em contextos tridimensionais (3D), é importante especificar claramente a direção e o plano de ação dessas forças (por exemplo, V_x e.. V_y, M_z)[1].

11 Os termos aplicáveis são indicados abaixo:

[1] Em placas e cascas, teremos subscritos duplos, Fig. 33.4 e.. 34.3

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

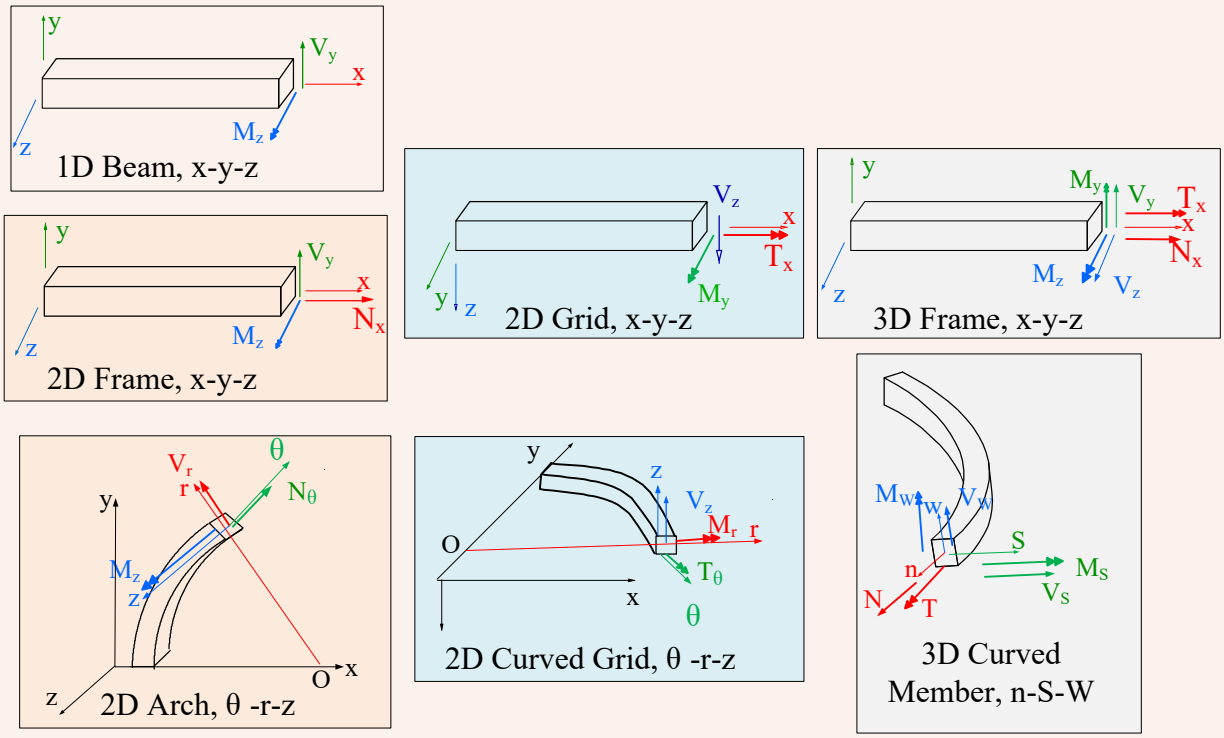


Figura 21.2: Esforços internos em rectilinear e curvado vigas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 21.1: Esforços internos em estruturas

Cartesiano							Polar						
	Forças			Momentos				Forças			Momentos		
	x	y	z	x	y	z		r	θ	z	r	θ	z
Viga		V_y				M_z	Arch	V_r	N_θ				M_z
2D Pórtico	N_x	V_y				M_z							
Grelha			V_z	T_x	M_y		Curvado Viga			V_z	M_r	T_θ	
3D Pórtico	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z							

	Forças			Momentos		
	n	s	w	n	s	w
Curva 3D	N_n	V_s	V_w	T_n	M_s	M_w

21.1.3 Por que isso é importante

12 Na engenharia estrutural, discutimos conceitos de demanda e capacidade. No contexto deste capítulo, "Demand"refere-se às forças axiais aplicadas externamente, cisalhamento, ou momento. Por outro lado, a capacidade é definida como a habilidade do membro estrutural de desenvolver uma distribuição interna tensão. As integrais desses tensões internos devem ser iguais e opostas às aplicadas pela Demanda.

13 Isso está ilustrado na figura. 21.3 onde uma carga externa causa um momento ao longo do membro. Tomando como um diagrama de corpo livre o segmento esquerdo da viga, teremos três equações de equilíbrio para ser satisfeito, somatório de:

1. Forças na y Direção vertical: $V = R_a - qx$
2. Forças na x Direção axial: $C = T$
3. Momentos: $M_{ext} = M_{int} = Cd$

14 O esforços internos, como definido aqui, só são relevantes no projeto onde o material tensão-deformação relação é referido. Por Euler-Bernoulli assunção da seção de avião restante do plano[2]A distribuição deformação é linear. Então, para qualquer relação tensão deformação, o correspondente tensões são determinados. É esta distribuição tensão que resultaria em C, T e.. M_{int}

15 A exigência de equilíbrio entre capacidade e demanda é um princípio fundamental que fundamenta todos os códigos de projeto (Chap 36).

[2]Contanto que a distância/altura seja menor do que cerca de 8.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

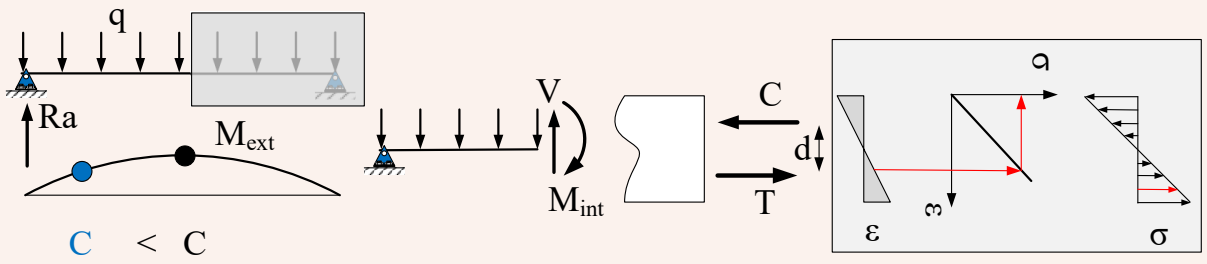


Figura 21.3: Esforços internos

21.1.4 Convenções de sinais de design

16 Antes de (re)derivarmos das relações Cisalhamento-Momento, vamos definir arbitrariamente uma convenção de sinais.

17 A convenção de sinais adotada aqui, é a comumente usada para fins de design[3].

18 Com referência à Fig. 21.5

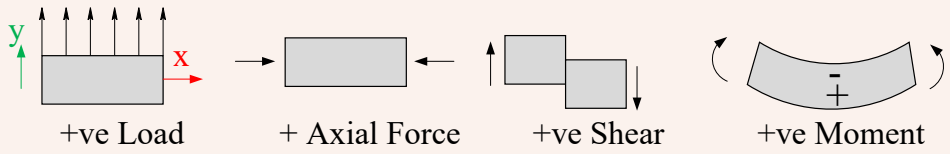


Figura 21.4: Cisalhamento e convenções de sinal momento para design

Figura 21.5: Convenções de sinais de design

Carregar Positivo ao longo do eixo local de y (assumindo uma direita) Convenção do lado da mão), isso é positivo para cima.

Axial: Tensão positiva.

Flexure: Um momento positivo é aquele que causa tensão na parte inferior Fibras, e compressão nas de cima. Alternativamente, os momentos são desenhados no lado da compressão (útil para manter Em mente para pórticos).

Cisalhamento: Um positivo força cortante é um que é ”up” em uma face negativa, ou ”’down” em um positivo. Alternativamente, um par de positivos cisalhamento forças causarão rotação no sentido horário.

Torsão: No sentido anti-horário positivo

[3]Mais tarde, em cursos de análise mais avançados vamos usar um diferente, §26.1.1

CÓPIA PARA REVISÃO

19 Para todas as análises 3D, é preferível usar vetores de flecha dupla (e NÃO setas curvas). Forças e momentos (incluindo torções) são então definidos com respeito a Um sistema de coordenadas do lado direito.

21.2 Carregar, cisalhamento, relações momento

20 Vamos (re)derivar as relações básicas entre carga, cisalhamento e Momento. Considerando um comprimento infinitesimal dx de uma viga sujeito a uma carga positiva[4] $w(x)$, Fig. 21.6. A seção infinitesimal também deve estar em equilíbrio.

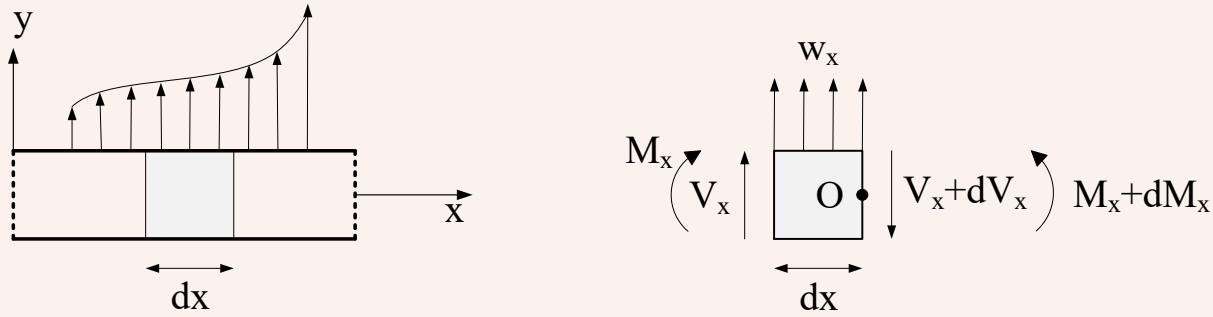


Figura 21.6: Diagrama de corpo livre de um segmento infinitesimal viga

21 Não há forças axiais[5], portanto só temos duas equações de equilíbrio para satisfazer $\Sigma F_y = 0$ e.. $\Sigma M_z = 0$.

22 Desde então dx é infinitamente pequena, a pequena variação em A carga ao longo dela pode ser negligenciada, portanto assumimos $w(x)$ Ser Constante ao longo dx.

23 Para denotar que uma pequena mudança em cisalhamento e momento ocorre mais O comprimento dx do elemento, adicionamos o diferencial Quantidades dV_x e.. dM_x para V_x e.. M_x Na cara direita.

21.2.1 Forma diferencial

24 Em seguida, considerando a primeira equação de equilíbrio

$$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Vx + wx\mathrm{d}x - (Vx+)\mathrm{d}Vx) = 0$$

ou

[4]Nesta derivação, como em todos Outros, devemos assumir que todas as quantidades são positivas.
[5]Forças axiais será incluído no equação diferencial governando flambagem (Equação Euler).

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Definition 21.2: Cisalhamento; Diferencial

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = w(x)$$

A inclinação da curva cisalhamento em qualquer ponto ao longo do eixo de um membro é dado pela curva de carga naquele ponto.

25 Da mesma forma

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_x + V_x \mathrm{d}x - w_x \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}x}{2} - (M_x + \mathrm{d}M_x) = 0$$

Neglecting O, o $\mathrm{d}x^2$ termo, isso simplifica para

Definition 21.3: Momento; Diferencial

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V(x)$$

A inclinação do momento curva em qualquer ponto ao longo do eixo de um membro é dado pelo cisalhamento naquele momento.

21.2.2 Forma integral

26 Formas alternativas das equações anteriores

$$V = \int w(x)\mathrm{d}x$$

ou

Definition 21.4: Cisalhamento; Integral

$$\Delta V_{21} = V_{x_2} - V_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\mathrm{d}x$$

A mudança em cisalhamento entre 1 e.. 2, ΔV_{1-2}, é igual a área sob a carga entre x_1 e.. x_2.

Da mesma forma

$$M = \int V(x)\mathrm{d}x$$

ou

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 21.5: Momento; Integral

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\mathrm{d}x$$

A mudança no momento entre 1 e.. 2, ΔM_{21}, é igual a a área sob a curva cisalhamento entre x_1 e.. x_2.

27 Note que ainda precisamos ter V_1 e.. M_1 Para determinar V_2 e.. M_2.

28 Relacionamentos semelhantes serão determinados mais tarde 9) entre curvatura $\frac{M}{EI}$ e rotação θ (22.16).

29 A variação de cisalhamento e momentos ao longo de uma viga sob várias cargas é mostrada na figura. 21.7.. Esta figura pode servir como uma diretriz em desenhar diagramas cisalhamento / momento.

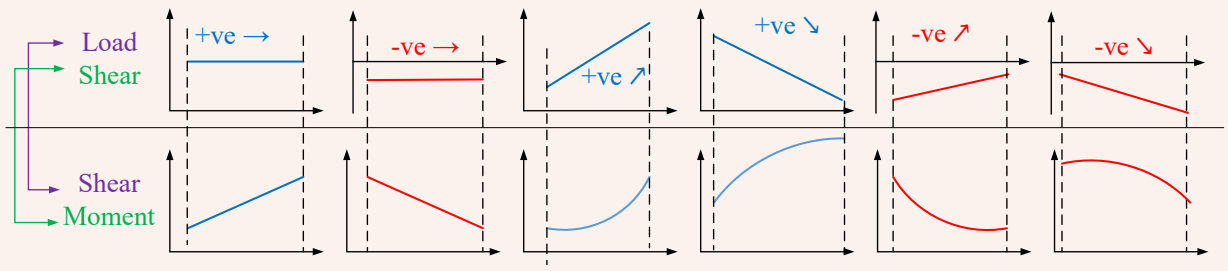


Figura 21.7: Variações de carga, e momentos

30 Para design, muitas vezes devemos considerar diferentes combinações de carga. Para cada combinação de carga, devemos desenhar os diagramas de momento. E então devemos usar o envelope Moment para propósitos de design.

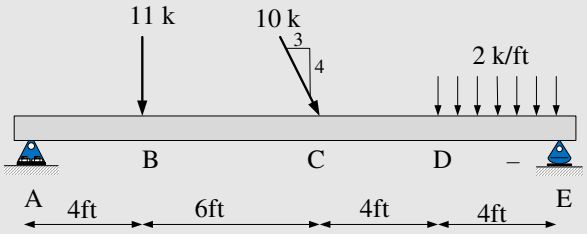
21.3 Exemplos

31 Seguem-se alguns exemplos ilustrativos. Eles foram cuidadosamente selecionados de modo a destacar alguma complexidade sutil do processo, ou para fornecer abordagens alternativas para determinar os diagramas cisalhamento e momento. Às vezes, os cálculos são realizados separadamente da figura, outras, os mesmos cálculos são mostrados nos diagramas do corpo livre.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

21.3.1 Ex 21.1: Viga com carga inclinada



Reações são determinadas a partir das equações de equilíbrio

$$
\begin{aligned}
(\leftarrow\ )\,\Sigma F_x = 0; &\Rightarrow -R_{A_x} + 6 = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 6 \text{ k} \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0; &\Rightarrow (11)(4) + (8)(10) + (4)(2)(14+2) - R_{F_y}(18) = 0 \\
&\Rightarrow R_{F_y} = 14 \text{ k} \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; &\Rightarrow R_{A_y} - 11 - 8 - (4)(2) + 14 = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 13 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Cisalhamento são determinados em seguida.

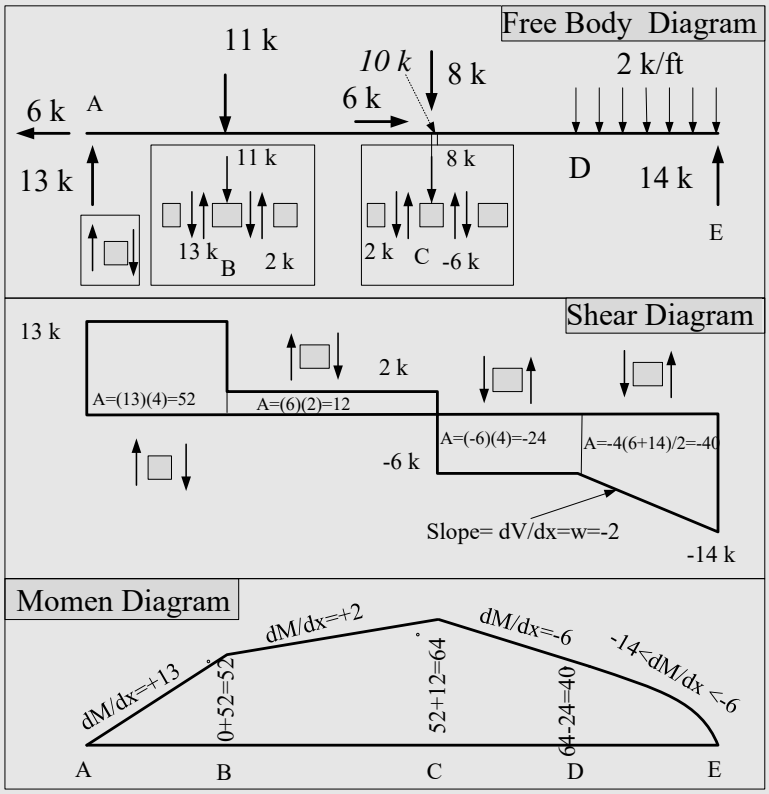
1. Em.. A O cisalhamento é igual à reação e é positivo.
2. Em.. B O cisalhamento cai (carga negativa) por 11 k para 2 k.
3. Em.. C Ele cai novamente 8 k para −6 k.
4. Ele permanece constante até D e então ele Diminui (constante inclinação negativa, já que a carga é uniforme e negativo) por 2 k por pé linear até −14 k.
5. Como um cheque, −14 k é também a reação previamente determinada em F.

Um momento é determinado por último:

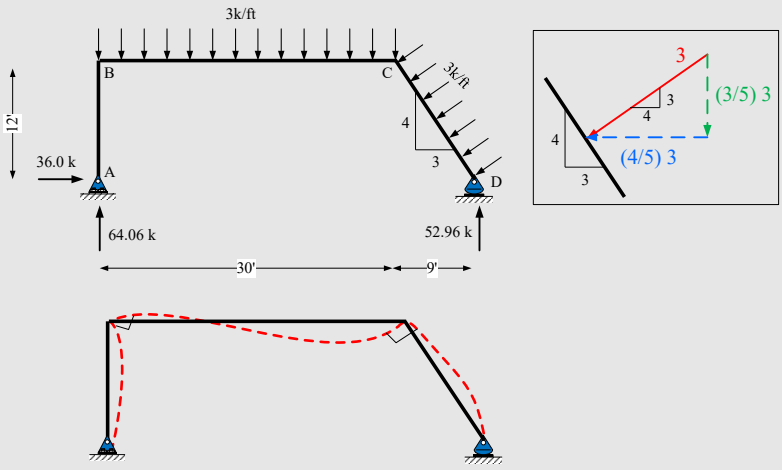
1. O momento em que A é zero (suporte de enxurrada).
2. A mudança no momento entre A e.. B é igual à área sob o diagrama correspondente cisalhamento, ou $\Delta M_{B-A} = (13)(4) = 52$.
3. etc...

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



21.3.2 Ex 21.2: Inclinado pórtico



CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Reações são determinados primeiro

$$(\leftarrow \quad) \Sigma F_x = 0; \Rightarrow R_{A_x} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)}_{\text{load}}(15) = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_x} = 36 \text{ k}$$

$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (3)(30)(\frac{30}{2}) + \underbrace{\frac{3}{5}(3)(15)\left(30+\frac{9}{2}\right)}_{CD_Y} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)(15)\frac{12}{2}}_{CD_X}$$

$$-39R_{D_y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} = 52.96 \text{ k}$$

$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - (3)(30) - \frac{3}{5}(3)(15) + 52.96 = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_y} = 64.06 \text{ k}$$

Isolamos cada membro e desenhamos seu diagrama de corpo livre para cada componente de força.

Cisalhamento:

1. Por.. $A-B$, o cisalhamento é constante, igual à reação horizontal Em.. A E negativo de acordo com nossa convenção de sinais previamente definida, $V_A = -36$ k
2. Para o membro $B-C$ Em.. B, o cisalhamento deve ser igual à vertical força que foi transmitida ao longo $A-B$, e que é igual à vertical Reação em A, $V_B = 64.06$.
3. Desde então $B-C$ é submetido a uma carga negativa uniforme, o cisalhamento Por favor $B-C$ terá uma inclinação igual a -3 e em termos de x (medidas de B para C) é igual a

$$V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x$$

4. O cisalhamento ao longo $C-D$ é obtido decompondo a vertical Reação em D em componentes axiais e cisalhamento. Assim em D O cisalhamento é igual a $\frac{3}{5}52.96 = 31.78$ k E é negativo. Baseado em nossa convenção de sinais para a carga, a inclinação do cisalhamento deve ser igual a -3 Por favor $C-D$.. Assim, o cisalhamento no ponto C é tal que $V_c - \frac{5}{3}9(3) = -31.78$ ou $V_c = 13.22$. A equação para o cisalhamento é dada por (para x indo de.. C para D)

$$V = 13.22 - 3x$$

5. Verificamos nossos cálculos verificando o equilíbrio do nó C

$$(\leftarrow \quad) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}(42.37) + \frac{4}{5}(13.22) = 25.42 + 10.58 = 36 \checkmark$$

$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(42.37) - \frac{3}{5}(13.22) = 33.90 - 7.93 = 25.97 \checkmark$$

Momento:

1. Por aqui $A-B$, o momento é zero em A (já que temos uma dobradiça), e sua inclinação é igual ao cisalhamento, assim em B O momento é igual a $M_B = (-36)(12) = -432$ k.ft

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Por aqui $B-C$, o momento é igual a

$$\begin{aligned} M_{B-C} =& M_B + \int_0^x V_{B-C}(x)\mathrm{d}x = -432 + \int_0^x (64.06 - 3x)\mathrm{d}x \\ =& -432 + 64.06x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

que é uma parábola. Substituindo $x = 30$, obtemos no nó C: $M_C = -432+64.06(30)-3\frac{30^2}{2} =$ 139.8 k.ft

3. Se precisarmos determinar o momento máximo $B-C$Nós sabemos disso $\frac{\mathrm{d}M_{B-C}}{\mathrm{d}x} = 0$ No ponto em que $V_{B-C} = 0$, isto é $V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{64.06}{3} = 21.35$ ft.. Em outro palavras, momento máximo ocorre onde o cisalhamento é zero. Thus $M_{B-C}^{\max} = -432 + 64.06(21.35) - 3\frac{(21.35)^2}{2} = -432 + 1,367.7 - 683.7 =$ –251.98 k.ft

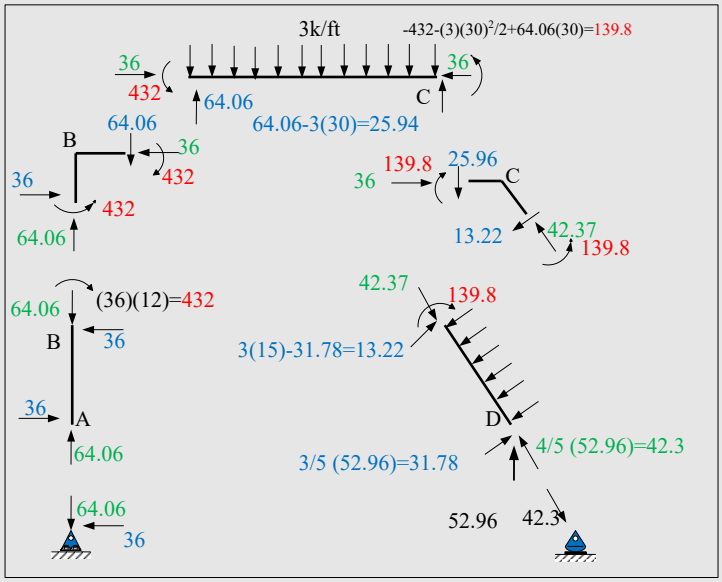
4. Finalmente juntos $C-D$, o momento varia quadricamente (desde que tivemos um linear cisalhamento, o momento primeiro aumenta (positivo cisalhamento), e então (negativo cisalhamento). O momento ao longo $C-D$ é dado por

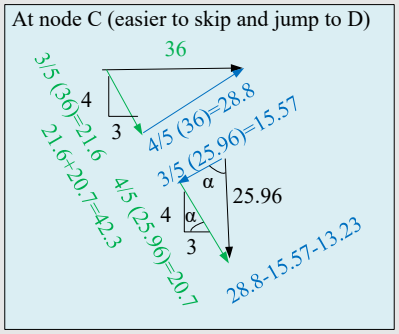
$$\begin{aligned} M_{C-D} = M_C + \int_0^x V_{C-D}(x)\mathrm{d}x = 139.8 + \int_0^x (13.22 - 3x)\mathrm{d}x \\ = 139.8 + 13.22x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Que é uma parábola. Substituindo por.. $x = 15$, nós obtemos no nó C $M_C = 139.8 + 13.22(15) - 3\frac{15^2}{2} = 139.8 + 198.3 - 337.5 = 0$✓

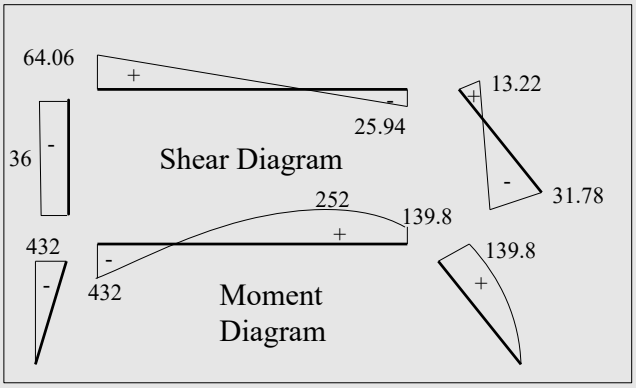
CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.





cos α=3/5=N/25.96
N=(25.96)(3)/(5)=15.57

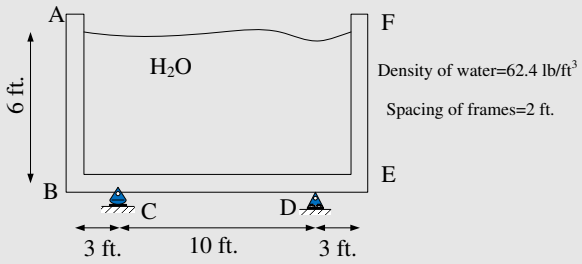


21.3.3 Ex 21.3: Pórtico com carga hidrostática

O seguinte pórtico é o suporte estrutural de uma espuma. Assumindo que os pórticos estão espaçados 2 pés ao longo do comprimento da onda, procuramos

1. Determine todas as ações internas
2. Desenhe os diagramas cisalhamento e de momento
3. Localize e compute o máximo interno momentos fletores
4. Se este é um pórtico, mostre a localização do reforço.

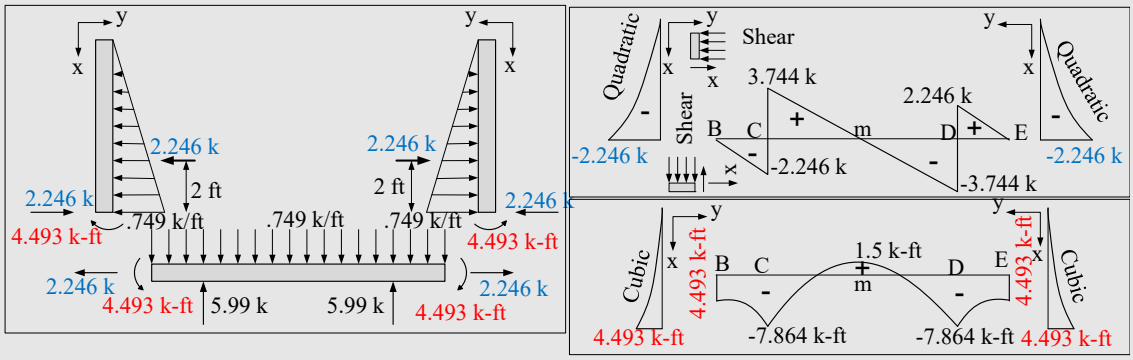
CÓPIA PARA REVISÃO



A pressão hidrostática provoca forças laterais nos membros verticais que podem ser tratados como cantilevers fixados na extremidade inferior. A pressão é linear e é dada por $p = \gamma h$.. Uma vez que cada pórtico suporta uma fatia de 2 pés de largura do flume, a equação para w (Libras / Pé) é

$$w = (2)(62.4)(h) = 124.8h \text{ lbs/ft}$$

Na base $w = (124.8)(6) = 749 \text{ lbs/ft} = .749 \text{ k/ft}$ Note que esta é tanto a pressão lateral nas paredes finais como a carga uniforme nos membros horizontais.



Fim das Ações

1. Força de base em B É $F_{Bx} = (.749)\frac{6}{2} = 2.246$ k
2. Hora de base B É $M_B = (2.246)\frac{6}{3} = 4.493$ k.ft
3. Fim da força em B para membro $B - E$ são iguais e opostos.
4. Reação em C É $R_{Cy} = (.749)\frac{16}{2} = 5.99$ k

Cisalhamento forças

1. Base em B o força cortante foi determinado mais cedo e era igual a 2.246 k.. Baseado na orientação do $x - y$ eixo, este é um negativo cisalhamento.
2. A vertical cisalhamento em B é zero (negligente o peso de $A - B$)
3. O cisalhamento à esquerda de C É $V = 0 + (-.749)(3) = -2.246$ k.
4. O cisalhamento à direita de C É $V = -2.246 + 5.99 = 3.744$ k

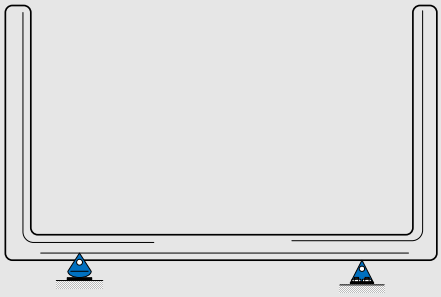
Um momento diagramas

1. Na base: B $M = 4.493$ k.ft como determinado acima.
2. No apoio C, $M_c = -4.493 + (-.749)(3)(\frac{3}{2}) = -7.864$ k.ft
3. O momento máximo é igual a $M_{\max} = -7.864 + (.749)(5)(\frac{5}{2}) = 1.50$ k.ft

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Design: Reforço deve ser colocado ao longo das fibras que estão sob tensão, que está no lado do momento negativo[a].. A figura ilustra esquematicamente a localização da flexão[b] Reforço.



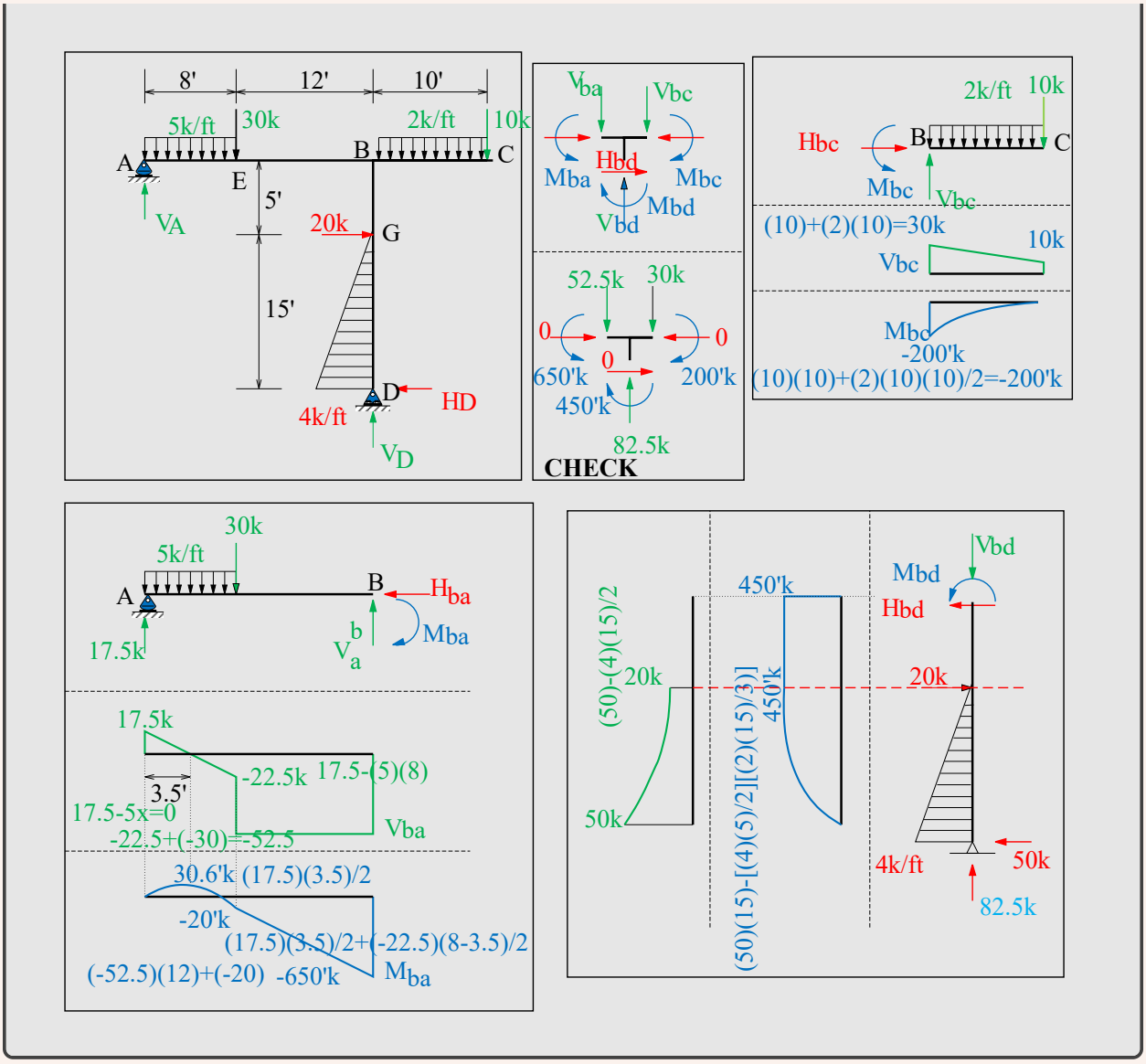
[a] É por isso que na maioria dos países europeus, a convenção de sinais para momentos de design é o oposto do comumente usado nos EUA; Reforço deve ser colocado onde o momento é "postivo".
[b] O reforço é feito de uma série de estribos verticais.

21.3.4 Ex 21.4: Carga linearmente variável

Os detalhes dos cálculos para este exemplo não são relatados. No entanto, os diagramas cisalhamento e de momento podem ser facilmente determinados passo a passo

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

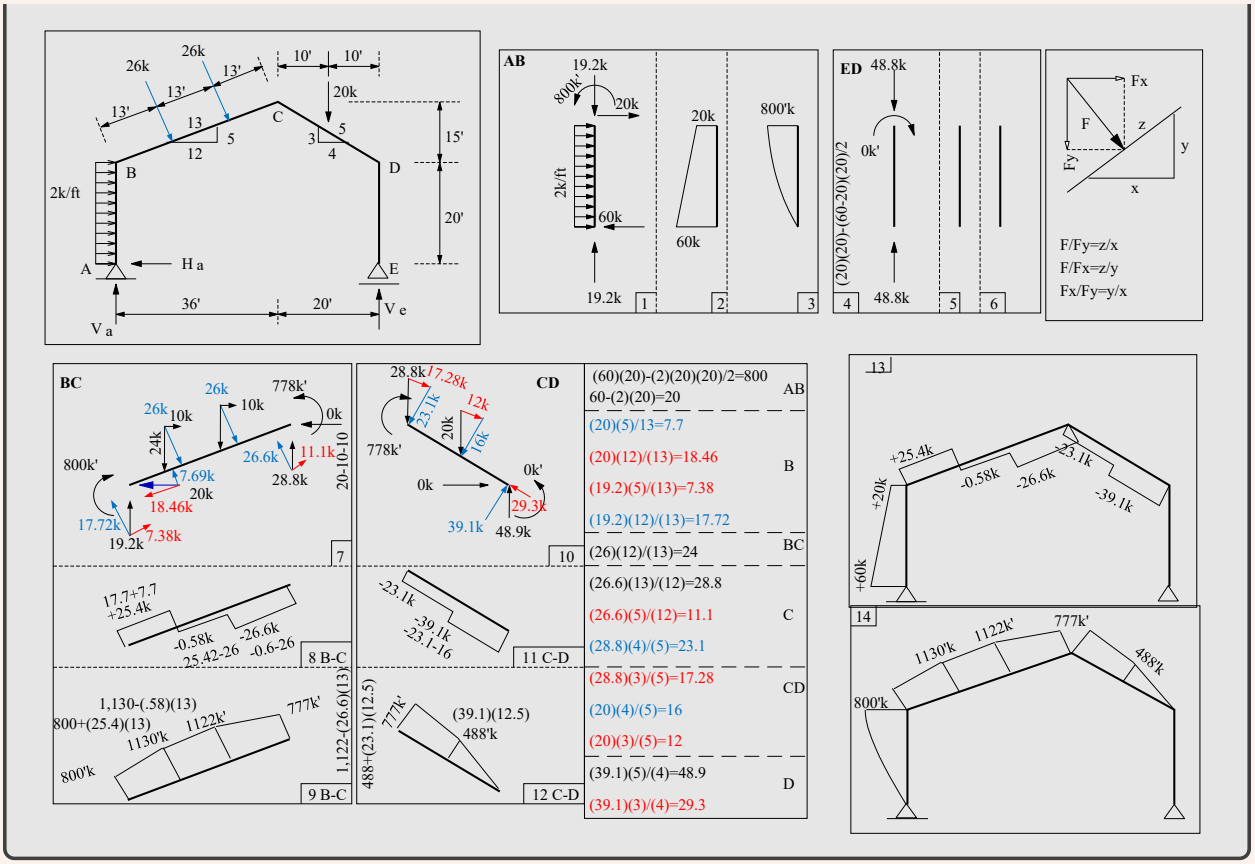


21.3.5 Ex 21.5: Pórtico; Exemplo de telhado inclinado

Os detalhes dos cálculos para este exemplo não são relatados. No entanto, os diagramas cisalhamento e de momento podem ser facilmente determinados passo a passo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



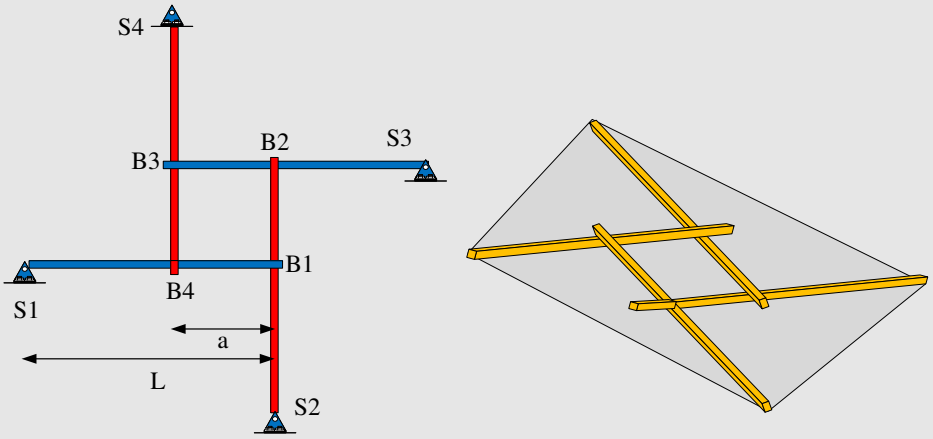
21.3.6 Ex 21.6: Reciproca pórtico

A seção seguinte é reproduzida de Schrama, 2021 *"A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames"*.

Um simples recíproco pórtico (§15.5.3) consiste em quatro vigas, onde cada viga é suportado em uma extremidade por um suporte de perímetro fixo (S1, S2, S3 e S4) e na outra por outro viga (B1, B2, B3 e B4). A conexão entre o vigas funciona como um apoio. O tipo de suporte depende do tipo de conexão que é usada. Em algum lugar ao longo da viga está dando apoio a outro viga. A distância entre o suporte viga e o apoio viga é chamado de *Comprimento do noivado*.. De agora em diante, a viga agindo como um suporte é chamado de adjacente viga, enquanto que a carga viga exercendo é chamada de anterior viga. A recíproca pórtico usada para análise é mostrada abaixo com um comprimento de engajamento a.

CÓPIA PARA REVISÃO

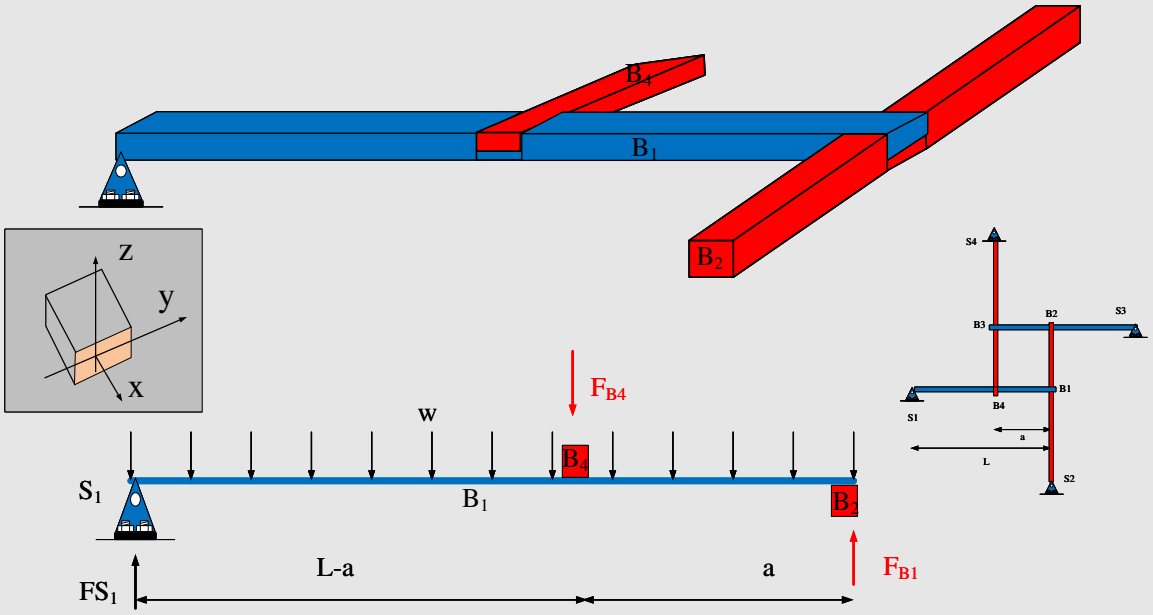
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Conexões Dobradas

Analisaremos o reciproco pórtico usando superposição (ou seja, sem conexões rígidas entalhadas). Os pórticos são assumidos para ser carregados com um carga uniformemente distribuída w.. Além disso, carga concentrada F é adicionado à distância a do final viga, que é exercido pelo anterior viga. Como o vigas são dobradiças, ambas as extremidades são suportadas por um apoio articulado. Um único viga da unidade RF pode então ser esquematizado como um biapoiado viga.

Reações



Devido à simetria, vertical reações de apoio são simplesmente o carga distribuída dividido pelo número de suportes,

$$4wL - 4FS = 0 \Rightarrow F_{S1} = wL$$

Onde FS é a soma das quatro reações. Devido à conexão articulada em B1, este viga-fim é suportado por um apoio articulado. Estes suportes não podem carregar um momento fletor, o que significa que

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

no momento em $B2$ é zero. Com esta condição, uma expressão para F_{B4} pode ser determinado por um momento sobre B

$$\left.\begin{aligned} F_{S1}L - F_{B4}a - wL\frac{L}{2} = 0 \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} F_{B4} = \frac{wL^2}{2a}$$

Então, tomando a soma da força vertical

$$\left.\begin{aligned} F_{S1} + F_{B1} - wL - F_{B4} = 0 \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} F_{B1} = F_{B4} = \frac{wL^2}{2a} = F$$

Isso não é surpresa, já que a vertical reação de apoio F_{S1} se torna o carga concentrada F no lado adjacente viga. Devido à simetria e equilíbrio vertical total, F_{S1} e.. F Não podem ser iguais um ao outro.

Esforços internos

As seções esforços internos são simplesmente derivadas do equilíbrio. Na B4;

$$\left.\begin{aligned} M_{\max} = F_{S1}(L-a) - w\frac{(L-a)^2}{2} \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} M_{\max} = \frac{L^2 - a^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{lft}} = F_{S1} - w(L-a) \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} V_{\text{lft}} = wa$$

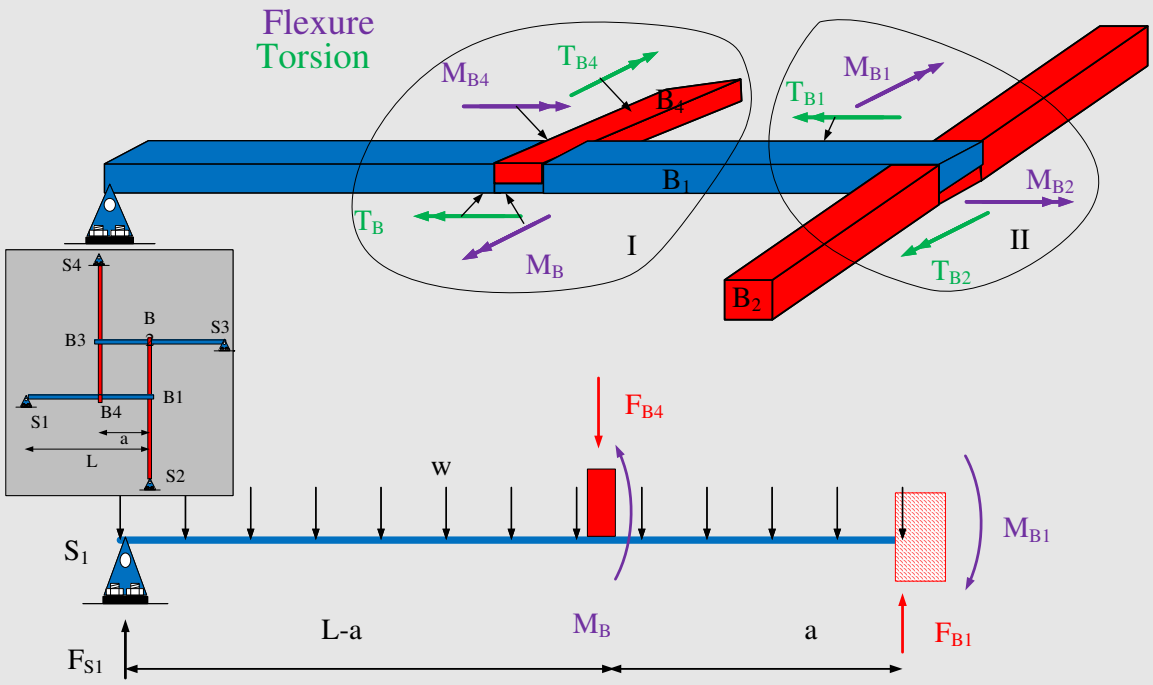
$$\left.\begin{aligned} V_{\text{rgt}} = F_{B1} - wa \\ F_{B1} = \frac{wL^2}{2a} \end{aligned}\right\} V_{\text{Rgt}} = w\frac{L^2 - 2a^2}{2a}$$

Conexões Fixas

O recíproco pórtico comporta-se diferente quando as conexões entre as vigas são fixas (através de entalhes). Neste caso, a conexão pode assumir momentos fletores. Isso não só fornecerá flexão, mas também cargas torcionais. Devido às conexões fixas, o recíproco pórtico terá momentos fletores em todas as conexões. Primeiro, a influência do momento fletor M_y com respeito ao eixo y é examinado. Note que este momento fletor M_y resulta em um momento torsional M_x no lado adjacente viga. A distribuição específica deste momento torcional depende do tipo de perímetro suporte e conexão. Neste recíproco pórtico com suportes fixados, o momento torcional é transferido completamente para a próxima conexão. Este momento torsional resulta em um momento fletor M_y em cada viga no ponto de interseção com o anterior viga, como é esquematizado. Cada conexão inclui ambos um M_y e um.. M_x e resulta em M_x e.. M_y no lado adjacente viga.

CÓPIA PARA REVISÃO

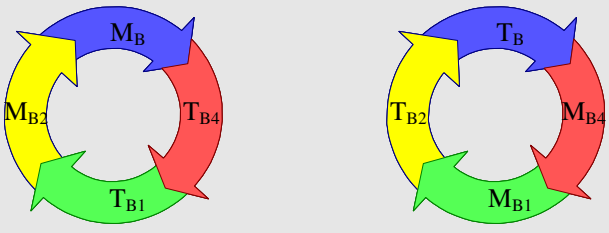
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Considerando apenas as forças verticais, ainda temos $F_{B1} = F_{B4}$, mas não sei a magnitude deles. Neste problema, temos torção em um elemento transferido como flexão para o suporte e vice-versa. Resumindo nossas relações que temos

$$\underbrace{I \Rightarrow \begin{cases} M_B = T_{B4} \\ T_B = M_{B4} \end{cases}; \quad II \Rightarrow \begin{cases} T_{B1} = M_{B2} \\ M_{B1} = T_{B2} \end{cases};}_{\text{Statics}} \quad \underbrace{\begin{cases} T_{B4} = T_{B1} \\ M_{B4} = M_{B1} \\ M_{B2} = M_B \\ T_{B2} = T_B \\ F_{B4} = F_{B1} \end{cases}}_{\text{Symmetry}}$$

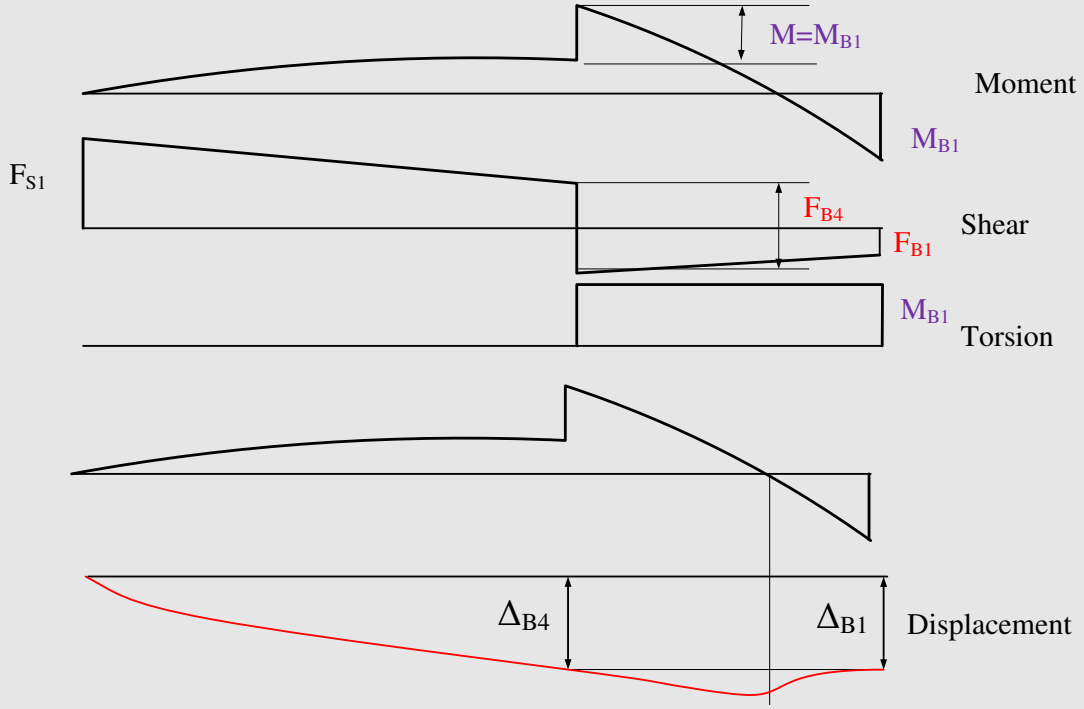
ou



e os dois conjuntos não se cruzam. Por isso, não podemos provar que $M_B = M_{B1}$ e ficamos com as seguintes incógnitas: F_{B1}, M_B, M_{B1} Eventualmente, os diagramas serão

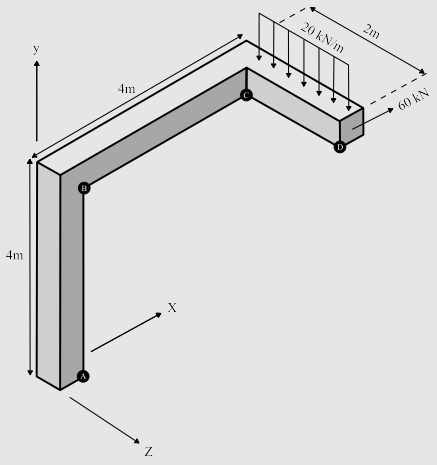
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Mas por simetria temos $\Delta_{B1} = \Delta_{B4}$E a inclinação em B1 e B4 deve ser zero. Poderíamos aplicar os teoremas da curvatura para completar a solução.

21.3.7 Ex 21.7: 3D pórtico



1. O pórtico tem um total de 6 reações (3 forças e 3 momentos) no suporte, e nós temos um Total de 6 equações de equilíbrio, portanto é estaticamente determinado.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Cada membro tem o seguinte esforços internos (definido em termos de *Sistema de coordenadas local* de cada membro $x' - y' - z'$ De tal forma que X está ao longo do membro)

Membro	Esforços internos					
Membro	Axial	Cisalhamento		Um momento		Torção
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
$C-D$		✓	✓	✓	✓	
$B-C$	✓		✓	✓	✓	✓
$A-B$	✓	✓		✓	✓	✓

3. Neste problema em particular, ao invés de começar determinando as reações, é mais fácil determinar o esforços internos no final de cada membro começando com o membro $C-D$.. Note que temporariamente adotamos uma convenção de sinais compatível com os sistemas de coordenadas locais.

C-D

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^C_{y'} &= (20)(2) &&= +40\text{kN}\\
\Sigma F_{z'} = 0 \Rightarrow V^C_{z'} &&&= +60\text{kN}\\
\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^C_{y'} &= -(60)(2) &&= -120\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^C_{z'} &= (20)(2)\frac{2}{2} &&= +40\text{kN.m}
\end{aligned}$$

B-C

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N^B_{x'} &= V^C_{z'} &&= -60\text{kN}\\
\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^B_{y'} &= V^C_{y'} &&= +40\text{kN}\\
\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^B_{y'} &= M^C_{y'} &&= -120\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^B_{z'} &= V'^{C}_{y}(4) = (40)(4) &&= +160\text{kN.m}\\
\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T^B_{x'} &= -M^C_{z'} &&= -40\text{kN.m}
\end{aligned}$$

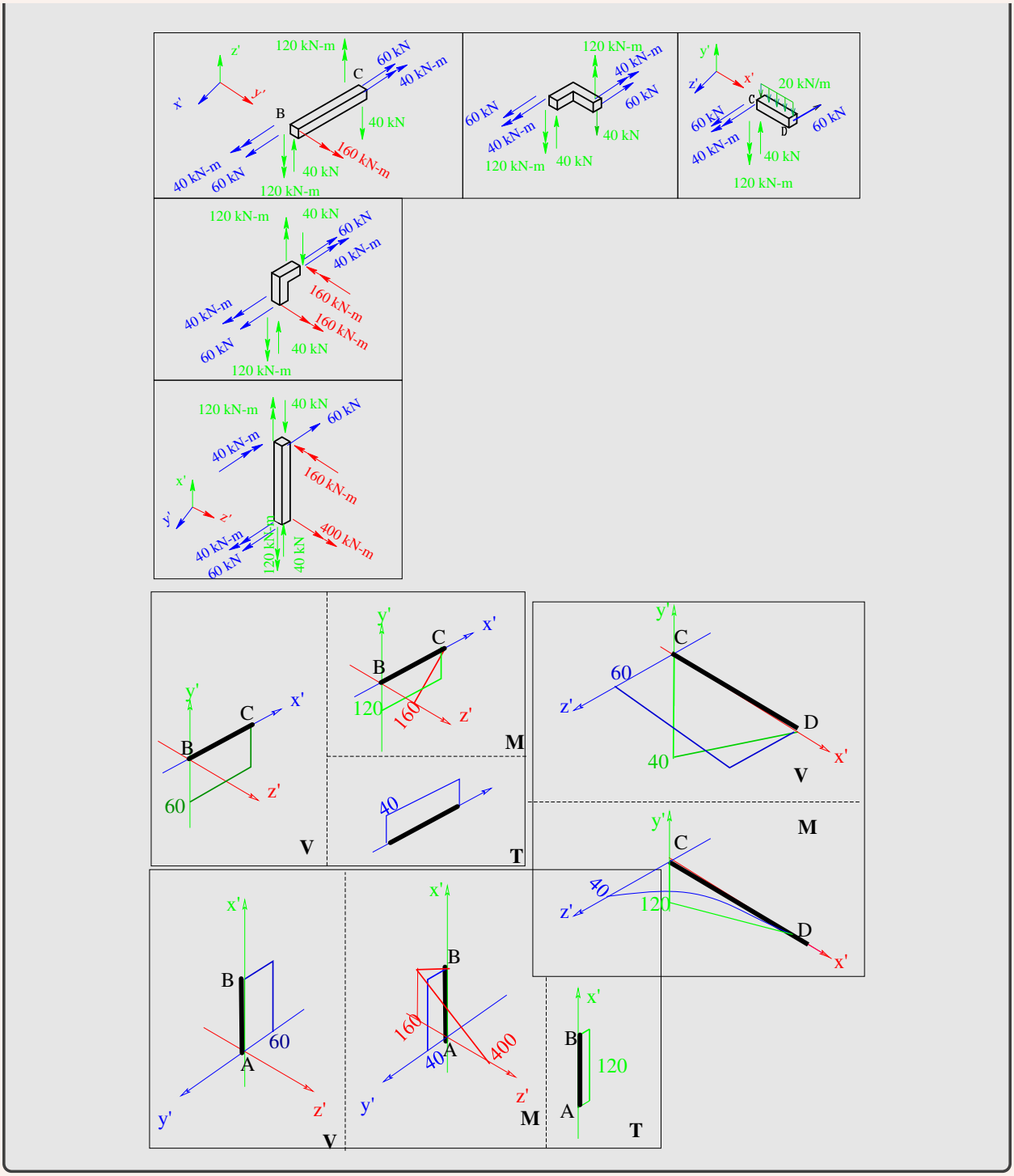
A-B

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N^A_{x'} &= V^B_{y'} &&= +40\text{kN}\\
\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^A_{y'} &= N^B_{x'} &&= +60\text{kN}\\
\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^A_{y'} &= T^B_{x'} &&= +40\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^A_{z'} &= M^B_{z'} + N^B_{x'}(4) = 160 + (60)(4) &&= +400\text{kN.m}\\
\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T^A_{x'} &= M^B_{y'} &&= -120\text{kN.m}
\end{aligned}$$

A interação entre forças axiais N e cisalhamento V bem como entre momentos M e torção T é claramente destacado por este exemplo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Viaduto de Chilton (1969), Monod Piguet, Suíça

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 22

Deflexões; Curva elástica

Abstract

Este capítulo aborda a deflexão dos membros flexurais, utilizando tanto o governo equação diferencial ou a relação (relacionada) deformação-curvatura. Esta última abordagem leva ao método da área de curvatura, que inclui o método conjugado viga como um subconjunto. Problemas de vários níveis de complexidade analítica são apresentados.

22.1 Introdução 956
22.2 Equação diferencial 957
22.2.1 Ex 22.1: Integração dupla . . 958
22.2.2 Ex 22.2: Deflexão máxima . . 959
22.2.3 Ex 22.3: Forma de esqui ideal 960
22.2.4 Ex 22.4: Flutuando viga . . . 961
22.3 Curvatura 964
22.3.1 Ex 22.5: Roda de bicicleta . . 966
22.3.2 Ex 22.6: Rigidez de uma mola helicoidal 972
22.3.3 Curvatura-deformação relação 973
22.3.4 Método da área de Curvatura (área do momento) 975



22.1 Introdução

1 Determinação de deflexões é parte integrante da análise estrutural. Todos os códigos colocam um limite na deflexão permissível (para reduzir a vibração, batendo e outros efeitos indesejáveis). Além disso, o cálculo da deflexão desempenha um papel importante na análise de estruturas estaticamente indeterminadas pelo método das forças (endereçado no capítulo 25).

CÓPIA PARA REVISÃO

2 Deflexões de estruturas devem ser determinadas para satisfazer os requisitos de capacidade de serviço. Limitar deflexões sob *Serviço* cargas para valores aceitáveis (como $\frac{\Delta}{L} \leq 360$).

3 Este capítulo examinará deflexões de estruturas baseadas em considerações geométricas. Mais tarde, apresentaremos um método mais poderoso baseado em considerações de energia 24).

4 Em ambos os casos, o cálculo da deflexão é um passo crítico para o método baseado na força de analisar estruturas estaticamente indeterminadas.

5 Dois métodos (entrelaçados) serão apresentados:

- Use o governo equação diferencial de vigas através da integração.
- Use a relação de curvatura do momento.

22.2 Equação diferencial

6 Para o estojo elástico:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \\ \sigma &= -\frac{M(x)y}{I} \end{aligned}\right\} \varepsilon = -\frac{M(x)y}{EI}$$

Combinando esta última equação com Eq. 22.15 Rende-se

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{22.1}$$

7 Diferenciamos duas vezes

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2\frac{M(x)}{EI}}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

8 No entanto, também temos o momento-cisalhamento-força relações determinadas no capítulo anterior

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} &= w(x) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= V(x) \end{aligned}\right\} \frac{d^2M(x)}{dx^2} = w(x)$$

Substituindo

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

Esta equação pode ser generalizada

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

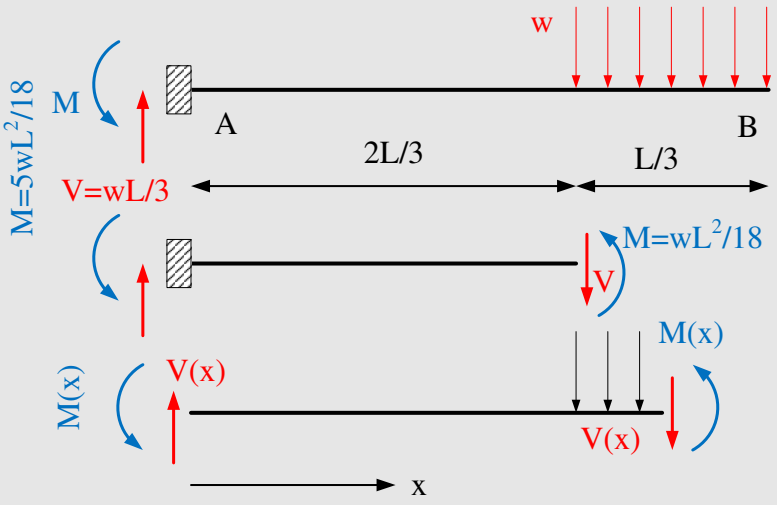
Definition 22.1: Governando Equação diferencial Flexure

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \text{ or } \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI} \tag{22.2}$$

Este é o fundamental equação diferencial de vigas. Equações semelhantes serão derivadas mais tarde para cabos e viga-pilares.

22.2.1 Ex 22.1: Integração dupla

Nós procuramos calcular a deflexão em B para o seguinte cantilevered viga



Em: $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Equação do Momento
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2$$
2. Integre uma vez
$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x + C_1$$
No entanto, nós temos em $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow C_1 = 0$
3. Integre duas vezes
$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5wL^2}{36}x^2 + C_2$$
De novo temos em $x = 0$, $y = 0, \Rightarrow C_2 = 0$

Em: $\frac{2L}{3} \le x \le L$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

1. Equação do momento

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2 - w(x - \frac{2L}{3})(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2})$$

2. Integre uma vez

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x - \frac{w}{6}(x - \frac{2L}{3})^3 + C_3$$

Aplicando o condição de contorno em $x = \frac{2L}{3}$Nós devemos ter.. $\frac{dy}{dx}$ igual ao valor vindo da esquerda, $\Rightarrow C_3 = 0$

3. Integrando duas vezes

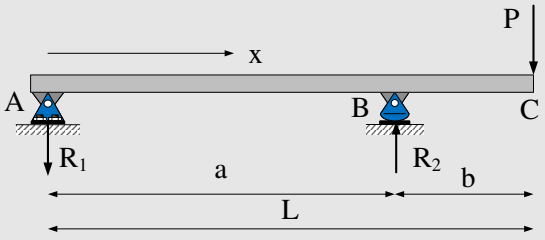
$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5}{36}wL^2x^2 - \frac{w}{24}(x - \frac{2L}{3})^4 + C_4$$

Novamente seguindo o mesmo argumento que acima, $C_4 = 0$

Substituindo por $x = L$ Nós conseguimos

$$y = \frac{163}{1944}\frac{wL^4}{EI}$$

22.2.2 Ex 22.2: Deflexão máxima



Procuramos determinar a deflexão máxima para o adjacente viga. Reações

$$sigmccw_z^B = 0; \Rightarrow aR_1 - bP = 0 \Rightarrow edR_1 = \frac{b}{a}P$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow aR_2 - PL = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{L}{a}P$$

Equação diferencial

$$EIy'' = -\frac{b}{a}Px + \frac{L}{a}P < x - a >$$

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a}P < x - a >^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{b}{6a}Px^3 + \frac{L}{6a}P < x - a >^3 + C_1x + C_2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Aplique o condições de contorno, em $x = 0$, $y = 0$ Portanto, $C_2 = 0$, e em $x = a$, $y = 0$, assim $0 = -[b/(6a)]Pa^3 + aC_1$ ou $C_1 = (ab/6)P$ Deslize sob a carga (nota $x = a + b = L$)

$$\begin{aligned} EIy' &= -\frac{b}{2a}P(a+b)^2 + \frac{a+b}{2a}Pb^2 + \frac{ab}{6}P \\ &= -\frac{b}{2a}P(a^2+2ab+b^2) + \frac{ab^2+b^3}{2a}P + \frac{ab}{6}P \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{6}b(2L+b)P \end{aligned}$$

Deflexão sob a carga P:

$$\begin{aligned} EIy &= -\frac{b}{6a}P(a+b)^3 + \frac{a+b}{6a}Pb^3 + \frac{ab}{6}P(a+b) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{3}Lb^2P \end{aligned}$$

A deflexão máxima entre os suportes ocorrerá onde $y' = 0$.

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a} < x-a >^2 + \frac{ab}{6}P$$

Em.. $y' = 0$, , $x - a >$ Não existe, assim $0 = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{ab}{6}P$ Resolvendo para a, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} EIy_{max} &= -\frac{b}{6a}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^3 + \frac{ab}{6}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{a^2b}{9\sqrt{3}}P \end{aligned}$$

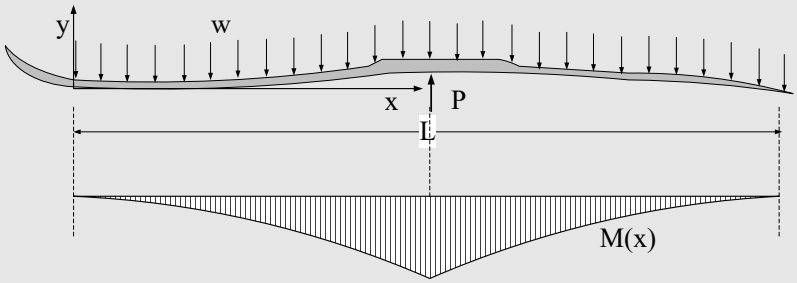
22.2.3 Ex 22.3: Forma de esqui ideal

Nós procuramos determinar a forma de um esqui que quando uma força P é aplicada, a força resultante por baixo é unifronly distribuído.

O problema pode ser descrito pela seguinte figura, e

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Devemos satisfazer

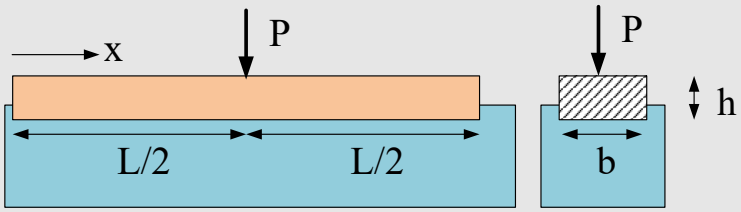
$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Onde $M(x) = wx^2/2$, $w = P/L$, e os condições de contorno são $y = 0$ Em.. $x = 0$ e.. L.

22.2.4 Ex 22.4: Flutuando viga

A seção seguinte é reproduzida de Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

Uma madeira de pinheiro, largura b = 20cm, comprimento l =10m, h = 10cm, submetido a uma força de ponto P = 50O kgf está na água. Pine tem uma densidade $\gamma = 0.6\text{Gf/cm}^3$ e.. $E \simeq 10^5\text{kgf/cm}^2$



1. O governo equação diferencial pode ser escrito como

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$

Onde $q(x)$ é o peso da água deslocada (lei de Arquimedes) por unidade de comprimento.

$$w(x) = -\gamma y(x)$$

2. Apresentando

$$4k^4 = \frac{b\gamma}{EI} = \frac{3\gamma}{Eh^3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O governo equação diferencial pode ser simplificado

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0 \tag{22.3}$$

que é também o equação diferencial de uma viga em *viga sobre a base elástica*.

3. A solução é da forma

$$y(x) = A\cosh(kx)\cos(kx) + \frac{1}{2}B\left(\cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}C\sinh(kx)\sin(kx) + \frac{1}{4}D\left(\cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$

4. Pode ser reescrito como

$$y = y_0Y_1(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_2(kx) + \frac{M_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_3(kx) + \frac{V_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_4(kx)$$

Ondey_0, y_0', M_0 e.. N_0 são o deslocamento, rotação, momento, e cisalhamento em $x = 0$.. Assim

$$N_0 = 0; \qquad M_0 = 0$$

5. Nós somos deixados para determinar y_0 e.. y_0' Em.. $x = L/2$ De tal forma que.. $y_0' = 0$ e.. $N = P/2$
6. Usando a tabela seguinte

n	$Y_n(kx)$	$Y_n'(kx)$	$Y_n''(kx)$	$Y_n'''(kx)$	$Y_n^{IV}(kx)$
1	$\cosh(kx)\cos(kx)$	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_1$
2	$\frac{1}{2}\left(cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	$\frac{1}{2}\sinh(kx)\sin(kx)$	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	$\frac{1}{4}\left(cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

Nós conseguimos

$$\frac{1}{k}y' = -4y_0Y_4(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_1(kx)$$
$$\frac{1}{k}y'' = -4y_0Y_3(kx) + y_0'\frac{4}{k}Y_4(kx)$$
$$\frac{1}{k}y''' = -4y_0Y_2(kx) + y_0'\frac{4}{k}Y_3(kx)$$

7. Os condições de contorno são expressos como[a]

$$-4y_0Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0'\frac{1}{k}Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0$$
$$-4y_0Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0'\frac{4}{k}Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) = \frac{P}{2EIk^3}$$

8. Por.. $x = 0$ Nós conseguimos

$$y_0 = \frac{P}{8EIk^3}\frac{-Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$
$$\frac{y_0'}{k} = \frac{P}{8EIk^3}\frac{-4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

9. O deslocamento e a inclinação serão assim

$$y=-P_0\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1(kx)+4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)Y_2(kx)Y_1(kx)\right]$$
$$y''=4P_0k^2\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)Y_3(kx)+4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4(kx)\right]$$

Onde

$$P_0=\frac{P}{8EIk^3}\frac{1}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)+4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

10. Substituindo pelos valores numéricos

$$k^4=3\times10^{-11}\Rightarrow k=2.34\times10^{-3}\text{cm}^{-1}\Rightarrow\frac{kl}{2}=1.17$$

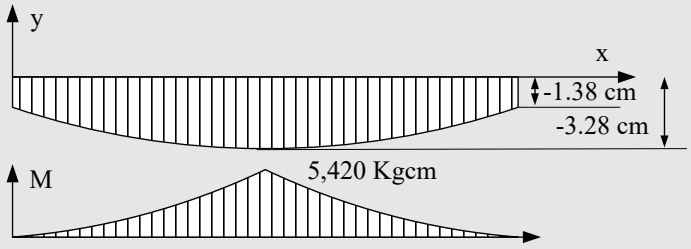
e..

$$Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)=0.689$$
$$Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)=1.097$$

11. A resposta final será

$$P_0=0.0401P$$
$$y(x)=-0.0401P\,[0.689Y_1(kx)-1.058Y_2(kx)]\ \text{cm}$$
$$M(x)=146.2P\,[0.689Y_3(kx)+1.058Y_4(kx)]\ \text{kgfcm}$$

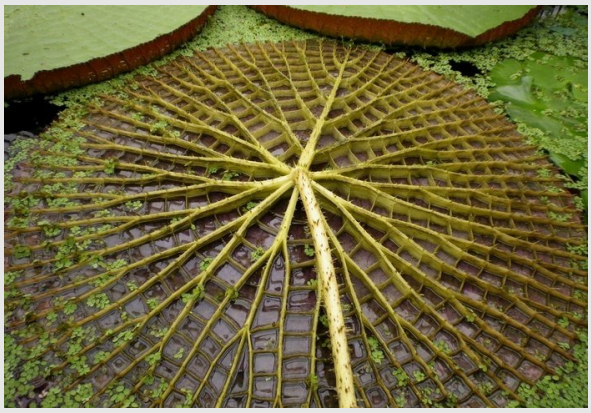
12. A solução é válida enquanto a superfície superior completa da viga estiver acima da água.



A mesma solução poderia ser estendida, embora com muito mais difícil, para pratos. Mas, novamente, a natureza já descobriu que *Victoria-Regia* (A folha mais larga do mundo) deve ser devidamente endurecida para resistir a grandes momentos enquanto também flutua.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

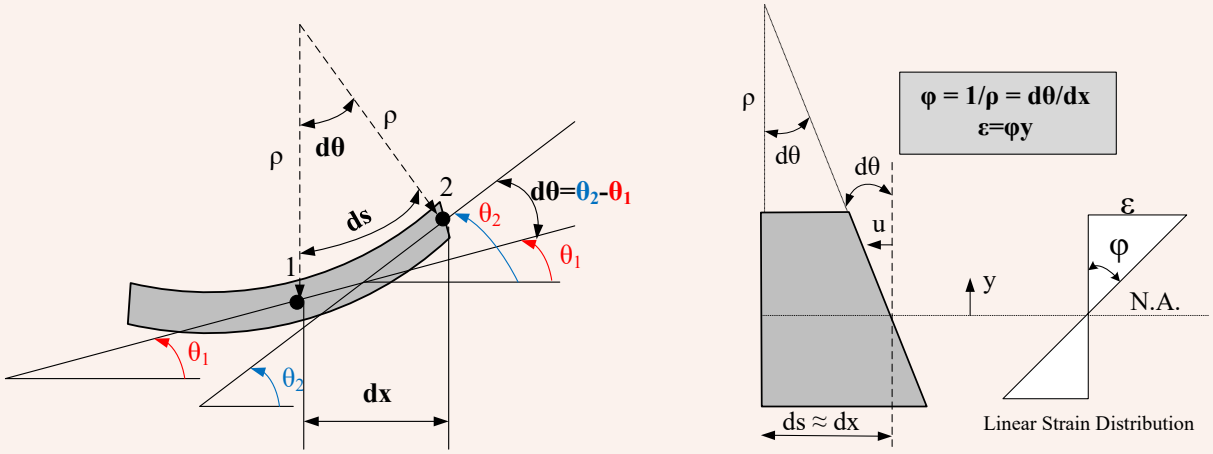


A propósito, isso deve lembrar o leitor do chamado *Arquitetura ramificada* similarmente inspirado por árvores.

[a] Lembre-se disso $V = EI\frac{d^3y}{dx^3}$

22.3 Curvatura

9 Curvatura, Fig. 22.1a é um termo muito crítico em flexão (e muitas vezes esquecido pelos alunos). Primeiro vamos derivar sua exata relação, e depois simplifique-a.



(a) Definição da curva

(b) Curvatura-Deformação relação

Figura 22.1: Curvatura e deformações

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Expressão exata

10 Começamos com a derivação geral da expressão de curvatura, Fig. 22.1a e primeiro defina a curvatura ϕ Como

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{ds}$$

Da geometria, $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$, nós agora definimos $t = \frac{dy}{dx}$ Nós conseguimos $\theta = \tan^{-1} t$ Aplicando a regra da cadeia para ϕ Nós conseguimos

$$\phi = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{22.4}$$

ds pode ser reescrito como

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ t &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} ds = \sqrt{1+t^2}\,dx \tag{22.5}$$

11 Próxima combinação de Eq. 22.4 e.. 22.5 Nós conseguimos

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}dx} \\ \theta &= \tan^{-1} t \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{dx} \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \phi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

12 Assim, a inclinação θ, curvatura ϕ, raio de curvatura ρ estão relacionados com o y deslocamento em um ponto x ao longo de um membro flexural por

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{22.6}$$

Expressão aproximada

13 Se os deslocamentos são muito pequenos, $\frac{dy}{dx} << 1$, então Eq. 22.6 Reduz para:

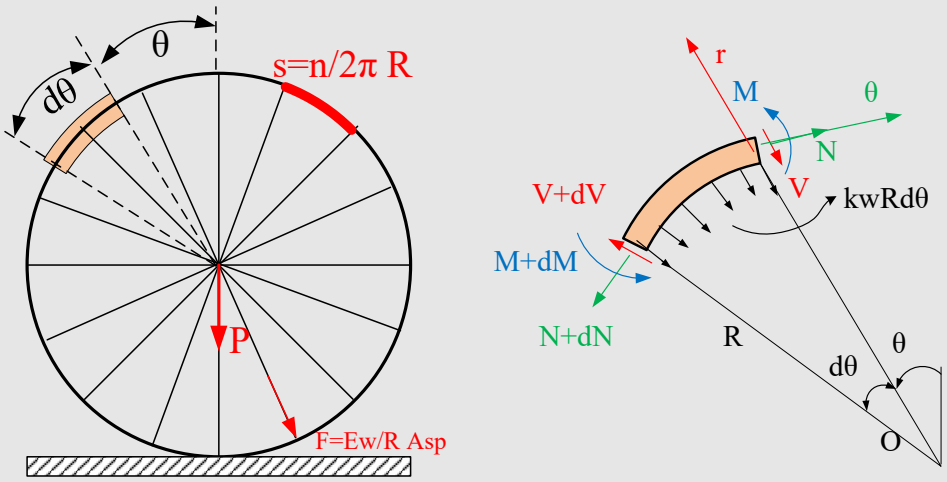
$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{22.7}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

22.3.1 Ex 22.5: Roda de bicicleta

A seção seguinte é reproduzida de Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

Procuramos determinar as forças nos raios em termos de sua orientação θ[a].



1. Os raios são suficientemente próximos, que podemos supor que a borda externa é continuamente apoiada por eles. Assim, para todos os fins práticos, temos um circunferencial viga sobre a base elástica.
2. O tamanho tributário de cada falada é $n/2\pi R$.. Da mesma forma, cada falante carrega uma força proporcional ao seu radial deslocamento w é igual a $F = Ew/RA_{sp}$.
3. Portanto, por unidade de comprimento da borda, temos uma força

$$\underbrace{\frac{EwA_{sp}}{R}}_{\text{Force per spoke}} \quad \underbrace{\frac{n}{2\pi R}}_{\text{Trib. length/spoke}} = kw_s$$

4. Assim, a constante da primavera é

$$k = \frac{EA_s n}{2\pi R^2}$$

5. Escrevemos três equações de equilíbrio

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = N + kRw_s$$
$$\Sigma F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} + V = 0$$
$$\Sigma_z^O = 0 \Rightarrow R\frac{dN}{d\theta} + \frac{dM}{d\theta} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

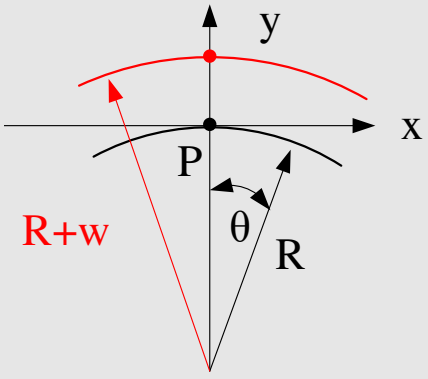
6. Eliminar V e.. N

$$kR^2\frac{dw}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} + \frac{d^3M}{d\theta^3}$$

7. A mudança na curvatura $\Delta(1/\rho)$ está relacionado com o momento

$$M = EI\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

8. Em seguida, precisamos derivar uma expressão para a mudança na curvatura (Procedimento cortesia do Prof. F. Vernerey



Antes da deformação, a curvatura em P É $\kappa = \frac{1}{R}$, após a deformação que temos $R = R + w$.. Primeiro buscamos uma aproximação para o arco da curva deformada

$$x^2 + (y - (R + w))^2 = R^2 \tag{22.8}$$

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R} - \left(1 + \frac{w}{R}\right)\right)^2 = 1 \tag{22.9}$$

Defina $\xi = x/R$, $\eta = y/R$, e $\zeta = w/R$

$$\xi^2 + \left(\eta + (1 + \zeta)\right)^2 = 1$$
$$\xi^2 - \eta^2 - 2\eta - 2\eta\zeta + 1 + 2\zeta + \zeta^2 = 1$$

Retirando termos de ordem mais elevadosη^2, $\eta\zeta$ e.. ζ^2 Como todos eles são muito pequenos em comparação com 1) Rearranjando

$$\xi^2 - 2\eta + 2\zeta = 0$$
$$\eta = \frac{\xi^2}{2} + \zeta$$
$$y = \frac{x^2}{2R} + w \quad \text{Nice parabolic approximation of a circular arc}$$

Vamos agora, substituindo x por $R\theta$

$$y = \frac{x^2}{2R} + w \simeq \frac{1}{2R}(R\theta)^2 + w \simeq \frac{R_0 + w}{2}\theta^2 + w$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A curvatura é dada por

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}$$
$$= \frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}$$

Assim, a mudança na curvatura é dada por

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}\right) = -\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$$

Assim, para um positivo deslocamento w para longe do centro do círculo a curvatura do anel diminui. A mudança de curvatura nesta expressão consiste em dois componentes. O primeiro mandato w/R^2 corresponde à mudança na curvatura devido a uma simples expansão do anel. O segundo mandato $\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$ igual a d^2w/ds^2 representa a mudança usual na curvatura que ocorre em uma haste reta.

9. Substituindo por.. M O governo final é

$$\frac{d^5w}{d\theta^5} + 2\frac{d^3w}{d\theta^3} + a^2\frac{dw}{d\theta} = 0$$

com

$$a^2 = \frac{R^4k}{EI} + 1$$

10. A solução para isso é a forma

$$w = C_0 + C_1\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + C_2\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + C_3\cosh\alpha\theta + C_4\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta$$

com

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}; \qquad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

11. Substituindo:

$$M = -\frac{EI}{R^2}\left(C_0 - 2\alpha\beta C_1\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + 2\alpha\beta C_2\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right)$$
$$V = 2\alpha\beta\frac{EI}{R^3}\left[\left(\alpha C_1 - \beta C_2\right)\cosh\alpha\theta\sin\beta\theta + \left(\beta C_1 - \alpha C_2\right)\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta\right]$$

12. Observamos que desde que a borda se deforma simetricamente em relação ao eixo vertical, w Deve estar empatado. Não deve mudar com o sinal de θ). Assim C_3 e.. C_4 deve ser zero.
13. Condições de contorno

$$\begin{aligned} \tfrac{dw}{d\theta} &= 0; & \theta = \pi \\ V &= -\tfrac{P}{2}; & \theta = \pi \\ \int_0^\pi w d\theta &= 0 \end{aligned}$$

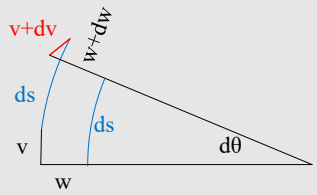
14. A última condição implica que sob carga, os pontos superiores e inferiores permanecem verticais. De fato, considerando um segmento infinitesimal da borda antes e depois da deformação, a condição de inextensibilidade seria

$$dv + wd\theta = 0 \Rightarrow v = -\int wd\theta$$

Onde v é a tangencial deslocamento ao longo do arco.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



15. Aplique os três condições de contorno

$$C_1\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] + C_2\left[\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] = 0 \tag{22.10}$$

$$C_1\left[\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right] - C_2\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] = -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta} \tag{22.11}$$

$$C_0\pi+\frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right) + \frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi-\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) = 0 \tag{22.12}$$

16. Resolva as constantes

$$C_0=\frac{PR^3}{2\pi a^2EI}$$

$$C_1=-\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)}$$

$$C_2=\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)}\pi$$

$$+\frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right)$$

$$+\frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi-\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right)=0$$

17. Últimas expressões de w e.. M

$$w(\theta)=\frac{PR^3}{4\alpha\beta EI}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi a^2}-A\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta+B\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta\right) \tag{22.13}$$

$$M(\theta)=-\frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\pi a^2}+A\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta+B\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right) \tag{22.14}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde

$$A = \frac{\alpha \cosh \alpha\pi \sin \beta\pi + \beta \sinh \alpha\pi \cos \beta\pi}{a\left(\sinh^2 \alpha\pi + \sin^2 \beta\pi\right)}$$

$$B = \frac{\alpha \sinh \alpha\pi \cos \beta\pi - \beta \cosh \alpha\pi \sin \beta\pi}{a\left(\sinh^2 \alpha\pi + \sin^2 \beta\pi\right)}$$

18. A força no discurso será

$$P_r(\theta) = \frac{EA_{sp}}{R} w(\theta)$$

19. **Aplicação numérica.** Nós consideramos uma roda com as seguintes propriedades, assumindo moduli elástico igual Para a borda e os raios:

Quantidade	Símbolo	Valor
Número de raios	n	36
Raio da borda	R	31.2 cm
Falava em seção transversal	A_{sp}	0.22 cm^2
Rim momento de inércia	I	0.3 cm^4

De Eqs. (4) e.. (9)Notando que E Cancela:

$$a^2 = \frac{A_{sp}\, n\, R^2}{2\pi I} + 1 = \frac{0.22 \cdot 36 \cdot 31.2^2}{2\pi \cdot 0.3} + 1 = 577.7, \qquad a = 24.04$$

Da Eq. (10):

$$\alpha = \sqrt{\frac{24.04 - 1}{2}} = 3.395, \qquad \beta = \sqrt{\frac{24.04 + 1}{2}} = 3.539$$

Em.. $\theta = \pi$, as funções hiperbólicas satisfazem $\sinh \alpha\pi \approx \cosh \alpha\pi \approx \frac{1}{2} e^{10.66}$, enquanto os valores trigonométricos são $\sin \beta\pi = -0.992$ e.. $\cos \beta\pi = +0.1223$. Substituindo-se nas expressões para A e.. B:

$$A = -0.245\, e^{-10.66}, \qquad B = +0.326\, e^{-10.66}$$

As expressões (22.13)–(22.14) Então se torne, para um carga aplicada P (em kgf):

$$M(\theta) = P\left(-0.00855 + 3.80\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta - 5.05\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta\right) \text{ kgf cm}$$

$$P_r(\theta) = P\left(\ 0.0278 + 0.514\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta + 0.683\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta\right) \text{ kgf}$$

O fator $e^{-10.66}$ causa ambos M e.. P_r Decair muito rapidamente longe do ponto de carga $\theta = \pi$; para ângulos mesmo ligeiramente removidos de π os termos oscilatórios são insignificantes, e $M \approx -0.00855\, P$ e.. $P_r \approx 0.0278\, P$ na maior parte da borda.

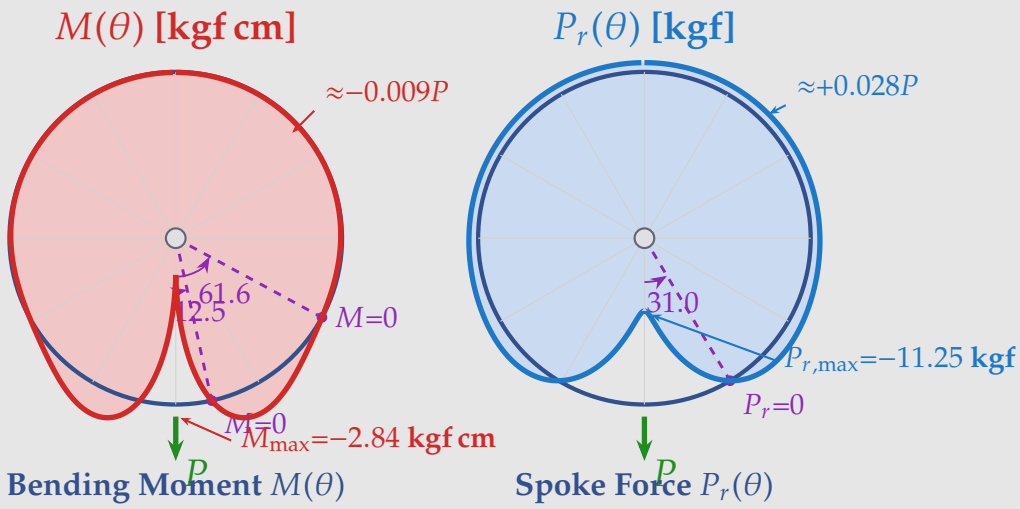
Por.. $P = 40$ kgf os valores de pico no ponto de carga são

$$M_{\max} = 88 \text{ kgf cm}, \qquad P_{r,\max} = 11.2 \text{ kgf}$$

As distribuições momento fletor e força de fala ao redor da roda são mostradas Lá em baixo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Nota: O momento fletor $M(\theta)$ e falou força $P_r(\theta)$ Em volta da roda (P = 40 kgf, n = 36, R = 31.2 cm). Raio de choque marca zero-cruzamentos; os ângulos são medidos a partir da direção da carga. No campo distante: $M_\infty = -PR/(2\pi a^2) \approx -0.009P$ kgf cm.

20. **Efeito da pretensão.** A análise acima trata os raios como um meio elástico passivo e faz Não conte com a pré-tensão inicial T_0 introduzido durante a roda Montagem (verdade). Em serviço, os raios só podem suportar tensão; Um discurso que vai laxinha não oferece resistência elástica, invalidando o contínuo- Modelo de fundação. A quantidade $P_{r,\max}$ Computado acima representa O, o *redução máxima* em força de expressão causada pela carga aplicada. Para a roda permanecer estruturalmente som sob carga P, a assembléia A pré-tensão deve satisfazer

$$T_0 > P_{r,\max}$$

Em outras palavras, cada falante deve manter uma tensão residual positiva após A carga é aplicada. No exemplo numérico isso requer $T_0 > 11.2$ kgf Por que falou isso? Típicos rodas de corrida são verdadeiras para 80–120 kgf por fala, proporcionando uma margem confortável.

Este problema foi resolvido pela primeira vez por Joukowsky, 1948[b] .

[a] Problema dedicado a Caroline Saouma

[b] Nikolai Yegorovich Joukowsky (1847-1921), professor de Mecânica na Escola Técnica de Moscou, é mais conhecido como Pai da aviação russa e o originador do Kutta... Teorema de Joukowsky. Sua solução da roda de bicicleta como Um anel na base elástica é anterior Feodossiev, 1977 por várias décadas e foi transmitido através da escola de Moscou Mecânica.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

22.3.2 Ex 22.6: Rigidez de uma mola helicoidal

Nós procuramos derivar o rigidez k de uma mola helicoidal, dado que a mola é composta por bobinas de arame.

Uma mola helicoidal feita de fio de diâmetro d e enrolado em uma hélice de diâmetro médio D Primeiro deforma-se através de cisalhamento quando um força axial F é aplicado. Quando aplicamos uma força F, a primavera se estende por um deslocamento Δ (ou ΔLDe acordo com a Lei de Hooke:

$$F = k\delta$$

Onde k É a primavera rigidez que queremos derivar.

Torção em cada bobina Quando uma força F é aplicado na mola, cada bobina experimenta um efeito torção ou torção. Para uma única bobina, esta força produz um torque T sobre o eixo da bobina, que pode ser expresso como:

$$T = F \cdot \frac{D}{2}$$

Deformação torsional e ângulo de torção Para uma haste cilíndrica (ou bobina de mola), o ângulo de torção θ devido a um torque T Pode ser calculado por:

$$\theta = \frac{T \cdot L_{\text{coil}}}{JG}$$

onde:

- $L_{\text{coil}} = 2\pi D$ é o comprimento de uma bobina (uma vez que cada bobina é essencialmente um laço circular de fio),
- $J = \frac{\pi d^4}{32}$ é o polar momento de inércia para uma seção circular de diâmetro d,
- G é o módulo cisalhamento do material da mola.

Assim, para uma única bobina, o ângulo de torção torna-se:

$$\theta = \frac{T \cdot 2\pi D}{\frac{\pi d^4}{32} \cdot G} = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$$

Deformação Total da Primavera Uma vez que cada bobina gira por um ângulo θ, e há n bobinas, a torção angular total Θ para toda a primavera é:

$$\Theta = n \cdot \theta$$

O axial deslocamento Δ No final da primavera está relacionado com a torção angular total por:

$$\Delta = \Theta \cdot \frac{D}{2} = n \cdot \theta \cdot \frac{D}{2}$$

Substituir e Simplificar Substituto $\theta = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$ e.. $T = F \cdot \frac{D}{2}$:

$$\Delta = n \cdot \frac{32 \cdot F \cdot \frac{D}{2} \cdot D}{d^4 \cdot G} \cdot \frac{D}{2}$$

Simplificando, nós temos:

$$\Delta = \frac{16FnD^3}{d^4G}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Derivar o Rigidez k Da lei de Hooke, $F = k\Delta$Nós resolvemos para k:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{Gd^4}{16nD^3}$$

ou, como está escrito convencionalmente:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n}$$

Relate o comprimento L **para o Rigidez** k Desde então $L = n \cdot p$, onde p É o arremesso da primavera, podemos expressar n em termos de L:

$$n = \frac{L}{p}$$

Substituindo n Na equação rigidez:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3\left(\frac{L}{p}\right)} = \frac{Gd^4 \cdot p}{8D^3L}$$

Este formulário final mostra que o rigidez k é inversamente proporcional ao comprimento L, com:

$$k \propto \frac{1}{L}$$

Assim, aumentar o comprimento da mola (aumentando o número de bobinas) reduz o rigidez, uma vez que cada bobina contribui para a deformação total da mola sob carga. Por favor, consulte Exemplo 24.3.15 Também.

22.3.3 Curvatura-deformação relação

14 A relação curvatura deformação é ilustrada pela Fig. 22.1b.

15 Um positivo $d\theta$ em um positivo y (Fibras superiores) causará um *encurtando* das fibras superiores $du = -yd\theta$Dividindo ambos os lados por dx,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y\frac{d\theta}{dx}$$

Combinando isso com Eq. 22.7, nós obtemos a relação fundamental entre curvatura (ϕ), curva elástica (i.e. deslocamento) (y), e linear deformação (ε).

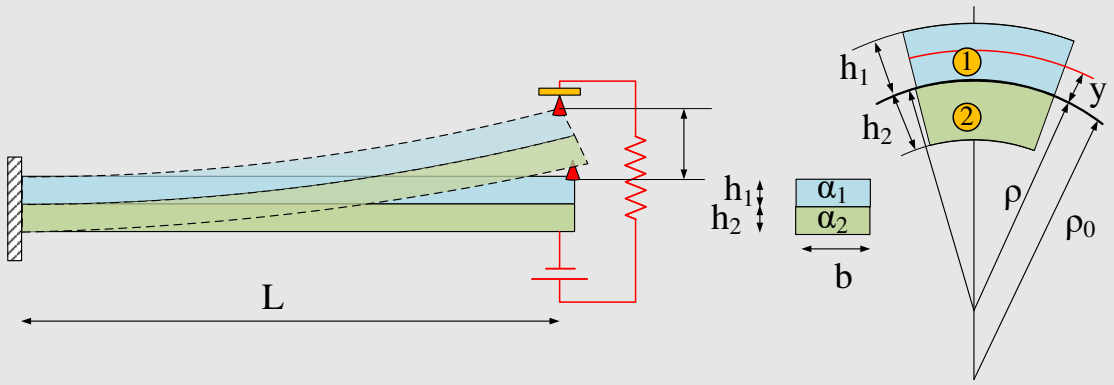
$$\frac{1}{\rho} = \phi = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{22.15}$$

16 Note que até agora não fizemos suposições sobre propriedades materiais, ou seja. Pode ser elástico ou inelástico.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

22.3.3.1 Ex 22.7: Interruptor bimetálico



Elementos bimetálicos são frequentemente usados como interruptores de termostato para regular as temperaturas da sala. Um elemento bimetálico é feito de duas placas metálicas rígidamente conectadas com diferentes coeficientes de expansão térmica. Quando aquecida, a placa bimetálico é dobrada devido a extensões desiguais de seus componentes. Se uma extremidade estiver segura, a outra livre se moverá por uma certa quantidade Δv.. O elemento muitas vezes é curvado com uma curvatura inicial $\frac{1}{\rho_0}$. Procuramos determinar a mudança na curvatura, a condição para a qual o deslocamento seria máximo, e $\Delta_v^{\max}$

Por isso consideramos uma parte do segmento de comprimento ds e uma curvatura inicial na superfície da junção $\frac{1}{\rho_0}$, O deformação de uma fibra à distância y da junção é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

Nós subtraímos a extensão térmica e multiplicamos a diferença resultante por seu respectivo módulo elástico podemos determinar o estresse em uma fibra à distância y Da junção

$$\sigma_1 = E_1\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_1\Delta T\right] \qquad 0 \le y \le h_1$$
$$\sigma_2 = E_2\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_2\Delta T\right] \qquad -h_2 \le y \le 0$$

No entanto, tanto a força normal quanto o momento na seção do elemento bimetálico tem que ser zero

$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 dy = 0$$
$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 y dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 y dy = 0$$

Substituindo por.. σ_1 e.. σ_2, e integrando-nos obter

$$\varepsilon_0(E_1h_1 + E_2h_2) - (\alpha_1E_1h_1 + \alpha_2E_2h_2)\Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) = 0$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) - \frac{1}{2}(E_1\alpha_1h_1^2 - E_2\alpha_2h_2^2)\Delta T + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Eliminando ε_0, encontramos a mudança na curvatura

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{6\Delta T(\alpha_1 - \alpha_2)}{\frac{\left(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2\right)^2}{E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)} + 4(h_1 + h_2)}$$

A mudança na curvatura é proporcional à mudança de temperatura e a diferença nos coeficientes de expansão térmica. A mudança máxima na curvatura ocorre quando as espessuras das placas componentes são selecionadas de modo que

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$$

Então..

$$\Delta\kappa = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2}\Delta T \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{H1 + H2}$$

Aplicando o segundo teorema da área de curvatura, agora podemos determinar a deflexão na ponta do cantilevered viga. A curvatura ao longo da viga é constante

$$\begin{aligned}\Delta_V^{\max} &= \Delta kappa \times L \times \frac{L}{2} \\ &= \frac{3}{2}\Delta T \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}\frac{L^2}{2}\end{aligned}$$

Claro, o segundo teorema da área de curvatura produziria o mesmo resultado que o obtido do método trabalho virtual

$$\begin{aligned}\Delta_V^{\max} &= \int_o^L \underbrace{(1)(x)}_{\delta\overline{M}} \underbrace{\Delta\kappa}_{M/EI} dx \\ &= \frac{3}{2}\Delta T \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2}\frac{L^2}{2}\end{aligned}$$

22.3.4 Método da área de Curvatura (área do momento)

Para o contexto histórico, consultar §11.4.2

17 O *Método da área de curvatura* (Muitas vezes erroneamente referido como *Método de área do momento*) é um método geométrico (em oposição ao analítico do método de dupla integração) para resolver para deslocamentos baseado na curva elástica. Existem dois teoremas associados ao método.

22.3.4.1 Assinar convenção

18 É preciso ter cuidado com os sinais na aplicação do método da área de curvatura. Fig. 22.2 Tenta esclarecer as coisas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

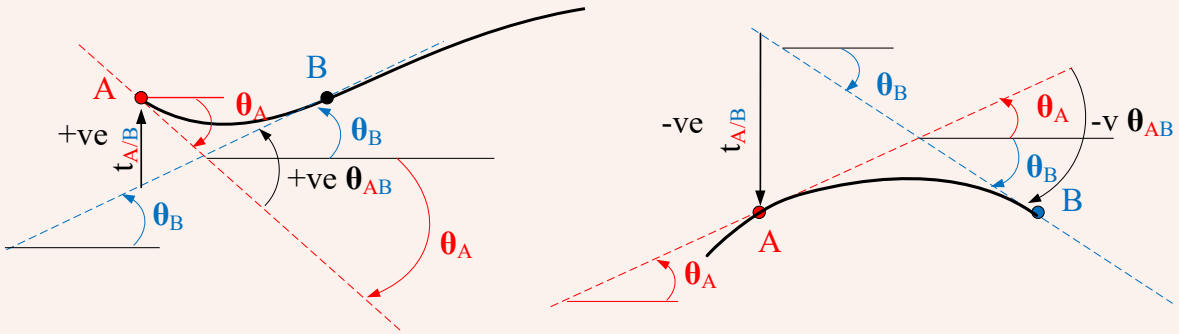


Figura 22.2: Convenção de sinais para o método da área de curvatura para curvaturas opostas da viga

22.3.4.2 Teorema da área de primeira curvatura

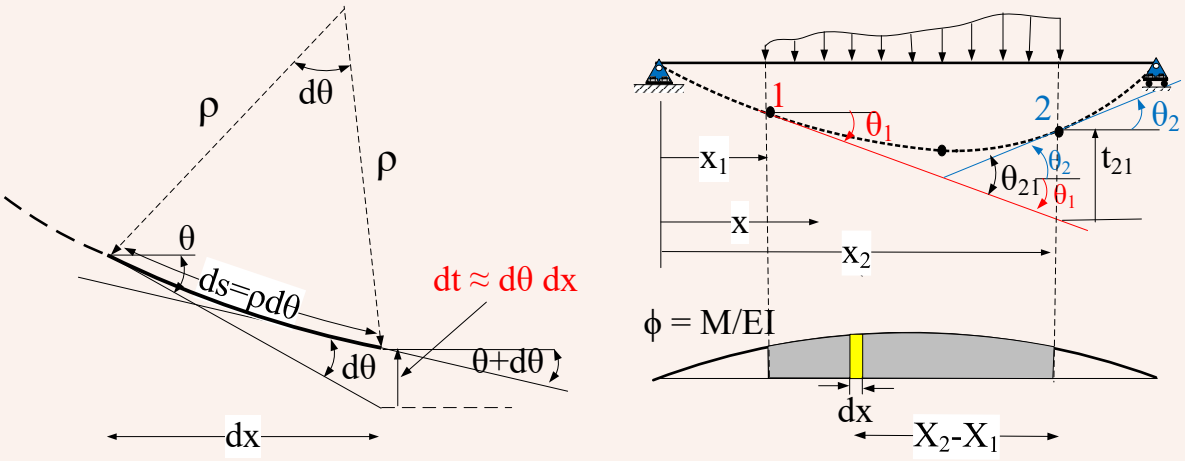


Figura 22.3: Métodos da área de curva

19 Com referência à Fig. 22.3, e da equação 22.1 Nós temos $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ Isto pode ser reescrito como ou com referência à figura 22.3

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\theta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI} dx = \int_{x_1}^{x_2} \kappa(x) dx \tag{22.16}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 22.2: Proposição; Primeiro Teorema da Área Curvatura

A diferença na inclinação (ou seja, curvatura) entre duas seções de um membro flexural carregado é igual à área do M/EI diagrama entre esses dois pontos. ou Para uma viga experimentando dobra, a mudança na inclinação (θ) entre dois pontos ao longo da viga, ponto A Em.. x_A e apontar B Em.. x_B, é igual à integral da curvatura da viga sobre o segmento entre estes dois pontos.

Observe semelhança com Def. 21.4 :

$$\Delta V_{21} = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$$

22.3.4.3 Teorema da segunda área de curvatura

20 Novamente, com referência à figura 22.3 Nós definimos por t_{21} A distância entre o ponto 2 e a tangente no ponto 1. Para uma distância infinitesimal $ds = \rho d\theta$ e para o pequeno deslocamentos isso renderia

$$\left.\begin{aligned} dt &= d\theta(x_2 - x_1) \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \end{aligned}\right\} dt = \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

ou

$$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

Cuidado $t_{AB} \neq t_{BA}$. t_{AB} é a distância entre A e a tangente em B, por outro lado, t_{BA} é a distância entre o nó B e a tangente em A.

Definition 22.3: Proposição: Segundo Teorema da Área Curvatura

O desvio tangencial do ponto 2 em um membro flexural carregado, de uma tangente à curva de deflexão no ponto 1 (t_{21}) é igual ao momento da área do diagrama de curvatura entre 1 e 2 sobre 2.

21 Observe semelhança com Def. 21.5

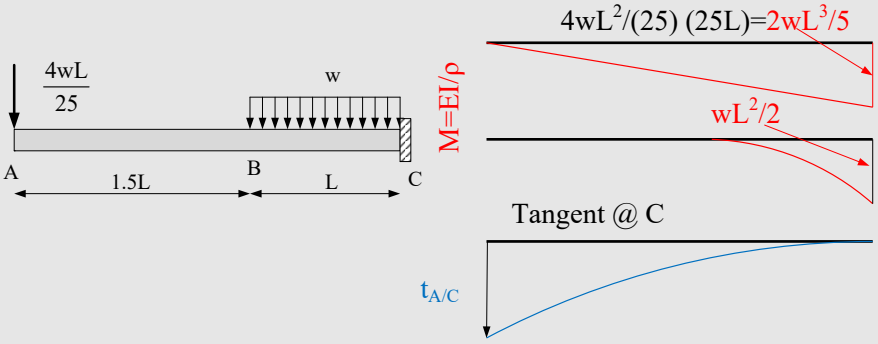
$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)dx \tag{22.17}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

22.3.4.3.1 Ex 22.8: Área de curva, cantilevered viga

Procuramos determinar o ponto A



$$EIt_{A/C} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-2wL^2}{5}\right)\left(\frac{5L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{5L}{2}\right)}_{\text{area}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{-wL^2}{2}\right)(L)\left(\frac{9L}{4}\right)}_{\text{area}}$$

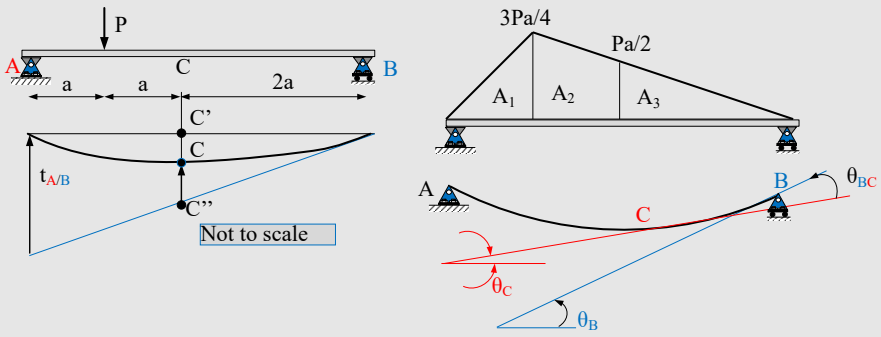
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Moment wrt A}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Moment wrt A}}$$

$$= -\frac{29wL^4}{24}$$

Assim, $\Delta_A = \frac{29wL^4}{24EI}$

22.3.4.3.2 Ex 22.9: Curvação do momento, biapoiado viga

Nós procuramos determinar Δ_C e.. θ_C para o exemplo seguinte



CÓPIA PARA REVISÃO

Deflexão Δ_C é determinado a partir de $\Delta_C = c'c = c'c - c''c$, $c''c = t_{C/B}$, e $c'c'' = \frac{t_{A/B}}{2}$ Da geometria

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)}_{A_1} + \underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{3a}{2}\right)\left(a + \frac{3a}{3}\right)}_{A_2+A_3}\right]$$

$$\text{Moment} \qquad \text{Moment}$$

$$= \frac{5Pa^3}{2EI}$$

Isso é positivo, assim acima da tangente de B

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}$$

Positivo, assim acima da tangente de B Finalmente,

$$\Delta_C = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11}{12}\frac{Pa^3}{EI}$$

Rotação θ_C É

$$\left.\begin{aligned}\theta_C &= \theta_B - \theta_{BC}\\ \theta_{BC} &= A_3\\ \theta_B &= \frac{t_{A/B}}{L}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_C = \frac{5Pa^3}{2EI(4a)} - \left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{Pa^2}{8EI}$$

22.3.4.4 Deflexão máxima

22 Uma junta ao longo da viga terá o máximo (ou mínimo) Deflexão relativa se $\frac{dy}{dx} = 0$ ou $\theta = 0$ Então podemos determinar Δ_{max} if x É conhecido, Fig. 22.4. Para determinar x:

1. Computar $t_{C/A}$
2. $\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L}$
3. $\theta_B = 0$ e.. $\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B$, assim $\theta_{AB} = \theta_A$.. Assim, computar θ_{AB} em termos de x usando o primeiro Teorema.
4. Equacione os itens 2 e 3, então resolva para x.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

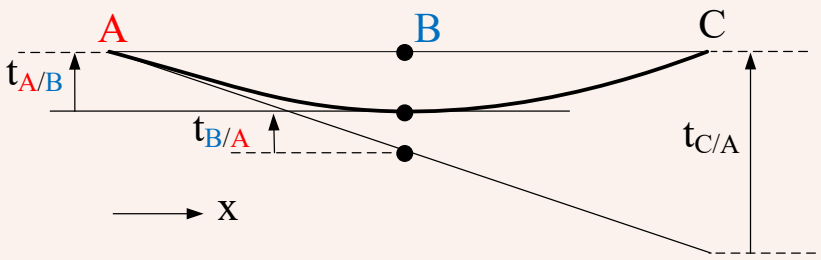
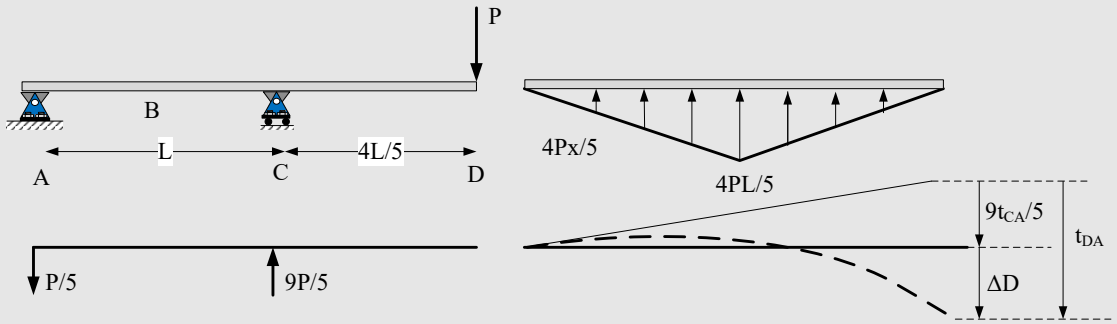


Figura 22.4: Deflexão máxima usando o método de área do momento

22.3.4.4.1 Ex 22.10: Deflexão máxima

Nós procuramos determinar a deflexão em D, e o desvio máximo em B



Deflexão em D:

$$\Delta_D = t_{D/A} - \frac{9}{5} t_{C/A}$$

$$EIt_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)$$

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$

$$EIt_{D/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)\left(\frac{4L}{5}\right)\left(\frac{8L}{15}\right)$$

$$t_{D/A} = -\frac{234}{375}\frac{PL^3}{EI}$$

Substituindo nós obtemos

$$\Delta_D = -\frac{48}{125}\frac{PL^3}{EI}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Deflexão máxima em B:

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$
$$\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L} = -\frac{2PL^2}{15EI}$$
$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4Px}{5}\right)(x)\right] = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI}$$
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow -\frac{2}{15}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Delta_{max} = \left(\frac{4Px}{5EI}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \Delta_{max} = \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

22.3.4.5 Relação de curvatura da temperatura

23 Em muitos casos, procuramos determinar deflexões de flexão causadas por cargas térmicas (como um bimaterial onde temos diferentes coeficientes de expansão térmica, ou quando temos diferentes temperaturas superiores e inferiores).

24 Assumindo variação linear na temperatura

$$\Delta_T = \alpha \Delta T_T dx \text{ Top}$$
$$\Delta_B = \alpha \Delta T_B dx \text{ Bottom}$$

25 Em seguida, considerando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

Neste caso, podemos levar $\varepsilon = \alpha \Delta T_T$ Em.. $y = \frac{h}{2}$ ou $\varepsilon = \alpha(T_T - T_B)$ Em.. $y = h$ Assim

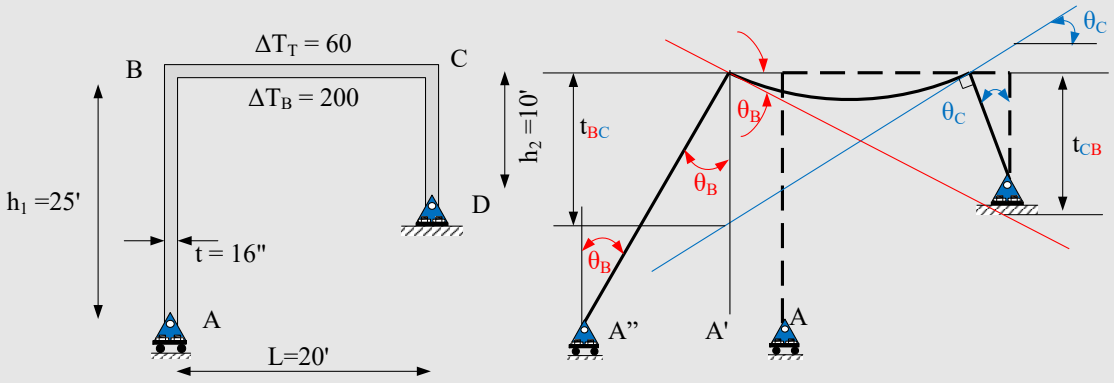
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_T - T_B)}{h}$$

22.3.4.5.1 Ex 22.11: Pórtico submetido a carregamento de temperatura

Negligenciando a deformação axial, nós procuramos calcular deslocamento em A para o seguinte pórtico

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



1. Primeiro vamos desenhar a forma deformada
2. B.C. flexões $\Rightarrow \theta_B = \theta_C \neq 0$
3. Divisórias rígidas em B e C sem carga de AB e CD
4. Deflexão em A

$$\Delta_A = AA'' = AA' + A'A''$$
$$AA' = \Delta_B = \Delta_C = |\theta_C| h_2$$
$$A''A' = |\theta_B| h_1$$

5. Precisamos computar θ_B & θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{C/B}}{L}$$
$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \text{ or } \theta_C = \frac{t_{B/C}}{L}$$

6. Para aplicar a curvatura são teoremas, Precisamos de uma curvatura (ou diagrama do momento).

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{EI}$$

7. Aplicando o segundo teorema, tomamos o momento de uma curvatura em relação a B, denotamos por $\mathcal{A}$ A área sob o diagrama de curvatura

$$t_{C/B} = \mathcal{A}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow |\theta_B| = A\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ or } \theta_B = -\frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (-ve)}$$

8.

$$\left.\begin{aligned} \theta_{CB} &= \mathcal{A} \\ \theta_C &= \theta_{CB} + \theta_B \end{aligned}\right\} \theta_C = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (+ve)}$$

9. De cima,

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}} &= |\theta_C| h_2 + |\theta_B| h_1 \\ &= \frac{\mathcal{A}}{2} h_2 + \frac{\mathcal{A}}{2} h_1 = \frac{\mathcal{A}}{2}(h_2 + h_1) \\ \mathcal{A} &= \frac{\alpha(T_B - T_T)}{h} L \end{aligned}\right\} \Delta_A = \alpha(T_B - T_T)\frac{L}{h}\left(\frac{1}{2}\right)(h_2 + h_1)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

10. Substituto

$$\Delta_A = (6.5\times10^{-6})(200-60)\frac{(20)(12)}{(16)}(\frac{1}{2})(10+25)(12)$$
$$= 2.87 \text{ in}$$

11. Outros valores numéricos:

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha(T_B - T_T)}{h}L$$
$$= \frac{1}{2}(6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{(16)}(20)(12)$$
$$= .00683rad. = .39^\circ \Rightarrow \frac{dy}{dx} << 1$$

Nota: sin(.00683) = .006829947 e.. tan(.00683) = .006830106

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha\frac{(T_B - T_T)}{h}$$
$$= (6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{16} = 5.6875\times10^{-5}$$
$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{5.6875\times10^{-5}} = 1.758\times10^4 \text{ in} = 1,465 \text{ ft}$$

12. A fim de obter M, nós precisamos E & I.
13. $\sigma = \frac{My}{I} = \frac{EI}{\rho}\frac{y}{I} = \frac{Ey}{\rho}$
14. ρ é constante $\Rightarrow$ BC está no arco do círculo M is constant & $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = C \Rightarrow y = C\frac{x^2}{2} + dx + e$.

[26] Vamos obter curvatura da inclinação da parábola e compará-la com ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$
$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = c$$

Em.. $x = 0$, $y = 0$, assim $e = 0$
Em.. $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -.00683$ Assim $d = -.00683$
Em.. $x = 20$ ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = .00683$ Assim $c(20) - .00683 = .00683$ Assim $c = 6.83\times10^{-4}$ Assim

$$y = 6.83\times10^{-4}\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6.83\times10^{-4}(x-10)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6.83\times10^{-4}$$
$$\kappa = 6.83\times10^{-4}$$
$$\rho = \frac{1}{6.83\times10^{-4}} = 1,464 \text{ ft as expected!}$$

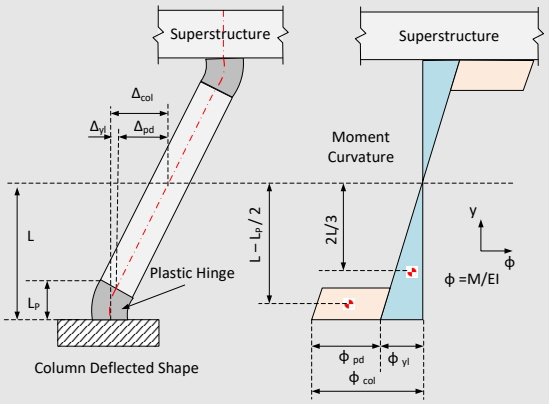
CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Se usássemos a fórmula exata da curvatura

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6.83\times10^{-4}}{[1+(.00683)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 6.829522\times10^{-4}$$
$$\Rightarrow \rho = 1464.23 \text{ ft} \quad \text{(comparado com 1465 ft)}$$

22.3.4.6 Ex 22.12: Comprimento de plástico



Pier desviou a forma e o diagrama de curvatura;
Adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2

Na análise de pushover, precisamos determinar a relação entre a força aplicada lateralmente e a deformação inelástica correspondente. É uma suposição razoável que todas as deformações plásticas ocorrem na base ao longo de um chamado *rótula plástica.*
Suponha que o diâmetro do pilar d_c é de 7 pés, a resistência à compressão do concreto f_c' 5.000 psi, e no momento 15.839 k-ft. A deformação pode ser determinada usando o teorema da área de curvatura. Curiosamente, estamos aplicando o método a um elemento que tem curvaturas elásticas e inelásticas Este exemplo é tirado do Capítulo 69.4.1.

A partir do primeiro teorema, obtemos a curvatura

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P$$

Do 2o teorema

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld}\frac{L}{2}\right)\times\frac{2}{3}L$$

Da Eq. 22.1

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C}$$

Resolvendo para módulo elástico, momento de inércia

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)}$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi\times7^4\times12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Finalmente, nós substituímos

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3}(50 \times 12) = 2.32 \text{ inch}$$

22.3.4.7 Peso elástico/conjugado

Para o contexto histórico, consultar §11.4.2

26 A analogia entre os dois teoremas da área de curvatura e a definição integral de cisalhamento e momento (highlighted anteriormente) é resumida na tabela 22.1.

Esforços internos	Área da curva
w	$1/\rho$
$V_{21} = \int_{x_1}^{x_2} w dx$	$\theta_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\rho} dx$
$M_{21} = \int_{x_1}^{x_2} V dx$	$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \theta dx$

Tabela 22.1: Analogia entre dois conjuntos de relacionamentos

27 Assim podemos imaginar um *Conjugar viga* como um imaginário viga com as mesmas dimensões (comprimento) que o original viga, mas carga em qualquer ponto do conjugado viga é igual à curvatura. Em tal "viga', o cisalhamento será igual à inclinação, e o momento será igual ao deslocamento do real original viga.

28 Condições de contorno são determinados a partir da mesa 22.2 E Fig. 22.5.

Real Viga			Conjugar Viga		
Encurralado	$\theta \neq 0;$	$y = 0$	$V \neq 0$	$M = 0$	'Hinge'
Fim Fixado	$\theta = 0;$	$y = 0$	$V = 0;$	$M = 0$	Fim livre
Fim Livre	$\theta \neq 0;$	$y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	Fim fixo
Curva interior	$\theta \neq 0;$	$y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	Suporte interior
Suporte Interior	$\theta \neq 0;$	$y = 0$	$V \neq 0;$	$M = 0$	Dobradiça interior

Tabela 22.2: Conjugar viga

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

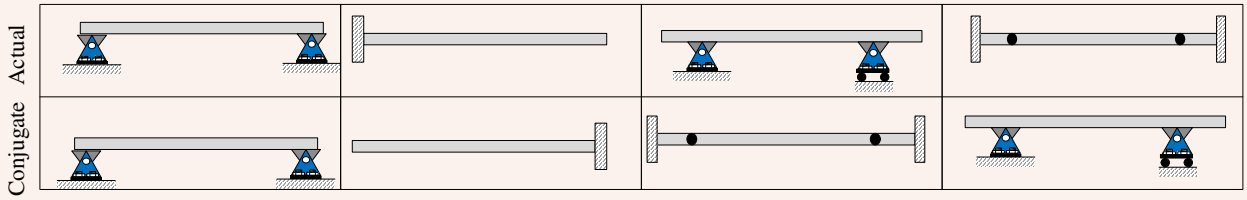


Figura 22.5: Conjugar vigas

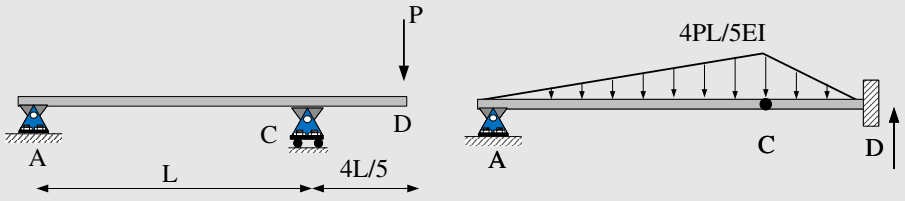
29 Considerando que o método da área de curvatura tem uma base bem definida, sua aplicação direta pode ser às vezes confusa.

30 Note que só podemos ter carga distribuída, e que a carga é positiva por um momento positivo, e negativa por um instante negativo. "Cisalhamento"e diagramas de 'Moment' devem ser elaborados em conformidade.

31 Unidades do "carga distribuída' w^* são $\frac{FL}{EI}$ (duração da força dividido por EI). Assim, os "Cisalhamento" teriam unidades de $w^* \times L$ ou $\frac{FL^2}{EI}$ E o "momento" teria unidades de $(w^* \times L) \times L$ ou $\frac{FL^3}{EI}$.. Lembrando que EI tem unidades de $FL^{-2}L^4 = FL^2$Observamos que, de fato, o "cisalhamento" corresponde a uma rotação em radianos e ao "momento" para um deslocamento.

22.3.4.7.1 Ex 22.13: Conjugar viga; carga concentrada

Analise o seguinte viga



No conjugado viga, temos 3 equações de equilíbrio e 1 equação de condição que soma é igual ao número de reações.

A deflexão em D corresponderá ao cisalhamento em D do conjugado correspondente viga.

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0 \Rightarrow R_A(L) - \left(\frac{4PL}{5EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{2PL^2}{15EI}$$

Que é a inclinação em real viga em A Como calculado antes!

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Vamos desenhar o Diagrama do Momento para o conjugado viga em um ponto x longe de A. De A a C

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{EI}\left[\frac{2}{15}L^2x - \left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\right] \\ &= \frac{P}{EI}\left(\frac{2}{15}L^2x - \frac{2}{15}x^3\right) \\ &= \frac{2P}{15EI}\left(L^2x - x^3\right) \end{aligned}$$

Ponto de Momento Máximo (Δ_{max}) ocorre quando $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2P}{15EI}(L^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 = L^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

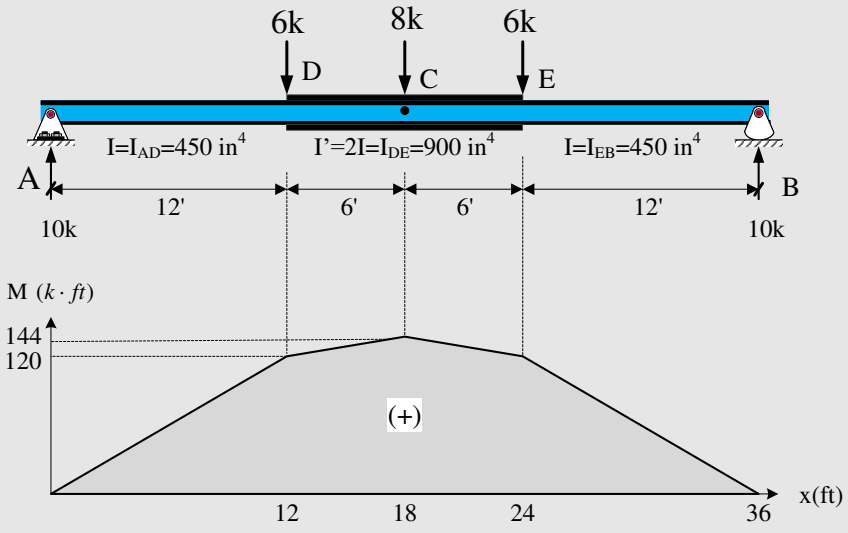
como previamente determinado

$$\begin{aligned} x &= \frac{L}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow M &= \frac{2P}{15EI}\left(\frac{L^2L}{\sqrt{3}} - \frac{L^3}{3\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI} \end{aligned}$$

Como antes.

22.3.4.7.2 Ex 22.14: Conjugar viga; variável I

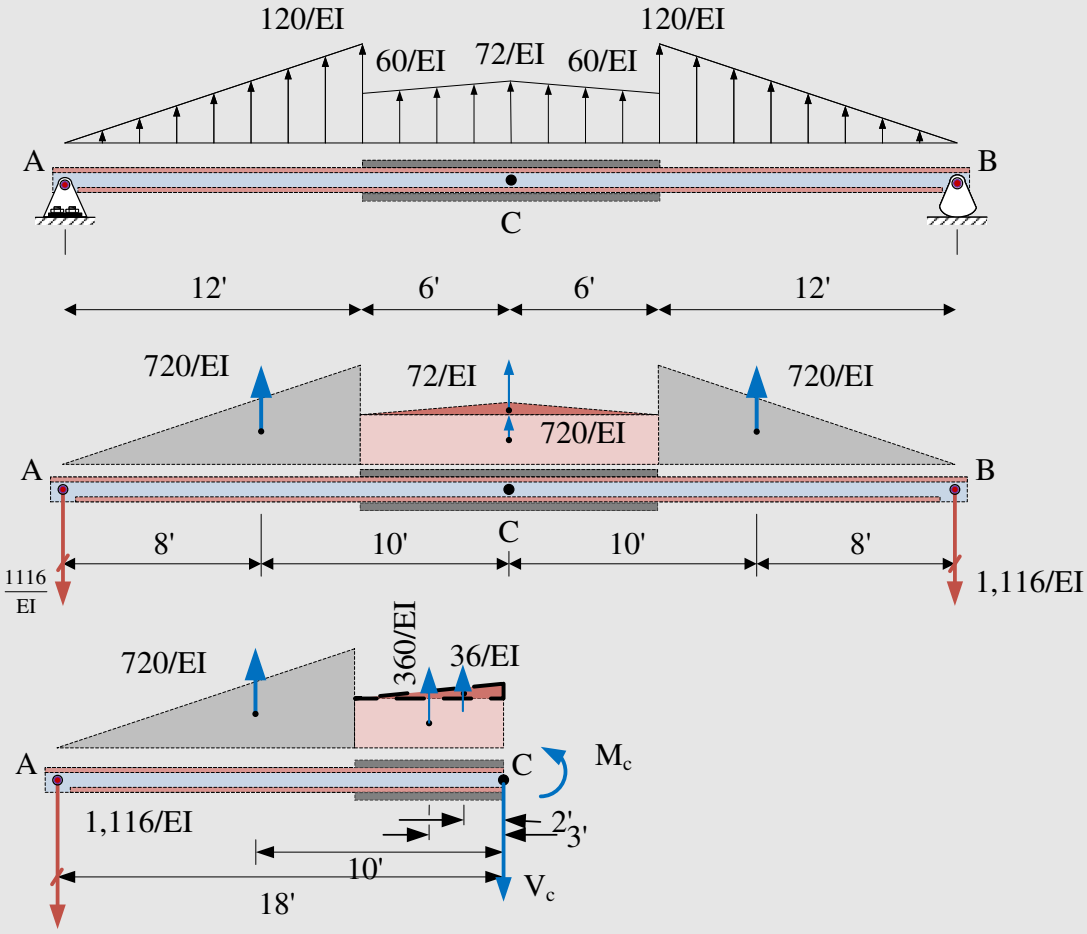
Determine o desvio no ponto C para o seguinte viga



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pela simples observação, as reações em A e B são iguais a 10 k. A carga elástica no conjugado viga é



Em seguida, procuramos determinar o momento interno em C′ no conjugado viga, que é obtido do equilíbrio:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = -;\ \frac{1,116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_C = 0$$

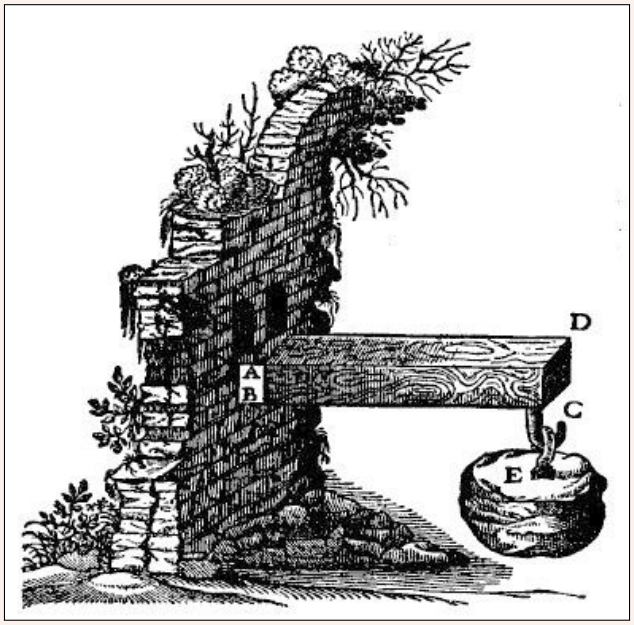
$$\Rightarrow M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3}{EI}$$

Substituindo

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3(12^3)\text{in}^3/\text{ft}^3}{(29\times10^3)\text{k/in}^2(450)\text{in}^4} = -1.55\text{ in}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A ilustração de Galileu sobre um cantilevered viga, dos discursos e demonstrações matemáticas relacionadas a duas novas ciências (1638)

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 23

Cisalhamento e Torsão

Abstract

Cisalhamento e a torção são muitas vezes ofuscadas pela flexão em análise estrutural. No entanto, eles desempenham papéis cruciais em muitos casos e certamente merecem um capítulo neste livro. A cobertura vai além do básico e se dirige tanto ao modelo de Timoshenko quanto ao modelo Vlasov.

Algumas das equações derivadas complementarão as do Capítulo 26, preparando para os métodos rigidez.

23.1 Cisalhamento deformação (transverso) 990
23.1.1 Cisalhamento, elemento infinitesimal 991
23.1.2 Cisalhamento distribuição; $\tau(y)$ 992
23.1.3 Coeficiente Cisalhamento . . 993
23.1.4 Cisalhamento fator 993
23.1.5 Cisalhamento deformação v_s, Timoshenko 995
23.2 Deformações torcionais 995
23.2.1 S^t Venante ou Torção Uniforme 996
23.2.2 Vlasov ou torção não uniforme 997

23.1 Cisalhamento deformação (transverso)

1 Em geral, deformações devido à flexão, fig. 1. 23.1, são muito pequenos. No entanto, para vigas com baixa proporção de extensão a profundidade, essas deformações não podem ser negligenciadas. Como tal, diferenciamos entre

Bernouilli viga, nós não contabilizamos a deformação cisalhamento, seção plana permanece plano.

Timoshenko viga representa deformação, hipótese da seção plana não mais válida.

Como tal, esta seção procurará determinar a deformação cisalhamento (sem flexão) e seu impacto nos coeficientes rigidez mais tarde.

CÓPIA PARA REVISÃO

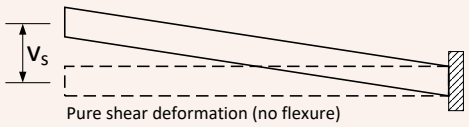


Figura 23.1: Deformação pura cisalhamento

23.1.1 Cisalhamento, elemento infinitesimal

2 Assumindo um material elástico linear, o cisalhamento deformação (pequeno deslocamento, ou seja, $\tan\gamma \approx \gamma$), Fig. 23.2, é dado por

$$\tan\gamma \approx \gamma = \underbrace{\frac{dv_s}{dx}}_{\text{Kinematics}} = \underbrace{\frac{\tau}{G}}_{\text{Stress-strain}} \tag{23.1}$$

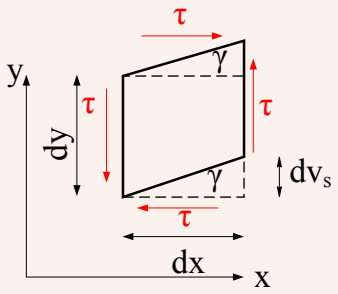


Figura 23.2: Elemento Infinitesimal submetido a cisalhamento tensão

Onde $\frac{dv_s}{dx}$ inclinação da viga linha neutra com relação à direção horizontal. A seção vertical permanece indeformada. G é o módulo cisalhamento, τ o cisalhamento tensão, e v_s *cisalhamento induzido deslocamento*.

23.1.1.1 Ex 23.1: Deflexão cantilevered viga

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Vamos considerar um cantilevered (rectangular bxhviga submetido a carga concentrada P no seu fim livre. Pelo princípio da complementaridade trabalho virtual (e observando que $\delta M = (1)x$, $M = Px$, $\delta\tau = 1$, e τ é dado por Eq. 23.3):

$$
\begin{aligned}
(1)\Delta &= \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx}_{\text{Flexure}} + \underbrace{\int_{Vol} \delta\overline{\tau}\frac{\tau}{G}dVol}_{\text{Shear}} \\
&= \int_0^L x\frac{Px}{EI}dx + \frac{1}{G}\int_{-h/2}^{h/2} \underbrace{(1)}_{\delta\tau} \underbrace{\left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}}_{\tau} \underbrace{Lbdy}_{dVol} \\
&= \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\Delta_{flex}} + \underbrace{\frac{6}{5}\frac{PL}{AG}}_{v_s} \\
\Delta &= \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

para $E/G = 2.5$ (valor típico para aço), $\Delta = EI\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)\Delta_{flex}$

Por.. $L = h$ A deflexão total é 1,75 vezes maior que a devida apenas à flexão, e para $L = 10h$ A deflexão devida a cisalhamento é menor que 1% de Δ_{felx}.

23.1.2 Cisalhamento distribuição; $\tau(y)$

3 Procuramos determinar a distribuição vertical do transverso cisalhamento tensão, Fig. 23.3a.. Considerando um segmento de comprimento dx Cortar à distância y De N.A. O equilíbrio requer

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{lft}} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{rgt}} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

Substituindo pela magnitude do tensões:

$$\int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x)y}{I} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x) + dM(x)y}{I} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

Simplificar e dividir por dx e.. b dá

$$\tau_{xy} = \frac{dM(x)}{dx}\frac{1}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} y b dy$$

Mas desde então.. $V(x) = dM(x)/dx$, então a distribuição cisalhamento tensão é dada por

$$\tau(xy) = \frac{V(x)}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} y b dy = \frac{V(x)Q(y)}{Ib} = \frac{VQ(y)}{Ib}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

V força cortante, Q primeiro momento (ou momento estático) sobre linha neutra da porção da área transversal fora da seção onde o cisalhamento tensão deve ser determinado, I momento de inércia, b Largura.

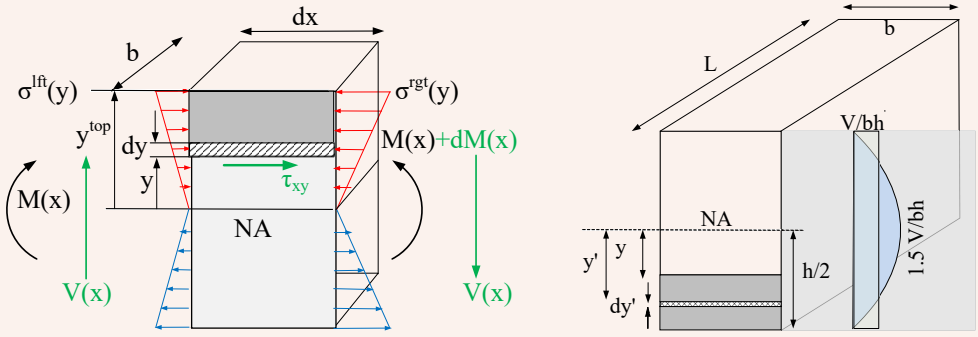
23.1.3 Coeficiente Cisalhamento

4 *Defina* Coeficiente cisalhamento α_s como a proporção do cisalhamento tensão no linha neutra $\tau(y=0)$ para a média cisalhamento tensão ($\tau = V/bh$).

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib} \tag{23.2}$$

$$= \frac{1}{Ib}\int_y^{h/2} V \underbrace{\underbrace{b\,dy'}_{dA}\, y'}_{dF}_{dM} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$= \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{23.3}$$



(a) Segmento de comprimento dx Cortar à distância y De N.A.

(b) Coeficiente Cisalhamento

Figura 23.3: Cisalhamento tensão e coeficiente

- Cisalhamento tensão é zero para $y = h/2$ E no máximo em O linha neutra onde ($y = 0$ e.. $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{bh}$). $\Rightarrow \alpha_s = 1.5$

23.1.4 Cisalhamento fator

5 Assim como nós tivemos $\sigma = P/A$, podemos assumir $\tau = V/A$?

CÓPIA PARA REVISÃO

6 Normalizando o força cortante V por A ($\tau = V/A$, assim como $\sigma = P/A$) está incorreto, uma vez que o cisalhamento tensão não é uniformemente distribuído ao longo da profundidade.

7 Nós definimos

$$\tau \overset{\text{def}}{=} V/A_s \Rightarrow A_s \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{\lambda_s} \tag{23.4}$$

Onde A_s é o efetivo seção transversal para cisalhamento. Nós procuramos determinar λ_s, o *cisalhamento fator*.

8 Para determinar λ_s Nós vamos equiparar o *energia média cisalhamento deformação* U

$$U_{aver} = \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s}dx = \lambda_s^? \int_0^L \frac{V^2}{2GA}dx \tag{23.5}$$

para o *Exatamente* um determinado a partir da distribuição real cisalhamento tensão

$$U_{exact} = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma \underbrace{G\gamma}_{\tau} d\Omega = \int_\Omega \frac{\tau^2}{2G}d\Omega = \iiint \frac{\tau^2}{2G}dxdydz \tag{23.6}$$

Note que em mecânica estrutural Ω representa um volume, e Γ (ou $\delta\Omega$) a superfície correspondente.

9 Começando com a expressão exata do cisalhamento tensão

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib}; \qquad Q(y) = \int_y^{h/2} by'dy' = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

10 Substituindo-se em Eq. 23.6 para determinar a energia exata deformação.

$$\begin{aligned}
U_{exact} &= \int_0^L \left[\int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V^2}{8GI^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dydz\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2}\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2y^2}{2} + y^4\right)dy\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2}\left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2y^3}{6} + \frac{y^5}{5}\right]_{-h/2}^{h/2} dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 bh^5}{240GI^2}dx
\end{aligned}$$

11 Para uma seção retangular $I = bh^3/12$

$$U_{exact} = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V^2}{GA}dx = \underbrace{\frac{6}{5}}_{1.2}\int_0^L \frac{V^2}{2GA}dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

12 Comparando com Eq. 23.5, notamos que o fator de forma cisalhamento $\lambda_s = 1.2$. Assim

$$\tau = V/A_s; \qquad A_s = \frac{A}{1.2} \tag{23.7}$$

13 Para a deformação cisalhamento, adotamos $\tau = V/A_s$ e.. De Eq. 23.1 Nós conseguimos

$$\tan\gamma \simeq \gamma = \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_s} = \frac{\lambda_s V}{AG} \tag{23.8}$$

14 Anote a analogia com $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$

23.1.5 Cisalhamento deformação v_s, Timoshenko

15 A deformação cisalhamento para uma viga preso em uma extremidade sujeita a um carga concentrada na outra (como na definição de um termo coeficiente rigidez) será determinado em seguida.

16 Da Eq. 23.8, e assumindo que V para ser constante,

$$\int dv_s = \int \frac{V}{GA_s} dx \Rightarrow v_s = \frac{V}{GA_s} x + C_1 \tag{23.9}$$

17 Se o deslocamento v_s é zero na extremidade oposta da viga, então $C_1 = -\frac{V}{GA_s}(x - L)$ e..

$$v_s = \frac{V}{GA_s}(x - L) \tag{23.10}$$

18 Em.. $x = 0$

Definition 23.1: Cisalhamento deformação

$$v_s = \frac{V}{GA_s} L \tag{23.11}$$

19 Esta expressão será revisita em §41.7 dentro do contexto do Timoshenko viga.

23.2 Deformações torcionais

20 Quando a torção é aplicada a um membro estrutural, as seções transversais desse membro podem dobrar além de torcer. Se o membro é autorizado a dobrar livremente, então o

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

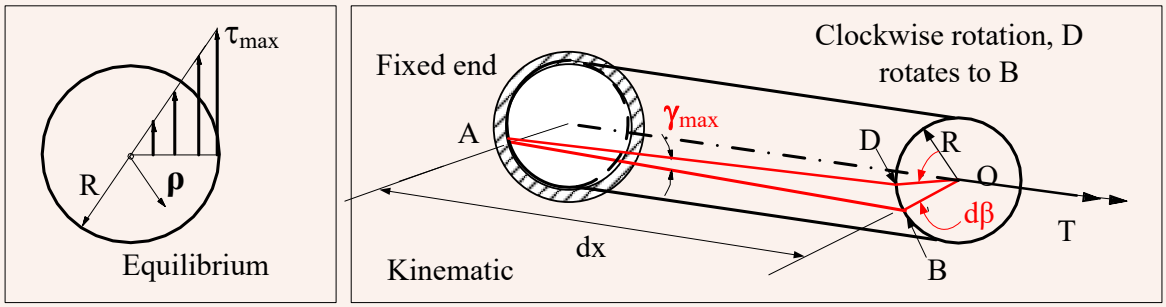


Figura 23.4: Relações de rotação da torção

O torque aplicado é resistido apenas por *Saint-Venant* Tosquiando tensões. Esse tipo de comportamento é chamado de puro ou *Torção uniforme*.. Por outro lado, se o membro é impedido de deformar livremente, o torque aplicado é resistido por uma combinação de cisalhamento Saint-Venant tensões e torção em dobra, isso é chamado *Torção não uniforme* (ou a torção de Vlasov).

23.2.1 S^t Venante ou Torção Uniforme

21 Assumindo um material elástico linear, e um linear deformação (e assim tensão) distribuição ao longo do raio de uma circular seção transversal submetida a torção Carregar, Fig. 23.4 Nós temos:

$$T_{SV} = \underbrace{\underbrace{\int_A \underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}_{stress}\underbrace{dA}_{area}}_{Force}\underbrace{\rho}_{arm}}_{torque} = \frac{\tau_{max}}{c}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{SV}c}{J} \tag{23.12}$$

Observe a analogia desta última equação com $\sigma = \frac{Mc}{I_{zz}}$.

22 $\int_A \rho^2 dA$ É o polar momento de inércia J. Também é referido como o St. Constante de torção do Venant. Para circular seções transversais

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \left(2\pi\rho d\rho\right)$$
$$= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Para seções retangulares $b \times d$, e $b < d$, uma expressão aproximada é dada por

$$J = kb^3 d$$
$$k = \frac{0.3}{1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2}$$

Para outras seções, J é frequentemente tabulado.

23 Note que J corresponde a.. I_{xx} Onde x é o eixo ao longo do elemento.

24 Tendo desenvolvido uma relação entre torção e cisalhamento tensão, agora buscamos uma relação de torção com rotação torcional. Na Fig. 23.4, consideramos o comprimento do arco BD

$$\left.\begin{array}{rl} \gamma_{max} dx &= d\beta R \\ \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\gamma_{max}}{R} \\ \gamma_{max} &= \frac{\tau_{max}}{G} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rl} \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\tau_{max}}{GR} \\ \tau_{max} &= \frac{T_{SV} R}{J} \end{array}\right\} \frac{d\beta}{dx} = \frac{T_{SV}}{GJ}$$

25 Finalmente, podemos reescrever esta última equação como $\int T_{SV} dx = \int GJ d\beta$ e obter:

$$T_{SV} = \frac{GJ}{L}\beta \tag{23.13}$$

Observe a semelhança entre esta equação e Equação 26.1.

23.2.2 Vlasov ou torção não uniforme

26 Todas as seções transversais vão sair do lugar, exceto as circulares. Assim, uma restrição longitudinal pode alterar a distribuição tensão e rigidez sobre um comprimento substancial do membro, geralmente benéfico, porque inibem o deformação[1].

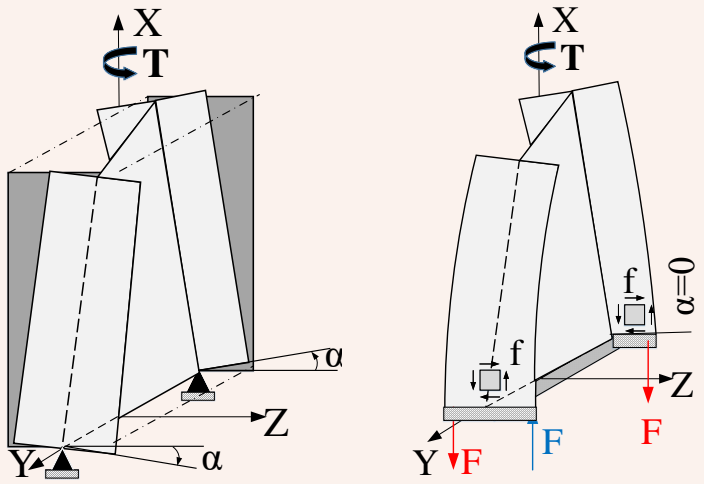
27 A teoria da torção de Vlasov, 1961 inclui o efeito de contorcer contido, Fig. 23.5.. Comparada com a teoria tradicional viga, a teoria Vlasov introduz duas quantidades extras; O, o *Desvio constante* C_w e o *Bimomento* B.. A constante de dobra é uma propriedade de seção transversal e uma medida para o esforço necessário para reduzir a dobra. A unidade da constante de dobra é $[L^6]$.. O bimomento é definido como

$$B = Md \tag{23.14}$$

28 A necessidade da definição deste novo momento decorre do fato de que, enquanto $M_y = M_z = \mathbf{N} = 0$, ainda existe normal tensões atuando sobre o seção transversal. Assim, introduzirá um grau de liberdade para os elementos viga que representam o torque devido à contenção de dobra.

[1] Derivação baseada em (McGuire e Winter, 1968).

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Agitando, mas sem torção

(b) Torção e torção restritas

Figura 23.5: Por que a dobra ocorre

29 Uma seção I completamente livre em uma ponta e impedida de torcer, mas não dobrando, na outra extremidade vai se deformar como na figura. 23.5a.. Neste caso, para todos os fins práticos isso é estruturalmente semelhante ao caso de um eixo livre em ambas as extremidades, mas submetido a torques iguais e opostos.

30 Se a base é impedida de se contorcer, bem como de torcer, as coisas são diferentes. Prevenir as flanges de inclinar são forças **F** que o dobram sobre seu eixo principal muito parecido com um retangular viga são desenvolvidos e exercidos pelo suporte, Fig. 23.5b.. Estes, por sua vez, resultam em um transverso força cortante $\mathbf{H}_f$, Fig. 23.6a, em cada flange. Isso causará flexão sobre o eixo forte muito parecido com um retangular viga[2].

31 A força transversal no flange vezes a distância entre eles é um casal tendo a mesma direção que o torque de resistência.

32 A contenção de guerra é geralmente útil. Enquanto o torque total é constante ao longo do eixo, a taxa de torção geralmente varia. Na base, Fig 23.5b Deve ser zero, e toda a resistência está no torque de dobra. Mas então o efeito da restrição final morre, e o deformação gradualmente aumenta ao longo do eixo até que, em uma seção remota da base, é praticamente o mesmo que em pura torção e então todo o torque é resistido por torcional cisalhamento, Fig. 23.6b.

33 A torção total é assim decomposta em dois componentes

$$T = T_{SV} + T_V \tag{23.15}$$

[2]Há também dobra da teia, mas por causa de sua pequena rigidez em sua direção fraca pode ser ignorada.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

O primeiro termo é obtido da Eq. 23.12

$$T_{SV} = GJ\theta = GK\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} \tag{23.16}$$

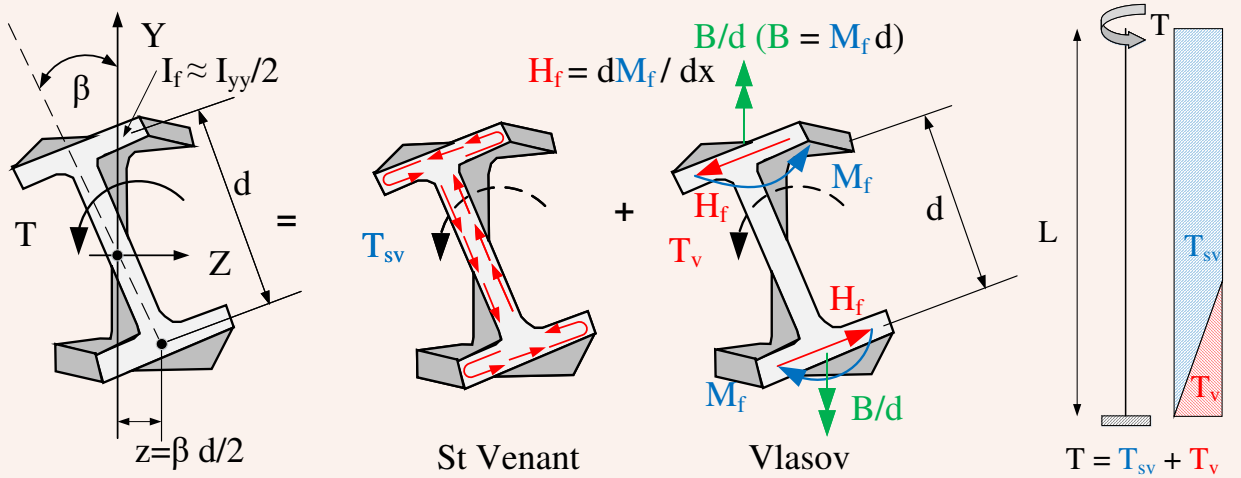
34 Para o segundo termo, cada flange pode ser tratada como um retangular viga curvado sobre seu eixo principal, e uma vez que o força cortante é a derivada do momento

$$\frac{M_f}{EI_f} = -\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d}{2}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{23.17}$$

Nós temos

$$H_f = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -EI_f\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}$$

Onde M_f é o momento fletor na flange, I_f é o flange (single) momento de inércia, z é a deflexão transversal do centro de cada flange em uma seção x da base (ângulo de torção da seção sendo β), Fig. 23.6.



(a) Torções

(b) Descomposição do torque

Figura 23.6: Torção não uniforme (McGuire e Winter, 1968))

35 Negligenciando a teia, I_f é metade do eixo fraco momento de inércia de toda a seção que temos, Fig. 23.6a

$$\begin{aligned} I_f &= I_{yy}/2 \\ z &= \beta d/2 \\ H_f &= T_V/d \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo

$$T_V = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -E \underbrace{\frac{I_{yy}}{2}\frac{d^2}{2}}_{C_w} \frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} \tag{23.18}$$

Onde C_w é uma propriedade de seção chamada *Desvio constante*.

36 Substituindo Eqs. 23.16 e.. 23.18 Eq. 23.15:

Definition 23.2: Torção uniforme e não uniforme

$$T = \underbrace{GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}}_{T_{SV}} - \underbrace{EC_w\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3}}_{T_V} \tag{23.19}$$

37 Alternativamente, nós trazemos B que é definido como o produto de M_f com d

$$\left.\begin{aligned} B &= M_f d \\ M_f &= -EI_f z'' \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f z'' d \\ z &= \frac{\beta d}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f \tfrac{d^2}{2}\beta'' \\ I_f &= \tfrac{I_{yy}}{2} \end{aligned}\right\} B = -E\underbrace{I_{yy}\frac{d^2}{4}}_{C_w}\beta''$$

38 Por isso, Eq. 23.19 pode ser reescrito como

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} + \frac{dB}{dx}$$

39 Para facilitar a identificação do governante, Eq. 23.19 pode ser reescrito como

$$\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} - p^2\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = -\frac{T}{EC_w}$$

Onde

$$p^2 = \frac{GJ}{EC_w} \tag{23.20}$$

E sua solução geral é

$$\beta = C_1 + C_2 px + C_3\cosh px + C_4\sinh px \tag{23.21}$$

as constantes serão determinadas através da aplicação do aplicável condições de contorno na figura. 23.7.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

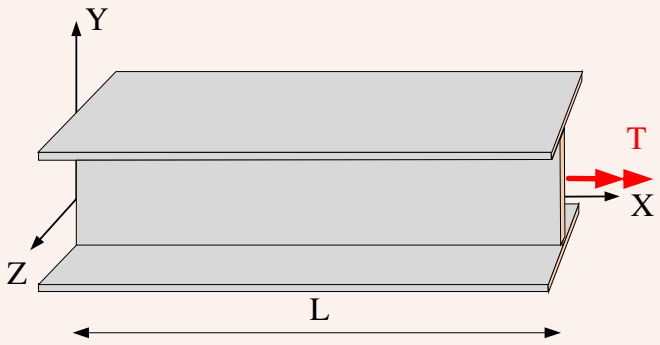


Figura 23.7: I viga submetido a torção

Viga preso em ambas as extremidades

40 Aplicando o seguinte condições de contorno,

$$\begin{array}{lllll} \text{End 1} & x=0, & \beta=\beta_1, & \beta'=\beta'_1, \\ \text{End 2} & x=L, & \beta=\beta_2, & \beta'=\beta'_2, \end{array} \tag{23.22}$$

determinamos as quatro constantes (Bhatt, 1986)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(SpL-C+1)\beta_1+(1-C)\beta_2+p^{-1}(pL-C-S)\beta'_1+p^{-1}(S-pL)\beta'_2}{D} \\ C_2 &= \frac{-S\beta_1+S\beta_2+p^{-1}(1-C)\beta'_1+p^{-1}(1-C)\beta'_2}{D} \\ C_3 &= \beta_1-C_1 \\ C_4 &= p^{-1}\beta'_1-C_2 \end{aligned}$$

Onde $D=2(1-C)+SpL$, $S=\sinh pL$, e $C=\cosh pL$. Eq 23.21 agora pode ser expressa em termos de funções de forma

$$\begin{aligned} \beta &= N_1\beta_1+N_2\beta'_2+N_3\beta_2+N_4\beta'_2 \\ N_1 &= \frac{(pL-px+\sinh px)S+(1-C)(1+\cosh px)}{D} \\ N_2 &= \frac{kx(1-C)-(CpL-S)(\cosh px-1)+(SpL+1-C)\sinh px}{D} \\ N_3 &= \frac{(C-1)(\cosh px-1)-S(\sinh px-px)}{D} \\ N_4 &= \frac{(C-1)(\sinh px-px)-(S-pL)(\cosh px-1)}{pD} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

41 Em Eq. 23.22 Condições de contorno foram expressos acima em termos de deslocamentos, é melhor expressá-los em termos do torque $T = GJ\beta' - EC_w\beta'''$ e em vez do momento fletor na flange, use o bimomento B, definido como

$$B = d\underbrace{EI_f z''}_{M_f} = EC_w\frac{d^2\beta}{dx^2}$$

De tal forma que Eq. 23.19 Agora pode ser reescrito como

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} - EC_w\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$$

42 Usando EQ. 23.21 e os valores das constantes de integração, podemos expressar as forças em termos do fim nodal deslocamentos.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{GJ}{LD}\left[(\beta_2-\beta_1)SpL - (\beta_1'+\beta_2')(C-1)L\right]\\
B &= \frac{GJ}{D}\left\{(\beta_2-\beta_1)\left[(C-1)\cosh px - S\sinh px\right]\right.\\
&\quad + p^{-1}\left[(S-CpL)\cosh px + (SpL+1-C)\sinh px\right]\beta_1'\\
&\quad \left.+p^{-1}\left[(pL-S)\cosh px + (C-1)\sinh px\right]\beta_2'\right\}
\end{aligned}$$

Preso em uma extremidade

43 Neste caso, os condições de contorno são dados por

$$\begin{aligned}
&\text{End 1;} x = 0, \beta = 0; \frac{d\beta}{dx} = 0\\
&\text{End 2;} x = L, \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2} = 0
\end{aligned} \tag{23.23}$$

O primeiro conjunto de condições diz que a torção e a taxa de torção são zero nesse final. O segundo, afirma que a flexão em cada flange sobre seu eixo principal é zero (Eq. 23.17).

44 Aplicando estes condições de contorno para Eq. 23.21 e seus derivados, a solução é

$$\beta = \frac{T}{GJ}\left[x + \frac{\sinh p(L-x) - \sinh\ pL}{p\cosh pL}\right] \tag{23.24}$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{T}{GJ}\left[1 - \frac{\cosh p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.25}$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = \frac{T}{GJ}\left[\frac{p\sinh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.26}$$

$$\frac{d^3\beta}{dx^3} = -\frac{T}{GJ}\left[\frac{p^2\cosh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.27}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

23.2.2.1 Ex 23.2: Torção não uniforme de uma seção I

Exemplo retirado de McGuire e Winter, 1968, example 5.17

Um eixo de 10 pés de comprimento de uma seção 14 W 74, torsionalmente fixado em uma extremidade e livre na outra, submetido a um torque T aplicado na extremidade livre, plote o ângulo de torção e divisão de T entre o St. Torque venante e torque de dobra. Nós procuramos determinar o interno tensões.

Propriedades Físicas

(em x lb/ft)	h (in)	w (in)	t_w (in)	$b_f(in)$	t_f (in)	I_x (em)^4)	I_y (em)^4)	J (em)^4)	C_w
W 14 x 74	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.88	5,990
Usado	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.6	6,000

A diferença é devido às antigas propriedades da seção adotadas no exemplo.

$E = 30 \times 10^6$ Psi, $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{1+0.3}$

Torções

Só checando!

$$J = \Sigma \frac{bt^3}{3} = \frac{2 \times 10.07 \times (0.783)^3}{3} + \frac{12.62 \times (0.450)^2}{3} = 3.60 \text{ in}^4 \checkmark$$

$$C_w = \frac{d^2 I_y}{4} = \frac{(14.19 - 0.78)^2 (133.5)}{4} = 6,000 \text{ in}^6 \checkmark$$

Usando equações derivadas anteriormente:

$$\text{Eq. 23.20;}\ p = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = \sqrt{\frac{E \times 3.6}{2(1+0.3)E \times 6,000}} = \frac{1}{65.9}\left(\frac{1}{\text{in.}}\right)$$

$$GJ = \frac{30 \times 10^6}{2(1+0.3)} \times 3.60 = 41.5 \times 10^6 \text{lbs-in}^2$$

$$\text{Eq. 23.24;}\ \beta = \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x + \frac{\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right) - \sinh\left(\frac{120}{65.9}\right)}{\frac{1}{65.9}\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right]$$

$$= \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x - 62.4 + 20.8 \sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.16 \& 23.25;}\ T_{SV} = GJ\frac{d\beta}{dx} = T\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[1 - \frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

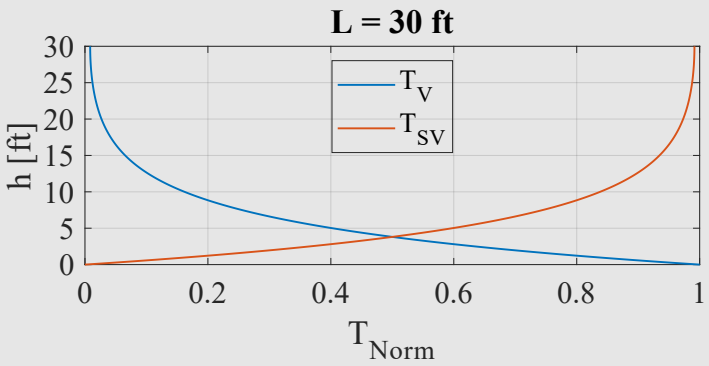
$$\text{Eqs. 23.18 \& 23.26;}\ T_V = -EC_w\frac{d^3\beta}{dx^3} = T\left[\frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[\frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

Se a base era torsionalmente simples, então $T_{SV} = T$, e $\beta = T_X/GJ = T_x/(41.5 \times 10^6)$.

Os seguintes números[a] ilustrar a distribuição de torção normalizada ao longo do eixo. Na verdade, para todos os comprimentos, na base temos $T_V/T = 1$, e $T_{SV}/T = 0$.. À medida que nos afastamos da base, o efeito de contenção diminui, e o impacto de restrição (neste caso) desaparece apenas uma vez $L = 30$ Ft. A partir daí, a torção é totalmente resistida pelo Sait-Venant.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Interno Tensões

Base : $T_{SV} = 0, T_V = T$

$$3M_f = -EI_f \left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_{x=0} = -\frac{EI_f d}{2}\left[\frac{d^2\beta}{dx^2}\right]_{x=0}$$

$$= -\frac{EI_y d}{4}\left[\frac{Tp}{GJ}\tanh(pL)\right] = -\frac{T}{pd}\tanh(pL)$$

$$= -T\left(\frac{65.9}{14.19-0.78}\right)\tanh\left(\frac{120}{65.9}\right) = -4.65T$$

Assumir distribuição linear

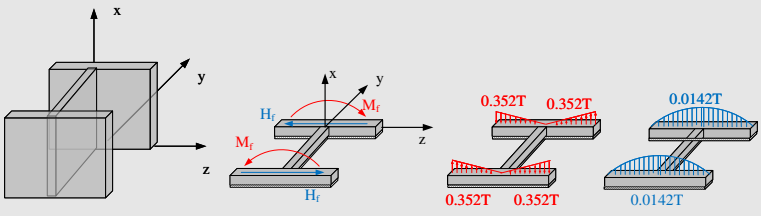
$$\sigma = \pm\frac{M_f}{t_f b_f^2/6} = \pm\frac{6\times 4.65T}{0.783(10.07)^2} = \pm 0.352T$$

Transverso cisalhamento

$$H = \frac{T_V}{d} = \frac{T}{14.19-0.78} = \frac{T}{13.41}$$

Assuma a distribuição parabólica

$$\tau = \frac{3H}{2b_f t_f} = \frac{1.5T}{13.41(10.07\times 0.783)} = 0.0142T$$



Fim livre Das expressões de T_V e.. T_{SV} Nós temos $T_{SV} = 0.687T$ e.. $T_V = 0.32T$

Transverso cisalhamento

$$\tau = 0.32(0.0142T) = 0.00455T$$

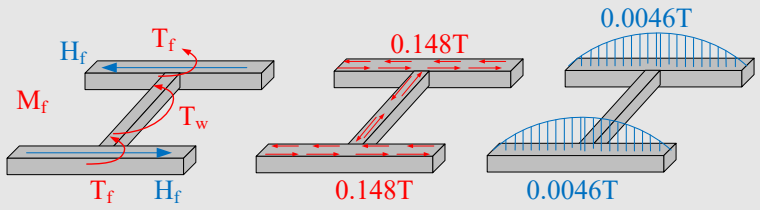
Torsional cisalhamento

$$\tau_{fm} = \frac{t_f T_{SV}}{J} = \frac{0.783(0.68T)}{3.60} = 0.148T \quad \text{Flange}$$

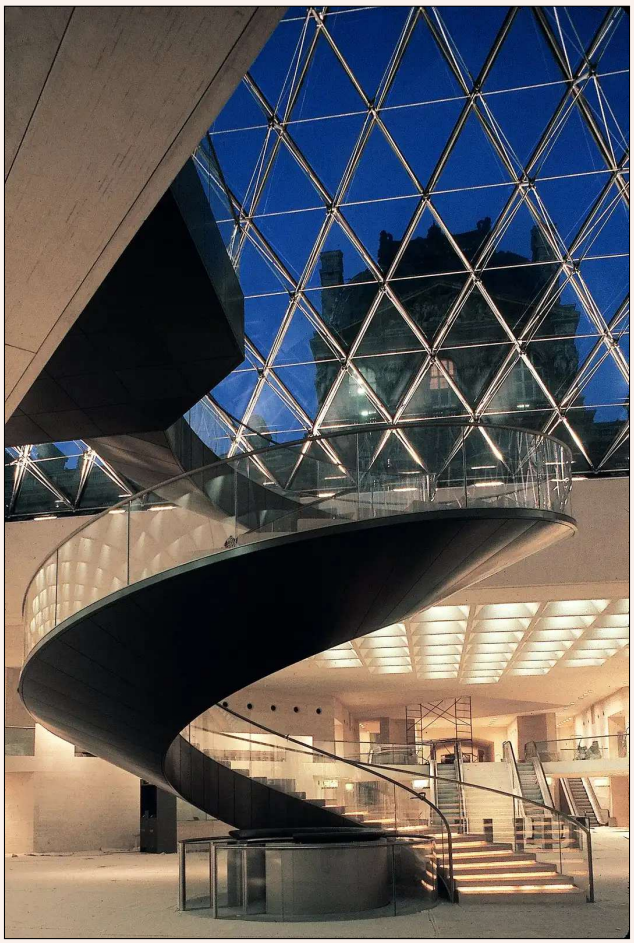
$$\tau_{wm} = \frac{t_w T_{SV}}{J} = \frac{0.450(0.687T)}{3.60} = 0.085T \quad \text{web}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



[a]Gerando MATLAB®O código está dentro §I.2.3.



Museu do Louvre, escadaria. Pei)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 24

Complementar Trabalho virtual

Abstract

O capítulo anterior introduziu métodos geométricos para determinar deflexões, que eram limitados a membros flexurais. Este capítulo adota uma abordagem fundamentalmente diferente, fundamentada na primeira lei da termodinâmica, aplicável a todos os tipos de elementos estruturais (ver Fig. 17.2). Embora muitas vezes referido como "Métodos de Energia" na maioria dos livros didáticos, este capítulo emprega um título mais rigoroso para alinhar com a cobertura detalhada de métodos baseados em energia no Capítulo 48. Finalmente, este capítulo é reforçado com numerosos exemplos que variam de simples a particularmente complexos, demonstrando a aplicação prática desses métodos.

24.1 Introdução 1007
24.2 Derivação simplificada do princípio da complementaridade trabalho virtual 1007
24.2.1 Derivação 1007
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti Reciproca Theorem 1010
24.2.3 Externo trabalho virtual $\delta\overline{W}^*$ 1011
24.2.4 Interno trabalho virtual $\delta\overline{U}^*$ 1011
24.3 Exemplos 1013
24.3.1 Ex 24.1: Viga 1013
24.3.2 Ex 24.2: Pórtico; Deflexões . 1014
24.3.3 Ex 24.3: Pórtico, rotação . . . 1015
24.3.4 Ex 24.4: Suporte flexível . . . 1016
24.3.5 Ex 24.5: Cantilever suportado por cabo 1018
24.3.6 Ex 24.6: Deformação torsional e flexural 1019
24.3.7 Ex 24.7: Flexural e cisalhamento deformações em uma viga 1021
24.3.8 Ex 24.8: Efeitos térmicos em uma viga 1022
24.3.9 Ex 24.9: Pipeline 1023
24.3.10 Ex 24.10: Treliça; Simples . . 1024
24.3.11 Ex 24.11: Treliça; complexo . 1025
24.3.12 Ex 24.12: Treliça com cambero inicial 1026
24.3.13 Ex 24.13: Treliça com secundário tensões 1027
24.3.14 Ex 24.14: Anel circular 1029
24.3.15 Ex 24.15: Primavera 1031



CÓPIA PARA REVISÃO

24.1 Introdução

1 O capítulo anterior se expandiu em um método geométrico para calcular deflexões. No entanto, era uma restrição (limitada a membros flexores) e bastante "elíptica".

2 Este capítulo abordará uma abordagem geral que pode ser aplicada a todos os tipos estruturais, e não se restringe aos sistemas lineares. No entanto, o desenvolvimento do método será "sofomorico", uma derivação mais racional será apresentada em 48.3.1.

3 Uma nota de notação. Este capítulo irá misturar quantidades reais e virtuais. Os últimos são identificados por terem uma barra sobre eles e precedidos pelo δ símbolo (não confundir com derivativo).

24.2 Derivação simplificada do princípio da complementaridade trabalho virtual

24.2.1 Derivação

4 De deve derivar o princípio considerando uma estrutura arbitrária e carga como mostrado na figura 24.1.. Por uma questão de simplicidade, vamos supor (ou considerar) que esta estrutura desenvolve apenas axial interna tensões e deformações (σ e.. ε). A estrutura será submetida a dois tipos de forças:

Virtual forças aplicadas no local A e ao longo da direção (grau de liberdade] onde queremos calcular o deslocamento (ou rotação). É virtual, e seu valor é irrelevante, mas muitas vezes se supõe que seja unidade. As forças virtuais devem estar dentro *equilíbrio*

Real correspondente à carga aplicada externamente, B.

O correspondente deslocamentos deve cumprir com o condições de contorno.

5 Nós vamos extrair expressões para o *trabalho virtual* que é o trabalho feito por força virtual agindo através de um real deslocamento[1].. Isso será realizado através das seguintes sequências:

- Aplique carga virtual apenas em A (obter Eq. 1)[2]
- Aplique carga virtual em A e então aplicar carga real em B (enquanto a carga virtual ainda está ligada).

[1] Ou forças reais agindo através de um virtual deslocamento.
[2] Ou podemos começar aplicando a carga real em B Apenas (obter Eq. 2), e depois aplicar o virtual. A sequência de carga é irrelevante.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

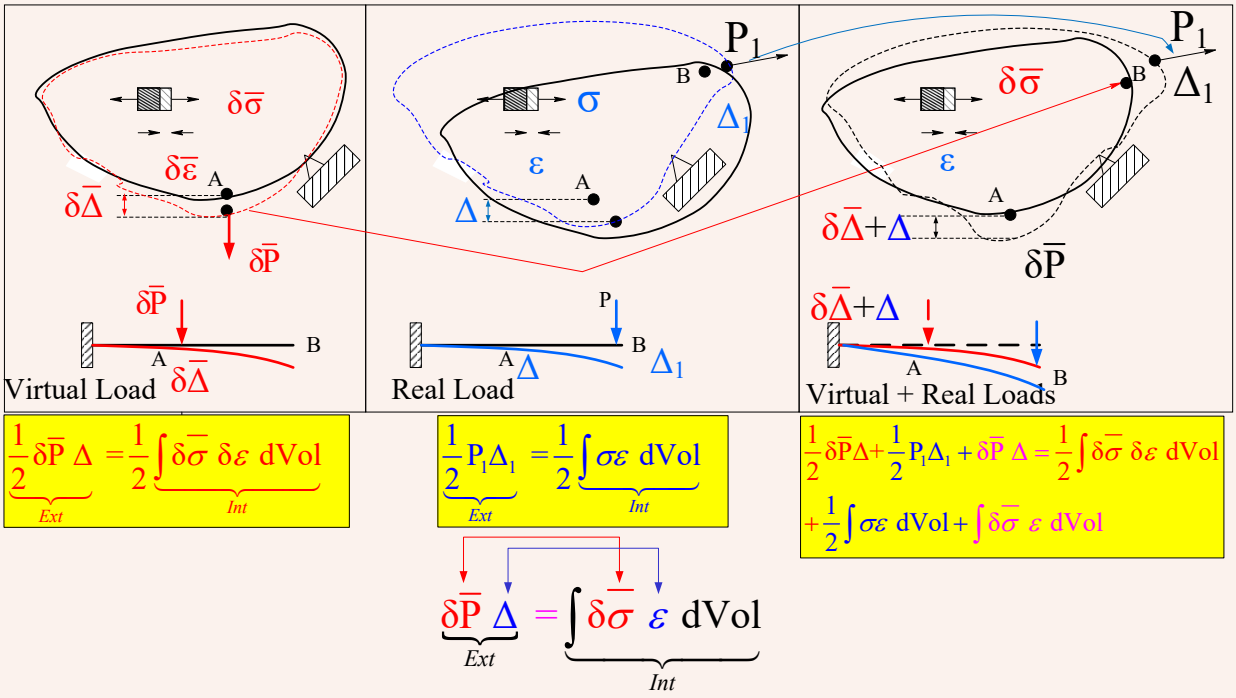


Figura 24.1: Forças virtuais e reais em uma estrutura arbitrária

6 Neste ponto, interrompemos a derivação e nos lembramos de

Definition 24.1: Primeira Lei da Termodinâmica

A taxa de tempo da mudança da energia total (ou seja, soma da energia cinética K e a energia interna U) é igual à soma da taxa de trabalho feito pelas forças externas Nós e a mudança do conteúdo de calor por Hora da unidade H

$$\frac{d}{dt}(K+U) = W_e + H$$

Para um sistema adiabático (sem troca de calor) e se as cargas são aplicadas de forma quase estática (sam energia cinética), a relação acima simplifica para:

$$We = U$$

7 Em nosso caso, o trabalho externo deve ser igual a energia interna. Como resultado:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Quando aplicarmos a carga virtual em A, então o trabalho externo deve ser igual à energia interna deformação sobre todo o volume, então:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{\text{Trabalho virtual externo}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}}\delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\text{dVol}}_{\text{Energia interna de deformação virtual}}$$

   - O 1/2 deriva do fato de que a carga é gradualmente aplicada, subindo de 0 para valor total linearmente. A área sob a curva representa o trabalho externo (tal como para a energia interna deformação).
   - Deformação energia é o trabalho interno e está integrado sobre o volume

2. Da mesma forma, aplicação de carga real em B Dará

$$\underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{\text{Trabalho real externo}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}}\sum\varepsilon\text{dVol}}_{\text{Energia interna de deformação real}}$$

3. Agora, a carga virtual é aplicada primeiro e então aplicamos a carga real (real) em cima do sistema deformado. No entanto, como aplicamos a segunda carga real, $\delta\overline{P}$ Permanecia constante, mas passou por um adicional deslocamento Δ.. Para que haja um *adicional* Trabalho externo igual a $\delta\overline{P}\Delta$ naquele local igual a

$$\delta\overline{P}\Delta = \int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}$$

   Anote ausência de 1/2 termo.. Assim, o trabalho total feito torna-se

4. Eq somando. 1, 2 e.. 3 Nós obtemos:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}^{A}+\overbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}^{B}}_{\text{Uncoupled}}+\underbrace{\overbrace{\delta\overline{P}\Delta}^{A-B}}_{\text{Coupled}} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\text{dVol}}^{A}+\overbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}}\sum\varepsilon\text{dVol}}^{B}}_{\text{Uncoupled}}+\underbrace{\overbrace{\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}}^{A-B}}_{\text{Coupled}}$$

5. Como a energia e o trabalho devem ser os mesmos se as cargas são aplicadas juntas ou separadamente, nós obtemos, de subtrair a soma de Eqs. 2 e.. 1 De.. 4 e generalizando, nós obtemos

$$\underbrace{\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}}_{\delta\overline{U}^*} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\delta\overline{W}^*}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

8 Esta última equação é a chave para o método das forças virtuais. O lado esquerdo é a energia virtual interna deformação $\delta\overline{U}^*$[3].. Da mesma forma, o lado direito é o externo trabalho virtual.

9 A última equação pode ser dita como segue

Definition 24.2: Princípio de (Complementar) Trabalho virtual

Se uma estrutura deformável, em equilíbrio e sustentando um determinado conjunto de cargas, é submetida a uma deformação virtual como resultado de alguma ação adicional, o externo trabalho virtual do conjunto dado de cargas é igual ao interno trabalho virtual do tensões causado pelo conjunto dado de cargas.

24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti Reciproca Theorem

Para o contexto histórico, consultar §11.4.1

10 Lembre-se disso f_{ij}, é o deslocamento no dof i devido a um Unidade de força no Dof j.

$$\text{Displacement at dof } i \text{ due to point load at } i \ \Delta_i = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\text{Displacement at dof } i \text{ due to a unit force at } j \ f_{ij} = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_j}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\text{Displacement at dof } j \text{ due to a unit force at } i \ f_{ji} = \int \delta\overline{M}_j \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x$$

Já que cargas virtuais e reais são unidades $\delta\overline{M}_i = M_i, \delta\overline{M}_j = M_j$, então $f_{ij} = f_{ji}$.

Definition 24.3: Teoria Reciproca de Maxwell-Betti

O desvio de ponto A Na direção 1 devido à carga unitária no ponto B Na direção 2 é igual na magnitude à deflexão do ponto B na direção 2 produzida por uma carga unitária aplicada em A na direção 1.

$$f_{ij} = f_{ji}$$

Ou, por extensão: Se dois conjuntos de carga agem sobre uma estrutura linearmente

[3] Usamos o * para distingui-lo da energia virtual interna deformação $\delta\overline{U}$ obtido a partir do método virtual deslocamento (a ser coberto mais tarde).

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

elástica, o trabalho feito pelo primeiro conjunto de cargas em atuação através do deslocamentos produzido pelo segundo conjunto de carregamentos é igual ao trabalho realizado pelo segundo grupo de cargas na ação através de deslocamentos produzido por O primeiro set.

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$

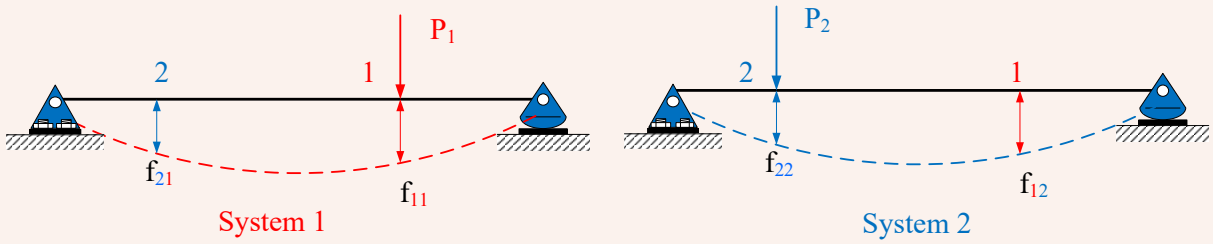


Figura 24.2: Maxwell-Betti teorema recíproco

24.2.3 Externo trabalho virtual $\delta\overline{W}^*$

Para o contexto histórico, consultar §10.3.2.2

11 O externo trabalho virtual para uma estrutura submetida a cargas concentradas ou momentos é

$$\delta\overline{W}^* = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i)\delta\overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n}(\theta_i)\delta\overline{M}_i$$

Note que não existe uma carga virtual distribuída. Lembre-se que todas as quantidades de barras são virtuais e as outras são reais.

24.2.4 Interno trabalho virtual $\delta\overline{U}^*$

12 Da Eq. EQ:Pvwd, a expressão geral para o interno trabalho virtual é

$$\delta\overline{U}^* = \int \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}$$

13 Para sistemas elásticos lineares ($\sum = E\varepsilon$), isso pode ser expandido para se relacionar com forças e momentos,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Membros do Axial

14 Uma série de substituições levaria a

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\text{dVol}} \varepsilon(x)\delta\overline{\sigma}(x)d\text{Vol} \\ \delta\overline{\sigma}(x) &= \frac{\delta\overline{P}^{(e)}(x)}{A} \\ \varepsilon(x) &= \frac{P^{(e)}(x)}{AE} \\ dV &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{P}^{(e)}(x) \underbrace{\frac{P^{(e)}(x)}{AE}}_{\Delta} dx \tag{24.1}$$

15 Note que para um treliça, onde temos n membros, a expressão acima se torna

$$\delta\overline{U}^* = \sum_1^n \delta\overline{P}^{(i)} \frac{P^{(i)}L_i}{A_iE_i}$$

Devemos ter em mente que P é o força axial causado pela carga real e $\delta\overline{P}$ é o força axial causado pela carga virtual. Essas forças são determinadas por uma análise treliça.

16 Note que esta equação é idêntica à dada por Maxwell em §15.5.4.2.

Membros Flexurais

17 Seguindo uma abordagem análoga:

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\text{Vol}} \varepsilon(x) \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}(x)}_{\delta\overline{\sigma}(x)} \text{dVol} \\ \delta\overline{\sigma}_x(x) &= \frac{\delta\overline{M}_z(x)y}{I_z} \\ \varepsilon(x) &= \frac{M_z(x)y}{EI_z} \\ d\text{Vol} &= dA\,dx \\ I_z &= \int_A y^2 dA \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x) \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{\Phi(x)} dx$$

18 De novo, tenha em mente que $M(x)$ é o diagrama do momento causado pela carga real e $\delta\overline{M}(x)$ é o diagrama do momento causado pelo virtual.

19 Evidentemente, nós vamos precisar *expressões analíticas para os momentos*.

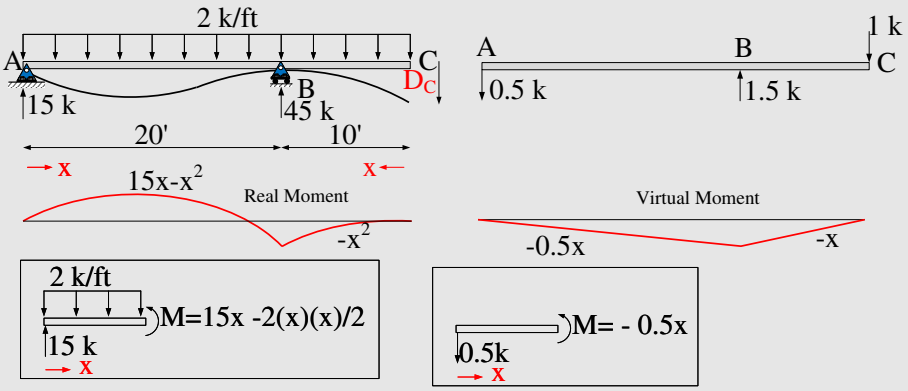
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24.3 Exemplos

24.3.1 Ex 24.1: Viga

Procuramos determinar o desvio no ponto C. $E = 29,000$ KSI, $I = 100$ in^4.



Para o virtual método das forças, precisamos ter duas expressões para o momento, uma devido à carga real, e a outra para o (unidade) virtual um. Os momentos virtuais e reais da viga estão resumidos abaixo

Elemento	$x = 0$	$M(x)$	$\delta\overline{M}(x)$
AB	A	$15x - x^2$	$-0.5x$
BC	C	$-x^2$	$-x$

Aplicando o princípio de trabalho virtual, nós obtivemos

$$\underbrace{\Delta_C \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k(\Delta_C)ft = \int_0^{20}(-0.5x)\frac{(15x - x^2)}{EI}dx + \int_0^{10}(-x)\frac{-x^2}{EI}dx$$
$$= \frac{2,500}{EI}$$

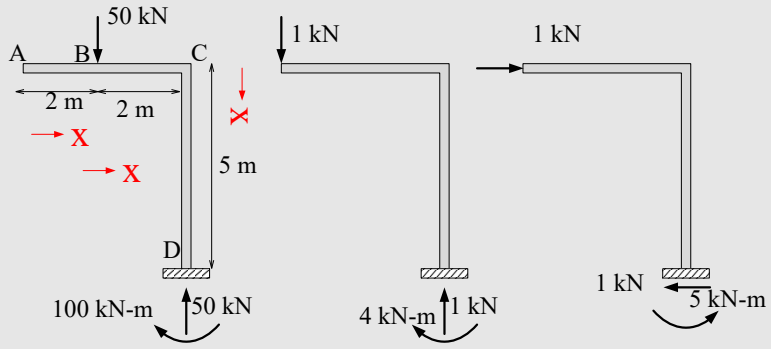
$$(1)k(\Delta_C)\text{ in} = \frac{(2,500)\text{ k}^2 - \text{ ft}^4(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(29,000)\text{ k/ in}^2(100)\text{ in}^4}$$
$$= 1.49\text{ in}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

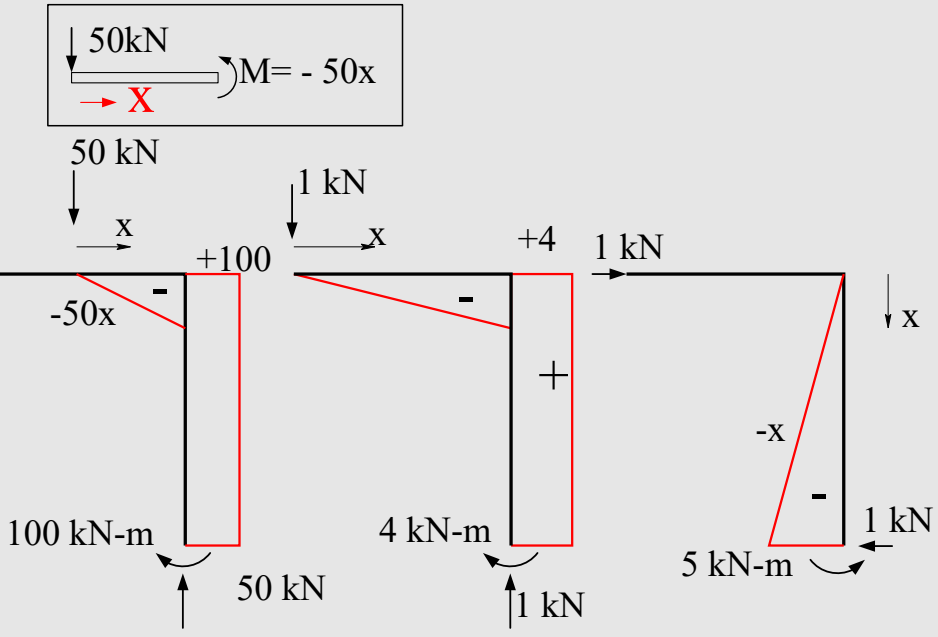
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

24.3.2 Ex 24.2: Pórtico; Deflexões

Para o seguinte pórtico buscamos determinar tanto a deflexão vertical quanto horizontal em A. $E = 200 \times 10^6$ kN/ m^2, $I = 200 \times 10^6$ mm^4.



Para analisar isso pórtico devemos determinar expressões analíticas para os momentos ao longo de cada membro para a carga real e os dois virtuais. Uma carga virtual é uma unidade de carga horizontal em A, e a outra, uma unidade vertical também. Os diagramas de momento para o conjunto necessário de cargas, e que serão analiticamente descritos, são mostrados abaixo



Elemento	$x = 0$	M	$\delta\overline{M}_v$	$\delta\overline{M}_h$
AB	A	0	$-x$	0
BC	B	$-50x$	$-2-x$	0
CD	C	100	4	$-x$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Unidades: KN & m Nós agora substituímos

$$\underbrace{\Delta_v \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_v)m &= \int_0^2 (-x)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (-2-x)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (4)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{2,333\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(2,333)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= 0.058\ \text{m} = 5.8\ \text{cm}\end{aligned}$$

Da mesma forma para a horizontal deslocamento:

$$\underbrace{\Delta_h \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_h)m &= \int_0^2 (0)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (0)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (-x)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{-1,250\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(-1,250)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= -0.031\ \text{m} = -3.1\ \text{cm}\end{aligned}$$

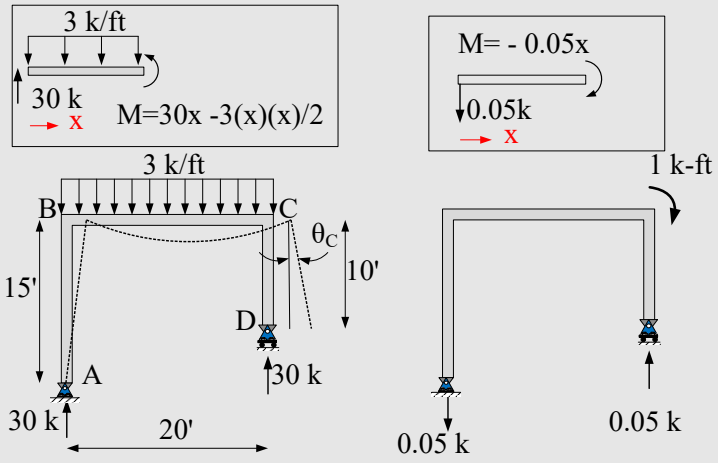
Note que a deflexão horizontal está à esquerda (oposta à direção da força virtual).

24.3.3 Ex 24.3: Pórtico, rotação

Queremos determinar a rotação da articulação C. $E = 29,000$ ksi, $I = 240\ \text{in}^4$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Neste problema a força virtual é um momento unitário aplicado na junta C, $\delta\overline{M}_e$.. Isso causará um momento interno $\delta\overline{M}_i$ expresso como

Elemento	$x = 0$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	$-0.05x$
CD	D	0	0

A substituição produz:

$$\underbrace{\theta_C \delta\overline{M}_e}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k - ft(\theta_C)\text{rad} = \int_0^{20}(-0.05x)\frac{(30x - 1.5x^2)}{EI}dx \quad \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

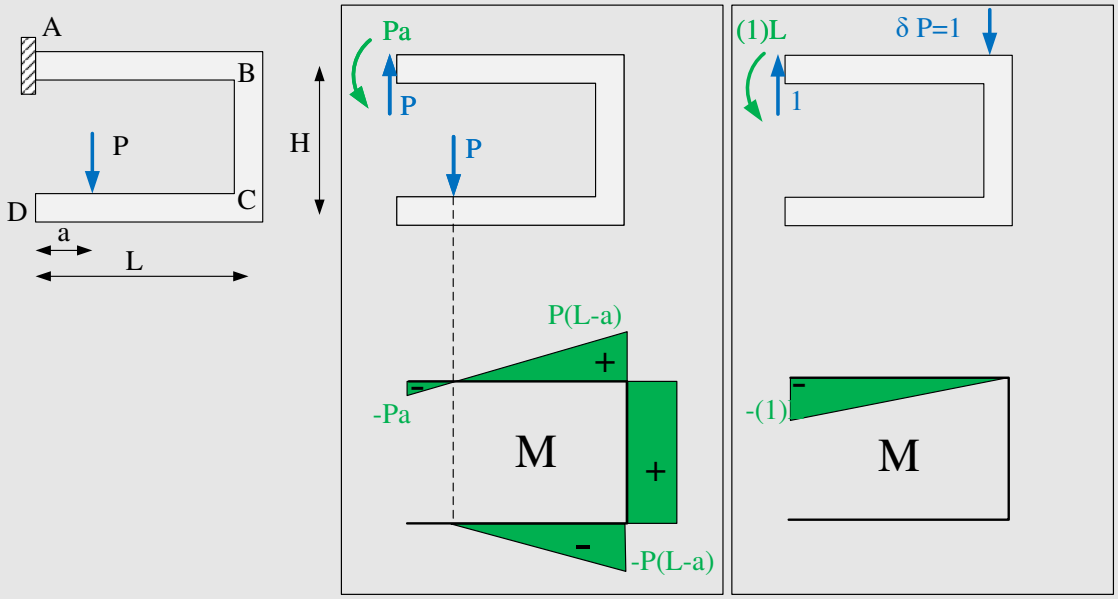
$$= -\frac{(1,000)k^2\ \text{ft}^2(144)\ \text{in}^2/\ \text{ft}^2}{(29,000)\ \text{k}/\ \text{in}^2(240)\ \text{in}^4}$$

$$= -0.021 \text{ radians}$$

24.3.4 Ex 24.4: Suporte flexível

Nós procuramos determinar a De tal forma que a deflexão vertical em B é zero.

CÓPIA PARA REVISÃO



As reações e diagramas de momento correspondentes às forças reais e virtuais são facilmente determinadas e mostradas nos diagramas correspondentes acima e resumidas abaixo em sua forma analítica.

Elemento	$x = 0$ @	M	$\delta\overline{M}$
DE	D	0	0
EC	E	$-Px$ 0	
CB	C	$-P(L-a)$	0
BF	B	$P(L-a-x)$	x
FA	F	Px	$L-a+x$

$$\underbrace{\Delta_B \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}_*} == \int_L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx$$

$$\Delta_B(1) = \int_0^{L-a} \frac{P(L-a-x)x}{EI}dx + \int_0^{a} \frac{-Px(L-a+x)}{EI}dx$$

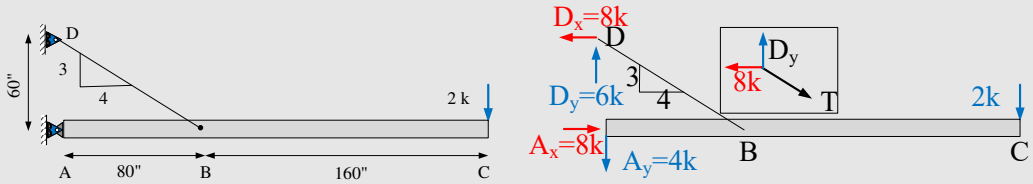
$$\Delta_B = \frac{PL^2}{6EI}(L-3a) \Rightarrow a = \frac{L}{3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24.3.5 Ex 24.5: Cantilever suportado por cabo

Um dossel de entrada é suportado por um cabo feito de alumínio ($A = 1$ Em^2; E=10^7 Psi), e a viga de alumínio também ($A = 10$ Em^2; $I = 171$ Em^4, $E = 10^7$ Psi). Procuramos determinar o deslocamento em C.



Primeiro computadorizamos as forças associadas com a carga real.

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow D_x(60) - 2(240) = 0 \Rightarrow D_x = 8k$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow -D_x + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 8k$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow -A_y + D_y - 2 = 0$$

No entanto, o cabo inclinado só pode carregar forças axiais, assim

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}T - D_y &= 0\\ \frac{4}{5}T - D_x &= 8k\end{aligned}\right\} T = 10k$$

e assim $D_y = 6k$ e.. $A_y = 4k$. Então, nós tabulamos os resultados junto com as expressões analíticas correspondentes para o esforços internos

Elemento	$x = 0$ Em..	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	-8	-4	$-4x$	$-2x$
BC	B	0	0	$2x - 320$	$x - 160$
DB	D	10	5		

CÓPIA PARA REVISÃO

Destas duas mesas

$$\underbrace{\delta\overline{P}\Delta_c}_{\delta W*} = \underbrace{\int_L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx + \int \delta\overline{M}\frac{M}{Ei}dx}_{\delta\overline{U}*}$$

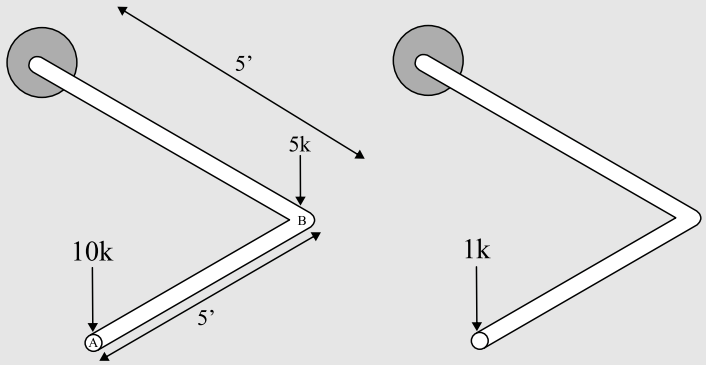
$$\begin{aligned}
(1)\Delta_C &= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{A_cE}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{A_bE}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{EI_b} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{EI_b}dx \\
&= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{(1\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{(10\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)}dx \\
\Delta_C &= 0.0005 + 0.0000256 + 0.0007984 + 0.001597 \\
&= \underbrace{0.000526}_{\text{Axial}} + \underbrace{0.00239}_{\text{flexural}} \\
&= 0.0029\text{in}(\downarrow)
\end{aligned}$$

24.3.6 Ex 24.6: Deformação torsional e flexural

Agora procuramos determinar a deflexão vertical em A na estrutura mostrada abaixo$E = 30,000$ ksi, $I = 144$ in^4, $G = 12,000$ ksi, $J = 288$ in^4)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



1. Neste problema temos tanto a flexão como a torção Deformação. Por isso devemos determinar o momento interno e Distribuição de torção para a carga virtual real e da unidade.
2. Então usaremos a seguinte relação

$$\overbrace{\delta \overline{P} \Delta_A}^{\delta \overline{W}^*} = \overbrace{\underbrace{\int \delta \overline{M} \frac{M}{EI} dx}_{\text{flexura}} + \underbrace{\int \delta \overline{T} \frac{T}{GJ} dx}_{\text{Torção}}}^{\delta \overline{U}^*}$$

3. O momento e as expressões de torção são dado por

Elemento	$x = 0$	M	$\delta \overline{M}$	T	$\delta \overline{T}$
AB	A	$10x$	x	0	0
BC	B	$15x$	x	50	5

4. Substituindo,

$$\begin{aligned}
\delta \overline{P} \Delta_A &= \int \delta \overline{M} \frac{M}{EI} dx + \int \delta \overline{T} \frac{T}{GJ} dx \\
1 \Delta_A &= \int_0^5 x \frac{10x}{EI} dx + \int_0^5 x \frac{15x}{EI} dx + \int_0^5 (5) \frac{50}{GJ} dx \\
&= \frac{(1,042)(1,728)}{(30,000)(144)} + \frac{(1,250)(1,728)}{(12,000)(288)} \\
&= \underbrace{0.417}_{\text{Flexure}} + \underbrace{0.625}_{\text{Torsion}} \\
&= 1.04 \text{ in}
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24.3.7 Ex 24.7: Flexural e cisalhamento deformações em uma viga

Determine a deflexão de um cantilevered viga, de comprimento L sujeito a uma força final P devido à flexão e Deformações. Assuma $G = 0.4E$, e um quadrado sólido viga seção transversal.

1. A equação trabalho virtual é

$$\underbrace{\delta\overline{P}}_{1} \cdot \Delta = \int_0^L \delta\overline{M} d\phi + \int_0^L \delta\overline{V}\gamma_{xy} \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx + \int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x$$

2. O primeiro rendimento integral para $M = Px$, e $\delta\overline{M} = (1)(x)$

$$\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{P}{EI}\int_0^L x^2 dx$$
$$= PL^3/3EI$$

3. The second integral represents the A contribuição da ação de cisalhamento para o total virtual interno trabalho e, portanto, para o total deslocamento.
4. Tanto o real cisalhamento V E virtual cisalhamento $\delta\overline{V}$ são constantes ao longo do comprimento de o membro, daí

$$\int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{GA}\int^L 01(P)\mathrm{d}x = \frac{\lambda PL}{GA}$$

5. Desde então λ= 1,2 para um quadrado viga; Por isso

$$1 \cdot \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{1.2PL}{GA}$$
$$= \frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{3.6}{0.4A}\right] = red\frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{9}{A}\right]$$

6. Para um quadrado de dimensão h

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{e} \quad A = h^2$$

Então..

$$\Delta = \frac{PL}{3E}\left[\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right] = \frac{3PL}{Eh^2}\left[\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right]$$

7. Escolhendo L = 20 Ft e h = 1.5 ft (L/h = 13.3)

$$\Delta = \frac{3PL}{Eh^2}[1.33\left(\frac{20}{1.5}\right)^2 + 1] = \frac{3PL}{Eh^2}(237 + 1)$$

Assim, a deformação flexural é 237 vezes o cisalhamento deslocamento. Esta comparação revela por que normalmente negligenciamos a deformação cortante em vigas. Como a viga fica mais curto ou mais profundo, ou como L/h diminui, a deformação flexural diminui em relação ao cisalhamento deslocamento. Em.. L/h = 5, a deformação flexural reduziu-se para $1.33(5)^2$ = 33 vezes o cisalhamento deslocamento.

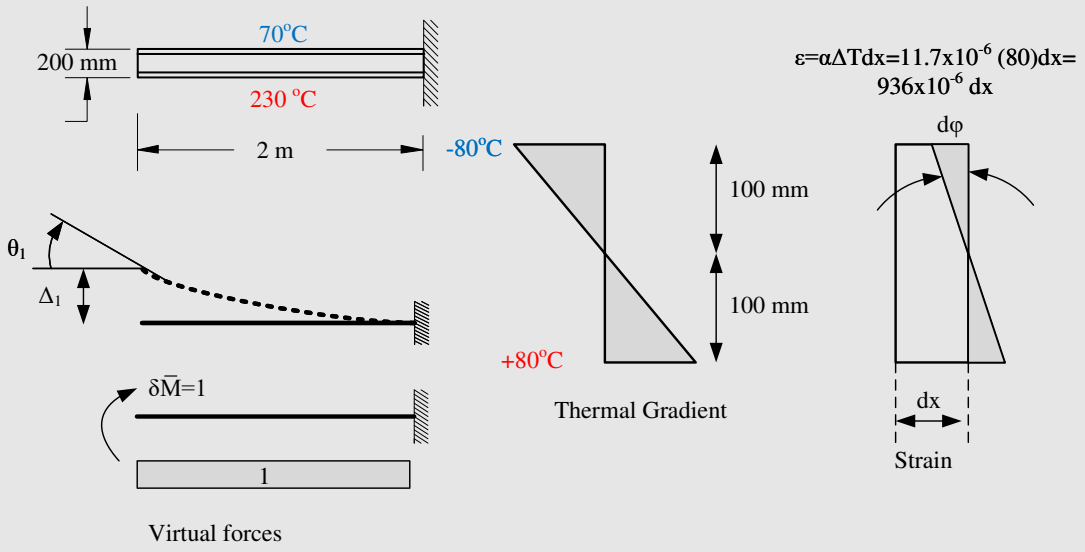
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24.3.8 Ex 24.8: Efeitos térmicos em uma viga

A seção seguinte é reproduzida de White, Gergely e Sexmith, 1976 Structural Engineering.

Procuramos determinar o ângulo de rotação, θ_1, no final de viga causado pelo efeito da temperatura no seguinte cantilever viga.



A viga é um aço, seção de flange larga, 2 m de comprimento e 200 mm de profundidade, a temperatura uniforme original do vigas foi 40°C.

1. A força virtual externa conformando-se com o real desejado deslocamento θ_1 É um momento $\delta\overline{M} = 1$ Na ponta do Cantilever, produzindo um termo de trabalho externo do momento vezes rotação. O sistema de força virtual interna para este cantilever é um uniforme Momento $\delta\overline{M}_{int} = 1$.
2. A verdadeira deformação interna resulta de: (a) a temperatura média viga de 150°C, que é 110°C acima do original temperatura, e (b) o gradiente de temperatura de 160°C através da profundidade da viga.
3. A primeira parte do efeito térmico produz apenas um Alongamento da viga e não entra na equação de trabalho desde o O carregamento virtual não produz nenhum força axial correspondente a uma mudança axial em comprimento da viga.
4. O segundo efeito (gradiente térmico) produz Rotação $d\phi$, e um termo interno trabalho virtual de $\int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x$.
5. Nós determinamos o valor de $d\phi$ considerando o extremo Fibra térmica deformação como

CÓPIA PARA REVISÃO

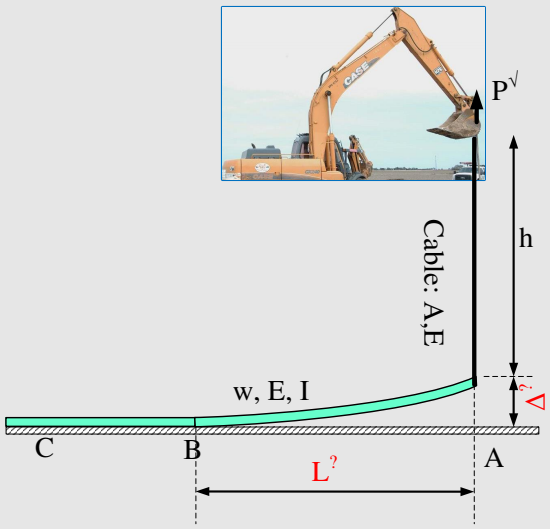
mostrado acima. A rotação angular no comprimento dx é a fibra térmica extrema deformação dividida pela metade da profundidade viga, ou

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_1 &= \int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L (1)\frac{\alpha(T_b - T_t)}{h}\mathrm{d}x \\ &= \frac{(11.7\times 10^{-6})m/m(230-70)^o\mathrm{C}(2)\ \mathrm{m}}{(0.2)\ \mathrm{m}} \\ &= 0.01872 \text{ radians} \end{aligned}$$

6. Este exemplo levanta os seguintes pontos:
   (a) O valor de θ_1 Seria o mesmo para qualquer forma de 200 mm de profundidade aço viga que tem seu linha neutra de dobra em profundidade média.
   (b) Curvatura é produzida apenas por gradiente térmico e é independente de Valores absolutos de temperatura.
   (c) O cálculo das rotações pelo método de forças virtuais é simples e direto; A força virtual aplicada é um momento de atuação no ponto onde a rotação deve ser calculada.
   (d) Deformação angular interna $d\phi$ foi calculado para um Efeito que não é induzido por carga tensões. A extensão do método de As forças virtuais para tratar o inelástico deslocamentos é óbvio - tudo que precisamos O conhecimento é um método para determinar as deformações internas inelásticas.

24.3.9 Ex 24.9: Pipeline

Suponhamos que somos um engenheiro de campo... colocando uma tubulação de auto-peso w (por unidade de comprimento), momento de inércia I, módulo elástico E_p, e Poisson Ration ν.. Uma extremidade do oleoduto BC está deitado no chão, a outra perna AB é para ser levantada uma altura Δ por uma força $P^{\checkmark}$ aplicado através de um cabo de comprimento h, área A e módulo elástico E_c



O operador de guindaste está nos pedindo para

CÓPIA PARA REVISÃO

1. Determine (em termos da força conhecida) $P^{\checkmark}$) o comprimento $L^{?}$ do oleoduto que se separa do chão (AB).
2. Desenhe o diagrama cisalhamento e momento da parte levantada do gasoduto.
3. Compute o deslocamento $\Delta^{?}$ de ponto A em termos de: P, w, L, h, E, A, e I.

A solução é a seguinte

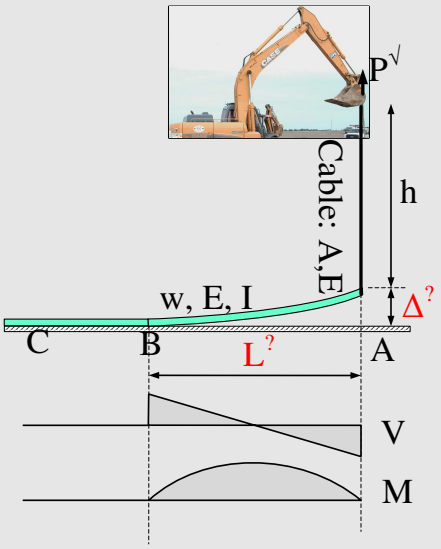
1. Em.. B A curvatura é zero$d\theta/dx = 0$Por isso, momento zero.

$$PL = wL^2/2 \Rightarrow L = 2P/w$$

e apoio direito em B é uma dobradiça. Nota no ponto de separação:

$$+ve \uparrow \sum F_Y = 0; P - wL + R_B = 0; \Rightarrow R_B = w\left(\frac{2P}{w}\right) - P = P \uparrow$$

Nós temos uma força singular de P



2. Deflexão tomando $x = 0$ Em A:

$$\delta\overline{P}\Delta_C = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx + \delta\overline{P}^{(e)}\frac{Ph}{AE}$$

$$M(x) = Px - w\frac{x^2}{2}$$

$$\delta\overline{M}(x) = (1)x$$

$$\delta\overline{P} = 1$$

$$(1)\Delta_C = \int_0^L x\frac{Px - w\frac{x^2}{2}}{EI}dx + (1)\frac{Ph}{AE}$$

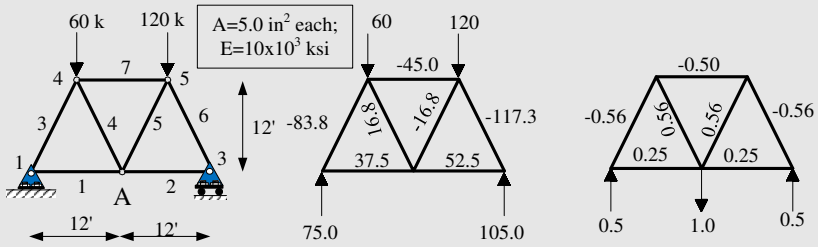
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{Ph}{AE}$$

24.3.10 Ex 24.10: Treliça; Simples

Procuramos determinar a deflexão no nó A do seguinte

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



O resumo dos cálculos são expressos na tabela seguinte

Membro	$\delta\overline{P}^{(e)}$ Kips	$P^{(e)}$, Kips	L, ft	A, in^2	E, KSI	$\delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$
1	+0.25	+37.5	12	5.0	10×10^3	$+22.5\times10^{-4}$
2	+0.25	+52.5	12	5.0	10×10^3	$+31.5\times10^{-4}$
3	-0.56	-83.8	13.42	5.0	10×10^3	$+125.9\times10^{-4}$
4	+0.56	+16.8	13.42	5.0	10×10^3	$+25.3\times10^{-4}$
5	+0.56	-16.8	13.42	5.0	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5.0	10×10^3	$+176.6\times10^{-4}$
7	-0.50	-45.0	12	5.0	10×10^3	$+54.0\times10^{-4}$
						$+410.5\times10^{-4}$

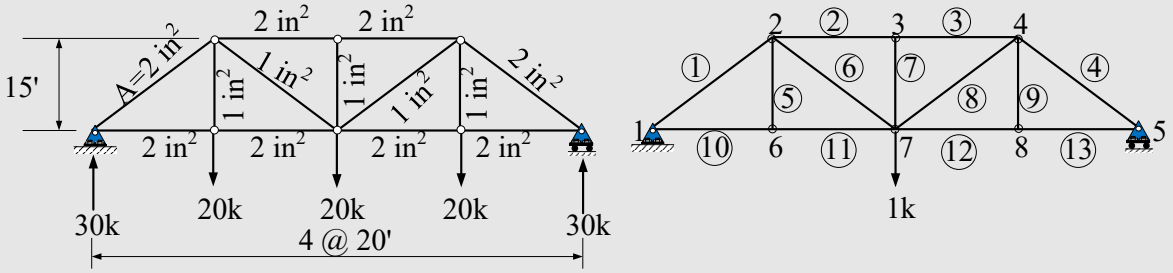
Assim

$$(\delta\overline{P})\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \sum_1^7 \delta\overline{P}^{(e)}\frac{PL}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (410.5\times10^{-4})\frac{\text{k}^2\ \text{ft}}{\text{in}^2\ \text{k}/\ \text{in}^2}(12\ \text{in}/\ \text{ft}) = 0.493\ \text{in}$$

24.3.11 Ex 24.11: Treliça; complexo

Procuramos determinar a deflexão vertical da articulação 7. $E = 30,000$ ksi.



Duas análises são necessárias. Um com a carga real, e o outro usando uma unidade de carga vertical

CÓPIA PARA REVISÃO

na junta 7. Os resultados dessa análise estão resumidos abaixo. Note que a vantagem foi tomada da carga simétrica e estrutura.

Membro	A in^2	L ft	$P^{(e)}$ k	$\delta\overline{P}^{(e)}$ k	$\frac{\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2	n	$\frac{n\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1,037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
11 & 12	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693.0
2& 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1,417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Total							4,220.3

$$\underbrace{\Delta\delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

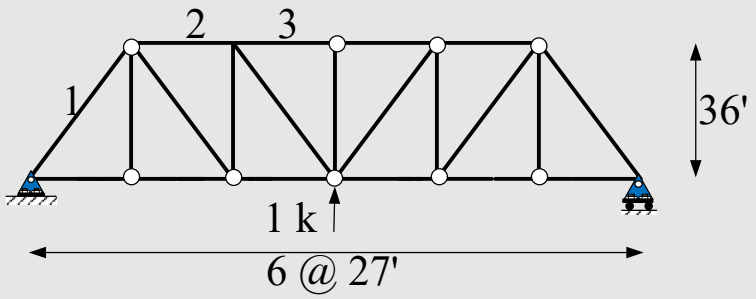
$$= \sum \delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$$

$$(1)\ \mathrm{k}(\Delta)\ \mathrm{in} = \frac{(4,220.3)\ \mathrm{k}^2\ \mathrm{ft}/\ \mathrm{in}^2(12)\ \mathrm{in}/\mathrm{ft}}{30,000\ \mathrm{ksi}}$$

$$= 1.69\ \mathrm{in}$$

24.3.12 Ex 24.12: Treliça com cambero inicial

É desejado fornecer 3 dentro. de cambero no centro do treliça mostrado abaixo, fabricando as endposts e os membros de acorde superior adicionalmente longo. Quanto o comprimento de cada endpost e cada painel do acorde superior deve ser aumentado?



Primeiro, assumimos que cada endpost e cada seção do acorde superior é aumentada 0,1 em.

CÓPIA PARA REVISÃO

Membro	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}$	ΔL	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}\Delta L$
1	+0.625	+0.1	+0.0625
2	+0.750	+0.1	+0.0750
3	+1.125	+0.1	+0.1125
			+0.2500

O que dá

$$(1)\ \mathrm{k}(\Delta)\ \mathrm{in} = (2)(0.250)\ \mathrm{k\ in} \Rightarrow \Delta = 0.50\ \mathrm{in}$$

Como a estrutura é linear e elástica, o aumento de comprimento necessário para cada seção será

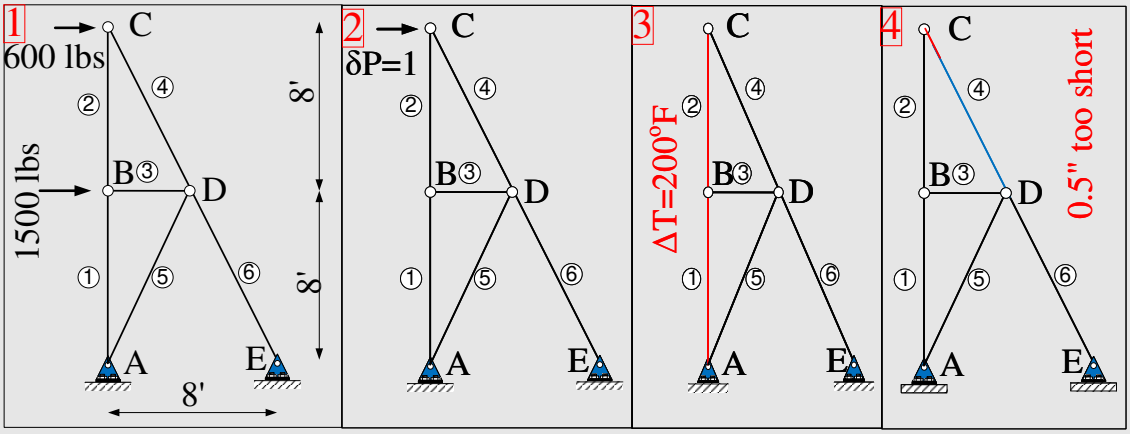
$$\left(\frac{3.0}{0.50}\right)(0.1) = 0.60\ \mathrm{in}$$

Se usarmos o valor prático de 0,625 em, o camber teórico será

$$\frac{(6.25)(0.50)}{0.1} = 3.125\ \mathrm{in}$$

24.3.13 Ex 24.13: Treliça com secundário tensões

Procuramos determinar a horizontal deslocamento do nó C sob várias condições de carga: a) Forças (1); 2) aumento de temperatura em dois mebers (3); E erro de fabricação (4). Forças de membros computadas separadamente serão adequadamente tabuladas.



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Forças Laterais

Membro	$\delta\overline{P}$ (lbf)	P (lbf)	L (in)	AE	$\delta\overline{p}\frac{PL}{AE}$
1	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
2	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
3	0	-1,500.0	48.00	AE	0
4	-2.24	-1,341.6	107.33	AE	322,560/AE
5	0	1,677.0	107.33	AE	0
6	-2.24	-3,018.7	107.33	AE	725,760.0/AE
					1,509,120/AE

Por isso $\Delta_C = \frac{1,509,120 \text{ lb-in}}{AE} \rightarrow$

Carga de Temperatura

Membro	L (in)	α (1/°F)	ΔT (in)	$\Delta L = \alpha\Delta T L$ (in)	$\delta\overline{P}$ (lbf)	$\delta\overline{P}\Delta L$ (lbf in)
1	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
2	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
3	48	10^{-6}	0	0	0	0
4	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
5	107.33	10^{-6}	0	0	0	0
6	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
						0.0768

Desde então $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 0.0768$ in $\rightarrow$

Erro de fabricação

Membro	L (in)	ΔL (in)	$\Delta\overline{P}$ (lbf)	$\Delta\overline{P}\delta L$ (lbf in)
1	96	0	2	0
2	96	0	2	0
3	48	0	0	0
4	107.33	-0.5	-2.24	1.12
5	107.33	0	0	0
6	107.33	0	0	0
				0.0768

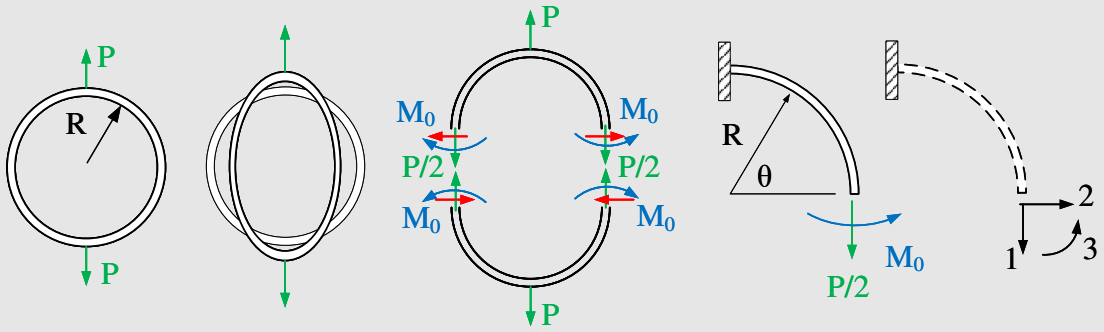
Desde então $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 1.12$ in $\rightarrow$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

24.3.14 Ex 24.14: Anel circular

Um anel é submetido a duas forças opostas concentradas P.. Procuramos determinar o alongamento vertical Δ_y, e a contração horizontal Δ_x.



Strength of materials
Den Hartog, 1961 Invocando simetria, cortamos o anel em dois, e desenhamos os diagramas de corpo livre,

1. Se assumirmos que o força cortante está em uma direção para uma das quatro extremidades, e desenhar as outras forças de acordo. Por inspeção, notamos que a metade superior se expandirá lateralmente, enquanto no mesmo local, ela se contrairá no anel inferior. Assim, os forças cortantes são iguais a zero.
2. Os forças axiais são iguais a $P/2$, e assim ficamos com os momentos para determinar.
3. Então, analisaremos apenas um quadrante submetido a uma força vertical de $P/2$ e um momento M_0, ainda a ser determinado em termos de R e.. P.

A solução é a seguinte:

1. Momentos positivos, se causar tensão dentro de mim:

Carga vertical de $P/2$	$M_{P/2}$	$-\frac{PR}{2}(1-\cos\theta)$
Fim do momento (no sentido horário)	M_0	M_0
Unidade virtual força vertical (para baixo)	$\delta\overline{M}_V$	$-R(1-\cos\theta)$
Unidade virtual força horizontal (para fora)	$\delta\overline{M}_H$	$R\sin\theta$
Rotação da unidade virtual	$\delta\overline{M}_M$	1

2. Rotação devido à carga vertical:

$$f_{32}=\theta_{P/2}=\int \delta M_M \frac{M_{P/2}}{EI}Rd\theta=-\int_0^{\pi/2}(1)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta=-\frac{PR^2}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta$$
$$=-\frac{PR^2}{2EI}\left[\theta+\sin\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

3. Rotação devido ao momento M_0

$$f_{33} = \theta_{M_0} = \int M_M \frac{M_0}{EI} R d\theta = \int_0^{\pi/2} (1) \frac{M_0}{EI} R d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{M_0 R}{EI}$$

4. Da simetria a soma das rotações deve ser igual

$$\theta_{P/2} + \theta_{M_0} = 0$$
$$-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\frac{M_0 R}{EI} = 0$$
$$M_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) PR = 0.182PR \tag{24.2}$$

5. Deflexão vertical devido à carga vertical:

$$\begin{aligned} f_{22} = \Delta^V_{P/2} &= \int \delta M_V \frac{M_{P/2}}{EI} = \int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta) R d\theta \\ &= \frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= \frac{PR^3}{2EI}\left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) \end{aligned}$$

6. Deflexão horizontal devido à carga vertical

$$\begin{aligned} f_{12} = \Delta^H_{P/2} &= \int \delta M_H \frac{M_{P/2}}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R\sin\theta \frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta) R d\theta \\ &= -\frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ &= -\frac{PR^3}{2EI}\left[-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{PR^3}{4EI} \end{aligned}$$

7. Deflexão vertical devido ao momento

$$\begin{aligned} f_{23} = \Delta^V_{M_0} &= \int \delta M_V \frac{M_0}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta) M_0 R d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

8. Deflexão horizontal devido ao momento

$$\begin{aligned} f_{13} = \Delta^H_{M_0} \int \delta M_H \frac{M_0}{EI} &= \int_0^{\pi/2} R\sin\theta M_0 R d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

9. Deflexão horizontal total

$$\Delta^H = 2(\Delta^H_{P/2} + \Delta^H_{M_0}) = 2\left[-\frac{PR^3}{4EI} + \frac{M_0R^2}{EI}\right]$$

Substituindo a solução para M_0 De Eq. 24.2

$$\Delta^H = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = -0.135\frac{PR^3}{EI} \text{ Contraction}$$

10. Deflexão vertical total

$$\Delta^V = 2(\Delta^V_{P/2} + \Delta^V_{M_0} = 2\left[\frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) + \frac{M_0R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Substituindo a solução para M_0 De Eq. 24.2

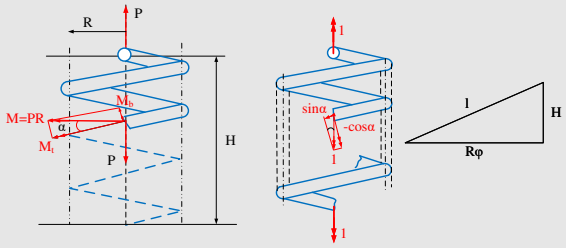
$$\Delta^V = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0.150\frac{PR^3}{EI} \text{ Elongation}$$

11. Note que introduzimos uma notação que será usada mais tarde f_{ij} para um deslocamento em direção i devido a uma força na direção j, resultando em

$$\begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Este não é um matriz de flexibilidade ainda como as forças aplicadas não são unidade, e o primeiro pilar está faltando (sem força horizontal aplicada).

24.3.15 Ex 24.15: Primavera



Uma mola helicoidal com ângulo de hélice α e raio de bobinas R é esticado pela força P.. Procuramos determinar a mudança de altura e diâmetro da mola, e também o número de bobinas.

Nós tratamos a mola como uma vara tridimensional. Em cada seção de uma bobina da mola esticada há uma torção $M_t = PR\cos\alpha$ e um momento $M_b = PR\sin\alpha$.

1. Primeiro determinamos o aumento da altura da primavera

$$\Delta H = \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI} ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{EI} ds$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Onde $\delta\overline{M}_b$ e.. $\delta\overline{M}_t$ são os momentos de flexão e torção devido às forças virtuais unidade aplicada in-lieu das forças P e estão empatados para

$$\delta\overline{M}_b = R\sin\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = R\cos\alpha$$

Assim, após a substituição e integração

$$\Delta H = \frac{PR^2 l}{EI}\sin^2\alpha + \frac{PR^2 l}{GJ}\cos^2\alpha \tag{24.3}$$

Onde l é o comprimento total das bobinas na mola.

2. Vamos achar o ângulo através do qual a extremidade superior da mola gira em relação à extremidade inferior no plano horizontal. Assim, aplicamos momentos unitários ao final da primavera:

$$\delta\overline{M}_b = -\cos\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = \sin\alpha$$

e..

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI}ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{GJ}ds \\ &= PRl\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \tag{24.4}$$

3. Considerando a mola desembrulhada, temos

$$R^2\phi^2 + H^2 = l^2$$

Pegamos o diferencial, e já que l permanece constante

$$2R\phi^2\Delta R + R^2 2\phi\Delta\phi + 2H\Delta H = 0$$

onde neste caso Δ é o incremento do parâmetro (finito) correspondente. A partir desta expressão que obtivemos

$$\Delta R = -\frac{R}{\phi}\Delta\phi - \frac{H}{R\phi^2}\Delta H$$

4. Substituindo por.. $\Delta\phi$ e.. ΔH dá

$$\Delta R = -\frac{PR^2 l}{\phi}\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{PHRl}{\phi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2\alpha}{GJ}\right) \tag{24.5}$$

5. Do triângulo segue-se que

$$l = \frac{\phi R}{\cos\alpha}, \qquad H = \phi R\tan\alpha$$

Nós também temos

$$\phi = 2\pi n, \qquad \Delta\phi = 2\pi\Delta n$$

Onde n é o número de bobinas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6. Eliminando l, H, e ϕ De Eq. 24.3, 24.4 e.. 24.5 dá

$$\Delta H = \frac{PR^3 n 2\pi}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2}{GJ}\right)$$
$$\Delta n = PR^2 n\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha$$
$$\Delta R = -\frac{2PR^3\sin\alpha}{GJ} + \frac{PR^3}{EI}\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)$$

7. Para uma mola feita de fio redondo de diâmetro d, então

$$GJ = G\frac{\pi d^4}{32}$$
$$EI = 2G(1+\nu)\pi\frac{d^4}{64} = G(1+\nu)\frac{\pi d^4}{32}$$

E nós obtemos

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}\frac{1+\nu\cos^2\alpha}{(1+\nu)\cos\alpha}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\sin\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{\sin\alpha}{1+\nu}\frac{1+2\nu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Os sinais na frente dos lados direito das expressões acima indicam que durante a extensão da mola seu comprimento aumenta ($\Delta H > 0$), o número de bobinas aumenta ($\Delta n > 0$), e o raio diminui ($\Delta R < 0$).

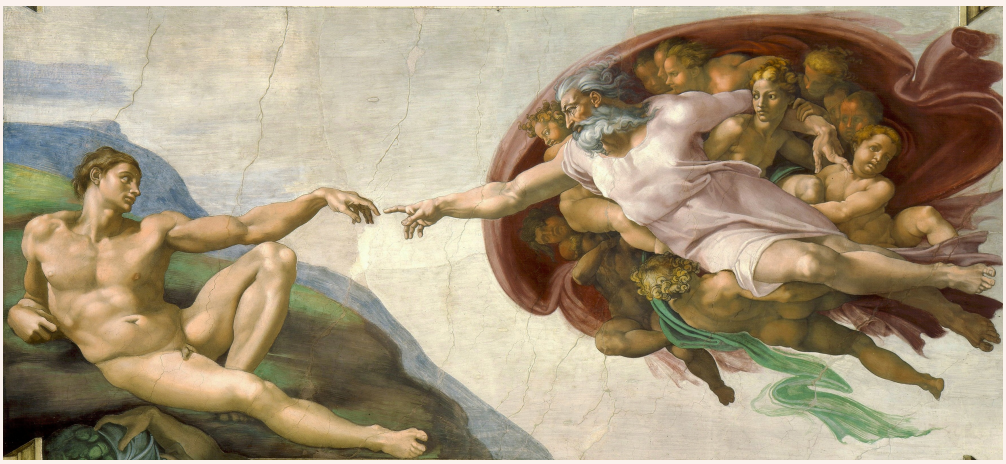
8. Se te Ângulo α é pequeno, então

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{1+2\nu}{1+\nu}\alpha$$

Por favor, consulte Exemplo 22.3.2 Também.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A Criação de Adão, Michelangelo, Fresco, Capela Sistina, Cidade do Vaticano.

Uma metáfora poderosa para trabalho virtual, como as mãos quase tocando simbolizam um infinitesimal deslocamento - um conceito central em trabalho virtual onde imaginado, pequenas perturbações ajudam a analisar o equilíbrio.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

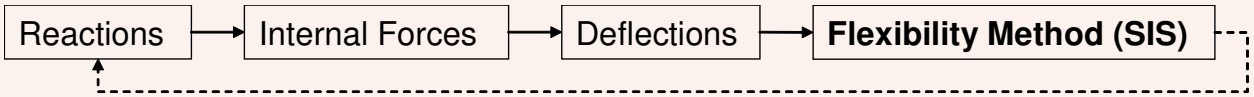
Capítulo 25

Método

Abstract

Este capítulo aborda a solução de estruturas estaticamente indeterminadas usando o método flexibilidade (também conhecido como método baseado em força) que não se presta à implementação do computador. O método envolve converter a estrutura estaticamente indeterminada em uma estrutura primária estaticamente determinada, removendo um número suficiente de suportes ou esforços internos. O deslocamentos desta estrutura primária são então calculados sob as cargas externas dadas. Em seguida, as forças unitárias são aplicadas uma de cada vez nos locais onde os suportes ou esforços internos foram removidos, e o resultado deslocamentos devido a essas forças unitários são calculados. Equações de compatibilidade são formuladas e resolvidas usando o deslocamentos das cargas reais e as forças unitárias para garantir que a estrutura geral permaneça compatível e em equilíbrio. Ao resolver estas equações de compatibilidade, as forças redundantes desconhecidas são determinadas, e usando essas forças, calculam-se as últimas esforços internos e deslocamentos para a estrutura original estaticamente indeterminada. O capítulo começa abordando as vantagens de estruturas estaticamente indeterminadas. Então, seguindo alguns exemplos ilustrativos simples introduzem o método que finalmente é formalizado. Também inclui uma breve cobertura da Equação dos Três Momentos. O capítulo termina com numerosos exemplos de complexidade aumentada.

25.1 Introdução 1036
25.2 O método força/flexibilidade 1041
25.2.1 Exemplos 1043
25.3 Equações de três momentos 1062
25.3.1 Ex 25.9: Continuando viga . 1065
25.3.2 Ex 25.10: Continuando viga 1066



Para o contexto histórico, consultar §11.4.5

CÓPIA PARA REVISÃO

25.1 Introdução

1 Uma estrutura estaticamente indeterminada tem mais desconhecidos do que equações de equilíbrio (e equações de condições, se aplicável).

2 As vantagens de uma estrutura estaticamente indeterminada são:

Aumento da redundância: Estruturas estaticamente indeterminadas têm mais suportes e conexões do que as necessárias para manter o equilíbrio. Esta redundância significa que se um suporte ou membro falhar, a carga pode ser redistribuída para outros suportes ou membros, aumentando a segurança geral da estrutura e confiabilidade.

Distribuição de Carga Melhorada: Estas estruturas distribuem cargas mais uniformemente por toda a estrutura, reduzindo a probabilidade de falha localizada. Esta distribuição uniforme de tensão e deformação pode levar a um uso mais eficiente e econômico dos materiais.

Maior Rigidez: Estruturas estaticamente indeterminadas tendem a ser mais rígidas porque resistem melhor à deformação sob carga. Este aumento rigidez pode ser vantajoso em aplicações onde a deflexão deve ser minimizada, como em pontes ou edifícios altos.

Desempenho Estrutural Melhorado: Por terem múltiplos caminhos de carga, essas estruturas podem lidar melhor com cargas dinâmicas, vibrações e impactos. Esta característica é particularmente importante em estruturas submetidas a cargas variáveis ao longo do tempo, como as causadas pelo vento, tráfego ou atividade sísmica.

Estética e Design. Os suportes adicionais e membros podem permitir desenhos mais complexos e esteticamente agradáveis. Arquitetos e engenheiros podem criar estruturas inovadoras com formas e formas únicas que podem não ser possíveis com projetos estaticamente determinados.

Otimização de Material: Com uma melhor distribuição de carga e rigidez, os materiais podem ser usados com mais eficiência. Esta otimização pode resultar em estruturas mais leves que usam menos material sem comprometer a força e segurança.

Melhor resposta aos assentamentos e mudanças de temperatura: Estruturas estaticamente indeterminadas podem acomodar melhor os assentamentos diferenciais de suportes e expansões térmicas ou contrações. Esta adaptabilidade pode evitar rachaduras e outros danos que podem ocorrer em estruturas estaticamente determinadas.

Segurança aumentada: A redundância e capacidade de redistribuir cargas aumentam a segurança geral da estrutura. Isto é particularmente crítico em infra-estruturas críticas, como pontes, edifícios e outras estruturas essenciais onde o fracasso pode ter graves consequências.

3 A única desvantagem é que é mais complicado analisar.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4 Métodos de análise de estruturas estaticamente indeterminadas *Deve Satisfazer* Três exigências

1. Equilíbrio de forças
2. Relações entre força e elasticidade linear neste curso).
3. Compatibilidade de deslocamentos (i.e. Sem descontinuidade)

5 Isso pode ser conseguido através de duas classes de solução

Força ou Flexibilidade método, este capítulo

Deslocamento ou Rigidez método que será coberto em Capítulos 44 e.. 27.. O primeiro cobrirá métodos baseados em mãos (distribuição do movimento e deflexão da inclinação) e o outro um computador baseado em computadores.

Exemplo ilustrativo 1

6 O método flexibilidade é primeiramente ilustrado pelo seguinte problema de uma estrutura do cabo estaticamente indeterminada em que uma placa rígida é suportada por dois cabos de alumínio e um de aço. Procuramos determinar a força em cada cabo, Fig. 25.1

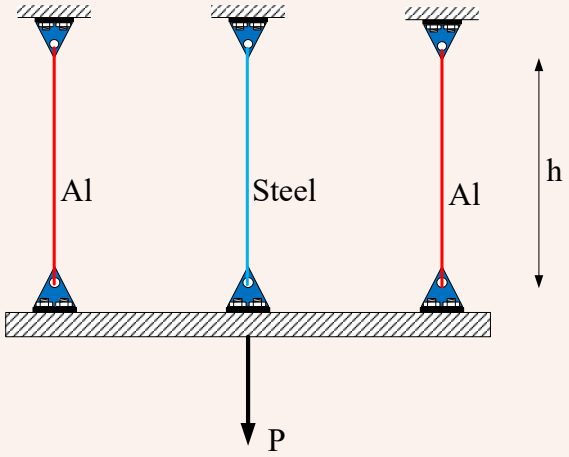


Figura 25.1: Estaticamente indeterminada estrutura de 3 cabos

1. Temos três desconhecidos e apenas duas equações independentes de equilíbrio. Assim, o problema é estaticamente indeterminado para o Primeiro grau.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Aplicando as equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}\Sigma M_z = 0; &\Rightarrow P_{Al}^{\text{left}} = P_{Al}^{\text{right}}\\ \Sigma F_y = 0; &\Rightarrow 2P_{Al} + P_{St} = P\end{aligned} \tag{25.1}$$

   Assim, efetivamente temos duas desconhecidas e uma equação.
3. Precisamos de uma terceira equação para resolver os três desconhecidos. Isso será derivado do *compatibilidade da deslocamentos* em todos os três cabos, ou seja. Todos os três devem ser iguais.

$$\Delta_{Al} = \Delta_{St}$$

4. Finalmente, aqueles deslocamentos são obtidos a partir do *Força-Deslocamento* Relações:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A}\\ \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L}\\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\underbrace{\frac{P_{Al}L}{E_{Al}A_{Al}}}_{\Delta_{Al}} = \underbrace{\frac{P_{St}L}{E_{St}A_{St}}}_{\Delta_{St}} \Rightarrow \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

   ou

$$-(EA)_{St}P_{Al} + (EA)_{Al}P_{St} = 0$$

5. Solução de Eq. 25.1 e.. 4 Rende-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1\\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_{Al}\\ P_{St}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_{Al}\\ P_{St}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} P\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(EA)_{Al} + (EA)_{St}}}_{\text{Determinant}}\begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1\\ (EA)_{St} & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P\\ 0\end{Bmatrix}$$

6. Observamos que a solução deste problema, ao contrário de Determinados estaticamente, depende do *propriedades elásticas*.

Exemplo ilustrativo 2

7 Outro exemplo é o cantilever apoiado de comprimento L, Fig. 25.2

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

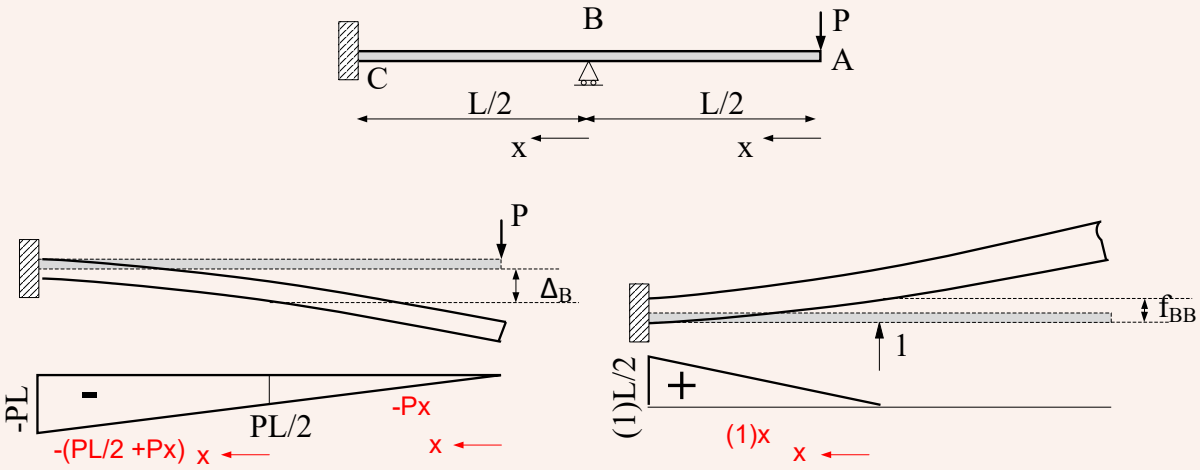


Figura 25.2: Cantilever equipado viga

1. Primeiro removemos o apoio móvel, e ficamos com o cantilever como uma estrutura primária.
2. Então, determinamos a deflexão no ponto B devido à carga aplicada P usando o virtual método das forças

$$
\begin{aligned}
1.\Delta &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{L/2} 0\frac{-px}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^{L/2} -(x)\frac{\left(\frac{PL}{2}+Px\right)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{PL}{2}x + Px^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI}\left[\frac{PLx^2}{4} + \frac{Px^3}{3}\right]\Bigg|_0^{L/2} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}
\end{aligned}
$$

3. Então, aplicamos uma carga unitária no ponto B e resolver para o deslocamento Em.. B usando o virtual método das forças

$$1 f_{BB} = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^{L/2}(x)\frac{x}{EI}\mathrm{d}x = \frac{(1)L^3}{24EI}$$

4. Então argumentamos que o deslocamento no momento B é zero, e daí o deslocamento f_{BB} deve ser multiplicado por R_B De tal forma que..

$$R_B f_{BB} = \Delta$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

to ensure compatibility of displacements, hence

$$R_B = \frac{\Delta}{f_{BB}} = \frac{\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}}{\frac{(1)L^3}{24EI}} = \frac{5}{2}P$$

Exemplo ilustrativo 3

8 Nós procuramos determinar o matriz de flexibilidade para o estaticamente determinado viga. mostrado em Fig. 25.3. O matriz de flexibilidade aqui seria um 2×2, e cada termo d_{ij} corresponde ao deslocamento em grau de liberdade i Devido a uma força unitária em grau de liberdade j.

- Temos dois DOF correspondentes às rotações em cada extremidade.

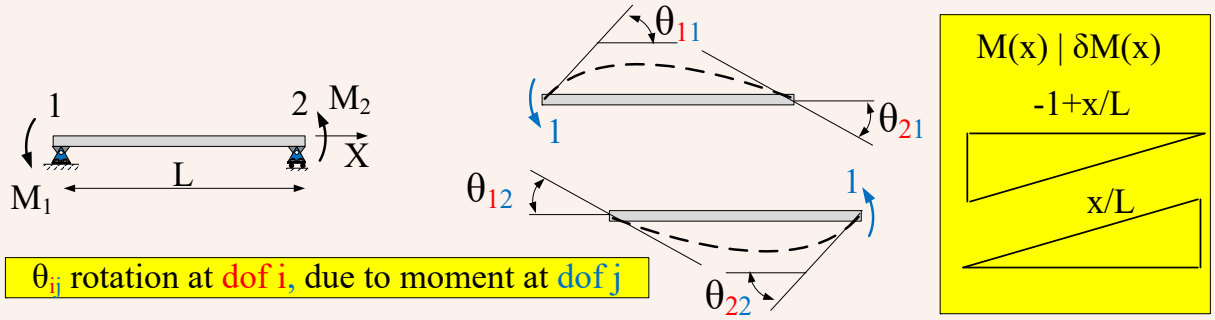


Figura 25.3: Problema ilustrativo para o método flexibilidade

- O *Força, deslocamento* A relação é expressa como

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{25.2}$$

Onde M_i corresponde aos momentos aplicados externamente, $d_{ij} = \theta_{ij}$, e θ_i para as rotações desconhecidas correspondentes no Dof i devido a um momento no DOF j.

- Usando o *Complementar trabalho virtual*, ou mais especificamente, o virtual método das forças para analisar este problema, :

$$d_{ij} = \underbrace{\int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx}_{\text{Interno}} = \underbrace{\delta\overline{P}_i \Delta_j + \delta\overline{M}_i \theta_j}_{\text{Externo}}$$

Onde $\delta\overline{M}(x)$, $\frac{M(x)}{EI_z}$, $\delta\overline{P}$ e.. Δ são os virtuais esforço interno, reais internos deslocamento, carga virtual externa, e reais externos deslocamento, respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Aqui *Os dois* A força virtual externa e o momento são tomados como unidade.

$$EI \underbrace{1}_{\delta\overline{M}} \underbrace{d_{11}}_{\Delta} = \int_0^L \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{\delta\overline{M}(x)} \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{M(x)} dx = \frac{L}{3} \tag{25.3}$$

- Da mesma forma, nós obteríamos:

$$EId_{22} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3}$$
$$EId_{12} = \int_0^L \left(-1+\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L} dx = -\frac{L}{6} \quad = \quad EId_{21}$$

- Esses resultados podem ser resumidos em uma matriz como:

$$[\mathbf{d}] = \frac{L}{6EI_z}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

  e poderíamos então resolver para as deslocamentos (rotações) devido aos momentos externos.

Exemplo ilustrativo 4

9 O método é ilustrado, em forma compacta, através da Fig. 25.4.

25.2 O método força/flexibilidade

10 Com base nos dois exemplos ilustrativos anteriores, agora procuramos desenvolver um método geral para o *elástico linear* Análise de estática Estruturas indeterminadas.

Definition 25.1: Equações

1. Identifique *grau de indeterminação estática* (exterior e/ou interior) n.
2. Selecionar n *Forças desconhecidas redundantes e/ou casais* na estrutura carregada junto com n Releases correspondentes (angular ou tradução): *estrutura primária*.
3. Determine o n *deslocamentos na estrutura primária* (com a carga aplicada) correspondente aos lançamentos, Δ_i.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

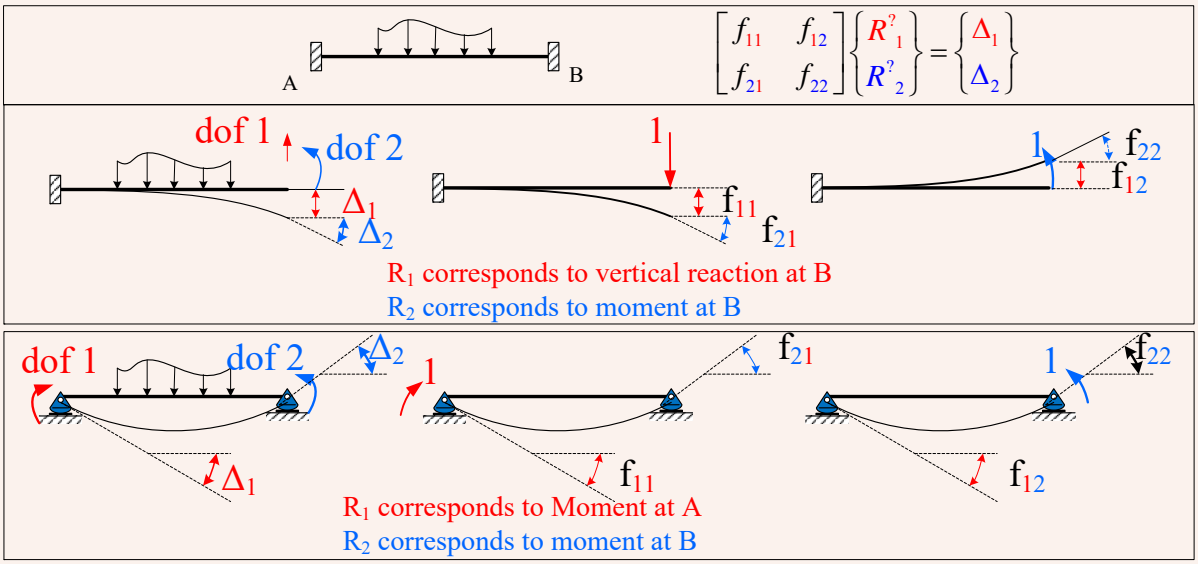


Figura 25.4: Ilustração do método flexibilidade com duas desconhecidas

4. Aplique um *Unidade de força* em cada um dos lançamentos j na estrutura primária (sem a carga externa) e determinar o deslocamentos em todas as versões i: *flexibilidade coeficientes*, f_{ij}, i.e. deslocamento no lançamento i devido a uma força de unidade em j.. A direção é irrelevante; Se a reação for positiva, será na direção especificada, se negativa, caso contrário.
5. Anote isso f_{ij} tem as unidades de deslocamento por unidade de carga.
6. Escreva o *compatibilidade da relação deslocamento*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \\ \cdots \\ \Delta_n^0 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}_i^0} \tag{25.4}$$

7. As reações são então obtidas simplesmente invertendo o matriz de flexibilidade.

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{-1} \left(\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}_i^0 \right)$$

Na presença de um único desconhecido, o $\mathbf{f}^{-1}$ é substituído por $1/f_{11}$

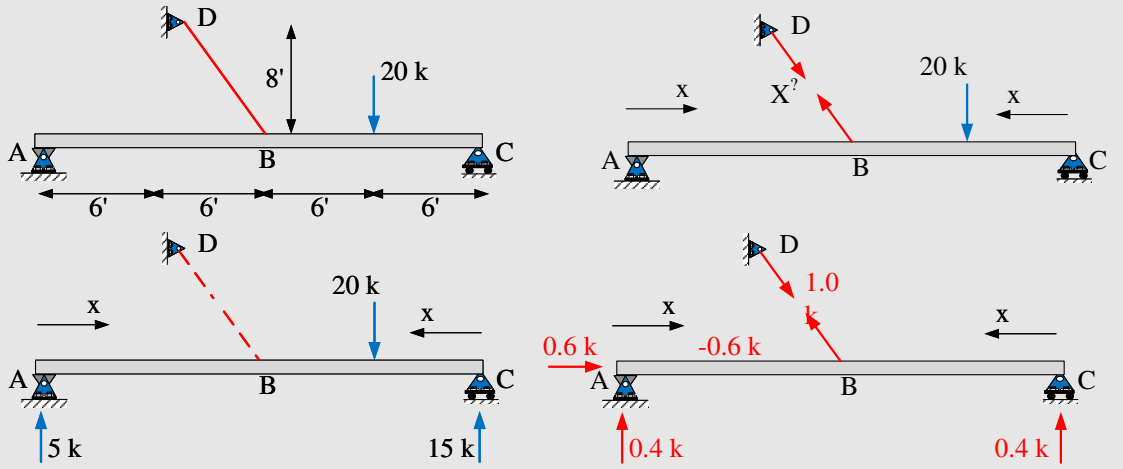
CÓPIA PARA REVISÃO

11 Note que $\mathbf{\Delta}_i^0$ é o vetor inicial deslocamentos, que geralmente é zero a menos que tenhamos uma inicial deslocamento do suporte (como apoio - O que é isso?

12 Note que do teorema recíproco de Maxwell-Betti, §24.2.2, o matriz de flexibilidade [**f**] é sempre simétrico.

25.2.1 Exemplos

25.2.1.1 Ex 25.1: Viga com haste de gravata



Nós procuramos calcular o força axial na haste de gravata.. Viga: I=600 em^4, A=20 em^2, a vara tem A-2in^2.

A estrutura é indeterminada em primeiro grau. Cortamos o empate, e selecionamos a força de bar como redundante. Então..

$$\Delta + X\delta = 0.$$

Nós avaliamos Δ e.. δ pelo virtual método das forças e incluem deformações tanto axiais quanto flexurais.

Membro	$x=0$	L	A	I	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	12	20	600	0	-0.6	$5x$	$-0.4x$
CE	C	6	20	600	0	0	$15x$	$-0.4x$
EB	C	6	20	600	0	0	$120-5x$	$-0.4x$
DB	-	10	2	-	0	1	0	0

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Aplicando o princípio de trabalho virtual Δ e.. δ

$$\begin{aligned}(1)\Delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= 0 + \int_0^{12}(5x)\frac{-0.4x}{EI}dx + \int_0^{6}(15x)\frac{-0.4x}{EI} + \int_6^{12}(120-5x)\frac{-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\Delta &= -3,168\text{kft}^3\end{aligned}$$

e..

$$\begin{aligned}(1)\delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= (-0.6)\frac{(-0.6)^2(12)}{EA_2} + (1)\frac{(1)(10)}{EA_1} + 2\int_0^{12}(-0.4x)\frac{(-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\delta &= 206.05\text{kft}^3\end{aligned}$$

Desde então

$$\frac{I}{A_2} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{20}\right) = \left(\frac{30}{144}\right) \quad \text{e} \quad \frac{I}{A_1} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{2}\right) = \left(\frac{300}{144}\right)$$

então substituindo na equação de compatibilidade

$$\frac{-3,168}{EI} + \frac{206.05}{EI} = 0 \Rightarrow X = +15.38 \text{ Tension}$$

Se tivéssemos negligenciado a deformação devido a forças axiais, então

$$X = \frac{3,168}{184.32} = +17.2$$

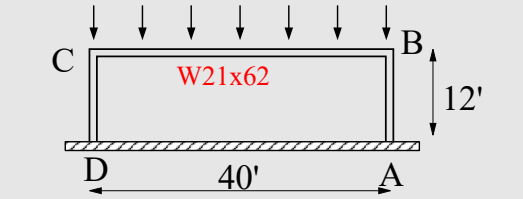
25.2.1.2 Ex 25.2: Análise do edifício de aço pórtico

De.. Structural Engineering
White, Gergely e Sexmith, 1976 Um pequeno edifício industrial, produzido em massa, deve ser enquadrado em aço estrutural com um típico seção transversal como mostrado abaixo. Três projetos estão sendo considerados

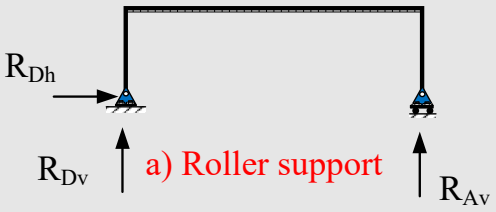
a) Pendurar em uma das bases e um rolo na outra; Isto deve ser adotado quando tivermos condições de solo pobres ou desconhecidas, e as fundações para o pórtico podem não ser capazes de desenvolver quaisquer forças horizontais confiáveis em suas bases.
b) Dobraduras em ambos os pontos A e.. D; para excelentes condições de solo.
c) Use um membro de aço capaz de carregar apenas tensão entre os pontos A e.. D (duas dobradiças). As fundações não deveriam fornecer qualquer restrição horizontal para este último caso.

Vamos assumir que o pórtico é feito de aço viga seções 21. profundo e pesando 62 lb/ft de comprimento (W 21 × 62), e o membro da gravata para design (c) tentativamente escolhido como um 2-in.^{2} Bar.

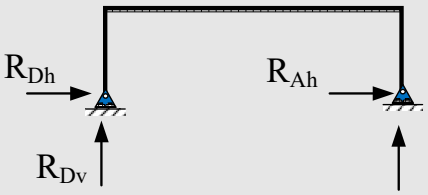
CÓPIA PARA REVISÃO



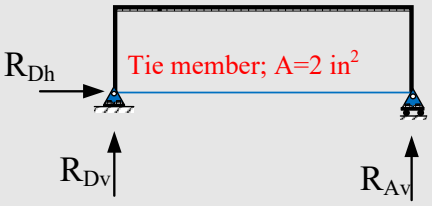
Structure cross section; spaced at 15'



a) Roller support



b) Hinged support

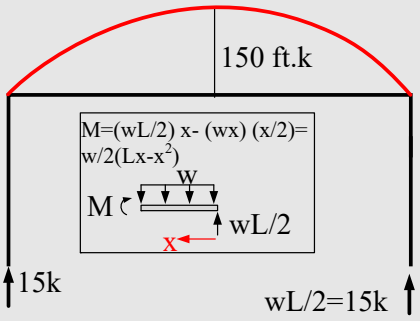


c) Roller with tie

Use uma carga de neve de 30 psf e uma carga total estimada em 20 psp. Com pórticos espaçado a 15 pés em centros ao longo do comprimento do edifício, a carga de projeto é de 15 (30 + 20) = 750 lb/ft.

Opção a

Esta opção é estaticamente determinada, pois existem três reações desconhecidas e três equações de equilíbrio.

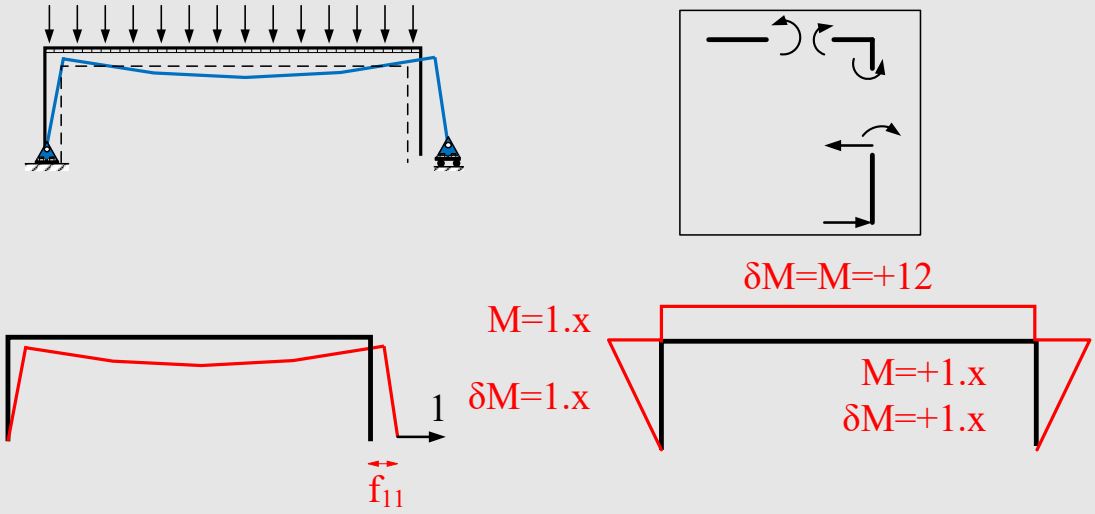


Opção B

Estrutura b Estaticamente indeterminada em primeiro grau (um redundante). Aplique a liberação em A, redundante força cortante R_1. Δ_1:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

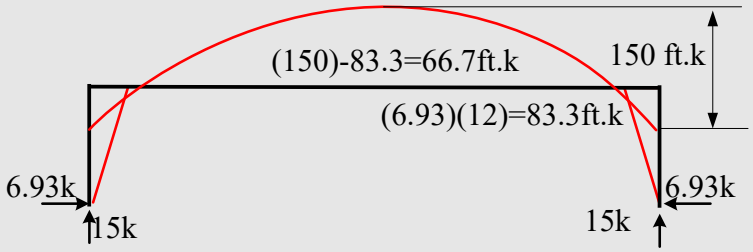


Resolva Δ_1 e.. f_{11}:

$$1(\text{k})\cdot\Delta_1(\text{ft}) = \int_0^L (12)\frac{w}{2}\frac{LX-x^2}{EI}dx = \int_0^{40}(12)\frac{(1/2)(.75)(40x-x^2)}{EI}$$
$$= \frac{48,000}{EI}\ \text{k}^2\,\text{ft}^3$$
$$1(\text{k})\cdot f_{11}(\text{ft}) = 2\left[\int_0^{12} x\frac{x\,dx}{EI} + \int_0^{20} 12\frac{12\,dx}{EI}\right] = \frac{6,912}{EI}\ \text{k}^2\,\text{ft}^3$$

Solucionando R_1

$$\frac{1}{EI}[48,000 + 6,912R_1] = 0 \Rightarrow R_1 = -6.93\ \text{k} \leftarrow$$

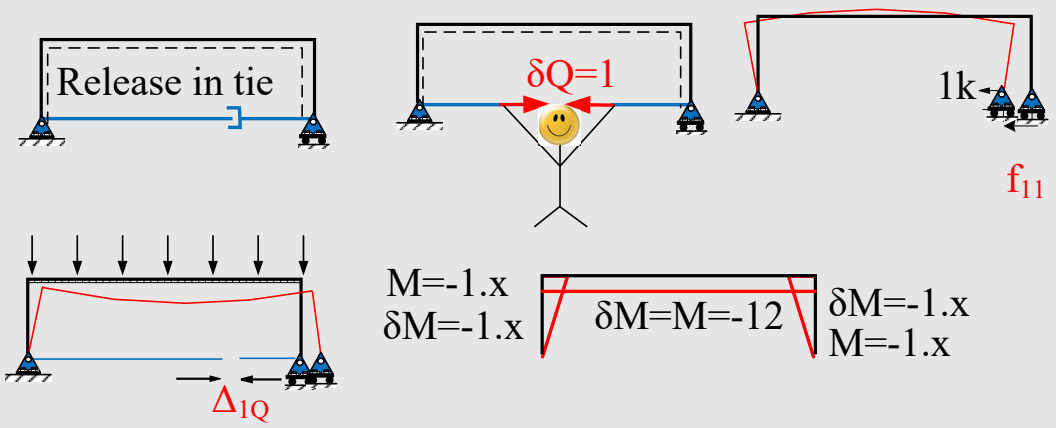


Opção C

Três forças externas desconhecidas, mas estrutura é Estaticamente indeterminado em primeiro grau, desde que o membro do empate fornece um grau de redundância interna. Solte o membro de gravata, com seu associado longitudinal deslocamento e força axial.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Equação de compatibilidade: Relativo deslocamento das duas seções da gravata no ponto de liberação deve ser zero, ou $\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$ Onde

Δ_1 = deslocamento na liberação 1 na estrutura primária
f_{11} = relativo deslocamento na liberação 1 para uma unidade força axial no membro do empate,
R_1 = força no membro de gravata na estrutura original.

Δ_1 é determinado a partir do caso B:

$$\Delta_1 = \frac{(48,000)\text{ k ft}^3(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(30\cdot 10^3)\text{ ksi}(1,327)\text{ in}^4} = 2.08\text{ in} \rightarrow$$

f_{11} é causado por deformações tanto axiais e flexurais

$$1\cdot f_{11} = \underbrace{2\left[\int_0^{12}(-x)\frac{(-x)\mathrm{d}x}{EI} + \int_0^{20}(-12)\frac{(-12)\mathrm{d}x}{EI}\right]}_{\text{Flexure}} + \underbrace{\delta\overline{P}\frac{PL}{EA}}_{\text{Axial}}$$

$$= \frac{6,912}{EI} + \frac{1(1)(40)}{EA}$$

$$= \frac{(6,912)\text{ k ft}^3(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(30\cdot 10^3)\text{ ksi}(1,327)\text{ in}^4} + \frac{(40)\text{ ft}(12)\text{ in}/\text{ ft}}{(30\cdot 10^3)\text{ ksi}(2)}$$

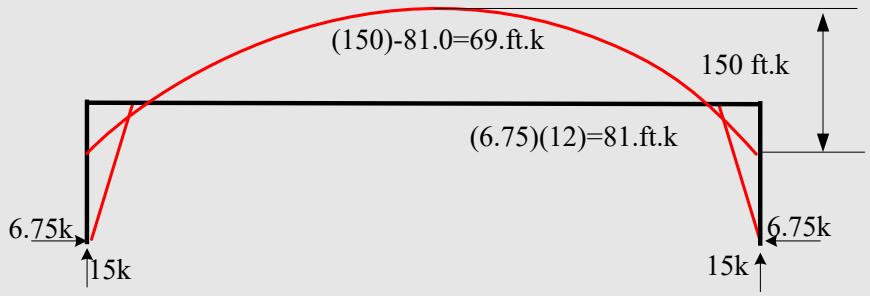
$$= 0.300 + 0.008 = 0.308$$

Assim f_{11} = 0,308 pol./k Deformação consistente:

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0 \Rightarrow 2.08 + .308R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = -6.75\text{ k}$$

Os dois termos deslocamento na equação devem carregar Sinais opostos para explicar a diferença de direção deles.

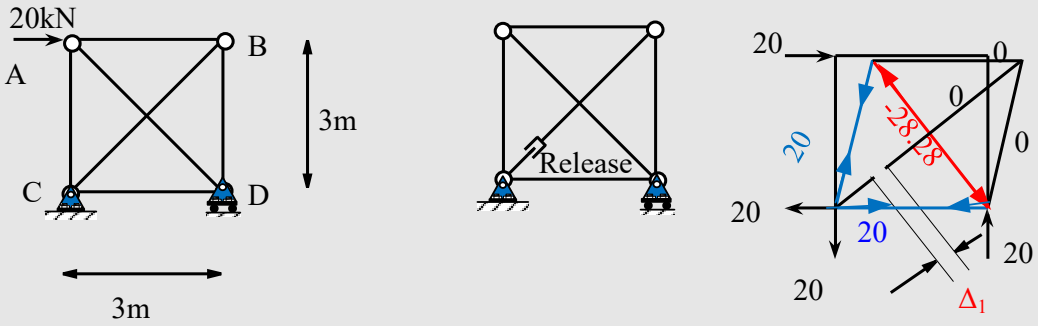
CÓPIA PARA REVISÃO



Comentários

Diagrama M em c, muito perto de M para b.. O cabo estava muito duro. Reduzir a área do cabo aumentará o momento. Pórticos com membros de gravata são amplamente utilizados em edifícios industriais. Momento máximo pórticosb) e (c) é cerca de 55% de (a). A continuidade causa uma diminuição no momento positivo e um aumento no negativo. Mais Design ideal. Reações verticais não são afetadas pelas condições de suporte horizontal.

25.2.1.3 Ex 25.3: Treliça, uma força redundante



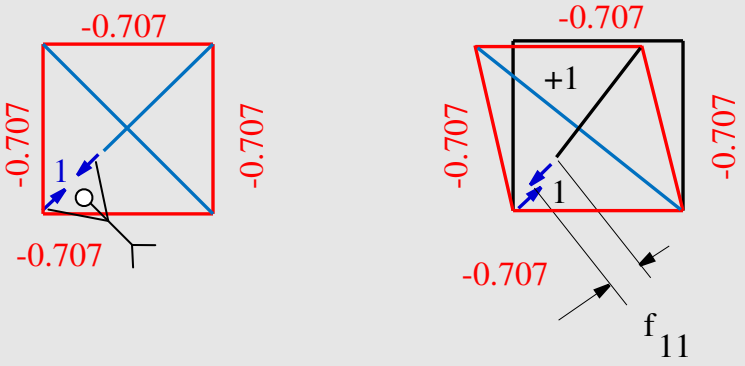
1. Checar. $2 \times 4 = 8$ Equações, 6 membros + 3 reações $\Rightarrow$ Um grau de indeterminação.. Uma liberação longitudinal em qualquer uma das seis barras pode ser escolhida.
2. Solte o membro diagonal BC para liberação.
3. Δ_1 Parente deslocamento de junta B com respeito ao conjunto C.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Equação de compatibilidade ao longo do CD

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 = 0$$
$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$
$$f_{11} = \Sigma \delta\overline{P}\frac{\overline{P}L}{AE}$$



5. Avaliando estas somas em forma tabular:

Membro	P	$\delta\overline{P}$	L	$\delta\overline{P}PL$ (Δ_1)	$\delta\overline{P}\overline{P}L$ (f_{11})
AB	0	−0.707	3	0	1.5
BD	0	−0.707	3	0	1.5
CD	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AC	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AD	−28.28	+1	4.242	−119.96	4.242
BC	0	+1	4.242	0	4.242
				-204.8	14.484

$$\Delta_1 = \Sigma \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} = -\frac{-204.8}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$f_{11} = \frac{14.484}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$0 = \frac{1}{AE}[-204.8 + 14.484F_1]$$
F_1=14.14 kN

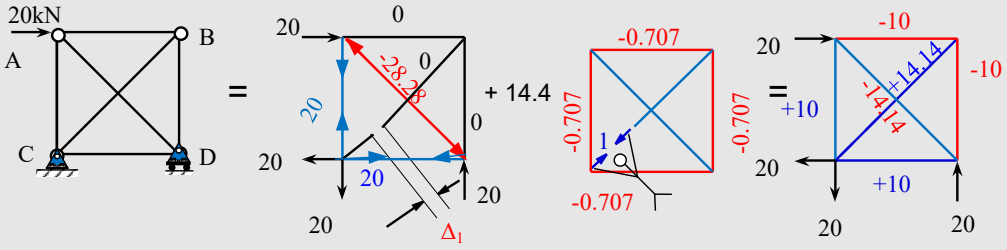
.

6. As forças finais são obtidas por Superimpondo forças devido ao redundante e as forças devido à carga real.

CÓPIA PARA REVISÃO

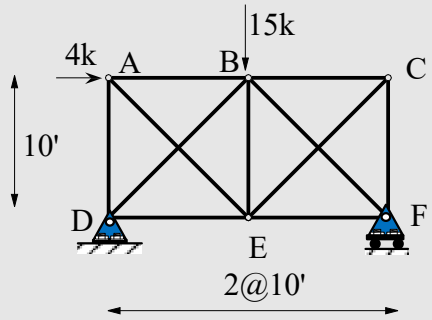
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

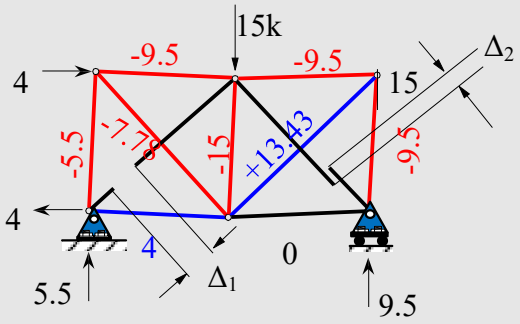
7. Efeito de força redundante: Multiplique as forças dos membros por 14.14 (força redundante)



Membro	$\delta\overline{P}$	$F_1\delta\overline{P}$	P	P_{total}
AB	−0.707	−10.0	0.0	−10.0
BD	−0.707	−10.0	0.0	−10.0
CD	−0.707	−10.0	+20.0	+10.0
AC	−0.707	−10.0	+20.0	+10.0
AD	+1.0	+14.14	−28.28	−14.14
BC	+1.00	+14.14	0	+14.14

25.2.1.4 Ex 25.4: Treliça: Duas forças redundantes





Outro painel com um segundo membro redundante é adicionado ao treliça do exemplo anterior

1. Solte duas diagonais (DB e.. BF).
2. As forças membros e exigido deslocamentos para o carregamento real e para as duas forças redundantes em membros DB e.. BF.
3. Embora o carregamento real normalmente tensões todos os membros de todo o treliça, vemos

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

que as forças unitárias correspondentes aos redundantes tensão apenas aqueles membros do painel que contém o redundante; Todas as outras forças de bar são zero.

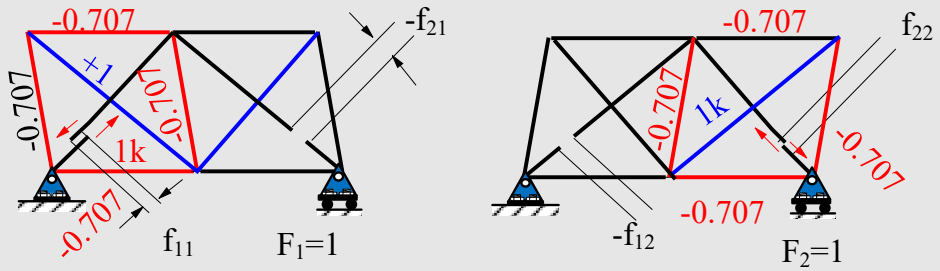
4. Reconhecer este fato nos permite resolver o problema da diagonal dupla treliça mais rapidamente do que um pórtico com múltiplos redundantes.
5. As equações trabalho virtual para calcular os seis necessários (dois devido à carga e quatro flexibilidades) são

$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{PL}{AE} \right) \qquad 1 \cdot \Delta_2 = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right) \qquad 1 \cdot f_{21} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right)$$

$$f_{12} = f_{21} \text{ pelo teorema da reciprocidade} \qquad 1 \cdot f_{22} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \frac{\overline{P}_2 L}{AE}$$

6. Assumir forças de tração (positivas).



7. Tabulação:

CÓPIA PARA REVISÃO

					Deslocamentos		Flexibilidades		
Membro	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	L	Δ_1 $\delta\overline{P}_1PL$	Δ_2 $\delta\overline{P}_2PL$	f_{11} $\delta\overline{P}_1\overline{P}_1L$	f_{21} $\delta\overline{P}_2\overline{P}_1L$	f_{22} $\delta\overline{P}_2\overline{P}_2L$
AB	-9.5	-0.707	0	120	+806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	120	0	0	0	0	60
DE	+4	-0.707	0	120	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	120	+466	0	60	0	0
AE	+7.78	+1	0	170	+1,322	0	170	0	0
BE	-15.0	-0.707	-0.707	120	+1,272	+1272	60	60	60
CE	+13.43	0	+1	170	0	+2,280	0	0	170
BD	0	+1	0	170	0	0	170	0	0
BF	0	0	+1	170	0	0	0	0	170
					+3,528	+5,164	+580	+60	+580

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0$$
$$\Delta_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0$$

ou

$$\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 580 & 60 \\ 60 & 580 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3,528 \\ 5,164 \end{bmatrix}$$

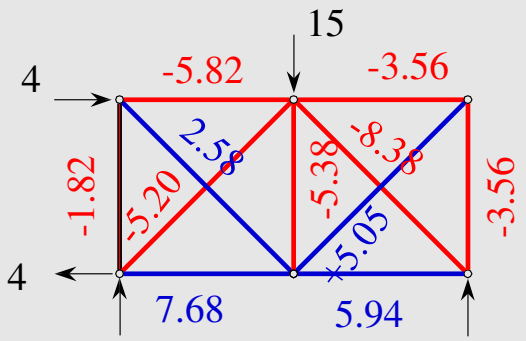
e.. F_1 = -5.20 Kip e.. F_2 = -8.38 Kip

8. Último conjunto de forças: Adicione para cada membro os três efeitos separados: $F = P + F_1\overline{P}_1 + F_2\overline{P}_2$

Membro	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$F_1\overline{P}_1$	$F_2\overline{P}_2$	P_{tot}
AB	-9.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-5.82
BC	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0.0	0.0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	+4	-0.707	0.0	3.676	0.0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-1.82
AE	+7.78	+1	0.0	-5.20	0.0	2.58
BE	-15.0	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	+13.43	0.0	+1	0.0	-8.38	5.05
BD	0.0	+1	0.0	-5.20	0.0	-5.20
BF	0.0	0.0	+1	0.0	-8.38	-8.38

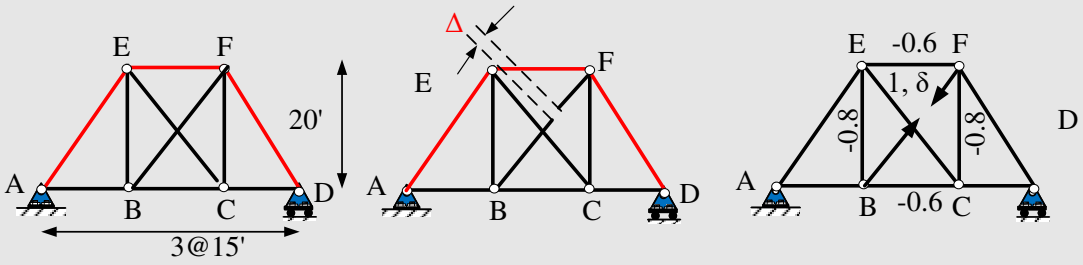
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



25.2.1.5 Ex 25.5: Treliça: Carga térmica

O objetivo é analisar o seguinte treliça (indeterminado em primeiro grau) submetido a um aumento de temperatura de $\Delta T = 60°F$ em membros AE, EF e FD. Tome $\alpha = 1/150,000$ Por que °F, $E = 30\times10^3$K/Sq dentro. Todos seções transversais são iguais a 10 em sq. Para este problema, optamos por cortar a barra BF, e selecionar sua força de barras como redundante.



Então..

$$\Delta + X\delta = 0$$

Enquanto nós ainda temos

$$(1)\delta = \frac{1}{E}\sum \delta\overline{P}\frac{PL}{A}$$

para Δ É um pouco diferente.

$$(1)\Delta = \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$

E como neste livro, claramente separamos virtualmente de quantidades reais. Assim, o real deslocamento pode ser expresso como

$$\frac{P}{AE} = \varepsilon = \alpha\Delta T$$

Onde α é o coeficiente de expansão térmica, e ΔT a mudança de temperatura. Por isso, para este problema, devemos usar

$$(1)\Delta = \alpha\sum \delta\overline{P}\Delta TL$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A tabular os resultados

Bar	L	A	$\frac{L}{A}$	$\delta\overline{P} = P$	$\delta\overline{P}\frac{PL}{A}$	ΔT	$\delta\overline{P}\Delta TL$	$X\delta\overline{p}$
	ft	Em^2	ft/in^2	k	k^2ft/in^2	°F	k°F ft	k
EF	15	10	1.5	-0.6	+0.54	+60	-540	-7.5
BC	15	10	1.5	-0.6	+0.54	0	0	-7.5
EB	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
FC	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
EC	25	10	2,5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
BF	25	10	2.5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
Σ					+8.64		-540	

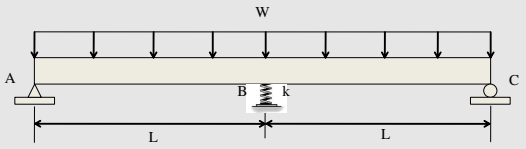
$$\Delta = (-540)\frac{1}{150,000} = -0.0036 \text{ ft}$$

$$\delta = \frac{8.64}{30 \times 10^3} = 0.000288 \text{ ft}$$

Por isso

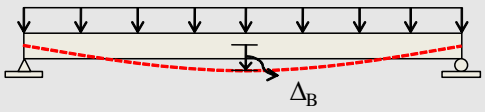
$$-0.0036 + 0.000288X = 0 \Rightarrow X = +12.5 \text{ k (Tension)}$$

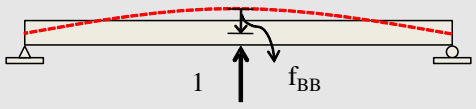
25.2.1.6 Ex 25.6: Primavera apoiada viga



A viga é suportado por um pino em A, uma primavera tendo um rigidez k Em.. B, e um rolo em C.. Determine a força que a primavera exerce sobre a viga. EI é constante.

1. Defina a estrutura primária (removendo a mola) e determine deflexões neste local para carga real e carga unitária. Uma vez que esta é uma geometria muito comum, vamos resolver deslocamentos para um período de L





CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Carga uniforme

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{1}{2}w(LX - x^2)$$
$$\delta\overline{M} = \frac{1}{2}x$$
$$1.\Delta = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{1}{2}x\frac{w(Lx - x^2)}{2EI}dx$$
$$= \frac{2w}{4EI}\int_0^{L/2}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{L/2} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

Carga concentrada:

$$M = \frac{P}{2}x = \frac{Px}{2}$$
$$\delta\overline{M} = \frac{\delta\overline{P}}{2}x = \frac{x}{2}$$
$$1.f_{BB} = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\frac{Px}{2EI} = \frac{2P}{4EI}\int_0^{L/2} x^2dx$$
$$\Rightarrow f_{BB} = \frac{PL^3}{48EI}$$

2. Calcular as deflexões devido à carga total e a carga unitária. Nós temos uma mola, e assim a deflexão não é zero mas proporcional (através da constante da mola k) à força de reação

$$\Delta_B + f_{BB} = \Delta_{sp} \quad \text{e} \quad \Delta_{sp} = \frac{F_{sp}}{k}$$

Vamos agora ajustar o deslocamentos para a viga de comprimento 2L em vez de L como nas equações anteriormente derivadas

$$\Delta_B^* = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI}$$
$$f_{BB}^* = \frac{PL_{AC}^3}{48EI} = \frac{F_{sp}(2L)^3}{48EI} = \frac{F_{sp}}{L^3}6EI$$

Substituindo

$$\Delta_B^* + f_{BB}^* = \Delta_{sp} \Rightarrow \frac{5WL^4}{24EI} + \left(-\frac{F_{sp}L^3}{6EI}\right) = \frac{F_{sp}}{k} \Rightarrow F_{sp} = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$$

Com a reação no suporte médio conhecida, o problema agora é estaticamente determinado.

O leitor é encaminhado para o Apêndice F para um problema análogo, embora consideravelmente mais complexo: um barril casca suportado por um elástico viga.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

25.2.1.7 Ex 25.7: Queen post

Um piso de aço viga foi projetado para carregar uma carga de 3 k/ft em um espaço simples de 24 pés. Devido à mudança no uso do prédio, o novo proprietário deseja carregar o chão com materiais que aumentarão a carga total para 4,8 k/ft. Um engenheiro propõe reforçar a viga com uma biela de compressão e dois laços de tensão, para formar um ''king post treliça' como mostrado abaixo. Os novos membros estarão escondidos em uma partição de rolamentos abaixo da viga. Gostaríamos de desenhar o diagrama do momento para o novo viga, e avaliar a eficiência deste esquema reforço. A seção W 18x60 é a viga$I$=984 em^4) a biela é uma seção W 4x13 (A=4,83 em^2). O cabo de aço tem A= 1 em^2.

1. Esta é uma estrutura estaticamente indeterminada, a viga tem três suportes (A, B, e C).
2. Para a estrutura primária, removemos o suporte central, e resolvemos para a deflexão do midspan Δ. ($\Delta = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$).
3. Aplique uma força de unidade em B e resolver para o f_{BB}, tenha em mente que teremos flexão na viga, axial nos dois cabos (AD e.. DC), e axial em membro BD.
4. Resolva a reação em B.

1. Selecione o força axial em membro BD como a força redundante
2. Determine a deflexão da viga

$$D_B = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} = -\frac{5}{384}\frac{(4.8)\text{ k.ft}(24)^4\text{ ft}^4(12)^4\text{ in}^4/\text{ ft}^4}{E(984)\text{ in}^4} = -\frac{36,414}{E}$$

3. Da geometria, o comprimento de cada cabo é $L = \sqrt{7^2 + 12^2} = 13.89$ ft
4. De estática, uma força unitária no membro BD gerará uma força no cabo igual a $\frac{13.89}{7}0.5 = 0.9923$ Kips
5. Note que se aplicarmos a carga da unidade na viga, estamos assumindo que temos um suporte rígido em B e não elástico (combinação de barra axial e cabo).
6. Determinar o termo flexibilidade

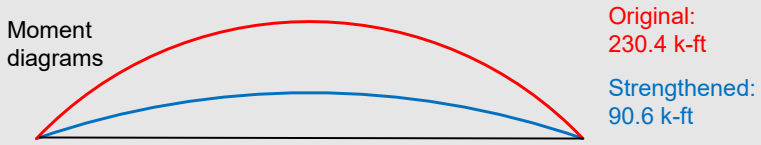
$$\begin{aligned} f_{BB} &= 2\left[\int_0^{12\times12} 0.5x\frac{0.5x}{EI}dx + (0.992)\frac{(0.992)(13.89)(12)}{E}\right] + (1)\frac{(1)(7)(12)}{(3.83)E} \\ &= 2\frac{(0.25)(144)^3}{3E(984)} + 2\frac{(0.992)^2(13.89)(12)}{(1)E} + \frac{(7)(12)}{3.83E} \\ &= \frac{1}{E}(505.7 + 328 + 21.93) = \frac{855.63}{E} \end{aligned}$$

7. A compatibilidade de deslocamentos requer que

$$R f_{BB} + D_B = 0 \Rightarrow R = -\frac{D_B}{f_{BB}} = -\frac{-36,414}{855.63} = 42.5\text{ k}$$

8. Os diagramas de momento correspondentes e originais são

CÓPIA PARA REVISÃO



E notamos que o momento máximo caiu de 230,4 k-ft para 90,6 k.ft

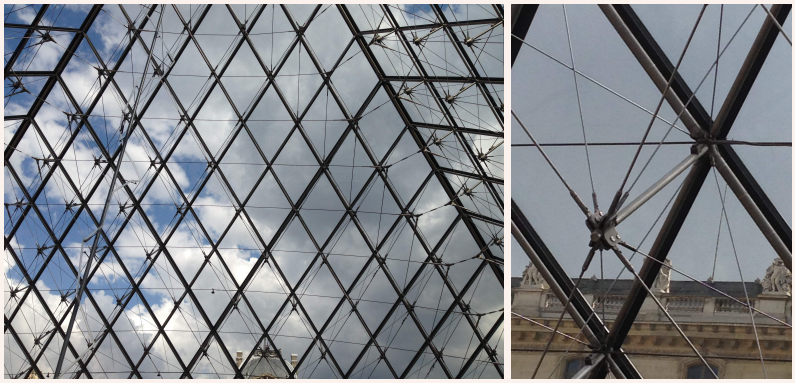
13 Fig. 25.5 ilustra alguns exemplos de desenhos baseados no conceito Queen-Post.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Aeroporto de Washington Dulles



(b) Pyramide du Louvre (I.M. Pei)



(c) Centro Sony, Berlim (Helmut Jahn)

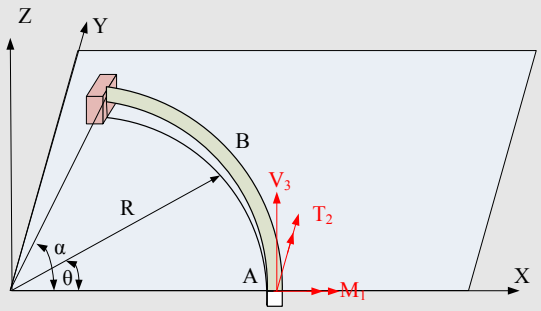
Figura 25.5: Exemplos de estruturas inspiradas por rainhas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

25.2.1.8 Ex 25.8: Matriz de flexibilidade; Curvado viga

Nós procuramos derivar o matriz de flexibilidade para caixa circular-girder de raio R e ângulo α.. O arco está preso em uma extremidade, e livre na outra.

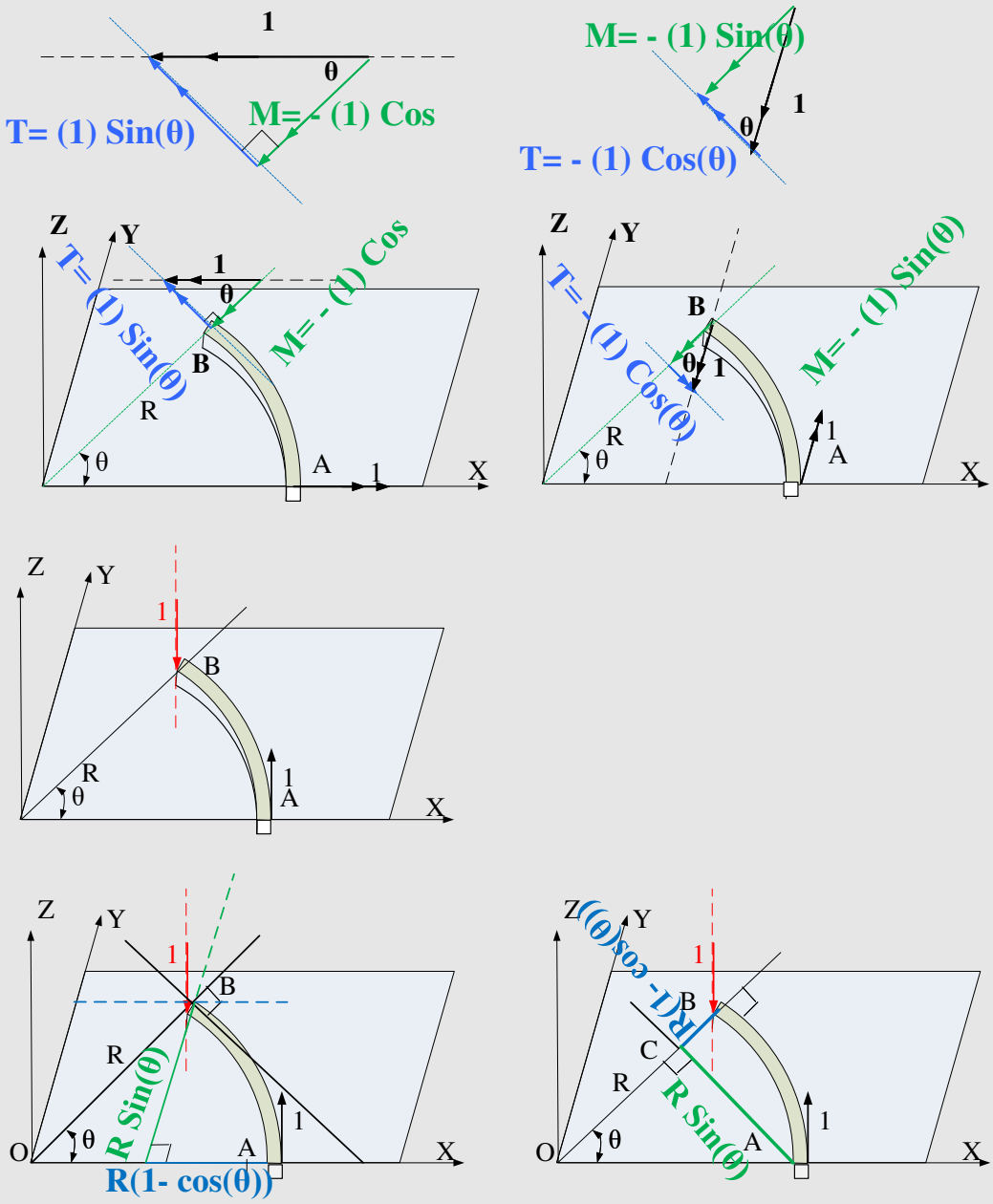


1. Os três graus de liberdade correspondem a momento, torção e cisalhamento.
2. Momentos e torções devidos ao momento externo da unidade ou a torção aplicada em A podem ser facilmente obtidos da geometria.
3. Para a unidade externamente aplicada força em A, precisa determinar da geometria os dois momentos braços.

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Dof:	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
	M_A=1	$T_A = 1$	$V_A = 1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Preciso me candidatar

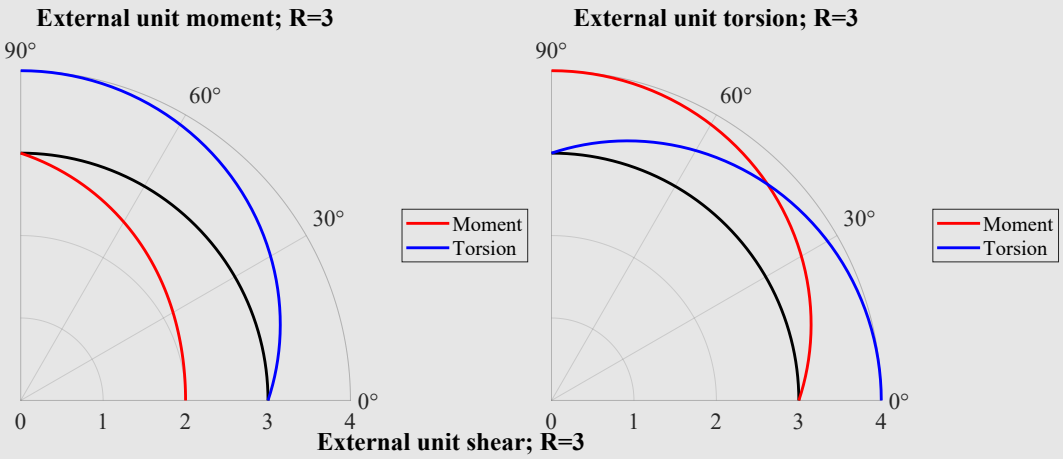
$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

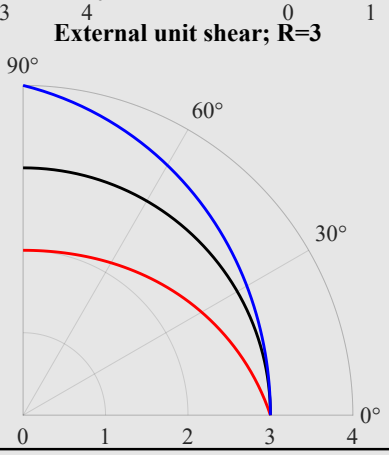
Onde $1 \leq i, j \leq 3$Ou seja, operamos nas linhas 2 ou 4. Assim (sinais de d_{x3} Os resultados alterados da integração podem estar errados.

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.





	Unidade externa					
	Momento		Torsão		força	
Int. Força	Começa	Fim	Começa	Fim	Começa	Fim
Um momento	1	0	0	1	0	1
Torção	0	1	1	0	0	1

25.3 Equações de três momentos

Para o contexto histórico, consultar §11.3.2

14 A equação de três momentos, também conhecida como teorema de Clapeyron de três instantes, foi desenvolvida pelo engenheiro francês Benoît Clapeiron em 1857 (§10.3.2.9). O trabalho de Clapeyron sobre a teoria da elasticidade e análise estrutural lançou as bases para a análise do contínuo vigas. A equação de três momentos foi um dos primeiros

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

métodos usados para analisar estruturas estaticamente indeterminadas, fornecendo uma maneira de relacionar os momentos em três suportes consecutivos de um contínuo viga.

15 Improvável de ser usado hoje em dia, mas optei por incluí-lo tanto pela razão histórica, quanto pela elegância da solução.

16 A equação de "três momentos", também conhecida como *Teorema de três momentos*"ou *Teorema de Clapeyron* é chamado de tal porque relaciona o momentos fletores em três pontos adjacentes em uma viga.

17 Essencialmente, este método fornece uma fórmula simples para calcular o momento fletor no suporte central de um contínuo viga com três suportes.

18 O método também pode ser estendido para vigas com múltiplos suportes, resultando em uma série de equações que formam uma matriz tri-diagonal .

19 O membro[1] é assumido para ser reto, e nós designamos por L, C, e R, os pontos mostrados na figura. 25.6.. Os momentos de inércia são assumidos como constantes entre os suportes, e são designados por I_L e.. I_R.. As deflexões da posição original são assumidas como sendo δ_L, δ_C, e δ_R e são assumidos positivos quando para cima como mostrado.

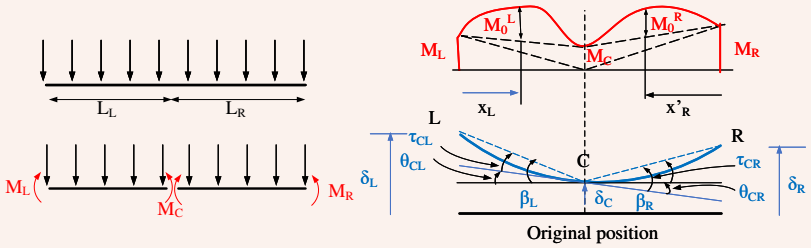


Figura 25.6: Equação de três momentos, derivação

20 Que os momentos nesses três pontos sejam M_L, M_C, e M_R.. Momentos fletores são positivos quando causam tensão nas fibras inferiores da viga. O diagrama do momento para a porção LC ou CR Pode ser considerado como resultado da superposição de três efeitos distintos:

1. A contribuição de cada um dos momentos finais agindo separadamente, que é dada pelas coordenadas dos triângulos indicados pelas linhas tracejadas.
2. A contribuição da carga aplicada agindo por si só com os momentos finais removidos que é dada pelas coordenadas nas coordenadas M_0^L na porção LC.
3. por M_0^R na porção CR.

21 Da Fig. 25.6 Nós temos

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \quad \text{e} \quad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

[1] Derivação baseada em um por Norris e Wilbur, 1960.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

22 No entanto, uma vez que a curva elástica deve ser contínua através do ponto C (e é por isso que este método cai no método flexibilidade[2])

$$\theta_{CL} = \theta_{CR} \Rightarrow \beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \tag{25.5}$$

23 Como são ângulos pequenos, podemos considerar

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{L_L} \quad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{L_R} \tag{25.6}$$

24 Se o diagrama do momento fosse convertido em e M/EI Um (curvatura), então τ_{CL} e.. τ_{CR} poderia ser avaliado a partir do teorema de segundo momento-área[3] (§22.3.4.3):

$$\begin{aligned}
\tau_{CL} &= \frac{1}{EI_L L_L}\left(\frac{M_L L_L^2}{6} + \frac{M_C L_L^2}{3} + \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L\right) \\
\tau_{CR} &= \frac{1}{EI_R L_R}\left(\frac{M_R L_R^2}{6} + \frac{M_C L_R^2}{3} + \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R\right)
\end{aligned} \tag{25.7}$$

Vamos

$$(\mathcal{M}_0)_L = \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L \quad \text{e} \quad (\mathcal{M}_0)_R = \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R \tag{25.8}$$

25 Substituindo da Eq. 25.8 Em Eq. 25.7 E então de Eqs 25.6 e.. 25.7 Na Eq. 25.5, nós obtemos o chamado *Equação de três momentos*.

$$M_L \frac{L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R \frac{L_R}{I_R} = -\frac{\mathcal{L}_0}{I_L} - \frac{\mathcal{R}_0}{I_R} + 6E\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.9}$$

Onde estão os termos de carga

$$\mathcal{L}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_L}{L_L} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_R}{L_R}$$

Onde

1. M_L. M_C e.. M_R são positivos quando causam tensão nas fibras inferiores.
2. δ_L, δ_C, e δ_R são positivos quando para cima da posição original.
3. $\mathcal{L}_0$ e.. $\mathcal{R}_0$ são termos de carga dependentes da carga aplicada nos spans LC e.. CR respectivamente.

[2] Anote analogia com o método de deflexão da inclinação§27.2) onde escrevemos uma equação de equilíbrio no nó enquanto na Equação dos Três Momentos escrevemos a equação da compatibilidade oof deslocamentos.

[3] O desvio tangencial do ponto 2 em um membro flexural carregado, de uma tangente à curva de deflexão no ponto 1 (t_{21}) é igual ao momento da área do diagrama de curvatura entre 1 e 2 sobre 2.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

4. O M_0 O diagrama de um membro é o diagrama do momento fletor desenhado para o membro se é assumido ser um simples apoio final viga.
5. $(\mathcal{M}_0)_L$ representa o momento estático da área sob este diagrama, tomado cerca de um eixo através da extremidade esquerda.
6. $(\mathcal{M}_0)_R$ representa o momento estático da área sob este diagrama, tomado cerca de um eixo através da extremidade direita.

O sinal de ambos os últimos momentos estáticos depende simplesmente do sinal das coordenadas do M_0 Diagrama.

26 If $I_L = I_R = I$, então Eq. 25.9 Simplifica para

$$M_L L_L + 2M_C (L_L + L_R) + M_R L_R = -\mathcal{L}_0 - \mathcal{R}_0 + 6EI \left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c \left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R} \right) + \frac{\delta_R}{L_R} \right] \tag{25.10}$$

27 Os termos de carga no caso do uniforme completo e carga concentrada são mostrados na figura. 25.7 e dado na mesa 25.1.

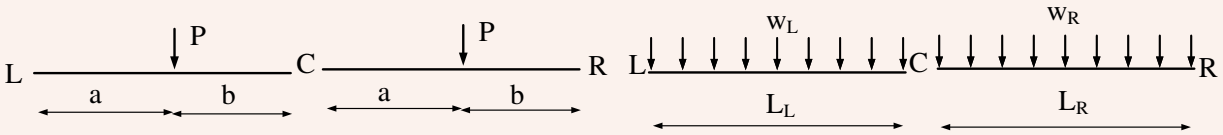


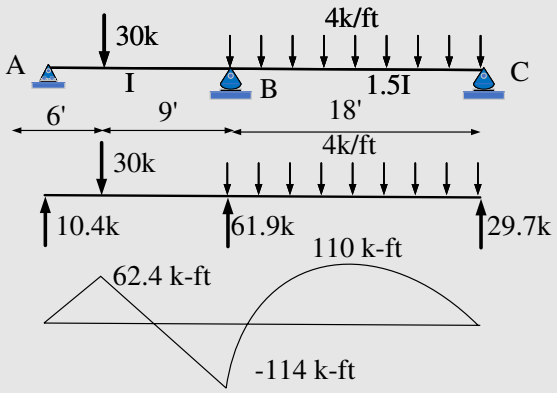
Figura 25.7: Equação de três momentos, termos de carga

Tabela 25.1: Carregar termos de ponto e uniforme cargas

Carga concentrada	$\mathcal{L}_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$
Carga uniforme	$\mathcal{L}_0 = \frac{w_L L_L^3}{4}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$

25.3.1 Ex 25.9: Continuando viga

CÓPIA PARA REVISÃO



Aplique EQ. 25.9, tomando A, B, e C Como L, C, e R:

$$M_a = 0 \quad M_B = ? \quad M_C = 0$$

e..

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C = 0$$

Da mesa 25.1

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(30)(6)(9)(21)}{15} = 2,268$$

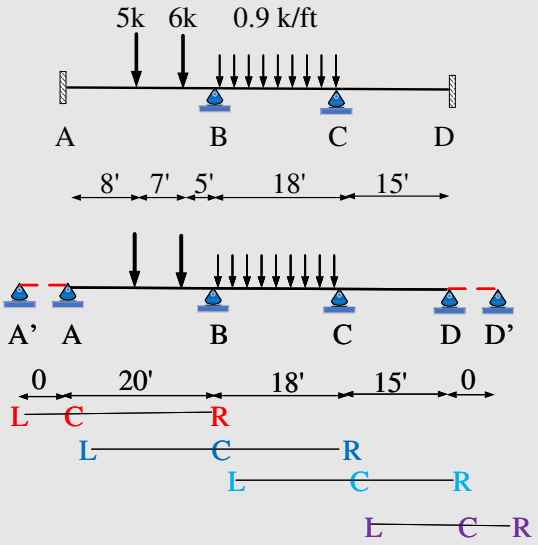
$$\mathcal{R}_0 = \frac{(4)(18)^2}{4} = 5,832$$

Finalmente

$$0 + 2M_B\left(\frac{15}{I} + \frac{18}{1.5I}\right) + 0 = -\frac{2,268}{I} - \frac{5,832}{1.5I}$$

$$54M_B = -6,156 \Rightarrow M_B = -114\text{k-ft}$$

25.3.2 Ex 25.10: Continuando viga



Neste caso, há quatro momentos desconhecidos, M_A, M_B, M_C, e $M_D d$.. Quatro equações são, portanto, necessárias. Uma extremidade fixa pode ser manipulada substituindo-a por um espaço adicional de comprimento essencialmente zero, como mostrado. As equações necessárias podem ser obtidas aplicando Eq. 25.10 Quatro vezes diferentes, considerando L, C, e R Por sua vez, como indicado.

$$\delta_{A'} = \delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta_D = \delta_{D'} = 0$$

1. Considere A', A, e B Como L, C e.. R

$$\mathcal{L}_0 = 0 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(5)(8)(12)(32)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(25)}{20} = 1,330.5 \quad M'_A = 0$$

$$\Rightarrow 40M_A + 20M_B = -1,330.5$$

CÓPIA PARA REVISÃO

2. Considere A, B, e C Como L, C e.. R

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(5)(8)(12)(28)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(35)}{20} = 11,459.5 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(0.9)(18)^2}{4} = 1,312.2$$
$$\Rightarrow 20M_A + 76M_B + 18M_C = -2,771.7$$

3. Considere B, C, e D Como L, C e.. R

$$\mathcal{L}_0 = 1,312.2 \quad \mathcal{R}_0 = 0 \Rightarrow 18M_B + 66M_C + 15M_D = -1,312.2$$

4. Considere C, D, e D' Como L, C e.. R

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{R}_0 = 0 \quad M_{D'} = 0 \Rightarrow 15M_C + 30M_D = 0$$

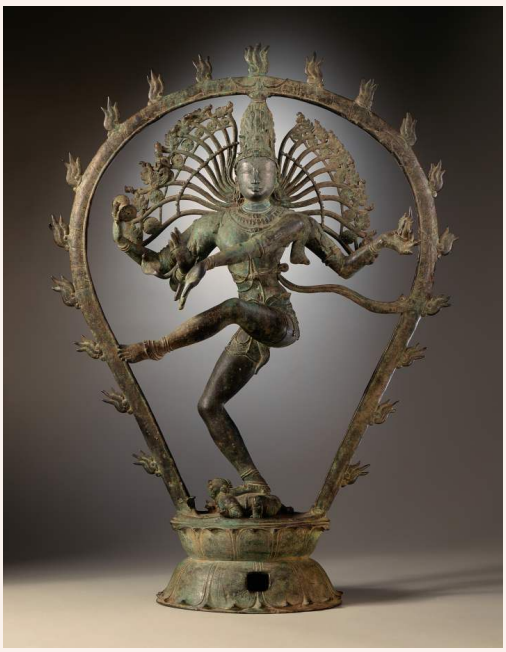
Essas quatro equações podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 76 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 66 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1,330.5 \\ -2,771.7 \\ -1,312.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.17 \\ -28.20 \\ -13.74 \\ +6.87 \end{Bmatrix} \text{K-ft}$$

(Observe a matriz tridiagonal resultante, como esperado.)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Shiva, dinastia Chola

Pose dinâmica e movimento fluindo da dança cósmica de Shiva simbolizam flexibilidade e adaptabilidade, assim como as estruturas flexíveis se deformam sob carga enquanto mantêm o equilíbrio.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 26

Forças em termos de Deslocamentos

Abstract

Enquanto nos capítulos anteriores examinamos métodos para calcular deslocamentos em termos de força (essência do flexibilidade/método das forças, este capítulo fará o inverso. Vamos tentar determinar as forças em termos de conhecido deslocamentos. Esta é, por sua vez, a essência do rigidez/método dos deslocamentos. Esta cobertura é puramente preparatória para a posterior cobertura de cálculos baseados na mão (deflexão e distribuição de momento apenas para elementos flexurais), e posteriormente, a análise baseada em computador (método da rigidez direta) de estruturas complexas. Este capítulo limita-se à flexão, para cisalhamento e torção, leitor deve consultar Capítulo 23.

26.1 Introdução 1069
26.1.1 Assinar convenção 1070
26.1.2 Métodos de análise 1070
26.2 Deformações axiais 1071
26.3 Flexão 1072
26.3.1 Equação diferencial 1072
26.3.2 Forças finais nodais para as iniciais 1075
26.3.3 Forças equivalentes nodais para elementos de flexão . . 1076

26.1 Introdução

1 Lembramos de.. §40.8 que análise estrutural é um problema de valor limite onde há uma dualidade entre forças e deslocamentos. Um é conhecido, e então procuramos determinar o outro através de uma análise apropriada.

2 Em tão longe, temos que operar ao longo Γ_t (Fig. 40.8) onde a força é conhecida, e nós procuramos determinar o deslocamentos. Na verdade, o método flexibilidade também é referido como um *Método das forças*.

3 Agora, para o bem deste capítulo, vamos estar operando ao longo Γ_u onde deslocamentos

CÓPIA PARA REVISÃO

são conhecidos, e nós vamos procurar as forças correspondentes (salvando equilíbrio e que resultará em aqueles conhecidos deslocamentos).

4 Este é um passo importante para nós *depois* desenvolver o método rigidez que é complementar ao flexibilidade/método das forças já discutido, Tabela 26.1.

Tabela 26.1: Rigidez vs flexibilidade métodos

	Flexibilidade	**Rigidez**
Variável Primária (D.O.F.)	Forças	Deslocamentos
Indeterminância	Estático	Kinematic
Força-Deslocamento	Deslocamento (Força)/Estrutura	Força (Deslocamento)/Elemento
Relações Governantes	Compatibilidade de deslocamento	Equilíbrio

26.1.1 Assinar convenção

5 Enquanto o método flexibilidade tinha uma convenção de sinais arbitrariamente escolhido, Fig. 21.5, o que está associado ao método rigidez é consistente com o sistema de coordenadas dos elementos locais. Assim, definimos um momento positivo como aquele que é no sentido anti-horário, 26.1.

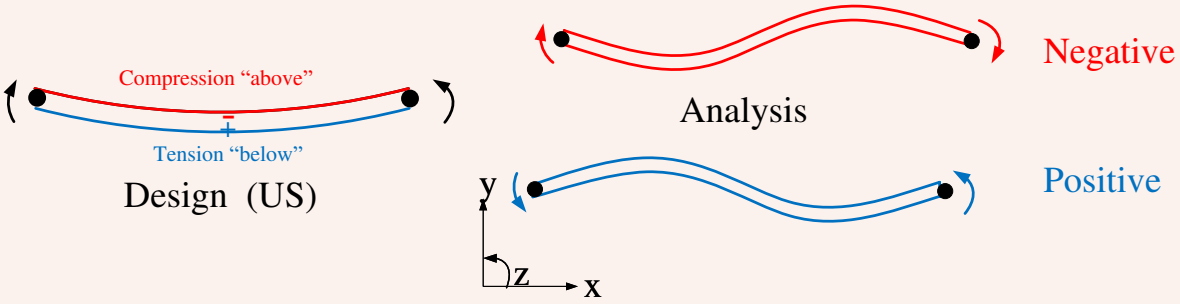


Figura 26.1: Assinar convenção para o método rigidez

26.1.2 Métodos de análise

6 Este capítulo está fornecendo a noção introdutória que será aplicável ao método rigidez. Há três abordagens baseadas neste método:

Deflexão de inclinação: (Mohr, 1892) n equações lineares com n desconhecidos, onde n é o grau de indeterminabilidade cinemática (isto é, Número total de independentes deslocamentos/rotação).

Distribuição do momento: (Cross, 1930) Método iterativo para resolver para o n deslocamentos e correspondente esforços internos em estruturas de flexão.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Método da rigidez direta: (≃1960) declaração formal do método rigidez e fundido em forma de matriz é, de longe, o mais poderoso método de análise estrutural.

Os dois primeiros métodos se prestam ao cálculo manual 27E o terceiro para uma análise baseada em computador (extensamente coberto em parte 39 através de vários capítulos).

7 Em todos os métodos rigidez, vamos precisar prevalecer nós mesmos *Antes* começamos a análise com equação das forças em termos de conhecido deslocamento.

8 Deve-se notar que os métodos flexibilidade e rigidez operam em diferentes níveis, e buscam diferentes desconhecidos, fig. 1. 26.2.

Tabela 26.2: Rigidez vsflexibilidade análises

Método	Nível	Análise
Flexibilidade	Estrutura	Deslocamentos em termos de forças
Rigidez	Elemento	Forças em termos de deslocamento

26.2 Deformações axiais

9 Pela força dos materiais:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \underbrace{A\sigma}_{P} = \frac{AE}{L}\underbrace{\Delta}_{1} \tag{26.1}$$

10 Para uma unidade deslocamento, a força aplicada deve ser igual a $\frac{AE}{L}$.

11 Da estática, a força no outro extremo deve ser igual e oposta.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

26.3 Flexão

12 Objetivo: resolver para *forças em termos de conhecidos deslocamentos* Em uma viga: Quatro forças desconhecidas$V_1^?, V_2^?, M_1^?$ e.. $M_2^?$) em termos de quatro conhecidos deslocamentos ($v_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_1^\checkmark$ e.. $\theta_2^\checkmark$), Fig. 26.2.

$$V_1^? = V_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)$$
$$M_1^? = M_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)$$
$$V_2^? = V_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)$$
$$M_2^? = M_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)$$

Com quatro incógnitas, precisaremos de quatro equações, duas serão fornecidas pelo *Segunda ordem linear equação diferencial* e dois da *Duas equações de equilíbrio*.

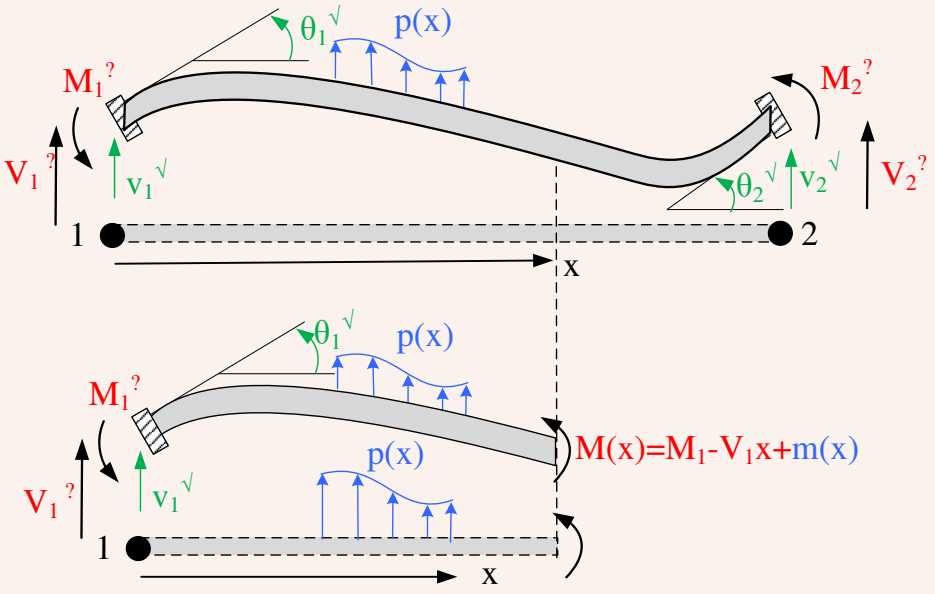


Figura 26.2: Formulação de problemas de flexão para termos rigidez

26.3.1 Equação diferencial

13 Começando com

$$M = \underbrace{-EI\frac{d^2v}{dx^2}}_{\text{Diff Eq.}} = \underbrace{M_1^? - V_1^? x + m(x)}_{\text{Statics}}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Onde $m(x)$ É o momento devido à carga aplicada $q(x)$ na seção x (por carga uniformemente distribuída: $m(x) = -\frac{1}{2}wx^2$). Nós nos integramos duas vezes

$$-EIv' = M_1^? x - \frac{1}{2}V_1^? x^2 + f(x) + C_1$$
$$-EIv = \frac{1}{2}M_1^? x^2 - \frac{1}{6}V_1^? x^3 + g(x) + C_1 x + C_2$$

Onde $f(x) = \int m(x)dx$, e $g(x) = \int f(x)dx$. Aplicar condições de contorno em $x = 0$

$$\left.\begin{array}{rl} v' &= \theta_1^{\checkmark} \\ v &= v_1^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} C_1 &= -EI\theta_1^{\checkmark} \\ C_2 &= -EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right.$$

Então em.. $x = L$ E combinar com C_1 e.. C_2

$$\left.\begin{array}{rl} v' &= \theta_2^{\checkmark} \\ v &= v_2^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} -EI\theta_2^{\checkmark} &= M_1^? L - \frac{1}{2}V_1^? L^2 + f(L) - EI\theta_1^{\checkmark} \\ -EIv_2^{\checkmark} &= \frac{1}{2}M_1^? L^2 - \frac{1}{6}V_1^? L^3 + g(L) - EI\theta_1^{\checkmark} L - EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right. \tag{26.2}$$

Embora possamos resolver para $M_1^?$ e.. $V_1^?$ em termos de $v_1^{\checkmark}$, $v_2^{\checkmark}$, $\theta_1^{\checkmark}$ e.. $\theta_2^{\checkmark}$, nós prosseguir com

14 Do equilíbrio,

$$V_1^? + q + V_2^? = 0 \qquad M_1^? - V_1^? L + m(L) + M_2^? = 0$$

Onde $q = \int_0^L w(x)dx$,

15 Assim

$$V_1^? = \frac{(M_1^? + M_2^?)}{L} + \frac{1}{L}m(L) \qquad V_2^? = -(V_1^? + q) \tag{26.3}$$

16 Substituindo V_1 em θ_2 e.. v_2 (Eq. 26.2)

$$\left\{\begin{array}{rl} M_1^? - M_2^? &= \frac{2EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} + \frac{2EI_z}{L}\theta_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{2}{L}f(L) \\ 2M_1^? - M_2^? &= \frac{6EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{6}{L^2}g(L) \end{array}\right.$$

17 Resolva os momentos

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II} \tag{26.4}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II} \tag{26.5}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde Em Eq. 26.4 e.. 26.5 Se nós deixarmos $\Delta = v_2 - v_1$ (*deslocamento*), $\psi = \Delta/L$ (*rotação do acorde do membro*), e $K = I/L$ (*rigidez fator*[1]) NEF *Forças equivalentes nodais* , isto é, substituir a carga do elemento por um conjunto equivalente de forças nodais.

18 Finalmente, essas equações podem ser reescritas como:

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + NEF_1 \tag{26.6}$$
$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + NEF_2 \tag{26.7}$$

Note que ψ Será positivo se no sentido anti-horário, negativo de outra forma.

19 Da Eq. 26.6 e.. 26.7, se um nó tem um deslocamento Δ, então *Os dois* momentos nos elementos adjacentes terão o mesmo sinal. No entanto, os momentos em elementos de cada lado do nó terão sinais diferentes.

$$\Psi_{21} = \frac{v_2 - v_1}{2}$$
$$K = \frac{I}{L} \text{ Rigidez relativa}$$
$$NEF_1 = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$
$$NEF_2 = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$

20 NEF_1 e.. NEF_2 são os *momentos finais fixos* para $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e.. $v_1 = v_2 = 0$.. Esses serão derivados separadamente em §26.3.3.. Para os tipos de carga mais comuns, eles são tabulados na tabela 26.3.

Tabela 26.3: Forças equivalentes nodais para cargas simples

Carregar	NEF_1	NEF_2
Carga uniforme w	$\frac{wL^2}{12}$	$-\frac{wL^2}{12}$
Centro Carga concentrada	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$

21 Em Eq. 26.4 e.. 26.5 observamos que os momentos desenvolvidos no final de um membro são causados por: I) rotação final e deslocamentos; e.. II) membros fixos.

[1] K Será definido como $K = 4EI/L$ no momento método de distribuição, e como uma matriz no método da rigidez direta.

CÓPIA PARA REVISÃO

22 Podemos substituir essas expressões em Eq. 26.3 e resolver para o forças cortantes:

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II} \tag{26.8}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II} \tag{26.9}$$

Onde

$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\left[\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] + q\right]$$

23 É muito importante notar que as equações derivadas são baseadas em: *Equilíbrio*, *Tensão-deformação*, e *Compatibilidade*.

Definition 26.1: Relações de força em uma viga

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II}$$

26.3.2 Forças finais nodais para as iniciais

24 Na presença de *Carga térmica* (ou inicial deformações, forças equivalentes nodais podem ser prontamente determinadas da seguinte forma:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Truss

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T$$

Viga

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T^{avg}; \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T^{avg}$$
$$M_1^T = \frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}; \qquad M_2^T = -\frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}$$

Onde α é o coeficiente de expansão térmica e

$$T^{Avg} = \frac{\Delta T^{Topo} + \Delta T^{Bot}}{2}$$

25 Para as forças iniciais (como *Membros pretensiosos*É preciso simplesmente especificar $\alpha\Delta T$ para a inicial deformação induzida pela protensão

26 No arquivo de entrada de carga, basta especificar $\alpha\Delta T$ para o carregado termicamente treliça, e $\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})$ e.. h Por vigas.

26.3.3 Forças equivalentes nodais para elementos de flexão

27 Das equações anteriores,

$$m(x) = \text{ momento devido às cargas aplicadas na seção } x$$
$$f(x) = \int m(x)dx; \quad g(x) = \int f(x)dx; \quad q(x) = \int p(x)dx$$
$$\text{carga total no vão}$$

e..

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] - q$$

26.3.3.1 Uniformemente cargas distribuídas

28 Por um carga uniformemente distribuída w ao longo de todo o período,

$$m(x) = -\frac{1}{2}wx^2; \quad f(x) = -\frac{1}{6}wx^3; \quad g(x) = -\frac{1}{24}wx^4; \quad q = wL$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

29 Substituindo

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 3\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2\left(-\frac{1}{2}wL^2\right) - 4L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) + 6\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL}{2}$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] - wL = \frac{wL}{2}$$

26.3.3.2 Cargas concentradas

30 Use a função de passo da unidade para encontrar $m(x)$.. Por um carga concentrada P Atuando em.. a Do lado esquerdo com $b = L - a$,

$$\begin{aligned} m(x) &= -P(x-a)H_a && \rightarrow m(L) = -Pb \\ f(x) &= -\frac{1}{2}P(x-a)^2H_a && \rightarrow f(L) = -\frac{1}{2}Pb^2 \\ g(x) &= -\frac{1}{6}P(x-a)^3H_a && \rightarrow g(L) = -\frac{1}{6}Pb^3 \end{aligned}$$

onde nós definimos $H_a = 0$ if $x < a$, e $H_a = 1$ if $x \geq a$, e

$$q = P$$
$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 3\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb^2a}{L^2}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2(-Pb) - 4L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) + 6\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb}{1^2}\left(L^2 - 2Lb + b^2\right) = \frac{Pba^2}{L^2}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = -\frac{Pb^2}{L^3}(3L - 2b) = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$$
$$V_2^F = -\left(\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] + P\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$$

31 Se a carga é aplicada no meio do espaço ($a = B = L/2$), então a equação anterior reduz-se para

$$M_1^F = -\frac{PL}{8}; \qquad M_2^F = \frac{PL}{8};$$
$$V_1^F = -\frac{P}{2}; \qquad V_2^F = -\frac{P}{2};$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



O Discobolus (século 5, a.C.), Grécia Antiga)

Captura um corpo no pico de tensão, onde deslocamentos determinam as forças necessárias para lançar o disco.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 27

Rigidez à Mão

Abstract

Raízes no método dos deslocamentos (i.e. rigidez), são dois métodos que foram desenvolvidos no início do século 20 e que se prestam para cálculos manuais. Esses métodos parecem ter sido "avô-pai"nos livros didáticos até os dias de hoje, embora eles sejam mais de um valor pedagógico nos tempos modernos. No entanto, este capítulo irá destacar certos conceitos (como distribuição de momentos com base em rigidezs relativas nas conexões), e pode ocasionalmente fornecer um método de análise para estrutura simples. Ambos os métodos são limitados a membros flexores. A seção final aborda as contrapartes matemáticas para as soluções dos métodos de deflexão em declive (Gauss-Jordan) e distribuição do momento (Gauss-Seidel).

27.1 Introdução 1079
27.2 Deflexão de inclinação; Solução direta 1080
27.2.1 Exemplos 1082
27.3 Distribuição do momento 1090
27.3.1 Introdução 1091
27.4 Deflexão de inclinação; Distribuição do momento; Gauss-Seidel 1096
27.4.1 Ex 27.8: Deflexão de inclinação/distribuição do momento/Gauss-Seidel . . . 1096

27.1 Introdução

1 O capítulo anterior lançou o trabalho de base para o método rigidez (deslocamento) desenvolvendo relações para forças em termos de conhecidos deslocamentos em membros flexurais. Relacionamentos equivalentes para cisalhamento e torção foram desenvolvidos no Capítulo 23.

2 Considerando que o método flexibilidade (força) presta-se a calcular à mão, o método (rigidez vem em duas variedades: Cálculo manual e automação através de um programa de computador (Método da rigidez direta, Capítulo 44).

CÓPIA PARA REVISÃO

3 Assim, este capítulo cobrirá o método tradicional de cálculo manual: Deflexão de inclinação e distribuição do momento.

27.2 Deflexão de inclinação; Solução direta

Para o contexto histórico, consultar §11.5.2

4 O método foi derivado por Bendixen, 1914 e refinado por Maney, 1915 (§11.5.2)

5 O método é ilustrado pela primeira vez através da Fig. 27.1 onde uma viga é estaticamente indeterminado em primeiro grau.

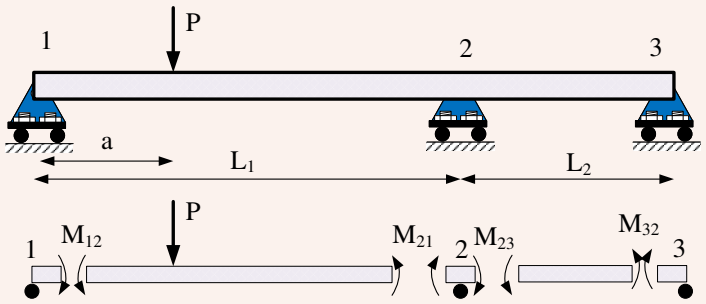


Figura 27.1: Exemplo ilustrativo para o método de deflexão da inclinação

Identificamos o grau de indeterminação cinemática§40.5): Três rotações θ_1, θ_2, e θ_3 (i.e. *Três graus de liberdade*) nos suportes.

6 Dividindo a estrutura de cada lado das amarras, desenhamos os diagramas do corpo livre e assumimos *positivo* momentos no final de cada segmento. Momentos podem ser expressos em termos de rotações desconhecidas.

7 Usando equações 26.6 e.. 26.7 Nós conseguimos

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2EK_{12}(2\theta_1+\theta_2)+FEM_{12}; & M_{21} &= 2EK_{12}(\theta_1+2\theta_2)+FEM_{21};\\ M_{23} &= 2EK_{23}(2\theta_2+\theta_3); & M_{32} &= 2EK_{23}(\theta_2+2\theta_3); \end{aligned} \tag{27.1}$$

Lembre-se disso $K = I/L$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

8 Temos 3 desconhecidos θ_1, θ_2, e θ_3 E precisamos de três equações de equilíbrio[1].. Nós escrevemos um *equações de equilíbrio para cada suporte*

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo, nós obtemos:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 4K_{12} & 2K_{12} & 0 \\ 2K_{12} & 4(K_{12}+K_{23}) & 2K_{23} \\ 0 & 2K_{23} & 4K_{23} \end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{F_{int}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{FEM_{12}}{2EK_{12}} \\ -\frac{FEM_{21}}{2E} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{F_{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Onde o momento final fixo pode ser determinado separadamente. Esta é uma equação de *equilíbrio global*.

9 Primeiro resolvemos para o deslocamentos, e depois substituímos no Eq. 27.1 para determinar momentos em cada extremidade de um segmento viga.

10 Requisitos computacionais muito menos do que para o método flexibilidade (ou método de deformação consistente) porque implicitamente contabilizamos as relações de força deslocamento. (apesar de estarmos comparando incógnitas estáticas e cinemáticas).

Definition 27.1: Método de Deflexão Deslizante

1. Ketch desviou a forma.
2. Identifique suporte desconhecido graus de liberdade (rotações e deflexões).
3. Escreva as equações de equilíbrio em todos os suportes em termos dos momentos finais.
4. Expresse os momentos finais em termos de rotações de suporte, desvios e momentos finais fixos.
5. Substitua as expressões obtidas na etapa anterior nas equações de equilíbrio.
6. Resolva equações de equilíbrio para determinar a rotação e/ou deflexões de suporte desconhecidas.
7. Use as equações de deflexão para determinar os momentos finais.

[1] Note analogia com o método de Equação dos Três Momentos§25.3) onde escrevemos uma compatibilidade de equação de rotação no nó, enquanto aqui escrevemos a equação de equilíbrio.

CÓPIA PARA REVISÃO

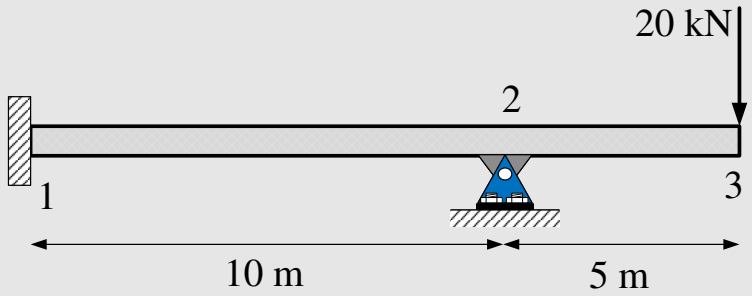
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

8. Desenhe o diagrama do momento, (cuidado com a diferença na convenção de sinais) entre os momentos de deflexão da inclinação e o diagrama de momento.

27.2.1 Exemplos

27.2.1.1 Ex 27.1: Cantilevered viga

Nós procuramos determinar M_{12} para o seguinte viga



1. A viga é cinematicamente indeterminado ao terceiro grau (θ_2, Δ_3, θ_3No entanto, ao substituir a penugem por um momento final fixo igual a +100 kN.m no suporte 2, reduzimos o grau de indeterminação cinemática para um (θ_2).
2. A relação de equilíbrio é $M_{21} + M_{23} = 0$ ou $M_{21} + 100 = 0$
3. Os membros terminam momentos em termos de rotações são (Eq. 26.6 e.. 26.7)

$$M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{4}{10}EI\theta_2 \text{ Resolver para } \theta_2$$
$$M_{12} = 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{2}{10}EI\theta_2 \text{ Determinar o momento de extremidade}$$

4. Substituindo-se pelas equações de equilíbrio, resolver para θ_2.

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \frac{10}{4EI}M_{21}\\ &= \frac{10}{4EI}(-100) = -\frac{250}{EI}\end{aligned}$$

(Rotação no sentido horário: -ve)

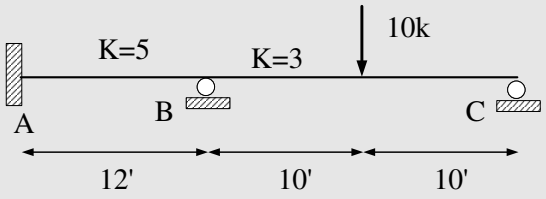
5. Substituir e resolver para M_{12}

$$M_{12} = \frac{2}{10}EI\theta_2 = -\frac{2}{10}EI\frac{250}{EI} = -50 \text{ kN.m}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

27.2.1.2 Ex 27.2: Continuando viga



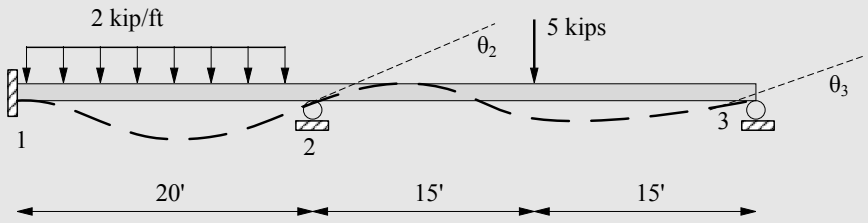
1. FEM $=PL/8 = (10)(20)/8 = 25$
2. Equações de equilíbrio
$$M_{BA} + M_{BC} = 0; \quad M_{CB} = 0$$
3. Expressões momentâneas
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B = 2EK_{AB}\theta_B = 10E\theta_B$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A) = 4EK_{AB}\theta_B = 20E\theta_B$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) + 25 = 4EK_{BC}\theta_B + 2EK_{BC}\theta_C + 25 = 12E\theta_B + 6E\theta_C + 25$$
$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_B) - 25 = 4EK_{BC}\theta_C + 2EK_{BC}\theta_B - 25 = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25$$
4. Substituta nas equações de equilíbrio
$$\begin{cases} 32E\theta_B + 6E\theta_C = -25 \\ 6E\theta_B + 12E\theta_C = 25 \end{cases}$$
5. Resolvendo
$$\theta_B = -\frac{75}{58E} = -\frac{1.293}{E}$$
$$\theta_C = -\frac{475}{174E} = \frac{2.730}{E}$$
6. Substituta para obter o momento
$$M_{AB} = 10E\theta_B = -10E\frac{75}{58E} = -12.9310$$
$$M_{BA} = 20E\theta_B = -20E\frac{75}{58E} = -25.8621$$
$$M_{BC} = 12E\theta_B + 6E\theta_c + 25 = -12E\frac{75}{58E} + 6E\frac{475}{174E} + 25 = 25.8621$$
$$M_{CB} = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25 = -6E\frac{75}{58E} + 12\frac{475}{174E} - 25 = 0\checkmark$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

27.2.1.3 Ex 27.3: Duas-espanheiras viga

Nós procuramos desenhar o diagrama do momento do seguinte viga



1. Os desconhecidos são θ_2, e θ_3
2. As relações de equilíbrio são $M_{21} + M_{23} = 0$ e.. $M_{32} = 0$
3. Os momentos finais fixos são

$$FEM_{12} = -FEM_{21} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(2)(20)^2}{12} = 66.67 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{23} = -FEM_{32} = -\frac{PL}{8} = \frac{(5)(30)}{8} = 18.75 \text{ k.ft}$$

4. Os membros terminam momentos em termos de rotações são (Eq. 26.6 e.. 26.7)

$$M_{12} = 2EK_{12}(\theta_2) + FEM_{12} = \frac{2EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{12} = \frac{EI}{10}\theta_2 + 66.67 \text{ Não utilizado}$$
$$M_{21} = 2EK_{12}(2\theta_2) + FEM_{21} = \frac{4EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{21} = \frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67$$
$$M_{23} = 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{2EI}{L_2}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75$$
$$M_{32} = 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{2EI}{L_2}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75$$

5. Substituindo-se pelas equações de equilíbrio

$$\frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67 + \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75 = 0$$
$$\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75 = 0$$

ou

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rigidez}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{\text{Força interna}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 718.8 \\ 281.25 \end{Bmatrix}}_{\text{Força externa}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

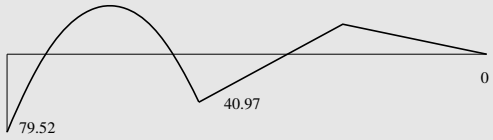
que dará $EI\theta_2 = 128.48$ e.. $EI\theta_3 = 76.38$

CÓPIA PARA REVISÃO

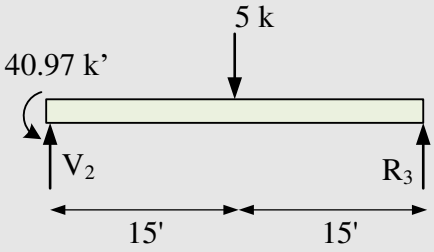
6. Substituindo pelos momentos

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{128.48}{10} + 66.67 && = 79.52 \text{ k.ft} \\
M_{21} &= \frac{128.48}{5} - 66.67 && = -40.97 \text{ k.ft} \\
M_{23} &= \frac{128.48}{7.5} + \frac{76.38}{15} + 18.75 && = 40.97 \text{ k.ft} \checkmark \\
M_{32} &= \frac{128.48}{15} + \frac{76.38}{7.5} - 18.75 && = 0 \text{ k.ft} \checkmark
\end{aligned}
$$

Observe que as duas últimas equações foram escritas simplesmente para verificar nossos cálculos.

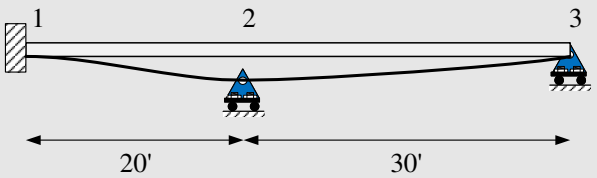


7. Notamos que o momento de midspan tem que ser separado Computado a partir das equações de equilíbrio para completar o diagrama.
8. A reação em 3 é obtida da estática



$$15(5) - 30R_3 - 40.97 = 0 \Rightarrow R_3 = 1.134$$
$$V_2 = 5 - 1.134 = 3.77$$

27.2.1.4 Ex 27.4: Duas voltas, desvio inicial



CÓPIA PARA REVISÃO

1. Já que estamos realizando uma análise elástica linear, podemos analisar separadamente a viga para a fixação de suporte, e então adicionar os momentos para aqueles devido às cargas aplicadas.
2. Os desconhecidos são θ_2, e θ_3
3. As relações de equilíbrio são $M_{21} + M_{23} = 0$ e.. $M_{32} = 0$
4. Os membros terminam momentos em termos de rotações são (Eq. 26.6 e.. 26.7)

$$\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{10}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{21} &= 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(2\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{5}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{23} &= 2EK_{23}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300}\\
M_{32} &= 2EK_{23}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{EI}{300}
\end{aligned}$$

5. Substituindo-se pelas equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}
\frac{EI}{5}EI\theta_2 + \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300} &= 0\\
\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{5EI}{300} &= 0
\end{aligned}$$

ou

$$\underbrace{\underbrace{EI\begin{bmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}}_{\text{Matriz de rigidez}} - \underbrace{EI\begin{Bmatrix}-\frac{13}{4}\\ -1\end{Bmatrix}}_{\text{Força externa}}}_{\text{Força interna}} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

que dará $\theta_2 = -\frac{5.5}{180} = -0.031$ radians e.. $\theta_3 = \frac{-1+\frac{5.5}{9}}{40} = -0.0097$ radians

6. Assim, o adicional Os momentos devidos ao acordo são

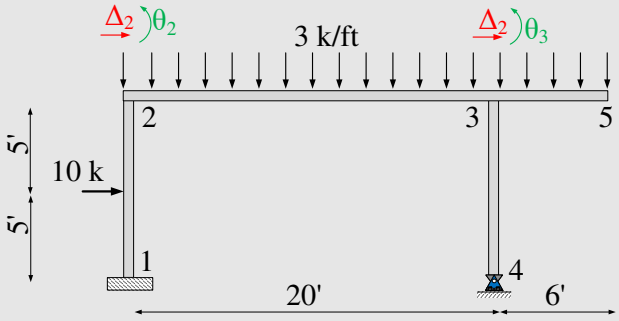
$$\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{EI}{10}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0044EI\\
M_{21} &= \frac{EI}{5}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0013EI\\
M_{23} &= \frac{EI}{7.5}(-0.031) + \frac{EI}{15}(-0.0097) + \frac{EI}{300} = -0.0013EI\checkmark\\
M_{32} &= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}(0.0097) + \frac{EI}{300} = 0.\checkmark
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

27.2.1.5 Ex 27.5: Pórtico

Determine os momentos finais para o seguinte pórtico onde $I = 60$ in^4 Para os membros verticais e 24 in^4 Para as horizontais.



1. O efeito do 35 cantilever pode ser incluído substituindo-o por seu Fim do momento.

$$M_3 = -wL\frac{L}{2} = -(3)(6)(3) = -54 \text{ k.ft}$$

2. As incógnitas e rotações são

   - Δ_2 e.. θ_2 Na junta 2.
   - θ_3 e.. θ_4 nas articulações 3 e 4.

   Observamos que devido à falta de simetria, haverá um lateral deslocamento no pórtico, e negligenciando deformações axiais, $\Delta_2 = \Delta_3$.
3. As relações de equilíbrio são

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} + M_{34} &= -54 \\ M_{43} &= 0 \\ V_{12} + V_{43} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

   Assim temos quatro equações desconhecidas deslocamentos e quatro equações. No entanto, o último duas equações são em termos de forças cortantes, e nós precisamos tê-las em o termo dos momentos finais, isso pode ser alcançado através do seguinte equilíbrio Relações

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}} \\ V_{43} &= \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}} \end{aligned}$$

   Assim, todas as quatro equações estão agora em termos de momentos.
4. Os momentos finais fixos do membro 23 são

$$\begin{aligned} M_{21}^F &= -\frac{PL}{8} = -\frac{-(10)(10)}{8} = 12.5 \text{ k.ft} \\ M_{23}^F &= -\frac{wL^2}{12} = -\frac{-(3)(20)^2}{12} = 100 \text{ k.ft} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5. Os membros terminam momentos em termos de rotações (Eq. 26.6 e.. 26.7)

$$M_{12} = 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12}^F = 0.2EI(\theta_2 - 0.3\Delta_2) + 12.5$$
$$M_{21} = 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{21}}\right) + M_{21}^F = 0.2EI(2\theta_2 - 0.3\Delta_2) - 12.5$$
$$M_{23} = 2EK_{23}\,(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^F = 0.1EI(2\theta_2 + \theta_3) + 100.$$
$$M_{32} = 2EK_{32}\,(\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32}^F = 0.1EI(\theta_2 + 2\theta_3) - 100.$$
$$M_{34} = 2EK_{34}\left(2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2)$$
$$M_{43} = 2EK_{43}\left(\theta_3 + 2\theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2)$$

6. Substituindo-se pelas equações de equilíbrio e dividindo por EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = -\frac{875}{EI}$$
$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$
$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

e a última equação de equilíbrio é obtida substituindo V_{12} e.. V_{43} e multiplicando-se por $10/EI$:

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = -\frac{83.3}{EI}$$

ou

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rigidez}} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{Bmatrix}$$

que dará

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1,375.7 \end{Bmatrix}$$

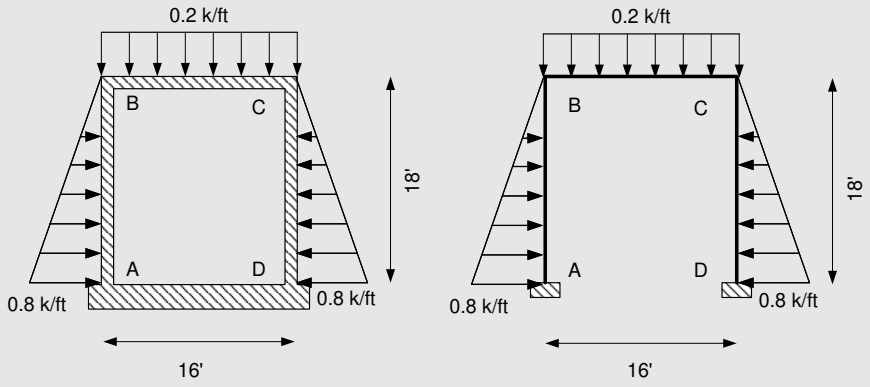
7. A substituição nas equações de deflexão dá os momentos finais

$$\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36.0 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.80 \\ 61.78 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

27.2.1.6 Ex 27.6: Caixa de bueiro



1. Da simetria $\theta_B = -\theta_C$E na base $\theta_A = \theta_D = 0$, portanto só temos um desconhecido (sem lateral deslocamento, sem vertical relativa deslocamento).
2. Os momentos finais fixos são dados por

$$FEM_{BC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(0.2)(16)^2}{12} = 4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(0.2)(16)^2}{12} = -4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{AB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{(0.8)(18)^2}{20} = 12.96 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{30} = \frac{(0.8)(18)^2}{30} = -8.64 \text{ k.ft}$$

3. Os momentos são dados por

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\theta_B}) + 4.267 = \frac{EI}{8}\theta_B + 4.267$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}(2\theta_B + 0) - 8.64 = \frac{2EI}{9}\theta_B - 8.64$$
$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}(\theta_B) + 12.96$$

4. Equilíbrio na articulação B

$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \tfrac{2EI}{9}\theta_B - 8.64 + \tfrac{EI}{8}\theta_B + 4.267 &= 0 \\ \theta_B &= -\tfrac{12.61}{EI} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

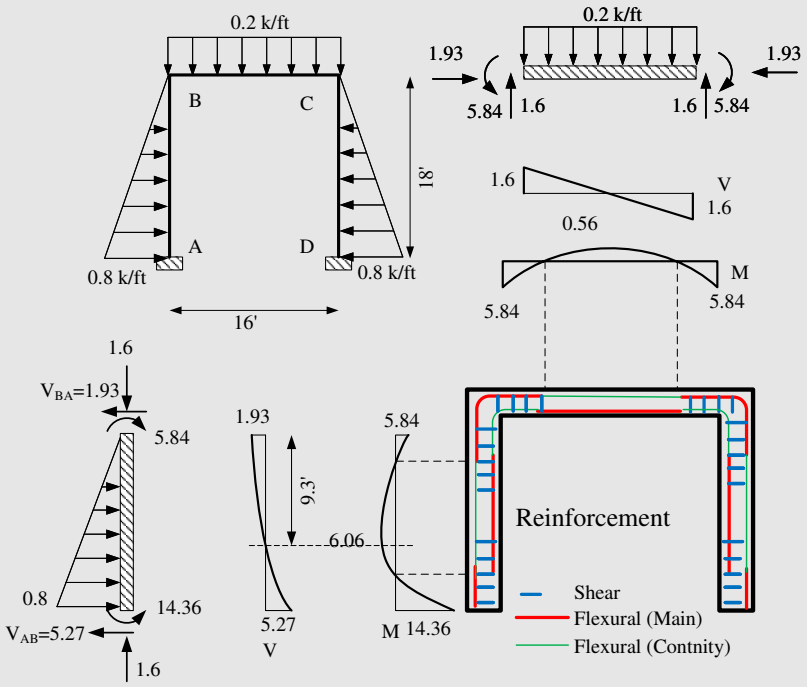
5. Substituto θ_B Para ter os momentos

$$M_{BC} = \frac{EI}{8}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 4.266 = 5.84 \text{ k.ft}$$

$$M_{AB} = \frac{EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 12.96 = 14.36 \text{ k.ft}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) - 8.64 = -5.84 \text{ k.ft}$$

6. Forças membros são determinadas pela estática. Cuidado, o diagrama do momento agora é baseado na chamada convenção de sinais "design".



27.3 Distribuição do momento

Para o contexto histórico, consultar §11.5.3

CÓPIA PARA REVISÃO

27.3.1 Introdução

11 No método de deflexão, devemos inverter um $n \times n$ Matriz. Na época em que só havia regras de slides ou calculadoras mecânicas disponíveis ($\simeq$ 1030), havia uma necessidade de um procedimento simplificado de solução.

12 Para todos os fins práticos, o método de distribuição do momento é para a deflexão da inclinação um que Gaus-Seidel é para Gaus -Jordan método de resolver equações lineares. Vamos substituir a inversão direta de uma matriz, por uma solução iterativa.

13 Fisicamente, isso implica *Travando* Todas as juntas → *Desbloqueando* Eles em sucessão (um de cada vez) → Momentos internos são *distribuídos e equilibrados* até que todas as articulações tenham girado para sua posição final (ou quase final) de equilíbrio[2].

14 Para entender melhor o método, alguns termos-chave devem ser definidos primeiro, Fig. 27.2

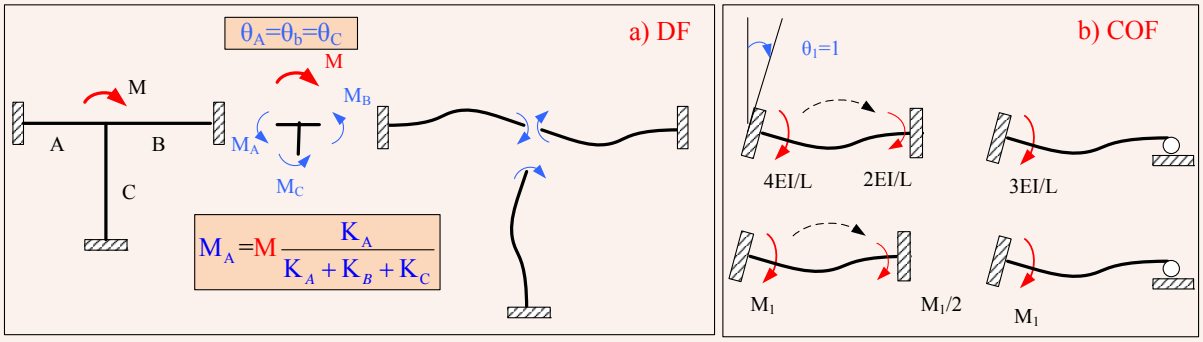


Figura 27.2: Conceitos-chave da distribuição do momento

Convenção de Assinatura

15 A convenção de sinais é a mesma que foi adotada para o método de deflexão em declive, no sentido anti-horárioO *fim do elemento* é positivo.

Momentos Fixos

16 Novamente, momentos finais fixos são o mesmo conjunto de forças definidas na deflexão da inclinação método para uma viga que está rigidamente conectado em ambas as extremidades.

17 Consistente com a convenção de sinais, os momentos finais fixos são os momentos causados pela carga aplicada no final da viga (assumindo que é rigidamente conectado).

[2]Isso é um.. *Técnica de relaxamento* análogo ao de Southwell (Southwell, 1935 PDF)

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Fator

18 Nós definimos o *rigidez fator* Como *o momento necessário para Girar o final de uma viga por um ângulo unitário de um radiano, enquanto a outra extremidade Está consertado.*. Da Eq. 26.4, nós preparamos $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$, e $\theta_1 = 1$, isso vai render

$$K = \frac{4EI}{L} \text{ Far End Fixed}$$

19 Notamos que isso é ligeiramente diferente da definição dada no Método de deflexão da inclinação (I/L).

20 Se o extremo final da viga é dobradiça em vez de fixa, então teremos um *Fator reduzido rigidez.*. Da Eq. 26.4 e.. 26.5, com $M_2 = v_1 = v_2 = 0$Nós obtemos

$$M_2 = \frac{2EI_z}{L}(\theta_1 + 2\theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{\theta_1}{2}$$

Substituindo em M_1

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2EI_z}{L}(2\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_2 &= -\frac{\theta_1}{2} \end{aligned}\right\} M_1 = \frac{3EI}{L}\theta_1 \text{ Extremidade oposta articulada}$$

21 Comparando isso reduzido rigidez $\frac{3EI}{L}$ com o rigidez de A viga, nós definimos o *Fator reduzido rigidez*

$$\text{Fator de rigidez reduzida} = \frac{K_{red}}{K} = \frac{3}{4} \text{ Extremidade oposta articulada}$$

Fator de Distribuição (DF)

22 Se um membro é aplicado em uma junta de conexão fixa onde há é um total de n membros, em seguida, do equilíbrio:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

No entanto, de Eq. 26.6, e *Supondo que a outra extremidade do Membro a ser consertado*, então

$$M = K_1\theta + K_2\theta + \cdots + K_n\theta$$

ou

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i}{\Sigma K_i}$$

23 Por isso, se um momento M é aplicado em uma junta, então a parte de M Levado por um membro ligado a esta junta é proporcional ao fator de distribuição. Quanto mais duro o membro, maior é o momento Carregado.

24 Da mesma forma, $DF = 0$ para uma extremidade fixa, e $DF = 1$ para um suporte de pino.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Fator de Carregamento

25 De novo da Eq. 26.6, e 26.7

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + M_1^F$$
$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + M_2^F$$

Observamos que se uma extremidade da viga for contida ($\theta_2 = \psi = 0$), e Não há carga de membro, então as equações anteriores reduzem-se para

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 2EK(2\theta_1) \\ M_2 &= 2EK(\theta_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}M_1$$

26 Assim, neste caso, o fator de transição representa a fração de M Isso é "levated over" da extremidade rotativa para a fixa.

$$CO = \frac{1}{2} \text{ Far End Fixed}$$

27 Se a ponta estiver presa, não haverá passagem.

Definition 27.2: Distribuição do Momento

1. Restrinja todas as rotações e traduções.
2. Aplique a carga, e determine os momentos finais fixos (que podem ser causados por carregamento de elementos ou tradução de suporte).
3. Em qualquer lugar i O equilíbrio não está satisfeito $M_{left}^F \neq M_{right}^F$, e o momento líquido é M_i
4. Nós forçamos o equilíbrio aplicando-se no nó $-M_i$, em outras palavras nós equilíbrio As forças no nó.
5. Quanto de.. M_i vai para cada um dos elementos conectados ao nó i Depende do.. fator de distribuição.
6. Mas aplicando uma porção de $-M_i$ até o fim de uma viga, enquanto o outro ainda está restrito, a partir de Eq. 26.6Metade daquele momento também deve ser Transferido para o outro lado.
7. Então nós trancamos o nó iE passar para o nó j Onde essas operações se repetem
   (a) Sum momentos
   (b) Equilíbrio de momentos
   (c) Distribuir momentos (K, DF)
   (d) Transforme momentos$CO)$

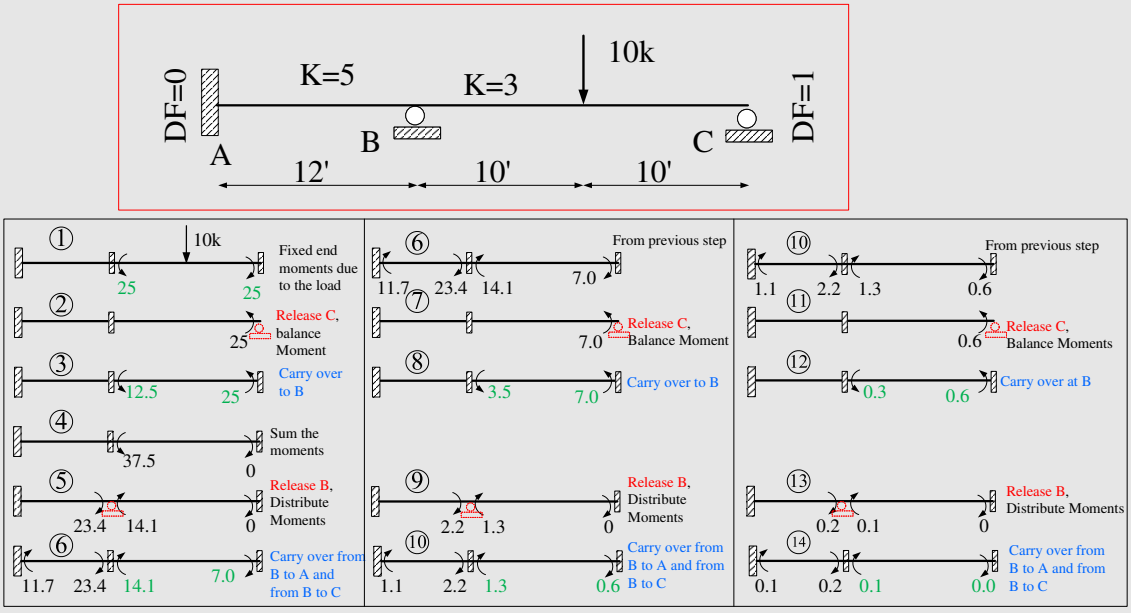
CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(e) nó de bloqueio

8. Repita as operações acima até que todos os nós estejam equilibrados, então soma Todos os momentos.
9. As operações anteriores podem ser facilmente realizadas através de uma tabulação adequada.

27.3.1.1 Ex 27.7: Continuando viga



1. Para este exemplo (anteriormente analisado pelo método de deflexão da inclinação em §27.2.1.2, os momentos de final fixo são calculados da seguinte forma:

$$M^F_{BC} = \frac{PL}{8} = \frac{(10)(20)}{8} = +25.0 \text{ k.ft}$$
$$M^F_{CB} = -25.0 \text{ k.ft}$$

2. Como o parente rigidez é dado em cada extensão, os fatores de distribuição são

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0,$$
$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5+3} = 0.625,$$
$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5+3} = 0.375,$$
$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1.$$

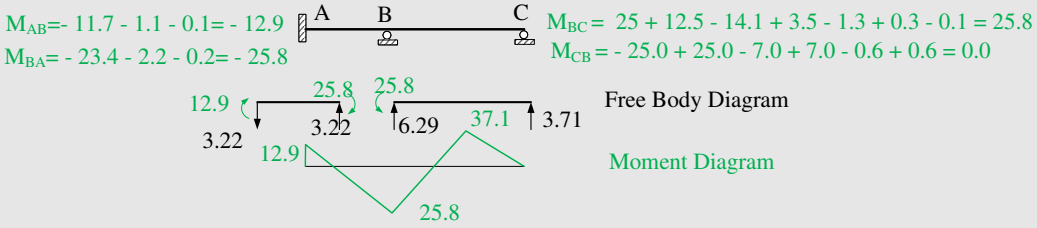
CÓPIA PARA REVISÃO

3. Os cálculos de equilíbrio são mostrados abaixo.

Junta	A	B		C	Passo	Bal.	CO
Membro	AB	BA	BC	CB			
K	5	5	3	3			
DF	0	0.625	0.375	1			
FEM			+25.0	-25.0	①		
			+12.5	+25.0	② ③	C	BC
	-11.7	-23.4	-14.1	-7.0	④ ⑤ ⑥	B	AB; CB
			+3.5	+7.0	⑦ ⑧	C	BC
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6	⑨ ⑩ ❶	B	AB; CB
			+0.3	+0.6	❷ ❸	C	BC
	-0.1	-0.2	-0.1		❹	B	AB
Total	-12.9	-25.8	+25.8	0			

4. Note que degelo nós obtemos os mesmos resultados do método de deflexão da inclinação §27.2.1.2.
5. A exatidão das respostas pode, de certo modo, ser verificada verificando que $\Sigma M = 0$ em cada lugar. No entanto, *Mesmo que as respostas finais satisfaçam esta equação em cada conjunto, isso não é de forma alguma uma verificação dos momentos iniciais de final fixo.*. Esses momentos fixos, portanto, devem ser verificados com muito cuidado antes de começar a operação de equilíbrio. Além disso, às vezes acontece que erros compensadores são cometidos no equilíbrio, e esses erros não serão aparentes quando se verifica $\Sigma M = 0$ em cada lugar.
6. Para desenhar o diagrama final cisalhamento e momento, começamos desenhando o diagrama de corpo livre de cada segmento viga com os momentos calculados, e então resolvemos a partir da estática para as reações:

$$12.9 + 25.8 - 12V_A = 0 \Rightarrow V_A = R_A = 3.22 \text{ k} \downarrow$$
$$V_A + V_B^L = 0 \Rightarrow V_B^L = -3.22 \text{ k} \uparrow$$
$$25.8 + (10)(10) - 20V_B^R = 0 \Rightarrow V_B^R = 6.29 \text{ k} \uparrow$$
$$6.29 + V_C - 10 = 0 \Rightarrow V_C = R_C 3.71 \text{ k} \uparrow$$
$$-V_B^L - V_B^R + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 9.51 \text{ k} \uparrow$$
$$\text{Check: } R_A + R_B + R_C - 10 = -3.22 + 9.51 + 3.71 - 10 = 0 \checkmark$$
$$M_{BC}^+ = (3.71)(10) = 37.1 \text{ k.ft}$$



CÓPIA PARA REVISÃO

27.4 Deflexão de inclinação; Distribuição do momento; Gauss-Seidel

28 Analisamos o mesmo viga pelo método de deflexão da inclinação e o método de distribuição do momento, §27.2.1.2 e.. §27.3.1.1 respectivamente. O segundo método era iterativo, e assim naturalmente lembra o método Gauss-Seidel de resolver um sistema de equações lineares (coberto em §L.2.3.1).

29 Pode-se facilmente mostrar que

Definition 27.3: Distribuição do momento, deflexão da inclinação e Gauss-Seidel

Resolvendo o sistema de equações lineares associadas com os métodos de deflexão da inclinação iterativamente pelo método Gauss-Seidel, então cada passo corresponderá exatamente a um correspondente no método iterativo do método de distribuição do momento. Assim, ambos os métodos produzem os mesmos resultados aproximados finais através do mesmo número de iterações.

30 Isso será mostrado no próximo exemplo.

27.4.1 Ex 27.8: Deflexão de inclinação/distribuição do momento/Gauss-Seidel

O mesmo viga foi analisado pelo método de deflexão da inclinação (§27.2.1.2), e a distribuição do momento (§27.3.1.1).

1. Agora vamos revisitar este problema resolvendo a formulação de deflexão, e escrever é como

$$E\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

   Agora vamos resolver isso pelo método iterativo Gauss-Seidel e comparar as iterações da distribuição do momento, com as dos Gauss-Seidel.
2. Começar com $\theta_C = \theta_B = 0$, e então resolver para $\theta_C \to \theta_B \to \theta_C \cdots$ até a convergência.
3. A tabela seguinte resume cada um dos passos Gauss-Seidel

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$E\theta_C$	0.0	2.083	2.670	2.724	2.729	2.730
$E\theta_B$	0.0	-1.172	-1.282	-1.292	-1.293	-1.293
M_{AB}	0.0	-11.72	-12.82	-12.92	-12.93	-12.93
M_{BA}	0.0	-23.44	-25.63	-25.84	-25.86	-25.86
M_{BC}	0.0	23.44	25.63	25.84	25.86	25.86
M_{CB}	0.0	-7.03	-0.658	-0.062	-0.006	0.000

4. De fato, recuperamos iterativamente os momentos previamente calculados pela iteração cinco.
5. Note que na distribuição do momento, resolvemos diretamente para os momentos enquanto no método de deflexão da inclinação determinamos primeiro as rotações e depois os momentos.
6. Nós finalmente comparamos *intermediário* os valores da distribuição do momento com os correspondentes do método de deflexão da inclinação

	Método	$n=1$	$n=2$
M_{AB}	MD	-11.7	-11.7-1.1=-12.8
	SD	-11.7	-12.82
M_{BA}	MD	-23.4	-23.4-2.2=-25.6
	SD	-23.44	-25.63
M_{BC}	MD	25+12.5-14.1=23.4	23.4+3.5-1.3=25.7
	SD	23.44	25.63
M_{CB}	MD	-25.0+25.0-7.0=-7.0	-7.0+7.0-0.6=-0.6
	SD	-7.03	-0.658

Claramente, os passos intermediários da distribuição do momento correspondem aos do método iterativo Gauss-Seidel. Uma conclusão similar seria tirada se nós começássemos resolvendo para θ_B.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Ponte dos Suspiros, Veneza (1603). Antonio Contino.

O arco suavemente curvado distribui momentos fletores e deflexões, adaptando analogia para deflexão inclinação e distribuição do momento.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 28

Linhas de influência

Abstract

Linhas de influência oferecem um método para determinar o máximo possível de reações de projeto ou esforços internos resultantes de uma carga móvel em uma estrutura. Eles são parte integrante de projeto estrutural. Este capítulo é intencionalmente breve, complementando a cobertura anterior da colocação de carga. Ele destaca o procedimento para determinar linhas de influência e explica o MüPrincípio de Iler-Breslau e sua aplicação a linhas de influência.

28.1 Introdução 1099
28.2 Procedimento 1100
28.2.1 Ex 28.1: Linhas de influência para um biapoiado viga . . . 1100
28.2.2 Ex 28.2: Biapoiado viga com overhangs 1103
28.3 MüPrincípio de Iler-Breslau 1103
28.3.1 Derivação 1103

28.1 Introdução

1 Até agora, a carga foi fixa, e não fizemos distinção entre carga fixa (morta) e carga variável (viva). Uma vez que uma carga variável/vivo pode se mover, uma questão chave é como uma reação ou um esforço interno em determinado ponto seria afetada pelo posicionamento da carga viva. Assim, introduzimos o conceito de Linha de influência

CÓPIA PARA REVISÃO

Definition 28.1: Linha de influência

Um linha de influência mostra como a resposta (como força cortante, momento fletor, ou reação) em um ponto específico em uma estrutura muda à medida que uma carga unitária se move através da estrutura.

2 Isso facilitará a colocação de carga para maximizar um esforço interno (cisalhamento, ou momento). Matematicamente, um linha de influência pode ser descrito como IL_{ij} Onde IL é a quantidade de juros (novamente, reação, cisalhamento ou momento) em grau de liberdade i devido a uma carga unitária em grau de liberdade j.

28.2 Procedimento

3 Para estruturas estaticamente determinadas, IL consistirá apenas em *Linhas retas* segmentos entre valores de coordenadas críticas.

4 IL para um força cortante em um determinado local conterá uma descontinuidade translacional neste local. A soma dos positivos e negativos neste local é igual a unidade.

5 Exceto em um local de dobradiça interna, a inclinação para a IL força cortante será o mesmo em cada lado da seção crítica já que o momento fletor é contínuo na seção crítica.

6 Da mesma forma, IL para um momento fletor conterá uma unidade de descontinuidade rotacional no ponto em que o momento fletor está sendo avaliado.

7 Dois métodos:

Equilíbrio: Escreva uma equação para a função que está sendo determinada, por exemplo, a equação para o cisalhamento, momento, ou força axial induzida em um ponto devido à aplicação de uma carga unitária em qualquer outro local na estrutura.

MüIler Breslau Princípio para desenhar qualitativamente linhas de influência, que são diretamente proporcionais ao real linha de influência.

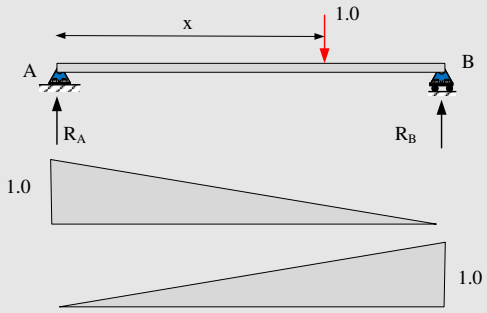
28.2.1 Ex 28.1: Linhas de influência para um biapoiado viga

A queda carga concentrada de magnitude 1 unidade se move de A para B através do biapoiado viga AB. Nós procuramos desenhar linhas de influência para reações em A e.. B, e para cisalhamento e momento em C.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Reação



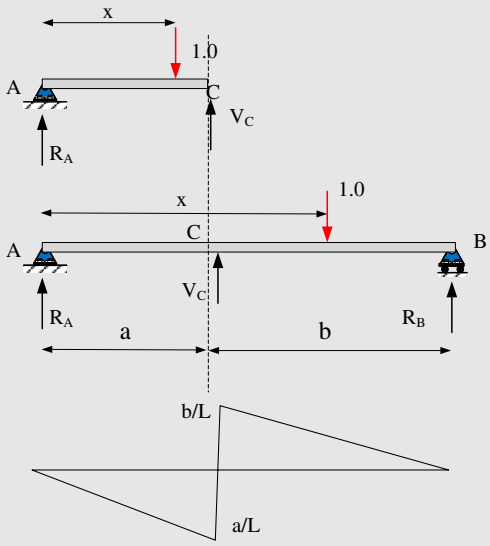
Equilíbrio

$$\Sigma M_B = 0$$
$$R_A L = 1.(L - x)$$
$$\Rightarrow R_{Ax} = 1 - \frac{x}{L}$$

Equação linear dentro x para a reação. Igualmente

$$\Sigma M_A = 0$$
$$R_B L = 1.0x \Rightarrow R_{Bx} = \frac{x}{L}$$

Cisalhamento



CÓPIA PARA REVISÃO

Segmento AC

$$\curvearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A(L) - (L-x)(1) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

V Em C devido à carga unitária em x (esquerda de C):

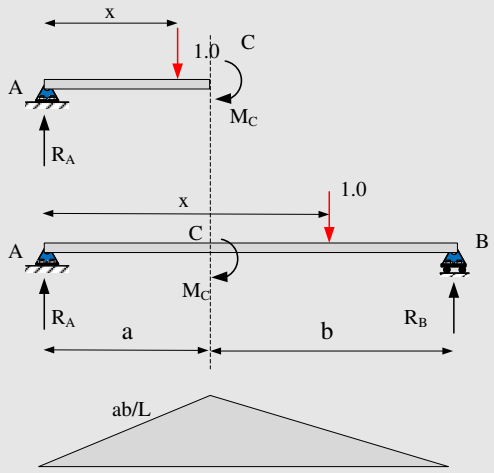
$$V_{Cx}^{-} = R_A - 1.0 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 1.0 = -\frac{x}{L}$$

Quando $x = 0$, $V_{CA} = 0$, e quando $x = a$ (antes do ponto) C), $V_{CC} = -a/L$ A unidade está além do segmento AC

$$V_{Cx}^{+} = R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

Quando $x = a$ (depois do ponto) C), $V_{CC} = 1 - a/L = (L-a)/L = b/L$ E quando $x = L$, $V_{CB} = 1 - L/L = 0$

Um momento



$$M_{Cx}^{-} = aR_A - 1.0(a-x) = a\left(1 - \frac{x}{L}\right) - (a-x) = a - \frac{ax}{L} - a + x = -\frac{ax}{L} + x$$

Quando $x = 0$, $M_{Cx} = 0$, e quando $x = a$ Logo antes do ponto C),

$$M_{CC} = -a^2/L + a = (-a^2 + aL)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

A unidade está além do segmento AC

$$M_{Cx}^{+} = aR_A = a(1 - \frac{x}{L}) = a - \frac{ax}{L}$$

Quando $x = a$ (depois do ponto C),

$$M_{CC} = a - a^2/L = (aL - a^2)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

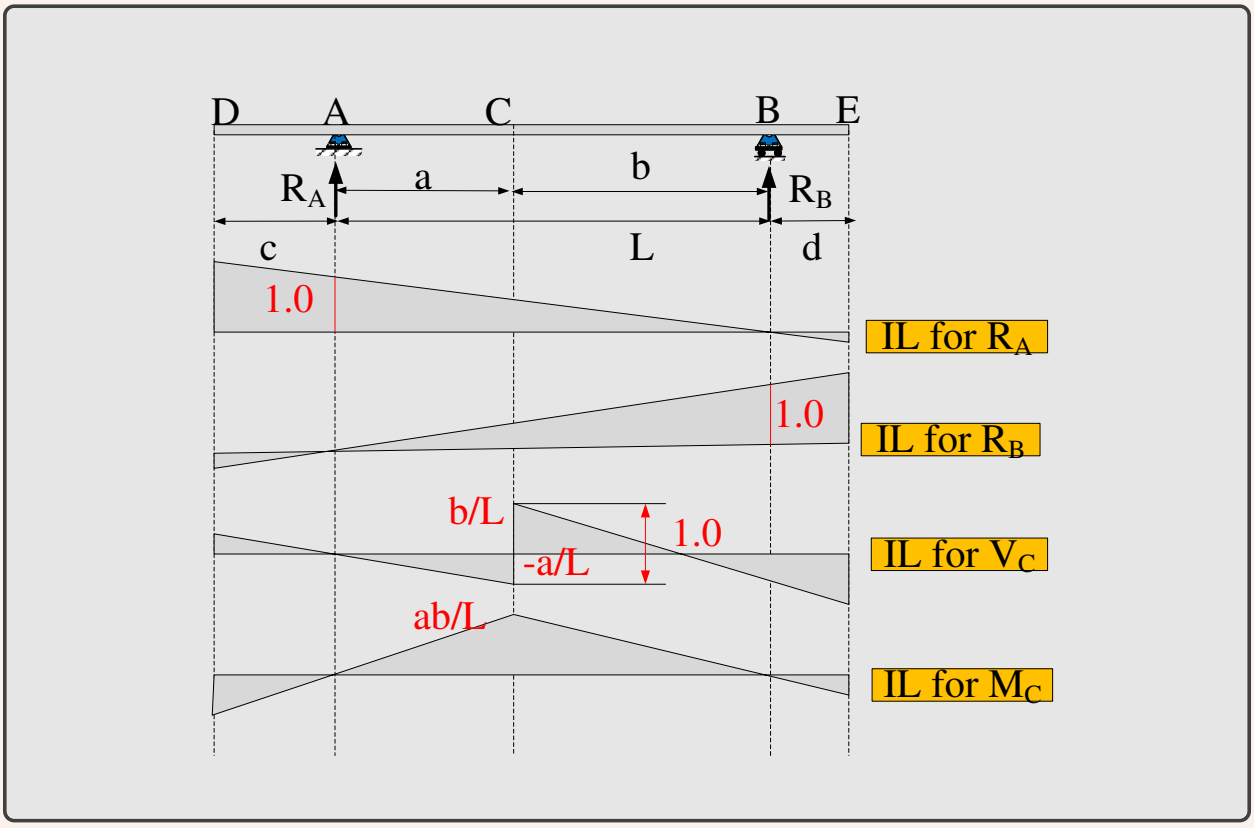
E quando $x = L$,

$$M_{CB} = a - aL/L = a - a = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

28.2.2 Ex 28.2: Biapoiado viga com overhangs



28.3 MüPrincípio de Iler-Breslau

Para o contexto histórico, consultar §11.4.4

28.3.1 Derivação

8 Lembre-se do teorema recíproco de Maxwell-Betti (MBRT)§24.2.2): *O trabalho virtual feito pelas forças no Sistema 1 passando pelo correspondente deslocamentos no Sistema 2 deve ser igual ao trabalho virtual feito por forças no sistema 2 que passam pelo correspondentedeslocamentos no sistema 1.*

9 Em seguida, consideramos os dois sistemas mostrados na Fig. 28.1 onde a força da

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

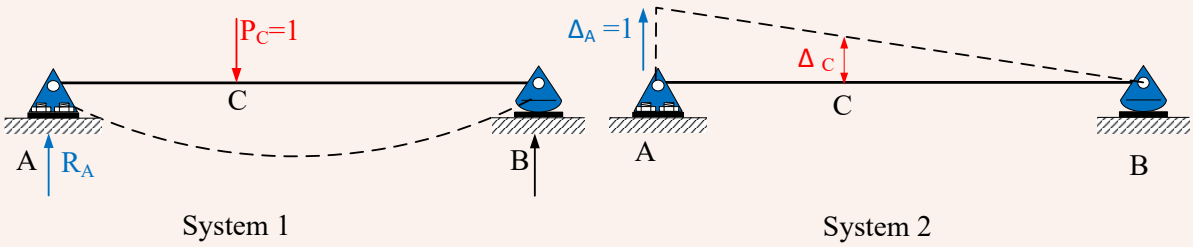


Figura 28.1: MüPrincípio de Iler-Breslau

unidade P_C pode ser "viajando"entre A e B (i.e. análoga à carga da unidade móvel que irá gerar a reação correspondente em A), e aplicar o MBRT

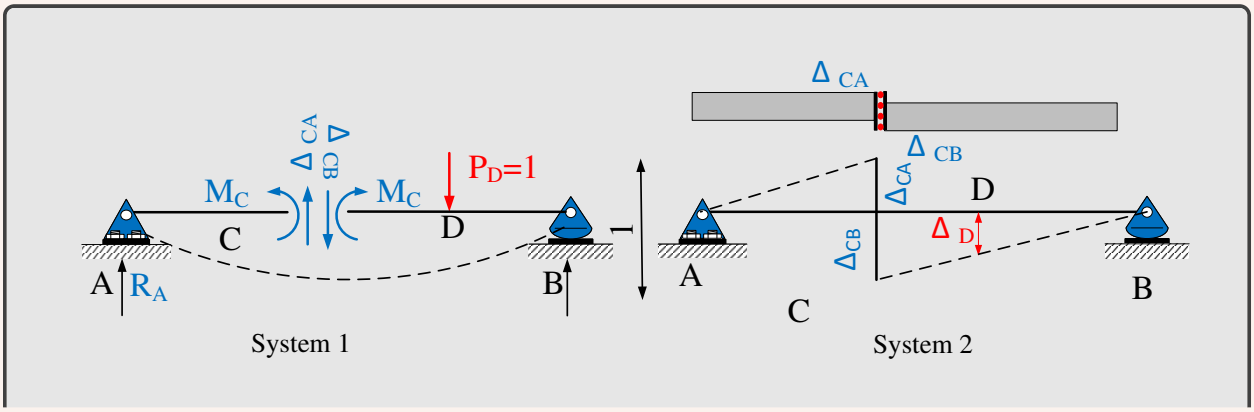
$$\underbrace{P_C}_{1}\ \Delta_C = R_A\ \underbrace{\Delta_A}_{1} \Rightarrow \Delta_C = R_A$$

Assim, o deslocamento em C é igual à reação em A. Este é o MüTeorema de Iler-Breslau.

Definition 28.2: MüPrincípio de Iler-Breslau

O linha de influência para qualquer reação ou esforço interno corresponde à forma deformada da estrutura produzida removendo a capacidade da estrutura para carregar essa força e introduzindo na estrutura modificada (ou liberada) uma deformação unitária correspondente ao retido removido.

28.3.1.1 Ex 28.3: MüIler-Breslau; Cisalhamento Linha de influência



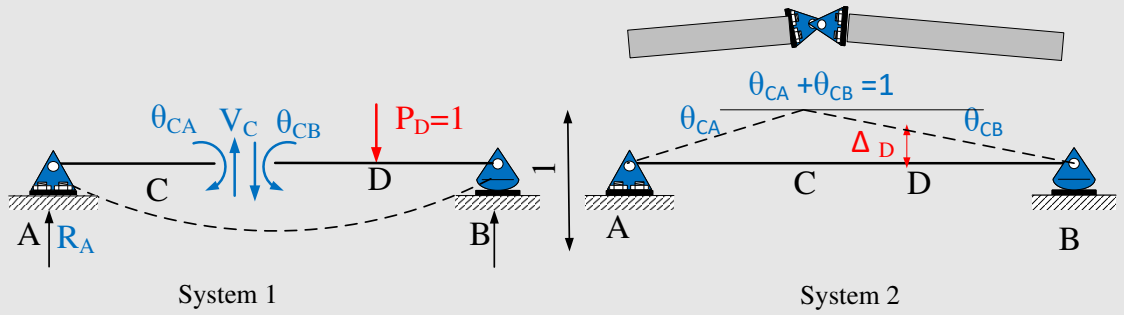
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Aplique uma liberação cisalhamento (mas nenhum momento) em C, de Maxwell-Betti

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\ \Delta_D = V_C\ \underbrace{(\Delta_{CA} + \Delta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = V_C$$

Assim, a forma desviada no Sistema 2 representa o linha de influência para força cortante V_C.

28.3.1.2 Ex 28.4: Müller-Breslau; Momento Linha de influência



System 1 System 2

Aplique um momento (mas não cisalhamento) de liberação em C, De novo, de Maxwell-Betti (como antes)

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\ \Delta_D = M_C\ \underbrace{(\theta_{CA} + \theta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = M_C$$

Assim, a forma desviada no Sistema 2 representa o linha de influência por momento M_C.



Gallop de Cavalo Árabe, Etienne-Jules Marey, 1887. Estudo cronógrafo

Influência de uma carga em movimento, paralela como linhas de influência variações de força na estrutura.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 29

Análise elástica de segunda ordem

Abstract

Este capítulo aborda a análise de estruturas onde a deformação (deslocamento]) influencia significativamente a resposta geral (equações de equilíbrio), enquanto os próprios materiais mantêm um comportamento linearmente elástico. Esta forma de análise é conhecida como Análise da Segunda Ordem (elástica).

O capítulo está dividido em duas seções principais. A primeira seção lida com problemas envolvendo grandes estruturas estáveis. A segunda seção se concentra em problemas com pequenos deslocamentos que podem eventualmente tornar-se instáveis, também conhecido como Euler Flambagem.

Uma analogia entre o governo equação diferencial para Euler Flambagem e o que governa vibrações livres também é apresentado.

Finalmente, o capítulo conclui com uma introdução concisa ao conceito de comprimento efetivo (conceito relacionado ao projeto) e ao diagrama pilar, que considera a resposta inelástica.

A contraparte numérica deste capítulo será apresentada mais tarde sob a não linearidade geométrica no Capítulo

---

29.1 Introdução 1107
29.2 Grande deslocamentos, estável . . . 1107
29.2.1 Ex 29.1: Instabilidade geométrica 1107
29.2.2 Ex 29.2: Impacto da carga axial na deformação flexural 1109
29.2.3 Ex 29.3: Grande deflexão do cantilever viga 1112
29.3 Pequeno deslocamentos, instável . . 1116
29.3.1 Barras rígidas discretas . . . 1116
29.3.2 Sistemas contínuos 1120

.

CÓPIA PARA REVISÃO

29.1 Introdução

1 Até agora, analisamos estruturas elásticas lineares com pequenas deslocamentos, permitindo-nos assumir infinitesimal deslocamentos que não impactaram o diagrama de corpo livre.

2 Na Análise de Segunda Ordem (SOA), esta suposição não é mais válida. Devemos considerar a deformação sob a carga no diagrama de corpo livre, como é o caso das estruturas do cabo (Chap 30). Este conceito está ilustrado na figura. 54.5.

3 Na SOA, os aspectos fundamentais da análise permanecem inalterados. As mesmas equações de governo devem ser satisfeitas (equilíbrio, compatibilidade, e relações tensão-deformação). No entanto, a diferença chave é que o diagrama de corpo livre deve ser responsável por finito deslocamentos. Embora estes deslocamentos podem ser considerados pequenos (permitindo simplificações como $\sin\theta \simeq \theta$) mas não infinitesimal.

4 Como resultado, o processo de solução é tipicamente mais complexo e pode envolver a resolução de equações diferenciais com constantes determinadas por conhecidos condições de contorno.

5 É importante notar que existem essencialmente duas classes de problemas em SOA:

Grande deslocamentos, estável As estruturas têm a capacidade de manter sua configuração sob a ação das cargas e voltar à posição original após as cargas serem removidas.

Pequeno deslocamentos, instável estruturas são aquelas que quando submetidas a cargas, experimentam pequenas deformações finitas que não revertem à sua configuração original, levando a uma perda de equilíbrio e potencial falha (flambagem).

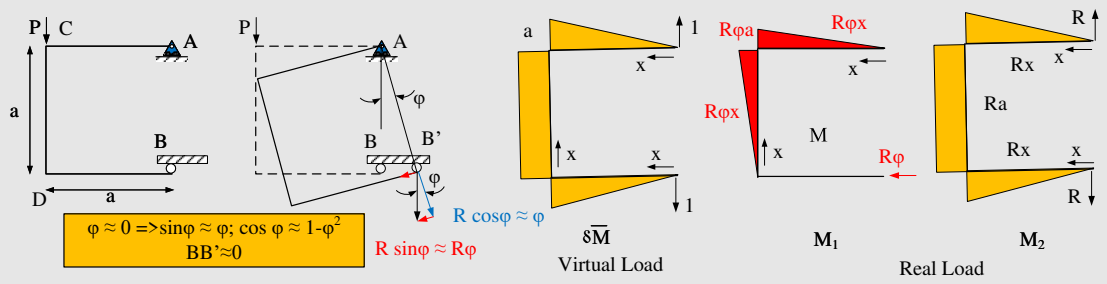
6 Examinaremos os problemas em ambas as categorias através de muitos exemplos ilustrativos.

29.2 Grande deslocamentos, estável

29.2.1 Ex 29.1: Instabilidade geométrica

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Se tentarmos determinar a reação no suporte inferior

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa = R \times 0 \Rightarrow R = \pm\infty$$

assim, o sistema não está em equilíbrio na posição mostrada.

Além disso, pode-se facilmente observar que temos uma instabilidade geométrica como todas as reações convergem para o mesmo ponto (§19.1.5, §46.2.1.5).

A reação só pode ser determinada se considerarmos a horizontal deslocamento do rolo inferior.

Ter um ângulo infinitamente pequeno ϕ, temos as forças inferiores mostradas na figura

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa - R\phi a \Rightarrow P = R\phi$$

Em seguida, procuramos eliminar ϕ derivando duas expressões separadas para o alongamento de AB em AB'.

Primeiro consideramos a geometria da forma deformada. Segmento AB aumenta para AB

$$\Delta v = AB' - AB = a(1 - cos\phi) \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

Em seguida, determinamos a mesma quantidade usando o virtual método das forças

$$\begin{aligned}(1)\Delta v &= \int_0^a (1)x\frac{Rx}{EI}dx + \int_0^a (1)a\frac{R\phi x + Ra}{EI}dx + \int_0^a (1)x\frac{R\phi x + Rx}{EI}dx \\ &= \frac{Ra^3}{EI}\left(\frac{1}{3} + \frac{\phi}{2} + 1 + \frac{\phi}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI}\left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

Desde então $\phi \ll 1$, então temos

$$\Delta v \simeq \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI} \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

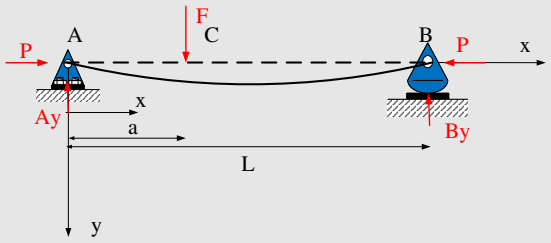
Substituindo $\phi = \frac{P}{R}$ De cima, podemos resolver para R

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P^2EI}{10a^2}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

29.2.2 Ex 29.2: Impacto da carga axial na deformação flexural



Examinamos o impacto da carga axial sobre o rigidez de uma viga pilar que é livre para girar em cada extremidade, e é submetido a uma força concentrada junto com uma constante axila. Procuramos derivar as expressões para a deflexão e esforços internos do adjacente viga. Este exemplo resolve o problema analiticamente, e o mesmo problema será resolvido mais tarde numericamente pela análise elemento finito em §60.1.2.4.

$$\begin{aligned} EI\frac{d^2y_1}{dx^2} &= -Py_1 - A_y x &&= -Py - F(L-a) && x \le a \\ EI\frac{d^2y_2}{dx^2} &= -Py_1 - B_y(L-x) &&= -Py - F\tfrac{a}{L}(L-x) && x > a \end{aligned}$$

A solução geral dessas equações é

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\cos(nx) + D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= C_2\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

Onde $n^2 = P/EI$.

Notamos que ambas as funções são linearmente dependentes de F e não linearmente dependente do força axial P.

Aplicando o condições de contorno, em A e.. B, deslocamentos são zero, o que leva a $C_! = 0$ e.. $C_2 = -D_2\tan(nL)$

$$\begin{aligned} y_1 &= D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= D_2\tan(nL)\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

Mas sabemos que há continuidade de deslocamentos e inclinações em C

$$y_1 = y_2\big|_{x=a} \quad \text{e} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}\bigg|_{x=a}$$

Expandindo

$$\begin{aligned} D_1\sin(na) &= D_2\left(\sin(na) - \tan(nL)\cos(na)\right) \\ D_1 n\cos(na) &= D_2 n\left(\cos(na) + \tan(nL)\sin(na)\right) + \frac{F}{P} \end{aligned}$$

Solucionando D_1 e.. D_2

$$D_1 = \frac{F\sin(n(L-a))}{Pn\sin(nL)} \quad \text{e} \quad D_2 = -\frac{F\sin(na)}{Pn\tan(nL)}$$

Assim, o momento será

$$M(x) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fn\sin(n(L-a))}{P\sin(nL)}\sin(nx)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O momento máximo ocorrerá se $a = L/2$, então para $x = L/2$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI}\underbrace{\frac{3(\tan\phi - \phi)}{\phi^3}}_{\lambda_y} \quad \text{onde} \quad \phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{FL}{4}\underbrace{\frac{\tan\phi}{\phi}}_{\lambda_M}$$

Onde λ são fatores de amplificação. É óbvio que a presença de uma força de compressão irá aumentar tanto deslocamento quanto o momento. Deslocamentos e momentos são linearmente dependentes de F e não linearmente dependente de P

Gostaríamos de verificar a exatidão das equações anteriores, definindo $P = 0$ (e assim $\phi = 0$), no entanto, isso não é simples como nós teríamos um 0/0Assim consideramos o limite $P \to 0$ $(\phi \to 0)$, e aplicar a regra do hospital

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{3(\tan\phi - \phi)}{\phi^3} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\phi\to 0}\frac{\tan\phi}{\phi} = 1$$

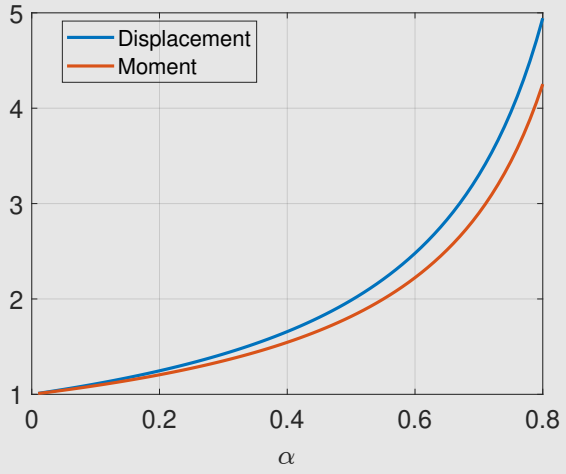
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{e} \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

portanto recuperamos as soluções clássicas para um biapoiado viga com um centro carga concentrada.

Se nós definirmos $P = \alpha P_{cr}$ Onde $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ Para isso viga pilar, daí ϕ reduz-se a

$$\phi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$$

e nós traçamos os dois fatores de amplificação. Como esperado, se $\phi \to 1$Os dois fatores de amplificação irão para o infinito.



7 A solução para uma grande deflexão de um cantilever viga não pode ser obtida a partir da teoria elementar viga, já que as suposições básicas não são mais válidas. Especificamente, a teoria elementar negligencia o quadrado da primeira derivada na fórmula de curvatura e não fornece nenhuma correção para o encurtamento do braço momento como o A extremidade carregada dos desvios viga (Bisshopp e Drucker, 1945). Para grandes cargas finitas, ele dá deflexões maiores do que o comprimento da viga! O quadrado da primeira

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

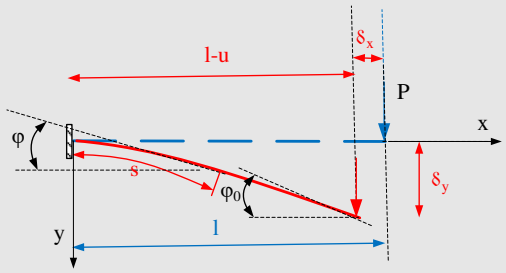
derivada e fatores de correção para o encurtamento do braço momento tornar-se a principal contribuição para a solução de grandes problemas de deflexão.

[8] A derivação de derivação a seguir ainda é baseada no teorema fundamental de Bernoulli-Euler que afirma que a curvatura é proporcional ao momento fletor. Presume-se também que a flexão não altera o comprimento da viga.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

29.2.3 Ex 29.3: Grande deflexão do cantilever viga



Considerando uma longa, fina folha de cantilever primavera, vamos L Denota o comprimento de viga, u o componente horizontal do deslocamento da extremidade carregada da viga, v a vertical correspondente deslocamento, P a carga vertical concentrada na extremidade livre, EI A rigidez da flexão.
Note que isto é um quintessential *elásticoa* Problema discutido em §8.2.
Este mesmo problema será analisado mais tarde através do método dos elementos finitos §60.2.1.

Formulação

A expressão exata para a curvatura da linha elástica pode ser indicada convenientemente em termos de comprimento do arco e ângulo de inclinação denotado por s e.. ϕ, respectivamente, para que se x é a coordenada horizontal medida da extremidade fixa da viga, o produto de EI e a curvatura da viga é igual ao momento fletor M:

$$EI\frac{d\phi}{ds} = P(L - x - \delta_x) = M \tag{29.1}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2\cos\phi \tag{29.2}$$

com $\alpha^2 = P/EI$.

Note que $dx/ds = \cos\phi$ e.. $dy/ds = \sin\phi$.

Se multiplicarmos os dois lados do Eq. 29.2 por $d\phi/ds$, então

$$\frac{d\phi}{ds}\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\alpha^2\cos\phi\frac{d\phi}{ds}$$

Integrando-se com respeito a s, e colocando $\phi = \phi_o$ e.. $d\phi/ds = 0$ Em.. $x = l$ Nós conseguimos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = -\alpha^2\sin\phi + \alpha^2\sin\phi_0$$

Assim

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} \tag{29.3}$$

Nós tomamos a raiz positiva desde $d\phi/ds$ é positivo e

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}} \tag{29.4}$$

Resolva ϕ_0 Nós vamos precisar resolver para ϕ_0 Primeiro. Reconhecendo que a viga é *Inextensível*:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

e.. ϕ_0 Pode ser resolvido numericamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Resolva δ_y
Primeiro:

$$\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin\phi$$

Substituindo o Eq. 29.3

$$\frac{dy}{d\phi}\underbrace{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}_{d\phi/ds} = \sin\phi \Rightarrow dy = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\delta_y &= \int_0^{\delta_y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0}\frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi\end{aligned}$$

Normalizando,

$$\frac{\delta_y}{l} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_0^{\phi_0}\frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi}_{L} \tag{29.5}$$

Onde $\beta^2 = \alpha^2 L^2$.

Esta é uma integral elíptica "' escondida"[a].

Transformação em Integrais Elípticos Per (Bisshopp e Drucker, 1945), a seguinte substituição é introduzida:

$$1 + \sin\phi = 2k^2\sin^2\theta = (1 + \sin\phi_0)\sin^2\theta \tag{29.6}$$

Onde

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\phi_0}{2}}$$

A transformação detalhada da Eq. 29.5 Para a forma integral elíptica padrão procede como segue.

Da Eq. 29.6:

$$\sin\phi = 2k^2\sin^2\theta - 1 \tag{29.7}$$

Em seguida, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} &= \sqrt{(1 + \sin\phi_0) - (1 + \sin\phi)} \\ &= \sqrt{2k^2 - 2k^2\sin^2\theta} = \sqrt{2}k\cos\theta\end{aligned} \tag{29.8}$$

Diferenciando os dois lados da primeira igualdade na Eq. 29.6Nós obtemos

$$\cos\phi\, d\phi = 4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \Longrightarrow d\phi = \frac{4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\phi} \tag{29.9}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Usando EQ. 29.7Nós reescrevemos o denominador de 29.9 Como

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)^2}\\ &= \sqrt{4k^2\sin^2\theta-4k^4\sin^4\theta} = 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{29.10}$$

A tapar 29.7-29.10 em 29.5Nós obtemos

$$\begin{aligned}L &= \frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)\times 4k^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2}k\cos\theta\times 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\\ &= \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\end{aligned} \tag{29.11}$$

Onde θ_1 e.. θ_2 são os valores de θ correspondente a.. $\phi=0$ e.. $\phi=\phi_0$, respectivamente. Usando 29.6, nós encontramos

$$1=\left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_1 \Longrightarrow \theta_1=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi_0}}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \tag{29.12}$$

$$1+\sin\phi_0=\left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_2 \Longrightarrow \theta_2=\frac{\pi}{2} \tag{29.13}$$

Expressão usando integrais elípticas completas Lembramos que as integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipos são definidas respectivamente como:

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

E as integrais elípticas incompletas são:

$$F(\psi,k)=\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad E(\psi,k)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

A integral em Eq. 29.11 Pode ser dividido como:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\pi/2}(\cdots)\,d\theta-\int_0^{\theta_1}(\cdots)\,d\theta$$

Para a integral de 0 para $\pi/2$, nós decompomos:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=2k^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}-K(k)$$

Usando a identidade:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{k^2}\left[K(k)-E(k)\right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós obtemos:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(2k^2 \sin^2\theta - 1\right) d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = 2\left[K(k) - E(k)\right] - K(k) = K(k) - 2E(k)$$

Da mesma forma, para a integral de 0 para θ_1:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\left(2k^2 \sin^2\theta - 1\right) d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = F(\theta_1, k) - 2E(\theta_1, k)$$

Portanto, a expressão completa para δ_y/l é:

$$\frac{\delta_y}{l} = \frac{1}{\beta}\left[(K(k) - 2E(k)) - (F(\theta_1, k) - 2E(\theta_1, k))\right] \tag{29.14}$$

Onde $\theta_1 = \arcsin(1/(\sqrt{2}k))$ De Eq. 29.12.

Equivalência com Bisshopp & Fórmula de Drucker A expressão dada por Bisshopp e Drucker, 1945 é:

$$\frac{\delta_y}{l} = 1 - \frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\theta_1, k)\right] \tag{29.15}$$

Para mostrar equivalência, usamos a equação de restrição para o inextensível viga. Da restrição de comprimento do arco:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

que, depois da mesma substituição, se torna:

$$1 = \frac{1}{\beta} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = \frac{1}{\beta}\left[K(k) - F(\theta_1, k)\right]$$

Daí:

$$\beta = K(k) - F(\theta_1, k) \tag{29.16}$$

Substituindo o Eq. 29.16 Eq. 29.14 e simplificando (notando que vários termos cancelam), recupera-se exatamente Eq. 29.15.

Assim, só há uma solução; Equações 29.14 e.. 29.15 são expressões matematicamente equivalentes para δ_y/l.

Resolva δ_x

A horizontal deslocamento da extremidade carregada é calculada a partir de Eq. 29.1 e.. 29.3 com $x = \phi = 0$.. Assim

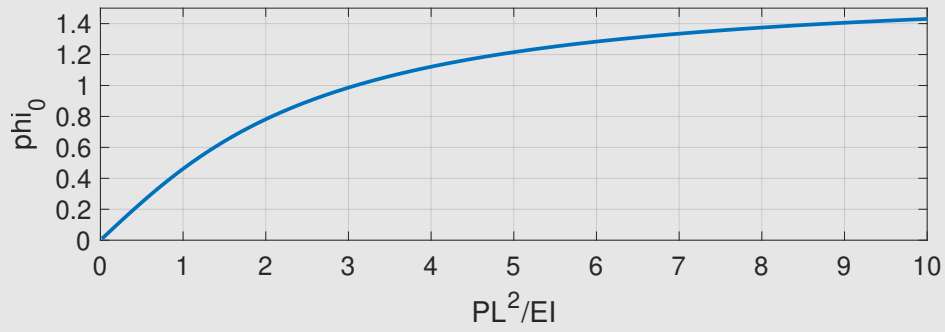
$$P(l - \delta_x) = EI\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0}$$

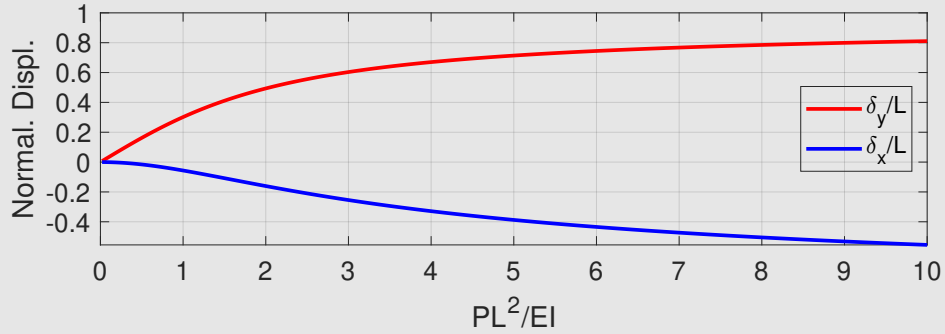
ou

$$\frac{l - \delta_x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\sin\phi_0} \tag{29.17}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.





Todos os três códigos Matlab implementando esta solução estão listados em §I.1.6.

[a] Uma integral elíptica é qualquer integral na forma geral $f(x) = \int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}$ Onde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ e.. $D(x)$ são polinômios em x e.. $S(x)$ é um polinômio de grau 3 ou 4.

29.3 Pequeno deslocamentos, instável

29.3.1 Barras rígidas discretas

9 AA requisito chave para avaliar problemas de estabilidade (e flambagem) é primeiro desenhar o diagrama de corpo livre do estado deformado. Examinaremos dois casos simples.

29.3.1.1 Sistema de barra única

10 Como introdução, vamos começar considerando uma barra rígida conectada ao suporte por uma mola e carregada axialmente na outra extremidade, Fig. 29.1.. Assumindo pequena rotação, nós tomamos momentos sobre o ponto A:

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\theta \Rightarrow P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow (P - \frac{k}{L}) = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Por isso temos três possibilidades, Fig. 29.1

Equilíbrio estável: para $P < k/L$, $\theta = 0$

Equilíbrio Neutro: para $P = k/L$, e θ pode ter qualquer valor

Equilíbrio instável: para $P = P_{cr} > k/L$, $\theta = 0$

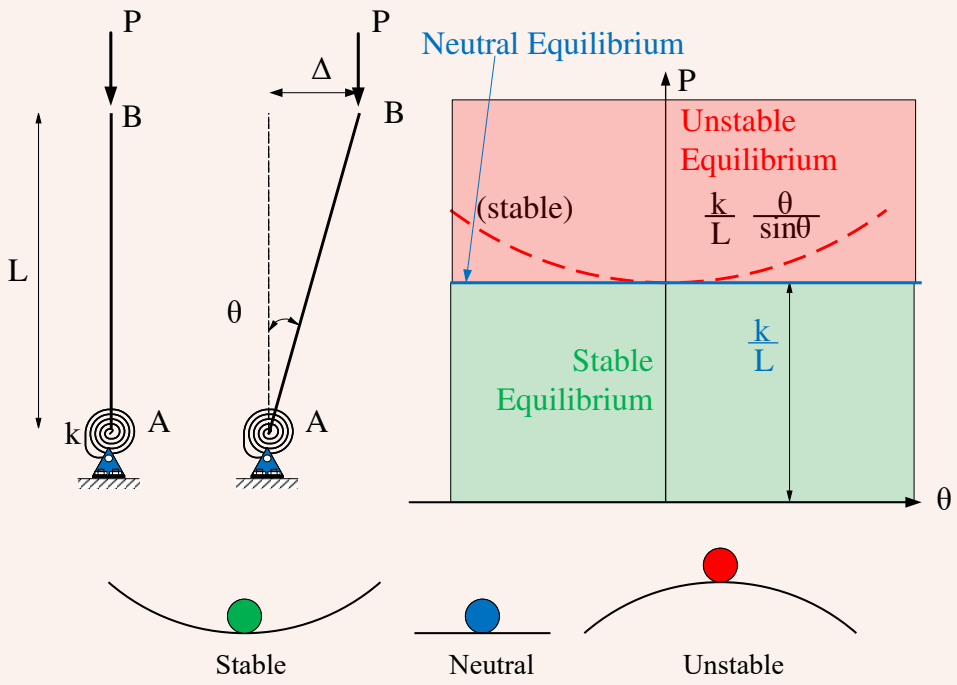


Figura 29.1: Estabilidade de uma barra rígida

11 Assim, introduzimos uma carga crítica definida por

$$P_{cr} = \frac{k}{L}$$

12 Para grande rotação, teríamos

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\sin(\theta)P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

13 Porque há mais de um caminho possívelθ) quando $P = P_{cr}$, Chamamos este ponto de *Ponto de bifurcação*.

14 Se agora assumirmos que há uma imperfeição inicial no pilar, ou seja, O pilar é inicialmente "descontrolado"', Fig. 29.2, então

$$\Sigma M_A = PL\theta - k(\theta - \theta_0) = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}(1 - \frac{\theta_0}{\theta})$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

15 Note que nós temos um *instabilidade* Problema, não confundir com flambagem (que é uma forma de instabilidade).

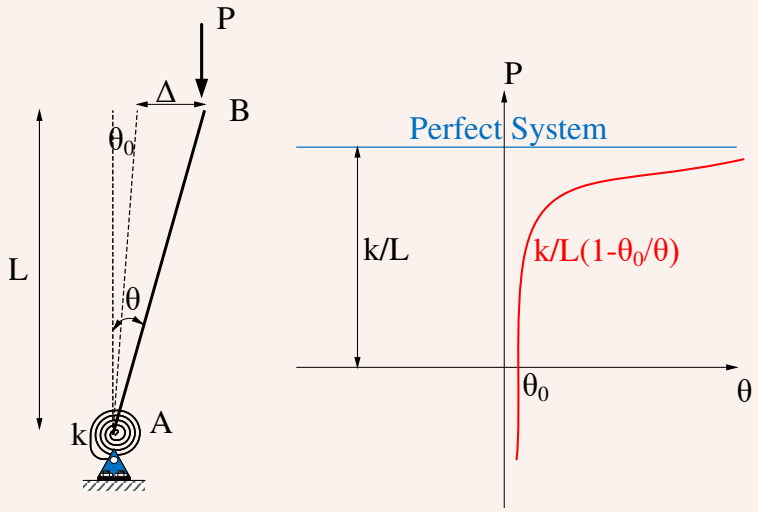
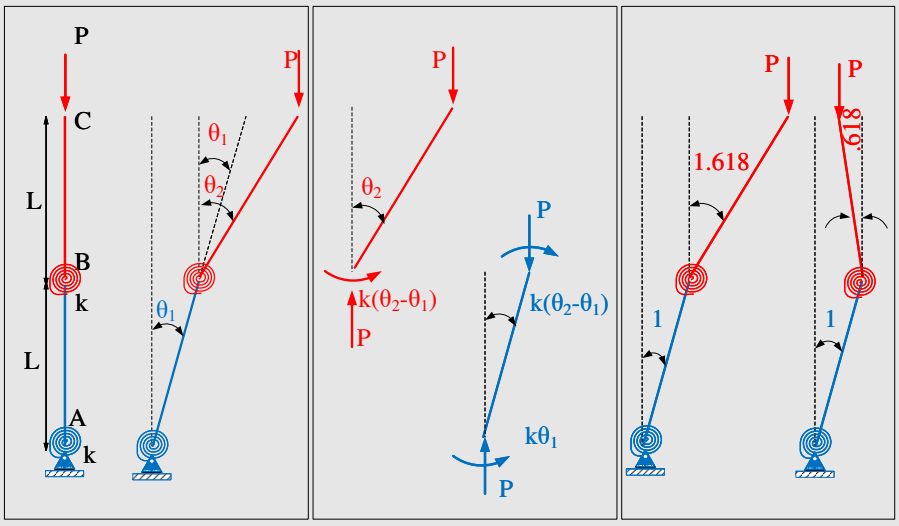


Figura 29.2: Estabilidade de uma barra rígida com imperfeição inicial

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

29.3.1.1.1 Ex 29.4: Flambagem de duas dobradiças rígidas pilar

Consideramos a estabilidade de duas barras rígidas conectadas por molas com rigidez k em cada extremidade. Procuramos avaliar a estabilidade do sistema. Para este problema, devemos considerar o equilíbrio do *estado deformado* (ao invés de não estar formado), por causa da grande deformação na presença:



CÓPIA PARA REVISÃO

$$\Sigma MB = PL\theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad \Rightarrow -\theta_1 + \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_2$$
$$\Sigma MA = PL\theta_1 + k(\theta_2 - \theta_1) - k\theta_1 = 0 \Rightarrow 2\theta_1 - \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_1$$

Essas duas equações podem ser moldadas em matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Onde $\lambda = PL/k$, este é um *autovalor* formulação E pode ser Reescrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Por isso, agora temos duas cargas críticas:

$$\begin{aligned} P_{cr_1} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 0.382\frac{k}{L} \\ P_{cr_2} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 2.618\frac{k}{L} \end{aligned}$$

Agora procuramos determinar a forma deformada para cada um dos primeiros críticos Cargas

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{bmatrix} 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.618 & -1 \\ -1 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Agora, estamos arbitrariamente preparados $\theta_1 = 1$, então $\theta_2 = 1/0.618 = 1.618$, assim O primeiro automodo é

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Finalmente, examinamos o segundo forma modal Cargas

$$\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.618 & -1 \\ -1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Agora, estamos arbitrariamente preparados $\theta_1 = 1$, então $\theta_2 = -1/1.618 = -0.618$, assim O segundo automodo é

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

29.3.2 Sistemas contínuos

29.3.2.1 Euler flambagem cargas

16 Na abordagem anterior, as cargas flambagem foram obtidas para um pilar com o essencial especificado condições de contorno (deslocamento e inclinação) resultando em uma segunda ordem equação diferencial.

17 Nesta abordagem subsequente, também consideraremos o natural condições de contorno (cisalhamento e os momentos expressos como terceiro e quarto derivados do deslocamentos). Isso resultará em uma ordem anterior equação diferencial.

18 Considerando uma viga-pilar submetido a axial e forças cortantes, bem como um momento, Fig. 29.3 (nota analogia com a estrutura do cabo, Fig. 30.2).

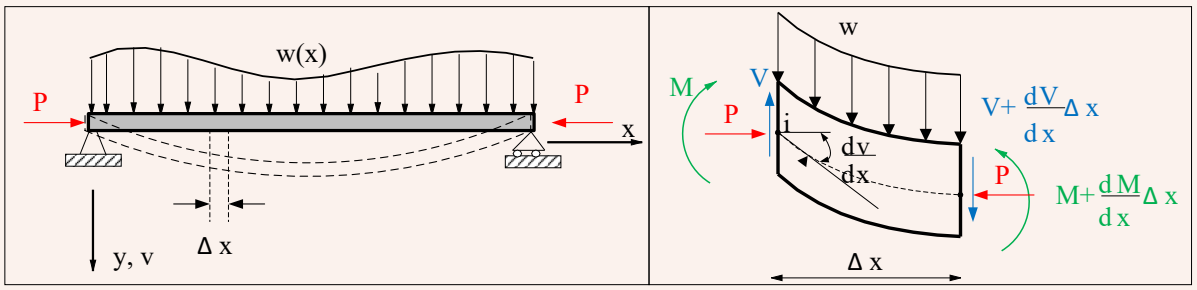


Figura 29.3: Biapoiado viga pilar; Segmento diferencial; Efeito de força axial p

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 Um momento de recapitulação com respeito a i para o segmento viga e assumindo o ângulo $\frac{dv}{dx}$ entre o eixo do viga e o eixo horizontal é pequeno, leva a

$$\underbrace{M - \left(M + \frac{dM}{dx}\Delta x\right) + w\frac{(\Delta x)^2}{2}^{0} + \left(V + \frac{dV}{dx}\Delta x\right)^{0}\Delta x}_{} + \underbrace{P\left(\frac{dv}{dx}\right)\Delta x}_{} = 0$$

Note que o primeiro termo subtraído é idêntico ao usado na derivação anterior da viga equação diferencial (Eq. 22.2).

20 Negligenciando os termos em dx^2 Que são pequenas, e depois diferenciando cada termo com respeito para xNós obtemos

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{dV}{dx} - P\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{29.18}$$

No entanto, considerando o equilíbrio no y direção dá

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{29.19}$$

21 Da teoria viga, negligenciando deformações axiais e cisalhamento, temos

$$M = -EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{29.20}$$

22 Substituindo o Eq. 29.19 e.. 29.20 em 29.18, e Supondo uma viga de uniforme, nós obtemos

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - P\frac{d^2v}{dx^2} = w$$

Substituindo $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, e $w = 0$ Finalmente conseguimos

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{29.21}$$

Novamente, notamos que considerando o equilíbrio no estado deformado introduzimos o segundo termo ao que seria o diferencial governante equação para membros flexurais (vigas).

Finalmente, notamos a analogia entre esta equação e o governo equação diferencial para uma estrutura de cabo, Eq. 30.5.

23 A solução geral deste diferencial de quarta ordem equação para qualquer conjunto de condições de contorno é

$$v = C_1 + C_2x + C_3\sin\lambda x + C_4\cos\lambda x \tag{29.22}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

As constantes $C's$ são obtidos das condições de fronteira. Para pilares, esses são mostrados na tabela 29.1 O essencial condições de contorno estão associados com deslocamento, e inclinação, os naturais com cisalhamento e momentos (através de suas respectivas relações com O deslocamento).

Tabela 29.1: Essencial e natural condições de contorno para pilares

Essencial (Dirichlet)	Natural (Neumann)
v	$\frac{d^3v}{dx^3}$ (V)
$\frac{dv}{dx}$	$\frac{d^2v}{dx^2}$ (M)

[24] Notamos que em cada nó, devemos ter duas condições de contorno, todas as combinações É possível, exceto os pares do mesmo cru. Não podemos saber e cisalhamento, ou declive conhecido e momento).

29.3.2.1.1 Ex 29.5: Flambagem de dobradiças pilar

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Se considerarmos a estabilidade de uma dobradiça pilar, os condições de contorno são deslocamento (vE o momento $\frac{d^2v}{dx^2}EI$) igual a zero em ambas as extremidades, ou

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \textbf{Essential:} & v|_{x=0} & = & 0; & v|_{x=L} & = & 0; \\ \textbf{Natural:} & \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}} & = & 0; & \underbrace{v_{,xx}|_{x=L}}_{M|_{x=L}} & = & 0 \end{array}$$

Substituição das duas condições em $x = 0$ leva a $C_1 = C_4 = 0$.
Das condições restantes, nós obtivemos

$$\begin{aligned} C_3 \sin \lambda L + C_2 L &= 0 \\ -C_3 k^2 \sin \lambda L &= 0 \end{aligned}$$

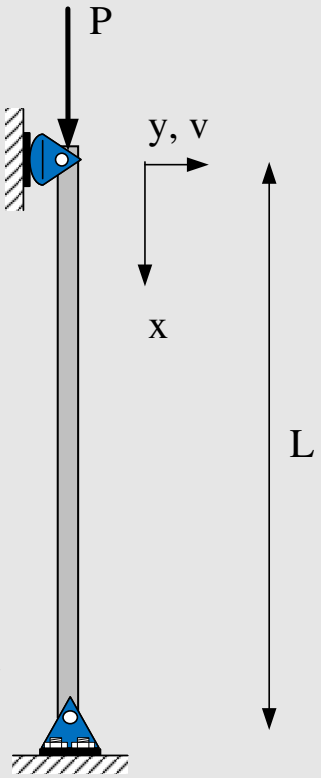
Estas relações estão satisfeitas se $C_2 = C_3 = 0$ Ou se $\sin \lambda L = C_2 = 0$..
A primeira alternativa leva à solução trivial de equilíbrio em todas as cargas, e a segunda para $\lambda L = n\pi$ para $n = 1, 2, 3 \cdots$. A carga crítica é

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

que foi derivado mais cedo usando a ordem inferior equação diferencial.
A forma da fivela é

$$Y = C3 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

e somente a forma (mas não a geometria) pode ser determinada. Em geral, vamos assumir $C_3 = 1$ e tramar y.

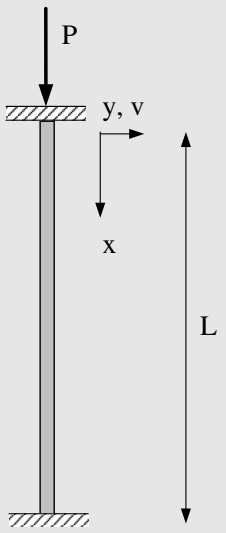


29.3.2.1.2 Ex 29.6: Flambagem de fixo-fixado pilar

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Se o pilar está agora contido contra rotação em ambas as extremidades, e usando Eq. 29.22, os condições de contorno são



$$\textbf{Essential:} \quad v|_{x=0}= 0; \quad v|_{x=L}= 0; \quad \underbrace{v_{,x}|_{x=L}}_{\theta|_{x=L}} = 0;$$

$$\textbf{Natural:} \quad \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}} = 0$$

$$\begin{aligned}
v(0) = 0 &\Rightarrow C_1 + C_4 = 0\\
v'(0) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_3\lambda = 0\\
v(L) = 0 &\Rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 \sin\lambda L + C_4 \cos\lambda L = 0\\
v'(L) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_3\lambda\cos(\lambda L) - C_4 \sin(\lambda L) = 0
\end{aligned}$$

Essas equações podem ser definidas em forma de matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix} = 0$$

O determinante é obtido de

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0\\ L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & L & \sin\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} L & \cos\lambda L\\ 1 & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \sin\lambda L\\ 0 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & L\\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2\lambda + \lambda^2 L\sin\lambda L + 2\lambda\cos\lambda L = 0$$

A primeira solução, $\lambda = 0$ é um trivial, e o próximo

$$\begin{aligned}
\lambda L\sin\lambda L + 2\cos\lambda L - 2 &= 0\\
\lambda L\sin\lambda L &= 2(1-\cos\lambda L)
\end{aligned}$$

A solução para esta equação transcendental é

$$\begin{aligned}
\lambda L &= 2n\pi\\
\sqrt{\frac{P}{EI}} &= \frac{2n\pi}{L}
\end{aligned}$$

Assim, a carga crítica e tensões são dadas por

$$\begin{aligned}
P_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2}\\
\sigma_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2 E}{(L/r)^2}
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

A forma desviada (ou automodos) pode ser obtida substituindo o valor de λ para o $c's$.

29.3.2.1.3 Ex 29.7: Flambagem de torção fixa pilar

Nós procuramos determinar a carga flambagem de um pilar fixado em $x = L$ e dobradiças em $x = 0$.
Os condições de contorno são

$$\begin{array}{rcl} v = 0, & \frac{d^2v}{dx^2} = 0 & \text{at } x = 0 \quad \text{Natural B.C.} \\ v = 0, & \frac{dv}{dx} = 0 & \text{at } x = L \quad \text{Essentia B.C.} \end{array}$$

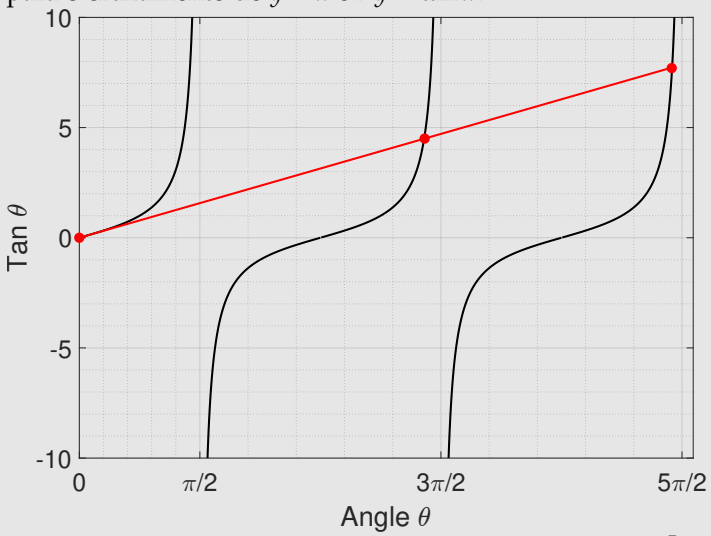
Os dois primeiros a.C. Rendimento $C_1 = C_4 = 0$E os outros dois

$$\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L = 0$$

Mas desde então.. $\cos \lambda L$ Não pode ser igual a zero, a equação anterior pode ser reduzida para

$$\tan \lambda L = \lambda L \tag{29.23}$$

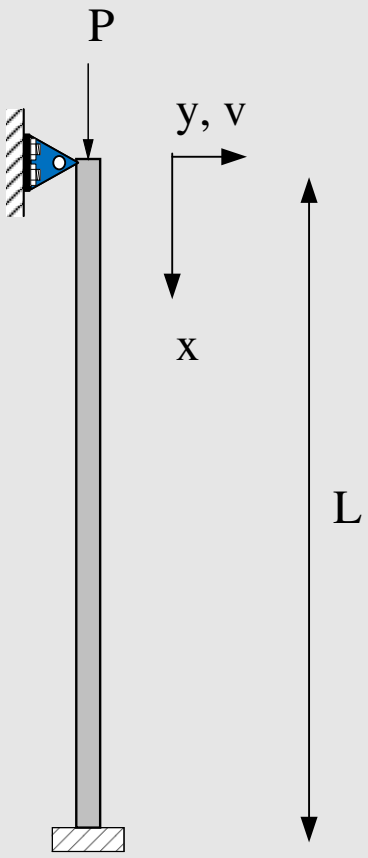
que é uma equação algébrica transcendental e só pode ser resolvida numericamente. Estamos essencialmente olhando para o cruzamento de $y = x$ e.. $y = \tan x$.



E a menor raiz positiva é $\lambda L = 4.4934$, desde que $k^2 = \frac{P}{EI}$A menor carga crítica é

$$P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(0.699L)^2} EI$$

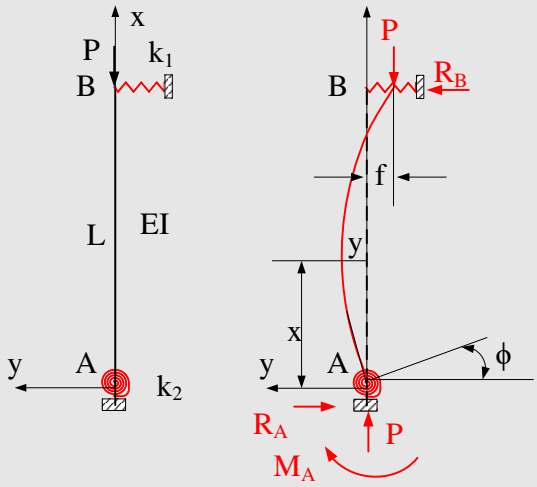
Note que se nós fossemos resolver para x De tal forma que.. $v_{,xx} = 0$ (i.e. um ponto de inflexão), então $x = 0.699L$.
A carga flambagem desta pilar será determinada numericamente em §60.1.2.1.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

29.3.2.1.4 Ex 29.8: Pilar com suportes elásticos



O adjacente pilar tem suporte elástico em ambas as extremidades: $R_B = k_1 f$ e.. $M_A = k_2 \phi$.. Nós procuramos determinar a carga flambagem P_{cr}. A qualquer momento X É

$$M(x) = -P(f + y) + k_1 f(L - x)$$

Substituindo $EId^2y/dx^2 = M(x)$Nós obtemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = f\,[k_1(L - x) - P] \tag{29.24}$$

Isso é de segunda ordem não-homogêneo equação diferencial. Se nós definirmos

$$f* = f\left[\frac{k_1}{P}(L - x) - 1\right]$$

Então, a solução geral do Eq. 29.24, e a inclinação correspondente são

$$y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + y*$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -C_1\lambda \sin \lambda x + C_2\lambda \cos \lambda x - \frac{f k_1}{P}$$

Onde

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

Resolvemos para as duas constantes C_1 e.. C_2 e.. f do seguinte condições de contorno

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = \phi; \qquad y(L) = -f$$

O primeiro condições de contorno leva a

$$C_1 + f\left(\frac{k_1 L}{\lambda} - 1\right) = 0$$

No apoio A, $M_A = f(k_1 L - P)$Assim, o ângulo de rotação é

$$\phi = \frac{M_A}{k_2} = \frac{f}{k_2}(k_1 L - P)$$

Daí o segundo condição de contorno leva a

$$C_2\lambda - f\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) = 0$$

Finalmente, o terceiro condição de contorno dá

$$C_1 \cos \lambda L + C_2 \sin \lambda L = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Essas três equações podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ \cos \lambda L & \sin \lambda L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esta é uma equação homogênea, então precisamos ter certeza de que existe uma solução (não trivial) definindo seu determinante igual a zero. Assim, depois de uma pequena substituição na terceira fileira, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ 1 & \tan \lambda L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tomando o determinante, a equação pode ser reescrita como transcendental com respeito a λ

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} \tag{29.25}$$

Casos especiais

1-A: Topo livre, primavera base: $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ Isso é simples substituição produzindo

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{P}$$

2-A: Topo fixo, mola base: $k_1 = \infty,\ k_2 \neq 0$ Da Eq. 29.25 Nós teríamos uma forma indefinida ($\infty / infty$), assim vamos aplicar L'HÎregra da Opital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ou

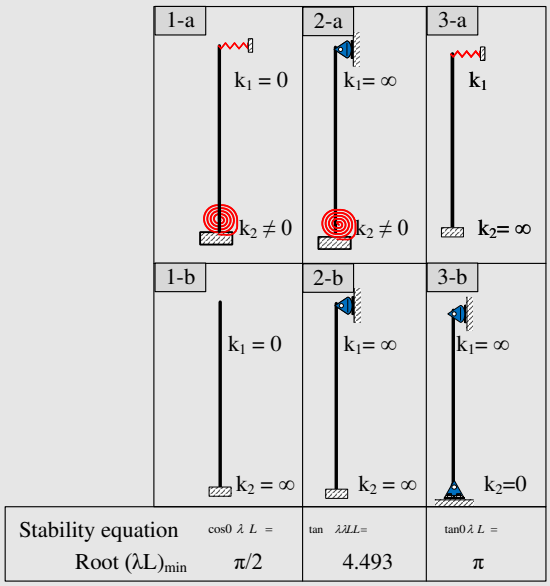
$$\tan \lambda L = \lim_{k_1 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = \frac{k_2 L \lambda}{k_2 + LP} = \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP}$$

3-A: Mola superior, base fixa: $k_1 \neq 0,\ k_2 = \infty$ Novamente, precisamos invocar L'HÎregra da Opital:

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} \left(1 - \frac{P}{k1L}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A partir dessas equações, podemos derivar (ou recuperar equações derivadas anteriormente) equações.

1-B: Top Free, base fixa: $k_1 = 0, k_2 = \infty$ por mera inspeção que temos

$$\tan \lambda L = \infty \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \frac{\pi}{2}$$

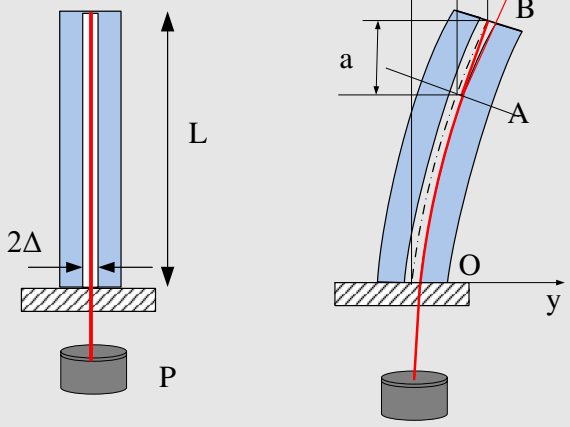
2-B: Top fixo, base fixa: $k_1 = \infty;\ k_2 = \infty$

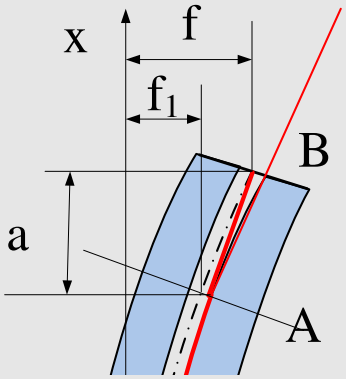
$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP} \Rightarrow (\lambda L)_{min} = 4.493$$

3-B: Top fixo, base dobradiça: $k_1 = \infty;\ k_2 = 0$ Este não é exatamente um caso especial das equações anteriores, portanto reconsideramos o Eq. 29.25.. Com o especificado condições de contorno, claramente temos

$$\tan \lambda L = 0 \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \pi$$

29.3.2.1.5 Ex 29.9: Constrangido flambagem





O tubo vai ceder quando $P = \pi^2 EI/4L^2$.. Esta é a força limite enquanto o desvio f Não excedeu Δ.

No entanto, em algum momento, a corda entrará em contato com a parede curva do tubo, e então teremos duas porções para considerar, OA e.. AB.

CÓPIA PARA REVISÃO

Na porção OA O momento é simplesmente igual a $P\Delta$E o tubo é dobrado em uma curva de segundo grau $M/EI = d^2y/dx^2$, integrando duas vezes e aplicando o condições de contorno na base)

$$y = \frac{P\Delta}{2EI}x^2$$

A deflexão em A É

$$f_1 = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2$$

Agora, nós precisamos resolver para f.. De considerações geométricas, se a barra não estava dobrada na porção AB, o deslocamento em B Seriam

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L-a} a = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a$$

No entanto, a segunda porção curva-se apenas o suficiente para B para partir da tangente AB por Δ.. Por isso

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a + \Delta$$

ou

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L^2-a^2) + \Delta$$

Mas, ainda não temos a. a é o comprimento de uma barra fixada em uma extremidade que perde estabilidade sob a força P

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{\pi^2 EI}{4P}$$

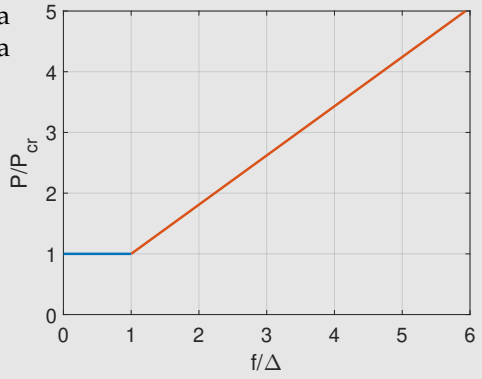
Substituindo em f

$$f = \Delta\left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right)$$

ou

$$\frac{f}{\Delta} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{P}{P_{cr}} - 1\right) + 1$$

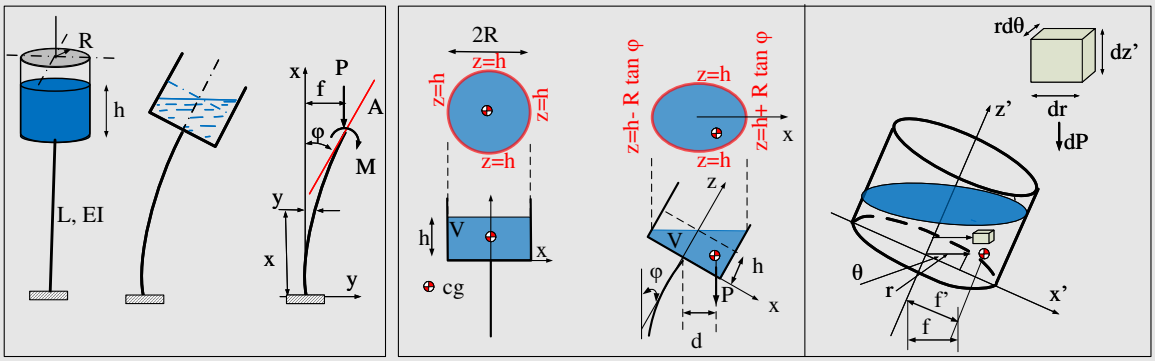
Onde $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$.



29.3.2.1.6 Ex 29.10: Torre de água

Ao projetar um contador de água, uma questão natural é se a estrutura é estável. Em que nível de água no tanque o pólo de apoio perderá estabilidade (Feodossiev, 1977).

CÓPIA PARA REVISÃO



Governando equação diferencial

Começamos desenhando o diagrama de corpo livre com uma pequena deformação A curva elástica da barra é a seguinte:

$$EIy'' = P(f - y) + M$$

A força P é obviamente igual ao peso da água

$$P = \gamma \pi R^2 h$$

Onde γ é o peso específico da água.

Momento imposto

Em seguida, procuramos derivar o momento M causada pela água no recipiente cilíndrico inclinado. O ângulo de inclinação é ϕE o momento é sobre z-eixo, que é ortogonal para o suporte vertical.

Quando o cilindro é inclinado por um ângulo ϕ, o centro de turnos de massa. Nós derivamos a horizontal deslocamento d do centro de massa do eixo vertical através do ponto de apoio.

Nós usamos coordenadas cilíndricas com o z' eixo alinhado com o eixo de simetria do cilindro, x -eixo alinhado com a direção que o cilindro foi inclinado. Nós definimos θ De tal forma que.. $x = r\cos\theta$.. Em termos deste sistema, a superfície livre da água é dada pela equação

$$z = h + \alpha x = h + \alpha r \cos\theta$$

Onde $\alpha = \tan\phi$.. O volume de integração é então dado por

$$0 \le r \le R \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le z \le h + \alpha r \cos\theta$$

Então.. $dV = rdrd\theta dz$E a massa do peso da água é $P = \gamma \pi h R^2$.

CÓPIA PARA REVISÃO

Nós procuramos determinar o centroide da água (entre os x') eixo, e a única complicação é que temos que cuidar com a ordem em que avaliamos as integrais.

$$\begin{aligned} df' &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{h+\alpha r\cos\theta}(r\cos\theta)rdrd\theta dz \\ &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}(hr^2\cos\theta+\alpha r^3\cos^2\theta)drd\theta \\ &= \frac{\gamma\pi}{P}\int_0^R(\alpha r^3)dr \\ &= \frac{\alpha\gamma R^4}{4P} = \frac{\alpha R^2}{4h} \end{aligned}$$

Finalmente, estamos interessados no x Coordenar o centroide, substituir, nós obter

$$f = f'\cos\phi = \frac{\tan\phi R^2}{4h}\cos\phi = \frac{R^2}{4h}\sin\phi \simeq \frac{R^2}{4h}\phi$$

O momento resultante será então

$$M = Pd = (\gamma\pi R^2 h)\frac{R^2}{4h}\phi = \frac{\gamma\pi R^4}{4}\phi$$

Esta expressão é independente de hE claramente a derivação está errada.

Assim, adotamos a equação fornecida por Feodossiev, 1977 (embora sem derivação.

$$M = \frac{\gamma\pi R^2}{4}(2h^2+R^2)\phi$$

Solução

Nós resolvemos o diferencial de governo equaiton

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + f + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi$$

com $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

Condições de contorno

Quando $x = 0$, $y = 0$ e.. $y' = 0$; Quando $x = l$, $y = f$ e.. $y' = \phi$.. Essas condições darão

$$\begin{aligned} B + f + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A &= 0 \\ A\sin\alpha l + B\cos\alpha l + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A\alpha\cos\alpha l - B\alpha\sin\alpha l &= \phi \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Das duas últimas equações, encontramos

$$\frac{\alpha l \tan \alpha l}{4\frac{h}{l}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+\frac{R^2}{l^2}\right)=1$$

Substituindo o valor de PNós obtemos

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EI}}l=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}}\sqrt{\frac{h}{l}}$$

A quantidade necessária h/l é então determinado a partir da equação transcendental

$$\frac{a}{4}\frac{\tan a\sqrt{\frac{h}{l}}}{\sqrt{\frac{h}{l}}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+b^2\right)=1$$

com

$$a=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}} \quad \text{e} \quad b=\frac{R}{L}$$

29.3.2.2 Analogia com vibração livre

25 O problema considerado tem grande semelhança com a vibração de um sistema de duas molas em massa, Fig. 29.4 que também é um *Problema de autovalor*.

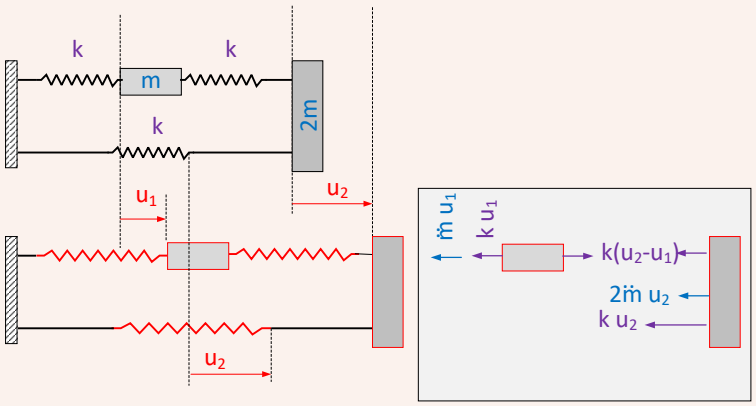


Figura 29.4: Dois sistemas dinâmicos

26 Cada massa é submetida a uma força inercial igual à massa vezes A aceleração, e a força da primavera:

$$2m\ddot{\mathbf{u}}_2+k\mathbf{u}_2+k(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=0$$
$$m\ddot{\mathbf{u}}_1+k\mathbf{u}_1+k9\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_10=0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

ou em forma de matriz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{U}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

27 A equação característica é $|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}|$ Onde $\lambda = \omega^2$, e ω é o frequência natural.

$$\begin{vmatrix} 2h - \lambda & -h \\ -h & 2h - 2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Onde $h = k/m$.. Isso reduz ao polinômio

$$\lambda^2 - 3h\lambda + \frac{3}{2}h^2 = 0$$

Resolvendo, $\lambda = (3 \pm -\sqrt{3})h/2$ ou

$$\omega_1 = 0.796\sqrt{k/m}$$
$$\omega_1 = 1.538\sqrt{k/m}$$

28 Para encontrar o formas modais ϕ_1 e.. ϕ_2 (magnitudes relativas do Substituímos a equação característica e definimos o primeiro elemento igual a 1:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.3660 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.3660 \end{Bmatrix}$$

29.3.2.3 Fatores de comprimento efetivos K

29 Lembre-se que a carga de Euler flambagem foi derivada para um preso pilar. Em muitos casos, um pilar terá diferente condições de contorno. Pode ser mostrado que em todos os casos, a carga flambagem seria dada por

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{29.26}$$

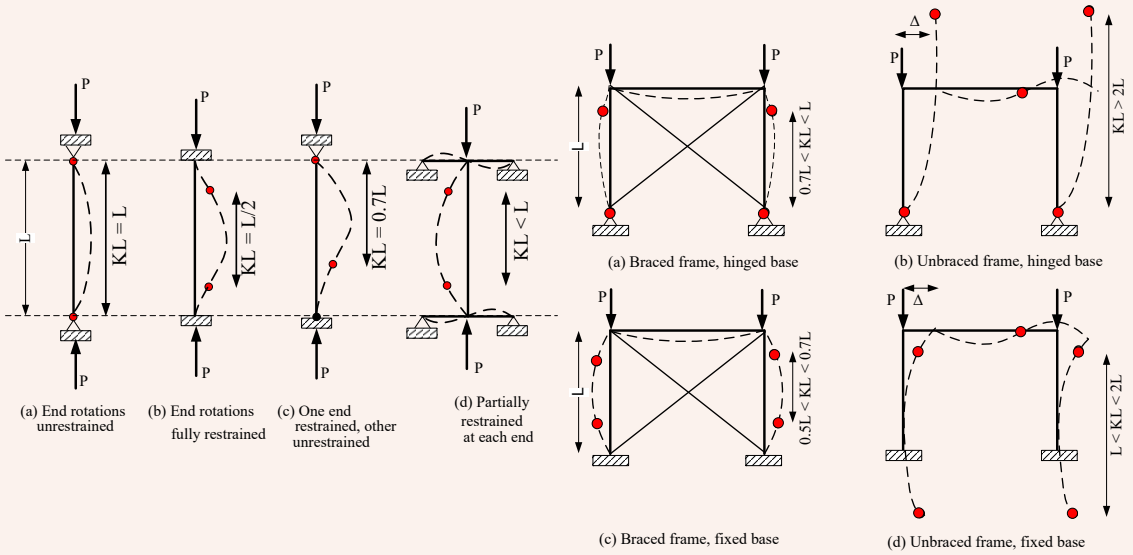
Onde K é chamado de *Fator de comprimento efetivo* , e KL é o *comprimento efetivo*. Assim

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r_{\min}}\right)^2}$$

A proporção $\frac{KL}{r_{\min}}$ é chamado de relação de esbeltez .. Note que $r_{\min}$ deve ser o menor raio de giro na(s) direção(ões) não travada(s).

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Vigas (b) Pórticos

Figura 29.5: Comprimentos efetivos para viga e pórticos

30 O comprimento efetivo, só pode ser determinado através de métodos numéricos ou aproximados, e é o *Distância entre dois adjacentes* Pontos de inflexão, Fig. 29.5,

31 Os gráficos mais usados para a determinação de comprimento eficaz são os produzidos pelo Conselho de Pesquisa de Estabilidade Estrutural. O gráfico de alinhamento, para um indivíduo pilar, Fig. 29.6 é mostrado na figura. 29.7[1]. Deve-se notar que este gráfico

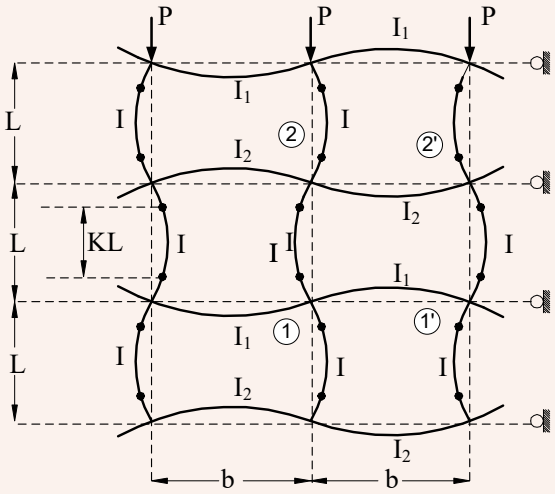


Figura 29.6: Pilares comprimentos eficazes em um multi-baia multi- andares pórticos

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

assume que todos os membros ainda estão na faixa elástica.

32 Este tipo de gráfico é chamado um *Um nomograma* ou *Nomógrafo*. Infelizmente, é uma arte esquecida que representa graficamente um relacionamento matemático. Em outras palavras, é um diagrama bidimensional projetado para permitir a computação gráfica aproximada de funções matemáticas (geralmente complexas). Foi usado extensivamente por muitos anos para fornecer aos engenheiros cálculos gráficos rápidos de fórmulas complicadas a uma precisão prática. É uma pena que agora esteja fora de moda e substituída por computador, e podemos tender a confiar em todos os dígitos significativos que nos são concedidos. O mesmo vale para regras de slides.

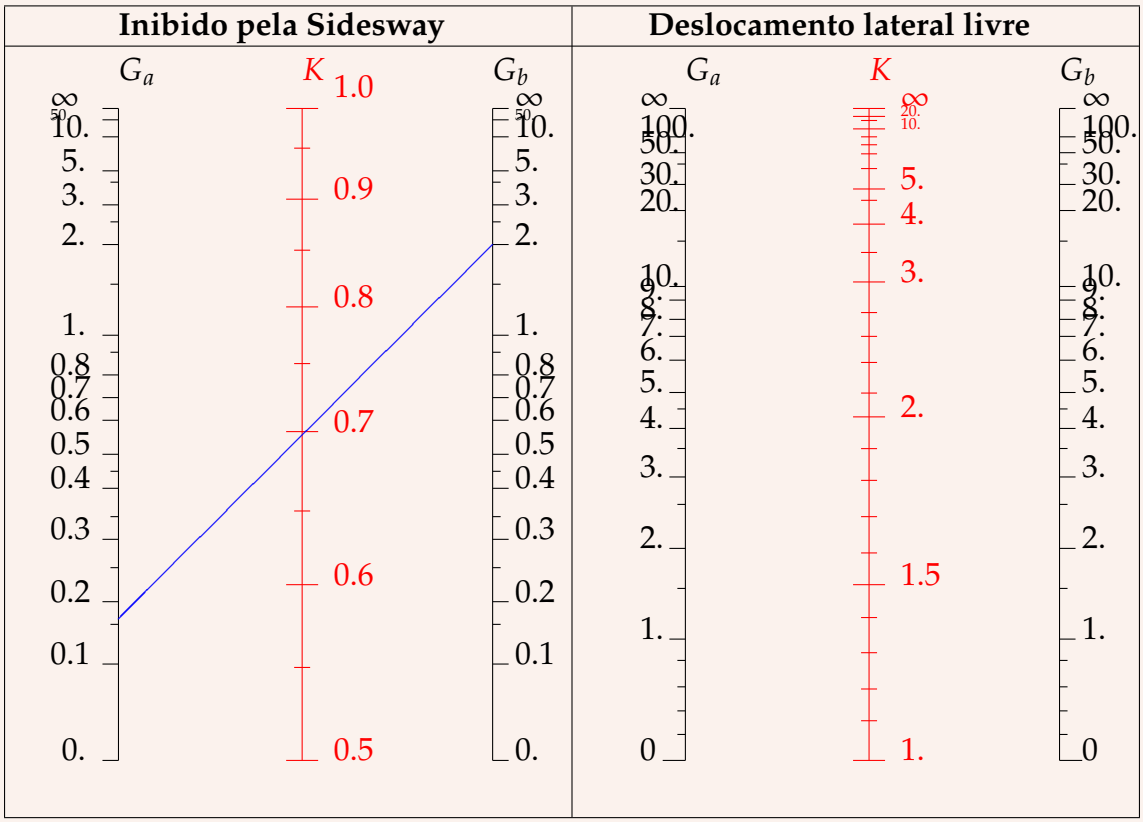


Figura 29.7: Gráfico de alinhamento para conexões semiflexíveis (American Institute of Steel Construction, 2016)

33 O uso do gráfico de alinhamento envolve computação G em cada extremidade do pilar usando a seguinte fórmula

$$G_a = \frac{\sum \frac{I_c}{L_c}}{\sum \frac{I_g}{L_g}}$$

[1]na figura G_a e.. G_b são iguais a 0,18 e 2,0 respectivamente, o correspondente K é assim igual a 0,7. A linha azul é chamada de *Linha de índice* ou *Isopleth*, a linha vermelha central é o *eixo da escala*.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Onde G_a é o rigidez no final a do pilar, I_c, I_g são os momento de inércia do pilares e vigas respectivamente. A soma deve incluir apenas os membros que estão rigidamente conectados para aquele lugar e deitado no avião pelo qual flambagem está sendo considerado.

34 Por isso, uma vez G_a e.. G_b são determinados, esses valores são conectado por uma linha reta no gráfico apropriado, e k É O ponto de intersecção dessa linha com o eixo médio.

35 Alternativamente:

$$\frac{G_A G_B}{4}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right)\left(1 - \frac{\pi/K}{\tan \pi/K}\right) + \frac{2\tan \pi/2K}{\pi/K} = 1$$

McGuire e Winter, 1968, pg. 467

29.3.2.4 Inelástico pilares

36 Há duas cargas limitantes para um pilar

1. Rendendo-se da seção bruta $P_{cr} = F_y A_g$, que ocorre em Curto e duro pilares
2. Elástico (Euler) flambagem, Eq. 29.26 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$, em longo esbelto pilares.

37 Essas duas expressões são valores assintóticos para o real flambagem. Cargas de falha intermediária são causadas pela presença de resíduos tensões que, por sua vez, dão origem a *Inelástico flambagem*.

38 Inelástico flambagem flambagem ocorre quando o tensões (média) ainda não atingiu o rendimento tensão, e é baseado no módulo tangente E_t que é inferior ao módulo inicial E.

39 Residual tensões (causado por resfriamento desigual) iniciará inelástico flambagem, Fig. 29.8.

40 A curva inelástica flambagem tem que ser assintótica tanto para o elástico de Euler flambagem (para esbelto pilares), como para o rendimento tensão (por rígido pilares).

41 O Conselho de Pesquisa em Estabilidade Estrutural (SSRC) propôs uma curva parabólica que proporciona uma transição entre elástico flambagem e rendimento, assim representando a presença de resíduos tensões e o resultado inelástico flambagem, Fig. 29.9.

$$\sigma_{cr} = \sigma_y\left[1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E}\left(\frac{KL}{r_{min}}\right)^2\right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

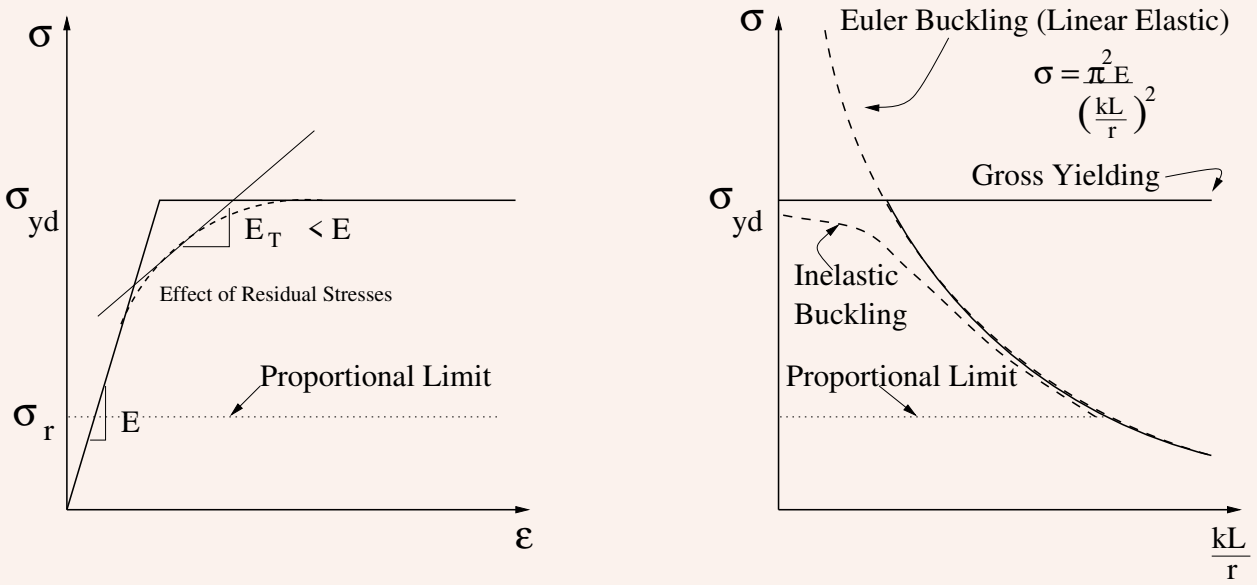


Figura 29.8: Inelástico flambagem

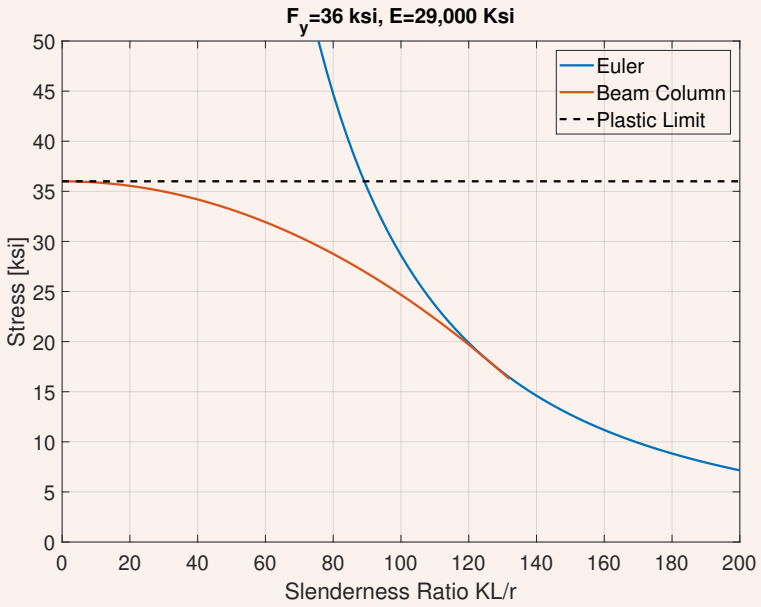
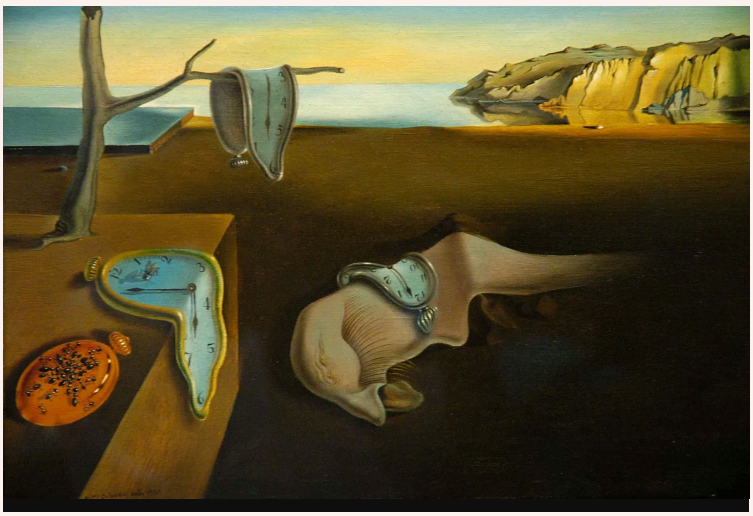


Figura 29.9: Euler flambagem, e curva de ssrc pilar

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A Persistência da Memória, Salvador Dalí, 1931

Relógios de fusão surreal representam deformações extremas, tornando a pintura uma metáfora perfeita para grandes deslocamentos onde as estruturas se comportam além de pequenas-deformação suposições.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 30

Estruturas de cabos

Abstract

Os cabos são estruturas capazes de suportar grandes deformações, adaptando continuamente sua geometria para acomodar cargas, e carregando apenas forças de tração. Essas características tornam os cabos valiosos e desafiadores para analisar, e essas complexidades serão exploradas neste capítulo. Começamos com cargas concentradas e cabos funiculares, e então vamos para cargas distribuídas. Cargas distribuídas vêm em duas variedades: aqueles distribuídos sobre o comprimento projetado, resultando em uma forma parabólica, e aqueles distribuídos ao longo do arco de comprimento do cabo, dando origem a uma forma catenária. Em ambos os casos, diferentes condições de partida (comprimento, inclinação, suportes, etc.) requerem diferentes conjuntos de equações. Também exploraremos o impacto da temperatura, a extensibilidade do cabo e sua protensão. Finalmente, o capítulo será ilustrado com numerosos exemplos de complexidade crescente para cobrir completamente o assunto.

30.1 Introdução 1139
30.2 Cargas concentradas 1140
30.2.1 Ex 30.1: Cabo funicular . . . 1141
30.2.2 Ex 30.2: Cabo funicular inclinado 1143
30.2.3 Ex 30.3: Gôndola bi-cabo . . 1144
30.3 Cargas distribuídas; 1144
30.3.1 Equação de equilíbrio 1145
30.3.2 qdx; Carga lateral; Parabola . 1146
30.3.3 qds; catenária 1164
30.3.4 Comparação entre a parábola e as soluções baseadas em catenárias 1171

30.1 Introdução

1 Um cabo é um membro flexível esbelto com flexão zero ou negligenciável rigidez, assim ele só pode transmitir forças de tração.

CÓPIA PARA REVISÃO

2 A força de tração em qualquer ponto atua na direção da tangente ao cabo (como qualquer outro componente causará flexão).

3 Sua força deriva de sua capacidade de sofrer mudanças extensas na geometria (climas em pontos de aplicação de carga) para acomodar a distribuição de carga.

4 Cabos resistem às forças verticais ao se submeterem à descida (h) e assim desenvolvendo forças de tração.

5 O componente horizontal desta força (H) é chamado de impulso .

6 A distância entre os cabos é chamada de acorde (Span).

7 A relação entre a inclinação e a amplitude é denotada por

$$r = \frac{h}{l}$$

8 Quando um conjunto de cargas concentradas é aplicado a um cabo de (relativamente) peso insignificante, então o cabo se desvia em uma série de segmentos lineares e a forma resultante é chamada de funicular! polígono .

9 Se um cabo suporta apenas forças verticais, então o componente horizontal H da tensão do cabo T Permanece constante (daí ambas as reações horizontais são iguais e opostas).

10 Uma característica única das estruturas do cabo (e de estruturas flexíveis para essa matéria) é que não só são os esforços internos desconhecidos, mas também a geometria. Em outras palavras, uma vez que a geometria varia com a carga (equações de equilíbrio são baseadas no diagrama de corpo livre da configuração deformada), ela também deve ser determinada. Isso também é referido como não linearidade geométrica .. Assim, a análise das estruturas do cabo não envolve apenas reações e esforços internos (axial), mas também geometria.

11 Se começarmos com o cabo descarregado, sem tensão antes de aplicarmos a carga, o problema teria que ser resolvido iterativamente (como é geometricamente não linear). Por outro lado, normalmente começamos com um cabo tensionado antes da carga ser aplicada. Neste caso, deformações adicionais são geralmente pequenas, e podemos tratar o cabo como inextensível, e as equações de equilíbrio são suficientes para resolver o problema,

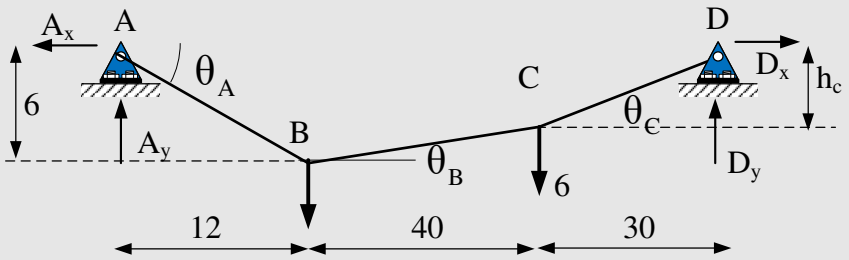
30.2 Cargas concentradas

12 Um cabo de suporte cargas concentradas é referido como um funicular!cabo .. Sua análise é *A priori* bem simples e usa equações básicas de equilíbrio.

13 Vamos começar com um exemplo simples, e então definir um teorema do cabo funicular que governa a forma do funicular.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

30.2.1 Ex 30.1: Cabo funicular



Temos 4 reações externas, no entanto as horizontais são iguais e podemos usar qualquer uma de várias equações de condições além das três equações de equilíbrio. Primeiro, nós resolvemos para A_y, D_y e.. $H = A_x = D_x$.. Para este problema poderíamos usar as seguintes 3 equações de equilíbrio estático $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, no entanto, uma vez que não temos qualquer força na x direção, a segunda equação não tem sucesso. Em vez disso, vamos considerar o seguinte conjunto $\Sigma F_y = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Note que temos neste problema 8 desconhecidos$A_x, A_y, D_x, D_y, \theta_A, \theta_B, \theta_C$ e.. h_C), e temos quatro nós e duas equações de equilíbrio em cada nó.

1. Primeiro nós resolvemos para D_y

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0; \Rightarrow 12(30) + 6(70) - D_y(100) = 0 \Rightarrow D_y = 7.8 \text{ kip}$$

2. Então nós resolvemos para A_y

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow A_y - 12 - 6 + 7.8 = 0 \Rightarrow A_y = 10.2 \text{ kip}$$

3. Resolva a força horizontal isolando o diagrama de corpo livre AB

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_B = 0; \Rightarrow A_y(30) - H(6) = 0 \Rightarrow H = 51 \text{ kip}$$

4. Agora podemos resolver para a queda no ponto C isolando o CD diagrama de corpo livre

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -D_Y(30) + H(h_c) = 0$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{30D_y}{H} = \frac{30(7.8)}{51} = 4.6 \text{ ft}$$

5. Agora resolvemos para o cabo esforços internos ou tração neste caso

$$\tan\theta_A = \frac{6}{30} = 0.200 \Rightarrow \theta_A = 11.31 \text{ deg}$$

$$T_{AB} = \frac{H}{\cos\theta_A} = \frac{51}{0.981} = 51.98 \text{ kip}$$

$$\tan\theta_B = \frac{6 - 4.6}{40} = 0.035 \Rightarrow \theta_B = 2 \text{ deg}$$

$$T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B} = \frac{51}{0.999} = 51.03 \text{ kip}$$

$$\tan\theta_C = \frac{4.6}{30} = 0.153 \Rightarrow \theta_C = 8.7 \text{ deg}$$

$$T_{CD} = \frac{H}{\cos\theta_C} = \frac{51}{0.988} = 51.62 \text{ kip}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

14 Continuando os cálculos do exemplo anterior, é claro que os passos são semelhantes à análise de um biapoiado viga com uma extensão igual à do cabo e carregando a mesma carga vertical. Também notamos que a forma do cabo e o diagrama de momento do equivalente viga são idênticos, Fig. 30.1.

15 Não por coincidência, nós temos $Hh = M$:

$$(51)(6) = (10.2)(30) = 306\checkmark$$
$$(51)(4.6) = (7.8)(30) = 234\checkmark$$

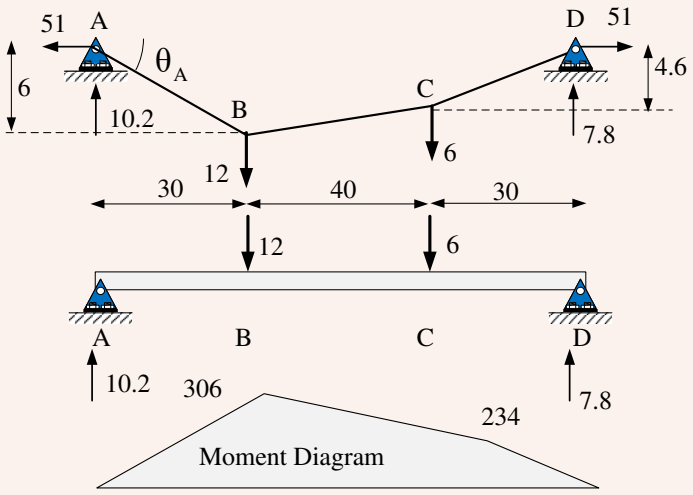


Figura 30.1: Verificação da teoria do cabo

16 Assim, podemos afirmar que

Definition 30.1: General Cable

Em qualquer ponto em um cabo atuado por cargas verticais, o produto do componente horizontal9 da tensão do cabo e a distância vertical do ponto para o acorde de cabo é igual ao momento fletor que ocorreria nessa seção se as cargas transportadas por o cabo estava atuando em um biapoiado viga do mesmo tamanho que o do cabo.

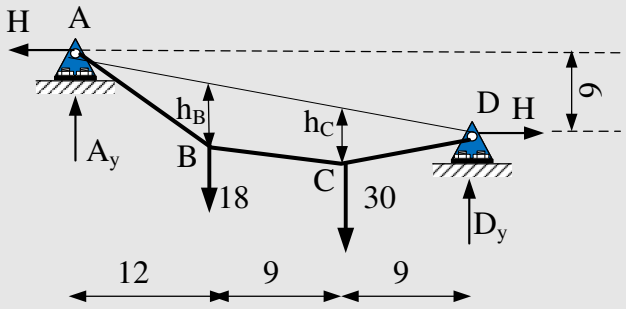
17 Isto será ilustrado pelo exemplo seguinte.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.2.2 Ex 30.2: Cabo funicular inclinado

Nós procuramos determinar as reações e as falhas em B e.. C para o seguinte funicular.



Usando equações de equilíbrio

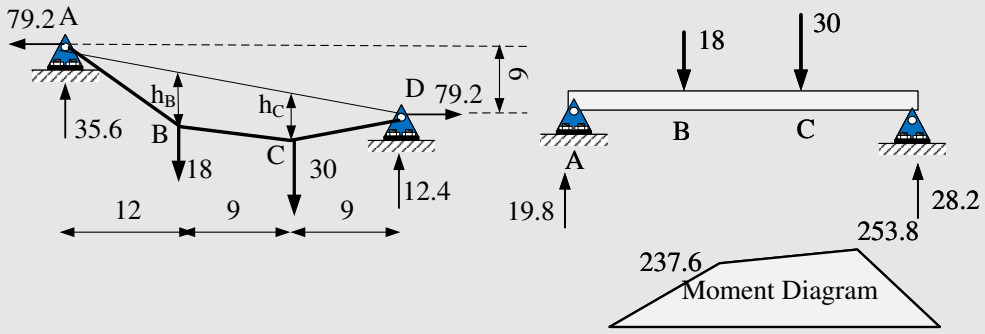
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 12(18) + 21(30) - 6H - 30D_y = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 18(18) + 9(30) - 30A_y + 6H = 0$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y A_y + D_y - 30 - 18 = 0$$

A solução destas três equações é

$$\lfloor\ A_y \quad D_y \quad H\ \rfloor = \lfloor\ 35.6 \quad 12.4 \quad 79.2\ \rfloor$$

O diagrama de momento correspondente é mostrado abaixo, e as sags são simplesmente determinadas a partir

$$h_B = \frac{M_B}{H} = \frac{237.6}{79.2} = 3$$
$$h_C = \frac{M_C}{H} = \frac{253.8}{79.2} = 3.2$$



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

18 Assim, os cabos podem ser facilmente determinados a partir das equações de equilíbrio e do teorema geral dos cabos.

19 Note que, por extensão, a forma de um cabo sustentando um carga uniformemente distribuída através do acorde será parabólica (forma do diagrama correspondente).

30.2.3 Ex 30.3: Gôndola bi-cabo

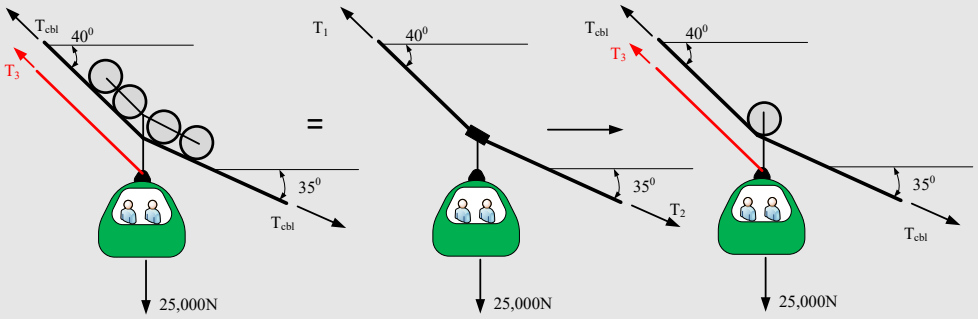
Procuramos determinar a força necessária para puxar uma gôndola (pelo cabo vermelho), suportada por um cabo de transporte (preto), viajando a uma velocidade constante de uma torre inferior para uma superior. Primeiro assumimos que a gôndola está fixa (apertada) ao cabo de apoio, ignorando assim o puxador, temos

$$\begin{cases} (\leftarrow) \Sigma F_x = 0 & \Rightarrow & T_1 \cos(40) - T_2 \cos(35) \\ (+\uparrow) \Sigma F_y = 0 & \Rightarrow & T_1 \sin(40) - T_2 \sin(35) - 25,000 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 234,900 \\ 219,700 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

Notamos que as tensões do cabo são 10 vezes o peso da gôndola, e $T_1 > T_2$ Se desapertarmos a gôndola, ela cairá, a menos que seja segurada T_3Devemos ter tensão constante no cabo T_{cbl}.. Por isso

$$T_3 = T_1 - T_2 = 234,900 - 219,700 = 15,200 \text{ N}$$
$$T_{cbl} = 234,900 - 15,200 = 219,700 \text{ N}$$



30.3 Cargas distribuídas;

20 Nessas próximas seções examinaremos dois casos. No primeiro, a carga é uniformemente distribuída ao longo do comprimento projetado do cabo (como um suportando uma ponte uniformemente carregada), e no outro, onde o cabo está simplesmente sustentando seu próprio peso (distribuindo uniformemente ao longo da extensão do arco).

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

21 Antes de prosseguirmos, deve-se notar que uma questão desafiadora na análise do cabo é a variedade de soluções corretas para um determinado problema, que é uma solução pode ser em termos de uma combinação da força horizontal, a inclinação, a tensão máxima, ou o cabo Comprimento. Isso, às vezes, pode fazer soluções, ou comparação com outras soluções perplexas.

30.3.1 Equação de equilíbrio

22 O diagrama de corpo livre de um cabo suspenso com carga uniformemente distribuída é mostrado na figura. 30.2.. Tipicamente, a extensão L Afundamento máximo d e distância vertical entre os suportes h é conhecido.

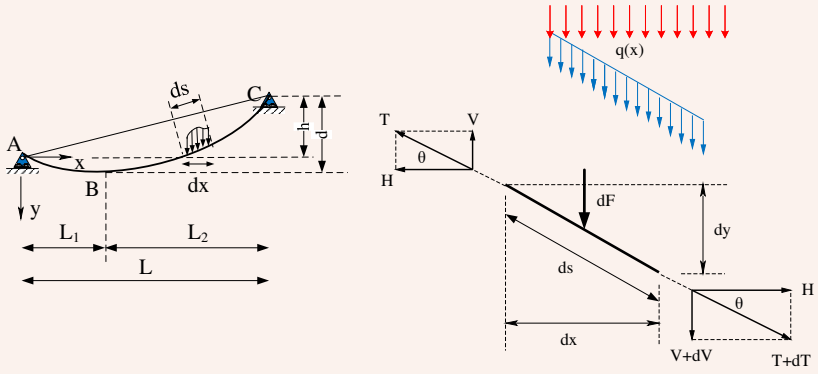


Figura 30.2: Geometria do cabo # 1

23 Na ausência de qualquer carga horizontal temos H =Constante.

24 A soma das forças verticais se rende:

$$(+\downarrow)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V + dF + (V + \mathrm{d}V) = 0 \tag{30.1}$$

$$dV + dF = 0 \tag{30.2}$$

Onde V é o componente vertical da tensão do cabo em x.

25 Porque o cabo deve ser tangente a TNós temos:

$$\tan\theta = \frac{V}{H}$$

Eliminar V e reescrever em termos de H Que é constante ao longo do cabo, substituindo-se em Eq. 30.2

$$\mathrm{d}(H\tan\theta) + dF = 0 \tag{30.3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.2 qdx; Carga lateral; Parabola

30.3.2.1 Geometria

26 Duas equações equivalentes para a geometria do cabo serão derivadas, pois precisaremos de ambas para derivações subsequentes.

Em termos de.. $H,\ q,\ L$

27 Esta primeira derivação será em termos de força horizontal H, carregar q, e geometria L e.. h, Fig. 30.2

28 Por um carga uniformemente distribuída ao longo do x (como cabo suportando um convés de ponte) temos $dF = qdx$ e Eq. 30.3 pode ser reescrito como

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(H\tan\theta\right) = q$$

Desde então H é constante (nenhuma carga horizontal é aplicada)

$$-H\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\tan\theta\right) = q \tag{30.4}$$

e substituindo $\tan\theta = \frac{dy}{\mathrm{d}x}$ Em Eq. 30.4 Nós obtemos o governo equação diferencial para cabos

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H} \tag{30.5}$$

29 Anote analogia com flexão

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

30 A dupla integração dá

$$Hy' = -qx + C_1 \tag{30.6}$$

$$Hy = -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{30.7}$$

C_1 e.. C_2 são obtidos do condições de contorno: $y = 0$ Em.. $x = 0$ e.. $y = -h$ Em.. $x = L$

31 Isso daria

$$C_2 = 0$$

$$-Hh = -q\frac{L^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2} - H\frac{h}{L}.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Por isso, Eq. 30.6 e.. 30.7 se tornar

$$y' = -\frac{q}{H}x + \frac{qL}{2H} - \frac{h}{L} \tag{30.8}$$

$$y = -\frac{q}{2H}x^2 + \left(\frac{qL}{2H} - \frac{h}{L}\right)x \tag{30.9}$$

Assim, o cabo é parabólico e esta equação dá a forma $y(x)$ Em termos de força horizontal H Ainda não foi determinado.

II Em termos de s, L

32 A forma do cabo pode ser obtida a partir de Eq. 30.9 (para y), e Eq. 30.23 para H, combinando-os, nós conseguimos

$$\frac{x\left(2d\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)(L-x)+h(x-2L)\right)}{L^2}$$

com respeito à Fig. 30.3.

33 Para obter a equação da curva em relação ao acorde e em termos de sag s, Fig. 30.3, nós preparamos h=0

$$y = \frac{4sx}{L^2}(L-x)$$

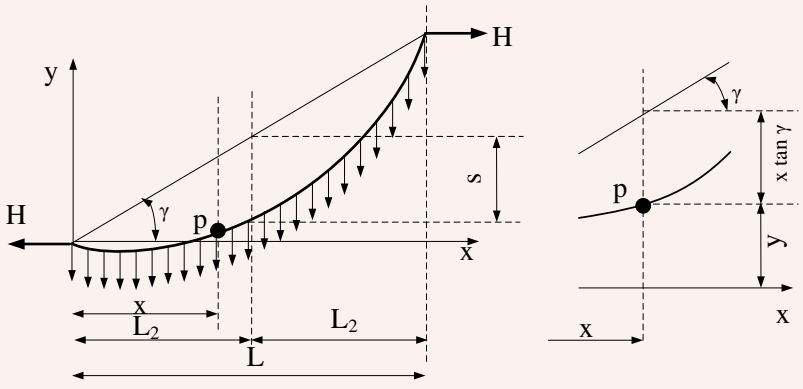


Figura 30.3: Geometria do cabo # 2

34 Voltamos e agora procuramos determinar a equação do cabo em relação a um eixo horizontal

$$y = \frac{4sx}{L^2}(L-x) + x\tan\gamma \tag{30.10}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Magnitude da flecha

35 A flecha máxima em relação à corda será

$$s = \frac{qL^2}{8H} \tag{30.11}$$

36 A flecha d em relação ao apoio mais alto é dada por qualquer uma das duas equações

$$d = \frac{hL^2 - 2hLL_1 + hL_1^2}{L(L-2L_1)} \qquad \text{em termos de } h \text{ e } L_1$$
$$d = \frac{\left(2hH + L^2q\right)^2}{8HL^2q} \qquad \text{em termos de } q \text{ e } H$$

Localização máxima do sag

37 O ponto da queda máxima d (em L_1) tem $y' = 0$, daqui de Eq. 30.8

$$0 = -\frac{q}{H}x + \frac{0}{qL}2H - \frac{h}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{2} - \frac{Hh}{qL} = L_1 \;\&\; L_2 = \frac{L}{2} + \frac{Hh}{qL}$$

Tomando os momentos de AB e BC sobre A e B respectivamente

$$\begin{aligned} H(d-h) - q\frac{L_1^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_1^2}{2d-h} \\ Hd - q\frac{L_2^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_2^2}{2d} \end{aligned} \tag{30.12}$$

Equacionando H

$$q\frac{L_1^2}{2d-h} = q\frac{L_2^2}{2d} \Rightarrow L_1 = \sqrt{\frac{d-h}{d}}L_2$$

Mas.. $L_1 + L_2 = L$, daí

$$L2 = \frac{L}{\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]} \tag{30.13}$$

O que dá

$$L_1 = L - \frac{L}{\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Comprimento do arco do cabo

38 Em geral, o comprimento inicial do cabo L_{cbl} não é dado, em vez disso, por exemplo, ele tem que ser determinado de tal forma que um certo cabo cair não é excedido. Isso pode ser conseguido variando L_{cbl} e pretensões iniciais σ_0 Até que a demanda seja alcançada.

39 O comprimento do cabo é dado por

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{30.14}$$

40 Vamos passar por duas expressões para o comprimento, a primeira em termos de H, o segundo em termos s e.. L.

Em termos de.. H

41 Recordando o teorema binomial da expansão de séries infinitas:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots \\ (1+b)^n &= 1 + nb + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + \cdots \\ \Rightarrow \text{for } b^2 << 1; \sqrt{1+b} &= (1+b)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2\end{aligned} \tag{30.15}$$

Por isso simplificamos o Eq. 30.14 por

$$L_{cbl} = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx \tag{30.16}$$

dy/dx é obtido da Eq. 30.8, H De Eq. 30.23E uma ajudinha do Mathematica

$$\begin{aligned}L_{cbl} \simeq \frac{1}{120L^3}\Bigg\{&-3d^4\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^8 + 10d^2\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^4\left(2L^2-3h^2\right) - 15h^4 \\ &+ 60h^2L^2 + 120L^4\Bigg\}\end{aligned} \tag{30.17}$$

42 Alternativamente em termos de H

$$L_{cbl} = -\frac{h^4}{8L^3} + \frac{Lq^2\left(2L^2-3h^2\right)}{48H^2} + \frac{h^2}{2L} - \frac{L^5q^4}{640H^4} + L \tag{30.18}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

II Em termos de s e.. L

43 Para um acorde horizontal, começamos com EQ. 30.10, mude a origem para o ponto mais baixo (que está no meio do espaço), levando a

$$y = \frac{4s}{L^2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8sx}{L^2}$$

Substituindo em Eq. 30.14

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4}\right)dx$$

Invocamos novamente o teorema binomial Eq. 30.15 e manter os primeiros termos da série resultante

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left[1 + \frac{1}{2}(64)\frac{h^2}{L^4}x^2 - \frac{1}{4}(64)^2\frac{h^4}{L^8}x^4 + \cdots\right]dx$$

Cedendo

$$L_{cbl} \simeq L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) \tag{30.19}$$

Onde θ é agora definido como

$$\theta = h/L \tag{30.20}$$

44 Para um cabo inclinado, teríamos que usar dy/dx De Eq. 30.10, no entanto, isso produziria uma equação muito complicada (através do Mathematica)

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8\theta}\Bigg\{&\sqrt{\sec^2(\gamma)}(-L\tan(\gamma) - 4L\theta + 4s) \\ &+ L\left[(\tan(\gamma) + 4\theta)\sqrt{8\theta(\tan(\gamma) + 2\theta) + \sec^2(\gamma)} + \sinh^{-1}(\tan(\gamma) + 4\theta)\right] \\ &- L\sinh^{-1}(\tan(\gamma))\Bigg\} \end{aligned} \tag{30.21}$$

45 Uma expressão simplificada pode ser determinada assumindo que o comprimento do cabo é o mesmo que seria para um cabo com um acorde de cabo horizontal, onde o span é igual ao comprimento do cordão de cabo inclinado, ou seja, $L\sec\gamma$, e o sag é igual $s\cos\gamma$, que é uma expressão aproximada para a distância perpendicular máxima do cabo até o acorde do cabo. Com essas suposições:

$$\theta' = \frac{s\cos\gamma}{L\sec\gamma} = \frac{\theta}{\sec^2\gamma}$$

Substituindo-se em Eq. 30.19

$$L_{cbl} = L\left(\sec\gamma + \frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^3\gamma}\right) \tag{30.22}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.2.2 Esforços internos

Força Horizontal

46 Em seguida, combinando Eq. 30.12 com Eq. 30.13

$$H = \frac{qL^2}{2d\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}}+1\right]^2} \tag{30.23}$$

Tensão máxima

47 Da Fig. 30.2[1]

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} \Rightarrow T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

No entanto

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \Rightarrow T(x) = H\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{30.24}$$

48 Para o caso geral de um cabo inclinado, e usando EQ. 30.10

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8sx}{L^3} - \frac{4s}{L} + \tan\gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L^3} - 4\theta + \tan\gamma\end{aligned}$$

Onde $\theta = s/L$ E corresponde à relação de sag. Diferenciando o que conseguimos

$$T(x) = H\left(1 + \frac{64\theta^2x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - \frac{64\theta^2x}{L} + \frac{16\theta x}{L}\tan\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \tag{30.25}$$

A tensão máxima ocorrerá nas extremidades do cabo

$$\begin{aligned}&\text{For } x\text{=0 }; T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &\text{For } x\text{=L }; T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{30.26}$$

30.3.2.3 Esticamento elástico

Em termos de.. θ e.. H

49 Um cabo carregado sofrerá um estiramento elástico que pode afetar substancialmente a descida. A sag seria simplesmente $\Delta L = FL/AE$.

[1] Adaptado de Norris, C. H., e J. B. Wilbur. "Elementar Análise estrutural. 1960.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

50 Embora a tensão do cabo $T(x)$ varia com o comprimento, determinamos a tensão média que se aplicada ao longo do comprimento do cabo causará o mesmo alongamento elástico total (Norris e Wilbur, 1960)

$$\frac{T_{avg}L_{cbl}}{AE} = \int_0^{L_{cbl}} \frac{T(l)dl}{AE}$$

A e.. E sendo constante

$$\begin{aligned} T_{avg} &= \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} T(x)dl = \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} H\frac{dl}{dx}dl \\ &= \frac{H}{L_{cbl}}\int_0^{L}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx \end{aligned}$$

Considerando uma carga que é uniforme por comprimento horizontal, e um acorde de cabo inclinado, dy/dx Pode ser obtido do Eq. 30.10 E nós temos

$$T_{avg} = \frac{HL}{L_{cbl}}\left(1+\frac{16}{3}\theta^2+\tan^2\gamma\right) \tag{30.27}$$

Finalmente, usamos o Eq. 30.22 para determinar o alongamento do cabo

$$\Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1+16\theta^2/3+\tan^2\gamma}{\sec\gamma+8/3(\theta^2/\sec^3\gamma)} \tag{30.28}$$

Em termos de.. q e.. L e.. L_{cbl}

51 O comprimento de um cabo inclinado no estado deformado pode ser expresso como

$$\begin{aligned} L_{cbl}^{ext} &= \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\ &= L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\int_0^L \frac{T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA}dx \end{aligned} \tag{30.29}$$

que inclui a extensão térmica $\alpha\Delta T$, inicial tensão σ_0E a tensão do cabo T. O segundo termo à direita pode ser reescrito como (Usando Eq. 30.24)

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA}dx &= \frac{H}{EA}\int_0^L\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx \\ &= \frac{H}{EA}\int_0^L\left(\tan\gamma+\frac{V(x)}{H}\right)^2 dx \end{aligned} \tag{30.30}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

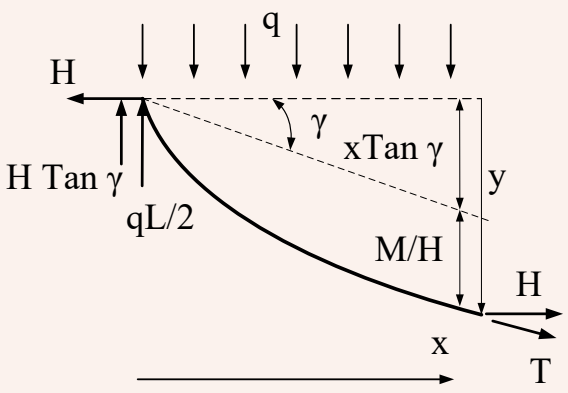


Figura 30.4: Geometria de um cabo inclinado submetido a carga transversal horizontal uniforme

E da Fig. 30.4

$$y = \frac{M(x)}{H} + x\tan\gamma; \quad y' = \frac{V(x)}{H} + \tan\gamma; \quad V(x) = H\tan\gamma + q\frac{L}{2} - qx$$

Substituindo em Eq. 30.30 e.. 30.29 Isso reduz-se a

$$L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) \tag{30.31}$$

30.3.2.4 Axial equivalente rigidez

49 Um termo rigidez corresponde à força por unidade deslocamento, o de um cabo é simplesmente L/AE

50 Para um cabo carregado, o rigidez seria a força horizontal por unidade correspondente ao alongamento. Na Fig. 30.5a Isso seria.. dH/du.. Como mostrado a seguir, este rigidez é determinado através da inversão do termo flexibilidade (deformação por força unitária). A abordagem é relativamente simples:

1. Aplicar H, cabo alonga-se por $u_1 = HL/AE$.
2. Com a tensão H Continue, aplique a carga transversal qIsso causará um encurtamento (Eq. 30.16)

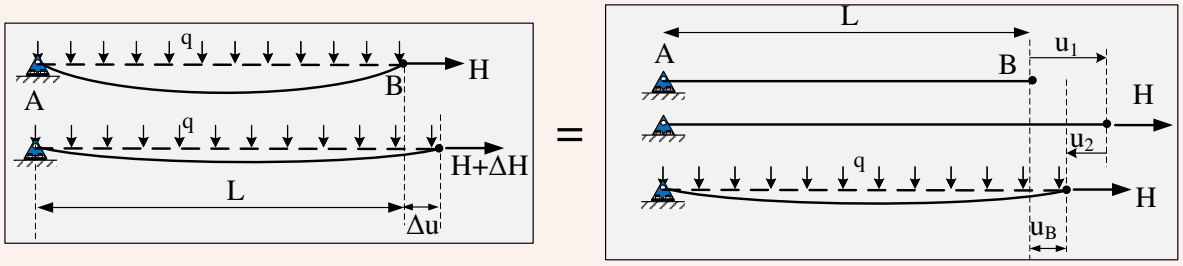
$$u_2 = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx$$

e.. $y(x)$ é dado por Eq. 30.37, substituindo, rende

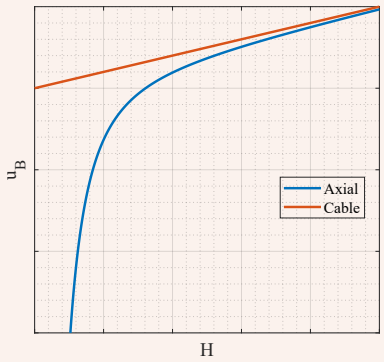
$$u_2 = \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

CÓPIA PARA REVISÃO

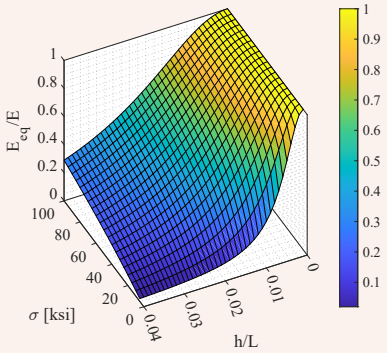
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Cabo axial rigidez



(b) Efeito de suavização da carga transversal



(c) Equivalente E em termos de tensão e sag

Figura 30.5: Cabo rigidez

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

3. A rede deslocamento, e seus derivados com relação a H, será assim

$$u_B = u_1 - u_2 = \frac{HL}{AE} - \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 + \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \tag{30.32}$$

$$\frac{du_B}{dH} = \frac{L}{AE} + \frac{L}{12H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{160H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

$$= \frac{L}{AE}\left\{1 + \frac{1}{12}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{1}{160}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4\right\}$$

   Eq. 30.32 é plotado está traçado em Fig. 30.5b e o efeito suavizante[2] da carga transversal está claramente identificada.
4. No entanto, estamos realmente interessados no termo rigidez

$$\frac{dH}{du_B} = k_t = \left(\frac{1}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4}\right)\frac{AE}{L} \tag{30.33}$$

51 O rigidez tangente também pode ser expresso em termos de um módulo elástico equivalente E_{eq}

$$E_{eq} = \left(\frac{E}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4}\right)\frac{AE}{L} \tag{30.34}$$

Deve-se notar que a carga lateral reduzirá o rigidez, portanto, sempre teremos $E_{eq} < E$.

52 Nós podemos substituir

$$\sigma = \frac{H}{A}; \quad \text{e} \quad \frac{qL}{H} = 8\frac{H}{L}$$

Assim, Eq. 30.34 se torna para

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{16}{3}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{128}{5}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^4} \tag{30.35}$$

assim, o módulo equivalente depende tanto do inicial tensão no cabo quanto da relação de sag. Isso é explorado pela Fig. 30.5c, onde notamos que E_{eq} diminui com o aumento da tensão axial.

[2] Isso é análogo ao $P - \delta$ Efeito em pilares submetido à carga de compressão como será discutido em §29.2.2 e.. 60.1.2.4.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.2.5 Caso especial: acorde horizontal

53 Para um cabo em que os suportes estão no mesmo nível, ou seja. $h = 0$Algumas das equações anteriores reduzem-se para:

$$\text{Eq. 30.9} \rightarrow y = \frac{4xs}{L^2}(L-x) \tag{30.36}$$

$$\text{Eq. 30.9} \rightarrow y = \frac{qx}{2H}(L-x) \tag{30.37}$$

$$\text{Eq. 30.23} \rightarrow H = \frac{qL^2}{8s} \tag{30.38}$$

$$\text{Eq. 30.17} \rightarrow L_{cbl} \simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L \tag{30.39}$$

$$\text{Eq. 30.18} \rightarrow L_{cbl} = -\frac{L^5q^4}{640H^4} + \frac{L^3q^2}{24H^2} + L \tag{30.40}$$

$$\text{Eq. 30.28} \rightarrow \Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1+16\theta^2/3}{1+8\theta^2/3} \tag{30.41}$$

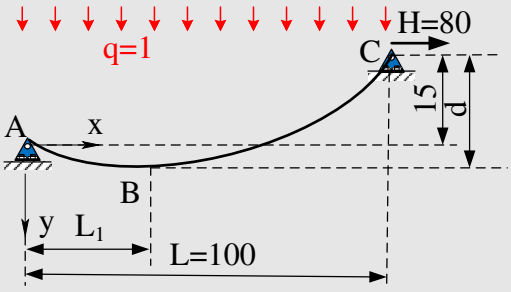
$$\text{Eq. 30.26} \rightarrow T_{max} = H\sqrt{1+16r^2} \tag{30.42}$$

$$\text{Eq. 30.30} \rightarrow L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2q\left(8\theta^2+3\right)}{12AE\theta} \tag{30.43}$$

Onde s é a sag, e em Eq. 30.42 $r = s/L$ (Fig 30.3), e $r = d/L$ Na Fig. 30.2.. Isso pode ser simplificado através da Eq. 30.15 (e mantendo apenas o primeiro termo)

$$T_{max} = H\sqrt{1+16r^2} \approx H(1+8r^2) \tag{30.44}$$

30.3.2.5.1 Ex 30.4: Geometria inclinada do cabo



CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Dado: com $H = 80$, $L = 100$, $h = 15$ e.. $q = 1$, o comprimento da equação pode ser obtido a partir de Eq. 30.18 e dá

$$L_{cbl} = -\frac{15^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + 100 = 107.03$$

Em seguida, nós resolvemos para d De Eq. 30.23,

$$80 = \frac{5000}{\left(\sqrt{\frac{d-15}{d}} + 1\right)^2 d}$$

Que se entrega $d = 24.025$ Verificamos os cálculos por computação L_{cbl} De Eq. 30.17, substituindo,

$$L_{cbl} \simeq \frac{1}{120(100)^3}\left\{-3(24.02)^4\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^8 + 10(24.02)^2\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^4\left(2(100)^2-3(15)^2\right) - 15(15)^4 + 60(15)^2(100)\right.$$

Alternativamente em termos de H, Eq. 30.18

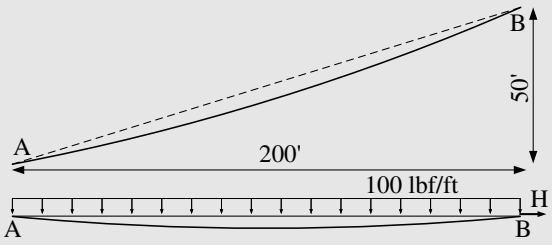
$$L_{cbl} = -\frac{(15)^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + (100) = 107.03$$

Finalmente o ponto mais baixo está a uma distância L_1 do apoio esquerdo usando Eq. 30.3.2.1,

$$L_1 = 100 - \frac{100}{\sqrt{\frac{24.02-15}{24.02}}+1} = 38$$

30.3.2.5.2 Ex 30.5: Forças de cabo inclinadas

Para um cabo suportando uma carga uniforme de 100 lbf por pé horizontal é suspenso entre dois pontos 200 pés separados horizontalmente, com um ponto de apoio 50 pés mais alto do que o outro. A tensão no cabo é ajustada até que a descida no meio do espaço (ou seja, A distância vertical do cabo em meio-espano) é de 12,5 pés, procuramos determinar a tensão máxima do cabo e o comprimento do cabo.



O componente horizontal da tensão é dado por Eq. 30.38

$$H = \frac{qL^2}{8s} = \frac{100(200)^2}{8(12.5)} = 40,000 \text{ lbf}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

θ e.. $\tan\gamma$ são por sua vez obtidos do Eq. 30.20 E Fig. 30.3

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{12.5}{200} = 0.0625$$
$$\tan\gamma = \frac{50}{200} = 0.25 \Rightarrow \gamma = 0.245 \text{ rad}$$

A tensão máxima ocorre no ponto alto do suporte e é dada pelo Eq. 30.26

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 40,000\left(1 + 16(0.0625)\theta^2 + (0.25)^2 + 8(0.0625)(0.25)\right)^{1/2} \\ &= 44,700 \text{ lbf} \end{aligned}$$

O comprimento do cabo será determinado a partir das duas equações anteriormente derivadas. Primeiro a solução quase exata, Eq. 30.21

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8(0.0625)}\Bigg\{ &\sqrt{\sec^2(0.245)}\left[-(200)\tan(0.245) - 4(200)(0.0625) + 4(12.5)\right] \\ &+ 200\Bigg[\tan(0.245) + 4(0.0625)\sqrt{8(0.0625)(\tan(0.245) + 2(0.245)) + \sec^2(0.245)} \\ &+ \sinh^{-1}(\tan(0.245) + 4(0.0625))\Bigg] - (200)\sinh^{-1}(0.245)\Bigg\} \\ = 214.1 \text{ ft} \end{aligned} \tag{30.45}$$

Então com a aproximação, Eq. 30.22

$$L_{cbl} = L\left(\sec(0.245) + \frac{8}{3}\frac{0.0625^2}{\sec^3(0.245)}\right) = 208.1\text{ft}$$

A diferença com a solução mais exata está abaixo 3%.

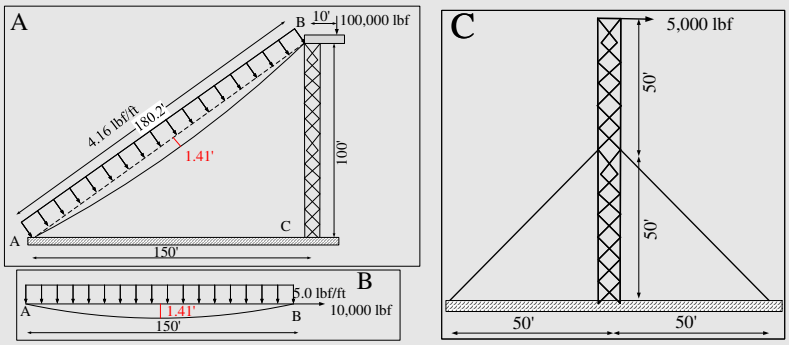
30.3.2.5.3 Ex 30.6: Torre com cara

A seção seguinte é reproduzida de Norris e Wilbur, 1960 Elementary Structural Analysis.

Supondo que um cabo pesando 4,16 lb/ft deve ser usado como um cara e isso é necessário para que esse cara segure o mastroBC verticalmente quando a carga de 100.000 lbf é aplicada[a].

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Tirando um momento com respeito ao apoio

$$100H - 100,000(10) = 0 \Rightarrow H = 10,000 \text{ lbf}$$

H então deve ser desenvolvido para segurar o mastro verticalmente. Como 4,16 lbf/ft está ao longo do cabo, a carga vertical equivalente q' (usando o cabo equivalente em Fig. B) seria

$$q' = 4.16\frac{180.2}{150} = 5.0 \text{ lbf per horizontal foot}$$

O cabo deve satisfazer Eq. 30.38

$$H = \frac{qL^2}{8h} \Rightarrow h = \frac{qL^2}{8H} = \frac{5(150)^2}{8(10,000)} = 1.41 \text{ ft}$$

Uma vez que, nesta solução aproximada, o cabo é suposto ser parabólico e agindo por uma carga uniforme de

$$q = 4.16(180.2/150) = 5.0 \text{ lbf per horizontal foot}$$

a tensão máxima no cara ocorreria em B usando Eq. 30.26

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 10,000\left[1.0 + 16\left(\frac{1.41}{150}\right)^2 + \left(\frac{100}{150}\right)^2 + 8\left(\frac{141}{150}\right)\left(\frac{100}{150}\right)\right]^{1/2} \\ &= 12,240 \text{ lbf} \end{aligned}$$

Deve-se notar que uma aproximação próxima à solução precedente pode ser obtida considerando o cabo para agir como uma haste de gravata reta deitada ao longo do acorde AB.. O comprimento deste acorde é 180.2 pés; A tensão seria então igual a

$$T_{max} = 10,000\left(\frac{180.2}{150}\right) = 12,000 \text{ lbf}$$

O único erro introduzido nesta aproximação surge do fato de que a inclinação do cabo em B é realmente mais íngreme que o do acorde. A menos que a relação de inclinação do cabo seja grande, essa diferença na inclinação não é provável que seja importante.

é necessário ter mais de um cara em um mastro ou outras estruturas com guyed, a fim de que o mastro pode ser realizada contra virar em mais de uma direção. Nessas condições, os caras são

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ajustados para que eles tenham uma certa tensão inicial; uma tensão inicial igual a cerca de metade da tensão máxima que ocorrerá sob carga é comumente usada. Nós supomos que as derrotas dos caras AB e.. AC foram ajustados de modo que, sem carga horizontal aplicada no mastro, o componente horizontal da tensão do cabo em cada cara id 6000 lbf. Nestas circunstâncias, a inicial máxima tensão em cada cara, seguindo o método aproximado de análise sugerido será igual $6,000 \times 1.414 = 8,500$ Lbf. Quando a carga de 5.000 lbf é aplicada no topo do mastro, uma força horizontal resultante de 10.000 lb fl é aplicada aumentando o componente horizontal da tensão em cara AC pela mesma quantidade, levando a $H_{AB} = 11,000$ Lbf e $H_{AC} = 1,000$ Ibf. A tensão máxima do cara é então igual a

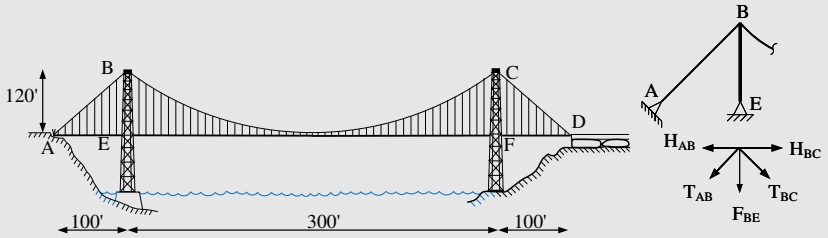
$$T_{max} = 11,000 \times 1.414 = 15,500 \text{ lbf}$$

Na verdade, quando a carga de 5.000 lbf é aplicada no topo do mastro, ponto A Vai para a direita. Guy AB Permita o movimento uma vez que ele sofre estiramento elástico adicional e desde que sua descida diminui. O homem caído AC aumenta, e o comprimento desse cara encurta elásticamente. Uma análise exata, levando em conta as mudanças elásticas de comprimento e afundamento, pode ser louca, mas é relativamente complicada.

[a] Adaptado de Norris, C. H., e J. B. Wilbur. "Elementar Análise estrutural. 1960.

30.3.2.5.4 Ex 30.7: Ponte de suspensão

Nós procuramos determinar os diâmetros preliminares de uma ponte suspensa assumindo uma resistência admissível do cabo σ_{all} de 190 ksi. As bases da torre são articuladas para evitar grandes momentos fletores.



A carga total morta é estimada em 200 psf. Assumir uma relação de inclinação para extensão de $\frac{1}{5}$.. A carga morta transportada por cada cabo será metade da carga total ou $p_1 = \frac{1}{2}(200)$ psf(50) ft$\frac{1}{1,000} = 5.0$ k/ft. Usando o caminhão HS 20 (ou sua carga equivalente distribuída de 0,64 k/ft Por pista), a carga adicional uniforme por cabo é

$$p_2 = (2)\text{lanes/cable}(.64)\text{k/ft/lane} = 1.28 \text{ k/ft/cable}$$

Assim, a carga total de projeto é

$$p_1 + p_2 = 5 + 1.28 = 6.28 \text{ k/ft}$$

O impulso H é determinado a partir de Eq. 30.38

$$H = \frac{pl^2}{8h} = \frac{(6.28) \text{ k/ft}(300)^2 \text{ ft}^2}{(8)(60) \text{ ft}} = 1,177 \text{ k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Note que h é dado de $r = h/L = 1/5$. Da Eq. 30.44 A tensão máxima é

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (1,177)\text{ k}\sqrt{1+(16)\left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= 1,507\text{ k} \end{aligned}$$

Note que se usássemos a fórmula aproximada em Eq. 30.44 Nós teríamos conseguido

$$\begin{aligned} T_{max} &= H(1+8r^2) \\ &= 1,177\left(1+8\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \\ &= 1,554\text{ k} \end{aligned}$$

Ou 3% Difere! A área da seção transversal necessária do cabo no vão principal deve ser $A = \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{1,507\text{ k}}{190\text{ ksi}} = 7.93\text{ in}^2$, o que corresponde a um diâmetro $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(7.93)}{\pi}} = 3.18\text{ in}$. Procuramos determinar a força de cabo em AB. Já que o pilão não pode tomar nenhuma força horizontal, devemos ter o componente horizontal de T_{max} igual e oposto ao componente horizontal de T_{AB} ou $\frac{T_{AB}}{H} = \frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100}$ Assim

$$T_{AB} = H\frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100} = (1,177)(1.562) = 1,838\text{ k}$$

A área do cabo deve ser $A = \frac{1,838\text{ k}}{190\text{ ksi}} = 9.68\text{ in}^2$ que corresponde a um diâmetro $d = \sqrt{\frac{(4)(9.68)}{\pi}} = 3.51\text{ in}$ Para determinar a carga vertical atuando no pilar, devemos adicionar os componentes verticais de T_{max} e de T_{AB} (V_{BC} e.. V_{AB} - Não, não. Podemos determinar V_{BC} De.. H e.. T_{max}, assim

$$P = \underbrace{\frac{120}{100}(1,177)}_{V_{AB}} + \underbrace{\sqrt{(1,507)^2-(1,177)^2}}_{V_{BC}} = 1,412+941 = 2,353\text{ k}$$

Usando aço A36 com um permitido tensão de 21 ksi, a área transversal da torre deve ser $A = \frac{2,353}{21} = 112\text{ in}^2$.. Note que flambagem de uma torre tão alta poderia governar as dimensões finais. Se os cabos fossem ancorados em um bloco de concreto, o volume do bloco deveria ser pelo menos igual a $V = \frac{(1,412)\text{ k}(1,000)}{150\text{ lbs/ft}^3} = 9,413\text{ ft}^3$ Ou um cubo de aproximadamente 21 pés

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.2.5.5 Ex 30.8: Cabo inextensível; temperatura

Um cabo horizontal, 300 pés de comprimento, uma descida central de 50 pés, e uma carga uniforme de 2 k/ft, procuramos determinar a mudança na geometria devido a um aumento de temperatura de 150°F, $\alpha_T = 6.6^{-6}$/°F. A força horizontal é determinada a partir de Eq.

$$H = \frac{qL^2}{8s} = 450 \text{ kip}$$

Comprimento do cabo (Eq. 30.39)

$$\begin{aligned} L_{cbl} &\simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L = 320.7 \text{ ft} \\ \Delta L_{cbl} &= \alpha \Delta T L_{cbl} = 0.317 \text{ ft} \\ \frac{\Delta L}{\Delta s} &\simeq -\frac{128}{5}\left(\frac{s}{L}\right)^3 + \frac{16}{3}\frac{s}{L} = 0.770 \\ \Delta s &\simeq \frac{0.317}{0.770} = 0.412 \text{ ft} \\ s + \Delta s &= 50.41 \text{ ft} \\ \Delta H &= 450 - \frac{qL^2}{8(s+ds)} = 3.68 \text{ kip} \end{aligned}$$

Ou apenas 0,82 %!

30.3.2.5.6 Ex 30.9: Cabo extenso: flecha

Um cabo de 40,5 m de comprimentoL_{cbl}), com $E = 195$ kN/mm^2 e.. $A = 100$ mm^2 Abrange uma distância horizontal de $L = 40$ M e é carregado por um carga uniformemente distribuída $q = 1.5$ KN/m. A sua sag pode ser determinada a partir de Eq. 30.31, no entanto o comprimento real do cabo é desconhecido, daí nós recorremos ao Eq. 30.19 Cedendo

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

Substituindo[a] $\gamma = 0$, $\alpha_T = 0$ e.. $\Sigma M_0 = 0$ Rende-se $\theta = 0.0900$, assim

$$\begin{aligned} L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) &= 40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) \\ \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) &= \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta} \\ 40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) &= 40.5 + \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta} \end{aligned}$$

A menor raiz é $\theta = 0.09$ Assim

$$\text{sag} = \theta L = 0.090(40) = 3.6 \text{ m}$$

A tensão horizontal H é então determinado a partir de Eq. 30.23 com $h = 0$

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{1.5(40)^2}{8(3.6)} = 83.3 \text{ kN}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

[a] Resolvido com Mathematica

30.3.2.5.7 Ex 30.10: Cabo extenso. térmica

Procuramos determinar o comprimento inicial de um cabo L_{cbl} Esclarecendo $L = 40m$ com $E = 195$ kN/mm^2 e.. $A = 100$ mm^2 e.. $\alpha_T = 10^{-5}/°$C tal que quando submetido a $q = 1$ KN/m e $\Delta T = 40°$C é atingido uma descida de 3m. Novamente, recorremos a

$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T\right)+\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right)$$

Assim

$$\theta = \frac{3}{40} = 0.075$$
$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = 40.591 \text{ m}$$
$$1+\alpha_T\Delta T = 1.0004$$
$$\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right) = 0.2776 \text{ m}$$
$$40.591 = 1.0004L_{cbl}+0.2776 \Rightarrow L_{cbl}= \quad 40.297 \text{ m}$$

30.3.2.5.8 Ex 30.11: Cabo extenso. Prostress

Nós procuramos determinar a força de protensão necessária para alcançar uma queda de 1 m por uma carga de $q = 2$ kN/m, com $L_{cbl} = L = 40.5m$, $E = 195$ kN/mm^2 e.. $A = 100$ mm^2 De novo, usando

$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right)$$

Assim

$$\theta = \frac{1}{40} = 0.025$$
$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = 40,067 \text{ mm}$$
$$L_{cbl}\left(1-\frac{\sigma_0}{E}\right) = 40,000-\frac{\sigma_0}{195} \text{ mm}$$
$$\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right) = 1,644 \text{ mm}$$
$$40,0067 = \left(40,000-\frac{\sigma_0}{195}\right)+1,644 \Rightarrow \sigma_0=7.688 \text{ kN/mm}^2$$

A tensão horizontal H é então determinado a partir de Eq. 30.23 com $h = 0$

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{2.0(40)^2}{8(1)} = 400 \text{ kN}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.3 $q\mathrm{d}s$; catenária

Para o contexto histórico, consultar §30.3.3

30.3.3.1 Geometria

54 Vamos considerar agora o caso em que o cabo é submetido ao seu próprio peso (mais gelo e vento, se houver). Então teríamos que substituir $q\mathrm{d}x$ por $q_g\mathrm{d}s$ Em Eq. 30.2.. O equação diferencial para este novo caso será derivado exatamente como antes e Eq. 30.5 se torna

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\underbrace{\frac{q_g}{H}}_{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{30.46}$$

55 No entanto, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + dy^2$, portanto:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{30.47}$$

56 A solução desta equação diferencial é consideravelmente mais complicada do que a Eq. 30.5. Nós vamos $dy/\mathrm{d}x = p$, então

$$\frac{dp}{\mathrm{d}x} = a\sqrt{1+p^2} \tag{30.48}$$

Rearranjando

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a\mathrm{d}x \tag{30.49}$$

O lado esquerdo é igual a

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(p+\sqrt{1+p^2}) + c_1$$

O lado direito será

$$\int a dx = ax + c_2 \tag{30.50}$$

Substituindo em Eq. 30.49

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax + c_3$$

Mas em.. $x = 0$ Nós temos $\theta = dy/dx = p = 0$, daí $c_3 = 0$ e..

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Simplificamos

$$\begin{aligned} p + \sqrt{1+p^2} &= e^{ax} \\ \sqrt{1+p^2} &= e^{ax} - p \\ 1 + p^2 &= p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax} \\ p = \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2ax}-1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} = \sinh ax \\ y &= \int \sinh ax dx \\ &= \frac{\cosh ax}{a} \end{aligned}$$

Uma forma alternativa para a última equação é

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{30.51}$$

Onde $c = 1/a = H/q_g$.. Por isso, $x = 0$ $y = c = 1/a$; Isto corresponde ao sistema de coordenadas certo na figura. 30.6. Se usarmos o sistema de coordenadas esquerdo, a equação correspondente seria

$$y = c\left(\cosh \frac{x}{c} - 1\right) \tag{30.52}$$

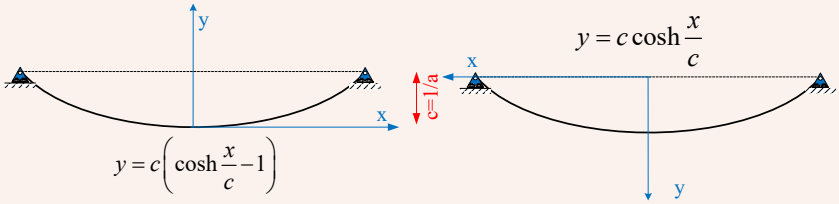


Figura 30.6: Coordenadas de referência alternativas da catenária

57 O comprimento do arco é obtido reorganizando o Eq. 30.46

$$H\frac{d^2y}{dx^2}dx = q_g ds$$

Integrando

$$\begin{aligned} L_{cbl} &= 2\int_0^{L/2} \frac{H}{q_g}\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{2}{q_g}H\frac{dy}{dx}\Big|_0^{L/2} \\ &= \frac{2H}{q_g}\sinh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \end{aligned} \tag{30.53}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

30.3.3.2 Forças

58 A tensão ao longo do cabo é dada por

$$T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

Da Eq. 30.51

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c}$$
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

Ou simplesmente

$$T(x) = H\cosh\left(\frac{q_g x}{H}\right) \tag{30.54}$$

E a tensão máxima ocorre no suporte $x = L/2$

$$T_{max} = H\cosh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.55}$$

30.3.3.3 Acorde de catenária inclinado

59 Em seguida, derivamos a geometria de uma catenária com um acorde inclinado. Seguiremos a derivação de (Cella, 1999), e consulte a Fig. 30.7.

60 Começando com Eq. 30.51 Nós podemos facilmente derivar s De..

$$s = \int_0^x \sqrt{1+(\sinh x/c)^2}dx = \int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx = c\sinh\frac{x}{c} \tag{30.56}$$

Tirando a derivada do Eq. 30.51

$$y' = c\cosh\frac{x'}{c}, \quad y' - v = c\cosh\frac{d-x'}{c}, \tag{30.57}$$

e Eq. 30.56 Dará

$$s' = c\sinh\frac{x'}{c}, \quad l - s' = c\sinh\frac{d-x'}{c}. \tag{30.58}$$

Da Eq. 30.57

$$v = c\cosh\frac{x'}{c} - c\cosh\frac{d-x'}{c}. \tag{30.59}$$

e.. l é então obtido de

$$l = c\sinh\frac{x'}{c} + c\sinh\frac{d-x'}{c}, \tag{30.60}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

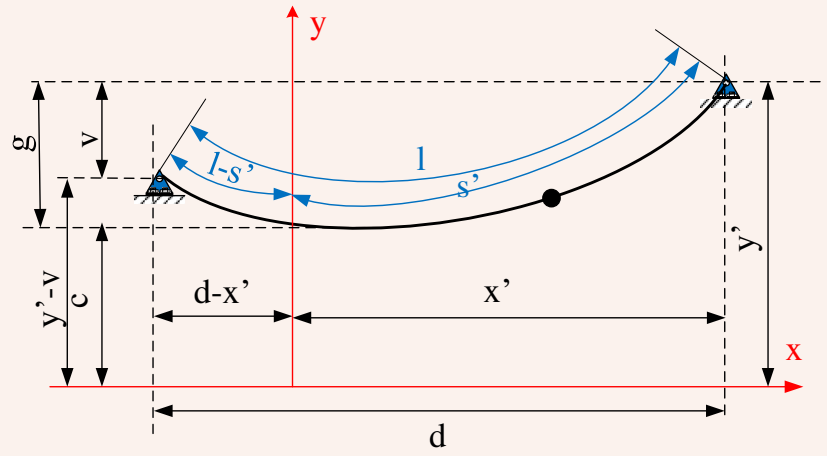


Figura 30.7: Catenária com acorde inclinado, (Cella, 1999)

Assim

$$\frac{v}{l} = \frac{\cosh\left(x'/c\right) - \cosh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}{\sinh\left(x'/c\right) + \sinh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}.$$

Aplicando as identidades hiperbólicas

$$\cosh a - \cosh b = 2\sinh\frac{a+b}{2}\cdot\sinh\frac{a-b}{2}$$

$$\sinh a + \sinh b = 2\sinh\frac{a+b}{2}\cdot\cosh\frac{a-b}{2}$$

Obtemos após o cancelamento

$$\frac{v}{l} = \tanh\frac{2x' - d}{2c}$$

Que, quando resolvido para x'/c Rende-se

$$\frac{x'}{c} = \frac{d}{2c} + \tanh^{-1}\frac{v}{l} \tag{30.61}$$

Substituindo-se em Eq. 30.60Nós obtemos

$$l = c\sinh\left(\frac{d}{2c} + \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) + c\sinh\left(\frac{d}{2c} - \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) \tag{30.62}$$

que é a equação para determinar c Quando o desconhecido é g Finalmente, da Fig. 30.7, $y' = c + g$, e de Eq. 30.57 Nós conseguimos

$$c + g = c\cosh\frac{x'}{c} \tag{30.63}$$

assim, sabendo c, podemos determinar g

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30.3.3.3.1 Ex 30.12: Enfie-se em um cabo inclinado

Procuramos determinar a descida abaixo do suporte superior de um cabo de 110′ de comprimento suspenso entre os suportes que são separados por 100′ horizontalmente e 20′ verticalmente. Aplicando EQ. 30.62 Nós resolvemos para c nesta equação não linear

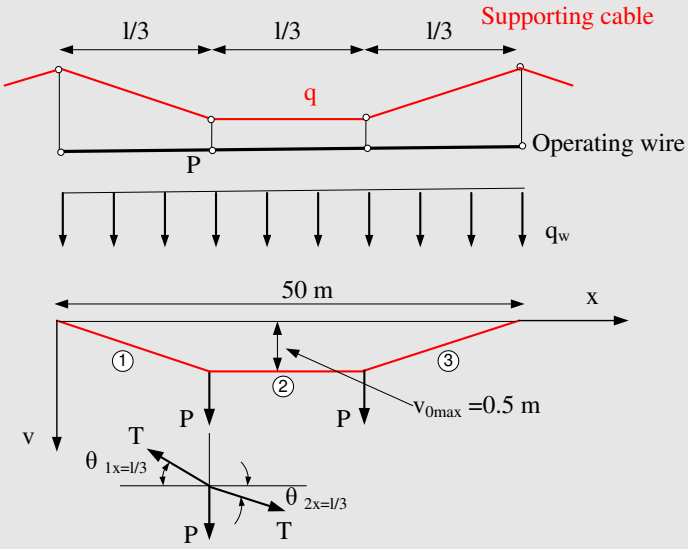
$$110 = c\sinh\left(\frac{100}{2c} + \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) + c\sinh\left(\frac{100}{2c} - \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) \Rightarrow c = 72.288$$

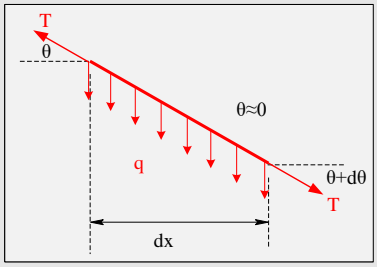
Substituindo-se em Eq. 30.61 dá $x' = 63.291$, e finalmente de Eq. 30.63 Nós conseguimos $g = 29.523'$ Da mesma forma, equações podem ser derivadas para lidar com os casos onde a variável desconhecida é v, d, ou l.

30.3.3.3.2 Ex 30.13: Suporte a cabo de ônibus

A seção seguinte é reproduzida de Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

Procuramos determinar a tensão e a curva de deflexão do cabo de apoio de um fio de operação de uma linha de ônibus.





Use l = 50m, v_{0max}=0,5m. O cabo de suporte de aço tem uma área transversal $A = 0.6\text{cm}^2$, módulo reduzido[a] de elasticidade $E = 8 \times 10^5$ kgf/cm^2, peso do fio q_w por unidade de comprimento é 1,5 vezes maior do que o peso do cabo q.

Primeiro, devemos notar imediatamente que esta é uma estrutura de cabo incrivelmente ''shallow''' com uma relação de envergadura de $r = 1/100$ e, portanto, ângulos θ Será muito pequeno.

CÓPIA PARA REVISÃO

O problema reduz a uma análise de um cabo carregado por duas forças concentradas $P = q_w l/3$.De equações 30.38 Nós temos

$$T_0 = \frac{ql^2}{8v_{0\,\max}} \tag{30.64}$$

e aplicando a equação de equilíbrio ao segmento do cabo

$$T\theta - qdx - T(\theta + d\theta \Rightarrow \frac{q}{T} = -\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{q}{T}(C - x)$$

Em.. $x = l/2$ Nós temos $T = T_0$, e $\theta_0 = 0$ Assim $C - l/2$ e..

$$\theta_0 = \frac{q}{T_0}\left(\frac{l}{2} - x\right) \tag{30.65}$$

Onde θ_0 e.. T_0 são, respectivamente, a inclinação da curva de deflexão e a tensão no cabo antes que o fio inferior seja suspenso.

Considere a porção esquerda (1) e metade da parte média (2) do cabo. Correspondendo a estas porções que temos

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \tfrac{q}{T}\left(C_1 - x\right),\\ v_1 &= \tfrac{q}{T}\left(A_1 + C_1 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned}\theta_2 &= \tfrac{q}{T}\left(C_2 - x\right),\\ v_2 &= \tfrac{q}{T}\left(A_2 + C_2 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(\frac{l}{3} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

As constantes A_1, A_2, C_1, e C_2 são determinadas a partir das seguintes condições: Quando $x = 0, v_1 = 0$; Quando $x = l/2$, $\theta_2 = 0$; Quando $x = l/3$, $v_1 = v_2$ e.. $T\theta_1 - T\theta_2 = P$.. Neste caso

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{Pl}{3q}, \quad C_1 = \frac{P}{q} + \frac{l}{2}, \quad C_2 = \frac{l}{2}.$$

Revisitando o Eq. 30.14 Nós temos

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \theta^2}dx$$

Podemos usar a expansão binomial e com a suposição de pequenos ângulos que teremos

$$L_{cbl} \simeq \int_0^L 1 + \frac{\theta^2}{2}dx$$

Em seguida, a força T é determinado pela igualação da diferença entre os comprimentos da suspensão livre e o cabo apertado ao alongamento de tração

$$\int_0^{l/3}\left(1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right)dx + \int_{l/3}^{l/2}\left(1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right)dx - \int_0^{l/2}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right)dx = \frac{(T - T_0)\,l}{2EA}$$

ou, após a substituição dos valores de θ, e Eq. 30.65

$$\frac{q^2}{T^2}\int_0^{l/3}(C_1 - x)^2\,dx + \frac{q^2}{T^2}\int_{l/3}^{l/2}(C_2 - x)^2\,dx - \frac{q^2}{T_0^2}\int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{(T - T_0)\,l}{EA}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Por isso, por integração, encontramos

$$\frac{q^2}{T^2}\left(\frac{P^2}{q^2}\frac{l}{3}+\frac{P}{q}\frac{2l^2}{9}+\frac{l^3}{24}\right)-\frac{q^2}{T_0^2}\frac{l^3}{24}=\frac{(T-T_0)\,l}{EA}.$$

Após a substituição de T_0 (Eq. 30.64- Nós conseguimos

$$\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^3+\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^2\left[\frac{8}{3}\frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4}-\frac{1}{8}\right]==\frac{1}{3}\frac{EAv_{0\max}^8}{ql^4}\left(\frac{P^2}{q^2l^2}+\frac{2}{3}\frac{P}{ql}+\frac{1}{8}\right)$$

Faça um cálculo numérico:

$$P=\frac{q_v l}{3}=\frac{1.5ql}{3},\quad \frac{P}{ql}=0.5,$$
$$q=0.6\times 0.0078=0.00468\text{kgf/cm},$$

Onde 0.0078kgf/cm^3 é o peso específico do aço; Nós assim obtemos

$$\frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4}=0.0205.$$

Neste caso, a equação de projeto é reduzida ao seguinte:

$$\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^3-0.0704\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^2-0.00484=0,$$

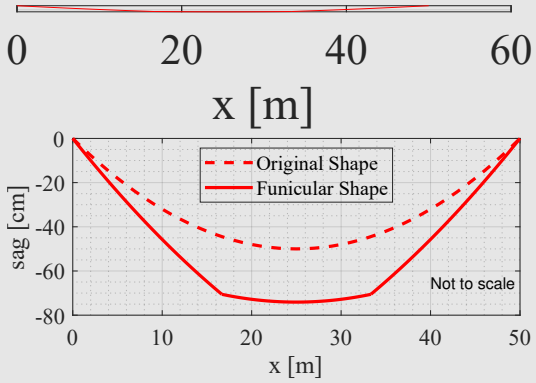
Por isso

$$\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}=0.196,\quad T=460\text{kgf}$$

A equação da curva de deflexão flacidez (a inclinação para a parte externa é v_1E da porção do meio é v_3"Se torna"

$$v_1=254\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$
$$v_2=254\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

Note que na verdade, as sags são pouco visíveis!



CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Esta figura mostra claramente a mudança de forma do cabo para acomodar o cargas concentradas.

[a] O alongamento de um cabo em tensão é devido não só à sua deformação elástica, mas também à flexão parcial e torção. A redução módulo de elasticidade do cabo em tensão não permanece constante, ou seja, o diagrama de teste de tração do cabo não é linear mesmo no elástico deformações no cabo. Primeiro, a extensão do cabo se aperta e a folga entre os fios gradualmente diminui. Em outra extensão, o efeito da deformação local que ocorre nas zonas de contato entre os fios torna-se cada vez mais pronunciado.

30.3.4 Comparação entre a parábola e as soluções baseadas em catenárias

61 Eq. 30.11 e.. 30.3.2.1 Pode ser combinado para render

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \text{ Parabola}$$

62 Finalmente, procuramos comparar a parábola e catenária. Para a parábola, Eq. 30.11 e.. 30.3.2.1 Pode ser combinado para render

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \Rightarrow \frac{q}{H}y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{H}x\right)^2$$

E para a catenária, reescrevemos o Eq. 30.52

$$\frac{q}{H}y = \cosh\left(\frac{q}{H}x\right) - 1 \text{ Catenary}$$

Para permitir a comparação direta, expressamos o cosseno hiperbólico como uma série de poder Taylor

$$\frac{qy}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \ldots \tag{30.66}$$

O primeiro termo deste desenvolvimento é idêntico à fórmula para a parábola, e o outro Os termos constituem a diferença entre os dois. A diferença se torna significativa apenas para grandes qx/H, que é para grandes sags em comparação com o span (figura 30.8b).

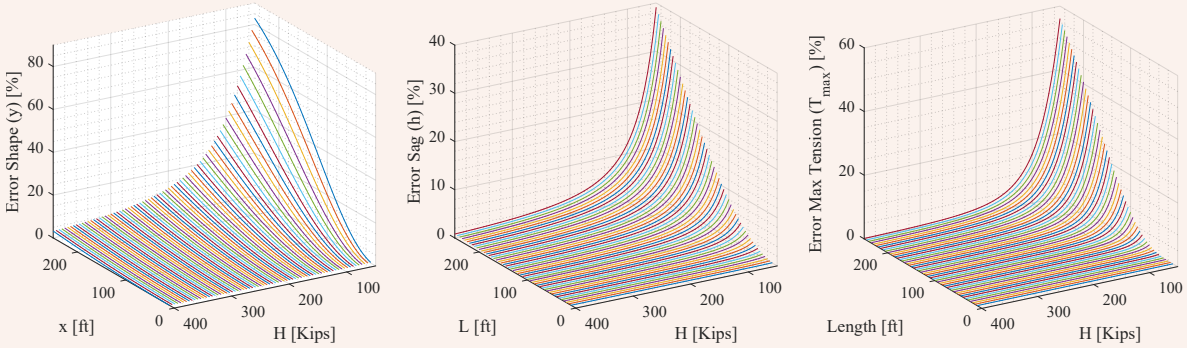
63 Para um cabo com um peso próprio de 1,0 k/ft, os erros entre as soluções parabólicas e à base de catenária são mostrados na figura. 30.8a, 30.8b e.. 30.8c para a geometria, a tensão é baixa e máxima, respectivamente.

30.3.4.1 Ex 30.14: Catenária vs parábola

Para um cabo com um peso próprio de 1,0 kip/ft, procuramos determinar a tensão máxima T_{max}, o sag h e o comprimento do cabo L_{cable} em termos de H e.. L. Usando EQ. 30.53 e.. 30.55 para a descida,

CÓPIA PARA REVISÃO

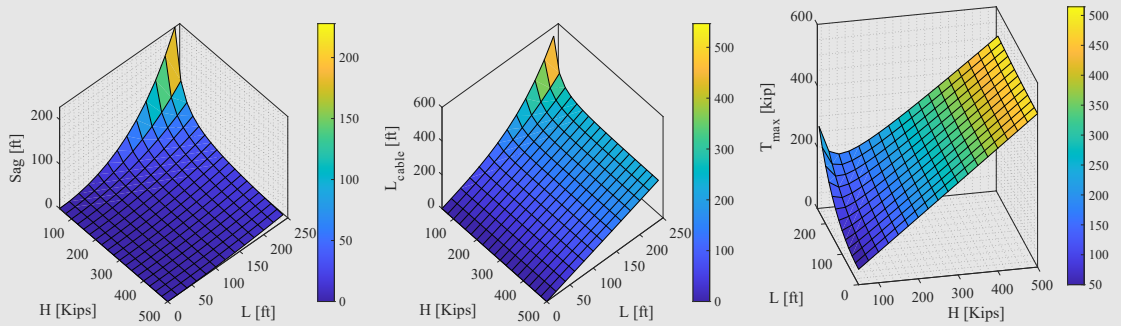
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Forma (b) Sag (c) Tensão máxima

Figura 30.8: Comparação entre catenária e soluções parabólicas

comprimento do cabo e tensão máxima respectivamente, os resultados são melhor ilustrados através das seguintes figuras.



CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Ponte Inca, Peru

Ação catenária, distribuição de carga e equilíbrio em estruturas flexíveis - uma analogia histórica com pontes de suspensão modernas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 31

Análise dos Arcos de Alvenaria (Voussoir)

Abstract

Os arcos foram inventados pelos romanos, e têm sido usados por séculos. Até o final do século 19, eram vousoirs (ou arcos de alvenaria).

São compostos de blocos em forma de cunha. Cada um pressiona firmemente contra a superfície dos blocos vizinhos e transfere cargas uniformemente. São usados em arcos, abóbadas, mastros voadores e muito mais.

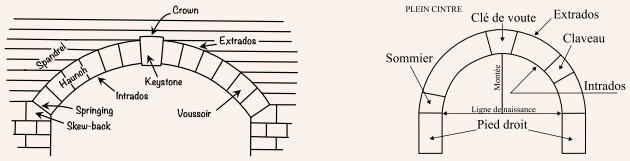
Este capítulo, embora não exaustivo, fornecerá uma introdução a estas estruturas testadas no tempo, cuja análise não foi compreendida até o século XVIII (embora muitas regras de polegares foram obviamente encontradas antes).

31.1 Introdução 1174
31.2 Algumas notas históricas 1175
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1175
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1176
31.2.3 Casal; 1670-1744 1180
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1181
31.2.5 Coulomb;1736-1806 1182
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1183
31.2.7 Soluções elásticas 1184
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1186
31.3 Generalização do método de Pippard; Smars 1192
31.4 Algoritmo 1196
31.5 Considerações finais 1199
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1199
31.5.2 Linha de empurrões 1200
31.5.3 Linha de impulso e pippard 1201

31.1 Introdução

1 Apesar da antiguidade do arco dos vousoirs, Fig. 31.1 e o uso extensivo, a teoria de seu comportamento nunca parece ter sido adequadamente examinada; embora exista uma literatura considerável que lida com seu projeto, os métodos sugeridos são largamente empíricos e não levam em conta as características essenciais da mecânica da estrutura

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Definições (Pippard, Tranter e Chitty, 1936)

(b) Termos em francês

Figura 31.1: O que é um vousoir

(Pippard, Tranter e Chitty, 1936). Enquanto que, de fato, pode haver pouco interesse no projeto de arcos-vossoir, há um grande número desses projetos em pontes no mundo todo.

2 A complexidade da análise do arco de alvenaria não reforçado é melhor capturada por

> A arquitetura tradicional de alvenaria não reforçada desapareceu da nova atividade de construção no mundo ocidental. No entanto, o patrimônio arquitetônico da alvenaria deve ser preservado, e isso envolve análise estrutural. A teoria clássica das estruturas não se aplica bem a tais estruturas heterogêneas com desconhecido condições de contorno. No entanto, existe uma teoria das estruturas de alvenaria baseada em simples suposições sobre o material: boa resistência à compressão, quase nenhuma resistência à tração e um cuidado construtivo para evitar a falha de deslizamento. A teoria nasceu no final do século XVII, desenvolvida durante o século XVIII e foi aplicada no século XIX. Foi abandonada e, eventualmente, esquecida no início do século XX. Depois de meio século, na década de 1960, Heyman incorporou a velha teoria dentro do pórtico da análise limite moderna com seu tesouro implícito de observação crítica e experiência. O teorema seguro permite usar equações de equilíbrio e simples declarações materiais citadas. Nenhuma afirmação sobre condições de contorno, impossível de saber e essencialmente mudando, é feita (além do habitual sobre força e pequeno deslocamentos).
>
> Huerta, 2008 *"The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan"*

31.2 Algumas notas históricas

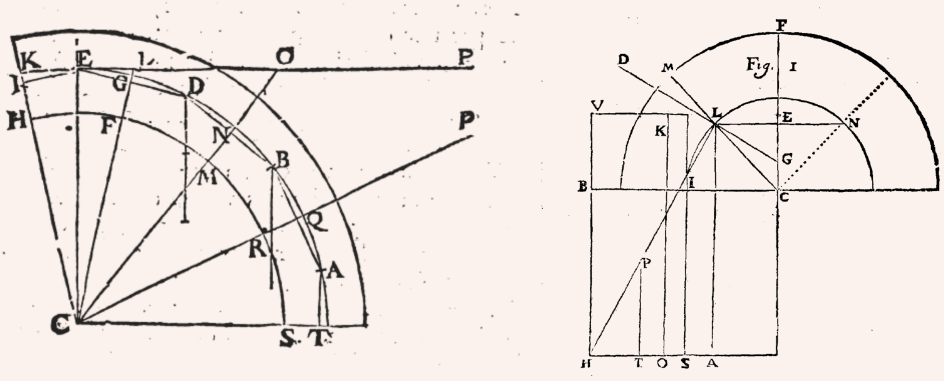
31.2.1 De la Hire; 1640-1718

3 Predestinado a seguir os passos de seu pai, um pintor bem conhecido na corte de Luís XIV, de La Hire[1] Dirigido para a geometria após uma longa recuperação de uma doença na Itália, Fig. 31.2.

[1] Uma excelente biografia de De la Hire pode ser encontrada em (Academie Royale des Sciences, 1741).

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

4 de La Hire, Philippe, 1695 Publicou seu *Traite de MéCanique* e foi o primeiro a aplicar o conceito de polígono funicular ao problema do arco. Mais tarde ele publicou um estudo mais abrangente. Mais tarde, (de la Hire, 1712) Publicou um procedimento para calcular as forças das pontas baseado em um mecanismo de colapso por deslizamento de cunha (incorreto, mas seguro).



(a) de La Hire, Philippe, 1695 (b) de la Hire, 1712

Figura 31.2: Análises do Arch de la Contrate

5 Ele começa qualificando a complexidade do problema

> É um problema de mais dificuldades na arquitetura Que de connoîÉ a força que doivent avoir les pieds-droits des VoûTess pour en foutenir fa pouflee, & Les Architecles n't trouvée Jufquà Prefent aucune regle certoe pour la déTerminer. D.C. problema Apropriado à La MéCanique, & c'est Par fon moyen que nous pouvons le réFodre, Não se preocupe com o que está acontecendoé Facilitação Dans la contruction de ces fortes d'ouvrages.
>
> de la Hire, 1712 *"Sur la construction des voûtes dans les édifices"*

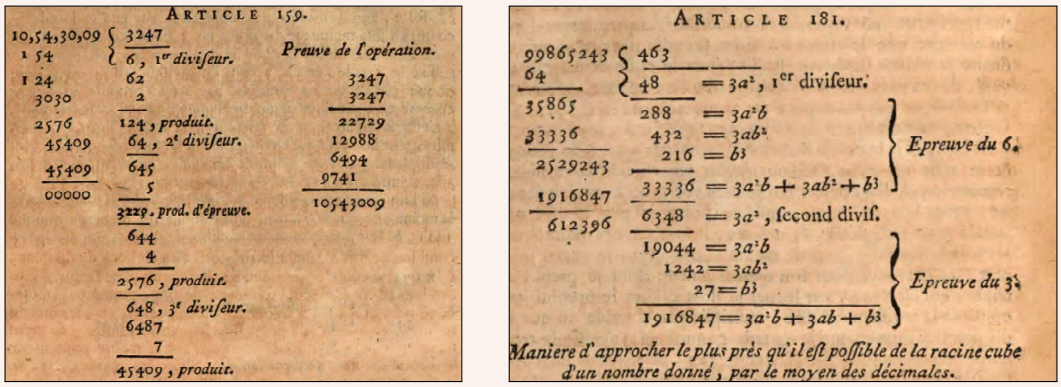
31.2.2 Belidor; 1698-1761

6 Belidor era, antes de tudo, um engenheiro militar (de Belidor, B. F., 1757). Nesta publicação ele exibe grande talento em geometria, trigonometria e álgebra. Por exemplo, na Fig. 31.3 Ele ilustra os procedimentos para determinar a raiz quadrática e cúbica de um número.

7 Nesta mesma publicação, ele dá uma tabela para a dimensão do *Pieds droits*[2] De arcos baseados no método de La Hire, Fig. 31.4[3].

[2] O termo refere-se ao elemento estrutural vertical que sustenta o arco (abutment), Fig. 31.1b.
[3] Interessante, Belidor está fornecendo dimensões para um cofre armazenando pólvora.

CÓPIA PARA REVISÃO



ARTICLE 159.

10,54,30,09 { 3247
1 54 { 6, 1er diviseur.
1 24 62
3030 2
2576 124, produit.
45409 64, 2e diviseur.
45409 645
00000 5
3229. prod. d'épreuve.
644
4
2576, produit.
648, 3e diviseur.
6487
7
45409, produit.

Preuve de l'opération.
3247
3247
22729
12988
6494
9741
10543009

(a) Raiz quadrática de 10.543.009=3.247

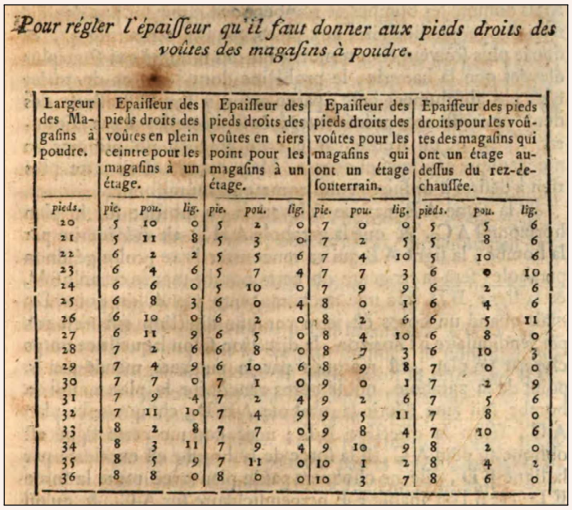
ARTICLE 181.

99865243 { 463
64 { 48 = $3a^2$, 1er diviseur.
35865 288 = $3a^2b$
33336 432 = $3ab^2$
2529243 216 = b^3 } Epreuve du 6.
1916847 33336 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$
612396 6348 = $3a^2$, second divis.
19044 = $3a^2b$
1242 = $3ab^2$
27 = b^3 } Epreuve du 3.
1916847 = $3a^2b + 3ab + b^3$

Maniere d'approcher le plus près qu'il eſt poſſible de la racine cube d'un nombre donné, par le moyen des décimales.

(b) Raiz cúbica de 99.865.243=463,9

Figura 31.3: Raízes quadráticas e cúbicas de grande número métodos por de Belidor, B. F., 1757



Pour régler l'épaiſſeur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des magaſins à poudre.

Largeur des Magaſins à poudre.	Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en plein ceintre pour les magaſins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en tiers point pour les magaſins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes pour les magaſins qui ont un étage ſouterrain.			Epaiſſeur des pieds droits pour les voûtes des magaſins qui ont un étage au-deſſus du rez-de-chauſſée.		
pieds.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pieds.	pou.	lig.
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	9	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

Figura 31.4: A mesa de Belidor para dimensionar o suporte vertical (*Pied-droit*) de arcos de acordo com De La Hire; de Belidor, B. F., 1757

8 O trabalho de Belidor é mais sobre dimensionamento de pilares, do que deigning arcos (voussoirs).

9 Em (de Belidor, B. F., 1729) Belidor quebra sua cobertura de pilar em duas partes: a) teoria rigorosa (capítulos 2 e 3); e b) métodos simplificados (capítulo 4). Em cada um, ele examina várias condições (fronteiras) e seguindo a teoria/método fornece um exemplo de aplicação numérica.

10 A nota de abertura para o quarto capítulo diz

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

> Qui comprend des rèGlas pour trouver l'epaisseur des piedroits des voûTes de toute sorte d'espèCes, par le seul cálculo des nombres, Por favor, me ajudeèBre.
>
> ...
>
> Je me suis engagée au início de segundo livro à Donner Des regles pour trouver l'epaisseur des piedroits des voûTes, afin de se Passer du calcul algebrique, et contribuer à A satisfação das pessoas Qui, quoique trèS-habiles d'ailleurs dans l'architecture militaire U' civile, ne'y sont point appliquéEs. Quanto em ecrit pour le public, E o que é isso, é possível Faire en sorte d'etre entendu de tout le monde, diretor de Ceux qui se contentent de savoir la pratique des choices, et qui veulencent Bem-vindo ao La Bonne-Foi d'un Auteur.
>
> de Belidor, B. F., 1729 La science des Ingegnieurs

11 Na primeira parte é o "abstract", mas o mais interessante é a segunda parte que se traduz para

> *Eu fiz um compromisso no início deste segundo livro para dar regras para encontrar a espessura dos pilares dos cofres, a fim de e contribuir para a satisfação das pessoas que, embora muito habilidoso em arquitetura militar ou civil, não se aplicava a ele. Ao escrever para o público, e em um trabalho como este, é preciso alcançar uma audiência ampla, especialmente aqueles que só querem saber o lado prático das coisas, e que prefeririam ser reais na experiência de um autor.*

Na verdade, este é um problema perene confrontando o ensino de engenharia em universidades[4].

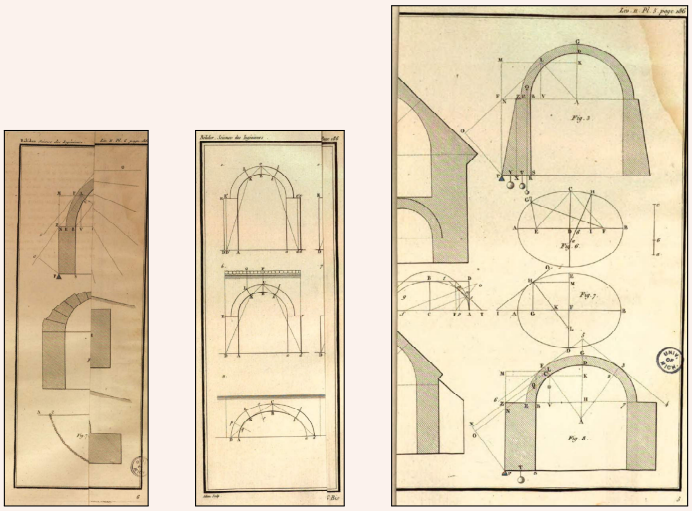
12 de Belidor, B. F., 1729 estudaram um mecanismo de falha de quatro carreiras que, diferentemente La Hire, foi caracterizado por rachaduras colocadas em 45° da primavera do arco, enquanto o cisalhamento Na superfície de contato é negligenciado (Brandonisio e De Luca, 2020). No modelo de Belidor, o deslizamento da cunha central do arco causa um impulso lateral T na ponta do pé que tende a virar sobre o ponto A e o impulso T é equilibrado pelo peso do píer (W_{pier}) e da parte restante do arco (W_{arch}). Além disso, no modelo é assumido que o impulso T é aplicado no meio ($t/2$) da superfície de ruptura, perpendicular à fenda (Fig. 31.6). Portanto, a partir da condição de equilíbrio para ser assegurado para a quebra estabilidade, A espessura mínima do bumbum pode ser avaliada de acordo com o Belidor Critérios de falha:

$$T.d_T \leq W_{arch}(t).d_{Warch} + W_{pier}(h,B).d_{Wpier}(B) \Rightarrow B_{min,Belidor} = B(t,R,h)$$

13 De volta a uma descrição qualitativa do modo de falha, e com referência à Fig. 31.5b Belidor escreve

[4] Observe também a crescente diferenciação entre os engenheiros 'miltários' e 'civil'.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) (b) (c)

Figura 31.5: Análises de arcos (de Belidor, B. F., 1729)

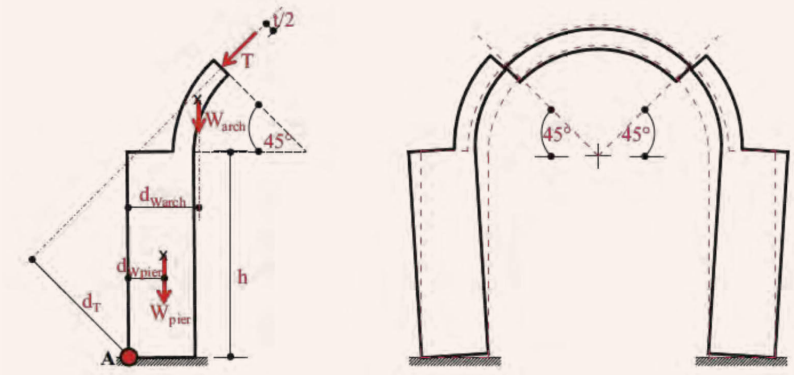


Figura 31.6: Critérios de falha do Belidor (Brandonisio e De Luca, 2020)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

> Il résulte de cette analize que, au momento où une voûTe est prête à Se rompre, elle seséEm quatro festas, não mais do que duas vezeséRieures present sur leurs bases par les arêtes D' et d', e não les deux supéRiures present sur les inféRieures par les arêtes K et k, en s'appuyant l'une conte l'autre par l'arête C.. Si la rompimento a lieu, ces quatre festas tournent autour de ces cinq arêtes comme sur des charnièRes, jusquà Que pontos? K et k Se soient telling éCarteiraéS, que leur distance horizontale soit devenue éGale à La somme des deux lignes KC et kc.. Alors la partie supéRieureéTant mais soutenue, verticalização da tumba, et la voûTesécroule tout..à- Fato. Si em conjunto les arêTes qui servent d'axes à Os movimentos de rotação, par les lignes $D'K$, KC, $d'k$, kC, em pourra considéRer ces lignes comme des leviers mobiles à Lours extréMITés sur des charnièRes, e chargéS chacun du poids des portions de voûTe qui leur correspondente, et il est éVidente que as condições de l'éQuilibre de ces leviers sont absolument les mêmes que celles de la voutte, en sorte qu'il faudra concevoir que le poids de la partie supéRieure KCk, déComposé Dans le sens des lignes CK, ck, é um aplicativo de forçaée aux extréMITés K, k, des leviers $D'K$, $d'k$, qui tende à Les faire tourner en dehors autour des points fixes D' et d', tandis que le poids des fest inféRiesures $D'E'$, $d'e'$, cuidar à Faire Tourner ces mêmes leviers en dedans, et c'est de l'éQuilibre de ces forces que déPend la stabilité de la voûTe. As juntas de ruptura K et k, ils sont platéÉ dans le lieu où la voûEST la plus faible, ou, pour s'exprimer avéMais do que isso, dans le lieu ou le moment des pressions exercices en K, kQui tendent à Renverser les piedroits $D'L$, $d'l$ Pris par relapport aux pontos corrige D', d', est le plus grand possible par rapport au moment du pids de ces piéDroits, pris par relapport aux memes pontos.

31.2.3 Casal; 1670-1744

14 A Casal publicou dois grandes artigos (Couplet, 1729) e.. (Couplet, 1730).

Citando de seu primeiro *méMoire* onde ele usa o paralelograma de forças[5] e considerado atrito:

> Si la force x FedéCompofe -en deux forces y &r z, ces trois forças feront elles comme les côtéForma Triânguloé Par les perperuliculaires nenéSão as direções das forças de Ces Trois. Ceci efl: Demonstroé Dans prefque toca les MéChaniques.
>
> Couplet, 1729 *"De la poussée des voûtes"*

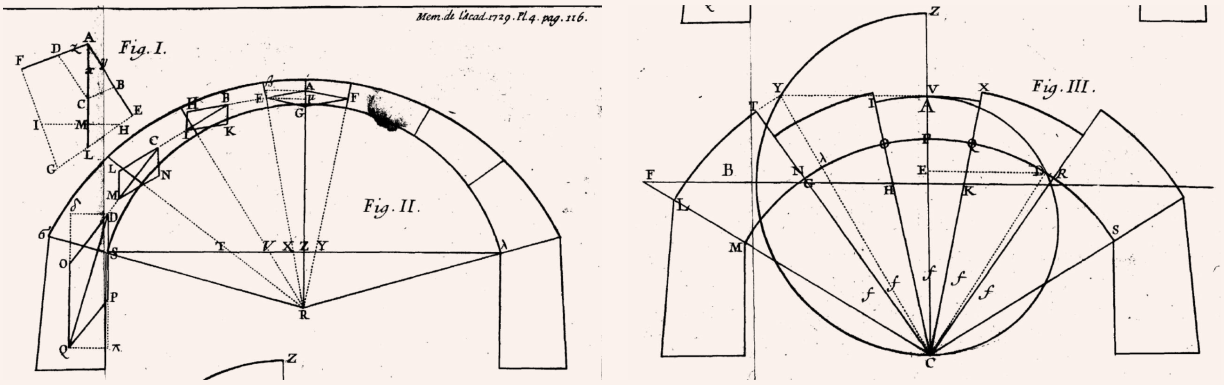
15 A ideia de aplicar o paralelograma das forças ao triângulo cujos lados são perpendiculares às direções das forças é devido a De La Hire. Tem a vantagem de envolver o raio do círculo no problema. Isso é importante porque o raio deste círculo se tornará o raio da curvatura, em trabalhos subsequentes. Com um pouco de imaginação, pode-se argumentar que este foi um passo tímido para o uso do cálculo diferencial.

16 Em sua segunda publicação, Couplet, 1730 foi o primeiro a argumentar corretamente que o modo de falha correto de um voussoir ocorre através da formação de um mecanismo com quatro partes.

[5] Já conhecido por Stevin §14.5.4

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



(a) Fig. Eu & II (b) Fig. III

Figura 31.7: Análises de arcos (Couplet, 1729 PDF)

31.2.4 Danyzy; 1698-1777

17 Danyzy, 1732 foi o primeiro a realizar testes sistemáticos em modelos de arcos, com o objetivo de descobrir o mecanismo correto de colapso (e assim verificar os modos de falha propostos por Coulet), Fig. 31.8.

18 Ele fez duas contribuições originais:

1. Note o caráter assintótico da curva que define a bunda necessária de um arco ou abóbada em termos de altura. Em outras palavras, é possível deduzir uma regra de dimensionamento do glúteo para a dimensão da glúten mesmo sem contabilizar a altura desde que se considere o valor assintótico.
2. Tentou definir uma nova regra, onde não considera a altura, mas a espessura do cofre na chave.

Danizy não conseguiu publicar suas memórias prometidas, das quais apenas

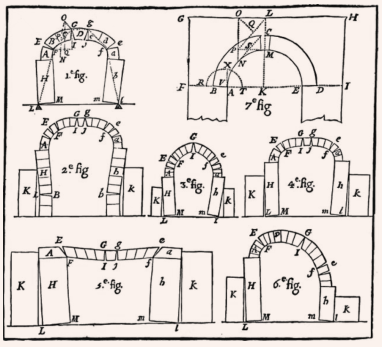


Figura 31.8: Modelos de gesso de Danyzy, 1732

CÓPIA PARA REVISÃO

31.2.5 Coulomb;1736-1806

19 Uma das primeiras análises de Voussoir foi feita por Coulomb, 1773 em seu trabalho seminal sobre fricção. Ele contrasta vousoirs sem fricção no capítulo XVII (Fig. 31.9) com o caso em que o atrito é contabilizado no seguinte.

> XVII
> Des voûTes don't les joints n'ont ni frottemtn, ni cohéFion
>
> "Cette formule fe trouve exhextement la m"ême que celle qui a été déTerminéE par M. Euler (dans le troifi)éMeu volume De l'Académie de PéPor favor, deixe a figura da corrente folicitée por favor, quelconques. D.C. qui eficácia Chegada. carro, en renverfant la courbe, & Fubitituant la Tenfion à la précéDente, s'aplique également à Eu não sei o que fazer & Donne préiféMent la mê Expreffion. Au refte, la méthode de M. Euler n'a rien de Commun avec celle-ci, que le réfultat.
>
> Par cette théOrie, je n'ai cherché - O quê à Remplir Ia Premiére - Não, nãoéQuilibre, qui exige que toutes les forces qui Agissen sur une porção de voûTe Gamm, aient leur refultante Perpendiculaire au joint Mm ; Mas é fácil de fazer Prouver que l'on a fatisfait en mêE-temps à la deuxieme condição, que demanda que cete réfultante túmulo entre les Poin M & M; Carro, puifque la force conflante A agit Perpeiidiculaireinent au joint vertical Ga, en un ponto quelconque S, il s'enfuit que par la condição d'éQuilibre Que eu sou o rei, a ligne des réfultantes fazem couper Tous les se junta ao perpendiculamento, elle ex-a une courbe Parallèle à la ligne intéRieure a B; AINFI, dans le cas où la Forçar um aplicativo ferozé en a, la ligne des prefions feroit Exigência la mêMe queb.
>
> XVIII
> De l'éQuilibre des voûTes, en ayant égard au frottement et àla cohéFion.
>
> O frottement eft fouvent affez confidéDans les MatéRiaux que eu estou trabalhando à La contruction des voûTes, Deite que les différens vouffoirs ne puiffent point glifffer l'un Contre I'autre; Em d.C. cas, l'on peut néGlèger ia première condição d'éQuilibre; & Não, não, nãoéCceffaire que la réFfultante Des forces qni agit fur une porção quelconque de voûte Foi perpendiculaire aux joints qui la terminent; Mais feulement Que é que se passa? Ainfi, en néGligant la cohéEu não sei o que fazer.ûTes nouvellement confitruites; Não há mais nada para fazer $\frac{\phi g M}{MQ}$, despejeéTermine a força B_i, & É o mínimo que posso fazer $\frac{\phi g M}{mQ}$, despejeéTerminer B'; Eu faço isso em outro lugar Que força B Agit en G, fommet du joint, pour rendre la força B, auffi petite qu'elle puiffe êTre. Il faut cependant remarquer que lorfqu'on cherche à ConsertadoréTat d'éQuilibre par Cette feconde condição, en fuppofant les forces paffant par les pontos G & M, il faut fuppofer que ces points font Affez éloignéS'I'extréMITé des joints, pour que l'aderence Des vouffoirs ne permanente pas à Ces forces d'en rompre les ângulos; d.C. quifedéTermine par les méthodes que nous avons empregaréEs en cherchant la force d'un pilier.
>
> Coulomb, 1773 *"Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture"*

20 em XVII (sem atrito nem coesão), ele primeiro argumenta que a forma ideal de um arco é a mesma de uma catenária invertida cuja forma foi determinada por Euler (consulte a Tabela 15.5); de fato, Gaudí explorou isso magnificamente no projeto da *Sagrada Família*. Então, ele afirma que a linha de empuxo deve permanecer confinada no interior da geometria.

21 Como discutido por Heyman, 1997 em XVIII (com fricção), Fig. 31.9, ele mostra metade de um arco de alvenaria, e considera a falha do arco sob a ação de seu próprio peso e do impulso horizontal, H, atuando na coroa através do ponto f (pouco visível). Tomando

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

primeiro um material (como o solo) com atrito e coesão (cisalhamento de força), Coulomb determina o valor de H necessário para causar falha do arco deslizando ao longo do avião Mm.. A falha do arco depende, portanto, das propriedades materiais. No entanto, Coulomb comenta imediatamente que a fricção é muitas vezes tão alta para os materiais usados na construção de arcos, que os vossoirs nunca podem deslizar um sobre o outro. Ele então conclui que se não ocorrer na seção Mm, deve ser por rotação de uma parte do arco sobre qualquer um dos dois m ou M.

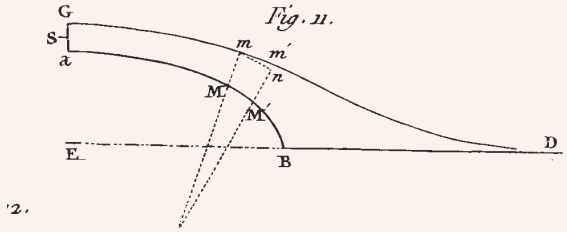


Figura 31.9: Voussoirs sem fricção analisam por Coulomb, 1773

22 If ϕ é o peso da porção $GaMm$ do arco, atuando na linha $g'g$, será visto que se a rotação está ocorrendo sobre M,

$$H = \phi \frac{gM}{MQ} \tag{31.1}$$

E, se sobre m,

$$H = \phi \frac{qg'}{mq} \tag{31.2}$$

Estas expressões para H envolve a densidade do material e as dimensões do arco, mas não envolve a força do material. As expressões são assim declarações puramente geométricas da estabilidade do arco.

23 Coulomb mostrou que o valor máximo de H Deve ser procurado pelo Eq. 31.1, considerando várias seções de falha e linhas de ação de H; Da mesma forma, o valor mínimo deve ser encontrado na Eq. 31.2.. Coulomb notou que um método de tentativa e erro é muito preciso, já que o máximo ou mínimo é muito "plano".

31.2.6 Moseley; 1801-1872

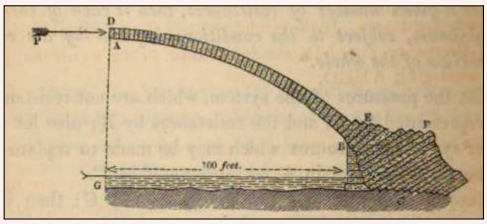
24 Uma chamada para a fama de Moseley é sua *Princípio da mínima pressão* publicado primeiro em (Moseley, 1833) e mais tarde em seu livro[6] (Moseley, 1869), Fig. 31.10 .

[6]Que foi amplamente aceito, e usado por West Point.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

> Acredita-se que constitui um novo princípio na estática. Se há um número de forças em equilíbrio entre as quais entra um sistema de resistências, então essas resistências são tais, que sua soma é MÍNIMA; cada um sendo considerado uma função das coordenadas de seu ponto de aplicação, tomado com um sinal positivo, e submetido às condições impostas pelo equilíbrio do todo.
>
> Moseley, 1833 *"L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure"*



335. *Of all the pressures which can be applied to the highest voussoir of a semi-arch, different in their amounts and points of application, but all consistent with the equilibrium of the semi-arch, that which it would sustain from the pressure of an opposite and equal semi-arch is the least.*

Let EB represent the surface by which an arch rests upon

Figura 31.10: O princípio de Moseley é a menor resistência (Moseley, 1869)

25 Achei que esse "novo princípio"era confuso. No entanto, parece ter alguma semelhança com o trabalho de Maxwell discutido em §15.5.4.2.

26 Muito mais tarde, Moseley, 1869 afirmava claramente que o requisito para a estabilidade é que a linha de impulso não deve passar fora de toda a seção transversal. Por outro lado, se cair no terço médio, então nenhuma tensão é exercida.

31.2.7 Soluções elásticas

31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884

27 O teorema de Castigliano revolucionou análise estrutural, e foi usado para a análise dos arcos elásticos, (Castigliano, 1879).

28 Em seu livro ele dá detalhes de uma ponte construída por Charles Mosca em 1827 sobre Dora Riparia, Turim, Fig. 31.11. Catsigliano trata a ponte em Turim como um arco elástico com três redundâncias, cujos valores ele segue para Computação e ele mostra que um arco rachado (ou seja, Um arco imperfeitamente elástico pode ser tratado por tentativa e erro, e ele faz três conjuntos de cálculos para a ponte.

29 No primeiro, é feita a devida consideração para a elasticidade dos leitos de argamassa entre os vousoirs, e o valor do impulso horizontal do pilar é calculado em 352.990 kgf/m de largura da ponte. Como observado por (Heyman, 1969) Castigliano realiza seus cálculos para um número injustificado de números significativos.

31.2.7.2 Winkler; 1835-1888

30 Considerando que Emil Winkler é mais conhecido pela análise de vigas sobre fundações elásticas ("Wekler's Spring"), não é bem sabido que ele também foi o primeiro a realizar uma análise elástica dos arcos (Winkler, 1879) (Winkler, 1880), Fig. 31.12.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Étude du pont en pierre de taille
construit sur la Doire à Turin, par l'Ingénieur Ch. Mosca

(Planche XV)

1. Données générales. – Corde de l'intrados . . 45m,00
Flèche de l'intrados 5m,50
Rayon » 48m,773
Amplitude » 54° 56′ 42″
Épaisseur de la voûte à la clef 1m,50
» » aux naissances 2m,00
Corde de l'extrados 46m,846
Flèche » 5m,226
Rayon » 55m,102
Amplitude » 50° 18′ 42″
Largeur du pont, y compris les garde-corps . . 12m,60.
2. Charges. – La voûte du pont est en granit du Manalaggio

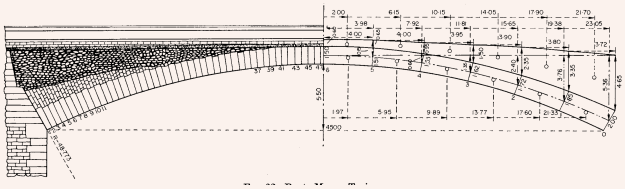


Figura 31.11: Ponte Voussoir de Charles Mosca (turin) analisada por (Castigliano, 1879)

Lage der Stützlinie im Gewölbe.

Vortrag, gehalten im Architekten-Verein zu Berlin am 12. Januar 1880 von E. Winkler.

(II. Theil. Fortsetzung zu Jahrg. 1879, S. 130 dies. Ztg.)

In dem I. Theil meines Vortrages habe ich die hauptsächlichsten Gewölb-Theorien hinsichtlich der Lage der Stützlinie besprochen und bin dabei zu dem Resultate gekommen, dass nur die auf die Elastizitätslehre gegründete Theorie als richtig anzuerkennen ist und dass dieselbe in neuerer Zeit immer mehr Vertreter findet.*)

Bei der Besprechung dieser Theorie haben wir uns die Gewölbe im normalen Zustande vorgestellt, d. h in einem solchen Zustande, dass unmittelbar vor dem Beseitigen des Lehrgerüstes zwar noch keine Drücke in den Fugen existiren, wohl aber alle Fugen vollständig geschlossen und die Widerlager absolut unverrückbar sind.

Wir haben dort den Satz aufgestellt, dass diejenige Stützlinie die richtige ist, welche die Mittellinie des Gewölbes ausgleicht oder für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Mittellinie ein Minimum ist. Hieraus folgt, dass in dem Falle, wo sich eine Stützlinie konstruiren lässt, die mit der Mittellinie zusammen fällt, die Mittellinie in der That die Stützlinie ist.

Beide Sätze sind nur annähernd richtig und nur bei nicht zu flachen Bogen anwendbar; sie ergeben sich nämlich, wenn man den Einfluss der Fugendrücke auf die Deformation gegen den der Momente vernachlässigt. In der That ist es nicht gut denkbar, dass bei einem Gewölbe in normalem Zustande die Stützlinie mit der Mittellinie zusammen fällt; denn beim Ausrüsten senkt sich das Gewölbe etwas, es ändert sich somit die Krümmung an den einzelnen Stellen; es treten somit beim Senken Momente ein oder die Stützlinie tritt aus der Mittellinie heraus. Der Krümmungs-Radius wird am Scheitel gröſser, an den Kämpfern, der festen Anstemmung halber, kleiner, was darauf hinaus kommt, dass die Stützlinie im Scheitel hinauf, an den Kämpfern dagegen herab rückt (Fig. 5). Bezeichnen wir den Abstand der Stützlinie von der Mittellinie im Scheitel und an den Kämpfern mit c und b, die Bogenhöhe mit h, die Gewölbdicke mit d, so ergiebt sich annähernd durch die im ersten Vortrage aufgestellten Bedingungen für flache Bogen bei totaler Belastung:

elliptischen Bögen öffnen sich die Fugen an höher liegenden Bogentheilen.

Beim Ausrüsten öffnen sich die Fugen in Folge der Zusammendrückung des Bogens noch mehr, während sie sich als Wirkungen der entstehenden Momente und der hieraus resultirenden Verdrehungen zum Theil wieder schlieſsen. Die genauere Untersuchung mit Hülfe der Elastizitäts-Theorie giebt, dass der aus beiden Ursachen resultirende Betrag e, um welchen die Fugen sich wieder schlieſsen, bei flachen Bögen annähernd:

$$e = \frac{9\,l^3}{8\,E\,d}\,\frac{4\,h - 5\,d}{8\,h^2 + 10\,h\,d + 5\,d^2}$$

ist. Dieser Betrag ergiebt sich aber im allgemeinen kleiner, als der aus der Senkung des Lehrgerüstes resultirende, vielfach beobachtete Betrag, so dass in der That die Fugen im allgemeinen geöffnet bleiben, also ein Aufruhen an den unteren Kanten der Kämpferfugen oder vielmehr an einer diesen Kanten nahe liegenden Stelle eintritt (Fig. 6). Das Gewölbe verhält sich alsdann so, als ob dasselbe auf Gelenken ruhte, die sich nahe an den unteren Kanten der Kämpferfugen befinden. Bei Gewölben mit groſsem

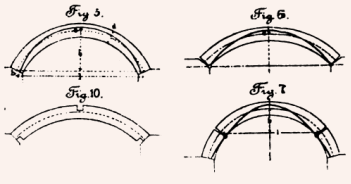


Figura 31.12: Análise elástica do Winkler de arcos (Winkler, 1880)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

31 Sua abordagem é mais rigorosa e generalizada do que a de Castiglione.

31.2.8 Pippard; 1891-1969

32 Há duas contribuições interessantes de Pippard. Na primeira, assim como Danyzy, 1732 Testei a teoria de Casal, Pippard, Tranter e Chitty, 1936 realizou testes para verificar as teorias de falhas dos vousoirs, Fig. 31.13 previsto por Castigliano.

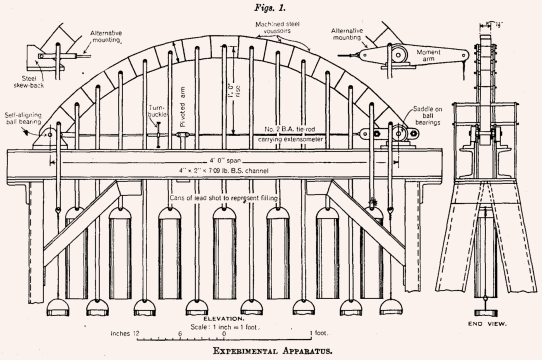


Figura 31.13: Aparelho experimental usado por Pippard, Tranter e Chitty, 1936 para investigar a estabilidade dos arcos de vooussóis.

33 Em sua segunda contribuição, Pippard examina o fracasso do vousoir. Citando seu livro:

1. Na Fig. 31.14 (a) mostra um arco de vousoir com seu preenchimento da terra e, além disso, uma carga aplicada a um voussoir particular. Como este carga concentrada é aumentado, o impulso horizontal também aumenta. Por pequenos valores de W O impulso concorda praticamente com os valores para uma costela sólida do mesmo tamanho e com pilares semelhantes.
2. A um valor particular W_1, Fig. 31.14 (b) uma mudança ocorre na taxa de variação do impulso com a carga aplicada que é consistente com a formação de um pino em C, indicando que o arco tornou-se efetivamente duas seções sólidas AC e.. BC Presos juntos em.. C.. Se os suportes são autorizados a se espalhar ligeiramente, o ''pin'' pode claramente ser visto para ser formado pelo hinging dos vousoirs adjacentes em C.. A nova proporção de impulso para carga é mantida por um tempo.
3. Em carga W_2 outra mudança na taxa ocorre que é devido à formação de um segundo pino virtual em D, como em Fig. 31.14 (c). Este pino está, no entanto, nos intrados do arco, enquanto o primeiro estava nos extrados. O arco agora consiste em duas seções sólidas AD e.. BC conectado por uma terceira seção sólida DC que está preso a eles, e é essencialmente a estrutura da ponte cantilever.
4. Um aumento ainda maior na carga mostra que em W_3 Há outra mudança na taxa de variação do impulso com a carga devido à formação de um terceiro "pin" no intrados

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

em *B*.. O arco agora consiste em três partes sólidas de qual uma, *AD*, é *Encastré* Em.. *A*, os outros dois sendo efetivamente sólidos pin-ligados. Como em Fig. 31.14 (d). Durante este processo há uma redução progressiva na redundância da estrutura. O arco original tem três graus de redundância, mas com a formação de cada pino sucessivo, um grau de redudância é perdido, de modo que (b) tem dois, (c) tem um, e (d) não tem nenhum, ou seja. (d) é estaticamente determinado.

5. Se o carregamento continuar além W_3 , um colapso súbito do arco ocorre em uma carga W_4 devido à formação de um quarto pino em A que transforma o conjunto tho em um mecanismo, Fig. 31.14 (e).

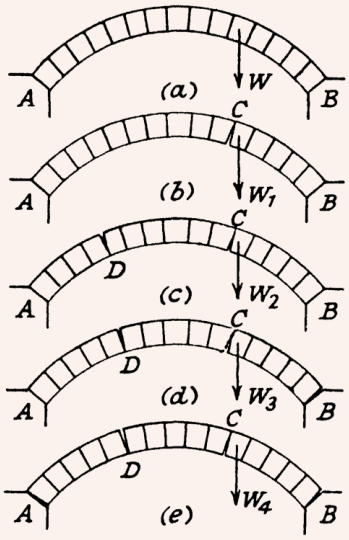


Figura 31.14: Fracasso gradual de um vousoir Pippard, Tranter e Chitty, 1936

34 Pippard continua afirmando que

> Embora à luz do trabalho mais recente Castigliano método aparece para fornecer a base mais sólida do projeto, não tem sido até agora geralmente aceito e confiável ainda é colocado em uma combinação de teorias mais antigas, que será resumido no próximo parágrafo.
>
> Pippard e Baker, 1943 The analysis of engineering structures

35 Assim, com referência à Fig. 31.15Ele propõe um procedimento como segue:

1. Assuma que as posições das quatro dobradiças (A, B, C e D) são conhecidas.
2. Seção CDB estará em equilíbrio sob as forças que atuam sobre ele mas não inclui o desconhecido W.
3. Leve os momentos dessas forças sobre C e D, teremos duas equações em H, V_B e parte apropriada do sistema de carga morto. Então eliminamos V_B e resolver para H.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

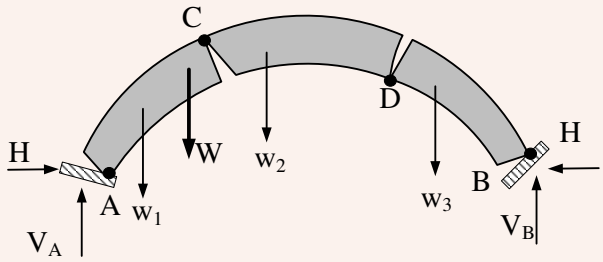


Figura 31.15: Voussoirs analisa por Pippard e Baker, 1943

4. Considere o momento sobre A, são tomadas, teremos uma equação em termos de W, V_B, H e os termos da carga morta. V_B é novamente eliminado usando as equações de momentos sobre C, e desde então H Foi encontrado, então W pode ser determinado.

36 No entanto, as posições de C e D não são conhecidas *A priori* É necessário um procedimento de tentativa e erro, mas certas regras gerais reduzem o Região de Confiança consideravelmente. Assim, pino C Sempre se forma nos extrados da junta adjacente a W, deitado entre W e a coroa do arco; Pino B Sempre nos extrados da primavera mais longe de W; Pino A está nos intrados, ou na outra mola ou em uma junta perto dela, e a posição de pino D pode na maioria dos casos ser julgado muito quase.

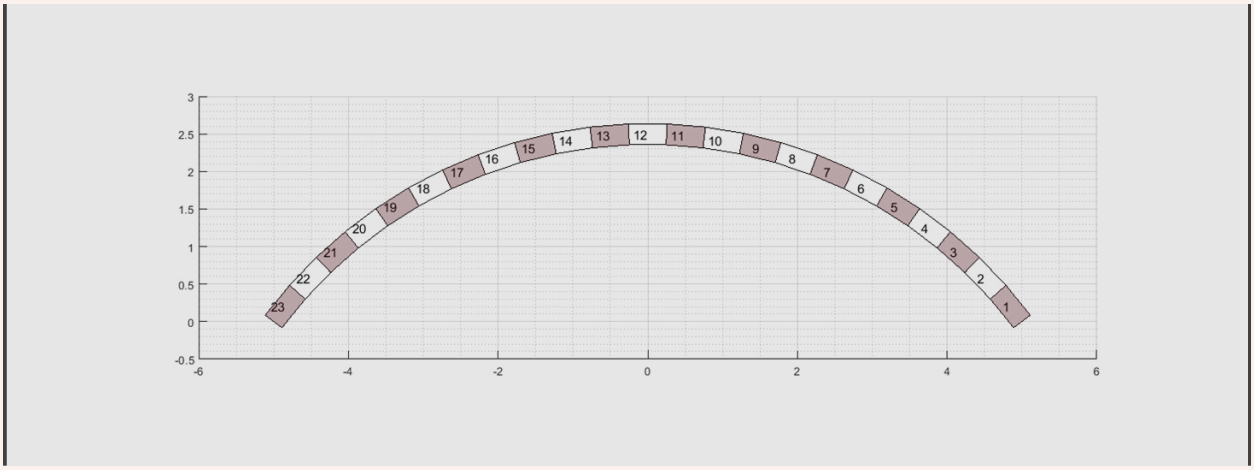
37 Para encontrar W Portanto, é necessário fazer algumas tentativas para diferentes posições de pinos. H é calculado a partir de uma consideração do equilíbrio da seção CB Como antes, mas para algumas (talvez duas ou três) posições diferentes D.. Que dando o menor valor de H será a correta, já que dará o menor valor de W Qualquer que seja a posição de A.. Depois de encontrar HAlgumas posições alternativas para A são tomados e os valores correspondentes de W calculado como já descrito. O mais baixo será o correto.

38 Seguir é um exemplo numérico.

31.2.8.1 Ex 31.1: Carga falha de um voussoir; O método de Pippard

A seção seguinte é reproduzida de Pippard e Baker, 1943 The analysis of engineering structures.

CÓPIA PARA REVISÃO



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Pontos de referência			x	y	Carregar	Um momento	Σw	Σwx
Int	Meio	Ext			w	wx		
23, 0			1.600	-0.027				
		23, 0	1.636	0.000			2,016	1,649
	23		1.593		108	172		
22, 23			1.550	0.035				
		22, 23	1.584	0.064			1,908	1,477
	22		1.540		106	163		
21, 22			1.496	0.091				
		21, 22	1.526	0.123			1,802	1,314
	21		1.481		107	159		
20, 21			1.437	0.144				
		20, 21	1.465	0.178			1,695	1,155
	20		1.419		100	142		
19, 20			1.369	0.191				
		19, 20	1.399	0.228			1,595	1,013
	19		1.353		94	127		
18, 19			1.307	0.233				
		18, 19	1.329	0.272			1,501	880
	18		1.283		86	110		
17, 18			1.237	0.270				
		17, 18	1.256	0.310			1,415	776
	17		1.210		83	100		
16, 17			1.165	0.301				
		16, 17	1.181	0.342			1,332	676
	16		1.135		77	88		
15, 16			1.090	0.326				
		15, 16	1.102	0.368			1,255	588
	15		1.057		74	78		
14, 15			1.013	0.345				
		14,15	1.022	0.388			1,181	510
	14		0.978		71	69		
13, 14			0.936	0.357				
		13, 14	0.941	0.401			1,110	441
	13		0.898		68	61		
12, 13			0.857	0.364				
		12, 13	0.859	0.408			1,042	380
	12		0.818		68	56		
11, 12			0.778	0.364				
		11. 12	0.777	0.408			974	324
	11		0.737		68	50		
10, 11			0.700	0.357				
		10, 11	0.694	0.401			906	274
	10		0.657		71	47		
9, 10			0.622	0.345				
		9, 10	0.613	0.388			835	227
	9		0.578		74	43		
8, 9			0.545	0.326				
		8, 9	0.533	0.368			761	184
	8		0.501		77	39		
7, 8			0.471	0.301				
		7, 8	0.455	0.342			684	145
	7		0.425		83	35		
6, 7			0.398	0.270				
		6, 7	0.379	0.310			601	110
	6		0.353		86	30		
5, 6			0.328	0.233				
		5, 6	0.306	0.272			515	80
	5		0.283		94	27		
4, 5			0.267	0.191				
		4, 5	0.237	0.228			421	53
	4		0.217		100	22		
3, 4			0.199	0.144				
		3, 4	0.171	0.178			321	31
	3		0.154		107	16		
2, 3			0.140	0.091				
		2, 3	0.109	0.123			214	15
	2		0.096		106	10		
1, 2			0.085	0.035				
		1, 2	0.052	0.064			108	5
	1		0.043		108	5		
0, 1			0.036	-0.027				
		0, 1	0.000	0.000				

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Desde que na maioria dos casos os valores críticos de W será necessário para todos os pontos no arco o trabalho deve ser feito sistematicamente, eo seguinte O método é recomendado. O anel de arco consiste em 23 voussoirs 333" de profundidade. A extensão é de 3 pés e o aumento de 2 pés 6 polegadas.

Tome B como origem com Ox como horizontal e Oy como eixos verticais de referência. A partir do pilar esquerdo, as coordenadas dos extrados e intrados de cada articulação são tabuladas (neste caso específico em termos do raio médio). A coordenada x do centro de cada vousoir é inserida em pilar 4 da tabela, a carga morta aplicada a 6, e o momento desta carga morta sobre a origem em 7. A soma de todas as cargas mortas à direita de uma junta e a soma de seus momentos são inseridos em pilares 8 e 9.

Como exemplo, determinaremos a carga que deve ser aplicada ao Voussoir No. 19 para fazer o arco ficar instável.

Tirando momentos sobre C para a parte do arco entre C e.. B Nós conseguimos

$$x_c V_B = y_c H + x_c \sum_C^B w - \sum_C^B wx$$

Ponto C É 18-19e[a], e sobre a substituição de valores numéricos da tabela nós "tenho"

$$1.329 V_B = 0.272 H + (1.329 \times 1,501) - 886 \Rightarrow V_B = 0.204 H + 835 \tag{31.3}$$

Para um primeiro julgamento, suponham que D Estar entre os blocos 9-10i. A equação do momento para a parte do arco entre D e.. B sobre este ponto é

$$0622 V_n = 0345 H + (0622 \times 835) - 227 \Rightarrow V_n = 0554 H + 471 \tag{31.4}$$

Eliminando V_n De Eq. 31.3 e.. 31.4 das duas equações anteriores

$$H = l,040 \text{ lbs} \tag{31.5}$$

Para um segundo julgamento, assuma o pino D a 10-11i;

$$0700 VB = 0357 H + (0700 \times 906) - 274 \Rightarrow V_B = 0511 H + 516.$$

De novo da Eq. 31.3 e.. 31.2.8.1

$$H = 1,042 \text{ lbs}$$

Da mesma forma, se pin D Está em 8-9i

$$H = l,045 \text{ lbs}$$

A posição 9-10i está correta, já que dá o menor valor para H.. Selecionando o pilar esquerdo (isto é, 23-0i) como o pino A nós obtemos, tomando momentos sobre A

$$l600 V_B = -0027 H + (l600 \times 02016) - 1,649 + 0247 W \Rightarrow V_n = -0017 H + 086 + 0155 W. \tag{31.6}$$

Eliminando V_n entre Eq. 31.3 e.. 31.6 e substituindo por H De.. 31.5,

$$W = 512 \text{ lbs}$$

Se o pino A Está em 23-22

$$W = 534 \text{ lbs}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Os pinos corretos são, portanto, O-le; 9-l0i; I8-l9e; E 23-0i, e os valores correspondentes para a carga e impulso horizontal são $W = 512$ lbs e $H = l,040$ lbs respectivamente.

Deve ser notado que W é diretamente proporcional à carga morta e assim, do ponto de vista da estabilidade, um enchimento pesado é preferível a uma luz. A compressão tensões, no entanto, são naturalmente aumentados na mesma proporção e há mais perigo de uma falha desta causa.

[a] 18-19e: Juntas entre 18 e 19, extrados.

31.3 Generalização do método de Pippard; Smars

Adaptado de "Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes" por Smars, 2000

39 A análise dos arcos de alvenaria (e, em certa medida, das estruturas mais gerais do bloco) pode ser realizada através de uma discretização das equações derivadas em §32.1.4, (Smars, 2000).

40 Smars, 2000 O método de Pippard (discretização) também explica a carga gravitacional variável e os momentos internos. Por isso, não está restrito a vousoirs.

41 É possível escrever as equações de equilíbrio em forma de matriz para conectar esforços internos a forças externas se alguém estiver apenas interessado nas forças em um número discreto de seções.

42 O arco é discretizado como um conjunto de n Blocos. Cada bloco é submetido a forças externas (atuando ao longo de seus intrados, extrados, e centro de gravidade (autopeso)) e tem esforços internos (agindo sobre as pedras), Fig. 31.16.

43 Para simplificar, forças, incluindo esforços internos são expressas no mesmo referencial (x, y) Avião. Índice 1 refere-se a forças de entrada, índice 2 para forças de saída, e índice e para forças externas.

44 O esforços internos $\mathbf{X}$ Atuando nas interfaces entre blocos i e.. $i+1$ Ajam em direções opostas em cada um dos dois blocos adjacentes. A força agindo em bloco i é denotado $\mathbf{X}_1^{i+1}$ com $\mathbf{X}_2^i = -\mathbf{X}_1^{i+1}$.

45 Equações de equilíbrio para um bloco são simplesmente

$$F_{1x} - F_{2x} + F_{ex} = 0 \tag{31.7}$$

$$F_{1y} - F_{2y} + F_{ey} = 0 \tag{31.8}$$

$$F_{1x}y_{1r} - F_{1y}x_{1r} + M_1 - F_{2x}y2r + F_{2y}x_{2r} - M_2 + F_{ex}y_{er} - F_{ey}x_{er} + M_e = 0 \tag{31.9}$$

Com coordenadas relativas baseadas em um ponto de referência r

$$x_{1r} = x_1 - x_r \tag{31.10}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

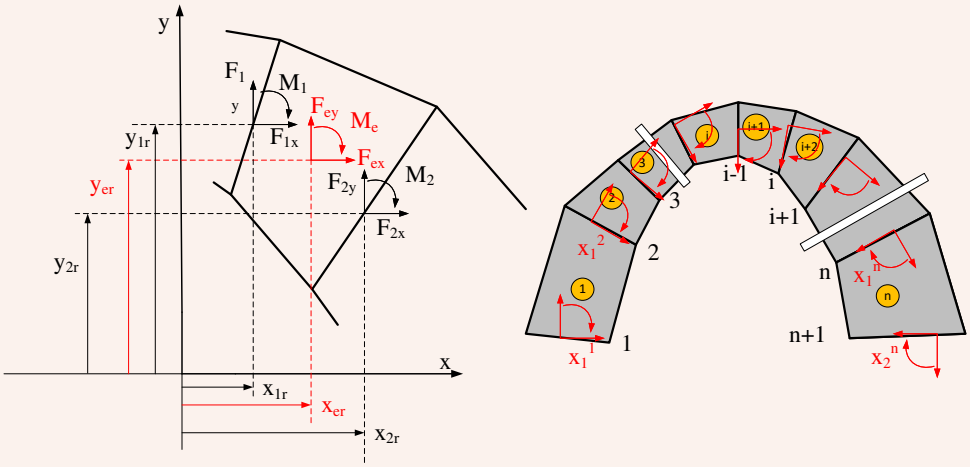


Figura 31.16: Fluxo de forças através dos blocos em um arco

Que pode ser escrito em forma de matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \hline M_1 + F_{1x} y_{1r} - F_{1y} x_{1r} \\ \hline F_{ex} \\ F_{ey} \\ \hline M_e + F_{ex} y_{er} - F_{ey} x_{er} \\ \hline F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 + F_{2x} y_{2r} - F_{2y} x_{2r} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{31.11}$$

46 A equação de equilíbrio pode ser simplificada com as seguintes definições

$$\lfloor \mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \rfloor \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_e \\ \mathbf{X}_2 \end{array}\right\} = 0$$

$$\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{31.12}$$

$$\mathbf{X}_{_} = \left\{\begin{array}{c} F_{_x} \\ F_{_x} \\ M_{_} + F_{_x} y_{_r} - F_{_y} x_{_r} \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

47 Notando que a força em cada bloco deve estar em equilíbrio ($X_2^i = X_1^{i+1}$), o equilíbrio de uma sequência de blocos pode ser escrito

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c|cc|c} \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & & & & \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & & \\ & & & & I & \ddots & & & & \\ \hline & & & & & & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_e^1 \\ \hline \mathbf{X}_1^2 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_e^n \\ \hline \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{31.13}$$

48 Se as forças externas forem conhecidas, elas podem ser movidas para o lado direito da equação

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = -\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{array}\right\} \tag{31.14}$$

49 Para determinar esforços internos, como vimos, devemos saber os valores de três parâmetros. Por exemplo, podemos pegar os componentes da força $\mathbf{X}_e^n$

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & -\mathbf{I} & \\ & & & & \mathbf{I} & \end{array}\right]^{-1} \left\{ -\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} \right\} \tag{31.15}$$

$$= -\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n - \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_e^i \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=2}^n \mathbf{X}_e^i \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=n}^n \mathbf{X}_e^i \end{array}\right\} \tag{31.16}$$

$$\mathbf{X}_1^i = \mathbf{X}_2^i - \mathbf{X}_e^i \quad , \quad \mathbf{X}_2^i = \mathbf{X}_1^{i+1} \tag{31.17}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

50 As forças X^i em ângulo polar θ_i para cada elemento i, a conversão para o normal esforços internos é diretamente

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c} N^i \\ V^i \\ M^i \end{array}\right\} &= \left[\begin{array}{ccc} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F^i_{1x} \\ F^i_{1y} \\ M^i_1 \end{array}\right\} \\ &= \left[\begin{array}{ccc} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F^{i-1}_{2x} \\ F^{i-1}_{2y} \\ M^{i-1}_2 \end{array}\right\}\end{aligned} \tag{31.18}$$

M seria zero apenas quando a linha de resistência passa pelo centro da seção (i.e. Excentricidade zero). Esta condição só pode ser imposta em três seções.

51 A definição de excentricidade absoluta e relativa (ex, e) é o mesmo que foi dado anteriormente

$$ex^i = \frac{M^i}{N^i} \quad , \quad e^i = -2\frac{ex}{d} = -2\frac{M^i}{N^i d} \tag{31.19}$$

52 A excentricidade relativa determina o ponto onde a força normal N deve agir para causar um momento M.. Este ponto é chamado de *centro de pressão* E a linha que os conecta é o *Linha de impulso*.. Devemos notar que a transformação $x'_i = a_{ij}x_j$) da forma do arco e forças aplicadas leva a uma transformação idêntica da linha de empuxo. "Linha de resistência"conecta os pontos onde o esforços internos entra na seção.

53 Como mostrado anteriormente, esforços internos em arco poderia ser determinado a partir de três iniciais condições de contorno. Portanto, para um determinado conjunto de esforços internos, corresponde a uma linha de impulso. Assim, atribuindo três pontos cruzados por essa linha, podemos determinar as constantes de integração, Fig. 31.17 Onde

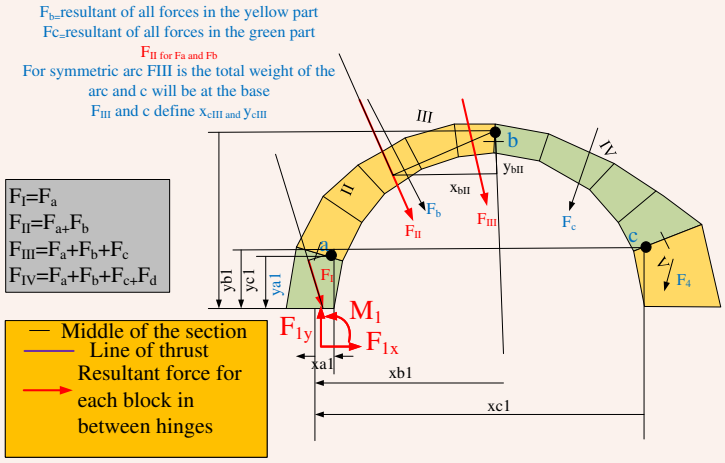


Figura 31.17: Determinação do conjunto de forças na origem

CÓPIA PARA REVISÃO

$x_{a1} = x_a - x_1$, $x_{b1} = x_b - y_I$ etc.

54 Em seguida, determinaremos o condições de contorno de tal forma que a linha de impulso passará por três pontos no arco. Isso implicaria zero momentos (que dependem de M e.. N) nesses locais

$$\begin{cases} M_a = (F_{1x} y_{a1} - F_{1y} x_{a1} + M_1) + (F_{xI} y_{aI} - F_{yI} x_{aI}) \\ M_b = (F_{1x} y_{b1} - F_{1y} x_{b1} + M_1) + (F_{xII} y_{bII} - F_{yII} x_{bII}) \\ M_c = (F_{1x} y_{c1} - F_{1y} x_{c1} + M_1) + (F_{xII} y_{cIII} - F_{yIII} x_{cIII}) \end{cases}$$

Passar por cima desses momentos deve ser zero,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{a1} & -x_{a1} & 1 \\ y_{b1} & -x_{b1} & 1 \\ y_{c1} & -x_{c1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{yI} x_{aI} - F_{xI} y_{aI} \\ F_{yII} x_{bII} - F_{xII} y_{bII} \\ F_{yIII} x_{cIII} - F_{xIII} y_{cIII} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_I \\ M_{II} \\ M_{III} \end{Bmatrix} \tag{31.20}$$

Resolvendo, determinamos o conjunto de forças "input"para cada bloco.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_{b1} - x_{c1} & x_{c1} - x_{a1} & x_{a1} - x_{b1} \\ y_{b1} - y_{c1} & y_{c1} - y_{a1} & y_{a1} - y_{b1} \\ x_{c1} y_{b1} - x_{b1} y_{c1} & x_{a1} y_{c1} - x_{c1} y_{a1} & x_{b1} y_{a1} - x_{a1} y_{b1} \end{bmatrix}$$

Onde

$$\Delta = -x_{a1} y_{b1} + x_{a1} y_{c1} + x_{b1} y_{a1} - x_{b1} y_{c1} - x_{c1} y_{a1} + x_{c1} y_{b1}$$

55 O MATLAB®Código dado em §I.1.4 Gera as seguintes figuras correspondentes, Fig. 31.18.

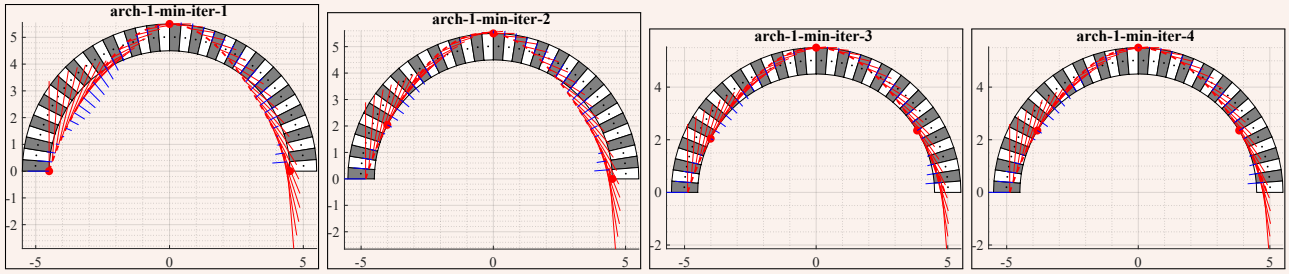
31.4 Algoritmo

56 A abordagem não é específica para um determinado tipo de arco (em termos de dobradiças), e é análoga ao método da estática inferior§57.2.2) para análise de colapso.

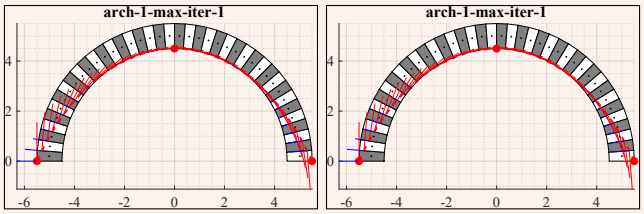
57 O correspondente MATLAB®O código é dado em §I.1.4.

1: **procedure** Análise de colapso do arco da alvenaria(Figura 31.17)
2: Inicializar n, R, γ, g α e_max, ε
3: Assuma n_1, n_2, n_3,e_1, e_2, e_3, $iter_{max}$ ▷ Inicializar constantes
4: Mínimo_Thurst
5: Máximo_Thurst
6: **end procedure**

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Mínimo de impulso



(b) Impulso máximo

Figura 31.18: MATLAB®Gerou sequência de dobradiças em um vousoir

procedure MÍNIMO_EMPURRA(Determine a linha mínima de impulso dada 3 dobradiças) ▷ Palpite inicial
  $e_1 \leftarrow -max_eccent; e_2 \leftarrow max_eccent; e_3 \leftarrow -max_eccent;$
  $n_1 \leftarrow 1; n_2 \leftarrow round(n/2)+1; n_3 \leftarrow n+1; iter \leftarrow 0$
  while Eccent **false** & $iter < iter_{max}$ **do**
    $iter \leftarrow iter + 1$ ▷ Compute tração facial
    [**N**, **V**, **ex**] ← Rostos_Esforços$n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$)] ▷ Encontre a seção mais ofensiva em termos de excentricidade
    $[m, r_0] \leftarrow max(abs(\mathbf{ex})$ ▷ Redefinir localização da dobradiça
    if $ex(r_0) < 0$ **then**
      if $abs(r_0 - n_1) < abs(r_0 - n_3)$ **then**
        $n_1 = r_0$
      else
        $n_3 \leftarrow r_0$
      end if
    else
      $n_2 \leftarrow r_0$
    end if
    if $max(abs(\mathbf{ex})) - \mathbf{max_eccent} < \varepsilon$ **then**
      Eccent ← **true**
    else
      Eccent ← **false**
    end if
  end while
end procedure

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

procedure ROSTO_ESFORÇOS$n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$)(Equação 31.18) ▷ Compute forças na primeira face para passar pelos três pontos impostos
  $[F_{x1} F_{y1} M_1] \leftarrow$ Três_Pontos$n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$) ▷ Forças externas na primeira face
  $[F_x, F_y, M] \leftarrow$Rostos_Chaves ▷ Adicione os dois componentes
  $F_x \leftarrow F_x + F_{x1}, F_y \leftarrow F_{y1}; M \leftarrow M + M_1 + (x - x(1))F_{y1} - (y - y(1))F_{x1}$ ▷ Determine o correspondente esforços internos
  $\mathbf{N} \leftarrow -\cos(\boldsymbol{\theta})F_x + \sin(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_y; V \leftarrow \sin(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_x + \cos(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_y; ex \leftarrow -2\mathbf{M}/(\mathbf{Nt})$
end procedure

procedure TRÊS_PONTO(Equação 31.20)
  Espessura de cálculo **t**, raio **r**, extrados $\mathbf{x}_e$, intrados $\mathbf{x}_i$, linha central **x** ▷ Ponto central primeira seção
  $x_1 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1,\ y_1 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1$
  $x_2 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2,\ y_2 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2$
  $x_3 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3,\ y_3 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3$ ▷ Coordenadas das três dobradiças
  $x_a = x_1(n_1); y_a = y_1(n_1)$
  $x_b = x_2(n_2); y_b = y_2(n_2)$
  $x_c = x_3(n_3); y_c = y_3(n_3)$ ▷ Defina as forças relacionadas com a matriz na primeira seção para momentos nas 3 dobradiças
  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_a - y_r & -(x_a - x_r) & -1. \\ y_b - y_r & -(x_b - x_r) & -1. \\ y_c - y_r & -(x_c - x_r) & -1. \end{bmatrix}$$
  $[F_x, F_y, M] \leftarrow$ Rostos_Chaves ▷ coordenadas do centro dos vetores da seção -> ponto de passagem
  $x_a = x_a - x_1(n_1); y_a = y_a - y_1(n_1)$
  $x_b = x_b - x_2(n_2); y_b = y_b - y_2(n_2)$
  $x_c = x_c - x_3(n_3); y_c = y_c - y_3(n_3)$ ▷ Atualize os momentos
  $M_a = M(n_1) - F_x(n_1)y_a + F_y(n_1)x_a$
  $M_b = M(n_2) - F_x(n_2)y_b + F_y(n_2)x_b$
  $M_c = M(n_3) - F_x(n_3)y_c + F_y(n_3)x_c$
  $\mathbf{M}_p = [M_a\ M_b\ M_c]$ ▷ Determine as forças necessárias para ter a linha passando pelos 3 pontos impostos
  $W = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}_p; F_{x_1} = W(1); F_{y_1} = W(2); M_1 = W(3)$
end procedure

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
1: procedure ROSTOS_CHAVES
2:     Calcular o peso de cada bloco
3:     for I=1:n do
4:         F_x = [F_x; 0. + F_x(i)]
5:         F_y = [F_y; −w(i) + F_y(i)]
6:         M = [M; w(i)x_g(i) + M(i)]
7:     end for
8:     eccent = 0, x = sind(θ)(r + t/2.eccent);y=cosd(θ)(r+t/2.eccent); M = M + F_y x − F_x y;
9: end procedure
```

$\boldsymbol{\theta}$	Ângulos de cada articulação em relação à vertical
n	Número de blocos
n_i	ID comum onde dobradiças são formadas
e_i	Linha de excentricidade na junta $< 0 < i < 1$
R	Raio (pode variar para cada bloco)
γ	Densidade de massa
g	Aceleração da gravidade
α	Ângulo de abertura (90)° para semi-circular)
e_{max}	Excentricidade máxima≤ 1.)
ε	Tolerância
t	Espessura de cada vousoir

31.5 Considerações finais

31.5.1 Jacques Heyman; 1925

58 Jacques Heyman era uma figura imponente em popularizar o trabalho sobre estruturas de alvenaria, e a história das construções catedrais góticas. Embora muito bem versado em matemática (seu primeiro campo de stdy) e mecânica (ele era um estudante de Inglis), ele realmente não fez contribuições técnicas por si mesmo. No entanto, ele estava tão bem sintonizado com a literatura histórica que não só poderia resumi-la, mas também sintetizá-la.

59 Ele foi o primeiro a enunciar claramente as três hipóteses para a determinação do domínio de admissibilidade dos vousoirs (Heyman, 1997). Mais uma vez, não era nada novo, mas ele formalizou de forma clara algumas hipóteses sobre o material que formou a base para o cálculo dos arcos nos séculos 18 e 19. Eles são:

CÓPIA PARA REVISÃO

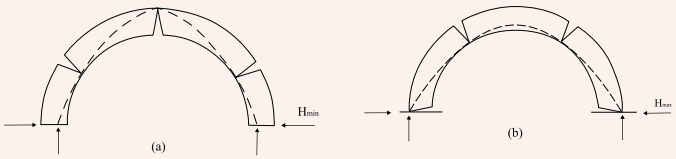
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. A alvenaria (ou pedra), nem o agente de ligação (se houver) não tem resistência à tração
2. A alvenaria tem uma força de compressão infinita
3. Falha deslizando não ocorre

31.5.2 Linha de empurrões

60 A linha de empuxo representa o locus dos pontos ao longo do arco através do qual as forças resultantes passam. Se todos os vousoirs do arco têm o mesmo tamanho, a linha de impulso tem quase a forma de uma catenária invertida.

61 A linha de impulso não tem que sair da espessura da alvenaria. para isso, é interessante estudar suas duas posições extremas que representam dois estados ainda em equilíbrio. Na verdade, quando a linha de empuxo toca o limite inferior ou superior do arco, a alvenaria se encontra no limite da região dos estados admissíveis e a excentricidade é tal que promove a formação de dobradiças. Em particular, nas duas condições extremas, a linha de impulso dá a localização de três dobradiças que se abrem: desta forma, o valor do impulso horizontal pode ser calculado, como mostrado na figura 1. 31.19.. Nas duas posições extremas da linha de empuxo, o impulso horizontal será: a) mínimo; b) máximo. É importante saber as duas posições extremas da linha de empuxo, porque o impulso real do arco não pode ser calculado, mas os limites superior e inferior podem ser fixados (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF).



(a) Mínimo (b) Máximo

Figura 31.19: Mecanismos de colapso; impulsos do pilar (Nobile e Bartolomeo, 2014 PDF)

62 A catenária§30.3.3) é a forma verdadeira do arco. Arcos com outras formas se levantam porque catenárias são incluídas em sua espessura.

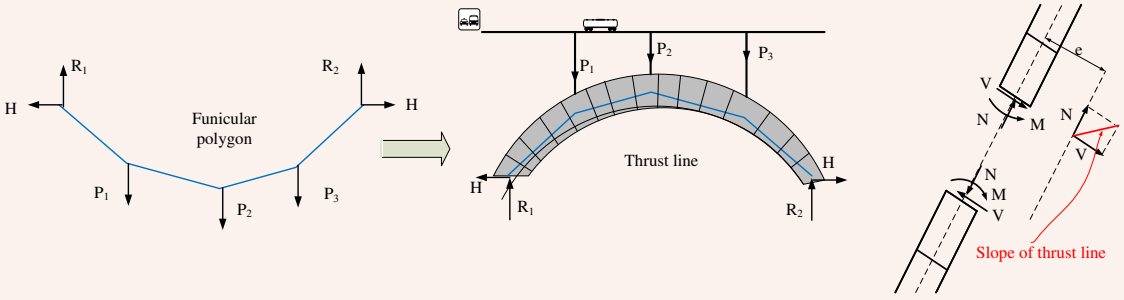
63 A forma da linha de empuxo é a catenária matemática se o auto-peso for igualmente distribuído ao redor do arco.

64 Há uma espessura mínima de arco semicircular que contém apenas uma catenária. O arco limite tem exatamente essa espessura mínima e está em equilíbrio instável.

65 A título de ilustração, Fig. 31.20 mostra um polígono funicular (cabo) submetido a cargas

CÓPIA PARA REVISÃO

concentradas, e a linha de impulso correspondente. Neste caso, a linha de empuxo está totalmente dentro do vousoir apoiando um convés de ponte e é assim segura.



(a) Voussoir Funicular e correspondente

(b) Excentricidade interna

Figura 31.20: Polígono funicular invertido e linha de impulso correspondente e excentricidade

66 A linha de empuxo pode estar dentro do terceiro núcleo médio, nesse caso a seção está em compressão total. Se estiver fora deste núcleo, que a tensão (abertura conjunta) se desenvolve, se na borda, então temos instabilidade incipiente.

67 A linha de impulso procura determinar a localização e a inclinação. O primeiro, é facilmente definido como a ração de $e = M/N$, e a inclinação é determinada do resultado das somas vetoriais de N e.. V.

68 A linha de impulso pode ser calculada através de análise elástica (ou programação linear). No entanto, geralmente os arcos de vooussoir não são estaticamente determinados, e as relações de equilíbrio não são suficientes.

31.5.3 Linha de impulso e pippard

69 O modo de falha de Pippard envolve a formação de um mecanismo e isso é, naturalmente, análogo à formação gradual de rótulas plásticas na falha plástica das estruturas Capítulo 57.

70 Isto pode ser ilustrado pela falha de um arco semicircular sob carga constante através da formação gradual de dobradiças, Fig. 31.21.. Três (neste caso) são suficientes para induzir um mecanismo de falha 57.2.1.1). Isso será discutido mais adiante.

71 Portanto, um arco é seguro simplesmente se uma linha de impulso pode ser desenhada dentro de sua espessura. Um arco vai cair apenas se a linha de empuxo atingir a borda do arco pelo menos em quatro pontos, convertendo o arco em um mecanismo.

72 A formação de dobradiças suficientes causará um mecanismo. Este método assume que um arco de alvenaria se torna um mecanismo quando pelo menos três (ou quatro em

CÓPIA PARA REVISÃO

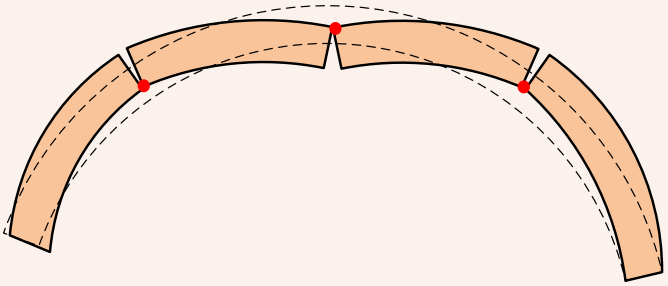


Figura 31.21: Modo de falha de três dobradiças semicirculares

alguns casos) rótulas plásticas abrem. No entanto, a posição das dobradiças é inicialmente desconhecida. Assim, o primeiro passo é assumir a posição possível de três (em Fig. 31.22) dobradiças.

73 Seguindo a suposição do punho (não mostrada), a linha de impulso é desenhada, e então o pior "'ofensor" (eccentricidade maior que 1) é identificado. Então, a dobradiça mais próxima é removida e substituída pelo criminoso. O processo é repetido até que um mecanismo causado por três dobradiças com uma excentricidade de 1 seja formado. Em cada caso temos as equações de equilíbrio estático e os zeros adicionais nas dobradiças. O procedimento está descrito abaixo.

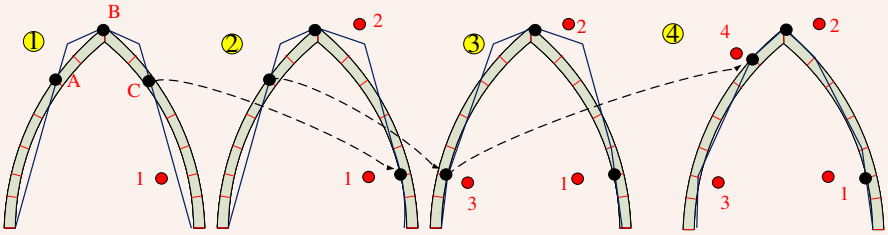


Figura 31.22: Sequência de locais de dobradiças

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Grande Mesquita de Córdoba, do século VIII a X, Córdoba, Espanha.
Pedras em forma de cunha vermelhas e brancas alternadas garantem distribuição de carga e estabilidade nos icônicos arcos de ferradura.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 32

Arcos e Curvos Vigas

Abstract

Este é o último de um trio de capítulos lidando com estruturas onde a resistência primária é fornecida por forças axiais. Os capítulos anteriores cobriam cabos e arcos rígidos. Este capítulo irá mergulhar em ambos os arcos elásticos e curvado vigas, fornecendo uma análise abrangente de seu comportamento e características. Começaremos com uma análise aprofundada dos arcos circulares, examinando seu comportamento estrutural sob várias condições de carga. Isso incluirá uma discussão sobre diferentes níveis de complexidade, particularmente em termos do número e colocação de dobradiças. Depois disso, passaremos aos arcos parabólicos, considerando novamente várias complexidades relacionadas com dobradiças e seus efeitos no desempenho estrutural. Depois de explorarmos os arcos, mudaremos nosso foco para curvado. A análise cobrirá tanto as estruturas planares curvas vigas e espaciais helicoidais. Estas estruturas são particularmente interessantes porque exibem uma complexa interação entre flexão e torção. Finalmente, Apêndice D cobrirá arcos circulares mais complexos que vão além do escopo deste capítulo.

32.1 Arcos circulares 1206
32.1.1 Três arcos circulares dobradiças 1206
32.1.2 Dois arcos circulares dobrados 1213
32.1.3 Arco circular sem dobras . . 1213
32.1.4 Solução generalizada 1221
32.1.5 Soluções baseadas em matemática 1228
32.2 Forma ideal de um arco 1228
32.2.1 Ex 32.5: Arco perfeito 1229
32.3 Arcos parabólicos 1229
32.3.1 Exemplos 1230
32.3.2 Arco fixo com carga simétrica 1234
32.3.3 Base de acordo e efeitos de temperatura 1239
32.4 Curvado vigas 1243
32.4.1 Viga de arco 1243
32.4.2 Helicoidal 1246

[1] Os arcos têm sido um elemento fundamental da arquitetura e engenharia por milhares de anos, servindo tanto para fins funcionais quanto estéticos. Dos aquedutos da Roma antiga às catedrais da era gótica, os arcos desempenharam um papel crucial no desenvolvimento da civilização humana. Sua habilidade única de suportar o peso eficientemente os tornou uma solução estrutural preferida em várias construções, que vão desde pontes e portais até janelas e tetos.

CÓPIA PARA REVISÃO

2 O princípio por trás do arco reside em sua capacidade de transferir cargas através de sua forma curva onde a flexão é minimizada e forças axiais maximizada.

3 Este capítulo se concentrará na análise de arcos e curvas vigas. Os conceitos usados são idênticos aos anteriormente vistos, no entanto, A diferença maior (e somente) é que equações serão escritas em coordenadas polares para arcos circulares (e cartesianos para parabólicos).

4 Como cabos, arcos podem ser usados para reduzir o momento fletor em estruturas de longo alcance. Essencialmente, um arco pode ser considerado como um cabo invertido, e é transmitido a carga principalmente através da compressão axial, mas também pode resistir à flexão através de sua rigidez flexural.

5 A fim de otimizar a eficiência da carga morta, estruturas de longo alcance poderiam Ter suas formas aproximadas do diagrama de momento correspondente, Daí um arco, cabo suspenso, ou configuração de tendões em uma pretensão O concreto viga é quase parabólico, Fig. 32.1.

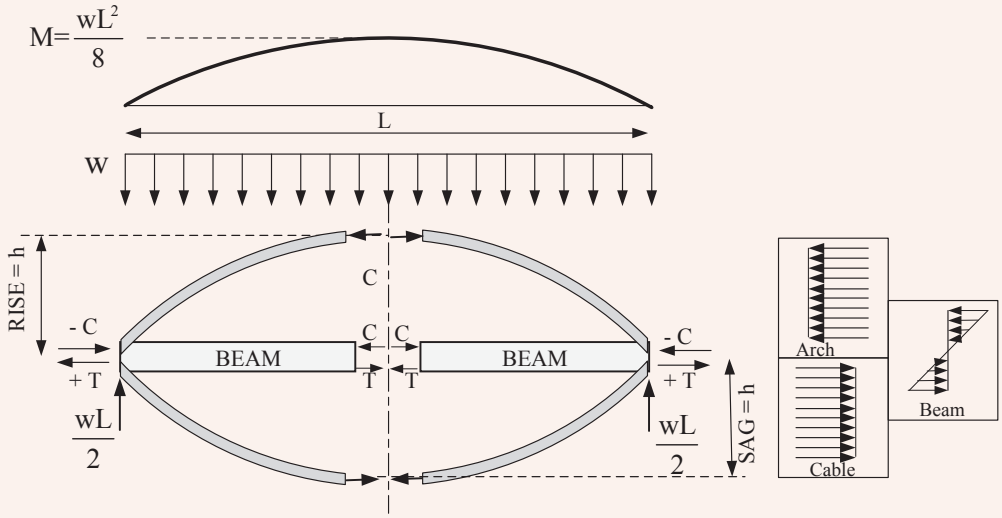


Figura 32.1: Momento resistindo forças em um arco ou sistema de suspensão, em comparação com uma viga, (Lin e Stotesbury, 1981)

6 Este capítulo abordará arcos (circulares do que parabólicos), curvados vigas, e finalmente estruturas helicoidais.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

32.1 Arcos circulares

7 Estruturas de longo alcance podem ser construídas usando construção plana como vigas ou treliças. No entanto, por excessos de 100 pés, muitas vezes é mais econômico construir uma estrutura curva como um arco, cabo suspenso ou fino cascas.

8 Desde o início da história, a humanidade tem tentado percorrer distâncias usando a construção do arco. Essencialmente isso foi porque um arco materiais necessários para resistir à compressão apenas (como pedra, alvenaria, Tijolos), e trabalho não era um problema.

9 As questões básicas de estática no desenho do arco estão ilustradas na figura. 32.2 Onde a carga vertical é por unidade de projeção horizontal (como uma carga externa, mas não um peso próprio).

32.1.1 Três arcos circulares dobradiças

10 Arcos de três torções são estruturas estaticamente determinadas Qual forma pode acomodar apoio aos assentamentos e expansão térmica sem interna secundária tensões. Eles também são fáceis de analisar através da estática.

11 Em geral, um arco carregará a carga vertical através da extensão através de uma combinação de forças axiais e flexura. Um bem dimensionado Arch terá um pequeno a insignificante momento, e relativamente Compressão normal alta tensões.

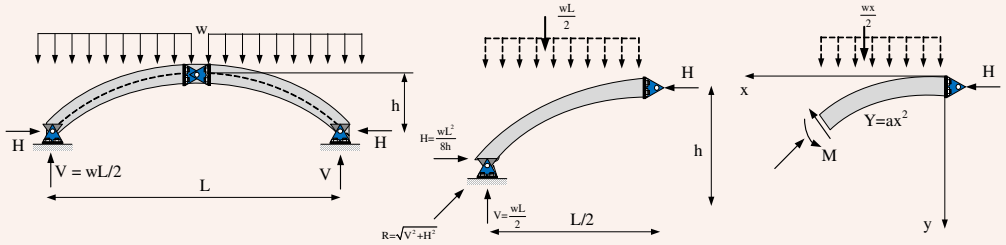


Figura 32.2: Estáticos de um arco de três torções

12 Devido à simetria, a reação vertical é simplesmente $V = \frac{wL}{2}$, e não há cisalhamento através do meio do arco (nem um momento). Tirando um momento sobre a coroa,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

13 Solucionando H

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

14 Lembramos que uma equação semelhante é derivada para cabos (Eq. 30.38), e H é análogo para o $C - T$ forças em uma viga (Fig. 32.1), e h é a altura total do arco, desde que h é muito maior do que d, H Será muito menor do que $C - T$ em uma viga.

15 Já que o equilíbrio requer H para permanecer constante através do arco, uma curva parabólica resultaria teoricamente em nenhum momento na seção de arco.

32.1.1.1 Teorema de Eddy

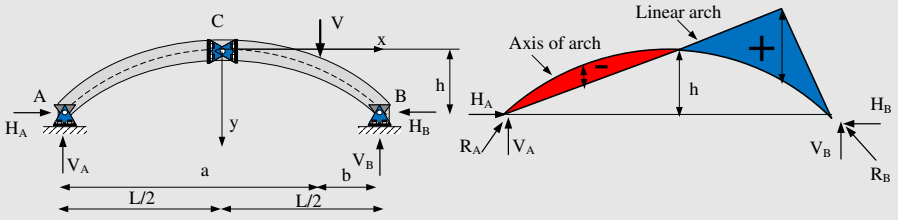
16 O teorema de Eddy é um conceito importante na análise dos arcos. Ele fornece um método para determinar os momentos e forças em uma estrutura de arco. O teorema é particularmente útil para analisar arcos de três eixos, onde simplifica os cálculos complexos envolvidos.

Definition 32.1: Teorema de Eddy

O momento fletor em qualquer ponto no eixo do arco é proporcional à interceptação vertical entre o arco teórico e o eixo do verdadeiro arco (Eddy, 1878).

32.1.1.2 Exemplos

32.1.1.2.1 Ex 32.1: Três arcos dobradiças; carga concentrada; analítico



A seção seguinte é reproduzida de Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

Quanto a hétero vigas

$$V_A = \frac{Wb}{L} \text{ e } \quad V_B = \frac{Wa}{L} \tag{32.1}$$

Momento sobre o ponto C na coroa é dada por

$$V_B \frac{L}{2} - H_B h - W\left(\frac{L}{2} - b\right) = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Substituta para V_B De Eq. 32.1

$$\frac{Wa}{2} - H_B h - \frac{WL}{2} + Wb = 0; \quad W\left(\frac{a}{2} - \frac{L}{2} + b\right) - H_B h = 0$$
$$\frac{W}{2}(a - L + 2b) - H_B h = 0; \quad \frac{W}{2}(a - L + b + b) - Hh = 0$$
$$\frac{Wb}{2} - H_B h = 0; \quad H_B = \frac{Wb}{2h} \tag{32.2}$$

Do equilíbrio das forças horizontais $H_A = H_B = H$

$$H = H_A = \frac{Wb}{2h} \tag{32.3}$$

Da mesma forma, se a carga está entre A e.. C, então

$$H_A = \frac{Wa}{2h} \tag{32.4}$$

Da equação de equilíbrio

$$H = H_B = \frac{Wa}{2h}$$

O momento em qualquer seção X_1 entre o ponto de carga e suporte B a uma distância de x Da coroa, o

$$M_{x1} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.5}$$

Substituindo o Eq. 32.1 e.. 32.2 em 32.5

$$M_{x1} = \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y)$$
$$= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} = \frac{WL}{2} - W\left(\frac{ax}{L} - \frac{by}{2h}\right)$$

O momento em qualquer seção X_2 entre o carga concentrada e a coroa em um dstance x Da coroa

$$M_{x2} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.6}$$

Substituindo Eqs. 32.1 e.. 32.3 em 32.6

$$M_{x2} = \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y)$$
$$= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{2} - \frac{WL}{2} + Wb + Wx - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h}$$
$$= Wx\left(1 - \frac{a}{L}\right) + \frac{Wby}{2h} = \frac{Wbx}{L} + \frac{Wby}{2h}$$
$$M_{x2} = Wb\left(\frac{x}{L} + \frac{y}{2h}\right)$$

O momento em qualquer seção X_2 entre A e à distância x De.. C para a esquerda

$$M_{x3} = V_A\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_A(h - y) \tag{32.7}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

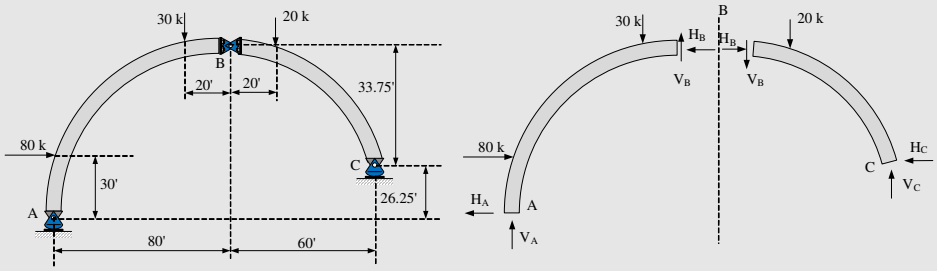
Substituindo Eqs. 32.1 e.. 32.4 em 32.7

$$M_{x3} = \frac{Wb}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y) = \frac{Wb}{2} - \frac{Wbx}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wbx}{2h}$$
$$= -Wb\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{2h}\right) \tag{32.8}$$

O diagrama do momento para o triangulo é mostrado acima. Snce não há carga sobre AC E desde o momento em que C é zero, o impulso em A deve passar C Para conhecer a linha de ação W Produzido em D.. Agora, R_A, R_B e.. W estão em equilíbrio, a linha de ação R_B Em.. B Deve se encontrar W Em.. D. Triângulo ADB representa a alguma escala o diagrama do momento para um simples viga e é de sinal positivo. A curva $ACBA$ representa para a mesma escala o diagrama de momento para $H(h^{-}y)$ e é de sentido negativo. O diagrama sombreado para alguma escala indica o diagrama do momento resultante. Para a metade carregada, o diagrama resultante é positivo e para a metade descarregada, negativo. Assim, o momento resultante em qualquer seção é representado pela coordenada do diagrama formado pelo arco linear e o eixo do arco. O momento ordenado na carga pode ser obtido substituindo o momento do impulso sobre o tinha a partir do momento de um simples viga na carga

32.1.1.2.2 Ex 32.2: Três arcos dobradiças; carga concentrada

Determine as reações do arco de três torções mostradas abaixo



Quatro desconhecidos, três equações de equilíbrio, uma equação de condição ⇒ Estaticamente determinado.

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^C = 0$$
$$\Rightarrow (R_{Ay})(140) + (80)(3.75) - (30)(80) - (20)(40) + R_{Ax}(26.25) = 0$$
$$\Rightarrow 140R_{Ay} + 26.25R_{Ax} = 2.900$$
$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; \Rightarrow 80 - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 30 - 20 = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = 0; \Rightarrow (R_{ax})(60) - (80)(30) - (30)(20) + (R_{Ay})(80) = 0$$
$$\Rightarrow 80R_{Ay} + 60R_{Ax} = 3,000$$

Resolvendo essas quatro equações:

$$\begin{bmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,900 \\ 80 \\ 50 \\ 3,000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.1\ \text{k} \\ 29.8\ \text{k} \\ 34.9\ \text{k} \\ 50.2\ \text{k} \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Podemos verificar nossos resultados considerando a soma com respeito ao B da direita:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = 0; -(20)(20) - (50.2)(33.75) + (34.9)(60) = 0 \checkmark$$

17 Devido à simetria, a reação vertical do arco mostrada na figura 32.2 é simplesmente $V = \frac{wL}{2}$, e não há cisalhamento através do meio-espão do arco (nem um momento). Tirando um momento sobre a coroa,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

18 Solucionando H

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

19 Anote a analogia com $M = wL^2/8$ para vigas e $H = wL^2/8h$ Para cabos. Em geral, um arco carregará a carga vertical através da extensão através de uma combinação de forças axiais e flexura. Um arco bem dimensionado terá um momento pequeno a negligenciável, e uma compressão normal relativamente alta tensões. O formato parabólico de um arco de três torções

- Não deve haver nenhum cisalhamento ou momento ao longo de qualquer seção.
- Momento em x: $M = Hy - wx^2/2 = Hax^2 - wx^2/2 = 0$,
- Solucionando a: $a = w/(2H)$
- Substituta para H e concluo que a deve ser igual a $4h/L^2$.
- Por qualquer período LSó há uma altura h que renderia uma parábola com zero momento e cisalhamento.

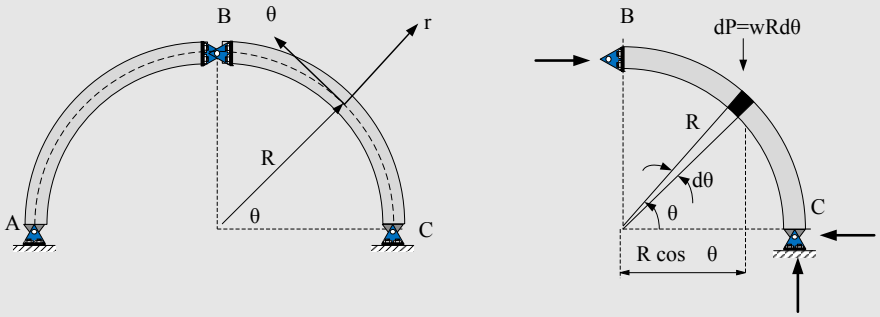
20 Arcos triangulados são estruturas estaticamente determinadas, que podem acomodar assentamentos de suporte e expansão térmica sem o interior secundário tensões. Eles também são fáceis de analisar através da estática. Um arco é muito mais eficiente do que uma viga, e possivelmente mais econômico e estético do que uma treliça em carregar cargas por longos períodos.

32.1.1.2.3 Ex 32.3: Três arcos dobradiças; Carga uniforme

Determine as reações dos três arcos estaticamente determinados semi-circulares sob seu próprio peso morto w (por unidade de comprimento do arco s, onde $ds = rd\theta$).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



As reações podem ser determinadas integrando a carga sobre toda a estrutura. Reação Vertical:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0; (C_y)(2R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \underbrace{wRd\theta}_{dP}\ \underbrace{R(1+\cos\theta)}_{\text{moment arm}} = 0$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos\theta)d\theta = \frac{wR}{2}[\theta+\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{wR}{2}[(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)]$$

$$= \frac{\pi}{2}wR$$

Reações Horizontais

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_B = 0; -(C_x)(R) + (C_y)(R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \underbrace{wRd\theta}_{dP}\ \underbrace{R\cos\theta}_{\text{moment arm}} = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{\pi}{2}wR - \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

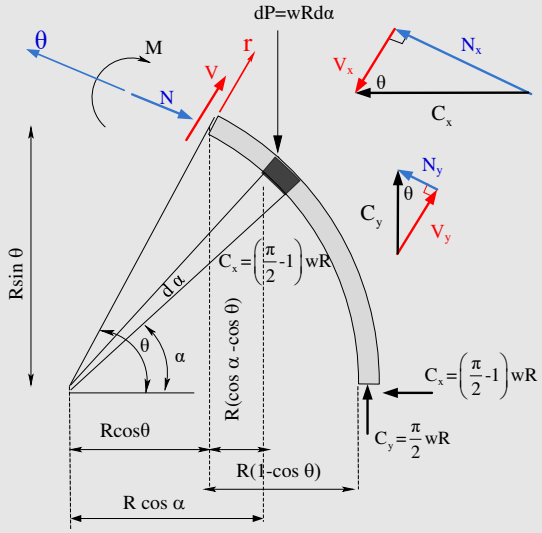
$$= \frac{\pi}{2}wR - wR[\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}wR - wR(1-0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR \tag{32.9}$$

Por simetria as reações em A são iguais a aqueles em C. O esforços internos agora pode ser determinado.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Forças cortantes: Considerando o diagrama de corpo livre do arco, e somando as forças na direção radial ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\cos\theta}_{V_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\sin\theta}_{V_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\sin\theta+V=0$$

$$\Rightarrow V(\theta)=wR\left[(\frac{\pi}{2}-1)\cos\theta+(\theta-\frac{\pi}{2})\sin\theta\right] \tag{32.10}$$

Forças axiais: Da mesma forma, se considerarmos o somatório de forças na direção axial ($\Sigma F_\theta = 0$):

$$\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\sin\theta}_{N_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\cos\theta}_{N_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cos\theta+N=0$$

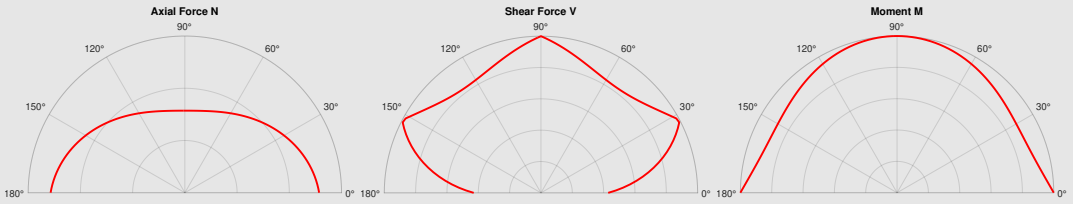
$$\Rightarrow N(\theta)=wR\left[(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta-(\frac{\pi}{2}-1)\sin\theta\right] \tag{32.11}$$

Momento: Agora podemos considerar a terceira equação de equilíbrio ($\Sigma M_z = 0$):

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M\ \underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR}_{C_x}\cdot R\sin\theta-\underbrace{\frac{\pi}{2}wR}_{C_y}R(1-\cos\theta)$$
$$+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta)+M=0$$
$$\Rightarrow M(\theta)=wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta\right] \tag{32.12}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Nota, uma solução generalizada baseada no Mathematica é dada em §I.1.3

32.1.2 Dois arcos circulares dobrados

21 Se o arco tem apenas duas dobradiças, Fig. 32.3, ou se não tiver dobradiças, então momentos fletores pode existir na coroa ou nos suportes ou em ambos os lugares.

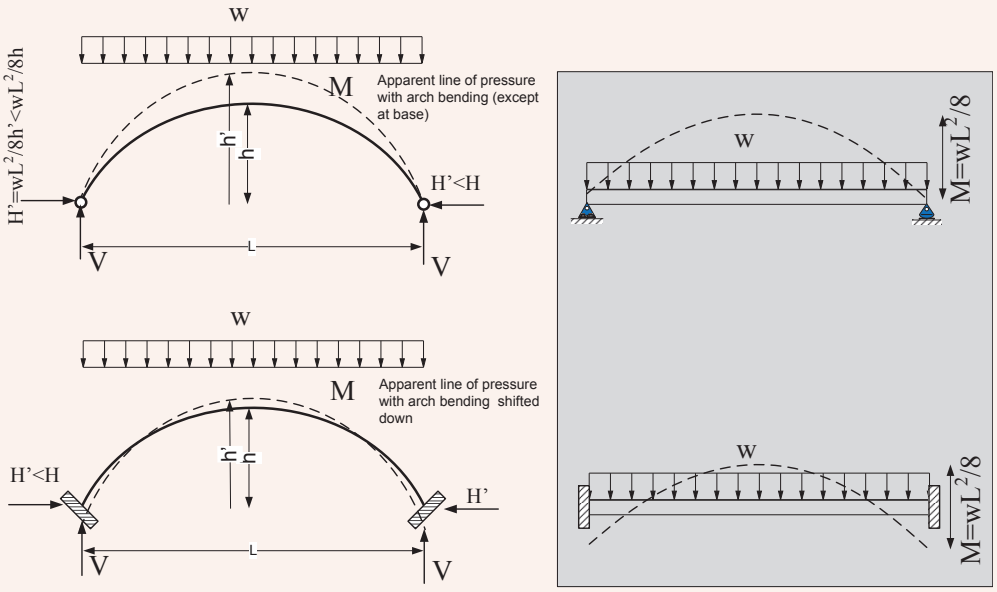


Figura 32.3: Dois arcos articulados, analogia com a extremidade fixa (Lin e Stotesbury, 1981)

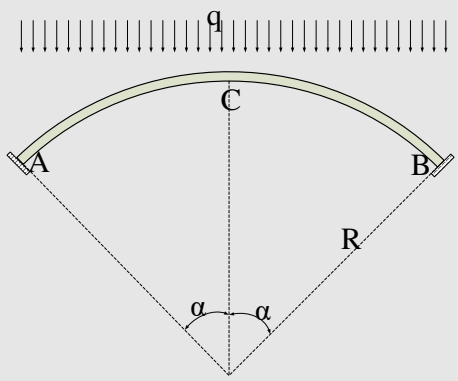
22 Desde então H Varia inversamente até a ascensão hÉ óbvio que devemos usar o mais alto possível. Para uma combinação de considerações estéticas e práticas, uma proporção entre 5 e 8 ou talvez até 12, é frequentemente usada. No entanto, à medida que a proporção aumenta, podemos ter problemas flambagem, e a seção teria uma profundidade de seção mais alta, e a vantagem do arco diminui.

32.1.3 Arco circular sem dobras

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

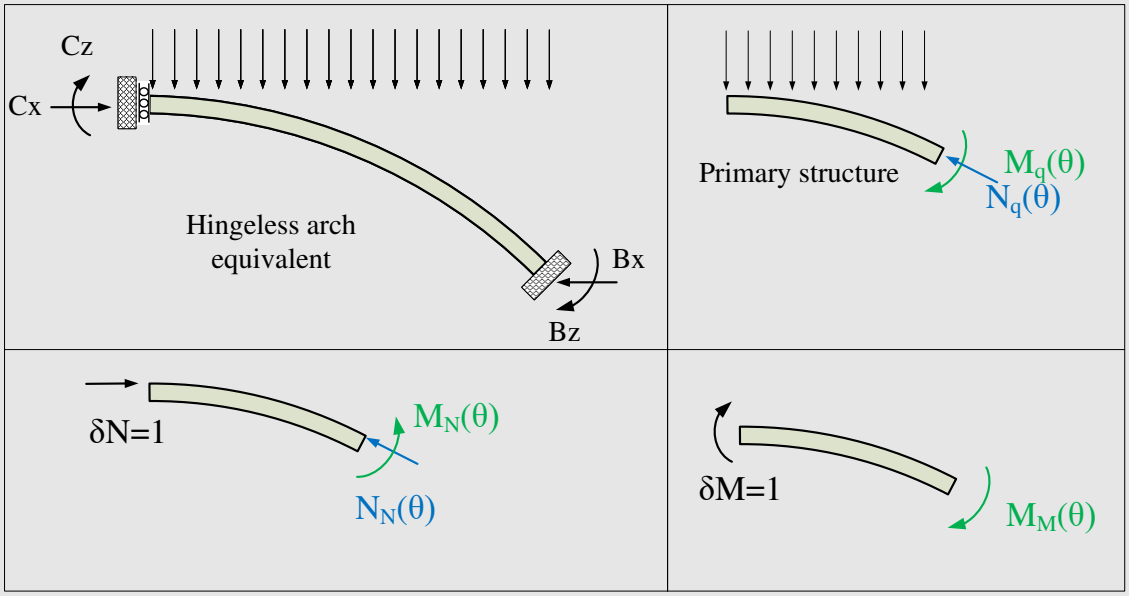
32.1.3.1 Ex 32.4: Arco circular sem dobras



Este arco sem dobradiças teria três forças redundantes. No início, uma pessoa seria tentada a liberar todas as forças em um apoio, e então acabaríamos com um 3 por 3 matriz de flexibilidade.

Aproxime-se

Por causa da simetria do arco (não pode haver um força cortante na coroa) é mais criterioso para liberar o arco na coroa onde a carga simétrica levaria a apenas duas forças redundantes: Axial e momento.



Vamos usar o princípio da complementar trabalho virtual para resolver este problema através da força (ou seja, flexibilidade) método. O matriz de flexibilidade é dado por

$$\begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_m \end{Bmatrix}$$

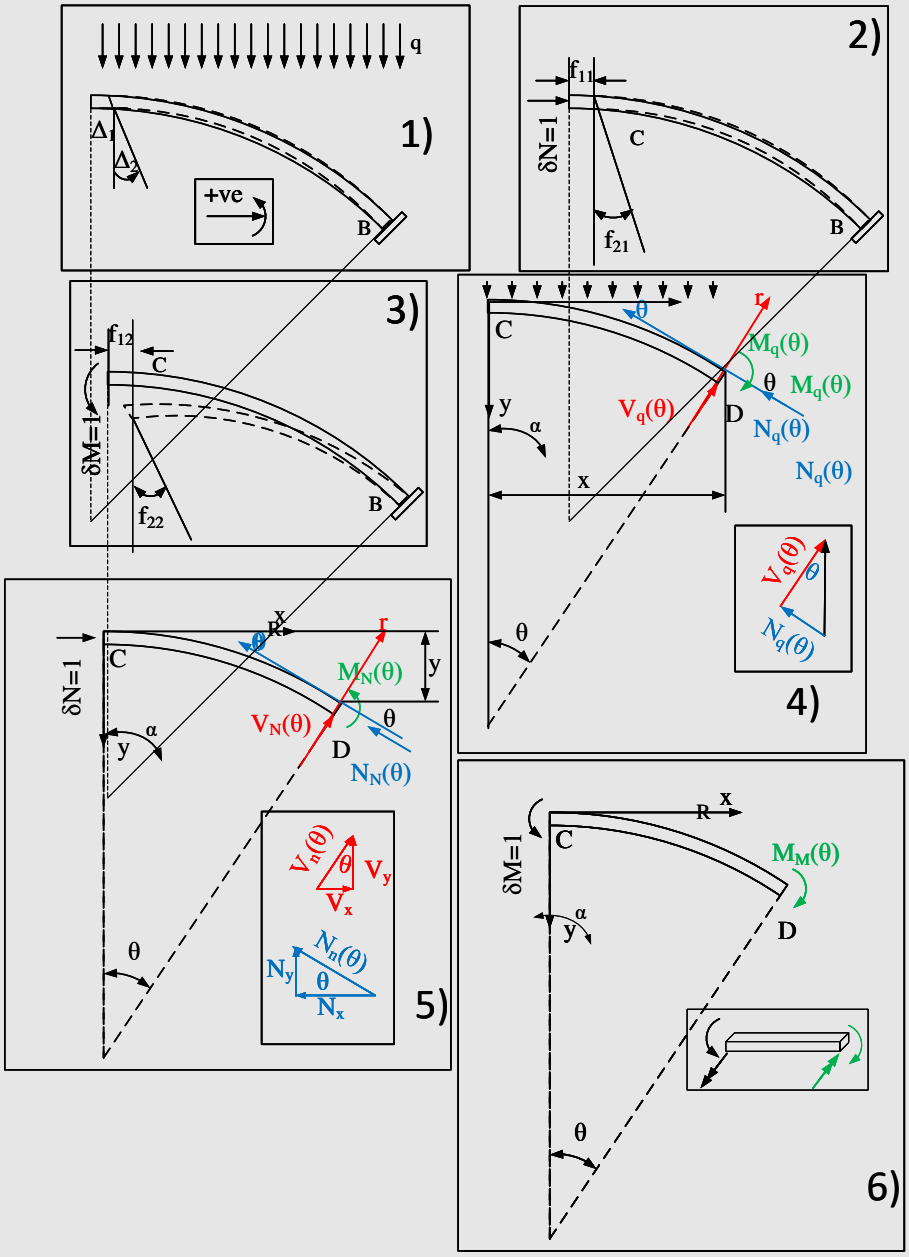
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

e..

$$\text{Resolver} \left\{ \begin{matrix} \Delta_N,\ \Delta_M \\ f_{NN},\ f_{NM} \\ f_{MM} \end{matrix} \right\} \text{em termos de} \left\{ \begin{matrix} N_q(\theta),\ M_q(\theta) \\ N_n(\theta),\ M_n(\theta); \\ N_m(\theta),\ M_m(\theta); \end{matrix} \right\} \text{due to} \left\{ \begin{matrix} q \\ \delta\overline{N} = 1 \\ \delta\overline{M} = 1 \end{matrix} \right\}$$

Forças e momentos normais internos



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Da Fig. 1 e 4 a força normal e o momento devido à carga externa é dada por

$$V_q(\theta) = qx\cos\theta = qR\sin\theta\cos\theta$$
$$N_q(\theta) = qx\sin\theta = qR\sin^2\theta$$
$$M_q(\theta) = -q\frac{x^2}{2} = -q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}$$

A força horizontal virtual causará o seguinte (esforços internos) 2/5)

$$M_n(\theta) = (1)(y) = R(1-\cos\theta)$$

Da Fig. 5 ($\delta N = 1$), equilíbrio de forças (note que só temos um conjunto de forças no x direção, e nenhum no y) rende

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_x - N_x + \delta N &=& 0 \\ V_y + N_y &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_n(\theta) \\ N_n(\theta) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

Resolvendo e inserindo $M_n(\theta)$

$$\lfloor\ V_n(\theta),\quad N_n(\theta), M_n(\theta)\ \rfloor = \lfloor\ -\sin(\theta),\quad \cos(\theta),\quad R(1-\cos\theta)\ \rfloor$$

Para o momento externo da unidade em C, não temos nenhum induzido esforço interno, no entanto o momento interno é (Fig. 3/6)

$$\lfloor\ N_m,\quad M_m\ \rfloor = \lfloor\ 0,\quad -1\ \rfloor$$

Notamos que, da figura anterior, sob a carga vertical, o arco estaria empurrando contra o apoio como ele deslocaria para a esquerda. No entanto, nós assumimos um deslocamento à direita pela direção de $\delta N = 1$.

Deslocamentos da estrutura primária

Determinamos agora os dois deslocamentos associados com a carga real de

$$\underbrace{\delta\overline{N}}_{1}\Delta_n = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_n(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q\frac{\delta\overline{N}_n(\theta)}{EA}Rd\theta$$
$$\underbrace{\delta\overline{M}}_{1}\Delta_m = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_m(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q(\theta)\frac{\delta\overline{N}_m(\theta)}{EA}Rd\theta$$

e substitua o esforços internos de cima. Isso resulta em

$$\Delta_n = \frac{qR^2\left(4\sin^3(\alpha)\left(2\kappa + R^2\right) + 3R^2(\sin(2\alpha) - 2\alpha)\right)}{24EI}$$
$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$

Onde $\kappa = I/A$, isto é, nós negligenciaríamos a deformação axial se $\kappa = 0$.. Notamos que o axial rigidez não impacta na rotação Δ_2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Matriz de flexibilidade

O matriz de flexibilidade é o próximo obtido de

$$f_{ij} = \int_0^{\alpha} M_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^{\alpha} N_i(\theta)\frac{N_j(\theta)}{EA}Rd\theta$$

Onde i, j Mapear para dentro n, m.. Substituindo,

$$\begin{aligned} f_{nn} &= \frac{R\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{4EI} \\ f_{nm} = f_{mn} &= \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} \\ f_{mm} &= \frac{\alpha R}{EI} \end{aligned}$$

Invertendo o matriz de flexibilidade produz o reduzido matriz de rigidez K_{ij} Que é dado por

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{4\alpha EI}{\alpha R(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^3\sin^2(\alpha)} \\ K_{12} &= \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^2\sin^2(\alpha)} \\ K_{22} &= \frac{EI\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{\alpha R(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^3\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Multiplicando o matriz de rigidez por Δ_n e.. Δ_m foi realizada pelo Mathematica, no entanto a resposta é muito complexa para ser bem apreciada analiticamente.

Simplificação; Ignorar deformação axial

Equações Governantes

Considerando que as soluções exatas poderiam ser obtidas numericamente com base nas equações anteriores, nós simplificamos o problema ignorando as deformações axiais, assim configurando $\kappa = 0$, Isso renderia

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{qR^4\left(-6\alpha+4\sin^3(\alpha)+3\sin(2\alpha)\right)}{24EI} \\ \Delta_m &= \frac{qR^3(\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} \frac{R^3(6\alpha-8\sin(\alpha)+\sin(2\alpha))}{4EI} & \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} \\ \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} & \frac{\alpha R}{EI} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \frac{4\alpha EI}{R^3\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} & \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{R^2\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} \\ \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{R^2\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} & \frac{EI(6\alpha-8\sin(\alpha)+\sin(2\alpha))}{R\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

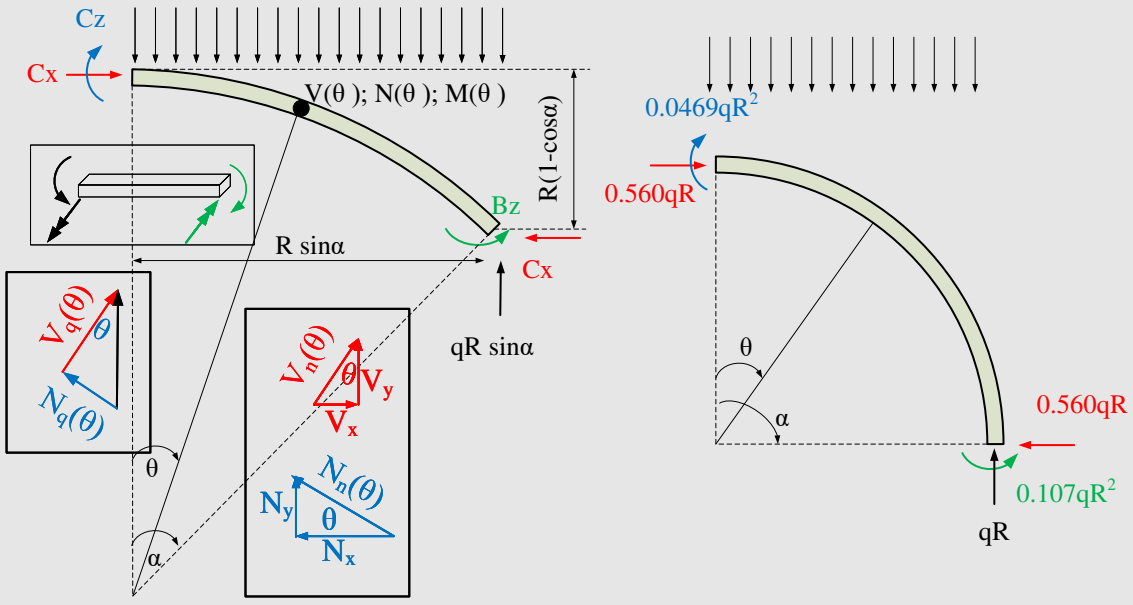
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Isso resultará nas seguintes forças

$$C_x = \frac{qR\sin(\alpha)(2\alpha(\cos(2\alpha)+2)-3\sin(2\alpha))}{24\sin^2(\alpha)-6\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))}$$

$$C_z = -\frac{qR^2}{48\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)}\left[24\alpha^2+8\sin(\alpha)\right.$$
$$\left.\left(-6\alpha+4(\alpha-\sin(\alpha))\sin^2(\alpha)+3\sin(2\alpha)\right)+3\cos(4\alpha)-3\right]$$

Com referência ao seguinte número, o esforços internos será assim dado por



$$N(\theta) = C_x \underbrace{\cos\theta}_{N_n} + \underbrace{qR\sin^2\theta}_{N_q} \qquad \text{+ve Compression}$$

$$V(\theta) = -C_x \underbrace{\sin\theta}_{V_n} + \underbrace{qR\sin\theta\cos\theta}_{V_q} \qquad \text{+ve CW}$$

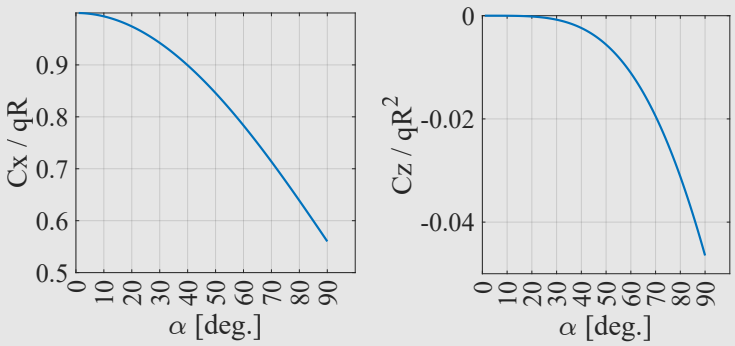
$$M(\theta) = C_z \underbrace{1}_{M_m} + C_x \underbrace{R(1-\cos\theta)}_{M_n} - \underbrace{q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}}_{M_q} \qquad \text{+ve CCW}$$

Visualização dos Resultados

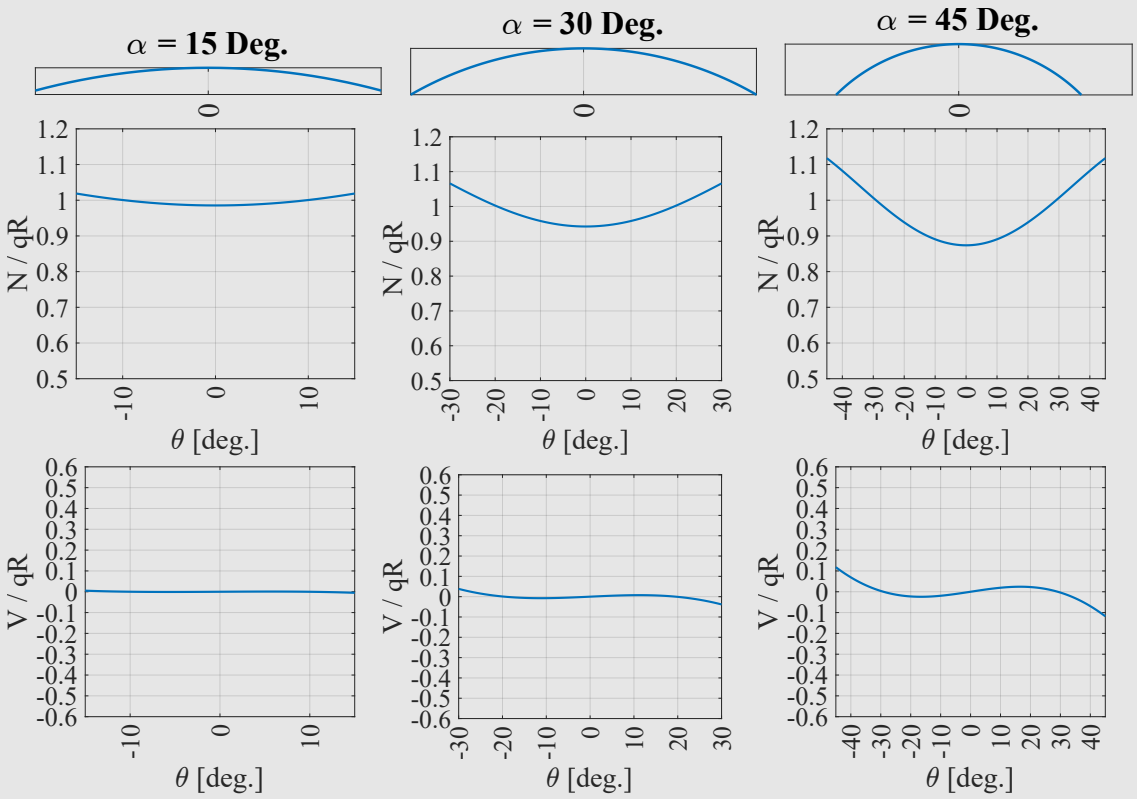
Examinando a variação de C_x e.. C_z, o primeiro é maior para "arcos planos" e diminui quase linearmente como o arco se transforma em um semi-circular. Por outro lado, C_z é quase zero para o "'Arch plano" e é máximo para um semi-circular.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

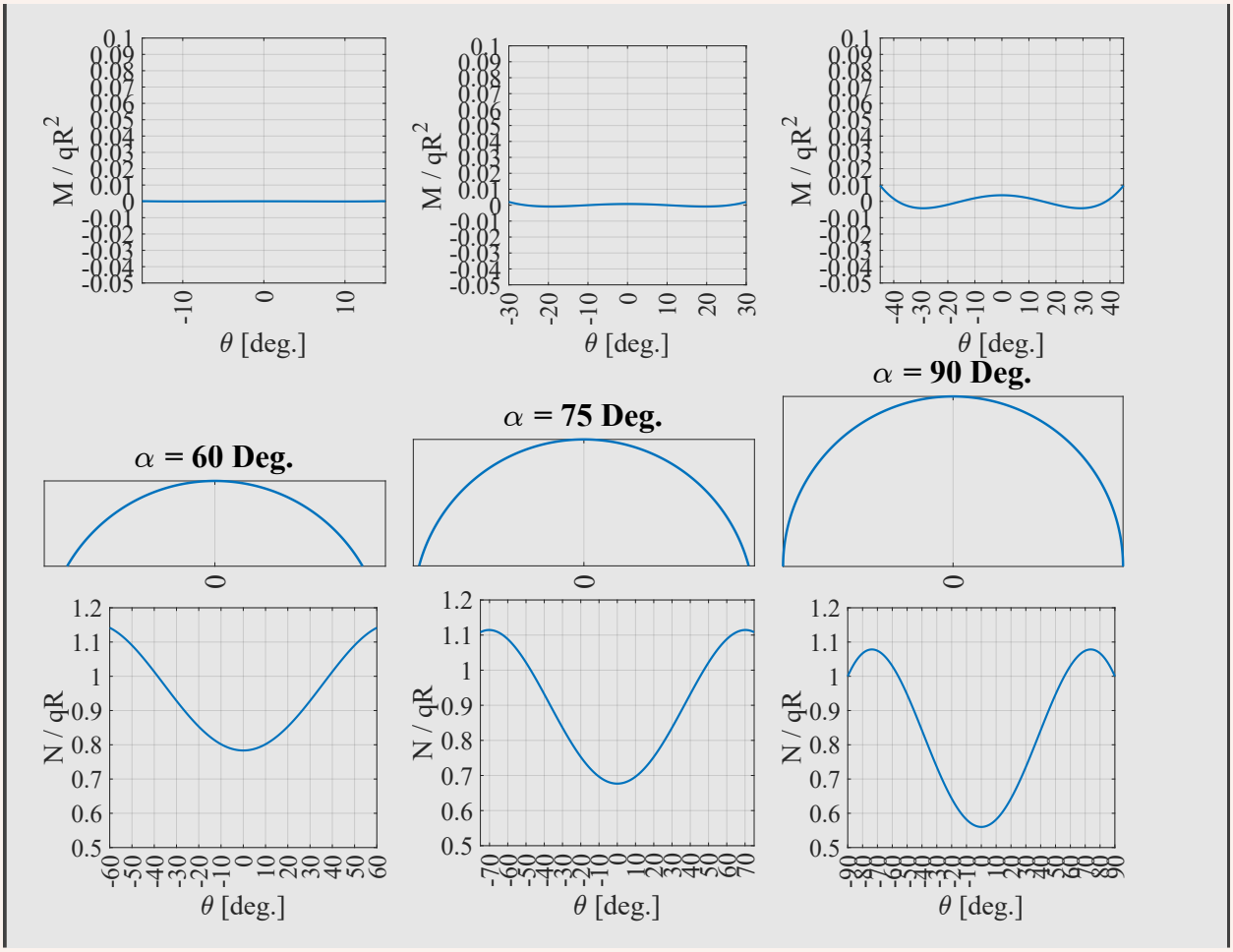


Em seguida, examinamos o axial normalizado$N$), cisalhamento (VE o momento$M$) ao longo dos arcos em termos de θ.. Para facilitar comparações, todas as parcelas têm os mesmos valores mínimos e máximos. A força normal é quase constante para o pequeno αAinda N na diminuição da coroa eventualmente resultando em dois pontos de inflexão. Considerando que os valores absolutos do cisalhamento poderia ter sido plotado, notamos que é quase zero para um "arco plano" e gradualmente decola como α aumenta no final, enquanto que como esperado (devido à simetria) é sempre zero na coroa. Finalmente, o momento, é quase zero para arcos quase plano, e gradualmente aumenta, os picos estão sempre nos suportes, e é caracterizado por sua W Forma.



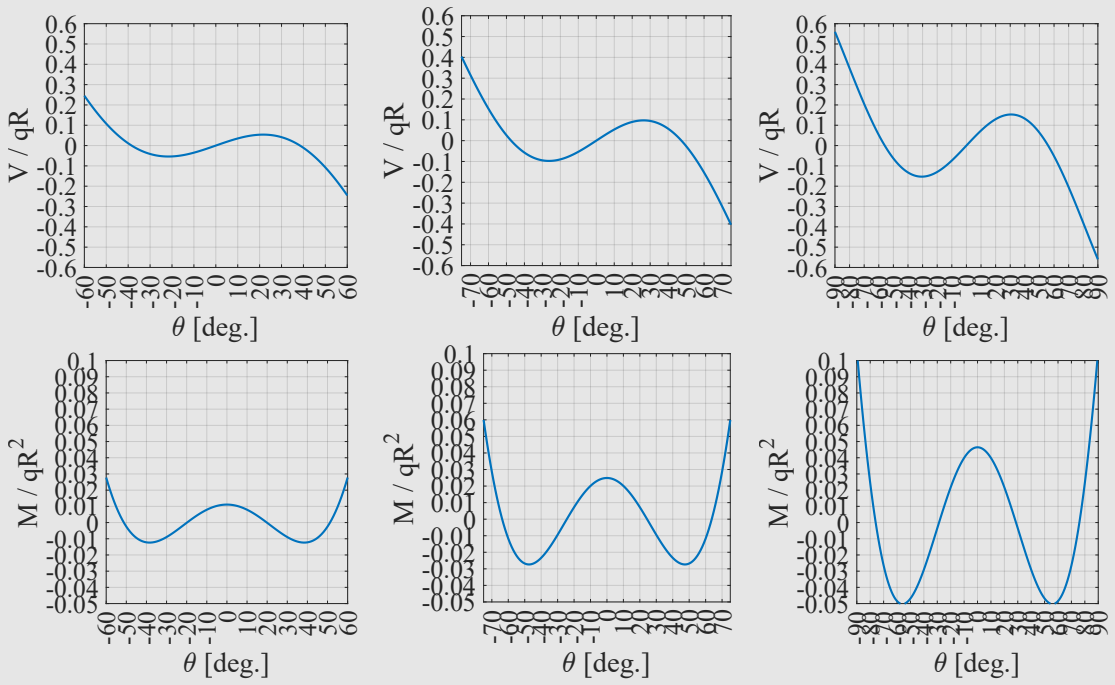
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Finalmente, a solução deste problema não será completa sem um enredo da forma deformada. Isto é deixado como um exercício, e sugestões de uma solução podem ser encontradas no capítulo D.

32.1.4 Solução generalizada

32.1.4.1 Derivação

Adaptado de Smars, 2000 *"Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes"*.

32.1.4.1.1 Centro de gravidade

23 Esta derivação foi publicada pela primeira vez por Milankovitch, 1907 *"Theorie der druckkurven"*.

24 Primeiro, decorra a localização de um centro de gravidade voussoir (não uma tarefa óbvia!). Com referência à Fig. 32.4

25 Primeiro notamos que o centro de gravidade (c.g.) do voussoir está em um local diferente do ponto médio M do seção transversal AB ($A_1B_1B_2A_2$).

26 Nós determinamos a posição de G considerando a diferença entre o primeiro momento da área dos triângulos infinitesimais CB_1B_2 e.. CA_1A2 com respeito ao eixo passando por C e ortogonal ao raio da curvatura. Em particular, o primeiro momento da área S_1 de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

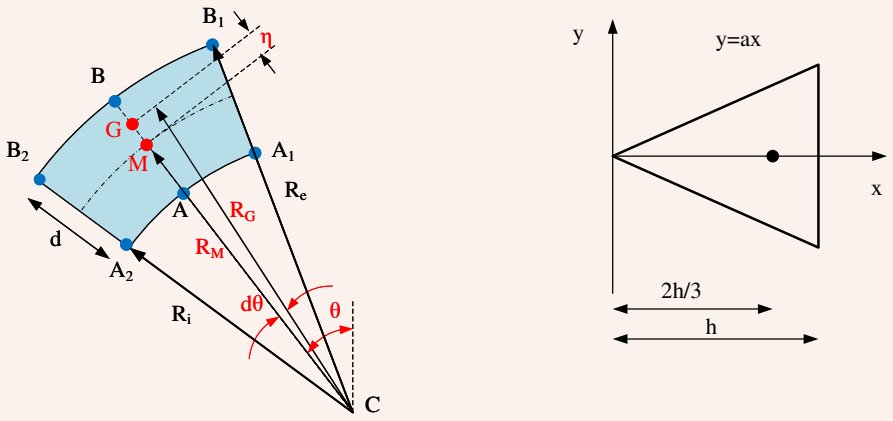


Figura 32.4: Centro de gravidade de um vousoir

CB_1B_2 é dado pela área $A_{CB_1B_2}$ multiplicado pela distância $R_{CB_1B_2}$ de seu centro de massa de C.

27 Da mesma forma, o primeiro momento da área S_2 de CA_1A_2 é dado pela área $A_{CA_1A_2}$ multiplicado pela distância $R_{CA_1A_2}$ de seu centro de massa de C.

$$S_2 = A_{CA_1A_2} R_{CA_1A_2} = A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right)$$

28 O primeiro momento da area do Voussoir infinitesimal $A_1B_1A_2B_2$ É

$$(A_{CB_1B_2} - A_{CA_1A_2}) R_G = A_{CB_1B_2} \frac{2}{3}\left(R_M + \frac{d}{2}\right) - A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right) \tag{32.13}$$

29 A relação entre uma área de triângulo e a altura é determinada a partir da definição do centroide

$$\overline{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h x(\overbrace{ax}^{y})dx}{\int_0^h (ax)dx} = \underbrace{\frac{\frac{ah^3}{3}}{\frac{ah^2}{2}}}_{A} = \frac{2h}{3} \Rightarrow A = \frac{ah^2}{2} \Rightarrow A \propto h^2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

30 A relação entre $A_{CB_1B_2}$ e.. $A_{CA_1A_2}$ é proporcional à ração entre os quadrados das distâncias $\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2$ e.. $\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2$, portanto

$$A_{CB_1B_2} = A_{CA_1A_2} \frac{\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2}{\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2} \tag{32.14}$$

31 Substituindo o Eq. 32.14 Eq. 32.13 E resolvendo para R_G

$$R_G = R_M + \frac{d^2}{12R_M} \Rightarrow \eta = \frac{d^2}{12R_M}$$

32.1.4.1.2 Derivação

32 A geometria de um arco de espessura unitário é definida por seu ângulo polar θ, seu raio de curvatura r (θ- E é espessuraθ) (Figura 32.5). Para derivar o equação diferencial de equilíbrio, estudamos o equilíbrio de um vousoir infinitesimal (ou segmento de um arco). Note que nem a espessura nem a curvatura r do arco são necessariamente pequenos.

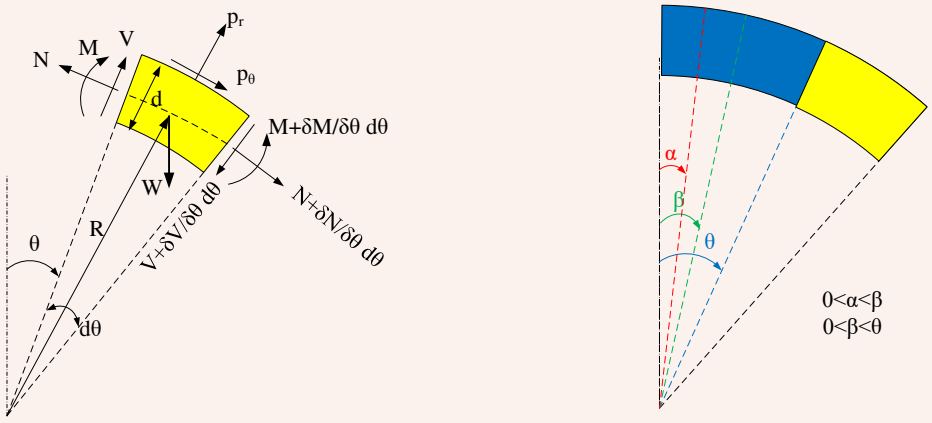


Figura 32.5: Equilíbrio de um vousoir infinitesimal

33 O vousoir tem um peso, W, dado por:

$$W = \gamma r d \, d\theta$$

Onde γ é o peso específico do arco $[N/m^3]$.. É aplicado no centro de gravidade do voussoir, a uma distância r_G do centro da curvatura.

$$R_G = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right] = R\left[1 + \frac{\eta^2}{12}\right]$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

34 Os esforços internos são a força normal N (positivo em tensão), o força cortante V (positivo se tende a causar uma rotação no sentido horário) e o momento M (positivo se ele tende a fibra inferior). Nenhuma suposição é feita sobre a distribuição tensão na seção.

35 O arco é submetido a forças de superfície em seus extrados, p_θ na direção tangencial e p_r na direção radial. O equilíbrio radial é dado por

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta - Nd\theta - \gamma Rd\cos(\theta)d\theta + p_r\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

Note que como as faces não são paralelas, a força normal tem um componente radial $-Nd\theta$.

36 O rosto extrados tem um comprimento $\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta$.

37 O equilíbrio tangencial está escrito:

$$-\frac{\partial N}{\partial \theta}d\theta - Vd\theta + \gamma Rd\sin(\theta)d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

Novamente, como os rostos não são paralelos, o força cortante tem um componente tangencial.

38 Finalmente, o equilíbrio da rotação no ponto central está escrito:

$$-\frac{\partial M}{\partial \theta}d\theta + VRd\theta + \frac{d^2}{12R}\sin(\theta)\gamma Rdd\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}d\theta = 0$$

39 Se a derivação com respeito a θ é denotado por um primo ($'$), e se o parâmetro não-dimensional η Denotando a esbeltez do arco $n = d/r$ É introduzida, as equações de equilíbrio podem ser reescritas:

$$N' - V + \gamma R^2\eta\sin(\theta) + p_\theta R(1+\eta/2) = 0 \tag{32.15}$$

$$-V' - N - \gamma R^2\eta\cos(\theta) + p_r R\left(1+\frac{\eta}{2}\right) = 0 \tag{32.16}$$

$$-M' + VR + \gamma R^3(\eta^3/12)\sin(\theta) + p_\theta R^2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\frac{\eta}{2} = 0 \tag{32.17}$$

40 Substituindo a derivada V' de V, (Eq. 32.16) na derivada de Eq. 32.15, V pode ser eliminado.

$$N'' + V' + (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta) + \gamma R^2\eta\cos(\theta) + (p_\theta R(1+\frac{\eta}{2}))' = 0$$

Então, nós obtemos:

$$N'' + N = q(\theta) \tag{32.18}$$

Onde os termos variáveis (e muitas vezes conhecidos) foram agrupados no segundo termo

$$q(\theta) = \underbrace{R(p_r - p'_\theta)\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - p_\theta\left[R\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\right]}_{\text{Carga externa}} - 2\gamma R^2\eta\cos(\theta) - (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

41 A solução geral da associação homogênea equação diferencial é uma combinação linear de sin(θ) e.. cos(θ).. Pode-se mostrar (ignorando a carga externa) que

$$N(\theta) = a_1 \cos(\theta) + \left(a_2 + \underbrace{\int_0^\theta \frac{\overbrace{\int_0^\beta q(\alpha) \sin\alpha d\alpha}^{F_1(\beta)}}{\sin^2\beta} d\beta}_{F_2(\theta)} \right) \sin(\theta) \tag{32.19}$$

é uma solução.

42 Nós verificamos

$$F_1(\beta) = \int_0^\beta q(\alpha)\sin(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}\gamma\eta R^2\left[-2\beta - 4\sin^2(\beta) + \sin(2\beta)\right]$$
$$F_2(\theta) = \frac{\int_0^\theta F_1(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{1}{2}R^2\gamma\eta\left[(-1+\theta(-2+\cot(\theta))\right]$$
$$F_3(\theta) = \frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta)\left[2a1 + \gamma\eta(\theta+4)R^2\right] - \frac{1}{2}\sin(\theta)\left[2a_2 + \gamma\eta(1-2\theta)R^2\right]$$

$$N(\theta) = a_1\cos(\theta) + (a_2 + F_2(\theta))\sin(\theta)$$
$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}(2a_1 + R^2\gamma\eta(4+\theta))\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[2a_2 + R^2\gamma\eta(1-2\theta)\right]\sin(\theta)$$

Substituindo em Eq. 32.18, pode ser facilmente mostrado que de fato

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) + N(\theta) - q(\theta) = 0$$

43 O força cortante pode ser determinado a partir de Eq. 32.16

$$V(\theta) = \cos(\theta)\left(a_2 - \gamma\eta\theta R^2\right) - \tfrac{1}{2}\sin(\theta)\left(2a_1\gamma\eta\theta R^2\right)$$

44 O Momento foi obtido da Eq. 32.17

$$M(\theta) = a_3 - a_1 R + R^3\gamma\eta + \frac{1}{2}R\left[2a_1 + R^2\gamma\eta(-2+\theta)\right]\cos(\theta) + a_2 R\sin(\theta)$$
$$+ \frac{1}{12}R^3\gamma\eta\left[-6 + (-12+\eta^2)\theta\right]\sin(\theta)$$

Note que uma terceira constante de integração (a_3) foi introduzido.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

45 Para encontrar as três constantes da integração a_1, a_2, e.. a_3, três equações adicionais são necessárias. O valor de N, V, e V pode ser encontrado por ajuste $\theta = 0$.

46 Os esforços internos podem ser representados de outra forma. Definições de excentricidade absoluta, ex, e excentricidade relativa, e:

$$ex = -\frac{M}{N}, \; e = \frac{2ex}{d}$$

47 O momento é medido em referência ao ponto médio da seção. O sistema é equivalente ao sistema (N*, V, ex) ou (N *, V e) onde $N*$ é uma força da mesma intensidade que N, aplicado à distância ex do meio da seção calculada para produzir um momento M.. O valor de e é menor que -1 quando a força $N*$ Se estende além do fim da seção, 0 quando $N*$ passa pelo centro, e é maior que 1 quando passa pelos extrados.

48 Como exemplo, considere um arco circular de espessura constante, sujeito apenas ao seu próprio peso. Equações de equilíbrio (Eqs. 32.15-32.17) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} N'(\theta) - V(\theta) + \gamma R^2 \eta \sin(\theta) &= 0 \\ V'(\theta) + N(\theta) + \gamma R^2 \eta \cos(\theta) &= 0 \\ -M'(\theta) + V(\theta)R + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

E o equação diferencial 32.18 se torna

$$N''(\theta) + N(\theta) = -2\gamma R^2 \eta \cos(\theta)$$

49 Resolvendo Eq. 32.19 para este caso, nós obtemos

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Onde N_0 é a força normal para $\theta = 0$. Quanto aos momentos, Eq. 32.17 se torna

$$M'(\theta) = VR + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta)$$

Substituindo a expressão de V

$$M'(\theta) = -N_0 R \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) R \cos(\theta) + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

A integração produz resultados

$$M(\theta) = a_3 + N_0 R \cos(\theta) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta (\theta \sin(\theta) + cos(\theta) - \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

50 Finalmente, o esforços internos será dado por

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta) \tag{32.20}$$

$$V(\theta) = -N_0 \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta) \tag{32.21}$$

$$M(\theta) = M_0 - N_0 R(1 - \cos(\theta)) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta \left[\theta \sin(\theta) - (1 - \cos(\theta)) \left(1 + \frac{\eta^2}{12}\right)\right] \tag{32.22}$$

32.1.4.1.3 Verificação

51 Podemos verificar os Eqs. 32.20-32.22 Compare com Eqs. 32.10, 32.11, e 32.12 para os três axiais centrados, cisalhamento e momento (Smars, 2022).

52 Nesta derivação, os ângulos são medidos a partir da crista ($\theta = 0$) onde tanto cisalhamento e momentos são zero ($V = M = 0$). Nós ainda assumimos que a espessura é insignificante (em comparação com R), assim $\eta = 0.$. Por outro lado, o peso próprio pode ser expresso como $w = \gamma R \eta.$. Substituindo, Eqs. 32.20-32.22 se tornar

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) - wR\theta \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) - wR\theta \cos(\theta) \\ M(\theta) &= -N_0 R(1 - \cos(\theta)) - wR^2 [\theta \sin(\theta) - 1 + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

N_0, o força axial na crista, deve ser igual à reação horizontal (Eq. 32.9), $N_0 = C_x = (\pi/2 - 1)wR$

$$\begin{aligned} N(\theta) &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cos(\theta) + \theta \sin(\theta)\right] \\ V(\theta) &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \sin(\theta) - \theta \cos(\theta)\right] \\ M(\theta) &= wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos(\theta)) - \theta \sin(\theta)\right] \end{aligned}$$

53 Finalmente, nós fazemos uma substituição para o ângulo θ que é medido a partir da crista nesta derivação, e θ' Mensurado a partir do x Eixo na solução de arcos tricêntricos

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

Cedendo

$$\begin{aligned} N(\theta') &= -wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \sin(\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \cos(\theta')\right] \\ V(\theta') &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cos(\theta') - \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \sin(\theta')\right] \\ M(\theta') &= wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \sin(\theta')) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \cos(\theta')\right] \end{aligned}$$

Assim, recuperamos a mesma equação derivada mais cedo Eqs. 32.10, 32.11, e 32.12.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

32.1.5 Soluções baseadas em matemática

54 Um extenso conjunto de soluções para o arco circular com várias combinações de cargas e suportes é dado no Apêndice D.. Esta foi a tese da MS de Sonavane, 2014, e contém diagramas de corpo livre e correspondente código Mathematica.

32.2 Forma ideal de um arco

55 Enquanto um número infinito de parábolas pode ser sustentado entre dois pontos, procuramos encontrar o ideal para uma carga uniforme, Fig. 32.6. Do equilíbrio da figura

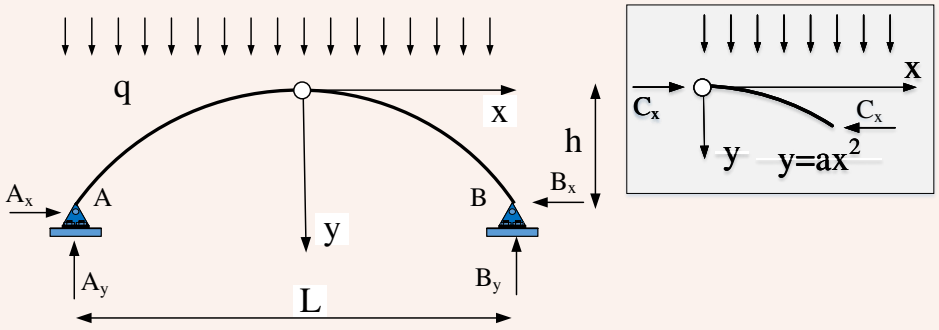


Figura 32.6: Arco parabólico ideal para uma carga uniforme

esquerda que temos

$$\begin{cases} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y L - \dfrac{qL^2}{2} == 0 \\ (+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \dfrac{qL}{2}\dfrac{L}{4} + B_x \dfrac{L}{2} - C_x h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \dfrac{qL^2}{8h} \\ B_y = \dfrac{qL}{2} \end{cases}$$

Nós procuramos determinar a De tal forma que.. $M(x) = 0$ através do arco. Considerando o equilíbrio na direita diagrama de corpo livre, e tomando $y = ax^2$, nós procuramos determinar a

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow C_x \underbrace{(ax^2)}_{y} - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{L^2}$$

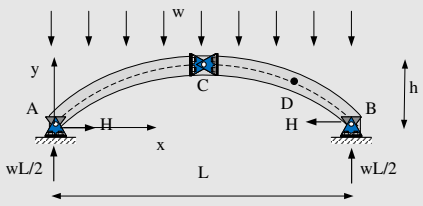
56 Para tal parábola não haverá momentos internos para a carga uniforme.

57 Quanto aos cabos, a maior força total no arco está no suporte, ($F_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$), enquanto que na coroa nós simplesmente temos H, a coroa vai Exige uma seção menor que o suporte.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

32.2.1 Ex 32.5: Arco perfeito



Um arco parabólico de três voltas com extensão L E levantem-se h é submetido a uma carga uniforme w "Continuando"É a extensão total. Vamos mostrar que o momento fletor em qualquer ponto através do span é zero.

O impulso horizontal H é determinado por tomar momentos sobre a coroa Che C

$$Hh = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{wL}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{wL^2}{8} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{wL^2}{8h}$$

O momento fletor em qualquer seção à distância x É

$$M_x = \frac{wL}{2} \times x - \frac{wx^2}{2} - Hy$$

Aqui y é a altura do ponto à distância x do fim A E é dado por Com a origem em AA equação da parábola é

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$

Substituindo o valor de H e.. y na expressão acima,

$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h} \times \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$
$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wxL}{2} + \frac{wx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M_x = 0$$

Note analogia com um cabo que suporta uma carga uniforme, sua forma é uma parábola, e não carrega nenhum momento.

32.3 Arcos parabólicos

58 A análise dos arcos parabólicos é idêntica à da circular, com a diferença óbvia sendo a forma. Nunca, optei por mudar para esta seção os exemplos relativos aos parabólicos.

59 Como os livros didáticos abordam arcos parabólicos, optei por inserir esta seção aqui.

Esta seção sobre arcos parabólicos é tirada de Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

32.3.1 Exemplos

32.3.1.1 Ex 32.6: Arco parabólico de três torções

A seção seguinte é reproduzida de Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

Um arco parabólico de equação $y^{-}4hx^2/L^2$ com a origem na coroa, com x-eixo para a direita e y- O eixo para baixo tem uma extensão de 80 m e um aumento de 6m. Um simples carga concentrada de 20 kN atua para baixo a uma distância de 60 m do pilar esquerdo. Procuramos determinar as reações no suporte e o momento resultante da carga. Da Eq. 32.1

$$V_A = \frac{20 \times 20}{80} = 5\text{kN e } V_B = \frac{20 \times 60}{80} = 15\text{kN}$$

Da Eq. 32.3

$$H = \frac{20 \times 20}{2 \times 6} = 33.33\text{kN}$$

O momento de curva no carga concentrada de um smply apoiado viga é

$$M_o = \frac{Wab}{L} = \frac{20 \times 60 \times 20}{80} = 300\text{kNm}$$

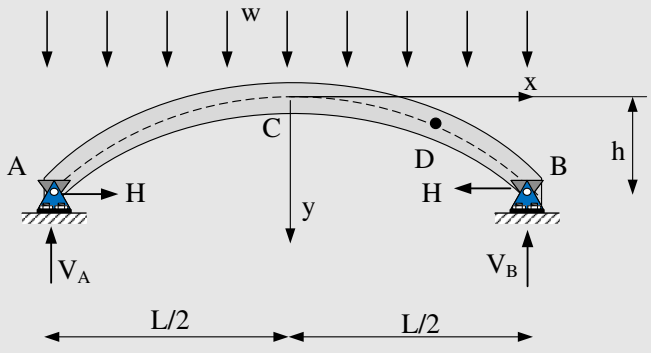
Fnalmente, a altura do eixo do arco na carga acima da linha de mola é $(h - y)$.. Por.. $x = 20$ m,

$$y = \frac{4 \times 6 \times 20^2}{80^2} = 1.5 \text{ m} \quad \therefore (h - y) = (6 - 1.5) = 4.5 \text{ m}$$

O momento devido ao impulso é $H(h - y) = 33.33 \times 4.5 = 149.985$kNm.. O momento resultante na carga é $(300 - 149.985) = 150.015$kNm

Cheque o momento na coroa é $(5 \times 40 + 20 \times 20 - 1.5 \times 40) = (200 + 400 - 600) = 0$.

32.3.1.2 Ex 32.7: Dois arcos parabólicos de corte transversal



Um arco simétrico de duas pontas é submetido a carga vertical. Devido à simetria do arco, as reações horizontais nos suportes são iguais e opostas. Também é chamado de impulso e denotado como H.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A seção seguinte é reproduzida de Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

Teoria

Deixe o impulso H ser considerado como um redundante que deve ser avaliado. Aplicando o teorema de Castigliano (Eq. 48.36).

$$U^* = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{AE}ds = 0 \tag{32.23}$$

e..

$$\Delta = \frac{\partial U^*}{\partial H} = 0 \tag{32.24}$$

O momento fletor que surge desta condição biapoiado é denotado como M_0 e o correspondente força axial N_0.. Em termos de condições relaxadas, o momento fletor e força axial em uma seção D no arco pode ser expresso como

$$M - M_0 - H(h-y) \quad \text{e} \quad N = N_0 + H\cos\theta \tag{32.25}$$

Onde h é a ascensão do arco e θ é o ângulo da tangente para a linha central do arco em D com o eixo X. Substituindo o Eq. 32.25 e seus derivados com respeito a H Em 32.24,

$$-\int_0^l \frac{M_0 - H(h-y)}{EI}(h-y)ds + \int_0^l \frac{N_0 + H\cos\theta}{AE}\cos\theta ds = 0 \tag{32.26}$$

A solução de H é então dado por

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds - \int_0^l \left(\frac{N_0}{AE}\right)\cos\theta ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

Esta equação é válida para todos os arcos simétricos de duas faces de qualquer forma e qualquer condição de carga. O segundo termo no numerador para proporções comuns de arco é muito pequeno quando comparado ao primeiro (deformação axial muito menor do que os flexurais) e, portanto, pode ser negligenciado. Portanto, expressões para impulso são dadas como

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

O impulso H Só pode ser avaliada quando a relação entre h e.. y é conhecido. Para um caso específico de um arco parabólico, a equação do eixo do arco conectando y e.. h é dado por

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \tag{32.27}$$

e..

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (8hx/L^2)^2}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Presume-se ainda que a área transversal e o momento, de inércia, variam de acordo com a seguinte expressão

$$A = \frac{A_c}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad I = \frac{I_c}{\cos\theta}$$

Onde A_c e.. I_c Denotam a área transversal e o momento de inércia na coroa C.

Para descobrir o valor de M_0, notamos que temos um carga uniformemente distribuída de intensidade w aplicado verticalmente no arco, e que em um diagrama biapoiado viga é uma parábola com a magnitude do momento máximo de $(wL^2/8)$ no meio do espaço. Portanto, o momento fletor al uma seção D longe da coroa C à distância x Vai ser

$$M_o = \frac{wL^2}{8}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)$$

Substituindo,

$$H = \frac{\int_0^l \frac{\frac{wL^2}{8}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)}{[EI_C]/\left[\sqrt{\left\{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right\}}\right]}\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right)ds}{\int_0^l \left[\left(\frac{h-\frac{4hx^2}{L^2}}{EI_C}\right)^2 \sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}\right]ds + \int_0^l \left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}}{EA_C}\right]ds}$$

$$= \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^1 \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2 ds}{\left[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^l \left[\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2\right]ds + \frac{1}{EA_c}\int_0^l \left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right]ds\right]} \tag{32.28}$$

Para um comprimento infinitesimal do eixo do arco, de cálculo

$$ds = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

Eq diferenciador. 32.27

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}\,dx$$

Substituindo-se em Eq. 32.28

$$H = \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^{L/2}(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx}{[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^{L/2}[(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx] + \frac{1}{EA_c}\int_0^{L/2}[1+(\frac{8hx}{L^2})^2]\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]}$$

ou

$$H = \frac{\alpha_1\left[-\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{384h^2}+\frac{L^5}{819h^2}\right)\right] + \alpha_2\left[\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{26{,}244h^6}\right)\right]}{\alpha_1\left[-\frac{8h^2}{I_CL^2}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{3{,}844h^2}+\frac{L^5}{8{,}192h^2}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(L+\frac{Lh^2}{3}+\frac{L^3}{192}-\frac{L^5}{2{,}048h^2}\right)\right] + \alpha_2\left[\frac{8h^3}{I_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{262{,}144h^6}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^{15}}{41{,}943h^6}\right)\right]} \tag{32.29}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

eram

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}, \quad \alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right) \tag{32.30}$$

Aplicação

Agora, tome o aumento para ser 10 m e comprimento 60 m submetido para w de 25kN/m. O momento de inércia na seção da coroa é 1.14×10^{-3} m^4 E a área do seção transversal é 6.75×10^{-2} m^2.

Da Eq. 32.30

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{60^2}{4} + \left(\frac{60^2}{8 \times 10}\right)^2} = 54.08; \alpha_2 = \ln\left(\frac{60}{2} + 54.08\right) = 4.43$$

Da Eq. 32.29

$$\begin{aligned}
H &= \frac{A}{B} \\
A &= 54.08\left[-\frac{25 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{60 \times 10^2}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,096 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right] \\
B &= 54.08\left[-\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3} \times 60^2}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^{-2}}\left(60 + \frac{60 \times 10^2}{3} + \frac{60^3}{192} - \frac{60^5}{2,048 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,069 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^2}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^{15}}{419,430 \times 10^6}\right)\right] \\
&\Rightarrow H = -13.18\text{kN}
\end{aligned}$$

Uma seção D À distância x Da coroa C é considerado. A expressão para momento fletor é obtida considerando o equilíbrio das forças no segmento direito DB do arco. Como o momento é tomado na seção D, a força cisalhamento e normal fazer Não dar origem a momentos.

$$M_x = \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H(h - y)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo o valor de y De Eq. 32.27,

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right) + H\left(h-\frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{2w}{L^2}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)\times\left(Hh-\frac{2w}{L^2}\right) \end{aligned}$$

Então, o momento também é parabólico. Na coroa, o momento é encontrado por simplesmente definir $x = 0$

$$M_C = \left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = \left(-13.18\times 10 - \frac{2\times 25}{60^2}\right) = -131.81\text{kNm}$$

Quando $x = L/2$, o momento de suporte é obtido como 0. Quando $x = L/4$ O momento no quarto ponto é obtido da equação anterior

$$M_{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(Hh-)\frac{2w}{L^2}\right) = -98.86\text{KNm}$$

É óbvio que a contribuição do impulso para o momento fletor é mais predominante do que isso devido ao w

32.3.2 Arco fixo com carga simétrica

60 O momento fletor, força cortante, e a força normal em qualquer seção do arco podem ser considerados redundantes. No entanto, o seção transversal na coroa é vantajoso e deve ser considerado se o arco for simétrico. Além disso, se o O carregamento é simétrico, bem como distribuído, o força cortante na coroa desaparece e eventualmente só restam duas quantidades redundantes. Eles são os momento fletor M_C E a força normal na seção da coroa, como ilustrado na figura. 32.7.

61 Novamente, usando o teorema de Castigliano (Eq. 48.36), a transalação e rotação em C são zero em virtude da simetria. Assim podemos avaliar as duas forças redundantes

$$\theta_C = \frac{\partial U^*}{\partial M_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}ds = 0 \tag{32.31}$$

$$\Delta_C = \frac{\partial U^*}{\partial N_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial N_C}ds + 2\int_0^l \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial N_C}ds \tag{32.32}$$

Onde l é o comprimento do arco CB, i.e. metade do comprimento do eixo do arco completo. Note que os lados direito são zero, como o correspondente deslocamento / rotação são zero em virtude da simetria.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

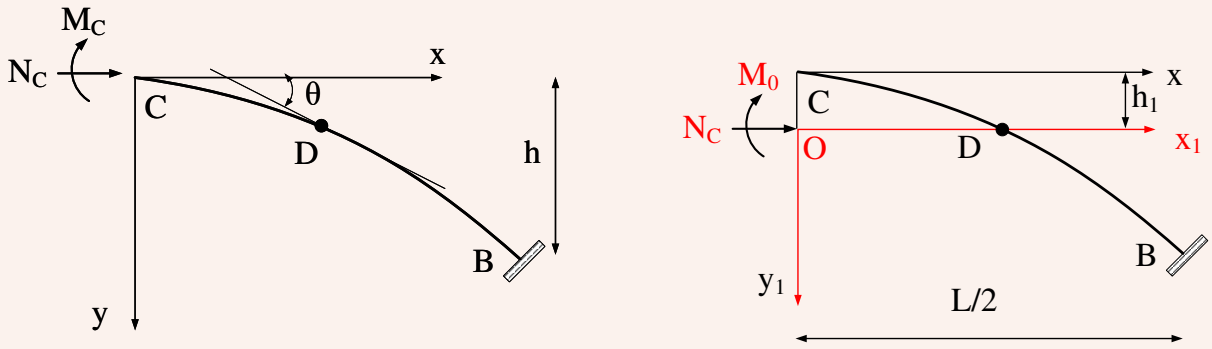


Figura 32.7: Arco parabólico sem dobras; diagrama de corpo livre

62 Vamos M_o e.. N_o Seja o momento e a força normal, respectivamente, em qualquer seção do arco induzida pelas cargas aplicadas. Então o momento total e força axial em um típico seção transversal D, pode ser expresso como

$$M = M_C + N_C y + M_o \tag{32.33}$$
$$N = N_C \cos\theta + N_o \tag{32.34}$$

Diferenciando Eq. 32.33 com respeito a M_C:

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

Diferenciando os dois Eqs. 32.33 e.. 32.34

$$\frac{\partial M}{\partial N_C} = y \tag{32.35}$$
$$\frac{\partial N}{\partial N_C} = \cos\theta \tag{32.36}$$

Substituindo em Eqs. 32.31 e.. 32.32

$$\int_0^l \frac{1}{EI}(M_C + N_C y + M_o)ds = 0 \Rightarrow M_C \int_0^l \frac{ds}{EI} + N_C \int_0^l \frac{yds}{EI} = \int_0^l \frac{M_o}{EI}ds \tag{32.37}$$

$$\int_0^l \frac{M_C + N_c y + M_o}{EI} yds = \int_0^l \frac{N_C \cos\theta + N_o}{AE} \cos\theta ds = 0$$

$$\Rightarrow M_C \int_0^l \frac{y}{EI}ds + N_C \int_0^l \frac{y^2}{EI}ds + N_C \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE}ds = -\int_0^l \frac{M_o y}{EI}ds - \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE}ds \tag{32.38}$$

63 Equações 32.37 e.. 32.38 são um pouco difíceis de lidar. Isso pode ser mais simplificado, se a origem da coroa C, é movido a um ponto C a uma distância de h_1 Da coroa C, então as novas coordenadas com referência ao ponto O Agora se torna, $y_1 = (y - h_1)$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64 A distância é selecionada de tal forma que satisfaz a seguinte condição

$$\int_0^l \frac{y_1}{EI} ds = \int_0^l \frac{y - h_1}{EI} ds = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\int_0^l \frac{y_1}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}}$$

O ponto O assim definido é chamado de *centro elástico do arco*.

65 Se o ponto O é usado como origem das coordenadas, então para y em Eqs. 32.37 e.. 32.38, $(y1 - h_1)$ é substituído. Em tal caso $\int_0^l (y_1/EI) ds$ Torna-se zero. Posteriormente, as expressões resultantes por momento e força normal podem ser dadas por

$$M_{oo} = M_C + H_{oo} h_1 = \frac{\int_0^l \frac{M_o}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.39}$$

$$H_{00} = N_C = \frac{\int_0^l \frac{M_o y_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE} ds}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI} ds + \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE} ds} \tag{32.40}$$

32.3.2.1 Ex 32.8: Arco parabólico sem dobra

Procuramos determinar o momento fletor e força axial na coroa de um arco parabólico simétrico de 40 m de extensão e submetido a um unifôrbio carga distribuída w de 20kN/m ao longo de sua Todo o espaço. A elevação do arco é de 8 m. $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2, $I = 1,5 \times 10^{-4}$ m^4, e $A = 7.5 \times 10^{-2}$ m^2.. O centro elástico está 1m abaixo da coroa. A equação do arco parabólico é

$$y = \frac{4hx^2}{L^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2} \tag{32.41}$$

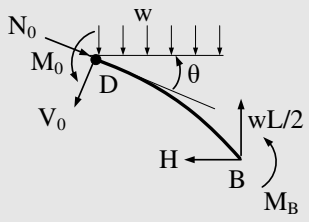
e..

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx \tag{32.42}$$

O arco fixo com a carga aplicada é mostrado na figura. Por causa da simetria, tanto em dimensões quanto carregamento, os momentos fixos nos suportes são iguais e Ao contrário, assim também os impulsos horizontais.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Primeiro, a expressão geral para várias forças é formulada e então valores específicos são substituídos para avaliar a magnitude de várias forças. Agora, $M_A = M_B = M^F$ (onde M^F é o momento fixo no suporte; Igualmente $H_A = H_B = H$.. Tomando momento de forças sobre C, $\sum M = 0$

$$\begin{aligned} -M_B - \frac{wL}{2}\frac{L}{2} + \frac{wL}{2}\frac{L}{4} + Hh = 0 \quad \text{or} \quad -M_B - \frac{wL^2}{8} + Hh = 0 \\ Hh = M_B + \frac{wL^2}{8} \quad \text{or} \quad H = \frac{1}{h}\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) \end{aligned} \tag{32.43}$$

O momento fletor M_0 em qualquer seção

$$\begin{aligned} M_0 &= -M_B - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + w\frac{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - Lx + x^2\right) + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{8} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) = -\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \end{aligned}$$

Usando EQ. 32.43 e.. 32.41, M_0 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} M_0 &= -Hh + \frac{wx^2}{2} + H_B\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= \frac{wx^2}{2} - \frac{4Hh}{L^2}x^2 \left(\because H_B = H\right) = x^2\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) \end{aligned} \tag{32.44}$$

As forças agindo em um corpo livre DB em seção transversal D

$$N_O = w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\theta$$

Substituindo M_0 Em Eq. 32.39

$$M_{OO} = \frac{\int_0^l \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2 ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.45}$$

Substituindo por.. ds De Eq. 32.42

$$\begin{aligned} M_{oo} &= -\frac{\int_0^{L/2}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \\ &= \frac{\left(4whL - \frac{32Hh^2}{L}\right)\left\{\alpha_1\left(\frac{1}{32} + \frac{L^2}{1024h^2}\right) - \frac{\alpha_2 L^5}{32{,}768h^4}\right\}}{\frac{2h}{L}\alpha_1 + \left(h + \frac{L^2}{16h}\right)\alpha_2} \end{aligned} \tag{32.46}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo valores de M_o De Eq. 32.44, $y_1 = (y - h_1)$, e ds De Eq. 32.42 Eq. 32.40

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) x^2 (y - h_1) \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos^2\theta}{AE} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx}{\int_0^{L/2} \frac{(y - h_1)^2}{EI} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{\cos^2\theta}{AE} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx} \tag{32.47}$$

Agora para infinitamente pequeno comprimento de arco.

$$\cos\theta = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \left[1 + \left(\frac{8hx^2}{L^2}\right)^2\right] \tag{32.48}$$

Substituindo o valor de $\cos^2\theta$ Em Eq. 32.47, nós temos

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) x^2 (y - h_1) \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{w\left(\frac{L}{2} - x\right)}{AE} 1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx}{\int_0^{L2} \frac{1}{EI}\left(\frac{4hx^2}{L^2} - h_1\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{1}{AE} 1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx} \tag{32.49}$$

$$H_{oo} = -\frac{\begin{array}{c}\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left[(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2})\left\{\frac{4h}{L^2}\left(\frac{L^5}{192} + \frac{L^7}{12,288h^2} - \frac{L^9}{65,536h^2} + \frac{L^9}{131072h^4}\right)\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. -h_1\left(\frac{L^3}{32} + \frac{L^5}{1,024h^2}\right)\right\} - \frac{wL^2I}{8Ah}\right] + \alpha_2\left\{\left(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\right. \\ \left.\left.\left(\frac{L^{10}}{1,033,576h^5} + \frac{L^8h_1}{32,768h^4}\right)\right\}\right\} + \alpha_3\frac{wL^3}{16Ah}\end{array}}{\begin{array}{c}\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left\{\frac{8h^3}{3L^3}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) - \frac{1}{8Lh^2}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) + \frac{L^3}{1,024h^4} + \frac{2hh_1}{L}\right\}\right. \\ \left. +\alpha_2\left\{\frac{L^{12}}{4,134,034h^6} + \frac{L^4}{64h^2}\right\}\right\} + \frac{L^2}{8Ah}\alpha_3\end{array}} \tag{32.50}$$

Onde

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$

$$\alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right)$$

$$\alpha_3 = \ln\left\{\frac{8h}{L^2}\left(\frac{L}{2} + \alpha_1\right)\right\}$$

Equação 32.50 para H_{oo} depende das dimensões e propriedades geométricas do arco, Sua extensão, e carregando. Substituindo os valores dados em Eq. 32.47, H_{oo} Pode ser avaliado. Uma vez H_{oo} pode

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

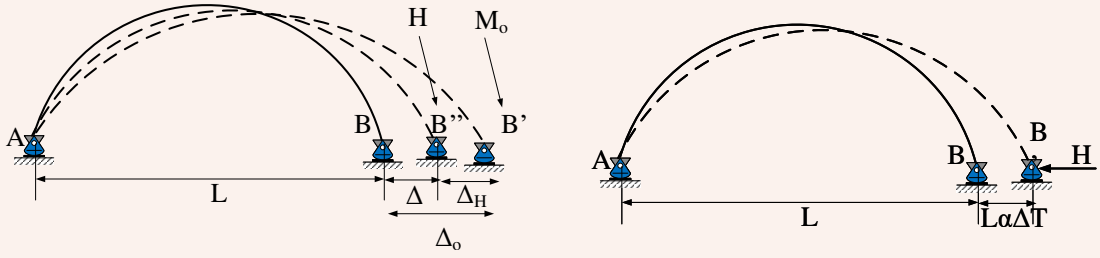
ser determinado, então usá-lo em Eq. 32.46 acima determina o valor de M_{oo} O momento no centro elástico. Com todos os valores dados, a expressão para H_{oo} dado em Eq. 32.50 É

$$\begin{aligned}
H_{oo}\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\Bigg\{32.02\Bigg[\Big(\frac{4\times20\times8}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\Big)\Bigg\{\frac{4\times8}{40}\Big(\frac{40^5}{192}+\frac{40^7}{12288h^2}\\
-\frac{40^9}{65536\times8^2}+\frac{40^5}{131072\times8^4}\Big)-1\Big(\frac{40^3}{32}+\frac{4}{1024\times8^2}\Big)\Bigg\}\\
-\frac{20\times40^2\times1.5\times10^{-4}}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\Bigg]+3.95\Bigg\{\Big(\frac{4\times20\times3}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\Big)\\
\Big(\frac{40^{10}}{1033576\times8^5}+\frac{40^8\times1}{32768\times8^4}\Big)\Bigg\}\Bigg\}+\frac{0.733\times20\times40^3}{16\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=-\frac{}{\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\Bigg\{32,02\Bigg\{\frac{8\times8^3}{3\times40^3}\Big(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}-\frac{1}{8\times40\times8^2}\Big(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}\Big)\\
+\frac{40^3}{1024\times8^4}+\frac{2\times8\times1}{40}\Bigg\}+3.95\Bigg\{\frac{40^{12}}{4134034\times8^6}+\frac{40^4}{64\times8^2}\Bigg\}\Bigg\}+\frac{40^2\times0.733}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=32.08\text{kN}
\end{aligned}\tag{32.51}$$

Finalmente, substituindo o valor de H_{oo} Em Eq. 32.46, o momento

$$\begin{aligned}
M_{oo}&=-\frac{\Big(4\times20\times8\times40-\frac{32\times32.08\times8^2}{40}\Big)\Big\{32.02\Big(\frac{1}{32}+\frac{40^2}{1024\times8^2}\Big)-\frac{3.95\times40^5}{32768\times8^4}\Big\}}{\frac{2\times8}{40}\times32.02+\Big(8+\frac{40^2}{16\times8}\Big)3.95}\\
&=314.98\text{kNm}
\end{aligned}$$

32.3.3 Base de acordo e efeitos de temperatura



(a) Inicial deslocamento (b) Efeito de temperatura

Figura 32.8: Efeito da fixação inicial e mudança de temperatura

Rendendo

66 Consideremos agora o efeito de um acordo ou movimento ou a entrega de apoios no valor de H.. Na Fig. 32.8a, um arco de duas voltas AB é mostrado. Fim B é suportado no rolo. Chama-se arco primário. Sob carga externa o suporte B na estrutura primária se

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

move para B' , Vamos M_0 ser o momento na estrutura primária devido a alguma carga externa.

67 Aplicando uma unidade de força horizontal virtual[1] Resultou em um momento virtual $\delta\overline{M} = 1 \times y$ Onde y é a ascensão do arco na seção onde o momento é calculado. Então o deslocamento no arco

$$\begin{aligned}(1)BB' = (1)\Delta_o &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds\end{aligned}$$

68 Se a magnitude da força horizontal aplicada ao arco é HEntão essa força induz um momento $M = Hy$.. A horizontal deslocamento devido a H

$$\begin{aligned}B'B'' = \Delta_H &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{Hy}{EI}ds = H\int \frac{y^2}{EI}ds\end{aligned}$$

69 Vamos supor que o apoio produz por uma quantidade Δ Ou seja, o suporte se move de B para B'.. Então..

$$\begin{aligned}\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \Delta_0 - \Delta \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta}{\int \frac{y^2}{EI}ds}\end{aligned}$$

[1] Nesta seção usaremos o virtual método das forças em vez de Castigliano até agora usado para arcos parabólicos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

70 Se o suporte é elástico e ele cede por k Devido à força horizontal da unidade no nível de apoio, então $\Delta = k_s H$.. Neste caso,

$$\begin{aligned} \Delta_H &= H \int y^2 \frac{ds}{EI} = \Delta_0 - \Delta \\ &= H \int y^2 \frac{ds}{EI} = \int y \frac{M_o}{EI} ds - k_s H \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y \frac{M_o}{EI} ds}{\int \frac{y^2}{EI} ds + k_s} \end{aligned} \tag{32.52}$$

Temperatura

71 Vamos agora abordar o efeito das mudanças de temperatura na força horizontal de um arco de duas torções mostrado na figura. 32.8bDeixe a temperatura do arco aumentar ΔT.. As dobradiças nas extremidades exercerão um impulso horizontal no arco para evitar que as pontas se movam quando a temperatura aumenta.

72 Devido a este impulso horizontal, haverá momento fletor em todas as seções do arco. Nós substituímos a dobradiça no suporte em B Com um rolo. Então.. B se move para a posição B'.. Então..

$$BB' = L\alpha\Delta T$$

Onde L é o espaço do arco e α é o coeficiente de expansão térmica.

73 Vamos H ser o impulso horizontal induzido devido ao aumento da temperatura por ΔT.. Esta força horizontal H permite que o arco restaure sua posição original, ou seja, ele Ajuda a trazer de volta o fim B' para B Então, do teorema de Castigliano

$$\frac{dU^*}{dH} = L\alpha\Delta T$$

Onde U^* é a energia deformação

$$U^* = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Neste caso, o momento é dado por $M = -Hy$, assim

$$\begin{aligned} M &= -Hy \\ \Rightarrow \quad L\alpha\Delta T = \frac{dU}{dH} &= \int \frac{d}{dH}\left(\frac{M^2}{2EI}\right) ds = \int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dH} ds \\ &= \int (-Hy)(-y)\frac{ds}{EI} = H\int y^2 \frac{ds}{EI} \\ \Rightarrow H &= \frac{L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI}} \end{aligned} \tag{32.53}$$

Esta equação expressa o impulso horizontal devido à mudança de temperatura no arco.

74 Se combinarmos os efeitos da produção de fundação e mudança na temperatura, O impulso horizontal pode ser obtido de Eqs 32.52 e.. 32.53

$$H = \frac{\int M_o y \frac{ds}{EI} + L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + k_s} \tag{32.54}$$

32.3.3.1 Ex 32.9: Carga térmica no arco parabólico

Um arco parabólico de 50 m de extensão e uma elevação de 5 m carrega um carga concentrada de 50 kN na coroa. O suporte elástico do arco produz 10.0002 m/kN. Dado que.. $E = 200$ kN/mm^2, $I = 8^9$ mm^4, e $\alpha = 20xlO^{-6}/°$C, nós procuramos avaliar o impulso horizontal se a temperatura aumenta em 20°C Tomando o apoio esquerdo como origem a equação do arco parabólico é

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2} = \frac{4\times 5\times x\times (L-x)}{50^2} = \frac{x(50-x)}{125}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{50} y^2 ds &= \int_0^{50} \frac{x^2(50-x)^2}{125^2} = \frac{1}{125^2}\int_0^{50} \left(2500x^2 - 100x^3 + x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{125^2}\left[2500\frac{x^3}{3} - 100\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{50} = 666.67 \end{aligned}$$

Viga momento, $M_o = 25x$

$$\begin{aligned} \int_0^L M_o y \frac{dx}{EI} &= 2\int_0^{25} 25x\frac{x}{125}(50-x)\frac{dx}{EI} \\ &= \frac{2}{5EI}\int_0^{25} \left(50x^2 - x^3\right) dx = \frac{2}{5EI}\left[50\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{25} = \frac{65,104.17}{EI} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Agora, $EI = 200 \times 10^6 \times 8 \times 10^9 \times 10^{-12} = 1,600,000 \text{kNm}^2$.. Substituindo em Eq. 32.54, nós temos

$$H = \frac{\frac{65,104.17}{1,600,000} + 25 \times 20 \times 10^{-6} \times 20}{\frac{666.67}{1,600,000} + 0.0002} = 92.43\text{kN}$$

32.4 Curvado vigas

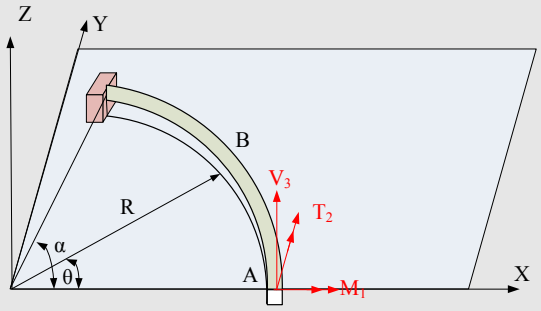
75 Os problemas nestas seções são inspirados por aqueles encontrados em Gerstle, 1974 Basic Structural Analysis.

32.4.1 Viga de arco

76 Uma viga de arco não é nada mais do que uma curva viga no avião carregado ortogonalmente. Ele será submetido a cisalhamento, momento, e torção.

32.4.1.1 Ex 32.10: Viga de arco

Nós procuramos derivar o matriz de flexibilidade de uma caixa circular-girder de raio R e ângulo α.. O arco é preso em uma extremidade, e livre na outra (note semelhança com o problema anterior).

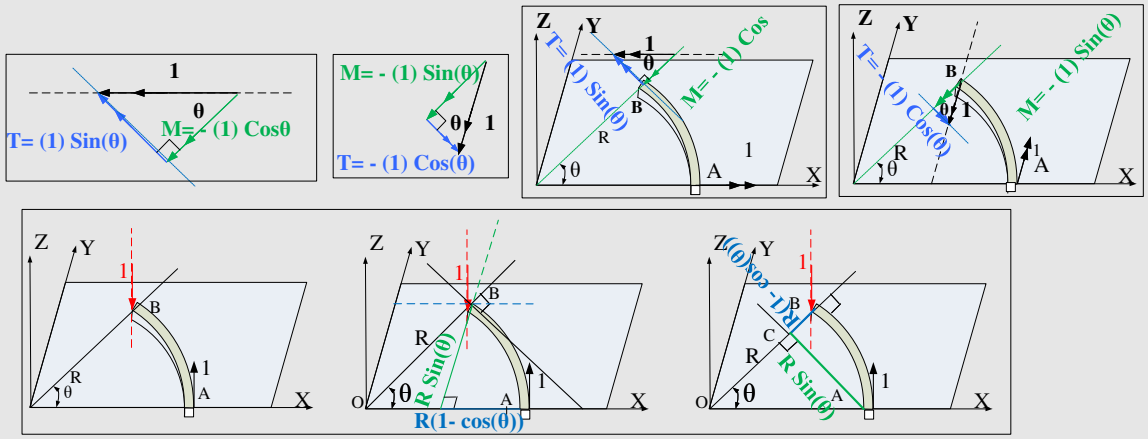


Momentos e torções devidos ao momento externo da unidade ou a torção aplicada em A podem ser facilmente obtidos da geometria. Assim, para a unidade externamente aplicada força em A, precisa determinar a partir da geometria os dois braços momento. Cuidado, use a figura certa, a esquerda está errada embora produza resultados corretos.

$$\begin{aligned} AC &= R\sin(\theta) \\ M &= (1)R\sin(\theta) \\ BC &= R(1-\cos(\theta)) \\ T &= (1)R\,(1-\cos(\theta)) \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Dof:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

Então usaremos

$$d_{ij}=\int_0^{\alpha}\delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta+\int_0^{\alpha}\delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

CÓPIA PARA REVISÃO

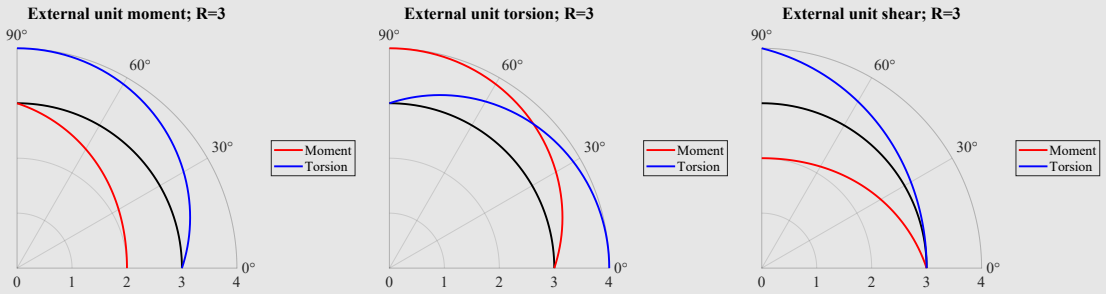
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $1 \le i, j \le 3$Ou seja, operamos nas linhas 2 ou 4. Assim (sinais de d_{x3} Os resultados alterados da integração podem estar errados.

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1 \frac{M_1}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta T_1 \frac{T_1}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{-\cos\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \sin\theta \frac{\sin\theta}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1 \frac{M_2}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1 \frac{T_2}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{-\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \sin\theta \frac{-\cos\theta}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1 \frac{M_3}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1 \frac{T_3}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta \frac{R\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \sin\theta \frac{R(1-\cos\theta)}{GJ} R d\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2 \frac{M_2}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2 \frac{T_2}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta \frac{-\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{-\cos\theta}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2 \frac{M_3}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2 \frac{T_3}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta \frac{R\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{R(1-\cos\theta)}{GJ} R d\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3 \frac{M_3}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3 \frac{T_3}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta \frac{R\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta) \frac{R(1-\cos\theta)}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



e observar o seguinte

	Unidade externa					
	Momento		Torsão		força	
Int. Força	Começa	Fim	Começa	Fim	Começa	Fim
Um momento	1	0	0	1	0	1
Torção	0	1	1	0	0	1

32.4.2 Helicoidal

Adaptado de Gerstle, 1974 Basic Structural Analysis.

32.4.2.1 Geometria

77 Porque as estruturas espaciais (figuram 32.9) pode ter geometria complicada, devemos recorrer à análise vetorial[2] para determinar o esforços internos.

78 Em geral, temos seis esforços internos (forças e momentos) atuando em qualquer seção.

$$x = f_1(\theta); \qquad y = f_2(\theta); \qquad z = f_3(\theta) \tag{32.55}$$

79 O sistema de coordenadas global é indicado por $X - Y - Z$E seus vetores unitários são denotados[3] $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.. A seção na qual o esforços internos são necessários é cortada e o *Diretor* Os eixos são identificados como $N - S - W$ que correspondem à força normal, e os eixos de flexão com relação ao *Forte* e.. *Fraco* Eixos. Os vetores unitários correspondentes são $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{w}$ (figurar 32.10).

80 O vetor normal da unidade (que é tangente à curva) em qualquer seção é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{ds} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}} \tag{32.56}$$

[2]Para o qual você já foi exposto em uma fase inicial, mas muito raramente usá-lo até agora em mecânica!
[3]Todas as quantidades vetoriais são denotadas por um personagem corajoso.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

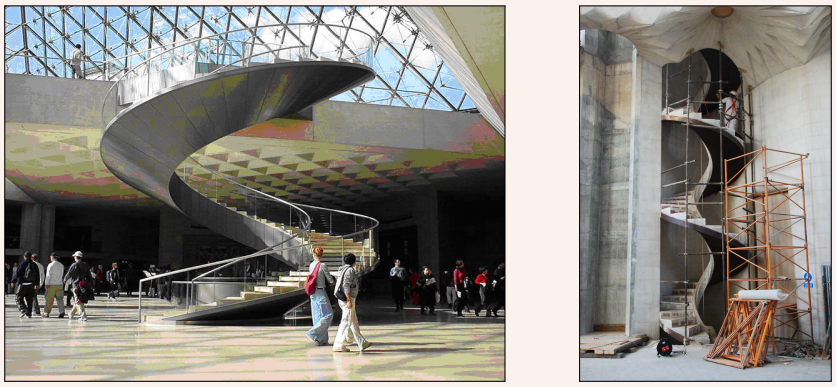


Figura 32.9: Escadaria em espiral no museu Louis (paris), e Catedral Sagrada Família (Barcelona)

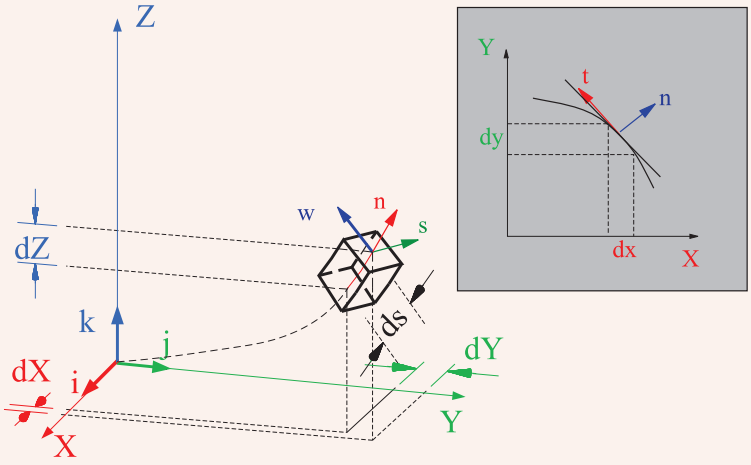


Figura 32.10: Geometria da estrutura curva no espaço

CÓPIA PARA REVISÃO

81 Os eixos fletores principais devem ser definidos, isto é, se o eixo de flexão forte for paralelo ao XY plano, ou horizontal (como geralmente é o caso da carga de gravidade), então este eixo é normal para ambos os N e.. Z eixos, e seu vetor unitário é

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{k} \tag{32.57}$$

82 O eixo de flexão fraco é normal para ambos N e.. S, e assim seu vetor unitário é determinado a partir de

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{s} \tag{32.58}$$

Note que agora ambos **n** e.. **s** foram normalizados.

32.4.2.2 Equilíbrio

83 Para as equações de equilíbrio, consideramos o diagrama de corpo livre (figura 32.11).

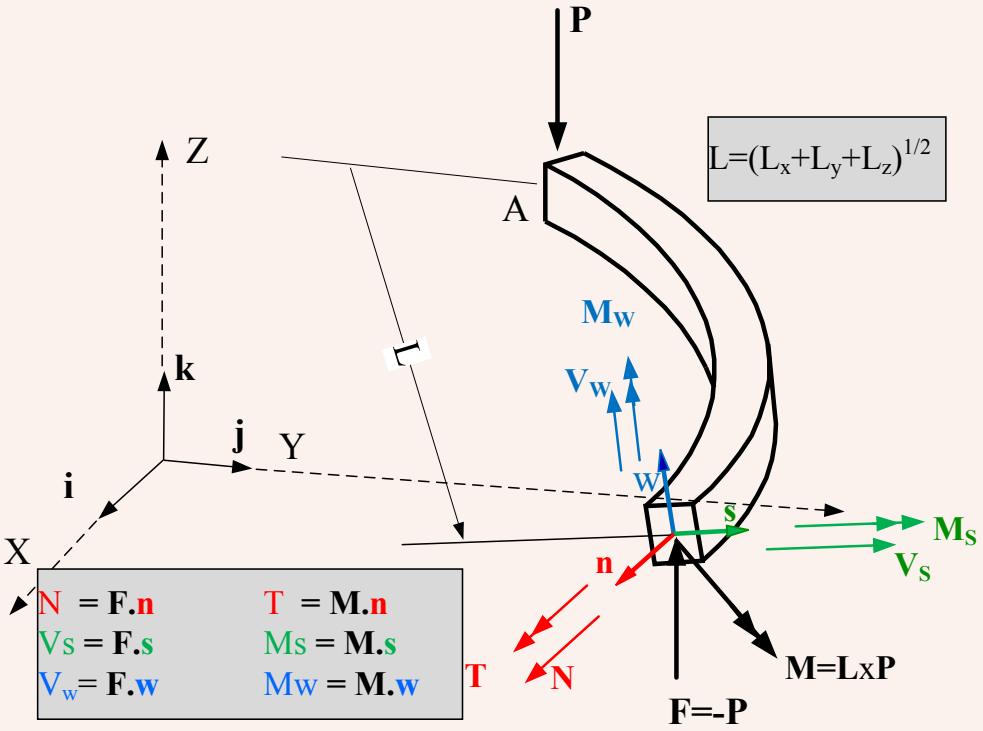


Figura 32.11: Diagrama de corpo livre de uma estrutura curva no espaço

84 Uma carga aplicada **P** Está atuando no momento A.. O vetor de força resultante **F** e o vetor do momento resultante **M** Agindo na seção de corte B são determinados a partir do equilíbrio

$$\Sigma \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P} \tag{32.59}$$

$$\Sigma \mathbf{M}^B = 0; \quad \mathbf{L} \times \mathbf{P} + \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P} \tag{32.60}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde **L** é o vetor do braço da alavanca de B para A. O axial e forças cortantes N, V_s e.. V_w são todos os três componentes do vetor de força **F** Ao longo da N, S, e W eixos e pode ser encontrado por ponto produto com os vetores unitários apropriados:

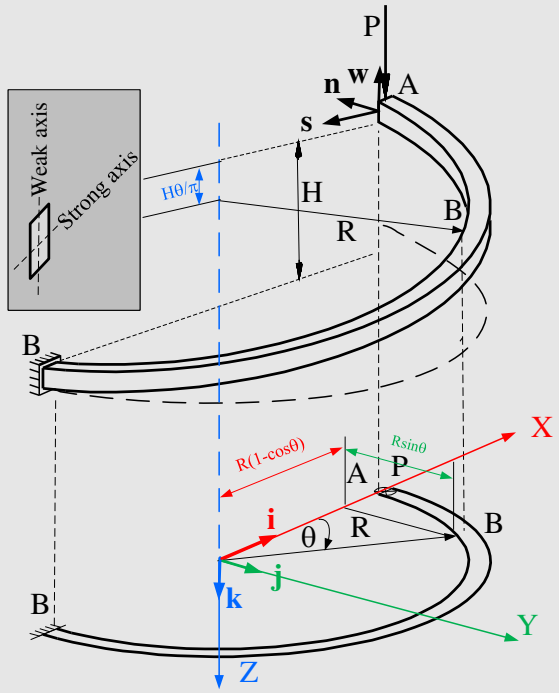
$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}$$

85 Da mesma forma o torsional e momentos fletores T, M_s e.. M_w são também componentes do vetor momento **M** e são determinados a partir de

$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s}$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w}$$

86 Assim, temos um meio de determinar o esforços internos. Em caso de cargas aplicadas somamos, e para carga distribuída nós integramos.

32.4.2.2.1 Ex 32.11: Arco helicoidal; carga concentrada



Nós procuramos determinar o esforços internos N, V_s, e V_w e os momentos internos T, M_s e.. M_w ao longo da viga de cantilevered helicoidal devido a uma carga vertical P no seu fim livre. Primeiro determinamos a geometria em termos do ângulo θ

$$x = R\cos\theta; \qquad y = R\sin\theta; \qquad z = \frac{H}{\pi}\theta \tag{32.61}$$

Para determinar o vetor unitário **n** Em qualquer momento precisamos dos derivados:

$$dx = -R\sin\theta d\theta; \qquad dy = R\cos\theta d\theta; \qquad dz = \frac{H}{\pi}d\theta \tag{32.62}$$

e depois inserir no EQ. 32.56

$$\mathbf{n} = \frac{-R\sin\theta\mathbf{i} + R\cos\theta\mathbf{j} + H/\pi\mathbf{k}}{\left[R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + (H/\pi)^2\right]^{1/2}}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\left[1 + (H/\pi R)^2\right]^{1/2}}}_{K}[-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} + (H/\pi R)\mathbf{k}]$$

Uma vez que o denominador depende apenas da geometria, será designado por K.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

O eixo de flexão forte está em um plano horizontal, e seu vetor unitário pode ser determinado a partir de Eq. 32.57:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{32.63}$$

$$= \frac{1}{K}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{32.64}$$

E a magnitude absoluta deste vetor $|\mathbf{k}\times\mathbf{n}| = \frac{1}{K}$ E assim

$$\mathbf{s} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \tag{32.65}$$

O vetor unitário ao longo do eixo fraco é determinado a partir de Eq. 32.58

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}\times\mathbf{n} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{K}\left(\frac{H}{\pi R}\sin\theta\mathbf{i} - \frac{H}{\pi R}\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Com a definição de geometria completada, examinamos as equações de equilíbrio. Eq. 32.59 e.. 32.60.

$$\Sigma F = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$
$$\Sigma M_b = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}\times\mathbf{P}$$

Onde

$$\mathbf{L} = (R - R\cos\theta)\mathbf{i} + (0 - R\sin\theta)\mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi}H\right)\mathbf{k} \tag{32.66}$$

e..

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\times\mathbf{P} = R\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (1-\cos\theta) & -\sin\theta & -\frac{\theta}{\pi}\frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix}$$

$$= PR[-\sin\theta\mathbf{i} - (1-\cos\theta)\mathbf{j}]$$

e..

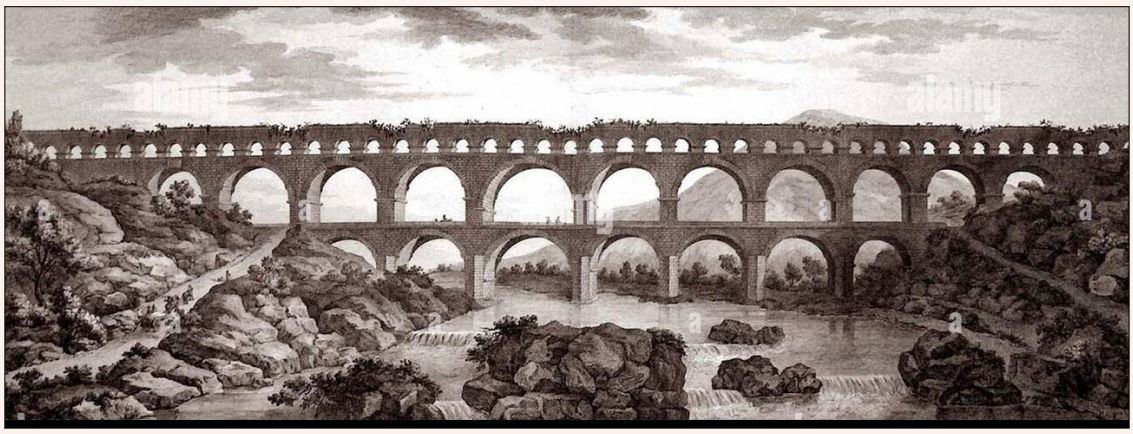
$$\mathbf{M} = PR[\sin\theta\mathbf{i} + (1-\cos\theta)\mathbf{j}] \tag{32.67}$$

Os componentes da força $\mathbf{F} = -P\mathbf{k}$ e o momento $\mathbf{M}$ são obtidos por produtos de pontos apropriados com os vetores unitários

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{K}P\frac{H}{\pi R}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = 0$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{K}P$$
$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} = -\frac{PR}{K}(1-\cos\theta)$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s} = PR\sin\theta$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w} = \frac{PH}{\pi K}(1-\cos\theta)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Pont du Gard, 1o século d.C., Nîmes, França.

Exemplo de construção do arco onde o arranjo preciso dos vousoirs transfere eficientemente cargas, garantindo estabilidade e distribuição de impulso através de sua estrutura multicamada.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 33

Pratos

Abstract

Este capítulo muda o foco deste livro de elementos unidimensionais para placas e deriva suas equações diferenciais correspondentes. Ao me concentrar na teoria, pretendo ajudar o leitor a apreciar tanto a complexidade geométrica das placas quanto a beleza e simplicidade de suas equações diferenciais governantes. Este capítulo é leitura essencial para quem procura modelar placas usando o método dos elementos finitos, como explica a interação do complexo esforços internos envolvido.

33.1 Teoria das placas grossas: REISSNER-Mindlin 1253
33.1.1 Relações cinemáticas 1253
33.1.2 Relações constitutivas 1255
33.1.3 Equilíbrio 1256
33.2 Teoria da placa fina: Kirchhoff . . . 1257
33.2.1 Relações fundamentais . . . 1258
33.2.2 Equação diferencial 1259
33.2.3 Tensões 1260
33.2.4 Placas circulares 1263
33.2.5 Formulação variada 1268
33.3 Resumo 1269

Para o contexto histórico, consultar §10.3.2.5

A seção seguinte é reproduzida de Pilkey e Wunderlich, 1994 Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods. A assistência de Georg, R., 2014 é reconhecido com gratidão.

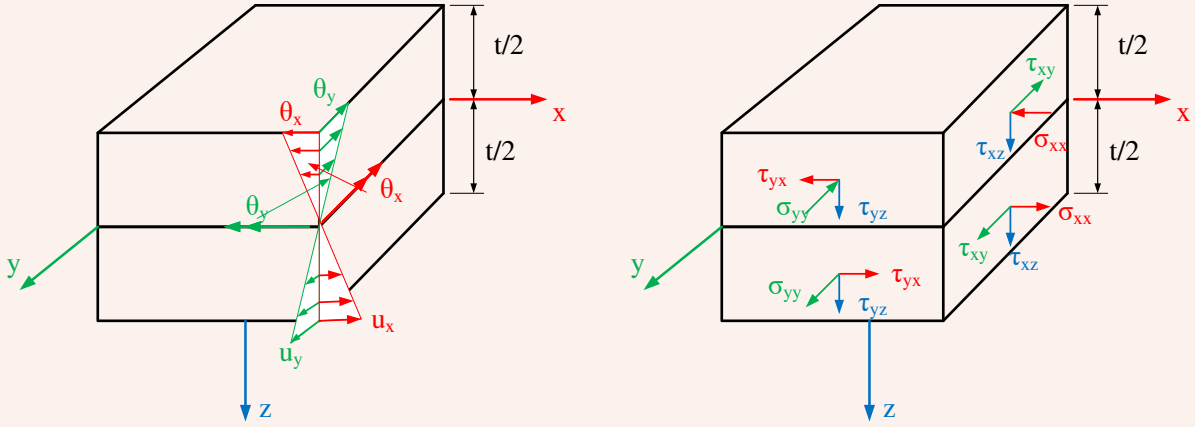
CÓPIA PARA REVISÃO

33.1 Teoria das placas grossas: REISSNER-Mindlin

1 Começamos com a solução geral de uma placa grossa na qual cisalhamento deformação estão presentes.

33.1.1 Relações cinemáticas

2 Da Fig. 33.1a Temos cinco deslocamentos u, v, w, θ_{xx} e.. θ_{yy}.. No entanto, dois dos três deslocamentos, u, v pode ser expressa em termos de θ_{xx} e.. θ_{yy} que são as rotações da superfície média da placa, com o terceiro deslocamento sendo o transversal w.



(a) Deslocamentos

(b) Tensões

Figura 33.1: Deslocamentos e tensões em uma placa

3 Usaremos uma notação compatível com a tradicionalmente adotada para a flexão de placas, em vez de uma notação associada às direções das coordenadas empregadas em elementos finitos. Como nos concentramos em placas delgadas, admite-se que a superfície média permaneça indeformada e que as seções planas permaneçam planas. Com base nessa hipótese, temos

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ w \end{array} \right\} \tag{33.1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4 No entanto, da mecânica do material, sabemos a relação $\varepsilon = Lu$ ou

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

5 Como w corresponde à deflexão transversal da superfície média e não varia com z, então $\varepsilon_{zz} = 0$. Substituindo a Eq. 33.1, obtemos

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\theta_{xx,x} \\ z\theta_{yy,y} \\ 0 \\ \hline z(\theta_{xx,y} + \theta_{yy,x}) \\ \hline (\theta_{xx} + w_{,x}) \\ (\theta_{yy} + w_{,y}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\kappa_{xx} \\ z\kappa_{yy} \\ 0 \\ \hline 2z\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} \tag{33.2}$$

Note que esta equação assume que O deslocamento w é pequeno em comparação com a espessura da placa, e a rotação é pequena. Porque a rotação é pequena, seu quadrado é insignificante com respeito à unidade, e consequentemente a curvatura

$$\kappa = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{(1+\theta^2)^{3/2}} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

é igual à taxa de variação da rotação.

6 Assim, o A relação cinemática para o transverso deslocamento de uma placa é

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ \hline w \end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

33.1.2 Relações constitutivas

7 Para o contínuo tridimensional, a relação deformação-tensão é

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \hline \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\} = \frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & \mathbf{0} & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \hline \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}$$

8 No entanto, de Eq. 33.2, $\varepsilon_{zz} = 0$. Portanto, podemos negligenciar σ_{zz} que é muito menor do que o outro tensões. Invertendo a equação anterior, produz

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\\ \hline \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & & \\ \nu & 1 & 0 & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & \\ \hline & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{33.3}$$

Note que o módulo é $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

9 Agora procuramos escrever os momentos em termos das curvaturas, Fig. 33.2.

10 Apresentando o tensões de Eq. 33.3 Eq. 33.5, e usando Eq. 33.2 Nós derivamos o primeiro mandato

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(z\kappa_{xx} + \nu z\kappa_{yy}) z \mathrm{d}z \\ &= \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \mathrm{d}z = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \end{aligned}$$

Seguindo um procedimento semelhante para os outros dois termos, obtemos a seguinte relação momento–curvatura

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{33.4}$$

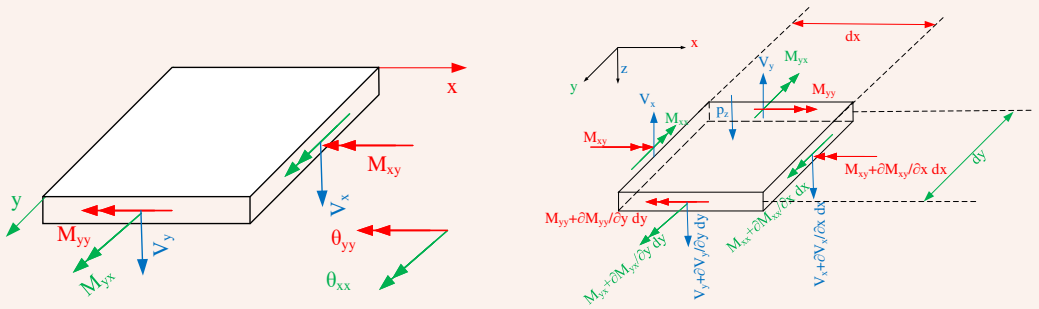
O $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ O termo é referido como *Rigidez da flexão* e é análogo à flexão rigidez EI de uma viga (se a placa tem largura unitária, e $\nu = 0$, então $EI = Et^3/12$).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

33.1.3 Equilíbrio

11 Os resultados positivos tensão são mostrados na figura. 33.2a, enquanto o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal é mostrado na figura. 33.4



(a) Momentos positivos e rotações

(b) Diagrama de corpo livre de um prato fino

Figura 33.2: Esforços internos

12 Os resultados, por unidade de largura, são dados por

$$
\begin{aligned}
\text{Membrane Force} \quad \mathbf{N} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma \mathrm{d}z \quad \begin{cases} N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx}\mathrm{d}z \\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy}\mathrm{d}z \\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy}\mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{Bending Moments} \quad \mathbf{M} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z \mathrm{d}z \quad \begin{cases} M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z\mathrm{d}z \\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z\mathrm{d}z \\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z\mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{Transverse Shear Forces} \quad \mathbf{V} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau \mathrm{d}z \quad \begin{cases} V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz}\mathrm{d}z \\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz}\mathrm{d}z \end{cases}
\end{aligned}
\tag{33.5}
$$

13 Note que na teoria da placa, ignoramos o efeito do *forças de membrana*.. Aqueles por sua vez serão contabilizados em cascas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

14 A equação de equilíbrio é derivada considerando um elemento infinitesimal $tdxdy$ submetido a uma carga transversal aplicada p_z.. Teríamos que considerar três equações de equilíbrio, Fig. 33.4:

Sumário das Forças na z Direção

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial V_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + pz = 0$$

Resumo de Momentos sobre o x eixo

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - V_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - V_y = 0$$

Resumo de Momentos sobre o y eixo

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - V_x = 0$$

15 Desde então $M_{xy} = M_{yx}$, essas equações podem ser expressas na forma de matriz como

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ \hline V_x \\ V_y \end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p_z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{33.6}$$

Note que a matriz esquerda corresponde a.. L^T Onde 1 O termo foi substituído por -1

33.2 Teoria da placa fina: Kirchhoff

16 Na seção seguinte, as equações derivadas de nossas relações fundamentais serão aplicadas à teoria da placa *Kirchhoff*.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

17 Esta teoria ignora deformações transversais cisalhamento (assim ângulos retos no seção transversal são preservados). Esta formulação é análoga à teoria convencional Euler-Bernoulli viga[1].

33.2.0.1 Ex 33.1: Idealização de chapa fina contra grossa

Duas placas quadradas de concreto têm o mesmo comprimento lateral $a = 1.0$ M, Módulo de Young $E = 25$ GPa, e Coeficiente de Poisson $\nu = 0.20$.. O primeiro prato tem espessura $t = 20$ Enquanto o segundo tem espessura $t = 150$ mm. Determine se um modelo de placa fina Kirchhoff será adequado em cada caso.

Um primeiro diagnóstico útil é a relação entre o tamanho e a espessura

$$\lambda = \frac{a}{t}.$$

Para o primeiro prato,

$$\lambda_1 = \frac{1.0}{0.020} = 50.$$

Para o segundo prato,

$$\lambda_2 = \frac{1.0}{0.150} = 6.67.$$

Assim,

$$\lambda_1 = 50, \qquad \boxed{\lambda_2 = 6.67}.$$

A primeira placa é esbelta, e a suposição de Kirchhoff de que a deformação transversal cisalhamento é insignificante é geralmente apropriada. A segunda placa é relativamente grossa; Deformação transversal cisalhamento pode contribuir significativamente para a deflexão total, e um modelo de placa Reissner-Mindlin é mais apropriado.

Este exemplo não substitui um estudo detalhado de convergência ou validação, mas mostra porque a distinção entre Kirchhoff e Reissner-Mindlin não é meramente formal. É controlada em grande parte pela esbelta geométrica da placa.

33.2.1 Relações fundamentais

Relações cinemáticas : Como as deformações de cisalhamento são desprezadas, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ e, portanto, as duas últimas relações da Eq. 33.2 reduzem-se a

$$\theta_{xx} = -w_{,x} \quad \text{e} \quad \theta_{yy} = -w_{,y}$$

e as três primeiras deformações tornam-se

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{33.7}$$

[1] Cisalhamento deformação são contabilizados no *Mindlin* formulação.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

ou

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} w \end{array}\right\}}_{\mathbf{u}} \tag{33.8}$$

18 O último termo na equação anterior corresponde ao *Torça* com respeito ao x e.. y eixos da superfície média.

Relação constitutiva : A relação constitutiva da Eq. 33.4 continua válida

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{33.9}$$

Equilíbrio :. A equação de equilíbrio, expressa por Eq. 33.6 Também é válido. Se substituíssemos a segunda e terceira relações na primeira, obteríamos a seguinte relação de equilíbrio em termos dos momentos

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p_z = 0 \tag{33.10}$$

(Observe a semelhança com as equações correspondentes para a flexão de vigas, $\frac{d^2M}{\mathrm{d}x^2} - V_x = 0$.)

33.2.2 Equação diferencial

18 Se combinarmos as equações cinemáticas e constitutivas, 33.8 e.. 33.9Nós obtemos

$$\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{c}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} w \end{array}\right\} \tag{33.11}$$

19 Finalmente, nós substituímos a equação de equilíbrio 33.10, para o anterior,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

ou

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Observe a semelhança com a equação correspondente para vigas

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = pz \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{Pz}{EI}$$

33.2.3 Tensões

20 Combinando a relação tensão-deformação de Eq. 33.3, com Eq. 33.7, e 33.11, o tensões pode ser expresso em termos de Os momentos

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{xx}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{t^3}{12}} z$$

De novo nós notamos o analogia com a expressão flexural tensão em vigas $\sigma = \frac{My}{I}$.. Usando a equação de equilíbrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Integrando a primeira equação, obtemos

$$\tau_{xz} = -\int_{t/2}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z = \int_{z}^{t/2} \frac{12z}{t^3} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z$$
$$= \frac{12}{t^3} \int_{z}^{t/2} z V_x \mathrm{d}z$$

21 Finalmente,

$$\tau_{xz} = \frac{3V_x}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad \text{e..} \quad \tau_{yz} = \frac{3V_y}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

22 Assim, a distribuição cisalhamento tensão através da espessura da placa é parabólica (embora eles tendem a ser muito pequenos em comparação com τ_{xy}E o pico ocorre na superfície média$z = 0$) onde

$$\tau_{xz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_x}{t} \quad \text{e..} \quad \tau_{yz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{t}$$

23 Notamos que a flexão tensões varia linearmente da superfície média; cisalhamento tensões τ_{xy} produzido por flexão também variam linearmente da superfície média; cisalhamento tensões τ_{yz} e.. τxz estão presentes e necessários para o equilíbrio, mas seus correspondentes deformações são considerados insignificantes; σ_{zz} varia cubicamente, Fig. 33.3.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

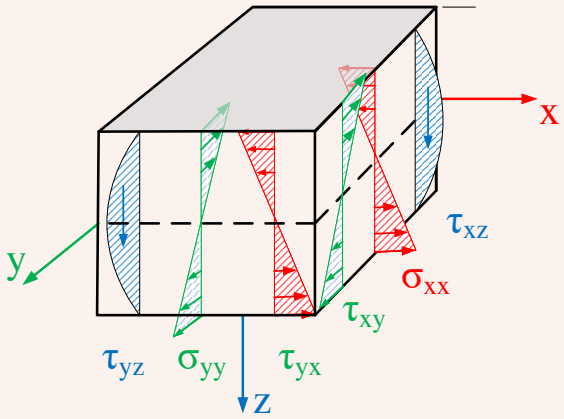


Figura 33.3: Tensão distribuição

33.2.3.1 Ex 33.2: Recuperando tensões dos resultados do momento da placa

Em um ponto em uma placa, o momento de flexão e torção resultantes são

$$M_{xx} = 1.20 \text{ kN m/m}, \qquad M_{yy} = 0.80 \text{ kN m/m}, \qquad M_{xy} = 0.30 \text{ kN m/m}.$$

A espessura da placa é $t = 25$ mm. Estimar a fibra extrema tensões associada com esses resultados.

Para uma distribuição linear tensão através da espessura, a fibra extrema normal tensões associada com M_{xx} e.. M_{yy} são

$$\sigma_{xx} = \frac{6M_{xx}}{t^2}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{6M_{yy}}{t^2}.$$

Da mesma forma, o momento de torção resultante dá a correspondente fibra extrema cisalhamento tensão

$$\tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{t^2}.$$

Usando $t = 0.025$ m,

$$\sigma_{xx} = \frac{6(1200)}{(0.025)^2} = 11.52 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 11.5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{6(800)}{(0.025)^2} = 7.68 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 7.68 \text{ MPa},$$

e..

$$\tau_{xy} = \frac{6(300)}{(0.025)^2} = 2.88 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 2.88 \text{ MPa}.$$

Portanto,

$$\sigma_{xx} = 11.5 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{yy} = 7.68 \text{ MPa}, \qquad \tau_{xy} = 2.88 \text{ MPa}.$$

Este exemplo enfatiza que a solução da placa dá tensão resultados. Os reais tensões são recuperados apenas após usar a suposta distribuição de espessura.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

33.2.3.2 Ex 33.3: Placa quadrada sob pressão uniforme

Uma placa de aço quadrado tem comprimento lateral $a = 2.0$ M e espessura $t = 20$ mm. A placa é submetida a uma pressão transversal uniforme $q = 5$ KPa. Vamos

$$E = 200 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.30.$$

Estimar a deflexão máxima e a ordem de magnitude da flexão máxima tensão.

Primeiro, a rigidez da placa é

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(200\times 10^9)(0.020)^3}{12(1-0.30^2)} = 1.465\times 10^5 \text{ N m}.$$

Para uma placa quadrada biapoiado sob uma carga uniforme, um coeficiente tabelado padrão (para $\nu = 0.30$) dá

$$w_{\max} = 0.00406\frac{qa^4}{K}.$$

Com $q = 5000$ N/m^2 e.. $a = 2.0$ m,

$$w_{\max} = 0.00406\frac{(5000)(2.0)^4}{1.465\times 10^5} = 2.22\times 10^{-3} \text{ m}.$$

Assim,

$$w_{\max} = 2.22 \text{ mm}.$$

Como uma estimativa do momento máximo por unidade de largura, use o coeficiente tabulado correspondente (para $\nu = 0.30$)

$$M_{\max} \simeq 0.0479 qa^2.$$

Por isso,

$$M_{\max} \simeq 0.0479(5000)(2.0)^2 = 958 \text{ N m/m}.$$

A flexão de fibra extrema correspondente é aproximadamente

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{6M_{\max}}{t^2} = \frac{6(958)}{(0.020)^2} = 14.4\times 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Portanto,

$$\sigma_{\max} \simeq 14.4 \text{ MPa}.$$

O exemplo ilustra as duas principais saídas de uma solução de placa: Um campo, representado aqui por $w_{\max}$, e resultados de momento, a partir do qual dobra tensões pode ser recuperado.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

33.2.3.3 Ex 33.4: Sensibilidade de deflexão da placa para espessura

Considere novamente a placa quadrada de comprimento lateral $a = 2.0$ M submetido a uma pressão uniforme $q = 5$ KPa. Suponha que a espessura seja aumentada de $t_1 = 20$ mm para $t_2 = 30$ Enquanto o material e carga permanecem inalterados. Estimar a redução na deflexão máxima.

Para uma fina placa isotrópica,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Assim, se E e.. ν estão inalterados,

$$K \propto t^3.$$

Porque a deflexão varia inversamente com a rigidez da placa,

$$w \propto \frac{1}{K} \propto \frac{1}{t^3}.$$

Portanto,

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{30}\right)^3 = 0.296.$$

Se a placa de 20 mm tiver deflexão máxima

$$w_1 = 2.22 \text{ mm},$$

Então a placa de 30 mm tem deflexão máxima

$$w_2 = 0.296(2.22) = 0.657 \text{ mm}.$$

Assim,

$$w_2 \simeq 0.66 \text{ mm}.$$

Um aumento de 50% na espessura reduziu a deflexão para cerca de 30% do seu valor anterior. Esta é uma das consequências práticas mais importantes da dependência cúbica de K "Continuando"t.

33.2.4 Placas circulares

24 Um caso especial particularmente importante da teoria da placa de Kirchhoff é o *Placa circular*.. Placas circulares ocorrem em tampas de tanque, diafragmas, lajes em torno de aberturas circular, fundações, tampas do bueiro, e componentes do vaso de pressão. Eles também são valiosos pedagogicamente: sob carga axissimétrica e condições de contorno a equação biharmônica bidimensional derivada em Eq. 33.10 - Não, não *vulgar* equação diferencial na coordenada radial única, para que a solução possa ser obtida em forma fechada.

25 Considere uma placa circular sólida de raio a e espessura constante t.. Nós adotamos coordenadas polares, com r A coordenada radial e θ O circunferencial. Para um problema axissimétrico, a deflexão transversal depende r Sozinho,

$$w = w(r),$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

E, já que nada varia com θ, todos os derivados com respeito a θ Desapareça. Porque.. w é agora uma função de apenas uma variável, usamos derivadas totais em r.. A rigidez da flexão está inalterada do caso retangular,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

26 **Cinemática.** As duas curvaturas não-zero de uma placa Kirchhoff axissimétrica são as curvaturas radial e circunferencial (hoop)

$$\kappa_{rr} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}, \qquad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

Estes são os pares polares de κ_{xx} e.. κ_{yy} Em Eq. 33.8E eles carregam o mesmo sinal negativo. A curvatura radial mede a flexão de uma fibra radial, exatamente como $-\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}x^2$ faz em uma dimensão. A curvatura do aro é puramente geométrica: até mesmo uma deflexão cônica com $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}r^2 = 0$ estende as fibras circunferenciais porque seu raio muda, e o termo $-\frac{1}{r}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}r$ Captura precisamente esse efeito. A curvatura de torção desaparece,

$$\kappa_{r\theta} = 0,$$

Porque não há variação com relação a θ.

27 **Relação constitutiva.** Especializando-se no momento... Lei Curvatura da Eq. 33.9 para as curvaturas polares dá os resultados radiais e aro momento fletor por unidade de comprimento da borda,

$$M_{rr} = K(\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\theta\theta}), \qquad M_{\theta\theta} = K(\kappa_{\theta\theta} + \nu\kappa_{rr}),$$

ou, em termos de desvio,

$$M_{rr} = -K\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right], \qquad M_{\theta\theta} = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right]. \tag{33.12}$$

Aqui M_{rr} é o radial momento fletor e $M_{\theta\theta}$ o circunferencial, ou aro, momento; Eles são os homólogos de coordenadas polares de M_{xx} e.. M_{yy} (O resultado por unidade-largura de §33.1.3). Note que ambos os momentos são geralmente não zero mesmo que w Depende apenas de.. rPorque ambas as curvaturas estão presentes.

28 **Equilíbrio.** Duas declarações de equilíbrio são necessárias. Equilíbrio momentâneo de um elemento anular limitado pelos raios r e.. $r + \mathrm{d}r$ e os raios θ e.. $\theta + \mathrm{d}\theta$ Relaciona o resultado transversal radial cisalhamento V_r Para os momentos, Fig. 33.4

$$V_r = \frac{\mathrm{d}M_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r}. \tag{33.13}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

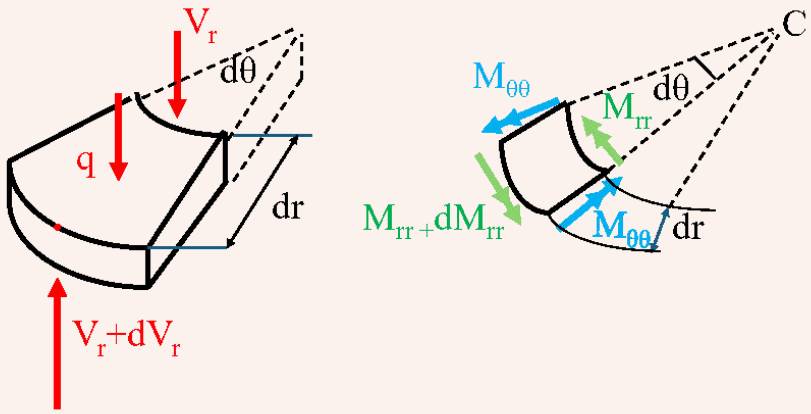


Figura 33.4: Equilíbrio de uma placa circular elemento infinitesimal

O primeiro termo é o análogo direto de $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$ na teoria viga. O segundo mandato, $(M_{rr} - M_{\theta\theta})/r$, não tem uma contraparte unidimensional: surge porque as duas faces radiais do elemento não são paralelas, mas convergem para o centro $M_{\theta\theta}$ Agindo sobre eles tem um componente líquido no balanço do momento radial. Substituindo o Eq. 33.12 Eq. 33.13 e simplificando dá a forma compacta

$$V_r = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right] = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\nabla^2 w\right).$$

Equilíbrio vertical do mesmo elemento requer a rede transversal cisalhamento para equilibrar a pressão aplicada. O cisalhamento atua no arco interior do comprimento $r\,\mathrm{d}\theta$ e o arco exterior de comprimento $(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$; A diferença deles é.. $\mathrm{d}(rV_r)\,\mathrm{d}\theta$Enquanto a carga contribui $p_z\, r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$.. Dividindo por $r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rV_r\right) + p_z = 0.$$

29 **Equação dominante.** Combinando EQs. 33.2.4 e.. 33.2.4 produz a equação da placa de Kirchhoff

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right]\right\} = \frac{p_z}{K},$$

que é simplesmente a equação biharmônica $\nabla^4 w = p_z/K$ De Eq. 33.10 escrito para um campo axissimétrico, onde

$$\nabla^2 w = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

30 **Condições de contorno.** No centro de uma placa sólida, regularidade fornece duas condições,

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0, \qquad V_r(0) = 0.$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

O primeiro é a simetria de uma deflexão axissimétrica; O segundo afirma que nenhuma força concentrada é aplicada no centro. Na borda $r = a$ As condições idealizadas espelham as de uma viga:

Fio dental: deslocamento e rotação ambas impedidas,

$$w(a) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} = 0.$$

Biapoiado borda: deslocamento impedido, livre de rotação,

$$w(a) = 0, \qquad M_{rr}(a) = 0.$$

Borda livre: Nem momento, nem transversal cisalhamento,

$$M_{rr}(a) = 0, \qquad V_r(a) = 0.$$

31 **Pressão uniforme.** Para o caso importante de uma pressão transversal uniforme $p_z = q = \text{const.}$, Eq. 33.2.4 pode ser integrado diretamente. A solução geral é a soma da solução homogênea de $\nabla^4 w = 0$ e uma solução específica; para uma carga uniforme,

$$w(r) = \underbrace{C_1 + C_2 r^2}_{\text{regular}} + \underbrace{C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r}_{=0 \text{ by regularity at } r=0} + \frac{q\, r^4}{64K}.$$

Os dois termos logarítmicos produzem deflexão, inclinação ou cisalhamento em $r = 0$ e uma reação central concentrada; para um *Sólido* Então, eles são descartados, deixando $w = C_1 + C_2 r^2 + q r^4/64K.$. (Para uma placa anular, com um buraco no centro, estes termos são retidos e fixados pelas condições da borda interna.) As duas constantes sobreviventes são determinadas pelas condições das bordas.

32 *Prato apertado.* Impondo $w'(a) = 0$ "Continuando"$w' = 2C_2 r + q r^3/16K$ dá $C_2 = -q a^2/32K$, e então $w(a) = 0$ dá $C_1 = q a^4/64K.$. Por isso

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left(a^2 - r^2\right)^2,$$

e a deflexão máxima ocorre no centro,

$$w_{\max} = w(0) = \frac{q a^4}{64K}.$$

Os correspondentes resultados do momento seguem da Eq. 33.12,

$$M_{rr} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right], \qquad M_{\theta\theta} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right].$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

No centro, ambos os momentos são iguais $q(1+\nu)a^2/16$, enquanto na borda presa

$$M_{rr}(a) = -\frac{qa^2}{8}.$$

A mudança de sinal reflete a transição da queda perto do meio da placa para a inclinação no limite contido, onde ocorre o maior momento.

33 *Placa.* Aplicando $M_{rr}(a) = 0$ e.. $w(a) = 0$ para a mesma solução regular dá

$$C_2 = -\frac{qa^2}{32K}\frac{3+\nu}{1+\nu}, \qquad C_1 = \frac{qa^4}{64K}\frac{5+\nu}{1+\nu},$$

De modo que

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left[r^4 - 2a^2\frac{3+\nu}{1+\nu}r^2 + a^4\frac{5+\nu}{1+\nu}\right],$$

e..

$$w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64K}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right).$$

Essa deflexão é maior que o valor do Eq. 33.2.4 pelo fator $(5+\nu)/(1+\nu)$ -Quatro para o típico ν Como esperado, já que a borda biapoiado não fornece nenhuma restrição rotacional.

34 Estes resultados de forma fechada são úteis como *benchmarks* para verificar soluções numéricas, incluindo as formulações de placas elemento finito discutidas mais tarde. Eles também aguçam a interpretação física dos dois principais resultados do momento: em uma placa retangular M_{xx} e.. M_{yy} descrever dobra sobre os eixos cartesianos, enquanto que em uma placa circular axissimétrica as quantidades análogas são o momento radial M_{rr} E o momento da cesta $M_{\theta\theta}$, ambos estão presentes mesmo quando a deflexão depende de r Sozinho.

33.2.4.1 Ex 33.5: Placa circular apertada sob pressão uniforme

Uma placa circular de alumínio tem raio $a = 0.75$ M e espessura $t = 12$ mm. Está preso ao longo de sua borda e submetido a uma pressão transversal uniforme $q = 2$ KPa. Vamos

$$E = 70 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.33.$$

Estimar a deflexão máxima.

A rigidez da flexão, do Eq. 33.2.4, é

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(70\times10^9)(0.012)^3}{12(1-0.33^2)} = 1.131\times10^4 \text{ N m}.$$

Para uma placa circular pinçada sob pressão uniforme, a deflexão central é dada pela Eq. 33.2.4,

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64K}.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Com $q = 2000$ N/m^2 e.. $a = 0.75$ m,

$$w_{\max} = \frac{(2000)(0.75)^4}{64(1.131 \times 10^4)} = 8.74 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Assim,

$$w_{\max} = 0.874 \text{ mm}.$$

Este pequeno valor é consistente com a suposição de placa fina (pequena-deflexão), já que a deflexão está bem abaixo da espessura da placa,

$$\frac{w_{\max}}{t} = \frac{0.874}{12} = 0.073.$$

33.2.5 Formulação variada

35 Antes da discretização elemento finito, procuramos obter das relações anteriormente derivadas uma formulação variacional do problema.

36 O trabalho virtual interno é dado por

$$\delta Wi = -\int_A \delta\varepsilon^T \sigma \mathrm{d}A = -\int_A \delta\kappa^T M \mathrm{d}A$$

Onde $M = D\kappa$ é obtido de Eq. 33.9, e $\kappa = Lu$ é obtido da Eq. 33.8.

37 Contando com o exterior trabalho virtual, Nós conseguimos

$$\delta W = \delta Wi + \delta We = \underbrace{-\int_A \delta u^T (L^T D L) u \mathrm{d}A}_{} + \underbrace{\int_A \delta u^T p_v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} u^T p \mathrm{d}\Gamma}_{} = 0$$

Onde p_v contém o carregamento transversal aplicado p_z, e p A borda de carga p_s.

38 Substituindo os termos $L^T D L$ (Eq. 33.8), obtemos

$$K^e = L^T D L = \lfloor\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\ \rfloor \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= K \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]$$

39 Finalmente, notando que $u = w$, o trabalho virtual torna-se

$$\delta We = -K\int_A \delta w \left(Lwpz\right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta W ps \mathrm{d}\Gamma = 0$$

Onde $K = Et^3/12(1-\nu^2)$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

33.3 Resumo

Mesa 33.1 resume algumas das equações principais que regem a flexão da placa, e as contrasta com as elasticidades equivalentes. Agora que revisamos completamente a derivação da viga e da placa submetida à flexão, podemos aumentar a dificuldade um passo mais longe e começar a discussão de fino cascas.



Neue Nationalgalerie, Ludwig Mies van der Rohe, 1968, Berlim, Alemanha

Uma demonstração exemplar de estruturas de placas, onde o grande telhado plano laje atua como uma placa estrutural, abrangendo um vasto interior aberto com suporte mínimo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 33.1: Comparação das equações regentes na elasticidade e flexão da placa (Pilkey e Wunderlich, 1994)

Elasticidade	**Teoria da Placa** (Kirchhoff)
Kinematic	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \hline \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \hline \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}w\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$
	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_f} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\theta}}; \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_s} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}w\\ \theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$
Equilíbrio	
$\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underbrace{\left\{\begin{array}{c}b_x\\ b_y\\ b_z\end{array}\right\}}_{\rho\mathbf{b}} = 0$	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$
	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc\|cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T=\lfloor\ \mathbf{L}_f^T\ \ \mathbf{L}_s^T\ \rfloor} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$
Constitutivo	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}1 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & 1 & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & \beta & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = K \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c\|c}K\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right] & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \zeta\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \beta = \frac{\nu}{1-\nu}; \gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$	$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad \zeta = \frac{5}{6}\mu t$
Virtual Work	
$\delta\Pi = \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma = 0$	$\delta W = -\int_A \delta w\left(KL w p_z\right)\mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s\,\mathrm{d}\Gamma = 0$
	$\delta W = -K\left[\int_A \delta\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{K}_f^e\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}A + \frac{6k_s(1-\nu)}{t^2}\int_A \delta\mathbf{u}^T\mathbf{K}_s^e\mathbf{u}\,\mathrm{d}A\right] + \int_A \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}_V\,\mathrm{d}A + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}\,\mathrm{d}\Gamma = 0$

Victor E. Saouma

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 34

Cascas

Abstract

Este capítulo está dividido em duas seções principais. O primeiro começa com a derivação das equações de equilíbrio e compatibilidade para um elemento casca arbitrário através da geometria diferencial. Então é especializada nessas equações para raso cascas e finalmente traz a simplificação da teoria das membranas.

Estas equações são posteriormente aplicadas a um cilíndrico circular casca quer biapoiado no diafragma final, ou suportada pela borda vigas.

Infelizmente, a análise é hoje em dia muito raramente (se alguma vez) ensinada em programas de pós-graduação. Em vez disso, os estudantes estão expostos a um curso condensado de placas e Cascas, e muito provavelmente com uma cobertura pesada do uso do método dos elementos finitos.

Eu diria que um engenheiro estrutural prestes a projetar um casca (com o computador sempre presente), deve primeiro familiarizar-se com a mecânica subjacente para desenvolver compreensão suficiente essencial para interpretar adequadamente os resultados do elemento finito.

Finalmente, entre todos os capítulos deste livro, este é possivelmente o mais Elegante *uma delas combina geometria diferencial, cálculo, mecânica e matemática avançada (semi) resultando na compreensão de estruturas verdadeiramente impressionantes como as de Nervi e Torroja (capítulo 15).*

34.1 Teoria geral 1272
34.1.1 Definições 1272
34.1.2 Suposições 1274
34.1.3 Forçar relações deslocamento 1276
34.1.4 Simplificações 1293
34.2 Análise de um único barril (circular cilíndrico casca) 1302
34.2.1 Introdução 1302
34.2.2 Teoria da membrana 1304
34.2.3 Teoria desleixada 1312
34.3 Estaticamente indeterminado cascas 1327
34.3.1 Borda viga 1328
34.3.2 Borda pré-stressada viga . . 1331
34.3.3 MATLAB® código e exemplo numérico 1344

CÓPIA PARA REVISÃO

A seção seguinte é reproduzida de *Thin Shell Concrete Structures*[a] por Billington, 1965, e minhas notas de palestra do Prof. Curso de Richard Gallagher em Cornell. A assistência de Georg, R., 2014 é reconhecido com gratidão

[a] Considerando que o livro não introduz nenhum novo método analítico, é uma cobertura muito elegante e legível de métodos iniciados por Love, 1927 e posteriormente estendida pela "Escola Alemã" (melhor resumido por Flügge, 1973) enquanto fornece extensos esclarecimentos, figuras e adaptação notação para o "moderno". Cobertura por Timoshenko, Woinowsky-Krieger et al., 1959 é enganadoramente limitado.

34.1 Teoria geral

34.1.1 Definições

1 Um fino casca é uma superfície curva ou placa cuja espessura h é pequena em comparação com as dimensões e raios de curvatura, r_x e.. r_y, da estrutura descascada.

2 A superfície que bisecta a espessura casca é chamada de *meio superfície*, e especificando a forma desta superfície e a espessura em a cada ponto, definimos completamente a geometria do casca.

3 O *tensão resultados* e.. *tensão casais* são integrados sobre a espessura casca e são definidos como as forças totais e os momentos que atuam por unidade de comprimento na superfície média (a face criada pela bissecagem da espessura fina casca).

4 Tensões são mostrados na figura. 34.1a, e tensão resultados e casais em Fig. 34.1b e mais particularmente a borda ao longo do y Eixo.

5 Do equilíbrio que temos

$$\underbrace{N_x r_y d\alpha_y}_{\text{Força resultante no eixo neutro}} = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x (r_y - z) d\alpha_y dz}_{\text{Força interna}} \tag{34.1}$$

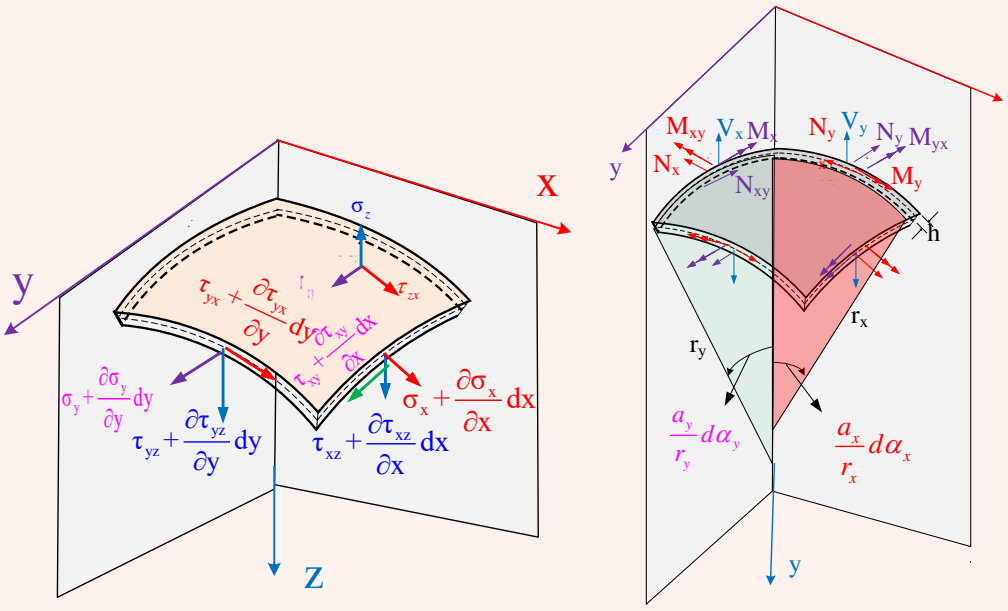
6 Dividindo ambos os lados por $r_y d\alpha_y$, obtemos a força de membrana atuando ao longo do x eixo

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \tag{34.2}$$

7 Fig. 34.2 mostra a deformação do seu elemento, e podemos visualizar os termos a_x e.. a_y como raios de curvatura, e $d\alpha_x$, e $d\alpha_y$ como ângulos pequenos, mas estritamente falando,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Interno tensões (b) Geometria e Esforços internos

Figura 34.1: Elemento diferencial casca, geometria, tensões, e seus resultados

estes últimos termos são os parâmetros das duas famílias de curvas que definem os lados elementares e a_x, e a_y são *coeficientes* que convertem os parâmetros em comprimentos.

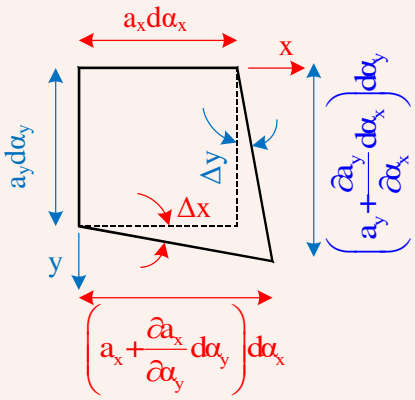


Figura 34.2: Cinemática de elemento diferencial

8 Tensão resultados e tensão casais, Fig. 34.1a, são dados por

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Membrane Force

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}\left(1-\frac{z}{r}\right)dz \qquad \begin{cases} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \end{cases}$$

Bending Moments

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z\left(1-\frac{z}{r}\right)dz \qquad \begin{cases} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \\ M_{xy} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ M_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \end{cases} \tag{34.3}$$

Transverse Shear Forces

$$\mathbf{V} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau}\left(1-\frac{z}{r}\right)dz \qquad \begin{cases} \cancelto{0}{V_x} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz}\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ \cancelto{0}{V_y} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz}\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \end{cases}$$

9 Os vetores de tensão resultantes e tensão casais são por sua vez mostrados na Fig. 34.3

10 Derivação dos resultados tensão e casais tensão seguem a mesma formulação da força de membrana N_{xx} De Eq. 34.2.

34.1.2 Suposições

11 Para efeitos de simplificação, uma série de suposições são consideradas:

Fino casca: Se os termos z/r_x e.. z/r_y são negligenciados quando eles aparecer com unidade, e com $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ Então..

$$N_{xy} = N_{yx}$$
$$M_{xy} = -M_{yx}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

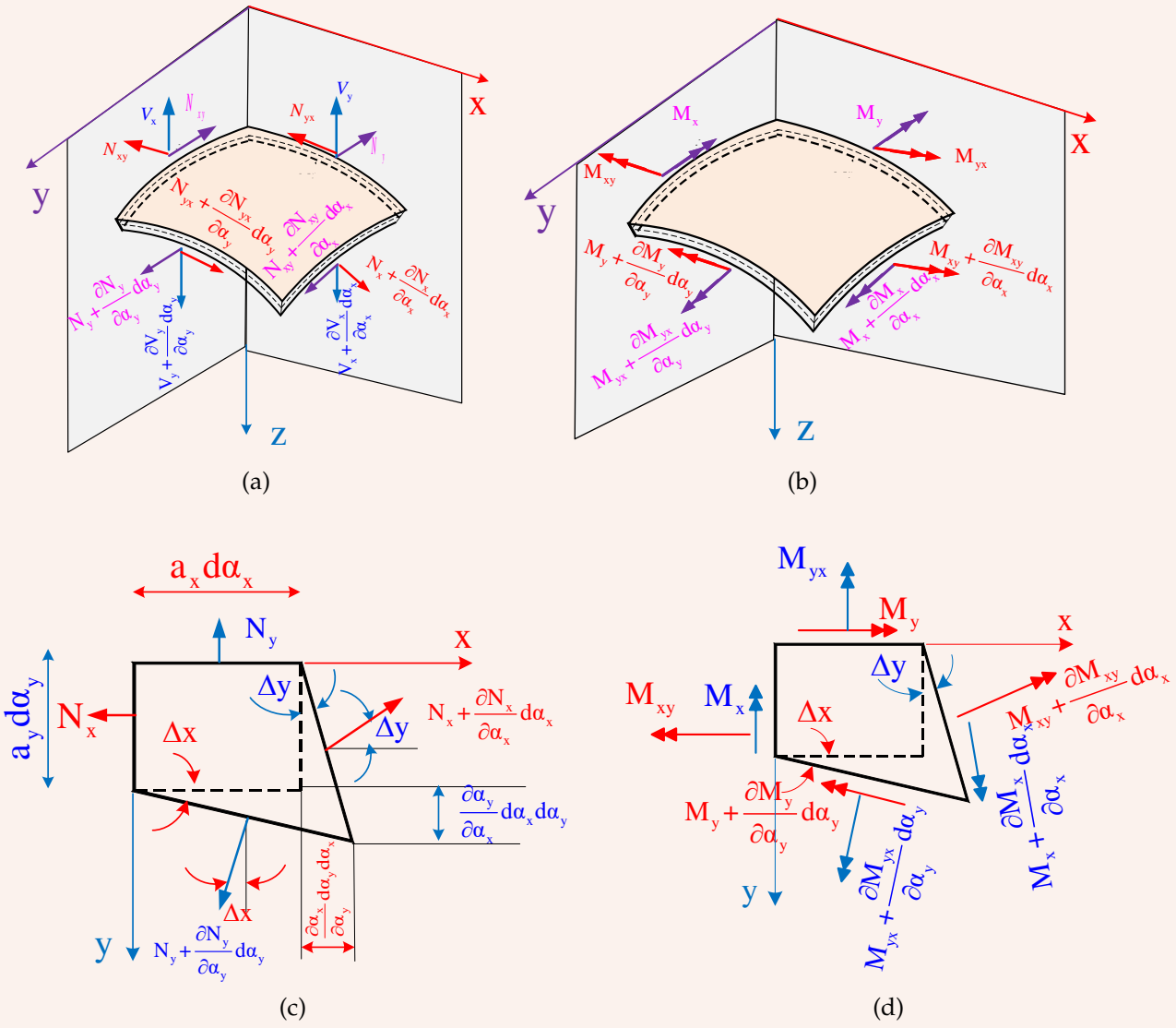


Figura 34.3: Equilíbrio do elemento diferencial casca

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Além disso, σ_z é negligenciado como teria efeitos muito pequenos sobre oε_x e.. ε_y deformações.

Deflexão pequena: mudanças na geometria não afetarão o equilíbrio estático.

Comportamento elástico linear: relações lineares entre tensão e deformação (ou momento e curvatura).

Sistema Conservador: Pontos nas linhas normais para a superfície média antes de deformação permanecerem em linhas normais à superfície média após deformação[1].

Deformações: Tesouras radiais V_x e.. V_y Não será considerado[2].

34.1.3 Forçar relações deslocamento

12 Todas as soluções mecânica estrutural devem satisfazer três requisitos essenciais:

Equilíbrio de forças generalizadas

Compatibilidade de deformações e deslocamentos

Tensão-Deformação Relações[3]

Esses requisitos, combinados com as definições preliminares/assunções, nos permitirão derivar e uma teoria geral casca através dos seguintes passos conseqüentes, Tabela 34.1:

1. Determine o *equilíbrio* de forças e momentos em um elemento diferencial (5 equações, 8 desconhecidos).

   Na teoria casca geralmente negligenciamos M_z Porque.. τ_{xz} e.. τ_{yz} são negligenciados. Então temos que satisfazer 5 equações de Equilíbrio, Eq. 34.3, em termos de 8 forças generalizadas.
2. Estabeleça o *compatibilidade* (deformação-deslocamento) relações (6 equações, 3 desconhecidos).
3. Estabeleça um *tensão-deformação relacionamento* assumindo um conjunto de propriedades elásticas (3 equações, 6 desconhecidos).
4. Transforme as relações de força em *força-deslocamento* equações (6 equações 3 desconhecidas).
5. Obter um *formulação completa* combinando as equações de força-deslocamento com as equações do equilíbrio (11 equações com 11 desconhecidas).

[1] Como em vigas, as seções de avião permanecem planas (assunção de Euler-Bernoulli).
[2] Assim como nós ignoramos cisalhamento deformação em vigas.
[3] Lembre-se que a integração do tensões renderá as forças.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 34.1: Resumo de equações e incógnitas em finos cascas

Equações	(Desconhecido) Variáveis
1) Equilíbrio (§34.1.3.1)	
5 Equações de Equilíbrio	8 Esforços internos
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$	$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$
2) Compatibilidade (§34.1.3.3)	
6 Deformações	3 Deslocamentos
$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	u, v, w
3) Tensão-Deformação (§34.1.3.5)	
3 Tensões	6 Deformações
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$
4) Força Deslocamento (§34.1.3.6)	
5 Forças	3 Deslocamentos
$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$	u, v, w
5) Final	
5 de equilíbrio, 6 de deformação	8 forças, 3
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$ $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	$N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, M_{xy}, u, v, w$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34.1.3.1 Equilíbrio

13 Com referência à Fig. 34.3, procuramos estabelecer as cinco equações de equilíbrio $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$.. Cada um será considerado separadamente.

14 Novamente, consideraremos a contribuição de cada termo separadamente, Tabela 34.2 e então combinar todos os componentes juntos para formar a equação de equilíbrio completa.

Tabela 34.2: Contribuições individuais para equações de equilíbrio em fino cascas

Forças	$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y, p_{ext}$
Momentos	$M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, V_y$

15 Os casais tensão não atribuem nenhum componente de força na direção X. Cada componente será determinado multiplicando o resultado tensão, Fig. 34.1a, pelo comprimento do lado do elemento em que ele atua.

1/5 $\Sigma F_x = 0$

16 Da Fig. 34.3c, uma diferença na geometria do elemento diferencial pode ser notada. Os lados do elemento que cruzam a origem têm comprimentos curvos de $a_x d\alpha_x$ e.. $a_y d\alpha_y$, Considerando que as bordas opostas têm aumentado os comprimentos de $(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y})d\alpha_x$ e.. $(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x})d\alpha_y$.

Contribuição de N_x:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{N_x} &= -N_x a_y d\alpha_y + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial \alpha_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= N_x \frac{\partial \alpha_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + a_y \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + \underbrace{\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y}_{\text{efeito de } 2^a \text{ ordem}}\end{aligned}$$

Combinando os dois primeiros termos e eliminando o terceiro, devido aos efeitos de segunda ordem,

$$\Sigma F_x^{N_x} = \frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.4}$$

Contribuição de N_y: Primeiro, notamos que em geral N_y Não aja perpendicularmente ao x eixo mas em algum ângulo

$$\Delta_x = \frac{(\partial a_y / \partial \alpha_x) d\alpha_x d\alpha_y}{a_x d\alpha_x} = \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Assim, na x direção, o componente da força total $N_y a_x d\alpha_x$ É

$$\Sigma F_x^{N_y} = -N_y a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\frac{d\alpha_y}{a_x} = -N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y$$

Contribuição de N_{xy}: Quanto a.. $N_x y$, esta força também tem um componente não perpendicular e é determinada ao longo do ângulo Δ_y:

$$\Delta_y = \frac{(\partial a_x/\partial \alpha_y) d\alpha_y d\alpha_x}{a_y d\alpha_y} = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} \tag{34.5}$$

E o componente da força total $N_{xy} a_y d\alpha_y$ É

$$\Sigma F_x^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} = N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{34.6}$$

Contribuição de N_{yx}: é semelhante ao de N_x, Eq. 34.4

$$\Sigma F_x^{N_{yx}} = -N_{yx} a_x d\alpha_x + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x = \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.7}$$

Contribuição de V_x: O componente horizontal do Força total no lado inclinado, Fig. 34.4, é

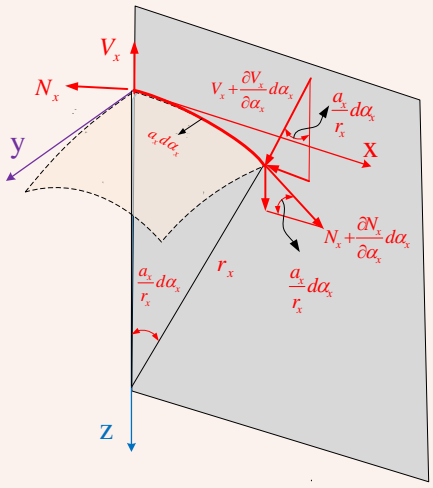


Figura 34.4: Elemento diferencial casca, V_x tensão resultados

$$\Sigma F_x^{V_x} = -\left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $d\alpha_x \simeq \sin d\alpha_x$.. Nós notamos que V_x Não tem x componente do lado negativo. Negligenciando termos de ordem superior, isso reduz-se a

$$\Sigma F_x^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x \tag{34.8}$$

Contribuição de V_y: O resultado tensão contribuirá para o equilíbrio no x direção somente se a_x e.. a_y Não são os princípios da curvatura. Na Fig. 34.5 o elemento diferencial com curvaturas, que Resultou em uma distância total de $z_x + z_y + z_{xy}$ No

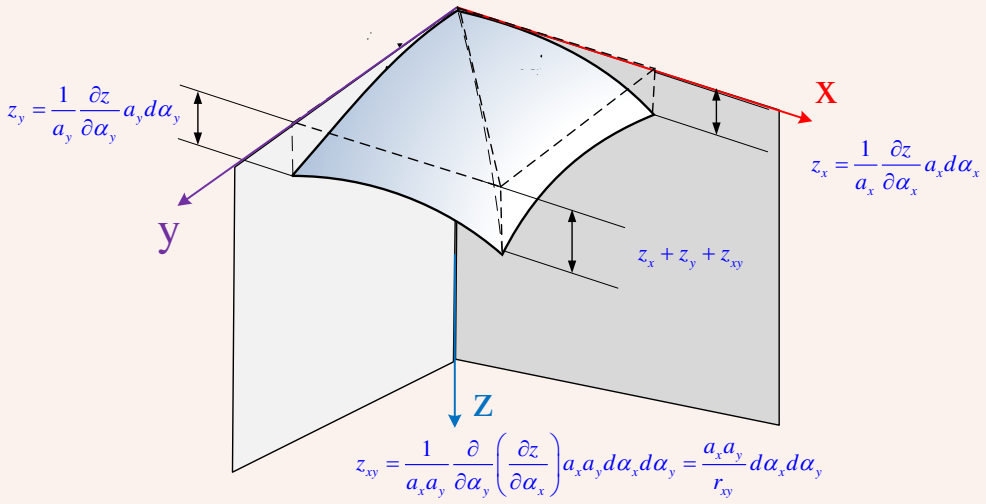


Figura 34.5: Elemento diferencial, curvaturas principais

canto oposto Para a origem, é mostrado. z_x e.. z_y são devidos às encostas $\partial z/\partial \alpha_x$ e.. $\partial z/\partial \alpha_y$. A mudança na inclinação resulta em

$$z_{xy} = \frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} a_x a_y d\alpha_x d\alpha_y = \frac{a_x a_y}{r_{xy}} d\alpha_x d\alpha_y$$

Onde

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

e corresponde à torção da superfície em relação ao x e.. y Eixos. Por isso, a inclinação de V_y É

$$\frac{z_{xy}}{a_x d\alpha_x} = \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

E o componente total de V_y na x direção é

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{V_y} &= \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \\ &= V_y a_x d\alpha_x \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}\end{aligned} \tag{34.9}$$

Esta expressão desaparece onde o elemento é limitado por linhas de princípio curvatura r_x e.. r_y, $z_{xy} = 0$, a torção $r_{xy} = \infty$.

Contribuição da carga externa: Supostamente uma pressão com componentes p_x, p_y e.. p_z Atuando no diferencial elemento de uma área $a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y$:

$$\Sigma F_x^p = p_x a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{34.10}$$

Finalmente, agora podemos combinar o x componentes de N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y E a carga de Eqs. 34.4, 34.1.3.1, 34.6, 34.7, 34.8, 34.9, e.. 34.10.. Depois de cancelar os multiplicadores comuns $d\alpha_x d\alpha_y$Nós obtemos

$$\frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \tag{34.11}$$

2/5 $\Sigma F_y = 0$

17 Esta segunda equação é exatamente a mesma que a correspondente a $\Sigma F_x = 0$ Exceto que nós trocamos o x e.. y termos cedendo

$$\frac{\partial (N_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (N_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \tag{34.12}$$

3/5 $\Sigma F_z = 0$

18 O z A direção é sempre definida para ser perpendicular à superfície média; Por isso está sempre na direção dos raios principais da curvatura, Fig. 34.4.. Assim, a suposição para pequenos ângulos pode ser feita de que $\sin\theta \simeq \theta$.

Similar a $\Sigma F_x = 0$, contribuições dos tensão resultados, N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{yx}, dois radiais forças cortantes, V_x, V_y, e as pressões externas serão consideradas. Os casais tensão não atribuem nenhum componente de força na direção z. Cada componente será determinado multiplicando o resultado tensão, Fig. 34.1a, ou radial força cortante, Fig. 34.4, pelo comprimento do lado do elemento em que ele atua.

Contribuição de N_x:

$$\Sigma F_z^{N_x} = N_x a_y d\alpha_y \underbrace{\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x}_{\sin\theta \simeq \theta} + 2^{nd} \text{ order terms} \tag{34.13}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

[19] Todas as seguintes expressões serão semelhantes ao layout do N_x formulação alterando o x e.. y Variáveis.

Contribuição de N_y:

$$\Sigma F_z^{N_y} = N_y a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_y} d\alpha_y \tag{34.14}$$

Contribuição de N_{xy}:

$$\Sigma F_z^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_{xy}} d\alpha_x \tag{34.15}$$

Contribuição de N_{yx}:

$$\Sigma F_z^{N_{yx}} = N_{yx} a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \tag{34.16}$$

Contribuição de V_x:

$$\begin{aligned}\Sigma F_z^{V_x} &= -V_x a_y d\alpha_y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \underbrace{\cos\left(\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x\right)}_{\simeq 1} \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= \frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \end{aligned} \tag{34.17}$$

Contribuição de V_y: Por analogia com V_x

$$\Sigma F_z^{V_y} = \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{34.18}$$

Contribuição da carga externa: Da Eq. 34.10

$$\Sigma F_z^{p} = p_z a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{34.19}$$

[19] Finalmente, agora podemos combinar o z componentes de N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y E a carga de Eq. 34.13, 34.14, 34.15, 34.16, 34.17, 34.18, e.. 34.19 respectivamente. De novo, depois de cancelar o Multiplicadores comuns $d\alpha_x d\alpha_y$Nós obtemos

$$\frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \tag{34.20}$$

4/5 $\Sigma M_x = 0$

[20] As soluções para momentos têm componentes que são semelhantes aos das forças vistas acima, exibindo diferenças principalmente com os contribuintes. Nenhuma contribuição é

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

dos resultados tensão e apenas um radial forças cortantes, V_y, é considerado. No entanto, agora os tensão casais, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, atribuir componentes de força no x, y, e z - Direções. Cada componente será determinado multiplicando os casais tensão, Fig. 34.3d, ou radial força cortante, Fig. 34.4, pelo comprimento do lado do elemento em que ele atua.

Contribuição de M_x: Tem um componente sobre o x eixo que é análogo ao de N_x na y Direção (Eq. 34.4 com x e.. y Revertida)

$$\Sigma M_x^{M_x} = M_x a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} = M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{34.21}$$

Contribuição de M_y: Como em Eq. 34.4, e com referência a Fig. 34.3d

$$\begin{aligned}\Sigma M_x^{M_y} &= M_y a_x d\alpha_x - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{d\alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \\ &= -\frac{\partial (M_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x\end{aligned} \tag{34.22}$$

Contribuição de M_{xy}: é análogo ao Eq. 34.22

$$\Sigma M_x^{M_{xy}} = -M_{xy} a_y d\alpha_y + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y = \frac{\partial (M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.23}$$

Contribuição de M_{yx}:

$$\Sigma M_x^{M_{yx}} = -M_{yx} a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\frac{d\alpha_y}{a_x} = -M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.24}$$

Contribuição de V_y:

$$\Sigma M_x^{V_y} = V_y a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{34.25}$$

Finalmente, agora podemos combinar o efeito de todos os Componentes M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, e V_y Eq. 34.21, 34.22, 34.23, 34.24 e.. 34.25 respectivamente. Depois de cancelar os multiplicadores comuns $d\alpha_x d\alpha_y$Nós obtemos

$$-\frac{\partial (M_y a_x)}{\partial \alpha_y} + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + V_y a_x a_y = 0 \tag{34.26}$$

5/5 $\Sigma M_y = 0$

Momentos sobre o y O eixo dá a mesma expressão que no Eq. 34.26 exceto que o x e.. y Subscritos giram, e o sinal de torção - tensão casais são invertidos.

$$-\frac{\partial (M_x a_y)}{\partial \alpha_x} + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial (M_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + V_x a_x a_y = 0 \tag{34.27}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

34.1.3.2 Conjunto completo de equações de equilíbrio

21 As 5 equações de equilíbrio, Eq. 34.11, 34.12, 34.20, 34.26 e.. 34.27 estão resumidos abaixo

$$
\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(N_x a_y) - N_y\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} + \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(N_{yx}a_x) - V_y\frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y\frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0\\
\Sigma F_y &= \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(N_y a_x) - N_x\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} + N_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(N_{xy}a_y) - V_x\frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x\frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0\\
\Sigma F_z &= \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(V_x a_y) + \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(V_y a_x) + N_x\frac{a_x}{r_x}a_y + N_{xy}\frac{a_x}{r_{xy}}a_y + N_{yx}\frac{a_y}{r_{xy}}a_x + N_y\frac{a_y}{r_y}a_x + p_z a_x a_y = 0\\
\Sigma M_x &= -\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(M_y a_x) + M_x\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} - M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(M_{xy}a_y) + V_y a_x a_y = 0\\
\Sigma M_y &= -\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(M_x a_y) + M_y\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + M_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(M_{yx}a_x) + V_x a_x a_y = 0
\end{aligned}
\tag{34.28}
$$

34.1.3.3 Compatibilidade

22 Em seguida, consideramos as equações de compatibilidade. Relacionam os três com o deformações.

1/4 ε_{x0}

As relações deformação-deslocamento serão derivadas com referência a Fig. 34.6. O

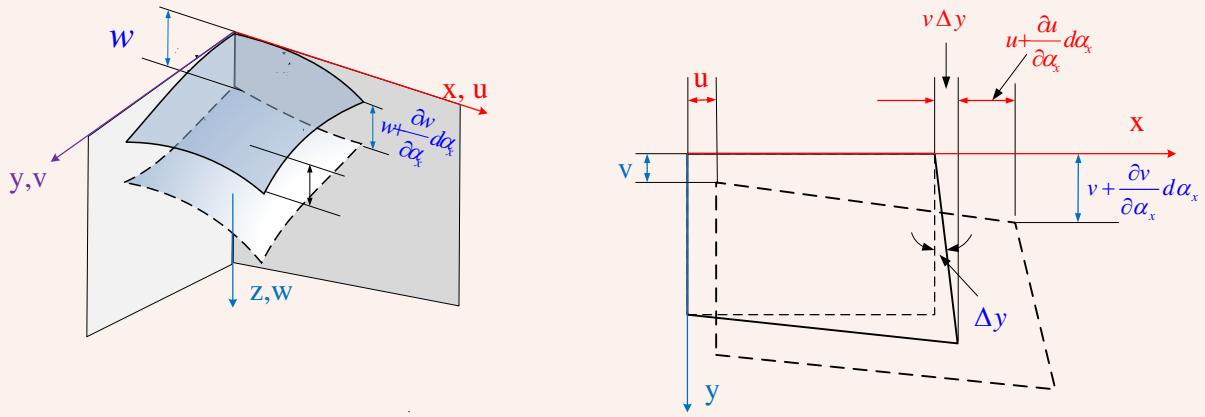


Figura 34.6: Elemento diferencial, estado inicial e deformado

elemento linear do comprimento $a_x d\alpha_x$ Sofre três mudanças de comprimento:

Extensão axial x eixo de $\frac{\partial u}{\partial\alpha_x}d\alpha_x$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Extensão lateral y: A forma original não formada do diferencial O elemento não é retangular (como resultado de $d\alpha_x$ e.. $d\alpha_y$), e o ângulo entre o positivo y lado e o vertical é (Eq. 34.5) $\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y}$ (ao invés de 0); Assim, uma tradução ao longo do y eixo, vai resultar em um Tradução ao longo do x Eixo igual a $v\Delta_y$.

Diminuição do raio de curvatura: $-w\frac{a_x}{r_x}d\alpha_x$

Resumindo todos esses termos, e dividindo pelo comprimento original $a_x d\alpha_x$ Rende-se

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \tag{34.29}$$

Onde 0 O subscrito indica que a superfície média está sendo considerada.

2/4 ε_{y0}

23 O deformação da superfície média ao longo do y eixo, por analogia, é obtido invertendo o x e.. y Variáveis junto com v e.. u na equação anterior.

$$\varepsilon_{y0} = \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \tag{34.30}$$

3/4 γ_{xy0}

24 O cisalhamento, representando a mudança angular total entre $a_y d\alpha_y$ e.. $a_x d\alpha_x$, também é um pouco complexo, e seus três componentes serão derivados separadamente.

Diferença em deslocamentos: Pelo.. v Termo, Fig. 34.6Nós temos $(v + \frac{\partial v}{\partial \alpha_x}d\alpha_x) - v$.. Se dividirmos pelo comprimento elementar, $a_x d\alpha_x$, e repetir a mesma operação para o u deslocamento, nós obtemos:

$$\gamma^I_{xy0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} \tag{34.31}$$

Aumento no comprimento dos lados positivos: Vamos começar determinando Δs, Fig. 34.7.

$$\Delta s = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x}d\alpha_x\right)\Delta_y$$

Onde Δ_y foi derivado em Eq. 34.5 Como

$$\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Por isso,

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}}_{\text{Higher order term}}\end{aligned}$$

Dividindo Δs pelo comprimento do elemento, $a_x d\alpha_x$ e repetindo a mesma operação para o outro lado, nós obtemos

$$\gamma^{II}_{xy0} = -\frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \tag{34.32}$$

onde o sinal negativo reflete o fato de que o ângulo entre $x = 0$ e.. $y = 0$ Os rostos diminuíram (originalmente era um ângulo reto).

Retorno das Superfícies: Com referência à Fig. 34.7, Nós temos

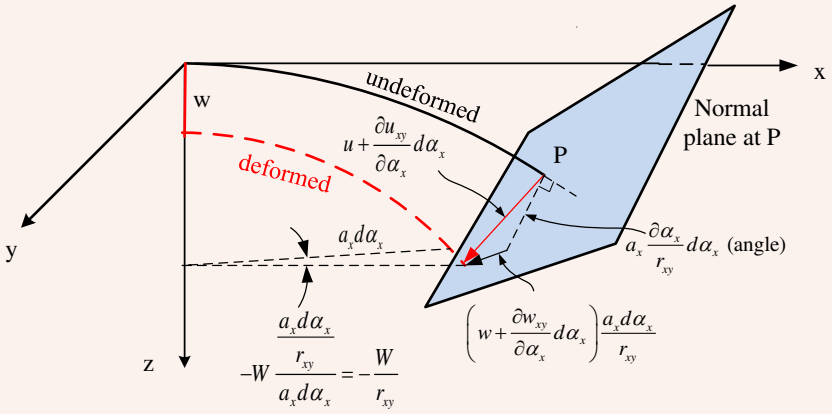


Figura 34.7: Elemento diferencial, estado inicial e deformado; cisalhamento deformação causado pelo aumento no comprimento dos lados positivos

$$w^* = -w \frac{a_x d\alpha_x}{r_{xy}}$$

Dividindo pelo comprimento original $a_x d\alpha_x$ e reconhecendo que temos um termo semelhante para o avião $x = 0$Nós obtemos

$$\gamma^{III}_{xy0} = -2 \frac{w}{r_{xy}} \tag{34.33}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Assim, somando todos os três componentes, Eq. 34.31, 34.32 e.. 34.33, Nós conseguimos

$$\gamma_{xy0} = \underbrace{\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}} - \underbrace{\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}} - \underbrace{2\frac{w}{r_{xy}}} \tag{34.34}$$

4/4 $\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$

25 Considerando o.. $x-z$ Avião, Fig. 34.8, e assumindo que $w = 0$, os normais ao elemento

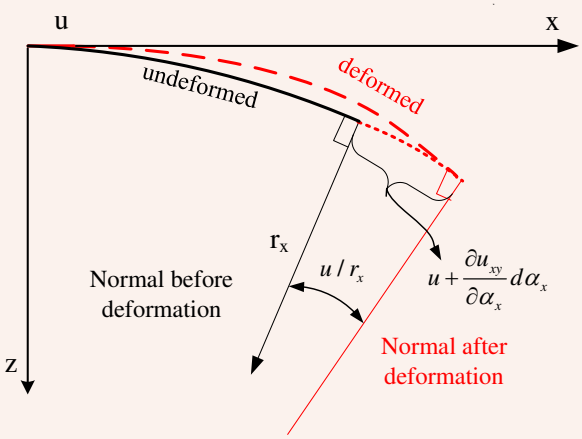


Figura 34.8: Elemento diferencial, estado inicial e deformado; Rotação

diferencial na face positiva antes e depois da deformação fazem um ângulo $\frac{u}{r_x}$.

26 O termo convencional devido à transversa deslocamento é $\frac{\partial w}{\partial s_{\alpha_x}} = \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}$. Finalmente contabilizando também o termo distorcido que obtivemos

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \tag{34.35}$$

27 Da mesma forma, nós obtemos

$$\phi_y = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

28 A mudança de curvatura será assim igual à mudança de rotação $\partial\phi_x$ por comprimento de arco $a_x \partial \alpha_x$

$$\chi_x = \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Além disso, devido aos lados não paralelos do elemento, porque dos valores em mudança de a_x e.. a_y, a rotação ϕ_y na y A direção produzirá um componente no x Direção.

$$\frac{\phi_y \Delta_y}{a_x \partial \alpha_x} = \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}$$

29 Por isso, as expressões completas para mudanças na curvatura se tornam

$$\begin{aligned}
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + +\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned}$$

34.1.3.4 Resumo

30 Agora resumemos todas as seis expressões em termos de três desconhecido deslocamentos, Eq. 34.29, 34.30, 34.34 E o conjunto anterior, nós temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \\
\varepsilon_{y0} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \\
\gamma_{xy0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - 2\frac{w}{r_{xy}} \\
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned} \tag{34.36}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \\
\phi_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34.1.3.5 Tensão-deformação-forças

34.1.3.5.1 Tensão-Deformação

31 O deformação ε_x à distância z Da superfície do meio, Fig. 34.9, é composto por um

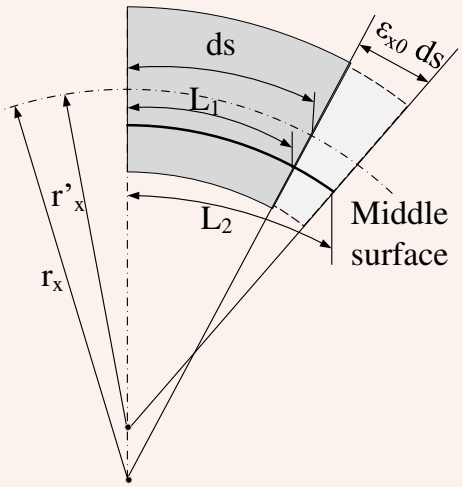


Figura 34.9: Superfície média do elemento diferencial

componente axial ε_{x0} causado por extensão da superfície média, e outra causada pela flexão.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{L_2 - L_1}{L1} \\ L_1 &= ds\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \\ L_2 &= ds(1+\varepsilon_{x0})\left(1 - \frac{z}{r'_x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{(1+\varepsilon_{x0})(1 - z/r'_x) - (1 - z/r_x)}{1 - z/r_x} \\ &= \frac{1 - z/r'_x + \varepsilon_{x0}(1 - z/r'_x) - 1 + z/r_x}{1 - z/r_x} \end{aligned}$$

32 Podemos deixar de lado o termo pequeno z/r'_x e.. z/r_x Quando eles aparecem com unidade,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x}\right)$$

33 De novo χ, referindo-se à mudança na curvatura, encontramos

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\chi_x \tag{34.37}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\chi_y \tag{34.38}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \tag{34.39}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34 Neste ponto, não vamos mais ignorar as propriedades materiais do sistema. A fim de derivar a relação tensão-deformação, vamos assumir que temos um material linear elástico, isotrópico e homogêneo. Desde que já assumimos $\sigma_z = 0$, temos uma condição de avião tensão e da mecânica dos materiais:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}$$

onde o módulo de rigidez, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

35 Substituindo as expressões reais para o deformações, Eqs. 34.37, 34.38, e 34.39Nós obtemos

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)]\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)]\\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy})\end{aligned}$$

34.1.3.5.2 Esforços

36 Substituindo o conjunto anterior de equações nas expressões para as relações força-tensão, Eq. 34.3, integrando-se h e negligenciando o z/r_x e.. z/r_y termos quando eles aparecem ao lado da unidade, nós obtemos

$$\begin{aligned}N_x &= K(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \qquad (34.40)\\ N_y &= K(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0})\\ N_{xy} &= N_{yx0} = Gh\gamma_{xy0}\\ M_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y)\\ M_y &= -D(\chi_y + \nu\chi_x)\\ M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6}\chi_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy} \qquad (34.41)\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

K é rigidez axial e D A rigidez da flexão, correspondente a EA e.. EI para o problema equivalente de uma dimensão.

37 Nós notamos que K e.. D são maiores do que as constantes unidimensionais correspondentes por um fator $1-\nu^2$ que representa o aumento da rigidez causada pela restrição lateral deformações.

34.1.3.6 Expressões finais (forças em termos de deslocamentos)

38 Substituímos agora o axial e flexural deformações dado por Eq. 34.36 em Eqs. 34.40 através 34.41 Para obter

$$\begin{aligned}
N_x &= K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}+\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_x}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}+\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_y}\right)\right]\\
N_y &= K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}+\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_y}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}+\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_x}\right)\right]\\
N_{xy} &= N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}-\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{2w}{r_{xy}}\right)\\
M_x &= -D\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}+\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y}+\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)\right]\\
M_y &= -D\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y}+\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}+\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\right)\right]\\
M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x}-\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)
\end{aligned} \tag{34.42}$$

onde nos lembramos disso da Eq. 34.35

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x}+\frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}+\frac{v}{r_{xy}}\\
\phi_y &= \frac{v}{r_y}+\frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y}+\frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}$$

39 Estas seis equações contêm três resultados tensão (N_x, N_y, e N_{xy}), três tensão casais (M_x, M_y, e M_{xy}) e três deslocamentos (u, v e.. w).

40 As cinco equações de equilíbrio, Eq. 34.28, por sua vez contém oito desconhecidos: Cinco tensão resultados (N_x, N_y, N_{xy}, V_x e.. V_y), e três tensão casais (M_x, M_y, e M_{xy}).

41 Quando esses dois conjuntos de equações são combinados, temos um total de 11 equações com 11 desconhecidos (N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, e M_{xy}, u, v e.. w). Assim, o problema é bem definido e uma solução completa é possível.

42 Mesa 34.3 resume algumas das principais equações que governam fina cascas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 34.3: Sumário das principais equações governantes no magro cascas

Kinematic

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y}\begin{bmatrix} a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_y} \\ a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial\alpha)_x} & -\frac{2a_x a_y}{r_{xy}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y}\begin{bmatrix} a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} \\ \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} \\ a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

Equilíbrio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & -\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_x}{r_x}a_y & \frac{a_y}{r_y}a_x & \frac{a_x}{r_{xy}}a_y + \frac{a_y}{r_{xy}}a_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & -\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) - \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} + a_x a_y \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_{xy}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{r_{xy}} & -\frac{1}{r_y} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{zz} \\ V_{xx} \\ V_{yy} \end{Bmatrix}}_{\rho} = 0$$

Constitutivo

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\beta\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & -z & -z\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 & -z\nu & -z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{-2z}{\beta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx0} \\ \varepsilon_{yy0} \\ \gamma_{xy0} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$\beta = \frac{E}{1-\nu^2}$$

Victor E. Saouma
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

34.1.4 Simplificações

43 A derivação da análise discutida na seção anterior (11 equações - 11 desconhecidas) pode ser usada para resolver o tensões e deslocamentos para qualquer tipo de elástico fino casca. No entanto, mesmo uma análise deste tipo pode ser *extremamente complicado* para até mesmo os sistemas mais simples finos casca. Assim, casca design tem muitas vezes utilizado dois tipos de simplificações para facilitar a análise.

Formulações matemáticas Muitas vezes assumimos ou provamos certos termos de relativa falta de importância e removemos esses termos da equação de interesse. Isso já foi feito em §34.1.3 negligenciando os termos z/r Quando aparecem com unidade, junto com a suposição de avião tensão, $\sigma_z = 0$.. O objetivo desta simplificação é reduzir o número de termos enquanto ainda se obtém uma solução matemática razoável.

Formulações físicas Novamente, podemos assumir uma ação estrutural específica para simplificar a análise. Esta suposição pode ser usada para substituir o sistema casca por uma estrutura equivalente mais simples. Esta nova e mais simples estrutura é então utilizada para análise do complexo.

44 Estas simplificações são desejáveis para o projeto concreto armado onde análises precisas não são justificadas devido à falta de precisão na construção. Mesmo assim, é vital que o designer entenda a verdadeira ação estrutural obtida apenas através das características físicas do sistema e da formulação matemática correspondente.

45 Duas teorias simplificadas de análise são consideradas, a teoria da superficial cascas e teoria das membranas, elas serão apresentadas nas seções a seguir.

34.1.4.1 Raso cascas

46 Raso cascas é a primeira de duas teorias simplificadas casca (a outra sendo a teoria da membrana) vamos rever. O seguinte irá utilizar simplificações de formulações matemáticas e físicas do sistema.

34.1.4.1.1 Suposições

47 A teoria de Shallow casca utilizará os seguintes pressupostos:

1. A inclinação do casca é pequena em comparação com algum plano de referência (muitas vezes o plano horizontal para telhados).
2. A curvatura da superfície é pequena.
3. Os limites casca são tais que as cargas de superfície são transportadas por resultados no avião (N_x, N_y e.. N_{xy}). Portanto, as deflexões transversais serão muito maiores do que as defleções no avião.
4. As mudanças na curvatura da superfície são pequenas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34.1.4.1.2 Aplicação de suposições

48 Agora vamos aplicar essas suposições a Eqs. 34.28 e.. 34.42.

- Suposição 1 nos permite negligenciar o componente radial do carregamento.
- Suposição 2, os termos contendo V nos dois primeiros Eq. 34.28 e.. N no terceiro de Eq. 34.28 São pequenos. Isso também se aplica aos termos com w nos três primeiros Eq. 34.42 e o u e.. v Os termos nos últimos três de 34.42.. No entanto, não podemos deixar de lado esses termos sem considerar a terceira suposição.
- Suposição 3 relaciona o casca a um arco plano, que, sob carga uniforme, o controle axial tensão e vertical deslocamentos. Ou seja, os pequenos componentes transversos dos resultados no avião tensão, no terceiro do Eq. 34.28, não são insignificantes em comparar a mudança no resultado transversal cisalhamento.
- Suposição 4 nos permite tomar a_x e.. a_y como constantes.

49 Combinando suposições 2 e 3 juntos, podemos cair V dos dois primeiros termos do Eq. 34.28 mas não N do terceiro. Da Eq. 34.42 Estamos autorizados a deixar cair o efeito de no avião deslocamentos (u e.. v Em casais, mas não o efeito de..w termos) em resultados no avião tensão

50 Eqs. 34.28 e.. 34.42 pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} + p_x = 0 \tag{34.43a}$$

$$\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_y}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha_x} + p_y = 0 \tag{34.43b}$$

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial V_y}{\partial \alpha_y} + \frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \tag{34.43c}$$

$$-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} + V_y = 0 \tag{34.43d}$$

$$-\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x} - \frac{1}{a_y}\frac{\partial M_{yx}}{\partial \alpha_y} + V_x = 0 \tag{34.43e}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e..

$$N_x = K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)\right] \tag{34.44a}$$

$$N_y = K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)\right] \tag{34.44b}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right) \tag{34.44c}$$

$$M_x = -D\left(\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2} + \nu\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}\right) \tag{34.44d}$$

$$M_y = -D\left(\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2} + \nu\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}\right) \tag{34.44e}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\left(\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\right) \tag{34.44f}$$

51 Observamos que temos equações separadas de profundidade viga e laje, emparelhadas pelo N termos em Eq. 34.43c e o w termos em 34.44a através 34.44c.

- Eqs. 34.43a e.. 34.43b são expressões para uma placa carregada em seu avião (*Equações profundas-viga*).
- Eqs. 34.44a através 34.44c são também equações profundas-viga exceto para o w termos. Eqs. 34.44d através 34.44f são expressões para uma placa carregada lateralmente (*laje*).
- Eqs. 34.43c através 34.43e Também são em laje equações Exceto pela N termos em 34.43c.

34.1.4.1.3 Equação profunda viga

52 Vamos agora combinar as expressões acima em uma única expressão superficial casca. Mas primeiro, devemos derivar as equações profundas viga e laje. De Eqs. 34.44a, 34.44b e.. 34.44c

$$N_x - \nu N_y = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)$$

$$N_y - \nu N_x = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)$$

$$2(1+\nu)N_{xy} = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

53 Diferenciados duas vezes e combinados, conseguimos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Ay^2}\frac{\partial^2(Nx-\nu Ny)}{\partial\alpha_y^2}-\frac{2(1+\nu)}{Axay}\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}+\frac{1}{AX^2}\frac{\partial^2(Ny-\nu Nx)}{\partial\alpha_x^2}\\&=-K(1-\nu^2)\left[\frac{1}{AX^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x^2}\left(\frac{w}{Ry}\right)-\frac{2}{Axay}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}\left(\frac{w}{r_{xy}}\right)+\frac{1}{Ay^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_y^2}\left(\frac{w}{Rx}\right)\right]\end{aligned}\tag{34.45}$$

54 Quando r_x, r_y e.. r_{xy} são assumidos constantes, nós definir

$$\nabla_R^2 w=\left(\frac{1}{r_y a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x^2}-\frac{2}{r_{xy}a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}+\frac{1}{r_x a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_y^2}\right)w$$

55 Substituindo os resultados com as seguintes funções

$$N_x=\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_y^2}-\int p_x a_x d\alpha_x\tag{34.46}$$

$$N_y=\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_x^2}-\int p_y a_y d\alpha_y\tag{34.47}$$

$$N_{xy}=-\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}\tag{34.48}$$

e substituindo em Eq. 34.45, chegamos ao nosso equação diferencial para profunda vigas

$$\nabla^4 F+K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w=\int\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 p_x}{\partial\alpha_y^2}a_x d\alpha_x+\int\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 p_y}{\partial\alpha_x^2}a_y d\alpha_y-\nu\frac{1}{a_x}\frac{\partial p_x}{\partial\alpha_x}-\nu\frac{1}{a_y}\frac{\partial p_y}{\partial\alpha_y}\tag{34.49}$$

Onde

$$\nabla^4 F=\left(\frac{1}{a_x^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha_x^4}+\frac{2}{a_x^2 a_y^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha_x^2\partial\alpha_y^2}+\frac{1}{a_y^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha_y^4}\right)F$$

56 If $r_x=r_y=r_{xy}=\infty$, $a_x d\alpha_x=dx$, e $a_y d\alpha_y=dy$, e $p_x=p_y=0$, Eq. 34.49 reduz-se a

$$\nabla^4 F=0$$

34.1.4.1.4 Laje equação

57 Ao derivar a equação laje, vamos primeiro substituir os valores de V_x e.. V_y De Eqs. 34.43d e.. 34.43e Eq. 34.43c Para criar a equação combinada

$$\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 M_x}{\partial\alpha_x^2}-2\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}+\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 M_y}{\partial\alpha_y^2}+\frac{N_x}{r_x}+\frac{2N_{xy}}{r_{xy}}+\frac{N_y}{r_y}+p_z=0\tag{34.50}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

58 Substitua os Eqs. 34.44d, 34.44e e.. 34.44f em 34.50 Para obter

$$-\nabla^4 w + \frac{1}{D}\left(\frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y}\right) = -\frac{p_z}{D}$$

59 Mais uma vez, inseriremos as funções tensão de Eqs. 34.46, 34.47 e.. 34.48 em nosso equação diferencial 34.1.4.1.4 Para gerar a curva laje equação diferencial

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r_x}\int p_x a_x d\alpha_x + \frac{1}{r_y}\int p_y a_y d\alpha_y\right) \tag{34.51}$$

If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, Eq. 34.51 reduz-se a

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{D}$$

34.1.4.1.5 Equação para raso cascas

60 As equações diferenciais de profundidade viga (34.49) e dobrado laje (34.51) são necessários para resolver o problema de *Raso cascas*.. As equações diferenciais simultâneas podem ser reescritas na forma de

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = f(p) \tag{34.52}$$

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = f'(p) \tag{34.53}$$

Onde $f(p)$ e.. $f'(p)$ são os lados certos dos Eqs. 34.49 e.. 34.51.. Se operarmos o Eq. 34.52 por ∇^4 e na EQ. 34.53 por $K(1-\nu^2)\nabla_R^2$, e

61 Combinamos o que conseguimos

$$\nabla^8 F + \frac{12(1-\nu^2}{h^2}\nabla_R^4 F = \nabla^4 f(p) + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 f' p \tag{34.54}$$

62 No entanto, se operarmos o Eq. 34.52 por $(1/D)\nabla_R^2$ e na EQ. 34.53 por ∇^4 e combinamos, obtemos a solução para superficial cascas

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p)$$

34.1.4.2 Teoria da membrana

A teoria da membrana é o segundo método simplificado que revisaremos. No entanto, vamos nos concentrar mais nas suposições e teoria do que na metodologia.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34.1.4.2.1 Suposições

63 A teoria da membrana utilizará os seguintes pressupostos:

1. Toda dobra no casca é negligenciada. Portanto, Eq. 34.28 se torna

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0 \\ \Sigma F_y &= \frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0 \\ \Sigma F_z &= \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0\end{aligned} \tag{34.55}$$

2. Já que assumimos $N_{xy} = N_{yx}$, as três equações acima só têm três desconhecidos N'_x, N'_y e.. $N'_{xy} = N'_{yx}$.. As marcas principais indicam que os valores são aproximados.
3. Todas as membranas tensões atuam no plano do casca.

34.1.4.2.2 Teoria

64 A teoria da membrana pode fornecer uma base de projeto razoável se as seguintes condições forem cumpridas:

1. O resultado deslocamento devido à membrana tensão não aumenta substancialmente a flexão. Suposições anteriores afirmam que todos os dobrando no casca é negligenciado.
2. Uma distribuição uniforme de carga deve ser vista sobre toda a superfície.
3. Os limites podem suprir as forças e permitir o deslocamentos exigido pela membrana tensão resultante.

65 Normalmente a teoria das membranas é insuficiente, mas pode ser útil para telhados hemisféricas ou tanques cilíndricos.

34.1.4.2.3 Classificação

66 Magro cascas pode ser classificado em três categorias principais. A base desta classificação vem de *curvatura gaussiana*, Fig. 34.10.

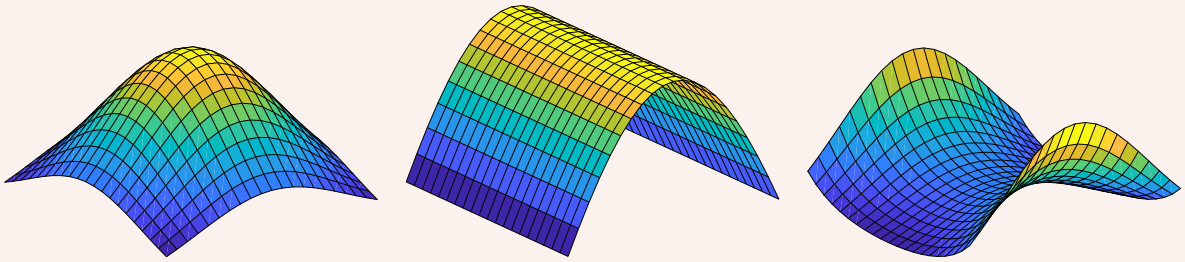
Sinclástico cascas são aqueles de curvatura gaussiana positiva e são formados por duas famílias de curvas ambas com a mesma direção.

Monoclástico cascas são aqueles de curvatura gaussiana zero e são formados por uma família de curvas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Anticlástico cascas são aqueles de curvatura negativa e são formados por duas famílias de curvas de direção oposta.



(a) Sinclástico (dome) (b) Monoclástico (Barrel Vault) (c) Anticlástico (Hyperboloid-Parabolóide)

Figura 34.10: Classificação de cascas

67 A principal diferença de propriedade entre as três categorias é a propagação dos efeitos de borda no cascas. Em sinclástico cascas, os efeitos de borda muitas vezes úmidos rapidamente e são restritos a uma estreita zona próxima da borda. Esta propriedade permite o uso válido da teoria das membranas em todo o casca, exceto nos limites.

68 Em curva singela cascas, os efeitos de borda são amortecidos semelhante ao sinclástico casca, mas propagam-se mais para o casca longe da borda. Em anticlástico cascas, o amortecimento é muito menor do que os outros dois permitindo efeitos de fronteira para controlar a maioria do casca.

69 Outro tipo de classificação define os sistemas casca como rotacionais ou translacionais. Domes e tanques são frequentemente classificados como sistemas rotacionais, enquanto barris cilíndricos, parabolóides elípticos e paraboloides hiperbólicos são considerados translacionais.

70 Finalmente, nem todos cascas são analiticamente definidos (e muito menos ”mecanicamente” analisado). Tais formas foram projetadas por Isler§15.5.2.2) e Musmeci (§15.5.2.3).

34.1.4.2.4 Especialização

71 A suposição da membrana pode ser aplicada à análise de um número de cascas, fig. 1. 34.11.

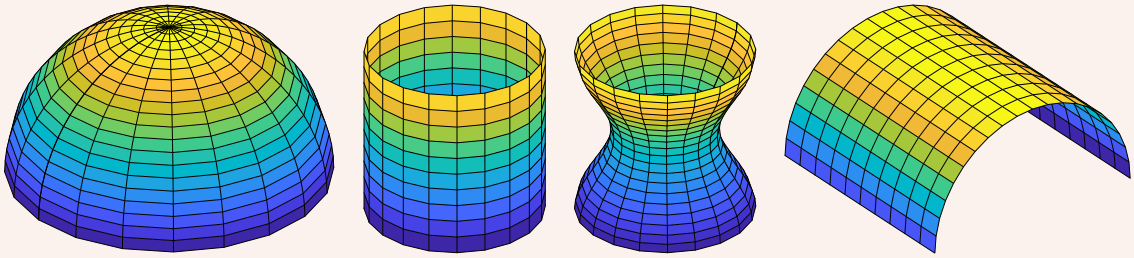
72 No entanto, pode-se esperar ter localizado "parasitário"momentos na base.

73 Em cada um desses cascas, um conjunto de suposições é feita, e as equações de equilíbrio governante (Eq. 34.55), é ainda mais simplificado, tabela 34.4, e equações derivadas Fig. 34.12.

74 Abaixo, só consideraremos derivação das equações associadas ao barril, outras podem ser encontradas em (Billington, 1965).

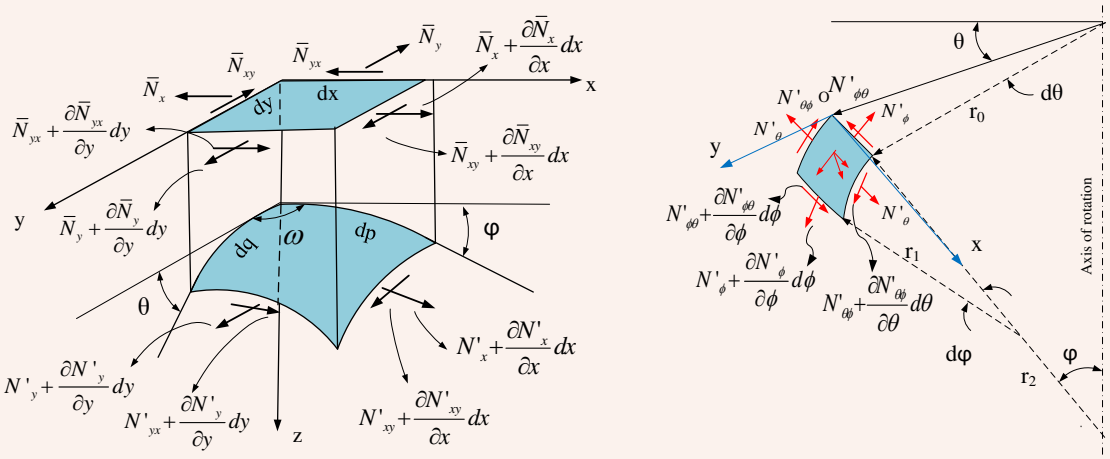
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Cúpula (b) Muralha (c) Hiperbolóide (d) Barrel

Figura 34.11: Exemplos de cascas onde a suposição da membrana é (principalmente) válida



(a) Hiperbolóide (b) Cúpula

Figura 34.12: Diagramas de corpo livre de hiperboloide e dome elemento infinitesimal

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 34.4: Suposições e equações para estruturas de membrana

Equações Gerais	
	$\frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0$ $\frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0$ $\Sigma \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$
Cúpula	
$\alpha_x = \theta \quad a_x = r_0 \quad r_x = r_1 \quad r_0 = r_2 \sin\phi \quad N'_{xy} = N'_{\theta\phi}$ $\alpha_y = \phi \quad a_y = r_1 \quad r_y = r_1 \quad N'_x = N'\theta \quad N'_y = N'_\phi$	$\frac{dN'_\phi r_0}{d\phi} - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 = 0$ $\frac{N'_\theta}{r_2} + \frac{N'_\phi}{r_1} + p_z = 0$
Muralha	
$\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_x = N'_\theta$ $\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_{xy} = N'_{\theta y}$	$N'_\theta = -p_z r$ $N'_{y\theta} = -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N'_\theta}{\partial \theta} + p_\theta\right) dy + f_1(\theta)$ $N'_y = -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N'_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y\right) dy + f_2(\theta)$
Hiperbólico Casca	
$\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad r_{xy} = \infty$ $\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty$	$\frac{dB_y}{dy} r + p_r = 0$ $\frac{dV_y}{dy} r + N_\theta + p_z r = 0$ $-\frac{dM_y}{dy} r + V_y r = 0$
Cilíndrico circular Casca	
$\alpha_x = x \quad a_x = 1 \quad r_x = \infty \quad N'_{xy} = N'_{x\phi}$ $\alpha_y = \phi \quad a_y = r \quad r_y = r \quad N'_y = N'_\phi$	$N'_\phi = -p_z r$ $N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} dx - \int p_\phi dx + f_1(\phi)$ $N'_x = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi)$
Tradução e Sincronia	
$a_x = r_x \quad a_y = r_y \quad r_{xy} = \infty \quad \frac{\partial r_y}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} = 0$	$\frac{\partial N'_x}{\partial \alpha_x} r_y + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \alpha_y} r_x + p_x r_x r_y = 0$ $\frac{\partial N'_y}{\partial \alpha_y} r_x + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial \alpha_x} r_y + p_y r_x r_y = 0$ $\frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34.2 Análise de um único barril (circular cilíndrico casca)

34.2.1 Introdução

75 Esta seção foca na análise de um cilíndrico circular casca usando tanto as teorias da teoria rasa cascas e da teoria das membranas, e será limitada a uma biapoiado casca por duas bordas (vigas. Os resultados tensão, os casais tensão, e deslocamentos serão derivados pela teoria da membrana, e repetidos utilizando a teoria do raso cascas.

76 Esta seção também abordará a teoria da flexão e nós derivaremos a oitava ordem governante equação diferencial e discutiremos o cátion das oito constantes arbitrárias de integração. Essas constantes, por sua vez, serão substituídas pelas equações para os tensão resultantes, casais e deslocamentos.

77 Cilíndrico circular cascas ou abóbadas de barril são frequentemente definidos como um curvado laje... cortado de um cilindro cheio. O laje é curvado em apenas uma direção e, assim, pode ser classificado como um único curvado casca, conforme discutido na seção anterior.

78 Cylindrical cascas são geralmente descritos como longo, intermediário ou curto, dependendo da relação do raio transversal r Para o comprimento longitudinal L.. Uma classificação (arbitrária):

1. Longo cascas onde $r/L < 0.4$
2. Intermediário cascas onde $0.4 < r/L < 2.0$
3. Curto cascas onde $r/L > 2.0$

79 Em longo cascas as cargas de linha geralmente produzem esforços internos de magnitude significativa em toda a superfície do casca. Estes esforços internos são geralmente tão grandes que os valores de membrana tornam-se insignificantes em comparação. O sistema primário, portanto, não corresponde ao sistema real. Na verdade, como r/L diminui, o O sistema real se aproxima do comportamento de uma viga de curvado seção transversal Fig. figcircshellroverL.

80 Em suma cascas as cargas da linha produzem esforços internos no casca que são geralmente restritos à região perto das bordas longitudinais. Na verdade, como r/L aumenta, a maior parte do casca comporta-se como assumido no sistema primário, ou seja, com apenas valores de membrana. Em tais casos, curtos cascas são como arcos finos de tambor apoiados perto das bordas longitudinais por diafragmas ligeiramente curvados. Estes diafragmas carregam o arco de impulso para a transversal pórticos por in-plane tensões como profundo vigas.

CÓPIA PARA REVISÃO

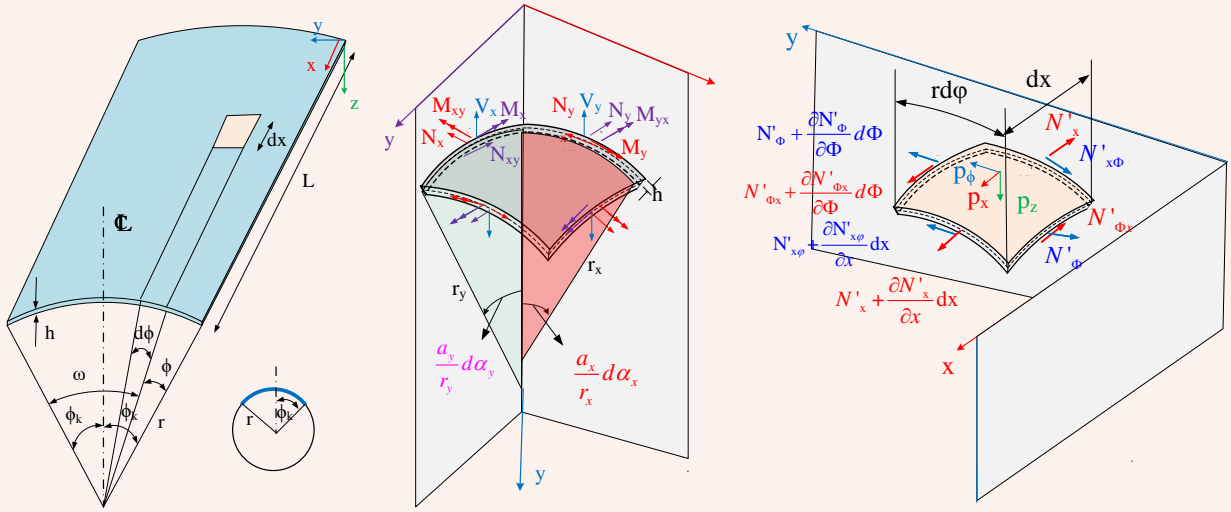
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

81 Com referência à definição geométrica de um elemento arbitrário casca na figura. 34.13aUm arco circular terá

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_{xy} = N'_{\theta y} \\ \alpha_y &= y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_x = N'_\theta \end{aligned} \tag{34.56}$$

Onde r é uma constante e ϕ é medido a partir da borda longitudinal.

82 O correspondente diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal do casca é mostrado na figura. 34.13c, e será referenciado abaixo na derivação.



(a) Casca

(b) Elemento Arbitrário (Fig. 34.1b para referência)

(c) Elemento

Figura 34.13: Diagrama de corpo livre de um elemento circular infinitesimal casca

83 Como a teoria da membrana é apenas uma aproximação, o procedimento é o seguinte:

Sistema primário: Isto é obtido reduzindo a teoria geral à teoria das membranas. Através da teoria das membranas, as cargas de superfície são resistidas apenas pelos resultados tensão.

Erros: Estes correspondem aos efeitos incompatíveis de borda, ou forças exigidas pela teoria da membrana nas bordas livres.

Correções: Cargas de linha (efeitos de borda unitária) são aplicadas ao longo das bordas livres.

Compatibilidade: O equilíbrio pode ser alcançado determinando o número de correções necessárias para remover os erros da teoria das membranas. Em nosso exemplo, vamos definir as cargas de linha iguais à membrana tensão resultantes ao longo da borda livre.

CÓPIA PARA REVISÃO

34.2.2 Teoria da membrana

84 Antes de examinarmos uma análise completa conduzida através da rasa cascas, vamos primeiro examinar a teoria das membranas. No entanto, vamos focar apenas nas derivações dos tensão resultados e deslocamentos.

34.2.2.1 Tensão resultados

Sistema primário

85 Com as suposições dadas pela Eq. 34.56, Eq. 34.55 agora estão reduzidos a:

$$\begin{aligned} N'_{\phi} &= -p_z r \\ N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi}}{\partial \phi} dx - \int p_{\phi} dx + f_1(\phi) \\ N'_{x} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{34.57}$$

86 Notamos que os subscritos usados são tais que x é o eixo horizontal, y o eixo vertical ou tangencial, e z O eixo radial. p é medido a partir da borda longitudinal.

87 As expressões resultantes estão agora escritas na forma de três equações com três forças desconhecidas N'_{ϕ}, N'_{x} e.. $N'_{x\phi} = N'_{\phi x}$, e assim um sistema primário é estabelecido.

88 Estes resultados, portanto, podem ser facilmente calculados para cargas distribuídas. Como exemplo, os tensão resultantes devido à carga morta serão derivados. Os resultados de outras condições de carga estão resumidos na tabela 34.5

89 Para um uniforme casca carga morta P_d Os componentes de carga são:

$$\begin{aligned} p_z &= p_d \cos(\phi_k - \phi) \\ p_{\phi} &= -p_d \sin(\phi_k = \phi) \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

e.. N'_{ϕ} pode ser obtido diretamente da primeira equação de 34.57

$$N'_{\phi} = -p_d r \cos(\phi_k - \phi) \tag{34.58}$$

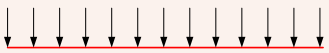
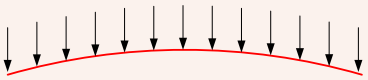
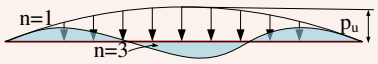
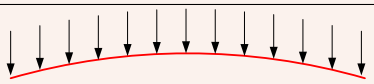
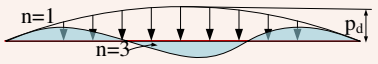
90 Quando esta expressão de N'_{ϕ} é substituído pelo segundo de Eqs. 34.57

$$N'_{x\phi} = \frac{1}{r}\int \frac{\partial \left[p_d r \cos\left(\phi_k - \phi\right)\right]}{\partial \phi} dx + \int p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) dx + f_1(\phi)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 34.5: Comparação das distribuições resultantes da membrana sob diferentes cargas

Membrana tensão resultante Kips/ft	Carrega ksf	Casca constantes ft	Distribuição transversal	Distribuição longitudinal
				
N'_ϕ	p_u	r	$\cos^2(\phi_k-\phi)$	1
$N'_{\phi x}$	p_u	$r(L/r)$	$\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$	$(3/2)(1-2x/L)$
N'_x	p_u	$r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(3x/2L)(1-x/L)$
				
N'_ϕ	p_d	r	$\cos(\phi_k-\phi)$	1
$N_{\phi x}$	p_d	$r(L/r)$	$\sin(\phi_k-\phi)$	$1-2x/L$
N'_z	p_d	$r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(x/L)(1-x/L)$
				
N'_ϕ	p_u	r	$\cos^2(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi\pi}$	p_u	$r(L/r)$	$\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$	$(3/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$
N''_π	p_u	$r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(3/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$
				
N'_ϕ	p_d	r	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi x}$	p_d	$r(L/r)$	$\sin(\phi_k-\phi)$	$(2/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$
N'_x	p_d	$r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(2/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$

(Todos os resultados tensão têm um sinal negativo)

Diferenciando e integrando, nós obtemos

$$N'_{x\phi} = p_d \sin(\phi_k-\phi)\, x + p_d \sin(\phi_k-\phi)\, x + f_1(\phi)$$

91 Em um simples viga, $N'_{z\phi} = 0$ Em.. $x = L/2$, do qual

$$f_1(\phi) = -p_d \sin(\phi_k-\phi)\, L$$

De modo que

$$N'_{x\phi} = 2p_d \sin(\phi_k-\phi)\, x - p_d \sin(\phi_k-\phi)\, L$$

ou

$$N'_{x\phi} = -p_d \sin(\phi_k-\phi)\, L\left(1-\frac{2x}{L}\right) \tag{34.59}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

92 Substituindo esse valor por $N'_{x\phi}$ no terceiro de Eq. 34.57 Nós temos

$$N'_x = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial\left[-p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L(1-2x/L)\right]}{\partial\phi} dx + f_2(\phi)$$

De onde

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\int\left(1 - \frac{2x}{L}\right) dx + f_2(\phi)$$

O que dá

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) + f_2(\phi)$$

93 Em um simples viga a força longitudinal N'_x deve ser zero em $x = 0$ e.. $x = L$, de modo que $f_2(\phi) = 0$ e..

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{34.60}$$

94 Na mesa 34.5 estas equações são separadas em três partes para enfatizar a distribuição de membranas tensão resultantes em um cilíndrico casca. A primeira parte de cada equação contém termos que dependem apenas da magnitude da carga e das dimensões do casca. A segunda e a terceira partes de cada equação dão, respectivamente, as distribuições transversais e longitudinais dos resultados tensão. As distribuições transversais e longitudinais não estão inter-relacionadas, de modo que onde dois tipos de cargas superficiais têm a mesma distribuição transversal mas diferentes distribuições longínquas as distribuições transversais dos resultados tensão serão as mesmas.

95 Os resultados dos Eqs. 34.58 para 34.60 estão tramados na Fig. 34.14 para um cilindro circular completo biapoiado.

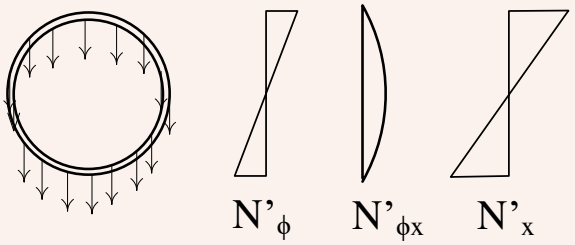


Figura 34.14: Tensão distribuição resultante em uma circular completa casca

96 A mesma distribuição de força também pode ser obtida considerando o casca como uma circular oca viga, abrangendo na direção do seu eixo de rotação.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

97 Na verdade, Eqs. 34.58 para 34.60 Dar valores de N'_ϕ, $N'_{x\phi}$, e N'_x que podem ser obtidos diretamente de fórmulas comuns, nas quais

$$\begin{aligned} f_\phi &= \frac{N'_\phi}{h} = -\frac{p_z T}{h} \\ v &= \frac{N'_{x\phi}}{h} = -\frac{VQ}{2Ih} \\ f_x &= \frac{N'_z}{h} = -\frac{My}{I} \end{aligned} \tag{34.61}$$

onde, para um anel circular seção transversal,

$$\begin{aligned} M &= p_d 2\pi r \left(\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\ y &= r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ I &= \pi h r^3 \\ V &= p_d 2\pi r \left(\frac{L}{2} - x\right) \\ Q &= 2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right) \end{aligned} \tag{34.62}$$

para que essas equações possam ser reescritas como

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -p_d r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ \frac{N'_{x\phi}}{h} &= -\frac{p_d 2\pi r[(L/2) - x]2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right)}{\pi h r^3 (2h)} \end{aligned} \tag{34.63}$$

O que dá

$$N'_{z\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L\left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{34.64}$$

e..

$$\frac{N'_z}{h} = -\frac{p_d 2\pi r\left[(Lx/2) - x^2/2\right] r\cos\left(\phi_i - \phi\right)}{\pi h r^3}$$

O que dá

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{34.65}$$

Notamos que Eq. 34.64 e.. 34.65 são os mesmos que 34.59 e.. 34.60.

34.2.2.1.1 Erros

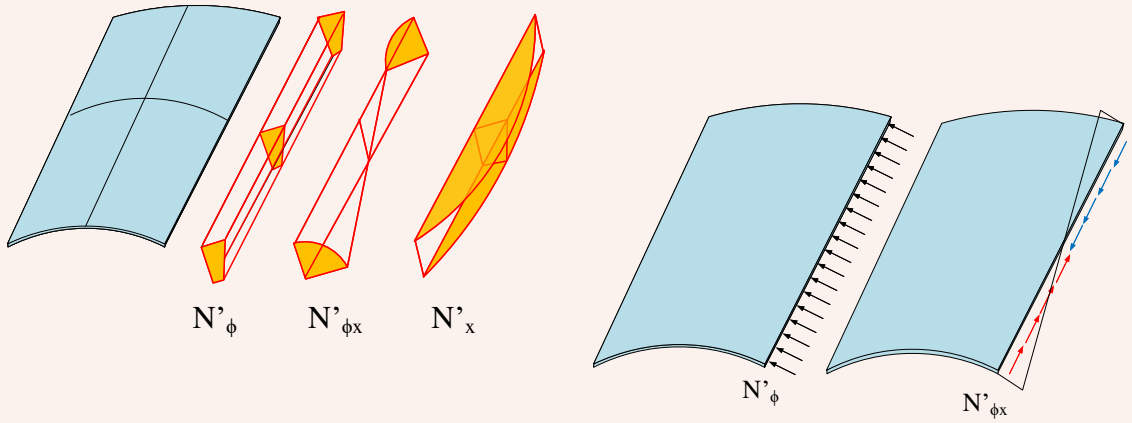
98 Reações de borda longitudinal devem igualar os valores da membrana N'_ϕ e.. $N'_{x\phi}$ para que a teoria da membrana produza os resultados internos corretos tensão. No entanto, nas bordas livres do casca, essas reações são zero.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

99 Para que a teoria da membrana dê uma imagem correta dos resultados internos tensão deve haver reações nas bordas longitudinais iguais aos valores da membrana N'_{ϕ}, e $N'_{z\phi}$.

100 A distribuição dos valores de membrana em um cilíndrico casca é mostrada na figura 1. 34.15a E as reações de borda necessárias na Fig. 34.15b.



(a) Forças da membrana (b) Reações de borda necessárias

Figura 34.15: Efeito de borda

34.2.2.1.2 Correção

101 Onde o casca tem bordas livres, essas reações são zero. Para explicar a falta de forças de reação de borda livre, devemos aplicar correções ou cargas de linha, $T_L = -N'_{\phi}$ e.. $S_L = -N'_{\phi x}$ que deve ser aplicado para dar as verdadeiras reações resultantes.

102 Teoria de Dobrar (§34.2.3) deve ser considerado para determinar o deslocamentos e esforços internos produzido a partir das cargas de linha na fase de correções da análise. Por simplicidade, cargas de linha uniformemente distribuídas podem ser assumidas como uma soma de cargas parciais e representadas por uma série Fourier. Por isso, uma carga de linha uniforme T_L, Fig. 34.16 Pode ser representado por uma série de Fourier.

$$(T_L)_x = \frac{4}{\pi} T_L \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{34.66}$$

As cargas de superfície também devem ser expressas por uma série Fourier para fornecer forças e deformações compatíveis ao longo do comprimento das bordas livres. Por exemplo, a série Fourier para o uniforme casca carga morta é

$$(p_d)_x = \frac{4}{\pi} p_d \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Os três primeiros termos da série são traçados e podem ser vistos na figura. 34.17.. As três ondas juntas assimilam uma carga uniforme. O primeiro mandato é muitas vezes considerado suficiente para longo cascas. No entanto, curto cascas muitas vezes exigem a adição do segundo mandato. Esta metodologia será discutida mais detalhadamente em §34.2.3.

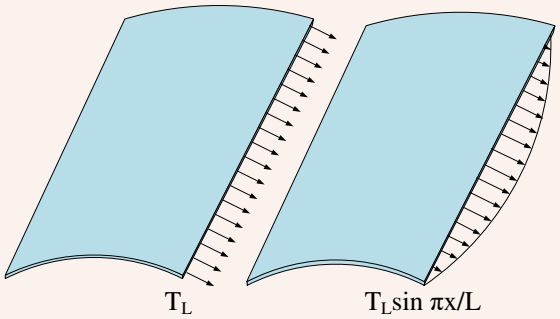


Figura 34.16: Carga de linha aplicada corretiva em circular casca

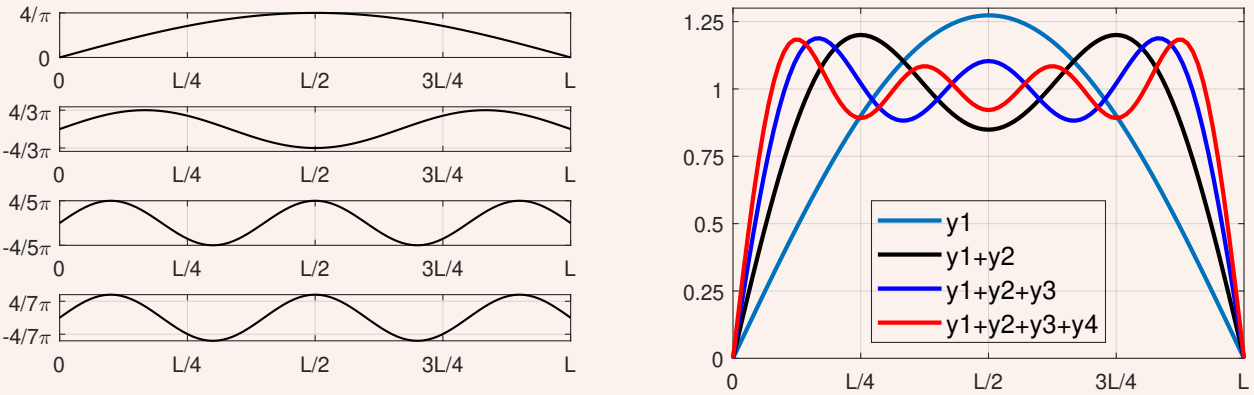


Figura 34.17: Sine série enredo

34.2.2.2 Deslocamentos

103 A derivação das equações deslocamento da teoria das membranas requer lembrar a superfície média deformações de §34.1.3.3 (Eqs. 34.29, 34.30 e.. 34.31). Utilizando as definições cilíndricas circulares casca (Eq.34.36), o deformações pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi &= \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi} \end{aligned} \tag{34.67}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

104 O deformações pode ser reescrito mais uma vez para acomodar os resultados da membrana tensão (§34.1.3.5.1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}\left(N'_x - \nu N'_\phi\right)\\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi &= \frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}\left(N'_\phi - \nu N'_x\right)\\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{Eh}N'_{x\phi}\end{aligned} \tag{34.68}$$

105 Desde então ν tem um impacto mínimo nas deformações, é negligenciado simplificar as equações deslocamento. O primeiro mandato de Eq. 34.68 É resolvido para o longitudinal deslocamento

$$u = \frac{1}{Eh}\int N'_x dx + f_3(\phi) \tag{34.69}$$

O terceiro termo é resolvido para a equação tangencial

$$v = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial u}{\partial\phi}dx + \frac{2}{Eh}\int N'_{x\phi}dx + f_4(\phi) \tag{34.70}$$

106 O radial deslocamento é obtido a partir do segundo

$$w = \frac{\partial v}{\partial\phi} - \frac{rN'_\phi}{Eh} \tag{34.71}$$

107 Estes deslocamentos podem ser avaliados para qualquer tipo de carga. Como exemplo, consideramos o caso do casca sob um carregamento uniformemente distribuído sobre a superfície casca. A distribuição longitudinal uniforme é aproximada pelo primeiro termo de uma série de Fourier da qual, com $k = n\pi/L$, $p = (4/\pi)p_d$, e $n = 1$

$$\begin{aligned}p_x &= p\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx\\ p_\phi &= -p\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx\\ p_x &= 0\end{aligned}$$

Os resultados tensão derivados da Eq. 34.57 Se tornar:

$$\begin{aligned}N'_\phi &= -pr\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx\\ N'_{x\phi} &= -\frac{2p}{k}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\cos kx + f_1(\phi)\\ N'_x &= -\frac{2p}{rk^2}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi} + f_2(\phi)\end{aligned} \tag{34.72}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

108 Quando Eq. 34.72 são introduzidos em Eqs. 34.69 para 34.71,

$$u = \frac{1}{Eh}\left[\frac{2p}{rk^8}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx - \frac{x^2}{2r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi} + x f_2(\phi)\right] \tag{34.73}$$

$$\begin{aligned} v = &-\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^8}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^2 f_1(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial f_2(\phi)}{\partial\phi}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial f_3(\phi)}{\partial\phi} - \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - x f_1(\phi)\right] + f_4(\phi) \end{aligned} \tag{34.74}$$

$$\begin{aligned} w = &\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^4}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin lx + \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^3 f_1(\phi)}{\partial\phi^3} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f_2(\phi)}{\partial\phi^2}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial^2 f_3(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx + x\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi}\right] + \frac{\partial f_4(\phi)}{\partial\phi} \\ &+ \frac{pr^2}{Eh}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \end{aligned} \tag{34.75}$$

109 No caso de um biapoiado casca,

$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = f_3(\phi) = f_4(\phi) = 0$$

e Eqs. 34.72 para 34.75 Reduzir para:

$$u = \frac{2p}{Ehr}\frac{1}{k^3}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx \tag{34.76}$$

$$v = -\frac{2p}{Eh}\left(\frac{1}{r^2}\frac{1}{k^4} + 2\frac{1}{k^2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{34.77}$$

$$w = \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left(1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4k^4}{2}\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{34.78}$$

110 É útil ter o vertical e horizontal deslocamentos e estes são facilmente obtidos a partir de Eq. 34.77 e.. 34.78 Como se segue:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\begin{aligned}\Delta_V =& -v\sin\left(\phi_k-\phi\right)+w\cos\left(\phi_k-\phi\right)\\ =&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[\left(1+2r^2k^2\right)\sin^2\left(\phi_k-\phi\right)+\left(1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\right)\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx\\ =&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx \qquad (34.79)\\ \Delta_H =&v\cos\left(\phi_k-\phi\right)+w\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\ =&\frac{2p}{Ehr^2}\left(-\frac{1}{k^4}-2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}+2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{r^4}{2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\ =&\frac{pr^2}{Eh}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \qquad (34.80)\end{aligned}$$

Onde Δ_V é positivo para baixo deslocamento e Δ_H é positivo para dentro deslocamento.

34.2.3 Teoria desleixada

34.2.3.1 Equações de equilíbrio

111 Antes de realizarmos a análise através da teoria do raso cascas, devemos primeiramente rederiver as equações dos resultados tensão e casais, juntamente com as equações de equilíbrio para acomodar as propriedades do cilíndrico circular casca. As equações de equilíbrio (34.28) foram anteriormente derivados para a teoria rasa casca em §34.1.4.1.. Utilizando a definição para um cilíndrico casca (§34.2.2.1), as equações de equilíbrio tornam-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x}r+\frac{\partial_{\phi x}}{\partial\phi}+p_x r=0\\ \frac{\partial N_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x}r-V_\phi+p_\phi r=0\\ \frac{\partial V_x}{\partial x}r+\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}+N_\phi+p_x r=0\\ -\frac{\partial M_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x}r+V_\phi r=0\\ -\frac{\partial M_x}{\partial x}r-\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial\phi}+V_x r=0\end{aligned} \qquad (34.81)$$

112 Note que os mesmos resultados são obtidos da Eq. 34.43a-34.43e para a teoria da superficial cascas, exceto que o termo Q_ϕ no segundo de Eq. 34.81 é negligenciado para superficial cascas. Os resultados tensão e tensão casais são obtidos da Eq. 34.42 em que

$$\phi_x=\frac{\partial w}{\partial x}\quad \phi_y=\frac{v}{r}+\frac{\partial w}{r\partial\phi}\quad \nu=0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

113 Os resultados tensão e tensão casais, Eq. 34.42, também foram anteriormente derivados em §34.1.4.1.. Mais uma vez, as equações são modificadas para explicar as propriedades cilíndricas casca

$$\begin{aligned} N_x &= Eh\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_\phi &= Eh\left(\frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r}\right) \\ N_{x\phi} = N_{\phi x} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi}\right) \\ M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{r^2\partial\phi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\ M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{2r\partial x} + \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{34.82}$$

Esses resultados poderiam ter sido obtidos da Eq. 34.44a-34.44f para a teoria da superficialidade cascas, exceto que os termos com v nos dois últimos Eq. 34.82 são negligenciados por rasos cascas.

34.2.3.2 Formulação

114 Agora que rederiveimos todas as 11 equações, podemos começar a derivação da parcial de oitava ordem única equação diferencial usando a teoria do raso cascas. Vamos reduzir as 11 equações para uma equação com uma desconhecida. A solução segue os seguintes passos:

1. Lembre-se das suposições para rasas cascas apresentadas em §34.1.4.1.1.. Todos os casais tensão devem ser expressos em termos de radial deslocamento. Isso é conseguido negligenciando os termos com v Em Eq. 34.82

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\ M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{34.83}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Os resultados radiais são escritos em termos de w De Eq. 34.81

$$\begin{aligned} V_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{r^3\partial\phi^3}+\frac{\partial^3 w}{r\partial x^2\partial\phi}\right) \\ V_x &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{r^2\partial x\partial\phi^2}\right) \end{aligned} \tag{34.84}$$

   Onde h e.. r são constantes.
3. Outros resultados podem ser escritos em termos de w usando os três primeiros de Eq. 34.81.. Substituindo o Eq. 34.84 no terceiro de 34.81 Nós conseguimos

$$N_\phi = \frac{Eh^3}{12}\left(r\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\phi^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4}\right)-p_z r \tag{34.85}$$

   Por sua vez, nós substituímos N_ϕ na segunda equação de 34.81.. Se cairmos V_ϕ, devido à suposição 2, nós obtemos

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial\phi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial\phi^3}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\phi^5}\right)+\frac{\partial p_z}{\partial\phi}-p_\phi \tag{34.86}$$

   Esta última expressão é a próxima diferenciada em relação ao ϕ Para obter

$$\frac{\partial^2 N_{x\phi}}{\partial x\partial\phi}$$

   Finalmente, a primeira equação de 34.81 é diferenciado com respeito a x, e o derivado

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 N_{\phi x}}{\partial\phi\partial x}-\frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{34.87}$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{Eh^3}{12}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\partial\phi^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial^6 w}{\partial x^2\partial\phi^4}+\frac{1}{r^5}\frac{\partial^6 w}{\partial\phi^6}\right]-\frac{\partial^2 p_z}{r\partial\phi^2}+\frac{\partial p_\phi}{r\partial\phi}-\frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{34.88}$$

4. Equação de compatibilidade é derivada dos três primeiros Eq.34.82 eliminando os termos em u e.. v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh}N_x \\ \frac{\partial v}{\partial\phi} &= \frac{r}{Eh}N_\phi + w \\ N_{x\phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Diferenciando, nós conseguimos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2} &= \frac{1}{Eh}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2} \\
\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} &= \frac{r}{Eh}\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2}\right) \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2}\right) + \frac{Eh}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}
\end{aligned} \tag{34.89}$$

5. Os resultados tensão derivados em Eqs. 34.85, 34.86 e.. 34.89 para completar a formulação geral

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2}{2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \phi^2} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{1}{2r^6}\frac{\partial^8 w}{\partial \phi^8} \\
&\qquad + \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
&= \frac{12}{Eh^3}\left(\frac{r^2}{2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^4} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial \phi^4} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 p_z}{\partial x^2 \partial \phi^2} - \frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2 \partial \phi}\right)
\end{aligned} \tag{34.90}$$

Coletando termos que nós obtemos

$$\begin{aligned}
r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^4 w + \frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{12}{Eh^3}\Bigg[&r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^2 p_z \\
&-2\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^8 p_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 p_z}{\partial x \partial \phi^2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{34.91}$$

Usando as notações de §34.1.4.1Encontramos esse Eq. 34.91 é realmente o mesmo que Eq. 34.54 com $\nu = 0$:

Se lembrarmos nossa equação anterior para superficial, Eq. 34.91Nossa nova equação é da mesma forma quando ν igual a zero.

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p) \quad \text{(Eq. 34.54)} \tag{34.92}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Para cilíndrico circular cascas,

$$\nabla_R^4 w = \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial x^4}$$
$$\nabla^8 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^4 w$$
$$f(p) = \frac{1}{r^2}\int \frac{\partial^2 p_x}{\partial \phi^2} dx + r\int \frac{\partial^2 p_\phi}{\partial x^2} d\phi$$
$$f'(p) = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\int p_\phi d\phi$$

34.2.3.2.1 Solução especial para carga uniforme

115 Se considerarmos o caso de uma carga p distribuídos uniformemente sobre a superfície do casca, que é $p = 4/pip_d$, então

$$\begin{aligned} p_z &= p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \\ p_\phi &= p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx \\ p_x &= 0 \end{aligned} \tag{34.93}$$

116 Usando o lado direito da parcial equação diferencial (Eq. 34.92), determinamos a solução particular.

$$\begin{aligned} &\frac{12}{Eh^3}\left[R^2k^4 p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + 2p\cos(\phi_k - \phi))(-\sin KX)K^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2}p\sin kx\cos(\phi_k - \phi - 2k^2 p\cos\phi_k(-\sin kx) - \frac{1}{r^2}p\sin kx(-\cos(\phi_k - \phi))\right] \\ &= \frac{12}{Eh^3}\left(r^2k^4 + 4k^2 + \frac{2}{r^2}\right)p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \end{aligned} \tag{34.94}$$

117 A solução em particular é determinada como

$$w = Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \tag{34.95}$$

Quando substituído para o lado esquerdo do Eq. 34.91 Rende-se

$$\begin{aligned} &r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + \frac{12}{h^2}\frac{\partial^4[Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial x^4} \\ &\qquad = r^2\left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + \frac{12}{h^2}k^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \end{aligned} \tag{34.96}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

118 Equacionando os lados esquerdo e direito da equação, nós resolvemos para a constante C de nossa solução particular

$$C = \frac{1}{Eh}\left[\frac{r^2k^4 + 4k^2 + 2/r^2}{(r^2h^2/12)(k^2 + 1/r^2)^4 + k^4}\right] \tag{34.97}$$

Substituindo-se em Eq. 34.95, nós calculamos w em qualquer ponto em termos de carga e dimensões do casca.

119 Os casais tensão, os resultados e deslocamento são obtidos substituindo w Eq. 34.83 Para Eq. 34.89.

34.2.3.2.2 Comparação: membrana *V.S* Raso Casca

120 É útil comparar os resultados da teoria das membranas com o de raso cascas. Os resultados estão apresentados na Tabela 34.6.

121 Note que é prática comum negligenciar o efeito de dobrar e usar a teoria da membrana no lugar da integral particular mais rigorosa. Os termos P e.. B Meça a precisão desta abordagem.

122 Para a solução em particular, substituir Eq. 34.93 Eq. 34.57 Obtemos o resultado tensão

$$N'_{\phi} = -pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

123 Quando nós substituirmos N'_{ϕ} no segundo mandato de Eq. 34.57 Nós conseguimos

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial[-pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial\phi}dx + \int p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx dx + f_1(\phi)$$

Depois da diferenciação e integração, $N'_{x\phi}$ se torna

$$N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx + f_1(\phi)$$

Onde para um biapoiado casca $f_1(\phi) = 0$.

124 Vamos substituir o novo termo para o terceiro mandato de Eq. 34.57.. De novo através da diferenciação e integração obtemos

$$N'_x = -2\frac{p}{k^2r}\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + f_2(\phi)$$

Onde para um biapoiado viga $N'_x = 0$ Em.. $x = 0$ e.. $x = L$. $f_2(\phi)$ pode ser calculado como zero e retirado da equação acima.

125 Em seguida, vamos derivar o deslocamentos da teoria das membranas usando os resultados acima derivados tensão e Eqs. 34.69, 34.70, e 34.71.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Depois da substituição, encontramos

$$u = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k - \phi)\cos kx$$
$$v = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1 + 2k^2 r^2\right)\sin(\phi_k - \phi)\sin kx$$
$$w = \frac{2}{Eh}\frac{pk^4}{r^2}\left(1 + 2k^2 r^2 + \frac{r^4 k^4}{2}\right)\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

126 Note que o deslocamento calculado através da solução particular pode ser reescrito como

$$u = u'(1 - P)$$
$$v = v'(1 - P)$$
$$w = w'\frac{1}{B + 1}$$

Onde

$$P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1 + 2k^2 r^2 + k^4 r^4)C$$
$$B = \frac{h^2}{12r^6 k^4}(k^2 r^2 + 1)^4$$

e da tabela de comparação, $\phi_k = (\phi_k - \phi)$. P e.. B são usados para medir a precisão da abordagem de membrana em comparação com o método raso casca.

127 Embora a teoria da membrana pareça ser a escolha fácil para evitar a rigorosa oitava ordem equação diferencial, ela só pode fornecer resultados razoáveis se atender a certos critérios. Em primeiro lugar, os resultados deslocamento não devem aumentar a dobra casca substancialmente uma vez que a metodologia negligencia todos casca dobra. Em seguida, o carregamento no casca deve ser uniforme sobre toda a superfície. Finalmente, os limites devem suprir as forças e permitir o deslocamentos exigido pela teoria. Muitas vezes a teoria das membranas não é permitida para o uso do projeto, mas no caso de um cilíndrico circular deve, parece útil acelerar o processo de projeto.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 34.6: Comparação de membranas e soluções rasas para cargas uniformes

Teoria da Membrana	Teoria Raso Casca
Casais	
$M'_{\phi} = 0$ $M'_{x\phi} = 0$ $M'_{x} = 0$	$M_{\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r^2} pC\cos(\phi_k)\sin kx$ $M_{x\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r} kpC\sin(\phi_k)\cos kx$ $M_{x^p} = \frac{Eh^3}{12} k^2 pC\cos(\phi_k)\sin kx$
Tensão Resultados	
$N'_{\phi} = -pr\cos(\phi_k)\sin kx$ $N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k)\cos kx$ $N'_{x} = -\frac{2p}{k^2 r}\cos(\phi_k)\sin kx$	$N_{\phi^p} = -pr(1-2P)\cos(\phi_k)\sin kx$ $N_{x\phi^p} = 2\frac{p}{k}(1-P)\sin(\phi_k)\cos kx$ $N_{x^p} = -\frac{2p}{k^2 r}(1-P)\cos(\phi_k)\sin kx$
Deslocamentos	
$u' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k)\cos kx$ $v' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}(1+2k^2r^2)\sin(\phi_k)\sin kx$ $w' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1+2k^2r^2+\frac{r^4k^4}{2}\right)$ $\cos(\phi_k)\sin kx$	$u^p = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}(1-P)\cos(\phi_k)\cos kx$ $= u'(1-P)$ $v^p = v-(1-P)$ $w^p = w'\frac{1}{B+1}$ $P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1+2k^2r^2+k^4r^4)C$ $B = \frac{h^2}{12r^6k^4}(k^2r^2+1)^4$ C From Eq. 34.97

128 Agora que revisamos os métodos de análise da teoria do raso cascas e da teoria das membranas, discutiremos brevemente a diferença entre as duas metodologias e os resultados.

129 A teoria da membrana é um método aproximado que muitas vezes é praticado para evitar a abordagem mais rigorosa de rasa cascas. A teoria da membrana permite a computação dos resultados tensão e deslocamentos sem o uso de dobra, já que toda flexão no casca é

CÓPIA PARA REVISÃO

negligenciada. A teoria também assume que todas as membranas tensões agem no plano do casca. Isso é semelhante à teoria da superficialidade cascas que requer que as cargas de superfície sejam transportadas pelo avião tensões. No entanto, ao contrário da teoria das membranas, a teoria do raso cascas é responsável pela flexão dentro do casca. A teoria assume que a curvatura superficial do casca, juntamente com a mudança na curvatura, é pequena mas ainda é necessária para fins de análise.

130 Vamos agora ver dois exemplos, primeiro com a teoria das membranas, e segundo com a Teoria da superficialidade cascas, para comparar os resultados de ambos os métodos.

34.2.3.2.3 Ex 34.1: Comparação da membrana & Raso casca

Longo Casca: Dado

$$\begin{array}{ll} h = 3 \text{ in} = 0.25 \text{ ft} & r = 26.6 \text{ ft} \\ L = 66.5 \text{ ft} & \frac{h}{r} = \frac{1}{106} \\ \frac{r}{L} = 0.4 & k = \frac{\pi}{L} \\ E = 4.32 \times 10^5 \text{ksf} & \phi_k = 45° \end{array}$$

O longo exemplo casca permite o uso da teoria das membranas em comparação com a teoria do raso cascas baseada nos seguintes valores:

$$C = 0.0284 \text{ ft}^3/\text{kip}$$
$$P = 0.00011$$
$$B = 0.000131$$

Claramente, a teoria da membrana pode ser usada no lugar da integral particular neste caso.

Curto Casca: Dado

$$\begin{array}{ll} h = 4 \text{ in} = 0.33 \text{ ft} & L = 30 \text{ ft} \\ r = 140 \text{ ft} & \frac{h}{r} = \frac{1}{420} \\ \frac{r}{L} = 4.67 & E = 4.32\text{x}10^5 \text{ ksf} \\ \phi_k = 45° & \end{array}$$

Os resultados do caso curto casca ainda são razoáveis e permitiriam o uso da teoria das membranas.

$$C = 0.135 \text{ ft}^3/\text{kip}$$
$$P = 0.011$$
$$B = 0.024$$

34.2.3.3 Solução geral

131 O sistema primário e os erros resultantes podem ser obtidos diretamente a partir da teoria das membranas ou da integral particular. A determinação das correções não é tão fácil porque o difícil problema de resolver a parte homogênea do Eq. 34.91 Tem que ser derrubado. Uma vez que o cilíndrico circular casca é um dos poucos sistemas casca para os quais uma solução foi bem trabalhada, uma derivação completa é dada aqui.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

132 A equação homogênea pode ser escrita:

$$r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 w+\frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \tag{34.98}$$

34.2.3.3.1 Deslocamento w

A solução tem a forma de

$$w=\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_m e^{M\phi}\sin kx \tag{34.99}$$

Onde A_m e.. M representam oito constantes arbitrárias e oito raízes. As constantes são baseadas no longitudinal condições de contorno enquanto as raízes são baseadas apenas nas dimensões do casca.

As raízes M são determinados substituindo o Eq. 34.99 Eq. 34.98

$$r^2\left(-k^2+\frac{M^2}{r^2}\right)^4+\frac{12}{h^2}k^4=0$$

Substituindo

$$Q^8=3(kr)^4\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

Nós conseguimos

$$\left(M^2-(kr)^2\right)^4 A_m e^{M\phi}\sin kx+4Q^8 A_m e^{M\phi}\sin kx=0$$

Que pode ser reescrita como

$$\left[\frac{M^2-(kr)^2}{\sqrt{2}Q^2}\right]^4+1=0 \tag{34.100}$$

133 Uma substituição adicional,

$$\gamma=\left(\frac{kr}{Q}\right)^2$$

Eq. 34.100 se torna

$$\frac{M^2}{Q^2}-\gamma=\sqrt[4]{-1}\sqrt{2} \tag{34.101}$$

134 Agora nos resta o termo imaginário $\sqrt[4]{-1}$ que é reescrito como

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\pm i}$$

Onde $i=\sqrt{-1}$.. Um número complexo é escrito como

$$z=x+iy=\mathrm{Re}^{i\theta}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Quando $x = 0$, $y = 1$, e $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ O número complexo torna-se

$$i = e^{i\theta}$$

onde, da equação de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

e.. $\theta = \pi/2$ formando a complexa relação de

$$i = e^{i\pi/2}$$

135 Agora que temos derivado a complexa relação, nós calculamos

$$\begin{aligned} \sqrt{i} = (i)^{\frac{1}{2}} &= e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} &= \cos\pi/4 + i \sin\pi/4 \\ e^{i\pi/4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{34.102}$$

Se substituirmos o Eq. 34.102 Eq. 34.101

$$M^2 = Q^2 \left[\gamma \pm (1 \pm i)\right] \tag{34.103}$$

As oito raízes resultantes são complexas e conjugadas

$$M_1 = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1) \tag{34.104}$$
$$M_2 = \pm(\alpha_1' \pm i\beta_1') \tag{34.105}$$

Onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1} + (1+\gamma)}{2}} = Qm_1 \\ \beta_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1} - (1+\gamma)}{2}} = Qn_1 \\ \alpha_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1} - (1-\gamma)}{2}} = Qm_2 \\ \beta_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1} + (1-\gamma)}{2}} = Qn_2 \end{aligned} \tag{34.106}$$

136 A seguir, determinamos as oito constantes arbitrárias A_m, expandindo o Eq. 34.99.

$$w = \begin{bmatrix} A_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)\phi} + A_2 e^{(\alpha_1 - i\beta_1)\phi} \\ A_3 e^{(\alpha_1' + i\beta_1')\phi} + A_4 e^{(\alpha_1' - i\beta_1')\phi} \\ A_5 e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)\phi} + A_6 e^{-(\alpha_1 - i\beta_1)\phi} \\ A_7 e^{-(\alpha_1' + i\beta_1')\phi} + A_8 e^{-(\alpha_1' - i\beta_1')\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{34.107}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

137 Como observado antes, da equação de Euler

$$e^{\pm i\beta_1\phi} = \cos\beta_1\phi \pm i\sin\beta_1\phi$$

permitindo que a primeira linha de nossa matriz seja reescrita como

$$\left[(A_1 + A_2)\cos\beta_1\phi + i(A_1 - A_2)\sin\beta_1\phi\right] e^{\alpha_1\phi} \tag{34.108}$$

138 Por.. w Para ser real, as constantes A_1 e.. A_2 Devem ser constantes conjugadas complexas.

$$A_1 + A_2 = 2a; \quad A_1 - A_2 = i2b \tag{34.109}$$

e reescrito sob a forma de

$$A_1 = a + ib; \quad A_2 = a - ib \tag{34.110}$$

Assim, A_1 e.. A_2 são constantes conjugadas complexas, assim como os outros pares. Equação 34.108 Pode ser simplificado substituindo-se 34.109 Nós conseguimos

$$2(a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \tag{34.111}$$

139 Quando comparamos a expressão acima com o primeiro termo de Eq. 34.107

$$\begin{aligned} A_1 e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} &= (a+ib)(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \\ &= [a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi + i(b\cos\beta_1\phi + a\sin\beta_1\phi)]e^{\alpha_1\phi} \end{aligned} \tag{34.112}$$

Claramente Eq. 34.111 é o dobro da parte real de 34.112 ou $2\text{Re}\left(A_1 e^{M_1\phi}\right)$, daí

$$w = 2\text{Re}\left[\begin{array}{l} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_2\phi} \\ A_5 e^{-M_1\phi} + A_7 e^{-M_2\phi} \end{array}\right] \sin kx \tag{34.113}$$

34.2.3.3.2 M_ϕ

140 Para fins ilustrativos, vamos resolver para M_ϕ De Eq 34.83

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} \\ &= -\frac{Eh^3}{12r^2} 2\text{Re}\left(\begin{array}{l} A_1 M_1^2 e^{M_1\phi} + A_3 M_2^2 e^{M_3\phi} \\ A_5 M_1^2 e^{-M_1\phi} + A_7 M_2^2 e^{-M_3\phi} \end{array}\right) \sin kx \end{aligned}$$

141 Os derivados parciais de w são facilmente obtidos como

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial\phi} &= 2\text{Re}\left[\begin{array}{l} A_1 M_1 e^{MM_\phi\phi} + A_3 M_2 e^{M_\phi\phi} \\ A_5\left(-M_1\right) e^{-M_1\phi} + A_7\left(-M_2\right) e^{-M_\phi\phi} \end{array}\right] \sin kx \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\text{Re}(k)\left[\begin{array}{l} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_1\phi} \\ A_s e^{-M_1\phi} + A_2 e^{-M_2\phi} \end{array}\right] \cos kx \\ etc. \end{aligned} \tag{34.114}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

e aplicando sucessivamente Eq. 34.114 para 34.113 Qualquer diferencial parcial de w pode ser obtido e substituído em 34.83, 34.84, ou 34.85 e.. 34.86 para obter tensão resultantes ou tensão casais.

142 Da Eq. 34.103

$$M_1^2 = Q^2(\gamma + 1 + i)$$
$$M_2^2 = Q^2(\gamma - 1 + i)$$

e.. A_1 e.. A_2 são dados pelo Eq. 34.110.. Assim,

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{6r^2}\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} +(a+ib)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi\right)e^{\alpha_1\phi} \\ +(c+id)M_2^2\left(\cos\beta_1'\phi + i\sin\beta_1'\phi\right)e^{\alpha_1'\phi} \\ +(e+if)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi - i\sin\beta_1\phi\right)e^{-a_1\phi} \\ +(g+ih)M_2^2\left(\cos\beta_1' - i\sin\beta_1'\phi\right)e^{-\alpha_1'\phi} \end{array}\right]\sin kx$$

ou em forma ampliada, após deixar cair os termos imaginários resultantes, encontramos

$$M_\phi = -\frac{Eh^2}{6r^2}Q^2\left[\begin{array}{l} +\left\{[a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{\alpha_1\phi} \\ +\left\{[c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{\alpha_1'\phi} \\ +\left\{[e(1+\gamma)-f]\cos\beta_1\phi + [e+f(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{-\alpha_1\phi} \\ +\left\{[g(\gamma-1)-h]\cos\beta_1'\phi + [g+h(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{-\alpha_1'\phi} \end{array}\right]$$

143 É conveniente medir ϕ da linha longitudinal central ou cortiça do casca em vez da borda como mostrado na figura. 34.13.. Então encontramos geometria simétrica e carregamos isso $a = e, b = f, c = g$, e $d = h$.. Para cargas não simétricas em simetria cascas, podemos combinar o caso simétrico com um antissimétrico, onde $a = -e$, etc. Agora reescreveremos M_ϕ para o caso simétrico e substituir os termos exponenciais por sua forma hiperbólica equivalente

$$e^{\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi + \sinh\alpha\phi$$
$$e^{-\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi - \sinh\alpha\phi$$

e obter (com ϕ, tirado da coroa :

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{3r^2}Q^2\left[\begin{array}{l} [a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ [c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi \end{array}\right]\sin kx \tag{34.115}$$

34.2.3.3.3 Outros termos; Procedimento

144 Todas as onze funções são expressas de forma semelhante e resumidas em tabelas 34.7 e.. 34.7.

145 O problema agora é obter correções, ou seja, efeitos de borda devido a cargas de borda (cargas de linha). Em geral, esses efeitos são obtidos definindo três condições de contorno

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 34.7: Casca coeficientes (ϕ Mede-se a partir da coroa

$$F = 2R\begin{bmatrix}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi\end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
M_ϕ	$-\frac{2D}{T^2}\sin kx$	$Q^2(1+\gamma)$	Q^2	$Q^2(\gamma-1)$	Q^2
M_z	$2Dk^2\sin kx$	1	0	1	0
Q	$-\frac{2Dk^3}{\gamma}\cos kx$	1	1	-1	1
N_ϕ	$\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	0	1	0	-1
N_x	$-\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	-1	$1+\gamma$	1	$1-\gamma$
Q_x'	$-\frac{2Dk^2}{\gamma}\cos kx$	$\gamma+2$	2	$\gamma-2$	2
u	$\frac{4Drk^2}{hE\gamma^2}\cos kx$	-1	$1+r$	1	$1-\gamma$
w	$2\sin kx$	1	0	1	0

$$F = 2R\begin{bmatrix}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi\end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
Q_ϕ	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1 - n_1$	$m_1 + n_1$	$-(m_2 + n_2)$	$m_2 - n_2$
Q_ϕ'	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1(1-\gamma) - n_1$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$-m_2(1+\gamma) - n_2$	$m_2 - n_2(1+\gamma)$
$N_{x\phi}$	$\frac{4Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx$	$-n_1$	m_1	n_2	$-m_2$
v	$\frac{4Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$n_1 - m_1(1-\gamma)$	$-m_2 + n_2(1+\gamma)$	$-n_2 - m_2(1+\gamma)$
$\theta*$	$\sin kx$	$\frac{2\alpha_1}{r} + \frac{(R.B_1)_\mu}{r}$	$\frac{2\beta_1}{r} + \frac{(R.B_2)_\nu}{r}$	$\frac{2\alpha_1'}{r} + \frac{(R.B_3)_\nu}{r}$	$\frac{2\beta_1'}{r} + \frac{(R.B_4)_\nu}{r}$
$M_{x\phi}$	$\frac{2Dk}{r}\cos kx$	α_1	β_1	α_1'	β_1'

$\nu = 0$ Assim $D = Eh^3/12$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

iguais a zero e o quarto igual a um; as quatro equações simultâneas resultantes são resolvidas para as quatro constantes arbitrárias a, b, c, e d.. Qualquer uma das funções de Mesas 34.7 pode ser resolvido como uma função direta da carga de linha unitária.

146 Por exemplo, considere a carga da linha $N_\phi = (4/\pi)(1)\sin kx$ aplicado simetricamente em cada borda longitudinal de um biapoiado casca. Quatro equações estão escritas

$$N_{\phi_k} = T_L = 8Dr\left(\frac{k^4}{\gamma^2}\right)\sin kx[\quad] = \frac{4}{\pi}\sin kx$$
$$M_\phi = -\frac{4D}{r^2}\sin kx[\quad] = 0$$
$$Q'_\phi = -\frac{4Dk^3}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^3}\sin kx[\quad] = 0$$
$$N_{\phi_{kx}} = \frac{8Drk^4}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^5}\cos kx[\quad] = 0$$

e resolvido para as constantes arbitrárias. Se a tangencial deslocamento v é desejado para o caso de uma unidade carga linha $N_{\phi_k} = T_L$, os valores resultantes a, b, c, e d são substituídos em

$$v = \frac{8Drk^3}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^7}\sin kx[\quad]$$

147 Assim, Tabelas 2 e 3 de (Whitney et al., 1952) estavam preparados[4]. Onde valores tabulados não estão disponíveis, é mais conveniente calcular as constantes arbitrárias diretamente para a carga real e condições completas de borda em vez de calcular separadamente os efeitos da carga de linha.

148 Embora o diferencial parcial de governo Eq. 34.91 foi derivado de suposições já detalhadas em §34.1.1, 34.1.2 e.. 34.2.3, a solução dada por Eq. 34.99 carrega a restrição matemática adicional que todas as funções contendo $\sin kx$ Desaparecer ao longo dos limites $x = 0$ e.. $x = L$.. Assim, valores contendo $\sin kx$ Em R da mesa 34.7 são zero em ambas as extremidades do casca.

149 As principais restrições físicas assim impostas são que o transverso pórticos, que suportam totalmente o casca em $x = 0$ e.. $x = L$, fornecer: 1) rigidez total em seus planos verticais, ou seja, $v_0 = W_0 = v_L = w_L = O$; e 2) completa flexibilidade em planos paralelos à superfície média casca, Ou seja, $M_{x_0} = N_{x_0} = M_{x_L} = N_{x_L} = 0$.. Idealmente, então, o casca é assumido para ser suportado por uma parede tanto tão profunda que nenhum in-plane deslocamento pode ocorrer e tão fino que nenhum fora de avião cisalhamento ou dobra pode ser desenvolvido. Embora os suportes reais casca se desviem muito desse ideal, a

[4] Esses são baseados no trabalho de (Finsterwalder, 1933); Na tabela os seguintes termos T_s, S, T_ϕ, t, l, I corresponde a.. N_z, $N_{zy} = N_{yz}$, N_ϕ, h, L, $h^3/12$ neste livro.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

teoria apresentada aqui tem sido amplamente utilizada no projeto de muitas estruturas de telhado construídas com sucesso.

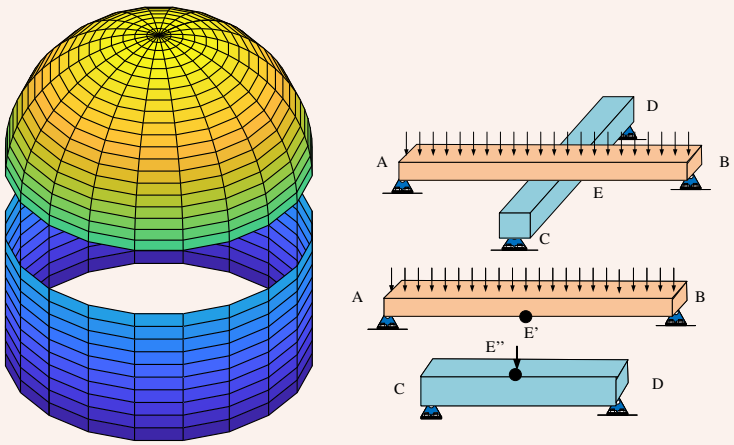
150 Eq. 34.99 foi usado principalmente para separar as variáveis e assim tratar a solução como aquela de um comum equação diferencial, da mesma forma que uma solução tipo Levy para placas. A restrição em dois dos quatro limites é o preço pago por esta conveniência matemática.

151 Para mais detalhes sobre o procedimento, o leitor deve consultar (Gibson, 1968) e.. (Portland Cement Association, 1954) que contém exemplos numéricos. Em um registro separado, (Baker, Kovalevsky e Rish, 1972) é um manual de soluções publicado em várias publicações (NASA, em particular), que se concentra no projeto de estruturas aeroespaciais. Também é aplicável aos civis.

152 Note que as formulações para cúpulas e paredes (geometrias axissimétricas) foram simplificadas por ter que lidar apenas com equações diferenciais comuns, e evitar equações diferenciais parciais.

34.3 Estaticamente indeterminado cascas

153 Um casca pode estar descansando (ou apoiando) em um suporte elástico com diferentes rigidez. Neste caso, teremos tanto deslocamento e descontinuidades de força entre os dois, Fig. 34.18a.. Isso é muito similar aos arranjos de vigas mostrados na figura. 34.18b onde em viga é suportado por outro com diferente rigidez.



(a) Cúpula em um barril (circular casca)

(b) Viga em viga

Figura 34.18: Analogias estaticamente indeterminadas

CÓPIA PARA REVISÃO

34.3.1 Borda viga

154 O objetivo da borda viga é endurecer a borda casca e, juntamente com o casca, carregar flexão tensões. Dois tipos de borda vigas serão revisados na análise do casca, vertical e horizontal vigas, Figs. 34.19b e.. 34.19a.. Vertical vigas são geralmente empregados por muito tempo cascas, onde a principal ação estrutural é dobra longitudinal. Horizontal vigas são comumente usados com curto cascas, onde a principal ação estrutural é o arco transversal.

155 A análise para ambos segue os quatro passos típicos:

Sistema primário: As cargas de superfície são suportadas por um casca contendo bordas livres. Também nas bordas livres, membros de borda consistindo em simples vigas carregando seu próprio peso morto estão presentes.

Erros: Dois erros são apresentados pelo sistema primário dos membros do casca e da borda. Primeiro, a diferença nas deflexões verticais da borda livre casca e da borda viga, $D^S_{10} + D^B_{10}$.. Em seguida, a diferença no longitudinal tensões na borda casca e no topo da borda viga, $f^S_{20} + f^B_{20}$.

Correções: Uma força vertical, V_b, e força de cisalhamento, S_b são aplicados na borda viga como visto em Fig. 34.19c. V_b Atua para cima no casca e para baixo na viga reduzindo a deflexão vertical e longitudinal no casca. Supõe-se positivo ao agir para baixo no casca e para cima na viga. S_b Atua dentro do casca e para fora na viga reduzindo a deflexão vertical e longitudinal no casca. Ele é assumido positivo quando agindo para fora no casca e dentro na viga.

Compatibilidade: Duas equações de compatibilidade são aplicadas. Vertical deslocamento e longitudinal tensões são restaurados da seguinte forma

$$X_1\left(D^S_{11} + D^B_{11}\right) + X_2\left(D^S_{12} + D^B_{12}\right) + D^S_{10} + D^B_{10} = 0 \tag{34.116}$$

$$X_1\left(f^S_{21} + f^B_{21}\right) + X_2\left(f^S_{22} + f^B_{22}\right) + f^S_{20} + f^B_{20} = 0 \tag{34.117}$$

156 Vertical deslocamentos são positivos na direção do positivo V_b.. Para tensões, a tensão é tomada como positiva no casca e a compressão como positiva na viga.

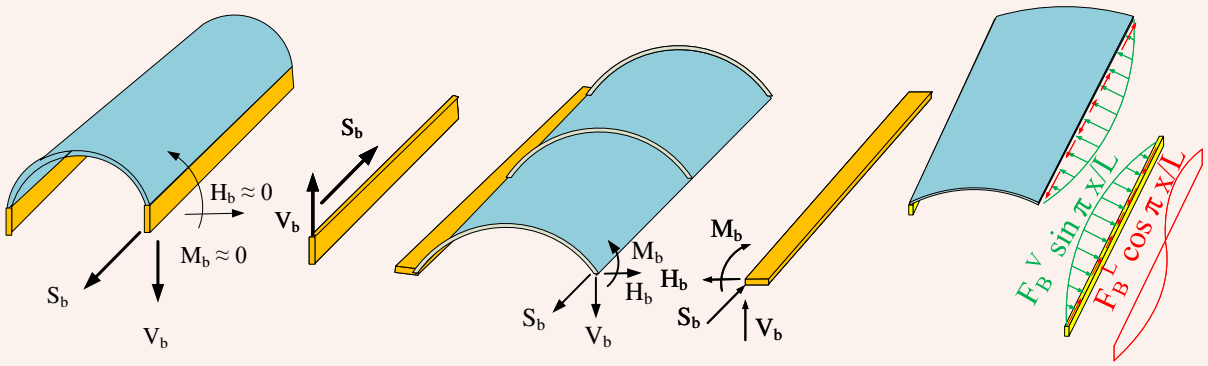
157 Os valores do casca deslocamentos e tensões foram discutidos anteriormente em §34.2.3.2.2 e.. (Whitney et al., 1952 PDF) através da teoria das membranas e a teoria dos rasos cascas. Os valores de borda viga deslocamentos e tensões serão calculados pela flexão comum abaixo.

34.3.1.1 Borda vertical vigas

158 Para a borda vertical vigas, Fig. 34.19a Cargas de linha T_L e.. S_L são aplicadas para que as forças de borda livre sejam iguais a zero. O objetivo da borda vertical é resistir ao movimento verticalΔ_v) e borda longitudinal deformação (N_x/Eh).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Borda vertical viga

(b) Borda horizontal viga

(c) Correção da vertical e forças cortantes

Figura 34.19: Circular cascas descansando em um suporte elástico

159 Se a viga é esbelto, assume-se que a resistência desprezível à rotação e tradução horizontal é oferecida. Isso significa que as forças de borda não são mais zero e desconhecidas V_b e.. S_b Deve ser aplicado. A determinação desses valores depende das propriedades da borda viga e sua capacidade de resistir à deflexão vertical e à borda longitudinal deformação.

160 Uma vez que as cargas da linha casca são representadas pela série Fourier, a mesma representação deve ser necessária para o carregamento da borda viga, de modo a alcançar compatibilidade com o casca sobre a totalidade do comprimento longitudinal.

161 A teoria da flexão comum utiliza as seguintes relações:

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= w_x = \text{loading} \\ EI\frac{d^3y}{dx^3} &= -S_x = \text{shear} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_x = \text{moment} \\ \frac{dy}{dx} &= -\int_0^L \frac{M_x}{EI}dx + f_1(x) = \theta = \text{slope} \\ y &= -\int_0^L \int \frac{M_x}{EI}dx + \int_0^L f_1(x)dx + f_2(x) = \text{deflection} \end{aligned} \tag{34.118}$$

162 O momento, inclinação e deflexão são todos resolvidos por uma caixa de carga conhecida e integração básica. Já que a carga sobre a viga é assumido como $V_b \sin \frac{n\pi x}{L}$ A equação de carga assume a forma de

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_s = Vb \sin kx$$

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

($k = n\pi/L$); Então, de cima

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -M = -Vb\sin kx$$
$$y = \frac{V_b}{EIk^4}\sin kx$$

163 Os longitudinais tensão no topo da viga são calculados como

$$f_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{V_b}{Z_t}\frac{1}{k^2}\sin kx$$

164 Com uma força de cisalhamento conhecida, $S_b \cos kx$, um impulso resultante na borda da viga é produzido a qualquer distância x do apoio viga.

$$T = -\int_0^x S_b \cos\frac{n\pi x}{L}dx = -S_b\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

165 Este impulso dá um momento fletor Te e uma carga normal T.. A deflexão vertical é calculada a partir do Eq. 34.118, com $f_1(x) = f_2(x) = 0$ e o longitudinal tensão no topo da viga é recomputado como

$$y = -\left[\frac{S_b}{EI}\frac{1}{k^3}\sin kx\right]e \tag{34.119}$$

e o longitudinal tensão no topo da viga é

$$f_t = \frac{T}{A} + \frac{Te}{Z_t} \tag{34.120}$$

166 Para um retangular seção transversal, as equações anteriormente discutidas podem ser escritas em forma de matriz. Quando $I = bd^3/12$, $Z = bd^2/6$ e.. $e = d/2$, as equações são resumidas como visto abaixo. Por.. $V_b = S_b = 1$:

$$D_{11}^B = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{12}{\pi^4 n^4}\sin kx = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{34.121}$$
$$f_{21}^B = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin kx = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx D_{12}^B \quad = -\frac{L^3}{Ebd^2}\frac{6}{\pi^3 n^3}\sin kx \tag{34.122}$$
$$f_{22}^B = \frac{L}{bd}\frac{4}{\pi n}\sin kx \tag{34.123}$$

167 Os deslocamento e os tensão devido a cargas na viga podem ser encontrados somente nos Eqs. 34.123.. Usando a representação da série Fourier para a carga uniforme vertical

$$(w_{B+L})_x = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin kx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós derivamos

$$D_{10}^{B} = -\frac{4}{\pi} w_{B+L} \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \tag{34.124}$$

$$f_{20}^{B} = \frac{4}{\pi} w_{B+L} \frac{L^2}{bd^2} \frac{0.60793}{n^2} \sin kx \tag{34.125}$$

34.3.1.2 Borda horizontal vigas

168 Para a horizontal viga, Fig. 34.19a, o processo é quase idêntico ao da vertical viga; No entanto, H_b Substitui V_b Em Eq. 34.118Da mesma forma, d e.. b (termos de Eqs. 34.123) são invertidos para representar a largura e profundidade viga. Semelhante à vertical viga, supõe-se que tenha rotação e transversa insignificantes rigidez.

169 A principal diferença é encontrada na adição de uma carga vertical V_{B+L} e um momento fletor M_{B+L} na borda casca.

$$V_{B+L} = w_{B+L} d$$

$$M_{B+L} = w_{B+L} \frac{d^2}{2}$$

170 Assim, a borda horizontal viga é assumido para carregar sua própria carga como um cantilever de extensão d, não como uma viga de extensão L.. Razão de profundidade b para passar L para todas as bordas vigas normalmente não excederá 1/3, então a teoria da flexão comum pode ser aplicada.

34.3.2 Borda pré-stressada viga

171 O objetivo de prostressar dentro da borda viga é permitir uma redução no tamanho da viga. Mais uma vez seguiremos nosso procedimento de análise dos quatro passos e é o seguinte:

Sistema primário: O sistema primário consiste em dois itens separados. O primeiro é o casca sem carga com bordas livres. A segunda é a borda viga analisada como um simples viga sujeito à carga de protensão.

Erros: Dois erros são apresentados pelos sistemas primários do casca e membros de borda: 1) a diferença nas deflexões verticais da borda livre casca; 2) a diferença na borda longitudinal tensões e no topo da borda viga. Para ambos os casos, a deflexão zero ocorrerá na borda casca desde que a estrutura casca seja descarregada.

Correções: Uma força vertical, V_b, e força de cisalhamento, S_b são aplicados na borda viga como visto em §34.3.1. V_b Atua para cima no casca e para baixo na viga reduzindo a deflexão vertical e longitudinal no casca. Supõe-se positivo ao agir para baixo no

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

casca e para cima na viga. S_b Atua dentro do casca e para fora na viga reduzindo a deflexão vertical e longitudinal no casca. Ele é assumido positivo quando agindo para fora no casca e dentro na viga.

Compatibilidade: As equações de compatibilidade são as mesmas que as dadas para §34.3.1 Com exceção dos termos de erro derivados da Eq. 34.125.

172 Os novos termos de erro são derivados de Eqs. 34.123.. Se a borda viga é considerada como um simples viga, um perfil de reforço parabólico provoca uma deflexão vertical ascendente e um longitudinal tensão no topo da borda viga.

$$D_{10}^B = -\int_0^L \int \frac{M_F}{EI} dx dx + \int_0^L f_1(x) dx + f_2(x) \tag{34.126}$$

$$f_{20}^B = \frac{F}{A} - \frac{M_F}{Z_t} \tag{34.127}$$

Onde M_F é o momento fletor devido à excentricidade do perfil dos tendões.

173 As deflexões e tensões causadas por este momento fletor são calculadas em todo o membro, exceto nos suportes onde o momento fletor é assumido como zero. A carga uniforme equivalente é então usada para calcular as deflexões e tensões.

$$w_e = \frac{8Fe_c}{L^2}$$

que pode ser novamente representado pela série Fourier:

$$(w_e)_x = \frac{4}{\pi} w_e \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

174 Se a borda viga é de um retangular seção transversal, Eq. 34.126 é reescrito na forma de

$$D_{10}^B = \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \tag{34.128}$$

e o segundo mandato de Eq. 34.127 como o segundo de Eq. 34.125

$$\frac{M_F}{Z_t} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{bd} \sin kx - \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^2}{bd^2} (0.60793) \sin kx \tag{34.129}$$

175 Para o primeiro mandato de Eq. 34.127 A compressão uniforme é dada pela série Fourier:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo as duas últimas equações para Eq. 34.127 e usando apenas o primeiro O termo da série Fourier, nós obtemos

$$f_{20}^{B}=\frac{4}{\pi}\frac{F}{bd}\sin kx-\frac{4}{\pi}\frac{8Fe_c}{L^2}\frac{L^2}{bd^2}(0.60793)\sin kx \tag{34.130}$$

176 V_b^F e.. S_b^F são determinados inserindo Eq. 34.128 e.. 34.130 Em 34.116-34.117.

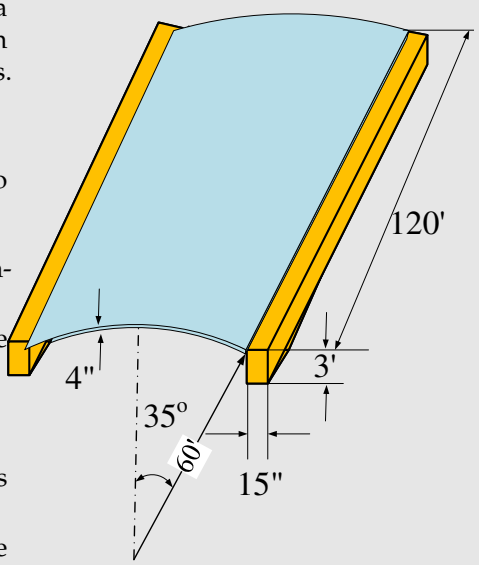
34.3.2.1 Ex 34.2: Desenho de cilíndrico casca

Nota pessoal: Esta é uma solução para uma tarefa de dever de casa para d.C.-720, um curso sobre *Análise e Desenho de Cascas* que foi ensinado pelo Professor Richard Gallagher na primavera de 1976. Naquela época, era meu primeiro semestre em Cornell, e o Professor Gallagher[a] foi um dos professores mais influentes que tive durante meus estudos de graduação. 47 anos depois, vou me aposentar no final deste ano e estou feliz em inserir minha solução neste livro.

[a]Com quem eu tomei Elemento finito, e otimização estrutural também.

Um cilíndrico casca deve ser analisado para uma carga morta de 80 lb/ft^2.. Suponha que diafragmas estejam presentes em cada extremidade, que são rígidos em seus próprios planos. $E=3\times10^7$ Psi, $\nu=0$.
Vamos proceder do seguinte modo:

1. Analisar o casca sem borda vigas, mas suportado pelo diafragma final apenas usando
   (a) Solução de membrana usando a tabela 2A (apêndice) E); tabulação e gráficos de resultados
   (b) Solução exata baseada na teoria rasa. Compare com solução de membrana.
2. Considere o casca descansando na borda viga.
   (a) Determinar Casca e viga vertical deslocamentos etensões
   (b) Escreva uma equação de compatibilidade de deslocamentos entre casca e viga, e resolva
3. Determine as forças finais agindo na borda vigas.



CÓPIA PARA REVISÃO

Casca em Diafragma Suporte Apenas

Solução de Membrana

Primeiro, vamos usar a aproximação de membrana para analisar o casca observando que $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x}$ Não será igual a zero devido à aproximação.

Sistema primário Os resultados tensão determinarão a partir da teoria das membranas como resumido na tabela 34.5.

Erros Como o sistema primário não considerou a presença da borda viga, teremos erros em N'_ϕ e.. $N''_{\phi x}$ devido à teoria da membrana. Assim, substituindo p por $\frac{4}{\pi}p$ (Eq. 34.66), $k = \frac{\pi}{L}$ Eq. 34.72 se tornar

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -\frac{4}{\pi} pr \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \\ &= \frac{4}{\pi}(0.080)(60)\cos(35-0)\sin\frac{(1)\pi L}{L^2} \\ &= -5.006 \text{ k/ft na borda do cilindro em } L/2 \\ N'_{\phi x} &= -\frac{8pL}{\pi^2}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx \\ &= -\frac{(8)(0.08)(120)}{\pi^2}(0.5736)(0.9997) \\ &= -4.463 \text{ k/ft} \end{aligned}$$

Na borda do cilindro com $x = 0$ ou L.

Correções Para "constrair"o tensão resultante da teoria das membranas ao longo das bordas, N'_ϕ e.. $N'_{\phi x}$ são aplicados e resultantes tensões são calculados a partir da tabela 2 A (apêndice E), definido em termos de

$$\begin{aligned} \frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} \simeq 200 \\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6 \\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ \end{aligned}$$

Então nosso casca é um barril intermediário que pode ser analisado usando a tabela 2A (apêndice) E).

Compatibilidade

$$\begin{aligned} V_L &= -N'_\phi \sin\phi_k = -(5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -N'_\phi \cos\phi_k = -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -N'_{\phi k} = -4.463 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Verificando a aplicabilidade da tabela 2A:

$$\frac{r}{h} = \frac{60}{3.5/12} = 180 \simeq 200 \quad \text{so we can use table 2A}$$
$$\frac{r}{L} = \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6$$
$$\phi_k = 35° < 45°$$

Então nosso casca é um barril intermediário que pode ser analisado usando a tabela 2A (apêndice) E).

Carregando	Multiplicadores	Ângulo ϕ Mensurado a partir da borda		
		35°	20°	0°
	$N_x = T_x; x = L/2$ K/ft			
Carregar‡	$C = \frac{2}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{L} \cos(\phi_k - \phi)$	-2.026	-0.1957	-0.1660
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.953	-4.784	-4.058
$V_L^\dagger$	Coeficiente C (col 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+148.4	-100.6	+599.6
$H_L^\dagger$	Coeficiente C (col 5)	-7.760	+3.367	-22.16
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-127.3	+55.23	-363.5
$S_L^\dagger$	Coeficiente C (col 9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.048	-3.367	+43.97
TOTAL		+17.19	53.52	+276.0
	$N_{\phi x} = S; x = 0$			
Carregar‡	$C = -\frac{2}{\pi} \cos\frac{\pi x}{L} \sin(\phi_k - \phi)$	0.0	-0.1648	-0.3651
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right) C$	0.0	-2.014	-4.463
$V_L^\dagger$	Coeficiente C (col 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+23.09	0.0
$H_L^\dagger$	Coeficiente C (col 6)	0.0	-3.036	0.0
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-24.90	0.0
$S_L^\dagger$	Coeficiente C (col 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-0.8945	+4.630
TOTAL		0.0	-4.718	+0.10
	$N_\phi = T_\phi; x = L/2$			
Carregar‡	$C = -\sin\frac{\pi x}{L} \cos(\phi_k - \phi)$	-1.0	-0.9659	-0.8192

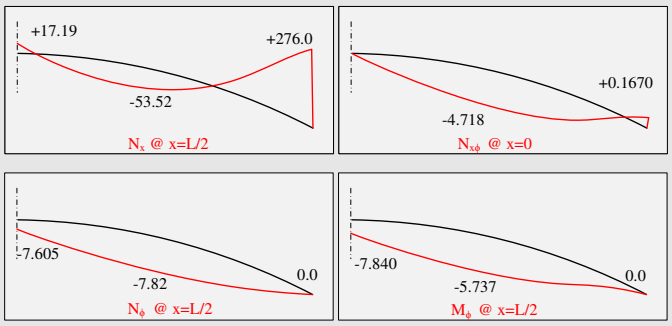
Continuando na próxima página

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Carregando	Multiplicadores	Ângulo ϕ Mensurado a partir da borda		
		35°	20°	0°
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-6.112	-5.903	-5.007
$V_L^\dagger$	Coeficiente C (col 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.493	-6.962	+1.648
$H_L^\dagger$	Coeficiente C (col 7)	0.6687	+1.253	+0.8192
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-2.742	+5.138	+3.360
$S_L^\dagger$	Coeficiente C (col 11)	-0.0528	-0.0204	0.0
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.2445	-0.0945	0.0
TOTAL		-7.605	-7.821	+0.001
	$M_\phi; x = L/2$			
$V_L^\dagger$	Coeficiente C (col 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.05	-21.81	0.0
$H_L^\dagger$	Coeficiente C (col 8)	+0.0486	+0.0670	0.0
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.96	+16.49	0.0
$S_L^\dagger$	Coeficiente C (col 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.7501	-0.4167	0.0
TOTAL		-7.840	-5.737	0.0

‡ Mesa 34.5; † Quadro 2A-L (E)



Vamos novamente notar que $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} \neq 0$ devido às suposições de membrana.

Solução Raso Casca

Aqui buscamos a solução exata usando a solução analítica rasa casca (§34.2.3).

1. Dimensões e cargas: $L = 120$ ft, $r = 60$ ft, $h = 4$ in, $\phi_k = 35°$, $p = 0.0$ KSF

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Casca constantes

$$k = \frac{n\pi}{L} = 0.02618; \qquad n = 1$$
$$\gamma = \frac{rk}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{h}{r}} = 0.08322$$
$$Q = \sqrt[8]{3}\sqrt[4]{\frac{r}{h}}\sqrt{rk} = 5.445$$

3. Raízes (Eq) 34.106)

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = 1.1308$$
$$n_1 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = 0.4422$$
$$m_2 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = 0.469$$
$$n_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = 1.0662$$

4. Coeficiente de M_1 & M_2

$$\alpha_1 = Qm_1 = 6.1572$$
$$\beta_1 = Qn_1 = 2.407$$
$$\alpha_1' = Qm_2 = 2.5537$$
$$\beta_1' = Qn_1 = 5.8055$$

5. Multiplicadores trigonométricos e hiperbólicos para $\phi = -35° = 0.6108$ -Rad. Da coroa

$$\begin{array}{llll}
\cos\beta_1\phi & = +0.09929 & \cos\beta_1'\phi & = -0.919 \\
\sin\beta_1\phi & = -0.9950 & \sin\beta_1'\phi & = +0.39382 \\
\cosh\alpha_1\phi & = +21.5116 & \cosh\alpha_1'\phi & = +2.4844 \\
\sinh\alpha_1\phi & = +0.214884 & \sinh\alpha_1'\phi & = -2.2742 \\
\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = +2.1466 & \cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = -2.1443 \\
\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = +21.3812 & \sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = -21.4043 \\
\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = -2.2836 & \cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = +2.0904 \\
\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = -0.8956 & \sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = +0.9784
\end{array} \tag{34.131}$$

6. Casca condições de borda (note que não eram aplicáveis pela teoria da membrana)

$$M_\phi = 0$$
$$N_\phi = 0 = N_\phi' + T_L$$
$$Q_\phi' = Q_\phi + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial x} = 0 \quad \text{desprezando a variação de } n \text{ de } M_{\phi x}$$
$$N_{\phi x} = 0 = N_{\phi x}' + S_L$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

7. Equações para M_ϕ da mesa 34.7

$$\begin{array}{llll} B_1 & = Q^2(1+\gamma) & = +32.1153 & B_3 = Q^2(1-\gamma) = -27.1807 \\ B_2 & = Q^2 & = +29.6480 & B_4 = Q^2 = 29.6480 \end{array}$$

Substituindo-se pelas equações correspondentes na tabela e equiparando a zero

$$2R\Big[(32.1153Q-29.6480b)(2.1466)-(29.6480a+32.1153b)(21.3812)+(-27.1807c+29.6480d)(2.2836) + (29.6480c-27.1807d)(0.8956)\Big] = 0 \quad (34.132)$$

Simplificando

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.3612d = 0$$

8. Equação para N_ϕ da mesa 34.7

$$B_1 = 0; \quad B_2 = 1; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -1$$

Substituindo

$$\frac{4D(60)(0.02618)^4}{0.08322^2}[(-b)(2.1466) - (a)(21.3812) + d(-2.2836) - (-c)(-0.8956)] - \frac{5.006}{2} = 0.0$$

$$\Rightarrow 0.348070a + 0.034945b + 0.014580c + 0.037125d = -\frac{2.503}{D} \quad (34.133)$$

9. Equação para Q'_ϕ da mesa 34.7

$$\begin{array}{ll} B_1 = m_1(1-\gamma) - n_1 = 0.59450 & B_3 = -m_2(1+\gamma) - n + 2 = -1.5742 \\ B_2 = m_1 + n_1(1-\gamma) = 1.5362 & B_4 = m_2 - n_2(1+\gamma) = 0.68593 \end{array}$$

Substituindo

$$-\frac{-20(0.02618)^3}{(\sqrt{.08322})^3}\Big[(0.5945a - 1.53626b)(-2.1443) - (1.5362a + 0.5945b)(-21.4043) + (-1.5742c + 0.68593d)(2.0944) - (-0.68593c - 1.5747d)(0.9784)\Big] = 0.0 \quad (34.134)$$

ou

$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.97410d = 0.0$$

10. Equação para $N_{\phi x}$ da mesa 34.7

$$\begin{array}{ll} B_1 = -n_1 = -0.4422 & B_3 = +n_2 = 1.0662 \\ B_2 = +m_1 = +1.1308 & B_4 = m_2 = -0.4690 \end{array}$$

Substituindo

$$\frac{8D(60)(0.02618)^4}{(\sqrt{0.08322})^5}\Big[(-0.4422a - 1.1308b)(-2.443) - (1.1308a - 0.4422b)(-21.4043) + (1.0662c + 0.4690d)(2.0904) - (-0.4690c + 1.0662d)(0.9784)\Big] - 4.463 = 0.0 \quad (34.135)$$

ou

$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

11. Solução para constantes arbitrárias

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.361d = 0$$
$$0.34807a + 034945b + 0.14580c + .037175d = -\frac{2.505}{D}$$
$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.9741d = 0.0$$
$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$
$$\Rightarrow a = \frac{8.6097}{D}; \quad b = -\frac{26.4349}{D}; \quad c = \frac{-136.668}{D}; \quad d = \frac{-69.4923}{D};$$

12. Da mesa 34.7
$$D = \frac{Eh^3}{12} = \frac{(3\times 10^4)(4/12)^3}{12}(144) = 1.33\times 10^4$$
ou
$$a = 6.4573\times 10^{-4}; \quad b = -0.0020; \quad c = -0.0103; \quad d = -0.0052;$$

13. Nós então substituimos esses coeficientes, e os coeficientes tabulados em Eq. 34.131 Eq. 34.115 e obter
$$N_x = 281.285 \text{ k/ft}$$

14. Desde que computamos as equações para $\phi = 35°$ Da coroa onde $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} = 0$; Assim, a única comparação possível é $N_x = 281.285$ K/ft comparado com 276.0 k/ft da membrana Aproximem-se. Muito perto!

Casca-Viga

Sistema primário

Os resultados finais da parte anterior constituirão o sistema primário, e o resultado tensões será usado para determinar o deslocamentos das tabelas 2A e 2B no Apêndice E

Erros

Isso é devido a

1. Deflexões verticais
2. Longitudinal tensões

ao longo da borda casca. Assim, teremos descontinuidades ao longo do vigas.

A rigidez torsional da viga será considerada insignificante.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Membrana Vertical A vertical deslocamento Δv é causada por resultados de membrana (Eq. 34.79) e cargas de borda da tabela 2A (apêndice E).

$$\Delta v^s = \frac{L^4}{r^3 hE}\left\{\underbrace{pr\left[\left(\frac{2r}{\pi L}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{r}{L}\right)^4\right]}_{\text{Membrane deflection}} + \underbrace{\text{Col}(1)V_L + \text{Col}(4)H_L + \text{Col}(7)S_L}_{\text{Edge load effects on deflections, Table 2B}}\right\}\sin kx$$

$$= \frac{(120)^4 L^2}{(60)^3(4/12)E}\left\{(0.08)(60)\left[\left(\frac{2(60)}{120\pi}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{60}{120}\right)^4\right]\right.$$
$$\left.+(486.24)(2.871) - (244.3)(4.101) + (8.309)(4.63)\right\}\sin kx$$
$$= \frac{L^2}{E}(86.76)\sin kx = D_{10}^S \quad (34.136)$$

onde o subscrito 1 corresponde à deflexão vertical, e 0 à carga morta aplicada.

Membrane Edge Tensão A outra incompatibilidade é para o tensões. $N_x = T_x = 2.76$ K/ft at $L/2$

$$\frac{N_x}{h} = \frac{2.76}{4/12} = 8.28 \text{ ksf} = f_{20}^S \quad \text{at } x = L/2$$

onde em f_{20}^S o subscrito 2 e 0 correspondem a tensões e carga aplicada respectivamente.

Viga Vertical Deslocamento Quanto ao viga, há uma semelhança entre D_{10}^B e.. f_{20}^b. Da Eq. 34.125, onde o peso da viga é

$$w = \frac{15}{12}(3)(0.15) \text{ k/ft}^3 = 0.5625 \text{ k/ft}$$

$$D_{10}^B = -\frac{4}{\pi} w \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx$$
$$= -\frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2 L^2}{E\left(\frac{15}{12}\right)(3)^3}(0.123)\sin kx$$
$$= -37.586\frac{L^2}{E}\sin kx$$
$$f_{20}^B = \frac{4}{\pi} w \frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx$$
$$= \frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)^2}(0.60793)\sin kx$$
$$= 557.37\sin kx$$

Incompatibilidades

CÓPIA PARA REVISÃO

Casca Deslocamentos V_b e.. S_b são também aplicados no casca. Como em cima

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{L^4}{r^3 hE}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\frac{(120)^2}{(60)^3(4/12)}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{97.28}_{D_{11}^s}V_b + \underbrace{1.662}_{D_{12}^s}S_L\right)\sin kx\end{aligned}$$

Casca Tensão

$$\begin{aligned}f^s &= \left(\frac{L}{r}\right)^2\frac{1}{h}\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\frac{120}{60}\right)^2\left(\frac{12}{4}\right)\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{626.52}_{f_{21}^s}V_b + \underbrace{28.488}_{f_{22}^s}S_b\right)\sin k_x\end{aligned}$$

Viga Deslocamentos (Eq. 34.123)

$$\begin{aligned}\Delta v^b &= \frac{L^4}{bd^3E}\left[(0.123)V_b - \frac{d}{L}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2(120)^3}{(15/12)(3)^3E}\left[(0.123V_b - \frac{3}{120}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{52.48}_{D_{11}^b}V_b\underbrace{-2.064}_{D_{12}^b}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

Viga tensão

$$\begin{aligned}f_t^b &= \frac{L}{bd}\left(-0.608\frac{L}{d}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{120}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)}\left(-0.608\frac{120}{3}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{-778.24}_{f_{21}^b}V_b + \underbrace{40.736}_{f_{22}^b}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Compatibilidade

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{E}\left[(\underbrace{97.28}_{D_{11}^s}+\underbrace{52.48}_{D_{11}^b})V_b+(\underbrace{1.662}_{D_{12}^s}-\underbrace{2.064}_{D_{12}^b})S_b+(\underbrace{86.76}_{D_{10}^s}-\underbrace{37.586}_{D_{10}^b})\right]=0 \\ (\underbrace{626.52}_{f_{21}^s}-\underbrace{778.24}_{f_{21}^b})V_b+(\underbrace{28.488}_{f_{22}^s}+\underbrace{40.736}_{f_{22}^b})S_b+(\underbrace{828.0}_{f_{20}^s}+\underbrace{557.37}_{f_{20}^b})=0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 149.76 & -0.402 \\ -151.72 & 69.224 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -49.174 \\ -1,385.37 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.3839 \\ -20.85 \end{Bmatrix}$$

Valores Finais

De cima, nós tivemos $N'_{\phi}=-5.006$ e.. $N'_{\phi x}=-4.463$

$$\begin{aligned} V_L &= -(-5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -4.463 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Carregando	Multiplicadores	Ângulo ϕ Mensurado a partir da borda		
		35°	20°	0°
$N_x = T_x; x = L/2$ K/ft				
Simples Casca		+17.19	-53.52	+276.0
V_L	Coeficiente C (col 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.84	+13.46	-80.17
S_B	Coeficiente C (col 9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.72	+15.16	-198.0
TOTAL		-7.37	-24.9	-2.17
$N_{\phi x} = S; x = 0$				
Simples Casca		0.00	-4.718	+0.167
V_B	Coeficiente C (col 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-3.088	0.0
S_B	Coeficiente C (col 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+4.028	-20.85
TOTAL		0.0	-3.778	-20.68
$N_\phi = T_\phi; x = L/2$				
Simples Casca		-7.605	-7.821	0.0
V_B	Coeficiente C (col 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_B C$	-0.199	+0.931	-0.220
S_B	Coeficiente C (col 11)	-0.0528	-0.0204	0.0

Continuando...

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Carregando	Multiplicadores	Ângulo ϕ Mensurado a partir da borda		
		35°	20°	0°
	S_BC	+1.10	+0.425	0.0
TOTAL		-6.70	-6.46	-0.22
	$M_\phi; x = L/2$			
Simples Casca		-7.84	-5.737	0.0
V_B	Coeficiente C(col 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	V_BrC	2.55	+2.92	0.0
S_B	Coeficiente C (col 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	S_BrC	+3.38	+1.88	0.0
TOTAL		-1.91	-0.937	0.0

34.3.3 MATLAB®código e exemplo numérico

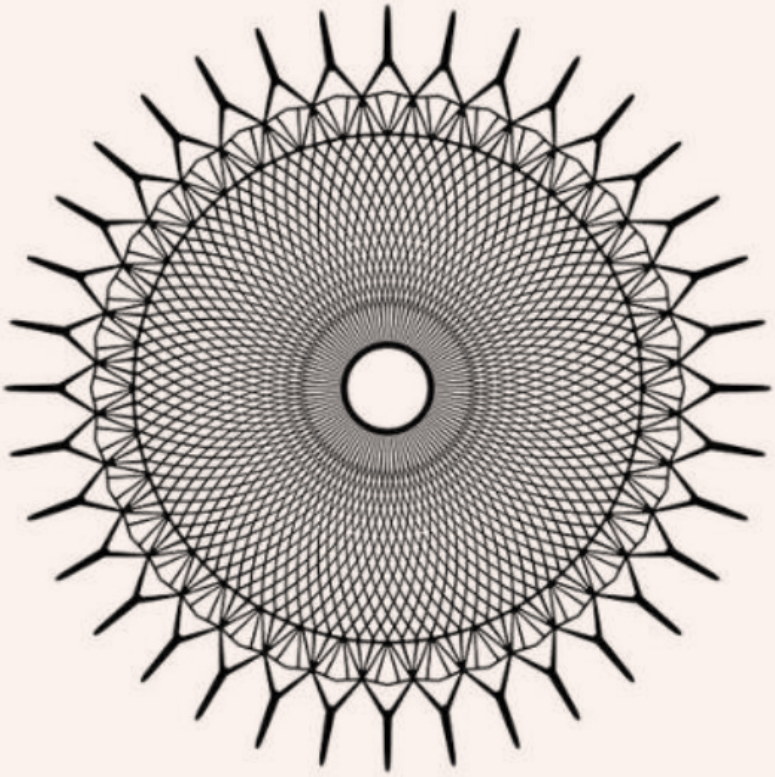
177 Uma preliminar MATLAB®O código para o projeto da circular cascas é dado no apêndice I.2.1.

178 Uma solução numérica adicional para o cilíndrico casca pode ser encontrada no Apêndice F.. Ele é fornecido por (Portland Cement Association, 1954), que solução é baseada em (Whitney et al., 1952) e qual solução é quase idêntica à dada por Billington, 1965.

179 Informações adicionais podem ser encontradas no livro seminal de Gibson, 1968.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Palazzetto dello Sport, Pier Luigi Nervi, 1957, Roma, Itália.

Exemplifica estruturas casca, onde o fino, curvado concreto armado casca eficientemente carrega cargas através da ação de membrana, minimizando a flexão tensões.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 35

Dinâmica I

Abstract

Este capítulo desenvolve as bases da dinâmica estrutural necessária para um curso introdutório. Começando com o equação de movimento e o significado da inércia e amortecimento, trata o oscilador de grau único de liberdade em profundidade: Vibrações livres (desampalhadas e amortecidas), excitação harmônica e ressonância, e resposta transitória ao passo, impulso e carga arbitrária (integral de Duhamel). O capítulo então estende a discussão aos sistemas de liberdade em múltiplos graus no nível conceitual e analítico, enfatizando formas modais, dissociação modal, e a interpretação da engenharia da resposta ao terremoto através espectros de resposta. Ao longo, a ênfase é na compreensão física e análise orientada para as mãos, preparando o terreno para métodos computacionais tomados no capítulo de pós-graduação.

35.1 Fundações filosóficas 1347
35.2 Quando é que uma análise dinâmica se guarda 1348
35.3 Princípios fundamentais 1349
35.3.1 Princípio de d'Alembert e equilíbrio dinâmico 1349
35.3.2 O oscilador de liberdade individual 1349
35.3.3 Frequência natural e Ponto . 1350
35.3.4 Amortecimento e a proporção Amortecimento 1351
35.4 Vibração Livre 1353
35.4.1 Vibração livre 1353
35.4.2 Vibração Livre Arrasada . . 1354
35.4.3 Decremento logarítmico . . . 1354
35.5 Vibração Forçada: Excitação harmônica 1356
35.5.1 Resposta harmônica sem danos 1356
35.5.2 Resposta harmônica abafada 1357
35.6 Resposta à carga arbitrária 1359
35.6.1 Resposta de impulso e Impulso da Unidade 1359
35.6.2 O Duhamel Integral 1360
35.6.3 Análise de Fourier e Resposta à Frequência 1364
35.7 Apoio Excitação e Resposta ao Terremoto 1366
35.7.1 Equação de movimento para a Excitação Base 1366
35.7.2 Espectros de resposta 1367
35.8 Sistemas com múltiplos graus de liberdade 1370
35.8.1 Equações de movimento . . 1370
35.8.2 Vibração Livre: Modos Naturais 1370
35.8.3 Análise Modal 1371
35.8.4 Participação modal na resposta ao terremoto 1372
35.9 Sistemas contínuos 1374
35.9.1 Vibração Axial de Barras . . 1374
35.9.2 Vibração transversal de Vigas 1375

CÓPIA PARA REVISÃO

35.10 Dinâmica não linear 1377
35.10.1 Fontes de não linearidade . . 1377
35.10.2 Histerese e dissipação de energia 1378
35.10.3 Dutilidade e Design de Capacidade 1380
35.11 Considerações Práticas 1382
35.11.1 Amortecimento em Estruturas Real 1382
35.11.2 Interação estrutura-solo . . . 1382
35.11.3 Ajustados Dampers de Massa 1382
35.11.4 Ex 35.13: Projeto de um amortecedor de massa sintonizado para um edifício alto 1383
35.11.5 Isolamento Base 1384
35.11.6 Ex 35.14: Projeto de um prédio hospitalar isolado 1384
35.12 Considerações finais 1386
35.12.1 Cuidado com os métodos de um praticante 1386
35.12.2 Nota de encerramento: Limites da teoria linear 1386

✳ Este capítulo é inteiramente escrito por Claude através de cerca de 60 prompts no total.

35.1 Fundações filosóficas

1 Ao longo dos capítulos anteriores, temos tratado estruturas como se existissem em um equilíbrio atemporal - forças aplicadas instantaneamente e mantidas para sempre, deslocamentos ocorrendo sem movimento, tensões surgindo sem história. Esta idealização, embora poderosa para entender as relações fundamentais entre carga e resposta, representa apenas um caso limitante de comportamento estrutural. O mundo real é dinâmico: As cargas variam com o tempo, as massas possuem inércia e a energia se dissipa através de amortecimento. Dinâmica estrutural é o estudo de como as estruturas respondem às excitações variantes do tempo, e forma a ponte essencial entre a análise estática que desenvolvemos e o comportamento real das estruturas sob vento, terremoto, impacto, vibração de máquinas, e incontáveis outras Fenômenos dependentes do tempo.

2 A transição da estática para a dinâmica não é apenas uma adição de termos dependentes do tempo às equações familiares. Representa uma mudança fundamental na perspectiva. Em estática, perguntamos: "Qual é o estado de tensão e deformação sob uma determinada carga?"Em dinâmica, perguntamos: Como a estrutura evolui através do tempo em resposta a uma excitação variável no tempo? A resposta depende não só da estrutura rigidez (como na estática) mas também de suas características de distribuição de massa e dissipação de energia. Estas três propriedades... rigidez, massa, e amortecimento... formam a tríade essencial da dinâmica estrutural.

3 O desenvolvimento histórico da dinâmica estrutural é paralelo ao desenvolvimento da própria mecânica clássica. As leis de movimento de Newton, publicadas no *Principia* (1687), forneceu a fundação. A vibração das cordas e membranas ocupava Euler, d'Alembert,

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

e os Bernoullis ao longo do século XVIII. Rayleigh's *Teoria do Som* (1877) sintetizaram grande parte da estrutura matemática ainda usada hoje. O século XX trouxe o desafio de engenharia sísmica, começando com o devastador terremoto de 1906 em São Francisco, e o desenvolvimento de métodos espectro de resposta, integração numérica do tempo, e design baseado no desempenho. Hoje, a dinâmica estrutural forma um componente essencial do kit de ferramentas de cada engenheiro estrutural.

35.2 Quando é que uma análise dinâmica se guarda

4 Uma pergunta que os engenheiros muitas vezes lutam para responder claramente é enganosamente simples: Quando uma análise dinâmica é realmente necessária? A resposta, em seu núcleo, é simples - uma análise dinâmica é necessária quando a frequência do carregamento aplicado é da mesma ordem de magnitude que o frequência natural da estrutura. Quando essas duas frequências se aproximam, o fenômeno da ressonância pode ocorrer, potencialmente amplificando a resposta estrutural muito além do que uma análise estática preveria, às vezes catastróficamente.

5 Várias consequências práticas vêm deste princípio. Uma estrutura flexível, com baixa frequência natural é inerentemente mais suscetível à excitação dinâmica do que uma rígida, porque sua frequência natural é mais provável de cair dentro da faixa de frequências de carga comumente encontradas, quer a partir de vento, máquinas, terremotos ou atividade humana. Uma estrutura rígida, em contraste, tem uma alta frequência natural e responderá quase estaticamente à maioria das cargas, o que significa que uma análise estática convencional é inteiramente adequada.

6 Mais concretamente, podemos identificar quatro situações onde a análise dinâmica é justificada: quando a estrutura é submetida a cargas que variam rapidamente, como explosão ou impacto; Quando suporta máquinas rotativas cuja frequência de operação pode coincidir com um modo estrutural; Quando deve resistir à excitação sísmica, já que terremotos excitam uma ampla faixa de frequências; E quando é uma estrutura esbelta ou flexível exposta ao vento, onde o vórtice se desvanece ou vibra pode induzir ressonância.

7 Uma regra útil é que se a frequência dominante da carga aplicada exceder cerca de um terço do fundamental frequência natural da estrutura, os efeitos dinâmicos tornam-se não negligíveis e devem ser avaliados. Abaixo desse limiar, uma análise estática com fatores de amplificação apropriados é geralmente suficiente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

35.3 Princípios fundamentais

35.3.1 Princípio de d'Alembert e equilíbrio dinâmico

Para o contexto histórico, consultar §6.7.4

8 A pedra angular da dinâmica estrutural é o princípio de D'Alembert, publicado em seu *Trait? De dynamique* (d'Alembert, 1743 PDF). d'Alembert reconheceu que a segunda lei de Newton poderia ser reformulada como um princípio do equilíbrio dinâmico, introduzindo o conceito de *Força inercial*.. Se um corpo de massa m experimenta uma aceleração $\ddot{u}$, podemos considerar o produto $-m\ddot{u}$ como uma força fictícia agindo sobre o corpo, de tal forma que a soma de todas as forças (incluindo esta força inercial) é igual a zero. Esta reformulação aparentemente simples transforma problemas dinâmicos em problemas de equilíbrio, permitindo que os métodos poderosos da estática sejam aplicados.

9 Para uma partícula de massa m sujeita a uma força externa $F(t)$A segunda lei de Newton diz:

$$F(t) = m\ddot{u}(t)$$

Onde $\ddot{u}(t) = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$ é a aceleração. Reorganizando:

$$F(t) - m\ddot{u}(t) = 0$$

Este é o princípio de D'Alembert: A força aplicada $F(t)$ é equilibrado pela força inercial $F_I = -m\ddot{u}(t)$, dando equilíbrio dinâmico a cada instante do tempo.

10 A profunda utilidade do princípio de d'Alembert está em sua extensão para sistemas contínuos e formulações trabalho virtual. Ao tratarmos as forças inerciais na mesma base que as forças aplicadas, podemos aplicar o princípio de trabalho virtual, o princípio Hamilton, e as equações de Lagrange para derivar equações de movimento para estruturas arbitrariamente complexas. O preço que pagamos é que nossas equações de equilíbrio se tornem equações diferenciais no tempo, exigindo condições iniciais e integração para obter a resposta.

35.3.2 O oscilador de liberdade individual

11 O sistema de um grau de liberdade (SDOF) É para a dinâmica estrutural o que o biapoiado viga é para análise estrutural: o exemplo canônico através do qual conceitos fundamentais são introduzidos e compreendidos. Considere uma missa m Constrangido a se mover em uma direção, conectado a um engaste através de uma mola de rigidez k e um amortecedor viscoso com coeficiente c.. Quando a massa é deslocada por $u(t)$ de sua posição de equilíbrio e submetido a uma força externa $F(t)$, três esforços internos surgir:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- O **Força de restauração elástica**: $F_S = ku(t)$, proporcional a deslocamento e direcionado para o equilíbrio.
- O **amortecimento força**: $F_D = c\dot{u}(t)$, proporcional à velocidade e movimento oposto.
- O **Força inercial**: $F_I = m\ddot{u}(t)$, proporcional à aceleração.

12 Um esquema da massa idealizada - mola - modelo dedamper é mostrado na Figura 35.1.

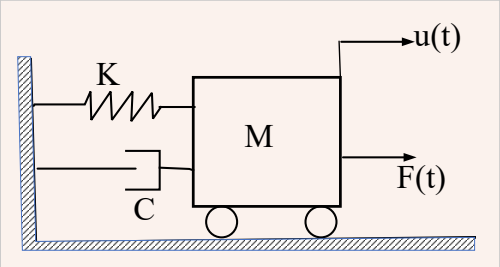


Figura 35.1: O oscilador idealizado de um único grau de liberdade

13 Aplicando o princípio de d'Alembert, a soma de todas as forças é igual a zero, cede o fundamental.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \tag{35.1}$$

Esta segunda ordem linear normal equação diferencial governa a resposta do sistema SDOF para qualquer excitação $F(t)$.. Sua solução requer duas condições iniciais: a inicial deslocamento $u(0) = u_0$ E a velocidade inicial $\dot{u}(0) = v_0$.

14 A equação SDOF (35.1) é enganosamente simples na aparência, mas encapsula a física essencial dos sistemas vibratórios. Os três termos do lado esquerdo representam os três mecanismos fundamentais pelos quais uma estrutura resiste ao carregamento dinâmico: inércia (aceleração-dependente), amortecimento (velocidade-dependente) e rigidez (deslocamento-dependente). As magnitudes relativas desses termos, e como eles variam com a frequência, determinam o caráter da resposta dinâmica.

35.3.3 Frequência natural e Ponto

15 Cada estrutura possui propriedades dinâmicas intrínsecas que dependem apenas de sua massa e rigidez, não do carregamento aplicado. O mais fundamental destes é o *frequência natural*, definido para um sistema SDOF não modificado como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/s)}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Esta frequência circular ω_n representa a velocidade em que o sistema não-ampado oscila quando deslocado do equilíbrio e liberado. O período natural correspondente e a frequência cíclica são:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(s)}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Hz)}$$

35.3.3.1 Ex 35.1: Computação ω_n, T_n, e f_n para um sistema SDOF

Considere uma massa de chão $m = 2000$ kg apoiado lateralmente por um equivalente rigidez $k = 800$ kN/m.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800 \times 10^3}{2000}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ s}, \qquad f_n = \frac{1}{T_n} \approx 3.18 \text{ Hz}$$

16 O frequência natural é talvez o parâmetro mais importante na dinâmica estrutural. Determina a frequência em que ocorre a ressonância, a resposta ao carregamento impulsivo e a relação de fase entre excitação e resposta. Fisicamente, um alto frequência natural implica alta rigidez ou baixa massa (ou ambos); tais sistemas respondem rapidamente e com pequeno deslocamentos para cargas aplicadas. Um baixo frequência natural implica flexibilidade ou grande massa; tais sistemas respondem lentamente e podem experimentar grande deslocamentos.

17 Para o projeto preliminar, os engenheiros geralmente estimam períodos naturais usando fórmulas empíricas. Para estruturas de construção, uma aproximação comum é:

$$T_n \approx 0.1N \quad \text{(s)}$$

Onde N é o número de histórias. Esta regra de polegar, enquanto bruto, captura o escalonamento essencial: edifícios mais altos são mais flexíveis e têm períodos mais longos. Estimativas mais refinadas explicam o tipo de sistema estrutural, material e configuração.

35.3.4 Amortecimento e a proporção Amortecimento

18 Todas as estruturas reais dissipam energia durante a vibração. Esta dissipação, coletivamente chamada *amortecimento*, surge de inúmeros mecanismos: fricção interna dentro dos materiais, atrito em conexões e suportes, arrasto aerodinâmico, e radiação de energia no meio circundante. Embora a física de amortecimento é complexa e variada, dinâmica estrutural tipicamente adota um modelo simplificado: *Viscoso amortecimento*, em que a força amortecimento é proporcional à velocidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 O coeficiente amortecimento c tem unidades de força por velocidade (N·S/m em unidades SI), mas seu valor absoluto é menos significativo do que sua relação com um valor crítico. O *coeficiente crítico amortecimento* é definido como:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

Um sistema com exatamente este coeficiente amortecimento retorna ao equilíbrio em tempo mínimo sem oscilar. O *amortecimento relação* ζ expressa real amortecimento como uma fração da crítica:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

20 A proporção amortecimento é dimensional e tipicamente pequena para estruturas: $\zeta \approx 0.01$ para 0.05 (1% a 5% Para a maioria dos edifícios e pontes. Apesar de sua pequena magnitude, amortecimento afeta profundamente a resposta, particularmente perto da ressonância, onde limita a amplificação sem limites.

21 Existem três regimes de comportamento amortecido:

Abaixado$\zeta < 1$**):** O sistema oscila com a amplitude gradualmente decrescente. Este é o caso de praticamente todas as estruturas.

Críticamente amortecido ($\zeta = 1$**):** O sistema volta ao equilíbrio sem oscilação em tempo mínimo. Usado em alguns dispositivos mecânicos (fechos de portas) mas raro em estruturas.

- Está tudo bem$\zeta > 1$**):** O sistema volta ao equilíbrio sem oscilação, mas mais lentamente do que crítico. Pouco comum em estruturas.

22 O amortecido frequência natural para um sistema submerso é:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Para as relações estruturais típicas amortecimento ($\zeta < 0.1$), $\omega_d \approx \omega_n$ com menos de 1% Diferença. A distinção se torna importante apenas para sistemas fortemente amortecidos.

Condições iniciais como variáveis de estado

Em dinâmica, inicial deslocamento e velocidade inicial não são mera contabilidade; Eles definem o estado inicial do sistema. Eles determinam como a energia total é dividida entre formas cinéticas e potenciais em $t = 0$, e eles podem dominar a resposta precoce mesmo na ausência de força externa. Ao usar soluções analíticas, as constantes de integração são fixadas por estas condições iniciais; Quando se usa a integração numérica do tempo, as mesmas informações entram como o vetor de estado inicial.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nota de modelagem em amortecimento

Ao contrário de rigidez e massa, amortecimento é raramente conhecido dos primeiros princípios. Viscoso amortecimento é introduzido principalmente como um modelo eficaz que captura dissipação de energia observada em uma forma matemática conveniente. Seus parâmetros são normalmente calibrados a partir de experimentos, medições de campo ou julgamento de engenharia, e a sensibilidade da resposta prevista ao modelo presumido amortecimento deve ser sempre mantida em mente.

35.4 Vibração Livre

23 A vibração livre ocorre quando um sistema oscila sem força externa, impulsionado apenas por condições iniciais. Este caso aparentemente simples revela o caráter dinâmico fundamental do sistema e forma a base para entender vibrações forçadas.

35.4.1 Vibração livre

24 Para o caso não acariciado ($c = 0$), o equação de movimento reduz para:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Dividindo por m e introduzindo $\omega_n^2 = k/m$:

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

Esta é a equação do simples movimento harmônico. A solução geral é:

$$u(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

Onde A e.. B são constantes determinadas pelas condições iniciais. Com $u(0) = u_0$ e.. $\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = u_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

25 A solução pode ser escrita de forma equivalente em fase de amplitude:

$$u(t) = \rho\cos(\omega_n t - \phi)$$

onde a amplitude ρ e ângulo de fase ϕ são:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \tan\phi = \frac{v_0}{\omega_n u_0}$$

O sistema não-ampado oscila para sempre com amplitude constante ρ, completando um ciclo no tempo $T_n = 2\pi/\omega_n$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

35.4.2 Vibração Livre Arrasada

26 Com amortecimento incluído, o equação de movimento torna-se:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Dividindo por m e introduzindo ζ e.. ω_n:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

27 Buscamos soluções da forma $u(t) = Ce^{st}$.. A substituição produz a equação característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

com raízes:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

28 Para o caso em baixo danado ($\zeta < 1$), as raízes são conjugados complexos:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

Onde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é o amortecido frequência natural. A solução geral é:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

Com as condições iniciais $u(0) = u_0$ e.. $\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

29 A solução representa oscilação na frequência ω_d, com amplitude decaindo exponencialmente em velocidade $\zeta\omega_n$.. O envelope da oscilação é $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$, onde ρ é determinado pelas condições iniciais. O sistema eventualmente vem para descansar, mas a aproximação ao equilíbrio é oscilatória.

35.4.3 Decremento logarítmico

30 O declínio logarítmico fornece um método prático para determinar a relação amortecimento da resposta de vibração livre medida. Considere dois picos sucessivos da resposta, ocorrendo às vezes t_1 e.. $t_2 = t_1 + T_d$, onde $T_d = 2\pi/\omega_d$ é o período amortecido. A proporção de amplitudes é:

$$\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O declínio logarítmico δ é definido como o logaritmo natural desta relação:

$$\delta = \ln \frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \zeta \omega_n T_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

31 Para o pequeno amortecimento ($\zeta \ll 1$), isso simplifica para:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \tag{35.2}$$

Na prática, medindo mais n Os ciclos melhoram a precisão.

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u_1}{u_{n+1}} \tag{35.3}$$

35.4.3.1 Ex 35.2: Estimando amortecimento de decremento logarítmico

Suponha que um sistema levemente amortecido seja liberado do repouso e as amplitudes de pico sejam medidas como $u_1 = 10$ mm e.. $u_6 = 6$ mm, ou seja, câmbio $n = 5$ ciclos. Usando EQ. (35.3):

$$\delta = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{1}{5}(0.5108) = 0.1022$$

Para o pequeno amortecimento, Eq. (35.2) Dá:

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.1022}{6.283} = 0.0163 \approx 1.6\%$$

Suplemento: Vibração livre (absorvida do apêndice anterior)

32 A equação governante para a vibração livre (não-ampida) de uma estrutura é

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{Ku} = 0$$

onde a moção é chamada de ser livre, já que não há cargas aplicadas.

33 Supondo um movimento harmônico

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \sin \omega t$$

o frequências naturais, ω, e o correspondente formas modais, $\boldsymbol{\phi}$, pode ser determinado a partir do problema de autovalor generalizado

$$\omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}$$

ou

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34 Desde então $\boldsymbol{\phi}$ Não é trivial,

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

ou com $\omega^2 = \lambda$

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0$$

que é a equação característica; λ é chamado de autovalor da equação, e a estrutura responde no modo correspondente a uma determinada frequência.

35 Para fins computacionais, se nós pré-multiplicar cada lado da equação precedente por $\mathbf{M}^{-1}$, então

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\phi} = 0$$

36 Deve-se notar que um autovalor zero é obtido para cada possível movimento rígido do corpo de uma estrutura que não é completamente suportada (§45.1.1). Dependendo de qual matriz de massa é adotado, resultados ligeiramente diferentes são obtidos. Em geral, o valor exato (consistente matriz de massa) de baixo.

37 O formas modais, $\boldsymbol{\phi}$, são "formas", e dar uma magnitude relativa do DOF, não os valores absolutos (já que eles são a solução para um conjunto de equações homogêneas). Ambos, o frequências naturais e formas modais fornecem uma descrição fundamental da estrutura vibratória.

35.5 Vibração Forçada: Excitação harmônica

38 Quando uma estrutura é submetida a uma força periódica, ela eventualmente se instala em uma oscilação de estado estável na frequência forçada. Esta resposta harmônica revela o fenômeno fundamental da ressonância e estabelece a base para entender a resposta às excitações mais complexas.

35.5.1 Resposta harmônica sem danos

39 Considere o sistema não-ampado submetido a uma força senoidal $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, onde ω é a frequência de excitação (não necessariamente igual a ω_n):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

A solução completa consiste na solução complementar (homogénea) mais uma solução específica. Por.. $\omega \neq \omega_n$, a solução em particular é:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

40 A estática deslocamento sob força F_0 Seriam $u_{st} = F_0/k$.. A relação entre dinâmica e estática é a *Fator de amplificação dinâmico*:

$$D = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} = \frac{1}{1-\beta^2}$$

Onde $\beta = \omega/\omega_n$ é a proporção de frequência. Este fator de amplificação é a chave para entender a resposta dinâmica:

- Por.. $\beta \ll 1$ (excitação muito mais lento do que frequência natural): $D \approx 1$.. A resposta é quase estática; As forças de inércia são insignificantes.
- Por.. $\beta \gg 1$ (excitação muito mais rápido do que frequência natural): $D \approx 0$.. A massa não pode seguir a força rápida; Ele permanece quase parado.
- Por.. $\beta \to 1$ (Excitação perto de frequência natural): $|D| \to \infty$.. Isso é.. *ressonância*.

41 O fenômeno da ressonância, o crescimento ilimitado da resposta quando a frequência de excitação é igual a frequência natural, talvez seja o conceito mais importante na dinâmica estrutural. Isso explica o colapso da Ponte Tacoma Narrows (1940), a falha de suportes de máquinas, e incontáveis outros desastres de engenharia. Cada projeto dinâmico deve garantir que as frequências de operação estejam suficientemente separadas de frequências naturais.

35.5.2 Resposta harmônica abafada

42 Com amortecimento, o equação de movimento sob força harmônica é:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

A solução transiente (homogénea) decai exponencialmente, deixando apenas a solução particular em estado estacionário:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

Onde o ângulo de fase ϕ é:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \tag{35.4}$$

43 O fator de amplificação dinâmica para o sistema amortecido é:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \tag{35.5}$$

Amortecimento limita a amplificação ressonante a um valor finito:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{at} \quad \beta = \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Por.. $\zeta = 0.02$ (2% amortecimento), $D_{\max} = 25$; para $\zeta = 0.05$ (5% amortecimento), $D_{\max} = 10$.. Mesmo pequeno amortecimento reduz significativamente a resposta ressonante.

[44] Figura 35.2 Esboça o fator de amplificação dinâmica D em função da razão de frequência $\beta = \omega/\omega_n$ para várias proporções amortecimento.

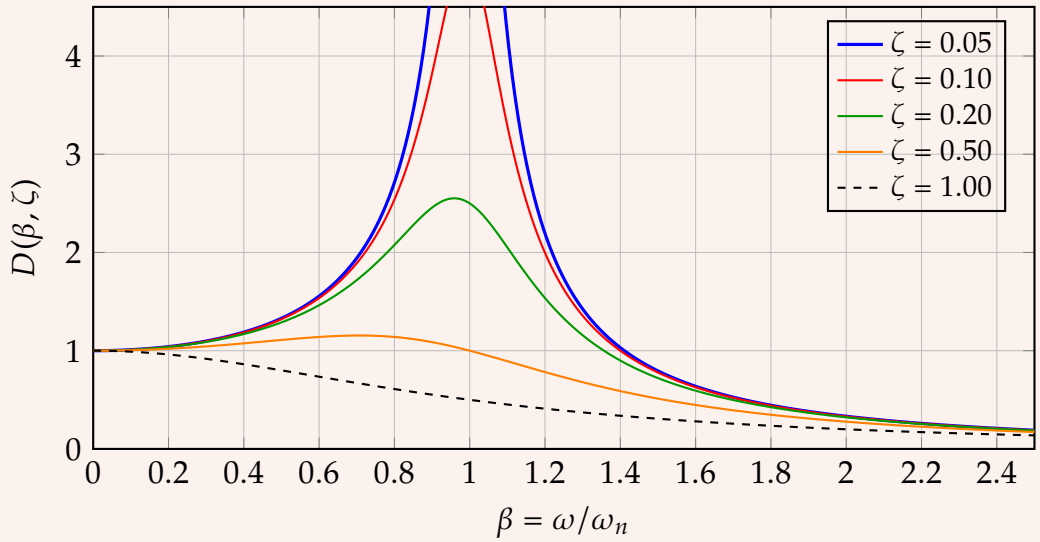


Figura 35.2: Curvas de amplificação dinâmica conceitual para um oscilador SDOF amortecido sob força harmônica

[45] O ângulo de fase ϕ representa o atraso entre a força e a resposta. Em baixas frequênciasβ $\ll$ 1), $\phi \approx 0$:. A resposta está em fase com a força. Em ressonância ($\beta = 1$), $\phi = 90$?:. A resposta atrasa a força em um quarto de ciclo. Em altas frequências ($\beta \gg 1$), $\phi \to 180$?:. A resposta é quase oposta à força.

35.5.2.1 Ex 35.3: Resposta harmônica: amplificação e fase

Deixe um sistema SDOF amortecido ter rigidez $k = 200$ kN/m e ser animado por uma força harmônica com amplitude $F_0 = 10$ kN. A amplitude estática deslocamento é $u_{st} = F_0/k = 10/200 = 0.05$ m.

Assumir uma relação de frequência $\beta = \omega/\omega_n = 0.9$ e amortecimento relação $\zeta = 0.05$. Da Eq. (35.5):

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.81)^2 + (2\cdot 0.05\cdot 0.9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19^2 + 0.09^2}} \approx 4.76$$

Assim, a amplitude do estado estacionário é $u_0 = D\, u_{st} \approx 4.76(0.05) = 0.238$ m.

Da Eq. (35.4):

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \frac{0.09}{0.19} = 0.474 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 25.4^\circ$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

35.6 Resposta à carga arbitrária

46 Cargas dinâmicas reais, rajadas de vento, terremoto, forças de impacto... raramente são harmônicas. Precisamos de métodos para determinar a resposta às forças arbitrárias. Existem duas abordagens complementares: A integral de Duhamel (domínio do tempo) e a análise de Fourier (domínio da frequência).

35.6.1 Resposta de impulso e Impulso da Unidade

47 A resposta a um impulso de unidade idealizado fornece o bloco de construção para analisar excitações arbitrárias. Um impulso é uma força muito grande aplicada por um tempo muito curto, tal que o produto (forçar × tempo) tem um valor finito chamado de *impulso*.. A função delta Dirac $\delta(t-\tau)$ representa um impulso unitário no momento τ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \delta(t-\tau) = 0 \text{ for } t \neq \tau$$

48 Quando uma unidade de impulso age em um sistema em repouso, o impulso-momento Teorema dá a velocidade inicial imediatamente após o impulso:

$$m\Delta v = 1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{m}$$

A subsequente vibração livre, com $u(0) = 0$ e.. $\dot{u}(0) = 1/m$, é o *Função de resposta do impulso unitário* $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t > 0 \tag{35.6}$$

Para o caso não acariciado:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad t > 0 \tag{35.7}$$

35.6.1.1 Ex 35.4: Resposta de impulso da unidade de um sistema SDOF amortecido

Um tanque de água modelado como um sistema SDOF tem massa $m = 500$ kg, Laterais rigidez $k = 200$ kN/m, e amortecimento relação $\zeta = 5\%$. Um cano explode e fornece uma força impulsiva que pode ser idealizada Como um impulso unitário ($\hat{F} = 1$ N·s) em $t = 0$. Determine: (a) as propriedades dinâmicas; (b) A função de resposta do impulso; (c) O deslocamento em $t = 0.10$ s; (d) O pico deslocamento e o momento em que isso ocorre.

Solução.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(a) Propriedades dinâmicas.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{500}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.314 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20.00\sqrt{1-0.0025} = 19.975 \text{ rad/s}$$

b) Função de resposta impulsiva.
Da Eq. (35.6), com $m = 500$ kg e.. $\omega_d = 19.975$ rad/s:

$$h(t) = \frac{1}{500\times 19.975}\, e^{-0.05\times 20\, t}\sin(19.975\, t) = 1.0025\times 10^{-4}\, e^{-t}\sin(19.975\, t) \quad \text{m/(N·s)}$$

Por um impulso unitário $\hat{F} = 1$ N·sA resposta é Simplesmente $u(t) = \hat{F}\, h(t) = h(t)$.

(c) Deslocamento em $t = 0.10$ s.

$$u(0.10) = 1.0025\times 10^{-4}\, e^{-1\times 0.10}\sin(19.975\times 0.10)$$

$$= 1.0025\times 10^{-4}\times 0.9048\times \sin(1.9975 \text{ rad}) = 1.0025\times 10^{-4}\times 0.9048\times 0.9128 = 8.28\times 10^{-5} \text{ m}$$

$$u(0.10) \approx 0.083 \text{ mm}$$

(d) Pico deslocamento.
O pico de $h(t)$ Ocorre quando $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$, que para O pequeno amortecimento está aproximadamente em $\omega_d\, t_{\text{peak}} = \pi/2$:

$$t_{\text{peak}} = \frac{\pi/2}{\omega_d} = \frac{\pi/2}{19.975} = 0.0786 \text{ s}$$

$$h_{\text{peak}} = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_n t_{\text{peak}}} = 1.0025\times 10^{-4}\, e^{-0.05\times 20\times 0.0786} = 1.0025\times 10^{-4}\times e^{-0.0786} = 9.26\times 10^{-5} \text{ m/(N·s)}$$

O pico deslocamento devido a um impulso unitário é 0.0926 mm/(N·s). Por um impulso real $\hat{F}$, o pico escala linearmente: $u_{\text{peak}} = \hat{F}\, h_{\text{peak}}$.

35.6.2 O Duhamel Integral

[49] Jean-Marie Duhamel (1797-1872) desenvolveu a integral de convolução que Leva seu nome para resolver a equação de calor, mas se aplica igualmente a dinâmica estrutural. O principal é que uma força arbitrária $F(t)$ Pode ser visto como uma sequência de impulsos infinitesimais. Na hora τ, um impulso $F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ Atua no sistema. A resposta a isso impulso em um momento posterior t É $F(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Superpondo todas essas contribuições:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)\, h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{35.8}$$

Esta é a integral de Duhamel (também chamado de Convolução integral). Dá a resposta para qualquer força $F(t)$, Assumindo que o sistema comece de repouso. Se as condições iniciais não forem zero, A resposta de vibração livre deve ser adicionada.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

50 A integral de Duhamel é teoricamente poderosa, mas muitas vezes difícil de avaliar analiticamente. Para simples funções de força (passo, rampa, retangular) Pulso), soluções de forma fechada existem. Para excitações complexas ou medidas, A integração numérica é necessária.

35.6.2.1 Ex 35.5: Carregamento de passo súbito: A amplificação dinâmica Fator de 2

O mesmo sistema SDOF como Exemplo 35.6.1.1 ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m) é submetido a um De repente, apliquei força constante $F_0 = 10$ kN Em.. $t = 0$ (uma carga de passo), mantida indefinidamente. O sistema começa de repouso. Determine: (a) A resposta usando a integral de Duhamel para o não-ampado Case; (b) o máximo deslocamento e o fator de amplificação dinâmica; (c) O efeito de 5% amortecimento no pico.

Solução.

(a) integral de Duhamel para uma carga gradual, caso não amassado.

Com $F(\tau) = F_0 = \text{const}$ e.. $\zeta = 0$ ($\omega_d = \omega_n$), Eq. (35.8) Reduz para:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

Avaliando a integral com a substituição $s = t - \tau$:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n s)\,\mathrm{d}s = \frac{F_0}{m\omega_n}\left[-\frac{\cos(\omega_n s)}{\omega_n}\right]_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$$

Desde então $m\omega_n^2 = k$, isso simplifica:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\cos(\omega_n t)\right] \tag{35.9}$$

(b) Máximo deslocamento e fator de amplificação dinâmica.

A estática deslocamento sob F_0 É $u_{\text{st}} = F_0/k$. Numericamente:

$$u_{\text{st}} = \frac{10\,000}{200\,000} = 0.050 \text{ m} = 50 \text{ mm}$$

Da Eq. (35.9), $u(t)$ é o máximo quando $\cos(\omega_n t) = -1$, i.e. Em.. $t = \pi/\omega_n = T_n/2$:

$$u_{\max} = \frac{F_0}{k}\times 2 = 2\,u_{\text{st}} = 2\times 50 = 100 \text{ mm}$$

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{20} = 0.157 \text{ s} = \frac{T_n}{2}$$

O fator de amplificação dinâmica é exatamente 2. Isto é o fundamental resultado para uma carga de passo em um sistema não-ampado: uma força aplicada de repente produz *Duas vezes* a estática deslocamento, não importa o quão lentamente ou rapidamente a carga é aplicada desde que seja aplicada instantaneamente.

(c) Efeito de 5% amortecimento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Com amortecimento a resposta em forma fechada para uma carga de passo é:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

Avaliando em $t = 0.157$ s (perto do pico não-ampado):

$$u(0.157) \approx 50\left[1 - e^{-0.05\times20\times0.157}\left(\cos(19.975\times0.157) + 0.0501\sin(19.975\times0.157)\right)\right] \approx 92.7 \text{ mm}$$

Amortecimento reduz o pico do primeiro ciclo de 100 mm a 93 Um modesto 7% redução para $\zeta = 5\%$. Durante ciclos subsequentes as oscilações Decaimento e a resposta se fixa ao valor estático $u_{st} = 50$ mm.

35.6.2.2 Ex 35.6: Carga de pulso retangular e espectro de choque

O sistema SDOF ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m, $\omega_n = 20$ rad/s, $T_n = 0.314$ s) está sujeita para um pulso retangular:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 = 10 \text{ kN} & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

Para um sistema não danificado, determine: (a) A resposta de forma fechada durante e Depois do pulso; (b) a dinâmica máxima deslocamento para três pulsos Durações $t_d/T_n = 0.25,\ 0.50,\ 1.00$; (c) A engenharia interpretação em termos de impulsivo vs. Carregamento quase-estático.

Solução.

(a) Resposta em forma fechada.

Durante o pulso ($0 \le t \le t_d$): O resultado da carga de passos De Eq. (35.9) Se aplica diretamente:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos(\omega_n t)] \tag{35.10}$$

Depois do pulso ($t > t_d$): O sistema passa por liberdade Vibração do estado em $t = t_d$.. O resultado, obtido por Superpondo duas respostas de passo (uma começando em $t = 0$, um de oposto Assinar começando em $t = t_d$), é:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t - t_d) - \cos\omega_n t] \tag{35.11}$$

A amplitude da vibração pós-pulse livre é:

$$A = \frac{F_0}{k}\,2\left|\sin\frac{\omega_n t_d}{2}\right| = 2\,u_{st}\left|\sin\frac{\pi t_d}{T_n}\right|$$

(b) Máximo deslocamento por três tempos de pulso.

O fator de amplificação dinâmica $D = u_{max}/u_{st}$ Depende Apenas na proporção t_d/T_n:

t_d/T_n	t_d (s)	$A/u_{st} = 2\lvert\sin(\pi t_d/T_n)\rvert$	$D = u_{max}/u_{st}$
0.25	0.0785	$2\lvert\sin(\pi/4)\rvert = \sqrt{2} = 1.414$	1.41
0.50	0.1571	$2\lvert\sin(\pi/2)\rvert = 2.000$	2.00
1.00	0.3142	$2\lvert\sin(\pi)\rvert = 0.000$	1.00

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Por.. $t_d/T_n = 0.25$: $u_{\max} = 1.414 \times 50 = 70.7$ mm.

Por.. $t_d/T_n = 0.50$: $u_{\max} = 2.000 \times 50 = 100$ mm O pulso é longo o suficiente para atingir o ponto final Primeiro pico não amassado antes de terminar).

Por.. $t_d/T_n = 1.00$: $u_{\max} = 1.000 \times 50 = 50$ mm (A amplitude pós-pulse é zero) O sistema retorna exatamente para seu estado inicial em $t = T_n$ e não há nenhuma vibração livre residual).

(c) Interpretação da engenharia.

A proporção t_d/T_n governa o caráter da resposta:

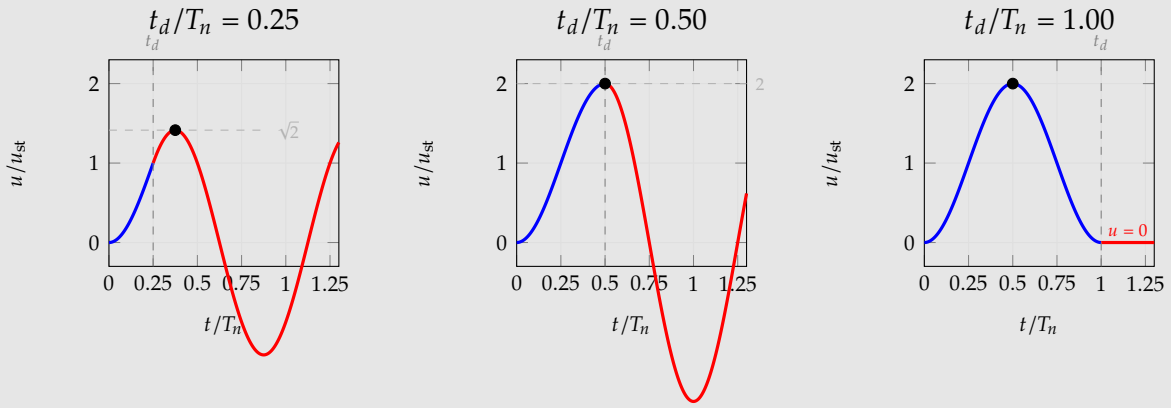
Regime impulsivo ($t_d/T_n \ll 1$): O pulso está tão curto que a estrutura mal se move durante o carregamento; O impulso $\hat{F} = F_0\, t_d$ determina a resposta. O máximo o deslocamento é $u_{\max} \approx \hat{F}/(m\omega_n) = F_0\, t_d/(m\omega_n)$, que cresce linearmente com t_d.

Regime quasi-estático ($t_d/T_n \gg 1$): O pulso dura Muitos períodos; a estrutura responde quase estática e $D \to 1$ em média (oscilando entre 0 e 2 enquanto o A carga está ligada, então livremente).

Regime Ressonante ($t_d/T_n \approx 0.5$): O pulso duração igual a metade do período natural, produzindo o máximo possível amplificação $D = 2$, idêntico ao resultado da carga.

O enredo completo de D vs. t_d/T_n — o *Choque Espectro* ou *espectro de resposta para Cargas impulsivas* — é o análogo do domínio do tempo da harmônica curva de amplificação e é usado em explosão, impacto e equipamentos Design.

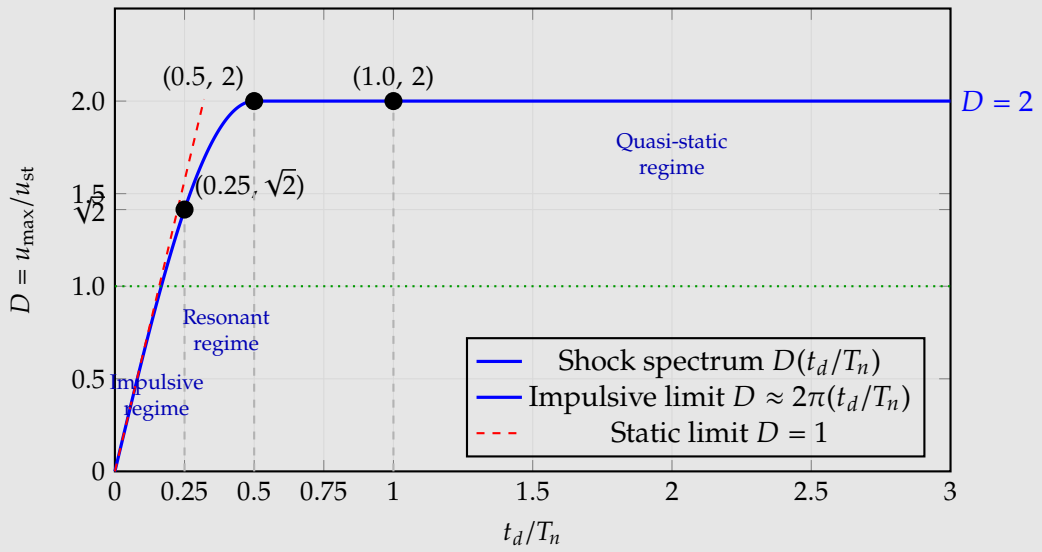
Resposta de pulso retangular.



Histórias de tempo normalizadas u/u_{st} (azul = durante o pulso, vermelho = após o pulso).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Espectro de choque $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ como um função de t_d/T_n.. Os três círculos preenchidos correspondem ao Casos computados no exemplo. A linha vermelha tracejada é a impulsiva Assintota $D \approx 2\pi(t_d/T_n)$; A linha verde pontilhada é o Referência estática $D = 1$.

35.6.3 Análise de Fourier e Resposta à Frequência

51 Uma abordagem alternativa usa análise de Fourier para decompor a força em componentes harmônicos, determinar a resposta para cada componente usando o Função de transferência harmônica e superposição. Para forçar periodicamente com período T_p:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Onde $\omega_0 = 2\pi/T_p$ é a frequência fundamental. A resposta é:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[a_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_0 t - \phi_n)\right] / k$$

Onde D_n e.. ϕ_n são o fator de amplificação e fase em frequência $n\omega_0$.

52 Para forças não periódicas, a série Fourier torna-se o Fourier Transformar:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

O *Função de resposta complexa de frequência* $H(\omega)$ Relatos Entrada para saída no domínio da frequência:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-\beta^2) + i(2\zeta\beta)} \tag{35.12}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

O espectro de resposta é $U(\omega) = H(\omega)F(\omega)$, e o A resposta do domínio tempo é obtida pela transformada inversa de Fourier.

35.6.3.1 Ex 35.7: Resposta de frequência a uma máquina periódica Força com dois harmônicos

Uma fundação de máquinas$m$ = 500 kg, k = 200 kN/m, ζ = 5%, ω_n = 20 rad/s) é animado por uma rotação máquina que produz uma força periódica com frequência fundamental f_0 = 2 Hz ($\omega_0 = 4\pi$ rad/s, T_p = 0.5 s):

$$F(t) = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(2\omega_0 t) = 2\,000 \sin(4\pi t) + 800 \sin(8\pi t) \quad \text{[N]}$$

Determine: (a) as razões de frequência para cada harmônico; (b) O, o amplitude do estado estacionário de cada resposta modal usando $H(\omega)$; (c) A resposta total do estado estacionário.

Solução.

(a) Razões de frequência.

$$\beta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{4\pi}{20} = \frac{12.566}{20} = 0.628 \qquad \beta_2 = \frac{2\omega_0}{\omega_n} = \frac{8\pi}{20} = \frac{25.133}{20} = 1.257$$

O primeiro harmônico ($\beta_1 = 0.628$) é abaixo da ressonância; o segundo harmônico ($\beta_2 = 1.257$) está acima da ressonância.

(b) Amplitudes de estado estacionário.

A amplitude estática para cada harmônico é $u_{\text{st},n} = F_n/k$.. A amplificação dinâmica e a fase seguinte De Eq. (35.5) e Eq. (35.4):

$$D(\beta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \qquad \phi = \arctan \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

Primeiro harmônico (F_1 = 2 000 N, $\beta_1 = 0.628$):

$$u_{\text{st},1} = \frac{2\,000}{200\,000} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0.628^2)^2 + (2\times 0.05 \times 0.628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(0.606)^2 + (0.0628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3672 + 0.00394}} = \frac{1}{0.608} = 1.644$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{0.0628}{0.606} = \arctan(0.1036) = 5.9^\circ$$

$$u_1(t) = D_1\, u_{\text{st},1} \sin(\omega_0 t - \phi_1) = 1.644 \times 10 \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ) = 16.4 \text{ mm} \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ)$$

Segundo harmônico (F_2 = 800 N, $\beta_2 = 1.257$):

$$u_{\text{st},2} = \frac{800}{200\,000} = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1.257^2)^2 + (2\times 0.05 \times 1.257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-0.580)^2 + (0.1257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3364 + 0.0158}} = \frac{1}{0.593} = 1.686$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{0.1257}{1-1.580} = \arctan \frac{0.1257}{-0.580} = 180^\circ - 12.2^\circ = 167.8^\circ$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

(A fase excede 90° Porque.. $\beta_2 > 1$:. A resposta está atrasada A força por mais de um quarto de ciclo acima da ressonância.)

$$u_2(t) = 1.686 \times 4 \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ) = 6.74 \text{ mm} \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ)$$

(c) Resposta total em estado estacionário.
Por superposição:

$$u(t) = 16.4 \sin(4\pi t - 5.9^\circ) + 6.74 \sin(8\pi t - 167.8^\circ) \quad [\text{mm}]$$

O pico deste sinal combinado pode ser limitado pela soma de amplitudes: $u_{\max} \leq 16.4{+}6.74 = 23.1$ mm. Na prática, os picos dos dois harmônicos não coincidem e o O máximo real é um pouco menor; avaliação numérica de $u(t)$ Câmbio Um período dá $u_{\max} \approx 18.5$ mm.

Comentário. Duas observações merecem ênfase.

1. Apesar do segundo harmônico tendo apenas 40% da amplitude de força da primeira harmônica (800/2000 = 0.4), contribui 6.74/16.4 = 41% da deslocamento amplitude porque sua relação de frequência $\beta_2 = 1.257$ está mais perto da ressonância. Pequenos componentes de força de alta frequência perto A ressonância pode dominar a resposta.
2. A mudança de fase de 167.8° para o segundo harmônico significa que é quase *Oposta* O primeiro harmônico perto dos picos, por isso O verdadeiro máximo (18.5 mm) é muito menos do que a soma de amplitudes (23.1 Mm). Métodos de domínio da frequência fazem essas relações de fase explícita e tratável de uma forma que a intuição do domínio do tempo não.

35.7 Apoio Excitação e Resposta ao Terremoto

53 Em muitas situações práticas – mais notavelmente terremoto movimento do solo – a excitação não é uma força aplicada, mas um movimento prescrito do apoio. Isso requer reformulação do equação de movimento em termos de relativo deslocamento.

35.7.1 Equação de movimento para a Excitação Base

54 Vamos $u_g(t)$ Denotam o deslocamento do solo (suporte) e $u_t(t)$ O total (absoluto) deslocamento da massa. O parente deslocamento é:

$$u(t) = u_t(t) - u_g(t)$$

As forças da mola e do amortecedor dependem de relativa deslocamento e velocidade:

$$F_S = ku, \qquad F_D = c\dot{u}$$

A lei de Newton, no entanto, envolve aceleração absoluta:

$$m\ddot{u}_t = -F_S - F_D = -ku - c\dot{u}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Substituindo $\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$:

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$$

Reorganizando:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

55 Esta é a equação fundamental para análise de resposta sísmica. O parente deslocamento u é impulsionado por um *Força de terremoto eficaz* $F_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g(t)$, que é o produto da massa e da aceleração do solo. A estrutura responde como se fixasse em sua base e submetida a esta força efetiva.

56 A aceleração absoluta da massa, necessária para calcular forças inerciais e acelerações do piso, é:

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g = -\frac{c}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}u = -2\zeta\omega_n\dot{u} - \omega_n^2 u$$

35.7.2 Espectros de resposta

57 O espectro de resposta conceito, desenvolvido principalmente por Maurice Biot e George Housner nas décadas de 1930 e 1940, revolucionou engenharia sísmica, fornecendo um meio prático de caracterizar movimento do solo e determinar a resposta estrutural máxima sem executar Análise da história do tempo.

58 Um espectro de resposta é um gráfico da resposta máxima de uma série de osciladores SDOF, todos com a mesma relação amortecimento, mas variando períodos naturais, submetidos a um determinado movimento do solo. Para cada oscilador, o equação de movimento é resolvido, e o valor absoluto máximo de uma quantidade de resposta (deslocamento, velocidade ou aceleração) é registrado.

59 Uma forma típica (suave) espectro de resposta é esboçada na figura 35.3, que mostra a aceleração espectro de resposta S_a Como uma função do período natural T_n, para vários amortecimento Razões. As três regiões, período curto, intermediário e longo correspondem respectivamente ao comportamento controlado por aceleração, velocidade controlada e controle por deslocamento.

60 O *Espectral deslocamento* S_d, *Velocidade espectral* S_v, e *aceleração espectral* S_a são definidos como:

$$S_d(T_n, \zeta) = \max_t |u(t)| S_v(T_n, \zeta) \qquad = \max_t |\dot{u}(t)| S_a(T_n, \zeta) = \max_t |\ddot{u}_t(t)| \tag{35.13}$$

Onde $u(t)$ é a resposta relativa deslocamento para o especificado movimento do solo.

61 Para sistemas levemente amortecidos, as seguintes relações aproximadas mantêm-se:

$$S_v \approx \omega_n S_d, \qquad S_a \approx \omega_n S_v \approx \omega_n^2 S_d$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

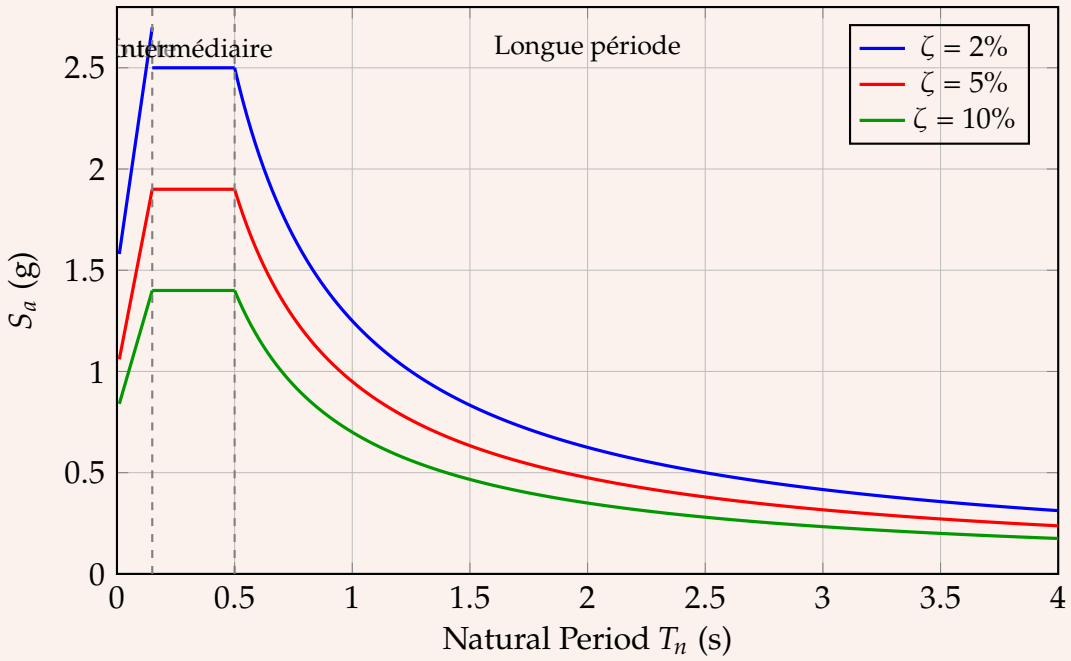


Figura 35.3: Aceleração espectro de resposta S_a Como uma função do período natural T_n para várias proporções amortecimento.

Estes são os.. *pseudo-espectral* Relações. A aceleração pseudo-espectral S_a é particularmente útil porque a base máxima cisalhamento é simplesmente:

$$V_{\max} = mS_a = \frac{W}{g}S_a \tag{35.14}$$

Onde W é o peso e g é aceleração gravitacional.

35.7.2.1 Ex 35.8: Desenho sísmico de uma única história usando um espectro de resposta

Uma história única tem as seguintes propriedades:

- Peso sísmico total (massagem vezes) g): $W = 4\,500$ kN
- Lateral rigidez da história: $k = 180\,000$ kN/m
- Razão viscosa: $\zeta = 5\%$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A aceleração do projeto espectro de resposta (5% amortecimento) é definido por

$$S_a(T_n) = \begin{cases} 0.40g\left(1 + \dfrac{T_n}{0.10}\right) & 0 \le T_n < 0.10 \text{ s} \\ 0.80g & 0.10 \text{ s} \le T_n \le 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T_n} & T_n > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

Determine: a) O período fundamental; b) A aceleração espectral; c) A base máxima cisalhamento; (d) o máximo lateral deslocamento.

Solução.

(a) Período natural. A massa é $m = W/g = 4\,500/9.81 = 458.7$ t.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{180\,000}{458.7}} = 19.81 \text{ rad/s} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.81} = 0.317 \text{ s}$$

(b) Aceleração espectral. Desde então $0.10 \text{ s} \le T_n = 0.317 \text{ s} \le 0.60$ s, o período cai no platô de aceleração plana:

$$S_a = 0.80g = 0.80 \times 9.81 = 7.85 \text{ m/s}^2$$

(c) Base máxima cisalhamento. Da Eq. (35.14):

$$V_{\max} = m\, S_a = 458.7 \times 7.85 = 3{,}601 \text{ kN} \quad \text{or equivalently} \quad V_{\max} = W\frac{S_a}{g} = 4{,}500 \times 0.80 = 3{,}600 \text{ kN}$$

(d) Máximo lateral deslocamento. Usando as relações pseudo-espectrais $S_d \approx S_a/\omega_n^2$:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{7.85}{(19.81)^2} = 0.020 \text{ m} = 20 \text{ mm}$$

Isso pode ser verificado por $u_{\max} = V_{\max}/k = 3{,}600/180{,}000 = 0.020$ m✓.

Comentário. O cálculo é inteiramente algébrico uma vez que o período natural é conhecido. O espectro de resposta codifica o efeito de movimento do solo; O engenheiro estrutural só precisa ler S_a Em.. T_n e multiplicar pela massa. A estimativa lateral deslocamento é útil para verificar os limites de deriva da história em códigos (tipicamente $u/h \le 1/500$ para 1/200 dependendo do objetivo de desempenho). Aqui, para uma altura de história $h = 4$ mA razão de deriva é 20/4000 = 1/200, que fica no final liberal dos limites típicos do código.

62 Design espectros de resposta, como especificado nos códigos de construção, são suavizados envelopes de espectros de múltiplos terremotos registrados, escalados para representar um nível de risco alvo. Estes espectros de código formam a base para o procedimento de força lateral equivalente usado no projeto sísmico de rotina.

Referência inicial. As quantidades determinísticas desenvolvidas aqui fornecem a base dinâmica para os quadros baseados em desempenho posteriores; Veja o capítulo 72 para a interpretação probabilística.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

35.8 Sistemas com múltiplos graus de liberdade

63 Estruturas reais distribuíram massa e rigidez, resultando em infinitamente muitos graus de liberdade. Para análise, discorremos em sistemas com um número finito de DOFs. Os resultados equações de movimento são acoplados equações diferenciais comuns que podem ser expressas em matriz.

35.8.1 Equações de movimento

64 Por um.. N- Sistema DOF, o equações de movimento são:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{35.15}$$

onde:

- $\mathbf{u}(t)$ é o $N \times 1$ deslocamento vetor
- $\mathbf{M}$ é o $N \times N$ matriz de massa (simétrico, positivo definido)
- $\mathbf{C}$ é o $N \times N$ matriz de amortecimento (simétrico, semi-definitivo positivo)
- $\mathbf{K}$ é o $N \times N$ matriz de rigidez (simétrico, semi-definitivo positivo)
- $\mathbf{F}(t)$ é o $N \times 1$ Vetor de força

65 O matriz de massa $\mathbf{M}$ Pode ser *Empanado* (diagonal, com massas concentradas em nós) ou *Consistente* (matriz completa derivada do mesmo funções de forma usado para rigidez). O matriz de rigidez $\mathbf{K}$ é o mesmo que em análise estática, montado a partir de elemento matrizes de rigidez. O matriz de amortecimento $\mathbf{C}$ é a base física mais problemática, e muitas vezes é construída matematicamente em vez de a partir dos primeiros princípios.

35.8.2 Vibração Livre: Modos Naturais

66 Ajustando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ e.. $\mathbf{F} = \mathbf{0}$Nós procuramos soluções da forma $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

Este é o problema do autovalor generalizado. Soluções não triviais requerem:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$$

Isso se rende N autovalores $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \cdots \leq \omega_N^2$ e os correspondentes autovetores $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_N$.

67 Os autovalores dão o frequências naturais: $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$.. Os autovetores, chamaram *formas modais* ou *Modos naturais*, descrever o padrão de deformação em cada frequência. Formas modais têm as propriedades ortogonais:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Essas condições ortogonais são a chave para dissociar o equações de movimento.

68 Uma simples ilustração da ideia de formas modais é mostrada na figura 35.4 Mostrando $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ para $n = 1, 2, 3..$ Modo Eu não tenho nós interiores. Modo 2 tem um nó no meio do espaço; Modo 3 tem dois nós em $L/3$ e.. $2L/3..$ Frequências naturais Satisfazer $\omega_n \propto n^2$.

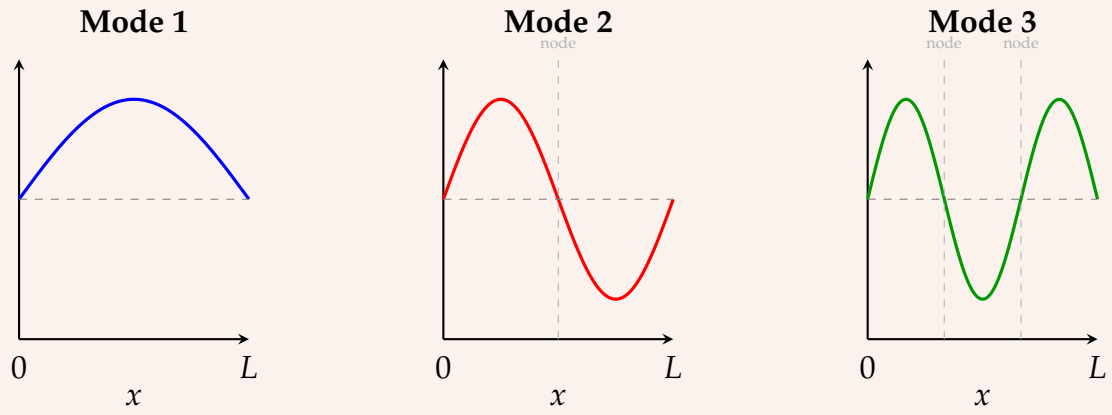


Figura 35.4: Primeiros três formas modais de um biapoiado

35.8.3 Análise Modal

69 O formas modais formam uma base para o espaço deslocamento; Esta abordagem é conhecida como *Análise modal*.. Qualquer deslocamento pode ser expresso como:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

Onde $q_n(t)$ são os *Coordenadas modais* (coordenadas generalizadas) e $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1\ \boldsymbol{\phi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\phi}_N]$ é a matriz modal.

70 Substituindo-se pelo equação de movimento e pré-multiplicando por $\boldsymbol{\Phi}^T$:

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}$$

Por ortogonalidade, $\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}$ e.. $\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}$ são diagonais. Sim $\mathbf{C}$ Tem a forma especial (Rayleigh amortecimento):

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

Então.. $\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}$ é também diagonal, e as equações se dissociam em N Equações SDOF independentes:

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_n q_n = F_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$ é o *Massa modal*, $K_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n$ é o *modal rigidez*, e $F_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{F}(t)$ é o *força modal*.

71 Cada equação modal é uma equação SDOF que pode ser resolvida por qualquer método SDOF. A resposta física é então reconstruída pela superposição:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

35.8.4 Participação modal na resposta ao terremoto

72 Por excitação de terremoto, $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t)$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor de influência (tipicamente um vetor de um para horizontal movimento do solo afetando todos os DOFs igualmente). A força modal torna-se:

$$F_n(t) = -\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) = -L_n \ddot{u}_g(t)$$

Onde $L_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r}$ é o *Fator de participação modal*.

73 O *Massa modal eficaz* é:

$$M_n^* = \frac{L_n^2}{M_n} = \frac{(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n}$$

A soma de massas modais efetivas é igual à massa total:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \mathbf{r}^T \mathbf{M}\mathbf{r}$$

Esta propriedade permite aos engenheiros determinar quantos modos devem ser incluídos para capturar uma fração especificada (muitas vezes 90)%) da resposta sísmica total.

35.8.4.1 Ex 35.9: Análise modal de um edifício 3-DOF sob carregamento sísmico

Um prédio de três andares tem massas de piso e história uniforme.

$$m_1 = m_2 = m_3 = m = 100\ \text{t}, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k = 40\,000\ \text{kN/m}$$

Os rigidez e matrizes de massa (apenas DOFs laterais, deformação axial negligenciada) são:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{kN/m}, \qquad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{t}$$

Usando o espectro de resposta de Exemplo 35.7.2.1 (5% amortecimento), determinar: (a) o frequências naturais e formas modais; b) Os fatores de participação modal; (c) o pico de tesouras modais e sua combinação SRSS.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Solução.

(a) Frequências naturais e formas modais.

O problema do autovalor $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ com $\lambda = m\omega^2/k$ Reduz para:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Expandindo: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, com raízes:

$$\lambda_1 = 0.198, \quad \lambda_2 = 1.555, \quad \lambda_3 = 3.247$$

As frequências circulares são $\omega_n = \sqrt{\lambda_n k/m} = \sqrt{\lambda_n \times 400}$:

Modo	λ_n	ω_n (Rad/s)	T_n (s)
1	0.198	8.90	0.706
2	1.555	24.93	0.252
3	3.247	36.01	0.174

Resolvendo para o formas modais (normalizado em massa de modo que $\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = m$) dá:

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.328 \\ 0.591 \\ 0.737 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 0.737 \\ 0.328 \\ -0.591 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_3 = \begin{Bmatrix} 0.591 \\ -0.737 \\ 0.328 \end{Bmatrix}$$

(entradas normalizadas assim que o maior componente é igual a aproximadamente 1 após escalar por $1/\sqrt{m}$; Os valores são dimensionados.

b) Fatores de participação modal.

Para horizontal movimento do solo o vetor de influência é $\mathbf{r} = \{1, 1, 1\}^T$.. O fator de participação modal para o modo n é:

$$\Gamma_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\, \mathbf{r}}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\, \boldsymbol{\phi}_n}$$

$$\Gamma_1 = \frac{m(0.328 + 0.591 + 0.737)}{m(0.328^2 + 0.591^2 + 0.737^2)} = \frac{1.656}{0.974} = 1.700$$

$$\Gamma_2 = \frac{m(0.737 + 0.328 - 0.591)}{m(0.737^2 + 0.328^2 + 0.591^2)} = \frac{0.474}{0.974} = 0.487$$

$$\Gamma_3 = \frac{m(0.591 - 0.737 + 0.328)}{m(0.591^2 + 0.737^2 + 0.328^2)} = \frac{0.182}{0.974} = 0.187$$

As massas modais eficazes $M_n^* = \Gamma_n^2 M_n = \Gamma_n^2 m \times$ (normalization factor) expresso em frações de massa total $3m$ são aproximadamente 87%, 11%, e 2% para os modos 1, 2 e 3, respectivamente. Modo 1 sozinho captura 87% da massa sísmica; Incluindo o Modo 2 dá o total de 98%, bem acima dos 90% limiar normalmente exigido por códigos.

(c) Tesouras de base modal pico e combinação SRSS.

Para cada modo, a aceleração espectral é lida do espectro de projeto em T_n:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Modo	T_n (s)	S_a	Base modal de pico cisalhamento V_n^*	Γ_n
1	0.706	$0.48g/0.706 = 0.680g$	$\Gamma_1\,\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{M}\mathbf{r}\,S_{a,1}$	1.700
2	0.252	$0.80g$ (Plaqueau)	—	0.487
3	0.174	$0.80g$ (Plaqueau)	—	0.187

A base de pico cisalhamento em modo n É $V_n = M_n^* S_{a,n}$.. Com $M_n^* \approx \{261, 33, 5\}$ t e.. $S_{a,n} = \{0.680g, 0.80g, 0.80g\}$:

$$V_1 = 261 \times 0.680 \times 9.81 = 1\,741 \text{ kN}, \quad V_2 = 33 \times 0.80 \times 9.81 = 259 \text{ kN}, \quad V_3 = 5 \times 0.80 \times 9.81 = 39 \text{ kN}$$

Como os picos modais não ocorrem simultaneamente, eles são combinados usando o *raiz quadrada da soma dos quadrados* Regra:

$$V_{\text{SRSS}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{1741^2 + 259^2 + 39^2} = \sqrt{3{,}031{,}081 + 67{,}081 + 1{,}521} \approx 1{,}761 \text{ kN}$$

Comentário. Várias observações valem a pena notar.

1. Modo Um domina completamente: $V_1/V_{\text{SRSS}} \approx 99\%$.. Isso é típico de prédios regulares onde o modo fundamental captura a maior parte da energia sísmica.
2. A combinação SRSS dá um resultado apenas marginalmente maior do que V_1 Só, confirmando que os modos mais altos são insignificantes aqui.
3. As forças do chão podem ser recuperadas de $\mathbf{f}_n = \Gamma_n \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n S_{a,n}$ para cada modo, então combinado por SRSS - um procedimento diretamente incorporado em métodos de força lateral equivalente código moderno.
4. Para estruturas irregulares, prédios mais altos ou locais com efeitos de quase-falha, modos mais elevados se tornam mais importantes e a regra completa da combinação quadrática (CQC), que responde por correlação modal, deve substituir SRSS.

35.9 Sistemas contínuos

74 Estruturas com massa distribuída e rigidez–vigas, placas, cascas- são governadas por equações diferenciais parciais. Embora os métodos numéricos discordem esses sistemas, entender as soluções analíticas fornece insight sobre formas modais e frequências naturais.

35.9.1 Vibração Axial de Barras

75 Considere uma barra uniforme de comprimento LÁrea transversal A, módulo E, e densidade ρ.. O axial deslocamento $u(x,t)$ Satisfaz:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou, definindo a velocidade da onda $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{35.16}$$

Esta é a equação de onda unidimensional.

76 Pela vibração livre, buscamos soluções da forma $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$.. A substituição dá:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

com solução $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$.. Condições de contorno determinar as frequências permitidas e formas modais. Para um bar fixo em ambas as extremidades:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

35.9.2 Vibração transversal de Vigas

77 A equação de Euler-Bernoulli viga para vibração transversal é:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

Onde $v(x,t)$ é o transverso deslocamento, EI é a rigidez da flexão, e $q(x,t)$ é o carga distribuída.

78 Para uma vibração livre$q = 0$), procurando $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

A solução geral é:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

Condições de contorno em ambas as extremidades fornecer quatro equações para as quatro constantes, produzindo um problema de autovalor para β.

79 Por um biapoiado viga de comprimento L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O aumento frequências naturais como n^2, separando rapidamente os modos mais altos dos mais baixos. A frequência fundamental ($n = 1$) é:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

[80] Para outras condições de contorno (fixed-fixed, cantilever, etc), a equação de frequência transcendental deve ser resolvido numericamente. Tabelas de coeficientes de frequência estão disponíveis em referências padrão.

35.9.2.1 Ex 35.10: Frequência natural de uma ponte de aço e Verificação de ressonância dos pedestres

Uma ponte de aço tem as seguintes propriedades:

- Span: $L = 20$ m
- Aço I-section: $I = 6.0 \times 10^{-4}$ m^4, $A = 1.0 \times 10^{-2}$ m^2
- Módulo de elasticidade: $E = 210$ GPa
- Densidade de aço: $\rho = 7\,850$ kg/m^3
- Carga morta adicional (deck, grades, surfacing): $m' = 600$ kg/m

Determine: (a) O fundamental frequência natural; (b) se Ressonância induzida por pedestres é uma preocupação; (c) O efeito de dobrar o espaço para $L = 40$ m.

Solução.

(a) Fundamental frequência natural.

A massa total por unidade de comprimento combina a seção de aço e carga morta:

$$\bar{m} = \rho A + m' = 7\,850 \times 1.0 \times 10^{-2} + 600 = 78.5 + 600 = 678.5 \text{ kg/m}$$

A rigidez à flexão é $EI = 210 \times 10^9 \times 6.0 \times 10^{-4} = 1.26 \times 10^8$ N·m^2. Aplicando a fórmula biapoiado com $n = 1$:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \frac{\pi}{2 \times 20^2}\sqrt{\frac{1.26 \times 10^8}{678.5}} = \frac{\pi}{800}\sqrt{185\,700} = \frac{\pi}{800} \times 430.9 = 1.69 \text{ Hz}$$

O período natural correspondente é $T_1 = 1/f_1 = 0.59$ s.

(b) Teste de ressonância pedonal.

A locomoção humana produz forças quase periódicas. A frequência relevante Os intervalos são:

Atividade	Frequência dominante (Hz)
Andar devagar	1.4–1.7
Caminhada normal	1.7–2.3
Andar e correr	2.3–3.5
O corpo lateral balança	0.7–1.2

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Com $f_1 = 1.69$ Hz, a ponte cai na extremidade superior do A banda de caminhada lenta e a parte inferior da banda normal. Ressonância com a queda de pedestres é uma preocupação genuína de manutenção. Uma verificação de aceleração máxima é obrigatória. Não 1990 (European Committee for Standardization (CEN), 2010) Limites verticais Aceleração para 0.7 m/s^2 Para passarelas ao ar livre. A Ponte Millennium em Londres (2000) foi fechada dois dias após a abertura porque sua frequência lateral de 0.97 Hz Coincidiu com O balanço dos pedestres, demonstrando que Mesmo pequenas forças dinâmicas podem produzir Resposta inaceitável à ressonância.

(c) Efeito de dobrar a extensão.
Desde então $f_1 \propto 1/L^2$ (na seção constante e carga morta):

$$f_1(40\text{ m}) = f_1(20\text{ m}) \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 = 1.69 \times 0.25 = 0.42\text{ Hz}$$

Os 40 M ponte Cai bem abaixo de todas as frequências de caminhada, tão vertical Ressonância com o tráfego de pés não é mais uma preocupação. No entanto, o Frequência de oscilação lateral pode agora cair perto de 0,42 Hz, que está dentro do Alcance de carga lateral. O $1/L^2$ Escalar é um dos mais resultados importantes na dinâmica estrutural: dobrando os quartos de extensão o Freqüência, e até mesmo aumentos modestos no espaço podem mudar uma estrutura de seguro para ressonância, ou vice-versa.

35.10 Dinâmica não linear

81 As seções anteriores assumiram comportamento linear: forças proporcionais a deslocamento e velocidade. Estruturas reais, especialmente sob forte tremor de terra ou carregamento extremo, exibem resposta não linear. A não linearidade surge da produção do material, efeitos geométricos (grandes deslocamentos, comportamento de contato/gap e atrito.

35.10.1 Fontes de não linearidade

82 **Não linearidade material** ocorre quando a relação tensão-deformação é não linear. Para o aço, o comportamento elástico inicial dá lugar a ceder quando tensão excede a resistência ao rendimento. Para concreto, rachar introduz não linearidade mesmo em cargas de serviço. A relação constitutiva deve ser modelada apropriadamente (elastoplastic, danos, etc.).

83 **Não linearidade geométrica** surge quando deslocamentos são suficientemente grandes que as equações de equilíbrio devem ser escritas na configuração deformada. O P-Δ Efeito em pilares—aumento de momento devido a força axial agindo através lateral deslocamento- – é um exemplo comum.

84 **Não linearidade do contato** ocorre em interfaces onde componentes podem se separar

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou entrar em contato. Rolamentos de isolamento base, juntas de expansão e seções rachadas exibem esse comportamento.

35.10.2 Histerese e dissipação de energia

85 Sob carregamento cíclico, materiais não lineares traçam um caminho de carga-deslocamento que difere entre carga e descarga. A área cercada por este laço de histerese representa energia dissipada por ciclo. Esta histerética amortecimento é a principal fonte de dissipação de energia em estruturas produtivas durante terremotos.

86 Um esquema de histerese e a energia dissipada estão ilustrados na Figura 35.5 Onde flechas azuis: Carregando e recarregando o ramo; Flechas vermelhas: Desativando galhos. A área sombreada é igual à energia dissipada por ciclo $W_D = \oint F\,\mathrm{d}u$.. Inicial rigidez k_0 governa o declive elástico; O rendimento pós-irrendimento rigidez está reduzido. Rende a força $\pm F_y$ E pico deslocamento $\pm u_{\max}$ estão indicados.

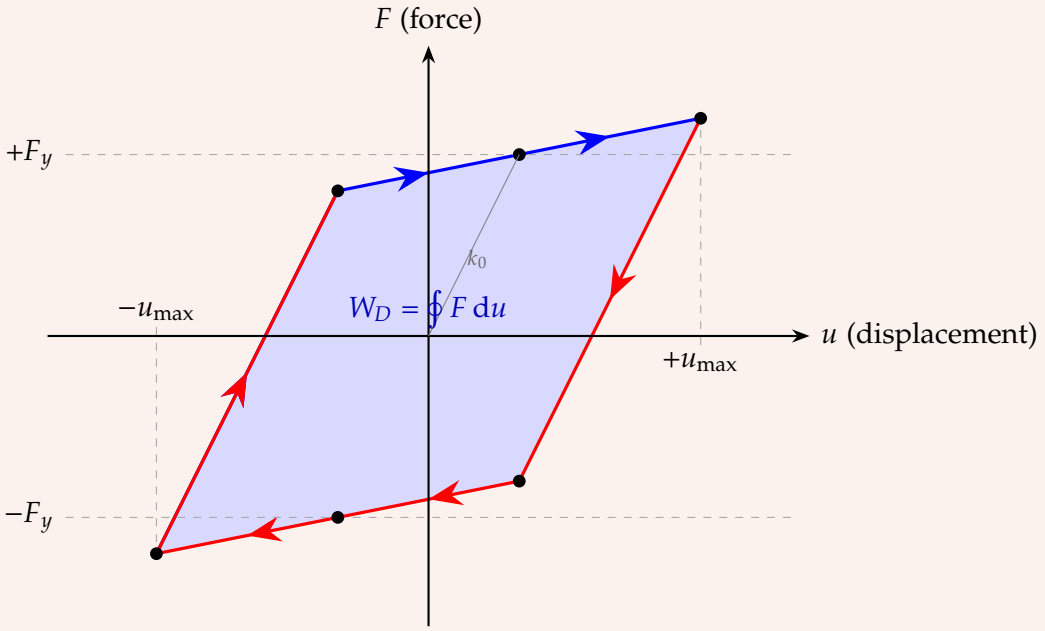


Figura 35.5: Histerese elastoplástica bilinear em loop sob carga cíclica simétrica.

87 Modelos histeréticos comuns incluem:

- **Elastoplástico**:. Elastic até o rendimento, então força constante com aumentando deslocamento. A descarga é paralela à inclinação elástica inicial.
- **Bilinear**:. Elastic até a produção, então reduzido (positivo ou negativo) pós-rendimento rigidez.
- **Degradando rigidez**:. Descarregar rigidez diminui com danos acumulados. Modelos de comportamento concreto e alvenaria.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Bouc-Wen**:. Modelo suave e diferenciável capaz de representar uma série de comportamentos histeréticos.

35.10.2.1 Ex 35.11: Viscoso equivalente amortecimento de um bilinear Histerese loop

Um aço estrutural preparado pórtico exibe um elastoplástico bilinear Histerese loop (como na figura) 35.5) com o seguindo parâmetros medidos de um teste cíclico:

- Inicial (elástico) rigidez: $k_0 = 50$ kN/mm
- Força de rendimento: $F_y = 400$ kN
- Máximo deslocamento no ciclo de teste: $u_{\max} = 20$ mm
- Proporção pós-rendimento: $\alpha = k_1/k_0 = 0.05$ (5% Endurecimento cinemático)

Determine: (a) o rendimento deslocamento e deslocamento ductilidade; (b) a energia dissipada por ciclo; (c) a energia deformação no máximo deslocamento; (d) a razão viscosa equivalente amortecimento pela Jacobsen Fórmula; (e) A interpretação da engenharia.

Solução.

(a) Renda deslocamento e ductilidade.

$$u_y = \frac{F_y}{k_0} = \frac{400}{50} = 8 \text{ mm} \qquad \mu = \frac{u_{\max}}{u_y} = \frac{20}{8} = 2.5$$

(b) Energia dissipada por ciclo.

Para um ciclo bilinear simétrico a energia dissipada por ciclo completo é a área do paralelograma fechado. Para um laço elastoplástico (o caso limitante $\alpha \to 0$) o resultado exato é:

$$W_D = 4\, F_y\, (u_{\max} - u_y)$$

Para um laço bilinear com endurecimento cinemático ($\alpha > 0$) o Excursões pós-rendimento adicionam área, mas para um ciclo simétrico com igual amplitudes positivas e negativas, as contribuições para endurecer cancelam E a mesma fórmula se aplica. Daí:

$$W_D = 4 \times 400 \times (20 - 8) = 4 \times 400 \times 12 = 19\,200 \text{ kN·mm} = 19.2 \text{ kN·m}$$

(c) Deformação energia no máximo deslocamento.

A energia elástica deformação armazenada em $u_{\max}$ (computado usando o inicial rigidez como a referência) é:

$$W_s = \frac{1}{2}\, k_0\, u_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 20^2 = 10\,000 \text{ kN·mm} = 10.0 \text{ kN·m}$$

(d) Razão viscosa equivalente amortecimento (fórmula de Jacobsen).

A fórmula de Jacobsen (1960) iguala a energia dissipada por ciclo de um oscilador viscoso linear equivalente ao do não linear Sistema com a mesma amplitude:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{W_D}{4\pi\, W_s} = \frac{19.2}{4\pi \times 10.0} = \frac{19.2}{125.7} = 0.153 \quad (15.3\%)$$

(e) Interpretação da engenharia.

O ciclo de histerese sozinho contribui com 15,3% Viscosa equivalente amortecimento na ductilidade $\mu = 2.5$.. Combinado com estrutural inerente amortecimento ($\zeta_s \approx 2$–5% para aço), o total eficaz

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

amortecimento ultrapassa 17 anos%Por isso, as estruturas de produção sobrevivem a terremotos distantes maior do que sua capacidade elástica implicaria. Mais três pontos Vale a pena notar.

1. *Ductilidade dirige amortecimento.* Reescrevendo a fórmula:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{4F_y(u_{\max} - u_y)}{4\pi \cdot \frac{1}{2}k_0 u_{\max}^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 1/\mu}{\mu} \times \frac{F_y/u_y}{F_y/u_y} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} \cdot \mu$$

   Mais simplesmente: ζ_{eq} Aumenta com a demanda da ductilidade até um platô, explicando por que sistemas altamente dúcteis são tão eficiente em absorver energia sísmica.
2. *Conexão com o código R-Fatores.* A base física do fator de redução da força $R = \mu$ é precisamente isso Histerético amortecimento: A pórtico que sustenta $\mu = 4$ Se dissipa Tanta energia que pode resistir aos movimentos do solo quatro vezes maior do que sua força de rendimento permitiria.
3. *Limitações.* A fórmula Jacobsen é uma aproximação. Supõe resposta em estado estacionário e é mais preciso para moderada ductilidade ($\mu \leq 4$). Para sistemas altamente não lineares ou degradantes, A análise direta não linear da história é mais confiável.

35.10.3 Dutilidade e Design de Capacidade

88 O *deslocamento dutilidade* μ é definida como a proporção de máximo deslocamento para rendimento deslocamento:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

Estruturas projetadas para render e deformar inelásticamente podem sobreviver a terremotos muito mais fortes do que sua capacidade elástica sugere. Este é o princípio fundamental de *Desenho de capacidade*:. Aceitar render-se em regiões cuidadosamente detalhadas enquanto protege elementos frágeis.

89 A relação entre a redução da força e a demanda de ductilidade é capturada pela R-μ-T Relacionamento. Para estruturas com períodos na faixa sensível à velocidade:

$$R \approx \mu$$

Esta regra de "igual"afirma que o máximo deslocamento da estrutura de produção é igual ao de uma estrutura elástica com o mesmo período – render reduz a demanda de força sem aumentar deslocamento.

35.10.3.1 Ex 35.12: Dutilidade demanda e redução de força para um concreto armado pórtico

Um momento de história única é para ser projetado para uma zona sísmica cujo espectro de projeto segue a forma tripartida de Exemplo 35.7.2.1 ($S_a = 0.80g$ para $T \leq 0.60$ s). As propriedades pórtico são:

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Massa sísmica: $m = 300$ t
- Período fundamental: $T_n = 0.40$ s (No platô)
- Altura da história: $h = 3.5$ m
- ductilidade disponível: $\mu = 4$ (Crútil ductil bem detalhado por códigos modernos)

Usando a regra igual-deslocamento, determinar: (a) a base elástica cisalhamento Exigir; (b) a base de projeto reduzida cisalhamento; (c) O rendimento e o máximo deslocamentos; (d) A taxa de desvio da história e verificação do desempenho.

Solução.

(a) Base elástica cisalhamento (sem redução da ductilidade).

$$V_{\text{el}} = m\, S_a = 300 \times 0.80 \times 9.81 = 2\,354 \text{ kN}$$

(b) Base de projeto reduzida cisalhamento.

Para períodos na faixa sensível à velocidade a regra igual-deslocamento dá $R \approx \mu$Então, o fator de redução da força $R = 4$:

$$V_y = \frac{V_{\text{el}}}{R} = \frac{2\,354}{4} = 589 \text{ kN}$$

O pórtico deve ser projetado para ceder a este nível de força. Projetando para V_y Em vez de.. V_{el} reduz a estrutura necessária força e, portanto, custo por um fator de quatro.

(c) Renda deslocamento e máximo deslocamento.

A lateral rigidez vem do período e da massa:

$$k = \omega_n^2\, m = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m = \left(\frac{2\pi}{0.40}\right)^2 \times 300 = 246.7 \times 300 = 74\,022 \text{ kN/m}$$

Rende-te.

$$u_y = \frac{V_y}{k} = \frac{589}{74\,022} = 7.95 \text{ mm}$$

Pela regra igual-deslocamento, o máximo inelástico deslocamento É igual ao espectral elástico deslocamento:

$$u_{\max} = S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{0.80 \times 9.81}{246.7} = 31.8 \text{ mm}$$

Verificação: $\mu = u_{\max}/u_y = 31.8/7.95 = 4.0$. ✓

Plástico necessário deslocamento além do rendimento:

$$u_p = u_{\max} - u_y = 31.8 - 8.0 = 23.8 \text{ mm}$$

(d) Relação de deriva da história e verificação de desempenho.

$$\frac{u_{\max}}{h} = \frac{31.8}{3\,500} = 0.91\%$$

A maioria dos códigos permite uma taxa máxima de deriva de 2 histórias% para segurança de vida e 0,5% para ocupação imediata. O 0,91% deriva é aceitável para o objetivo de desempenho da segurança de vida, mas não satisfaria Necessidade de ocupação imediata. Os números encapsulam o fundamental Trade-off em engenharia sísmica: aceitando 24 mm de plástico Deformação a força de projeto é reduzida por um fator de quatro. O A estrutura vai manter danos repará-los no terremoto Não vai colapsar, que é precisamente a intenção dos códigos modernos. Se o mesmo pórtico foram projetados elásticamente ($\mu = 1$, $R = 1$), Seria necessário quatro vezes a força, mas não sofreria nenhuma estrutura Dano.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

35.11 Considerações Práticas

35.11.1 Amortecimento em Estruturas Real

90 Razões medidas amortecimento para estruturas dependem do material, amplitude da vibração e tipo de construção. Os valores típicos incluem:

Tipo de estrutura	Amortecimento relação ζ
Aço, soldado, pré-rendimento	0.01–0.02
Aço, aparafusado, pré-rendimento	0.02–0.03
Concreto armado, desfeito	0.01–0.02
Concreto armado, rachado	0.03–0.05
Concreto protendido	0.01–0.02
Alvenaria, não quebrada	0.02–0.03
Estruturas de madeira	0.05–0.10

Estes são valores de ordem de grandeza; O atual amortecimento depende de detalhes e deve ser medido quando possível.

35.11.2 Interação estrutura-solo

91 A resposta dinâmica de uma estrutura depende não só da própria estrutura, mas também do solo de apoio. *Interação solo-estrutura* (SSI) pode afetar significativamente tanto o movimento de entrada e as frequências do sistema. Solos flexíveis aumentam o período efetivo do sistema e introduzem mais amortecimento através da radiação de energia no solo. Para estruturas rígidas em solo macio, os efeitos do SSI podem ser substanciais; Para estruturas flexíveis em rocha, elas são insignificantes.

35.11.3 Ajustados Dampers de Massa

92 Um amortecedor de massa sintonizado (TMD) é um sistema secundário de massa mola-damper ligado à estrutura primária e sintonizado a uma frequência específica. Quando a estrutura primária vibra em sua frequência natural, a DTM oscila em oposição, reduzindo a resposta primária. DTMs são usadas em edifícios altos (por exemplo, Taipei 101) e pontes de longo alcance para reduzir vibrações induzidas pelo vento e sísmicas.

93 O ajuste ideal de uma DTM para uma estrutura primária não alterada é:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

Onde $\mu_m = m_d/m$ é a razão de massa (tipicamente 0,01 a 0,05), ω_d é a frequência de DTM, e ζ_d é a proporção de DTM amortecimento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

35.11.4 Ex 35.13: Projeto de um amortecedor de massa sintonizado para um edifício alto

Uma torre de aço esbelta tem as seguintes propriedades dinâmicas em seu modo fundamental:

- Massa total: $M = 800$ t
- Frequência natural: $\omega_n = 2.094$ rad/s ($T_n = 3.0$ s, $f_n = 0.333$ Hz)
- Estrutural amortecimento: $\zeta = 1\%$ (aço levemente amortecido)

Uma DTM deve ser instalada no topo da torre com uma proporção de massa $\mu_m = m_d/M = 0.02$ (2%). Determine: (a) a massa de DTM; (b) o ideal Frequência de DTM e primavera rigidez; (c) a relação ótima de DTM amortecimento e Coeficiente de amortecimento; (d) a redução da amplitude do estado estacionário.

Solução.

(a) massa de DTM.

$$m_d = \mu_m\, M = 0.02 \times 800 = 16 \text{ t}$$

(b) Frequência de DTM ótima e mola rigidez.

Da fórmula de afinação Den Hartog:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

$$\omega_d = 0.9804 \times 2.094 = 2.053 \text{ rad/s} \qquad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0.327 \text{ Hz}$$

A mola da DTM é:

$$k_d = m_d\, \omega_d^2 = 16 \times (2.053)^2 = 67.5 \text{ kN/m}$$

(c) Óptima relação de DTM amortecimento e coeficiente amortecedor.

$$\zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.02}{8 \times (1.02)^3}} = \sqrt{\frac{0.060}{8.489}} = \sqrt{0.00707} = 0.0841 \quad (8.4\%)$$

O coeficiente de amortecimento viscoso:

$$c_d = 2\,\zeta_d\, m_d\, \omega_d = 2 \times 0.0841 \times 16 \times 2.053 = 5.53 \text{ kN·s/m}$$

(d) Redução da amplitude ressonante.

Para uma estrutura primária não alterada ($\zeta = 0$), a DTM reduz o Fator de amplificação dinâmica ressonante do valor ilimitado para Aproximadamente:

$$D_{\text{TMD}} \approx \sqrt{\frac{2+\mu_m}{\mu_m}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2.02}{0.02}} = \frac{1}{2}\sqrt{101} = 5.02$$

comparado com $D = 1/(2\zeta_{\text{struct}})$ Sem a DTM. Para a estrutura real amortecimento $\zeta = 1\%$, o descontrolado Amplificação ressonante é $D_0 = 1/(2 \times 0.01) = 50$. A DTM, portanto, reduz o pico de resposta por um fator de aproximadamente $50/5 = 10$, ou por grosso 90%.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Comentário. A relação de massa $\mu_m = 2\%$ é representante de instalações reais: Taipei 101 usa um 660 t DTM do pêndulo contra uma massa de construção De mais ou menos 30,000 t ($\mu_m \approx 2.2\%$). A relação ideal amortecimento de 8.4% é consideravelmente maior que a estrutura amortecimento, é por isso que um amortecedor viscoso dedicado é necessário dentro da DTM. Três pontos práticos merecem ênfase:

1. As fórmulas de Den Hartog assumem uma estrutura primária não alterada. Pequeno Estrutural amortecimento ($\zeta \leq 2\%$) tem efeitos negligenciáveis sobre o Parâmetros ótimos.
2. Atrasando - uma mudança em ω_n devido a mudanças rigidez, adicionado massa ou temperatura degrada significativamente a eficácia da DTM. Mecanismos de mola ou amortecedores ajustáveis às vezes são incluídos para Re-ajustando em serviço.
3. DTMs são eficazes apenas perto da frequência afinada. Eles não reduzem resposta em outros modos, por isso múltiplas DTMs ou banda larga dispositivos são usados quando vários modos contribuem para a resposta.

35.11.5 Isolamento Base

94 Isolação da base introduz uma camada flexível (tipicamente rolamentos elastómeros ou sistemas deslizantes) entre a estrutura e a fundação. A estrutura isolada tem um período muito mais longo, afastando-a do conteúdo de alta energia dos típicos movimentos terra terremoto. A camada de isolamento também fornece mais amortecimento. O isolamento da base é particularmente eficaz para estruturas rígidas de curto período e é amplamente utilizado em hospitais, instalações de emergência e edifícios históricos.

35.11.6 Ex 35.14: Projeto de um prédio hospitalar isolado

Um prédio de hospital de dois andares deve ser equipado com uma borracha de chumbo Sistema de isolamento. A estrutura de base fixa tem o seguinte Propriedades:

- Peso sísmico: $W = 12\,000$ kN (massa $M = W/g = 1\,223$ t)
- Período fundamental da base fixa: $T_{\text{fb}} = 0.30$ s
- Laterais de base fixa rigidez: $K_{\text{fb}} = 537\,000$ kN/m
- Estrutural amortecimento: $\zeta_s = 5\%$

O espectro de aceleração do projeto (5% amortecimento) segue a forma tripartite De Exemplo 35.7.2.1:

$$S_a(T) = \begin{cases} 0.80g & T \leq 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T} & T > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

O sistema de isolamento foi projetado para atingir um período isolado $T_{\text{iso}} = 2.50$ s com um efetivo amortecimento $\zeta_{\text{iso}} = 15\%$. Determine: (a) o isolamento exigido rigidez; (b) o desenho deslocamento dos isolantes; (c) a base cisalhamento com e sem isolamento; (d) o fator de redução da aceleração.

Solução.

(a) isolamento exigido rigidez.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

O período isolado é regido pela camada de isolamento rigidez K_{iso} (a superestrutura é assumida rígida em relação aos isolantes):

$$T_{\text{iso}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_{\text{iso}}}} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{iso}} = M\left(\frac{2\pi}{T_{\text{iso}}}\right)^2 = 1\,223 \times \left(\frac{2\pi}{2.50}\right)^2 = 1\,223 \times 6.317 = 7\,726 \text{ kN/m}$$

Isso é aproximadamente.. 1.4% da base fixa, confirmando que a camada de isolamento é muito flexível em relação à superestrutura.

(b) Desenho deslocamento dos isolantes.

O espectral deslocamento em $T_{\text{iso}} = 2.50$ s é obtido das relações pseudo-espectrais. Primeiro, leia a aceleração espectral Em.. T_{iso} (que está no ramo de longo período):

$$S_a(2.50) = \frac{0.48g}{2.50} = 0.192g = 1.883 \text{ m/s}^2$$

A amortecimento fator de correção η É responsável pelo maior isolamento amortecimento ($\zeta_{\text{iso}} = 15\%$) em relação à referência 5%:

$$\eta = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \zeta_{\text{iso}}}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + 0.15}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.20}} = 0.707$$

A aceleração espectral corrigida de amortecimento e deslocamento são:

$$S_a^* = \eta\, S_a = 0.707 \times 1.883 = 1.332 \text{ m/s}^2$$

$$S_d = \frac{S_a^*}{\omega_{\text{iso}}^2} = \frac{S_a^*}{(2\pi/T_{\text{iso}})^2} = \frac{1.332}{(2\pi/2.50)^2} = \frac{1.332}{6.317} = 0.211 \text{ m} \approx 211 \text{ mm}$$

Este é o projeto deslocamento que cada unidade isolante deve acomodar. Típicos isoladores LRB podem sustentar 200-400 mm de lateral deslocamento, Então o projeto é viável.

(c) Base cisalhamento com e sem isolamento.

Base fixa (sem isolamento, $T_{\text{fb}} = 0.30$ s, 5% amortecimento, região platô:

$$V_{\text{fb}} = M\, S_a(0.30) = 1\,223 \times 0.80 \times 9.81 = 9\,597 \text{ kN} \approx 0.80\, W$$

Isolado na base ($T_{\text{iso}} = 2.50$ s, 15% amortecimento, corrigido:

$$V_{\text{iso}} = M\, S_a^* = 1\,223 \times 1.332 = 1\,629 \text{ kN} \approx 0.136\, W$$

D) Fator de redução da aceleração.

$$\mathcal{R} = \frac{V_{\text{fb}}}{V_{\text{iso}}} = \frac{9\,597}{1\,629} = 5.89 \approx 6$$

O isolamento da base reduz a base sísmica cisalhamento por um fator de aproximadamente 6, de.. 80% do peso do edifício para 14%.

Comentário. Várias características deste resultado merecem atenção.

1. *O turno do período é o mecanismo primário.* Saindo de.. $T = 0.30$ s para $T = 2.50$ s Deslocações a estrutura fora do platô de aceleração de alta energia e profundo para o longo período, cauda de baixa aceleração do espectro. O adicional amortecimento ($\eta = 0.707$) contribui com um outro fator de $\sqrt{2}$ redução, mas o turno do período faz a maior parte do trabalho.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. *As acelerações da superestrutura são quase uniformes.* Porque a camada de isolamento concentra quase todas as deformações em A base, a superestrutura se move essencialmente como um corpo rígido. Acelerações do andar são aproximadamente iguais em todos os níveis e perto para $S_a^*/g \approx 0.136g$ — uma vantagem crítica para um hospital onde equipamentos, tetos e componentes não estruturais devem permanecer funcional após o terremoto.
3. *O isolamento deslocamento deve ser acomodado.* O 211 O design de mm requer um fosso (gap sísmico) Pelo menos aquela largura ao redor de todo o perímetro do prédio, e tudo mais Os utilitários que cruzam o plano de isolamento devem ser equipados com flexível Conexões.
4. *Aplicabilidade.* O isolamento da base é mais eficaz para estruturas rígidas de curto período em solo firme. Para estruturas flexíveis (longas) T_{fb}) A mudança de período é menor, e para solos macios o longo período movimento do solo energia pode negar o benefício inteiramente.

35.12 Considerações finais

35.12.1 Cuidado com os métodos de um praticante

Prof. Edward L. Wilson sobre o método do espectro de resposta

Ray Clough e eu lamentamos termos criado o método aproximado espectro de resposta para análise sísmica de estruturas em 1962... Naquela época, muitos membros da profissão estavam usando a soma dos valores absolutos dos valores modais para estimar as forças máximas dos membros. Ray sugeriu usar o método SRSS para combinar os valores modais. No entanto, fui eu quem colocou o método aproximado em muitos programas de análise dinâmica que permitiram aos engenheiros produzir números positivos sem sentido de pouco ou nenhum valor... Depois de trabalhar com o RSM por mais de 50 anos, eu recomendo que não seja usado para análise sísmica.'

95 Esta reflexão sincera de um dos criadores do método é uma lembrança saudável de que conveniência e rigor nem sempre são a mesma coisa. O método espectro de resposta permanece amplamente utilizado em códigos e práticas, mas suas limitações - aproximações modais de combinação, incapacidade de capturar comportamento não linear, e dependência de suposições de forma espectral - devem ser entendidas. Para estruturas críticas ou resposta fortemente não linear, análise não-linear da história do tempo é a ferramenta apropriada, como desenvolvido no Capítulo 53.

35.12.2 Nota de encerramento: Limites da teoria linear

Quase todos os resultados analíticos neste capítulo dependem de suposições lineares: forças de restauração elástica linear, pequenas deslocamentos, e (quando usado) viscosas lineares amortecimento. Essas suposições permitem sobreposição e soluções de forma

CÓPIA PARA REVISÃO

fechada. Quando eles são violados (rendimento material, grande-deslocamento cinemática, contato, ou fortemente não linear amortecimento, a resposta deve geralmente ser calculada pela integração passo a passo do tempo. Esses tópicos computacionais e avançados são desenvolvidos no capítulo de pós-graduação 53.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 36

Elementos de Projeto estrutural

Abstract

Análise estrutural nunca é um fim em si mesmo. É uma ferramenta essencial para realizar uma avaliação de risco e segurança de uma estrutura nova ou existente, seja um edifício, uma aeronave, ou um osso.

Portanto, é importante que o analista estrutural, no contexto deste livro abrangente, tenha uma breve (embora superficial) compreensão do processo de design e sua relação com a análise. Este capítulo destacará algumas considerações-chave e paradigmas de procedimentos análise estrutural.

Eu vou cobrir brevemente o projeto permitido Tensão (ASD) e o design de fatores de carga e resistência (LRFD), juntamente com vários exemplos ilustrativos. Além disso, a Performance Based Engineering (PBE) será brevemente destacada, embora seja detalhada em capítulos posteriores.

Este capítulo é particularmente relevante para a introdução posterior de análise seccional não linear das estruturas (capítulo 56), onde a análise e o design devem ser estreitamente entrelaçados.

36.1 Introdução 1389
36.1.1 Análise e desenho; Um processo iterativo 1389
36.1.2 Segurança 1390
36.2 Desenho permitido tensão (asd) . . 1391
36.2.1 Ex 36.1: Asd; flexura 1392
36.3 Projeto do fator de carga e resistência (LRFD) 1392
36.4 Exemplos de códigos de projeto baseados em lrfd 1395
36.4.1 Aplicação: Resistência plástica das seções R/C viga . . 1396
36.4.2 Aplicação: Resistência plástica de R/C pilares 1405
36.4.3 Concreto protendido 1414
36.5 Engenharia baseada em desempenho (PBE) 1419

CÓPIA PARA REVISÃO

36.1 Introdução

36.1.1 Análise e desenho; Um processo iterativo

1 Análise nunca é um fim por si só, seu objetivo final é ou projetar um nova estrutura (principalmente de acordo com prevalecente *Códigos de design*), ou para avaliar a segurança de uma estrutura (normalmente fora do real dos códigos).

2 A análise procura fornecer aos engenheiros de projeto deslocamento, tensões, forças (reações) para o próprio projeto.

3 Como não se pode analisar uma estrutura virtual ou parametrizada, temos que começar com um projeto preliminar, analisar, verificar e então refinar quantas vezes for preciso até que a convergência seja alcançada. O processo é ilustrado pela Fig. 36.1 que conceitua o processo como dois operadores: Análise e Design.

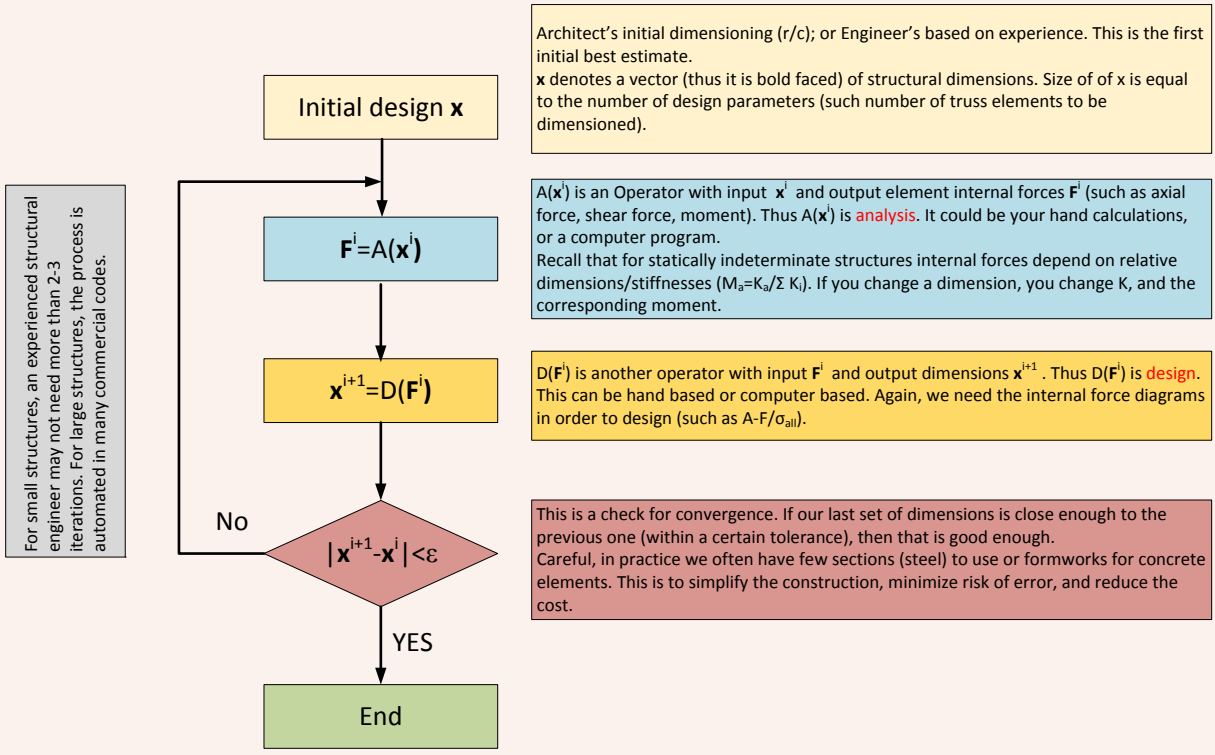


Figura 36.1: Interações iterativas do engenheiro arquiteto-estrutural

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

36.1.2 Segurança

4 Em projeto estrutural, denotamos a capacidade de uma estrutura resistir a uma determinada carga por C e a demanda de carga externa por D.. Eles teriam unidades em termos de F, FL, ou F/L^2 (força, momento, tensão).

5 Por exemplo, em uma viga, a demanda é determinada a partir do diagrama de momento, enquanto a capacidade é baseada no momento interno que pode ser mobilizado (uma função de propriedades transversais, e tensão-deformação curva), Fig. 36.2.

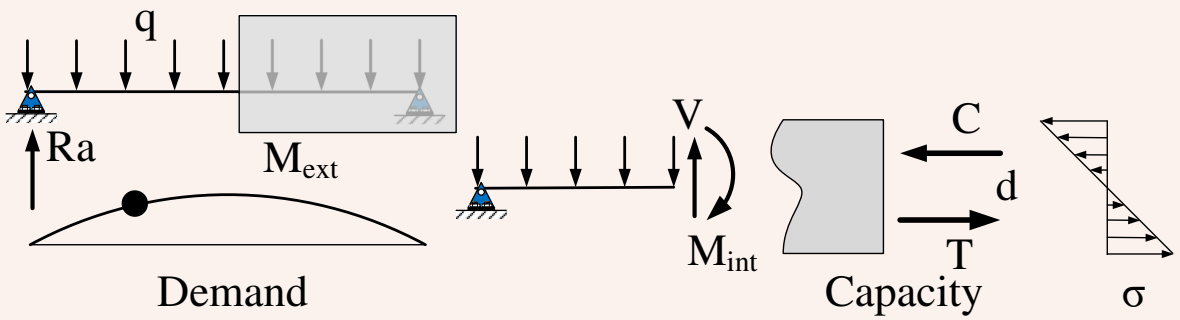


Figura 36.2: Exigência e capacidade em uma viga

6 Claro, a capacidade deve exceder a demanda, mas a questão chave é quanto, e por cujos cálculos. O que é isso? 36.3 Identificamos 4 zonas. Nenhum deles é bem definido, exceto o limite inferior do primeiro.

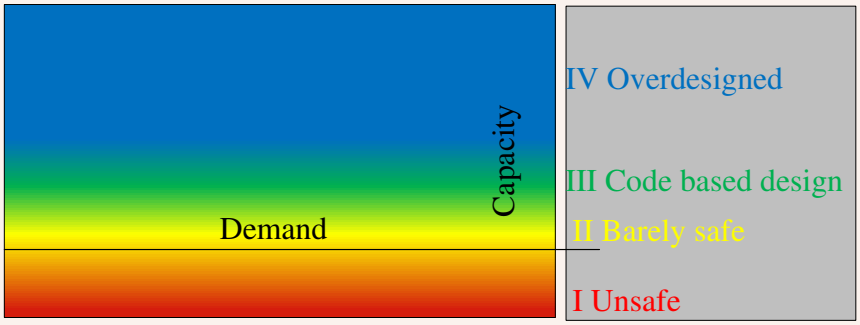


Figura 36.3: Segurança

Eu não estou seguro Essas estruturas podem resistir por um tempo muito limitado e o colapso pode ocorrer mesmo antes da conclusão.

Mal é seguro Essas são estruturas que fator de segurança mal excedem uma. Eles são representativos da construção anterior aos códigos modernos (e nós realmente não

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

sabemos o seu verdadeiro fator de segurança). Essas mesmas estruturas podem permanecer eretas até serem submetidas a um raro evento de carga (tipicamente, mas não apenas terremoto). O Partenon foi destruído pela pólvora armazenada pelos otomanos. O farol de Alexandria, o Colosso de Rodes, Lisboa e a cidade de Basileia foram destruídos por terremotos. Devemos notar que mesmo nos tempos modernos algumas estruturas mal projetadas também foram destruídas por terremotos (1989, o terremoto Loma Prieta em São Francisco destruiu inúmeras pontes e viadutos). Este pode ter sido projetado para *Cargas verticais* mas não para *Cargas laterais*.. Por isso, Fig. 36.3 Poderia ser refinado para distinguir entre cargas verticais e laterais.

III Seguro por códigos modernos Estas são estruturas projetadas pelo moderno (por exemplo. Post ca 1960) códigos de projeto.

IV Overdesigned Essas são estruturas que estão muito além do projeto. Pode ser estruturas mal projetadas por não-engenheiros nos tempos modernos, ou engenheiros em um momento anterior quando a análise estrutural ainda não tinha maduro. Por exemplo, o Empire State Building, a represa Hoover são exemplos de estruturas sobreprojetadas.

7 Os códigos modernos têm buscado fornecer uma base rigorosa para a segurança. Três grandes abordagens se destacam

1. Design permitido Tensão
2. Design de Fator de Carga e Resistência
3. Engenharia de Performance

Cada um será brevemente abordado separadamente.

36.2 Desenho permitido tensão (asd)

8 No método Allowable Tensão Design (ASD), nós simplesmente impõemos

$$D < \frac{C}{SF}$$

Onde o SF é um fator de segurança ($\sim 1.5 - 2$)

9 Nesta abordagem, apenas a capacidade é reduzida (por causa das incertezas), por outro lado estamos implicitamente assumindo que a demanda é puramente determinística.

10 Historicamente, esta era a estratégia de design defendida, mas foi substituída pela seguinte nos anos 70.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

36.2.1 Ex 36.1: Asd; flexura

A biapoiado viga com uma extensão de 15 pés é submetido a uma carga uniforme de 400 libras por pé. A viga é feito de aço com um rendimento tensão de 36 mil psi. Precisamos determinar se a seção viga com um momento de inércia $I = 80\,\text{in}^4$ e um módulo de seção $S = 16\,\text{in}^3$ é adequado considerando um fator de segurança de 1,75.

O permitido tensão σ_{allow} Considerando o fator de segurança é dado por:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\text{Safety Factor}}$$

onde: $\sigma_{\text{yield}} = 36,000\,\text{psi}$ e o Fator de segurança = 1,75 Substitua os valores:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{36,000\,\text{psi}}{1.75} = 20,571.43\,\text{psi}$$

Para uma viga com uma carga uniforme, o máximo ocorre no ponto médio e é dado por:

$$M_{\text{max}} = \frac{wL^2}{8}$$

onde: $w = 400$ libras por pé e $L = 15$ pés Agora, calcule o máximo momento fletor:

$$M_{\text{max}} = \frac{400\,\text{lb/ft} \times (15 \times 12)^2\,\text{in}^2}{8 \times 12} = \frac{400 \times 32400}{96} = 135,000\,\text{lb-in}$$

O módulo de seção necessário para resistir ao momento fletor sem exceder o permitido tensão é dado por:

$$S_{\text{necessário}} = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}}$$

onde: $\sigma_{\text{allow}} = 20,571.43\,\text{psi}$
Substituto

$$S_{\text{necessário}} = \frac{135,000\,\text{lb-in}}{20,571.43\,\text{psi}} \approx 6.56\,\text{in}^3$$

Dado o módulo de seção $S = 16\,\text{in}^3$ Como $S_{\text{fornecido}} = 16\,\text{in}^3$ é maior que $S_{\text{necessário}} = 6.56\,\text{in}^3$, a seção é adequada.

36.3 Projeto do fator de carga e resistência (LRFD)

11 Na LRFD, tanto capacidade quanto demanda são consideradas variáveis aleatórias com suas próprias funções distribuição de probabilidade. Assim, sempre haverá uma probabilidade de fracasso.

12 A carga em si é dividida entre carga morta (DL), carga viva (LL), carga de vento (WL) etc. Será multiplicado por um fator $\alpha > 1$ de acordo com (ASCE-7) (ASCE/SEI 7-16, 2017) e consideraremos a resistência nominal final (plástica) Φ)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

13 α e.. Φ são determinados de tal forma que a probabilidade de falha não excede um certo valor. Assim, LRFD é geralmente expressa como

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i$$

Por exemplo, no código de projeto ACI-318 teríamos $D = 1.4DL + 1.7LL$ e.. $\phi = 0.9$ para flexura.

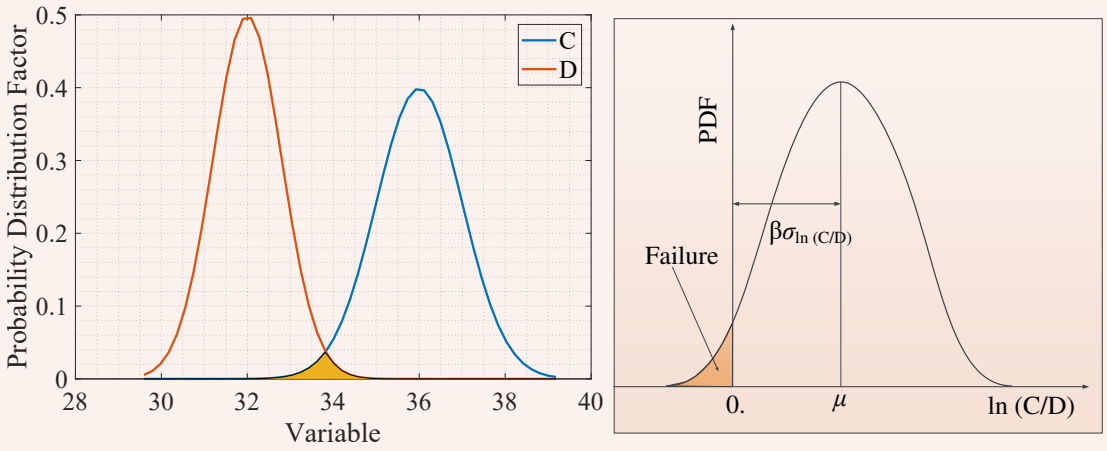
14 O estado limite é geralmente determinado a partir da capacidade plástica *determinado sem* uma análise não linear, apenas uma suposição de que o elástico linear é aplicável.

15 LRFD procura ter um Índice de confiabilidade, §N De tal forma que.. $\beta >\sim 3.5$.

16 Limitações do paradigma de design LRFD são discutidas em §66.1 Por meio da introdução ao Engenharia sísmica baseada em desempenho um (chapter 72).

O Índice de confiabilidade é um indicador 'universal' sobre a adequação de uma estrutura, e pode ser usado como métrica para 1) avaliar a saúde de uma estruturas, e 2) comparar diferentes estruturas direcionadas para possível remediação.

17 Como resultado da suposta distribuição normal de ambos C e.. DSempre haverá uma probabilidade de fracasso, Fig. 36.4a.



(a) Probabilidade Distribuição de capacidade e demanda

(b) Definição de Índice de confiabilidade

Figura 36.4: Distribuição de probabilidade funções de C e.. D

18 Podemos normalizar a capacidade com a demanda, Fig. 36.4b, e definir um chamado *índice de confiabilidade* através de uma das duas abordagens:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Aprach I

$$
\begin{aligned}
M &= C - D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \\
\sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}
\end{aligned}
$$

Apprach II

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} = \frac{\ln \mu_C/\mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

19 β é selecionado para refletir as consequências do fracasso, tabela 36.1.

Tabela 36.1: Índice de confiabilidade valores-alvo

Tipo de Carga/Membro	β
AISC*	
DL + LL; Membros	3.0
DL + LL; Ligações	4.5
DL + LL + WL; Membros	3.5
DL + LL +EL; Membros	1.75
ACI	
Fracasso Ducil	3-3.5
Fracassamentos Brittle	3.5-4

* Instituto Americano de Construção de Aço

20 A probabilidade de fracasso P_f é igual à proporção da área sombreada com a área total sob a curva (Fig 36.4b) e é dado por $\Phi(-\beta)$ Onde Φ é a função normal de probabilidade cumulativa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

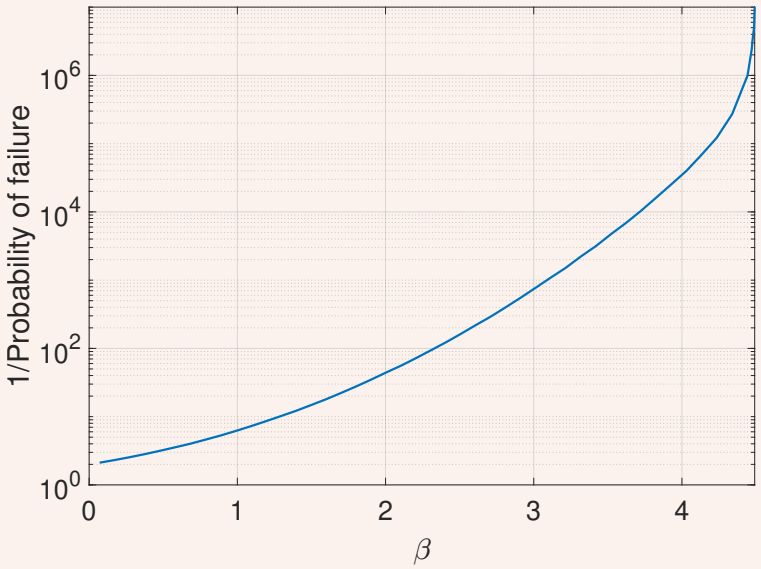


Figura 36.5: Probabilidade de fracasso em termos de β

21 Finalmente, o índice de confiabilidade pode estar diretamente relacionado com a probabilidade de falha, Fig. 36.5

22 Algumas das principais limitações da LRFD incluem:

1. Inconsistente: Análise linear, mas design plástico.
2. Ignora a redistribuição de carga perto da falha (embora o ACI implicitamente explique alguns deles através da redução de momentos negativos).
3. Endereços apenas um nível de perigo: Falha de um componente estrutural (e não de todo o sistema), mas que tal quantificação dos danos devido a eventos mais frequentes?

36.4 Exemplos de códigos de projeto baseados em lrfd

23 Uma vez esforços internos (como momentos e cisalhamento, o *componente seccional* Pode ser projetado de acordo com o local predominante *Código de projeto*. A maioria das cidades/estados aceitam as desenvolvidas nacionalmente, como o American Concrete Institute *Requisitos de código para construção de concreto estrutural* (ACI 318.2-14, 2014) ou o Instituto Americano de Desenho Aço (American Institute of Steel Construction, 2016).

24 Esses códigos são regularmente atualizados a cada dois anos para refletir decisões consensuais de modificação baseadas em pesquisas recentes.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

25 Exemplos do Instituto Americano de Concreto *Requisitos de código para construção de concreto estrutural* (ACI 318.2-14, 2014).

9.5.1.1 Para cada combinação de carga fatorada aplicável, A força do projeto em todas as seções deve satisfazer $\phi S_n \geq U$ Incluindo...
22.2.2 *Suposições de projeto para concreto*
22.2.2.1 Máximo deformação na compressão extrema de concreto Fibra deve ser assumida igual a 0,003.
22.2.2.2 A resistência do concreto deve ser negligenciada Cálculos de força flexural e axial.
22.2.2.3 A relação entre compressão de concreto tensão e deformação devem ser representados por um trapezoidal retangular, Parabólica, ou outra forma que resulta em predição de força em substancial acordo com os resultados da abrangente Testes.
22.2.2.4.1 Concreto tensão de $0.85f'_c$ Deve ser assumido uniformemente distribuídos em uma zona de compressão equivalente limitado por bordas do seção transversal e uma linha paralela até o linha neutra localizado a uma distância da fibra de Compressor máximo deformação, calculado por: $a = \beta_1 c$ (22.2.2.4.1)
22.2.2.4.2 Distância da fibra de compressão máxima deformação para o linha neutra, c, deve ser medido perpendicularmente para o linha neutra.

36.4.1 Aplicação: Resistência plástica das seções R/C viga

26 Por exemplo, para análise de plástico seccional / design, consideramos uma seção concreto armado, Fig.36.6.. Como a resistência à tração do concreto é muito menor que sua resistência à compressão, a seção está rachada até o seu linha neutra. O concreto resiste à compressão, e o aço resiste à tensão.

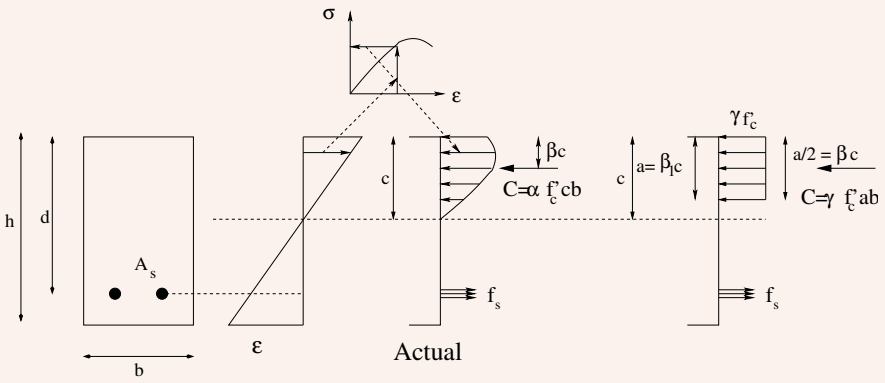


Figura 36.6: Estado limite análise de uma seção rachada concreto armado

27 Na falha (estado limite) temos uma distribuição linear cruzada deformação (Suposição

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

de Bernoulli), (ACI 10.2.2), e desde que o tensão deformação curva para o concreto é não linear, teremos uma distribuição não-linear tensão.

28 Assim, para análise temos duas opções:

1. Expressão analítica de $\sigma \Rightarrow$ integração exata
2. Substituir o diagrama exato tensão por um mais simples e equivalente, (ACI 10.2.6)

Segunda abordagem adotada pela maioria dos códigos. A primeira abordagem será ilustrada em Exemplo 36.4.1.4.

29 Para a distribuição equivalente tensão, tudo Precisamos saber se.. C & sua localização, assim α e.. β.

30 Nós adotamos um retangular tensão, com profundidade $a = \beta_1 c$, e tensão igual a $\gamma f_c'$ (ACI 10.2.7.1.). Esta distribuição retangular tensão é chamada de *Whitney tensão bloco*.

$$C = \alpha f_c' bc = \gamma f_c' ab$$
$$\alpha = \frac{f_{av}}{f_c'}$$
$$a = \beta_1 c$$

Assim

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta_1}$$

Mas a localização das forças resultantes deve ser a mesma, portanto

$$\beta_1 = 2\beta$$

31 De Experimentos:

f_c' (psi)	<4,000	5,000	6,000	7,000	8,000
α	.72	.68	.64	.60	.56
β	.425	.400	.375	.350	.325
$\beta_1 = 2\beta$	.85	.80	.75	.70	.65
$\gamma = \alpha/\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.86	0.86

32 Assim temos, (ACI-318 10.2.7.3.):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= .85 && \text{if } f_c' \le 4,000 \\ &= .85 - (.05)(f_c' - 4,000)\frac{1}{1,000} && \text{if } 4,000 < f_c' < 8,000 \end{aligned}$$

33 Assim, o fracasso pode ocorrer por qualquer um dos dois

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

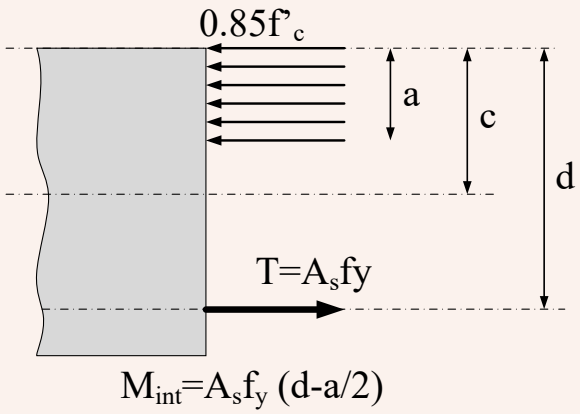


Figura 36.7: Whitney tensão bloco

- Rendimento de aço: $\varepsilon_s = \varepsilon_y$; Progressivo
- Esmagamento de concreto: $\varepsilon_c = .003$; Repentino; **(ACI 10.3.2)**.

Idealmente, os dois modos de falhas devem ocorrer simultaneamente. Isso ocorreria quando a ração de reforço $\rho = A_s/bd = \rho_b$ em um *Design equilibrado*.

Modos de falha Determinamos os dois possíveis modos de falha:

Falha de tensão:

$$\left.\begin{aligned} f_s &= f_y \\ A_s f_s &= .85 f_c' ab = .85 f_c' b \beta_1 c \\ \rho &= \frac{A_s}{bd} \end{aligned}\right\} c = \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d$$

Falha de compressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= .003 \\ \varepsilon_s &= \frac{f_s}{E_s} \\ \frac{c}{d} &= \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \Rightarrow c = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \end{aligned}$$

Design Equilibrado: ocorre se tivermos a produção simultânea do aço e esmagamento do concreto. Assim, nós simplesmente equacionamos as duas equações anteriores

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \\ \rho = \rho_b \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \frac{\rho b f 2 d}{.85 f_c' \beta_1} = \frac{.003}{\frac{f_s}{E - s} + .003} d \\ E_s = 29,000 \text{ ksi} \end{aligned}\right\} \rho_b = .85 \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87,000}{87,000 + f_y}$$
(ACI 8.4.3)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Forçado a ceder ao fracasso que é gradual (em oposição à súbita falha de compressão)

$$\rho < .75\rho_b$$

Requisitos de força ACI

$$\begin{aligned} U &= 1.4D + 1.7L && \textbf{(ACI 9.2.1)} \\ U &= 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) && \textbf{(ACI 9.2.2)} \\ M_d = M_u &= \phi M_n && \textbf{(ACI 9.1.1)} \\ \phi &= .90 && \textbf{(ACI 9.3.2.2)} \end{aligned}$$

Revisão do projeto existente: Dado, b, d, A_s, f_c', f_y, nós procuramos determinar a capacidade do momento M.

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd}$$
$$\rho_b = (.85)\beta_1 \frac{f_c'}{f_y}\frac{87}{87 + f_y}$$

- $\rho_{act} < \rho_b$:. Fracasso por ceder e..

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f_c' b} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$M_d = \phi A_s f_y (d - \frac{a}{2}) \quad \Sigma M = 0$$

- $\rho_{act} > \rho_b$ Não é permitido por código, neste caso temos um extra desconhecido f_s.

34 Agora temos mais um desconhecido f_sE nós vamos precisar de um equação adicional (do diagrama deformação).

$$c = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b \beta_1} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \qquad \text{Do diagrama de deformações}$$
$$M_d = \phi A_s f_s (d - \frac{\beta_1 c}{2}) \qquad \Sigma M = 0$$

Podemos resolver por iteração, ou substituição e solução de um quadrático equação.

Projeto

35 Em situações de design, ou temos que determinar b, d e.. A_s para resistir a um momento de design externo (Demand); Ou nós somos dados b, d, e procurar determinar A_s.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

I b d e.. A_s, desconhecido; M_d Conhecido; Uma vez que a falha de projeto é desencadeada por $f_s = f_y$

$$\left.\begin{array}{rl} \Sigma F_x = 0 a = \dfrac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} & a = \dfrac{\rho f_y}{0.85 f_c'} d \\ \rho = \dfrac{A_s}{bd} & M_d = A_s f_y \left(d - \dfrac{a}{2}\right) \end{array}\right\} M_d = \Phi \underbrace{\rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)}_{R} b d^2$$

Onde ρ é especificado pelo designer; ou

$$R = \rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)$$

que não depende de quantidades desconhecidas. Então.. resolver para bd^2:

$$bd^2 = \frac{M_d}{\Phi R}$$

Resolva b e.. d (Isso exigirá uma suposição em um dos dois, ou na sua relação), e então

$$A_s = \rho b d$$

II b, d & M_d são conhecidos, nós procuramos determinar A_s.. No entanto, não há certeza de que podemos ter um projeto com ρ_b Se a seção é muito pequena, então vai exigir muito aço resultando em uma seção super-reforçada.

[36] Neste caso, precisamos seguir uma abordagem iterativa

(a) Já que não sabemos se o aço estará cedendo ou não, usar f_s.
(b) Assumir um valor inicial para a (um bom começo é $a = \frac{d}{5}$)
(c) Assumir inicialmente que $f_s = f_y$
(d) Verifique o equilíbrio dos momentos$\Sigma M = 0$)

$$A_s = \frac{M_d}{\Phi f_s \left(d - \frac{a}{2}\right)}$$

(e) Verifique o equilíbrio das forças no x direção ($\Sigma F_x = 0$)

$$a = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b}$$

(f) Verifique a suposição de f_s Por qualquer comparação ρ com ρ_b, ou do diagrama deformação

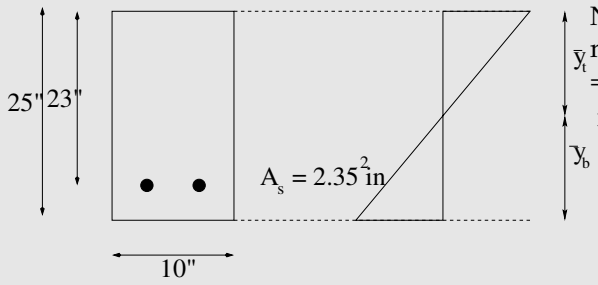
$$\frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{.003}{c} \Rightarrow f_s = E_s \frac{d - c}{c} .003 < f_y$$

Onde $c = \frac{a}{\beta_1}$.
(g) Iterar até que a convergência seja alcançada.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

36.4.1.1 Ex 36.2: Força máxima. Revisão



Nós procuramos determinar a capacidade de momento final do seguinte seção transversal com $f_c' = 4$ mil psi; $f_t' = 475$ psi; $f_y = 60$ mil psi; $A_s = 2.35$ in^2

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.35}{(10)(23)} = .0102$$

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f_c'}{f_y}\frac{87}{87+f_y} = (.85)(.85)\frac{4}{60}\frac{87}{87+60} = .0285 > \rho_{act} \checkmark$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f_c' b} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(4)(10)} = 4.15 \text{ in}$$

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (2.35)(60)\left(23 - \frac{4.15}{2}\right) = 2,950 \text{ k.in}$$

$$M_d = \phi M_n = 0.9(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

Nota:

1. Do equilíbrio, $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow c = \frac{A_s f_y}{.85\beta_1 b f_c'} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(.85)(4)(10)} = 4.87$ in
2. Solução alternativa:

$$\begin{aligned} M_n &= \rho_{act} f_y b d^2 (1 - .59\rho_{act}\frac{f_y}{f_c'}) \\ &= A_s f_y d(1 - 59\rho_{act}\frac{f_y}{f_c'}) \\ &= (2.35)(60)(23)[1 - (.59)\frac{60}{4}(.0102)] = 2,950 \text{ k.in} = 245 \text{ k.ft} \end{aligned}$$

$$M_d = \phi M_n = (.9)(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

36.4.1.2 Ex 36.3: Força máxima. Design I

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Projete um R/C viga com $L = 15$ FT; DL = 1,27 k/ft; LL = 2.44 k/ft; $f_c' = 3.000$ psi; $f_y = 40$ ksi; O peso do próprio negligente viga Selecionar $\rho = 0.75\rho_b$

$$
\begin{aligned}
w_u &= 1.4(1.27) + 1.7(2.44) = 5.92 \text{ k/ft} \quad \text{Factored load} \\
M_d &= \frac{w_u L^2}{8} = \frac{(5.92)(15)^2}{8} = 166.5 \text{ k.ft}(12) \text{ in/ft} = 1,998 \text{ k.in} \\
\rho &= 0.75\rho_b = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87}{87 + f_y} \\
&= (0.75)(.85)^2 \frac{3}{40} \frac{87}{87 + 40} = .0278 \\
R &= \rho f_y \left(1 - .59\rho \frac{f_y}{f_c'}\right) \\
&= (.0278)(40)\left(1 - (0.59)(.0278)\frac{40}{3}\right) = 0.869 \text{ psi} \\
bd^2 &= \frac{M_d}{\phi R} = \frac{1,998}{(0.9)(0.869)} = 2,555 \text{ in}^3
\end{aligned}
$$

Take $b = 10$ in, $d = 16$ in $\Rightarrow A_s = (.0278)(10)(16) = 4.45$ in^2 $\Rightarrow$ use 3 # 11

36.4.1.3 Ex 36.4: Força máxima. Design ii

Projete um R/C viga para $b = 11.5$ in; $d = 20$ in; $f_c' = 3$ ksi; $f_y = 40$ ksi; $M_d = 1,600$ k.in

Assuma $a = \frac{d}{5} = \frac{20}{5} = 4$ in

$$A_s = \frac{M_d}{\phi f_y (d - \frac{a}{2})} = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{4}{2})} = 2.47 \text{ in}^2$$

Verifique a suposição,

$$a = \frac{A_s f_y}{(.85) f_c' b} = \frac{(2.47)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.38 \text{ in}$$

Assim, tome $a = 3.3$ in.

$$
\begin{aligned}
A_s &= \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{3.3}{2})} = 2.42 \text{ in}^2 \\
\Rightarrow a &= \frac{(2.42)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.3 \text{ in} \checkmark \\
\rho_{act} &= \frac{2.42}{(11.5)(20)} = .011 \\
\rho_b &= (.85)(.85)\frac{3}{40}\frac{87}{87 + 40} = .037 \\
\rho_{max} &= .75\rho_b = .0278 > \rho_{act} \checkmark
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

36.4.1.4 Ex 36.5: Análise exata

Como um engenheiro questionando a validade da equação ACI para a capacidade de flexão final de R/C vigas, você determinou experimentalmente a seguinte curva para o concreto:

$$\sigma = \frac{2\frac{f_c'}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

Onde f_c' corresponde a.. ε_{max}.

Nós procuramos

1. Determine a razão exata de aço balanceado para um R/C viga com $b = 10$ in, $d = 23$ in, $f_c' = 4,000$ Psi, $f_y = 60$ KSI, $\varepsilon_{max} = 0.003$.
2. A equação para a distribuição exata tensão na seção.
3. Determine a força total de compressão C, e sua localização, em termos da localização do linha neutra c.
4. Compare com ACI 318.

A solução continua como segue

1. Tensão-Deformação:
$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times 10^6\varepsilon}{1+1.11\times 10^5\varepsilon^2}$$
2. Assumir o esmagamento na falha, portanto deformação distribuição será dada por
$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$
3. Combine essas duas equações:
$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$
4. A força total de compressão é dada por
$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2}dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$
5. Equilíbrio requer que $T = C$
$$2,773bc = A_s f_y$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Do diagrama deformação:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29{,}000} + .003} = 13.6 \text{ in}$$

6. Combinando as duas últimas equações

$$A_s = \frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000} = 6.28 \text{ in}^2$$

7. Para determinar o momento, devemos primeiro determinar o centroide da força de compressão medido a partir do linha neutra

$$\overline{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y\sigma dy}{2,773bc} = \frac{b\int_0^c \frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}dy}{2,773bc} = \frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy$$

$$= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right]$$

$$= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c$$

$$= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43 \text{ in}$$

8. A seguir, resolvemos por enquanto

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6,713 \text{ k.in}$$

9. Usando o código ACI

$$\rho_b = .85\beta_1\frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55 \text{ in}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57 \text{ in}$$

$$M = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765 \text{ k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61$$

10. Nós resumemos

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

	Exatamente	ACI
A_s	6.28	6.55
c	13.6	13.6
$\overline{y}'$	5.18	5.78
M	6,713	6,765

36.4.2 Aplicação: Resistência plástica de R/C pilares

34 Pilares, ou mais precisamente *viga pilares* são vigas com ambos força axial, e flexura causada pela excentricidade da força aplicada.

35 Dependendo da excentricidade do força axial, teremos três possíveis modos de falha, Fig. 36.8a

1. Grande excentricidade de carga ⇒ Falha na produção de aço (essencialmente uma viga).
2. Pequena excentricidade de carga ⇒ falha por esmagamento de concreto
3. Condição equilibrada onde temos falhas simultâneas por esmagamento de concreto e produção de aço.

36 Uma vez que o fracasso é causado por uma combinação de flexura e força axial, teremos um envelope de falha ou ''condição de rendimento" (semelhante aos discutidos em §55.2) que neste caso é chamado *diagrama de interação*.

37 O diagrama de interação é mostrado na figura. 36.8a e será melhor compreendido quando passarmos pelos detalhes dos três modos de falha.

38 Suposições $A'_s = A_s; \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}; f'_s = f_y$

Condição Equilibrada

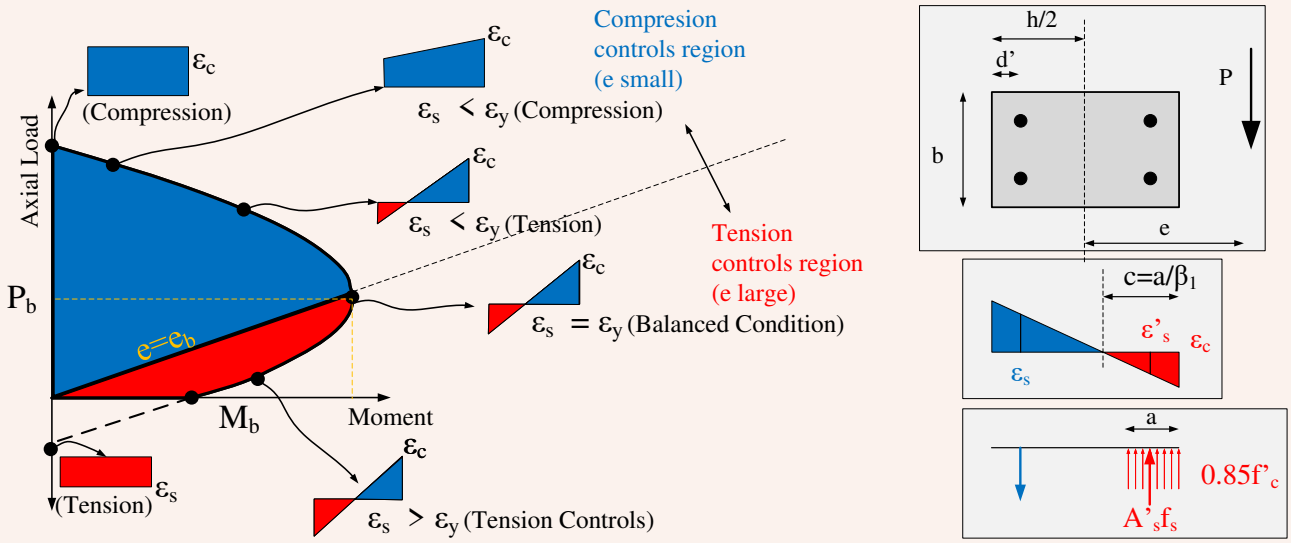
39 Há uma excentricidade específica $e_b = \frac{M}{P}$ De tal forma que o fracasso será desencadeado pela produção simultânea do aço e esmagamento do concreto.

40 A partir do diagrama deformação (e compatibilidade de concreto e aço deformações, Fig. 36.8b

$$\varepsilon_c = .003$$
$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$
$$c = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



(a) Diagrama de interação

(b) Diagrama de corpo livre

Figura 36.8: Pilar corpo livre e diagramas de interação

O que leva a

$$\frac{\varepsilon_s'}{c-d'} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_s' = \frac{c-d'}{c}\varepsilon_c$$

Assim, o aço de compressão será rendendo (i.e. $\varepsilon_s' = \varepsilon_y$) para $\varepsilon_c = .003$

41 Do equilíbrio

$$\left.\begin{array}{rl} P_n &= .85f_c'ab + A_s'f_y' - A_sf_s \\ f_s &= f_y \\ A_s &= A_s' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} a &= \frac{P_n}{.85f_c'b} \\ a &= \beta_1 c_b \\ c_b &= \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s}+.003}d \end{array}\right\} P_{n,b} = .85\beta_1 f_c' bd \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s}+.003}$$

ou

$$P_{nb} = .85\beta_1 f_c' bd \frac{87,000}{f_y + 87,000}$$

42 Para obter M_{nb} Nós tomamos um momento sobre o centróide de aço tensor A_s de esforços internos, isto deve ser igual e oposto ao externo É um momento aplicado, Fig. 36.9.

$$M_{nb} = \underbrace{P_{nb}e_b}_{M_{ext}} = \underbrace{.85f_c'ab(d-\frac{a}{2}) + A_s'f_y(d-d')}_{M_{int}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

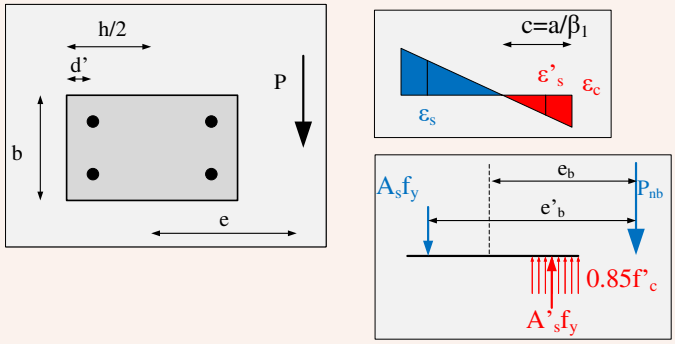


Figura 36.9: Pilar corpo livre, condição equilibrada

43 Nota: Momentos internos devidos a $A_s f_y$ e.. $A'_s f_y$ Cancelem um ao outro por simetria pilares.

Fracasso de tensão

44 Devemos considerar dois cenários

Caso I, e é conhecido e $e > e_b$

Neste caso a e.. P_n são desconhecidos, e para Falha em ser desencadeada por f_y Em A_s Nós devemos ter.. $e > e_b$.

Ainda posso supor que $A_s f_y = A'_s f_y$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_n = .85 f'_c ab \Rightarrow a = \frac{P_n}{.85 f'_c b}$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n e' = P_n(d - \frac{a}{2}) + A'_s f'_y (d - d')$$

De novo, duas aproximações

1. Resolva interativamente para essas duas equações
   (a) Assuma a ($a < \frac{h}{2}$)
   (b) Da compatibilidade deformação resolver para f_{sc}, centro Aço tensão se aplicável.
   (c) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ resolver para P_n
   (d) $\Sigma M = 0$ com respeito à armadura de tração,$\Rightarrow$ resolver para P_n
   (e) Se não houver convergência entre os dois P_n, iterar resolvendo para a De.. $\Sigma F_y = 0$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. Combine-os em uma equação quadrática P_n

$$P_n = .85 f_c' bd \left\{ -\rho - (\frac{e'}{d} - 1) + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2\rho \left[\mu \left(1 - \frac{d'}{d}\right) + \frac{e'}{d} \right]} \right\}$$

Onde

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A_s'}{bd}$$
$$\mu = \frac{f_y}{.85 f_c'}$$

Caso II c é conhecido e $c < c_b$; P_n é desconhecido
Neste caso, só temos dois desconhecidos P_n e.. f_s'.

$$\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &\stackrel{\text{def}}{=} f_y \\
f_s' &= \varepsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f_c' ab \\
P_n &= C + A_s' f_s' - A_s f_y \\
M_n &= C \frac{h - a}{2} + A_s' f_s' \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right) \\
e &= \frac{M_n}{P_n}
\end{aligned}$$

Note que esta abordagem é favorecida ao determinar o diagrama de interação.

Falha de compressão

45 Novamente, consideramos dois casos distintos:

Caso I e é conhecido e $e < e_b$; P_n, a e.. f_s são desconhecidos
A falha de compressão ocorre se $e' < e_b' \Rightarrow \varepsilon_u = .003$, Assuma $f_s' = f_y$, e $f_s < f_y$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Da geometria

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\varepsilon_u}{\frac{f_s}{E_s} + \varepsilon_u} d \\
\Rightarrow f_s &= E_s \varepsilon_u \frac{d-c}{c} \\
&= E_s \varepsilon_u \frac{d - \frac{a}{\beta_1}}{\frac{a}{\beta_1}} \\
P_n &= .85 f'_c ab + A'_s f_y - A_s f_s \\
P_n e' &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')
\end{aligned}
$$

Isso produziria uma equação cúbica em P_n, que pode ser resolvido analiticamente ou por iteração.

1. Assuma a ($a \simeq h$)
2. Resolva $\Sigma M = 0$ com relação ao reforço de tração & resolver para P_n
3. Da compatibilidade deformação resolver para f_s
4. Veja isso $\Sigma F_y = 0$ & resolver para a
5. If $a^{i+1} \neq a^i$ Vá para o passo 2

Caso II: c é conhecido e $c > c_b$; f_s, f'_s, e P_n são desconhecidos

Neste caso

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \leq f_y \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f'_c ab \\
P_n &= C + A_s f_s + A'_s f'_s \\
M_n &= C\frac{h-a}{2} + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right)
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

36.4.2.1 Ex 36.6: R/C pilar, c Conhecido

Um 12 por 20. pilar é reforçado com um Não. 4 barras da área 1.0 in^2 em cada esquina. $f_c' = 3.5$ ksi, $f_y = 50$ ksi, $d' = 2.5$ in.. Determine: 1) P_b e.. M_b; 2) A carga e o momento para $c = 5$ in; 3) carga e momento para $c = 18$ in; 4) diagrama de interação do gráfico

Condições equilibradas é derivado revisitando o fundamental equações, em vez de mera substituição para derivadas anteriormente equação.

$$d = h - d' = 20 - 2.5 = 17.5 \text{ in}$$

$$c_b = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d = \frac{.003}{\frac{50}{29{,}000} + .003} 17.5 = 11.1 \text{ in}$$

$$a = \beta_1 c_b = (0.85)(11.1) = 9.44 \text{ in}$$

$$f_s \overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi}$$

$$f_s' = E_s \frac{c - d'}{c} \varepsilon_c = (29{,}000)(\frac{11.1 - 2.5}{11.1}(0.003) = 67.4 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_s' = 50 \text{ ksi}$$

$$C = 0.85 f_c' ab = (0.85)(3.5)(9.44)(12) = 337 \text{ k}$$

$$P_{nb} = C + A_s f_s - A_s' f_s = 337 + (2.0)(50) + (2.0)(-50) = 337 \text{ k}$$

$$M_{nb} = .85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d')$$

$$= 337\left(17.5 - \frac{9.44}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 5{,}807 \text{ k.in} = 484 \text{ k.ft}$$

$$e_b = \frac{5{,}807}{337} = 17.23 \text{ in}$$

Falha na tensão $c = 5$ in

$$f_s \overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi}$$

$$f_s' = \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \leq f_y$$

$$= (0.003)(29{,}000)\frac{5.0 - 2.5}{5.0} = 43.5 \text{ ksi}$$

$$a = \beta_1 c = 0.85(5.0) = 4.25 \text{ in}$$

$$C = 0.85 f_c' ab$$

$$= (0.85)(3.5)(4.25)(12) = 152 \text{ k}$$

$$P_n = C + A_s' f_s' - A_s f_y$$

$$= 152 + (2.0)(43.5) - (2.0)(50) = 139 \text{ k}$$

$$M_n = .85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d')$$

$$= 152\left(17.5 - \frac{4.25}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 3{,}638 \text{ k.in} = 303 \text{ k.ft}$$

$$e = \frac{3{,}638}{139} = 26.3 \text{ in}$$

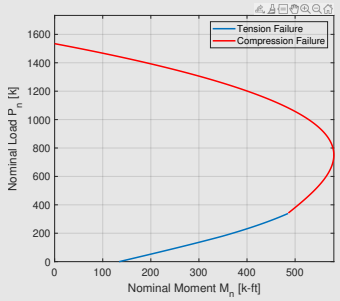
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Falha de compressão, $c = 18$ in

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c = 0.85(18) = 15.3 \text{ in} \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \le f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{17.5-18.0}{18.0} = -2.42 \text{ ksi} \;\; A_s \text{ is under compression} \\
f_s' &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \le f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{18.0-2.5}{18.0} = 75 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_s' = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f_c' ab = (0.85)(3.5)(15.3)(12) = 546 \text{ k} \\
P_n &= C + A_s' f_s' - A_s f_s \\
&= 546 + (2.0)(50) - (-2.42)(2) = 650 \text{ k} \\
M_n &= .85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d') \\
&= 546\left(17.5 - \frac{15.3}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5-2.5) = 6,880 \text{ k.in} = 573 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{5,809}{650} = 17.2 \text{ in}
\end{aligned}
$$

Diagrama de Interação MATLAB® A listagem é dada no Apêndice I.2.13.

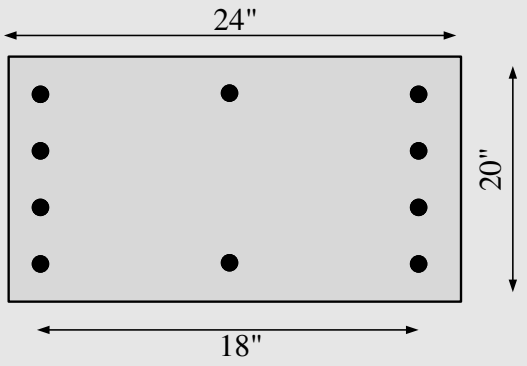


36.4.2.2 Ex 36.7: R/C pilar, e Conhecido

Para o seguinte pilar, determinar e_b, P_b, M_b; P_n e.. M_n para $e = 0.1h$ e.. $e = h$. $f_c' = 3,000$ psi e.. $f_y = 40,000$ psi.. A área de cada bar é 1.56 in^2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Condição Equilibrada:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{40}{29,000} = .001379$$
$$c_b = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{.003 + .001379}.003 = 14.4 \text{ in}$$
$$a = \beta_1 c_b = (.85)(14.4) = 12.2 \text{ in}$$
$$C_c = .85 f'_c ab = (.85)(3)(12.2)(20) = 624 \text{ k}$$
$$\varepsilon_{sc} = \frac{c - h/2}{c}\varepsilon_u = \frac{14.4 - 12}{14.4}.003 = .0005$$
$$f_{sc} = (29,000)(.0005) = 15 \text{ ksi} \quad \text{center bars}$$
$$C_s = (.0005)(29,000)(2)(1.56) = 46.8 \text{ k}$$
$$P_{nb} = 624 + 46.8 = 670.8 \text{ k}$$

Note que o aço de compressão está cedendo porque $d' > 2$ in e.. $c > 6$ in (conforme previamente provado)

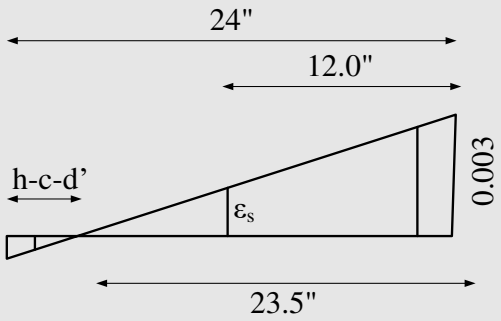
Tirando um momento sobre o centroide da seção

$$\begin{aligned} M_{nb} &= P_{nb} e \\ &= .85 f'_c ab \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A'_s f_y \left(\frac{h}{2} - d'\right) \\ &= (.85)(3)(12.2)(20)\left(12 - \frac{12.2}{2}\right) + 4(1.56)(9)(40) + 4(1.56)(40 - .85 \times 3)(12 - 3) \\ &= 3,671 + 2,246 + 2,246 \\ &= 8,164 \text{ k.in}; 680 \text{ k.ft} \end{aligned}$$
$$e_b = \frac{8,164}{670.8} = 12.2 \text{ in}$$

E= 0,1 h $e = (.1)(24) = 2.4$ in $< e_b \Rightarrow$ Falha por compressão. P_n, a e.. f_s são desconhecido. Equações disponíveis: 1) $\Sigma F = 0$; 2) $\Sigma M = 0$; e 3) deformação diagrama; Resolver por iterações.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



1. Assuma $a = 20$ in

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{20}{.85} = 23.5 \text{ in}$$

2. Para o aço central (da geometria)

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{c - \frac{h}{2}} = \frac{.003}{c}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{c - \frac{h}{2}}{c}.003$$

$$f_{sc} = E_s \varepsilon_{sc}$$

$$= E_s \frac{c - \frac{h}{2}}{c}.003$$

$$= 29,000 \frac{23.5 - 12}{23.5}.003 = 42.5 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_{sc} = f_y$$

3. Tire um momento sobre o centroide da barra de aço de tração

$$P_n e' = 0.85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (h - 2d') + A_{sc} f_y (\frac{h}{2} - d')$$

$$P_n(9 + 2.4) = (.85)(3)(20)(20)(21 - \frac{20}{2}) + 4(1.56)(40)(24 - 6) + 2(1.56)(40)(9)$$

$$= 11,220 + 4,493 + 259.7$$

$$\Rightarrow P_n = 1,476 \text{ k}$$

4. Vá embora ε_s Em barra de tensão (de deformação diagrama)

$$\frac{\varepsilon_s}{h - d' - 23.5} = \frac{.003}{c}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \frac{.003}{23.5}(24 - 3 - 23.5)$$

$$= -.000319$$

$$f_s = E\varepsilon_s = (29,000)(0.000319) = 9.25 \text{ ksi}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5. Tome $\Sigma F = 0$ Para verificar a suposição de a

$$\begin{aligned} P_n &= 0.85 f_c' ab + A_s' f_y + A_{sc} f_{sc} + A_s f_y \\ 1,476 \text{ k} &= (.85)(3)(a)(20) + (4)(1.56)(40) + (2)(1.56)(40) + (4)(1.56)(9.25) \\ 1,476 &= 51a + 432.1 \\ \Rightarrow a &= 20.4 \text{ in} \checkmark \\ P_n &= 1,476 \text{ k} \\ M_n &= (1,476)(2.4) = 3,542 \text{ k.in} = 295 \text{ k.ft} \end{aligned}$$

E=h

1. Neste caso $e = 24$ in $> e_b \Rightarrow$ Falha por tensão. P_n e.. a são desconhecidos. Temos duas equações: 1) $\Sigma F = 0$, e 2) $\Sigma M = 0$.
2. Assuma $a = 7.9$ in $\Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.9}{.85} = 9.3$ in
3. Aço tensão no centróide

$$\begin{aligned} \frac{c}{.003} &= \frac{12 - c}{\varepsilon_{sc}} \\ \Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{12 - 9.3}{9.3}.003 = .00087 \\ \Rightarrow f_{sc} &= (29,000)(0.00087) = 25.3 \text{ ksi} \end{aligned}$$

4. Iterar

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 \Rightarrow P_n &= (.85) f_c' ab + A_{sc} f_{sc} \\ &= (.85)(3)(7.9)(20) - 2(1.56)(25.3) \\ &= 403 - 79 = 324 \text{ k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M = 0 \Rightarrow P_n(e + h/2 - d') &= .85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d') - A_{sc} f_{sc} (\frac{d - d'}{2}) \\ P_n(24 + 9) &= (.85)(3)(7.9)(20)(21 - \frac{7.9}{2}) + 4(1.56)(40)(21 - 3) \\ &\quad + 2(1.56)(25.3)(9) \\ P_n(33) &= 6,870 + 4,493 - 710 = 10,653 \text{ k.in} \\ \Rightarrow P_n &= 323 \text{ k} \checkmark \end{aligned}$$

5. Determine M_n

$$M_n = P_n e = (323)(24) = 7,752 \text{ k.in} = 646 \text{ k.ft}$$

36.4.3 Concreto protendido

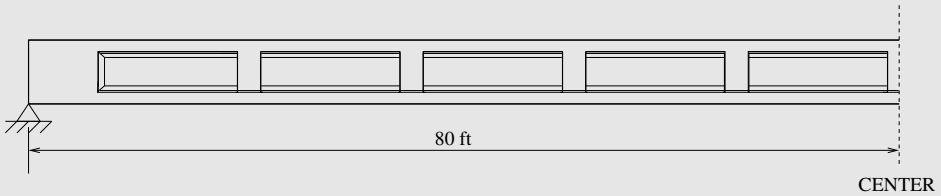
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

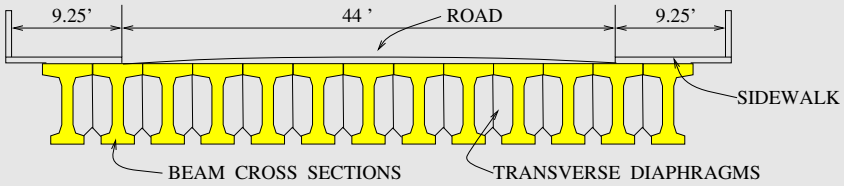
36.4.3.1 Ex 36.8: Estudo de caso: Noz ponte pista

A seção seguinte é reproduzida de Billington, 1983 Structural Studies.

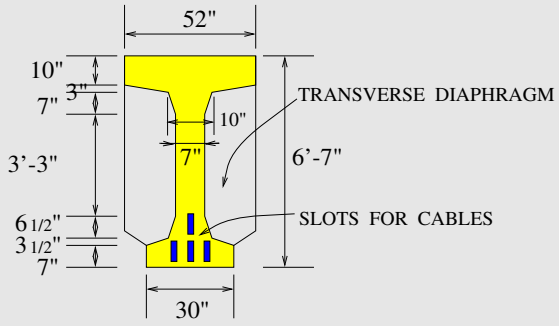
A histórica Ponte Walnut Lane (primeira grande ponte concreto protendido na EUA) é feito de três spans, dois lados com comprimentos de 74 pés e um do meio de comprimento 160 pés. Treze cocnrretos protendidos vigas são colocados lado a lado para formar uma largura total de 44 fet de estrada e dois 9,25 pés de calçada. Entre o vigas, e elenco com eles, são Endurecimentos transversais que conectam o vigas lateralmente.



ELEVATION OF BEAM HALF



CROSS - SECTION OF BRIDGE

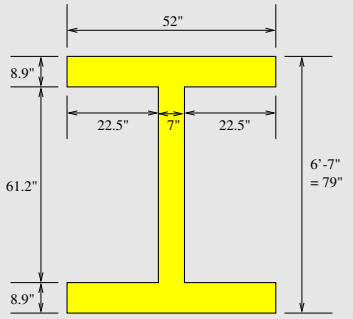


CROSS - SECTION OF BEAM

Propriedades da seção cruzada

A viga seção transversal é mostrado abaixo e é simplificado

CÓPIA PARA REVISÃO



SIMPLIFIED CROSS - SECTION OF BEAM

$$A_c = 2(8.9)(52) + (7)(61.2) = 1,354 \text{ in}^2$$

$$I = 2\left[\frac{(52)(8.9)^3}{12} + (52)(8.9)\left(\frac{79}{2} - \frac{8.9}{2}\right)^2\right] + \frac{(7)(61.2)^3}{12}$$

$$== 1,277 \times 10^3 \text{ in}^4$$

$$c_1 = c_2 = \frac{h}{2} = \frac{79}{2} = 39.5 \text{ in}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{I}{c} = \frac{1,277 \times 10^3}{39.5} = 32,329 \text{ in}^3$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{1,277 \times 10^3}{1,354} = 943. \text{ in}^2$$

Prostressando

Cada uma viga é protendido por dois cabos parabólicos médios, e dois horizontais externos ao longo As flanges. Todos os quatro têm aproximadamente a mesma excentricidade no meio do espaço de 2,65 pés. ou 31,8 polegadas.

Cada cabo de protensão é composto por 64 fios cada um com um diâmetro de 0,27 polegadas. Assim, a área total do aço de protensão é dada por:

$$A_{wire} = \pi(d/2)^2 = 3.14(\frac{0.276 \text{ in}}{2})^2 = 0.0598 \text{ in}^2$$

$$A_{cable} = 64(0.0598) \text{ in}^2 = 3.83 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = 4(3.83) \text{ in}^2 = 15.32 \text{ in}^2$$

Considerando que a resistência à tração final do aço usado é de 247 ksi, os cabos foram estressado apenas a 131 ksi, assim a força de protensão inicial P_i é igual a

$$P_i = (131) \text{ ksi}(15.32) \text{ in}^2 = 2,000 \text{ k}$$

As perdas são relatadas em 13%, assim a força eficaz é

$$P_e = (1 - 0.13)(2,000) \text{ k} = 1,740 \text{ k}$$

Carregar

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

O próprio peso da viga é $q_0 = 1.72$ k/ft. O concreto (densidade=,15) k/ ft^3) estrada tem uma espessura de 0,45 pés. Assim, para uma largura de 44 pés, a carga total sobre um único viga é

$$q_{r,tot} = \frac{1}{13}(44)\text{ ft}(0.45)\text{ ft}(0.15)\text{ k/ ft}^3 = 0.23\text{ k/ft}$$

Da mesma forma para as calçadas que têm 9,25 pés de largura e 0,6 pés de espessura:

$$q_{s,tot} = \frac{1}{13}(2)(9.25)\text{ ft}(0.60)\text{ ft}(0.15)\text{ k/ ft}^3 = 0.13\text{ k/ft}$$

Notamos que o peso pode ser uniformemente espalhado sobre o 13 vigas por causa da lateral diafragmas.

A carga total está morta

$$q_{DL} = 0.23 + 0.13 = 0.36\text{ k/ft}$$

A carga ao vivo é criada pelo tráfego, e estima-se que seja 94 psf, assim sobre uma largura de 62,5 pés isso dá uma carga ao vivo uniforme de

$$w_{LL} = \frac{1}{13}(0.094)\text{ k/}ft^2(62.5)\text{ ft} = 0.45\text{ k/ft}$$

Finalmente, a carga combinada de mortos e vivos por viga é

$$w_{DL+LL} = 0.36 + 0.45 = 0.81\text{ k/ft}$$

Flexural Tensões

1. Força de pré-tensão, P_i Apenas

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = 490.\text{ psi} \\ f_2 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = -3,445.\text{ psi} \end{aligned}$$

2. P_i e o peso próprio da viga M_0 (que tem que ser acordado para o momento viga cambers devido a prostressamento)

$$M_0 = \frac{(1.72)(160)^2}{8} = 5,504\text{ k.ft}$$

A flexão tensões será assim igual a:

$$f_{1,2}^{w_0} = \mp\frac{M_0}{S_{1,2}} = \mp\frac{(5,50.4)(12,000)}{943.} = \mp 2,043\text{ psi}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right)-\frac{M_0}{S_1}\\
&= 490-2,043 = -1,553 \text{ psi}\\
f_{ti} &= 3\sqrt{f_c'} = +190\checkmark\\
f_2 &= \frac{P_i}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right)+\frac{M_0}{S_2}\\
&= -3,445+2,043 = -1,402. \text{ psi}\\
f_{ci} &= .6f_c' = -2,400\checkmark
\end{aligned}
$$

3. P_e e.. M_0.. Se nós temos 13% Perdas, então a força efetiva P_e é igual a $(1-0.13)(2\times 10^6) = 1.74\times 10^6$ lbs

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right)-\frac{M_0}{S_1}\\
&= -\frac{1.74\times 10^6}{1,354}\left(1-\frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right)-2,043. = -1,616 \text{ psi}\\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right)+\frac{M_0}{S_2}\\
&= -\frac{1.74\times 10^6}{1,354}\left(1+\frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right)+2,043. = -954. \text{ psi}
\end{aligned}
$$

4. P_e e.. $M_0+M_{DL}+M_{LL}$

$$M_{DL}+M_{LL} = \frac{(0.81)(160)^2}{8} = 2,592 \text{ k.ft}$$

e correspondente tensões

$$f_{1,2} = \mp\frac{(2,592)(12,000)}{32,329} = \mp 962. \text{ psi}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right)-\frac{M_0+M_{DL}+M_{LL}}{S_1}\\
&= -1,616-962. = -2,578. \text{ psi}\\
f_{cs} &= .45f_c' = -2,700\checkmark\\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right)+\frac{M_0+M_{DL}+M_{LL}}{S_2}\\
&= -954+962. = +8. \text{ psi}\\
f_{ts} &= 6\sqrt{f_c'} = +380\checkmark
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

36.5 Engenharia baseada em desempenho (PBE)

46 PBE é definido como consistindo na seleção de critérios de projeto, sistemas estruturais adequados, layout, dimensionamento e detalhamento para uma estrutura e seus componentes e conteúdos não estruturais, e a garantia e controle da qualidade da construção e Manutenção a longo prazo, tal que em níveis especificados de toda a excitação e com níveis definidos de confiabilidade, a estrutura ou instalação não serão danificadas além de certo estados limites. PBE é um processo que começa com os primeiros conceitos de um projeto e dura toda a vida da estrutura (Bertero e Bertero, 2002).

47 O projeto sísmico baseado em desempenho avalia explicitamente como um edifício é provável de executar, dado o risco potencial que ele provavelmente experimentará, considerando as incertezas inerentes à quantificação do perigo potencial e incertezas na avaliação de A resposta real do edifício.

48 Contrariamente à LRFD, não se limita a um nível de perigo, mas múltiplos.

49 O desempenho é medido em termos da probabilidade de incorrer em baixas, custos de reparo e substituição, tempo de reparação e placas inseguras.

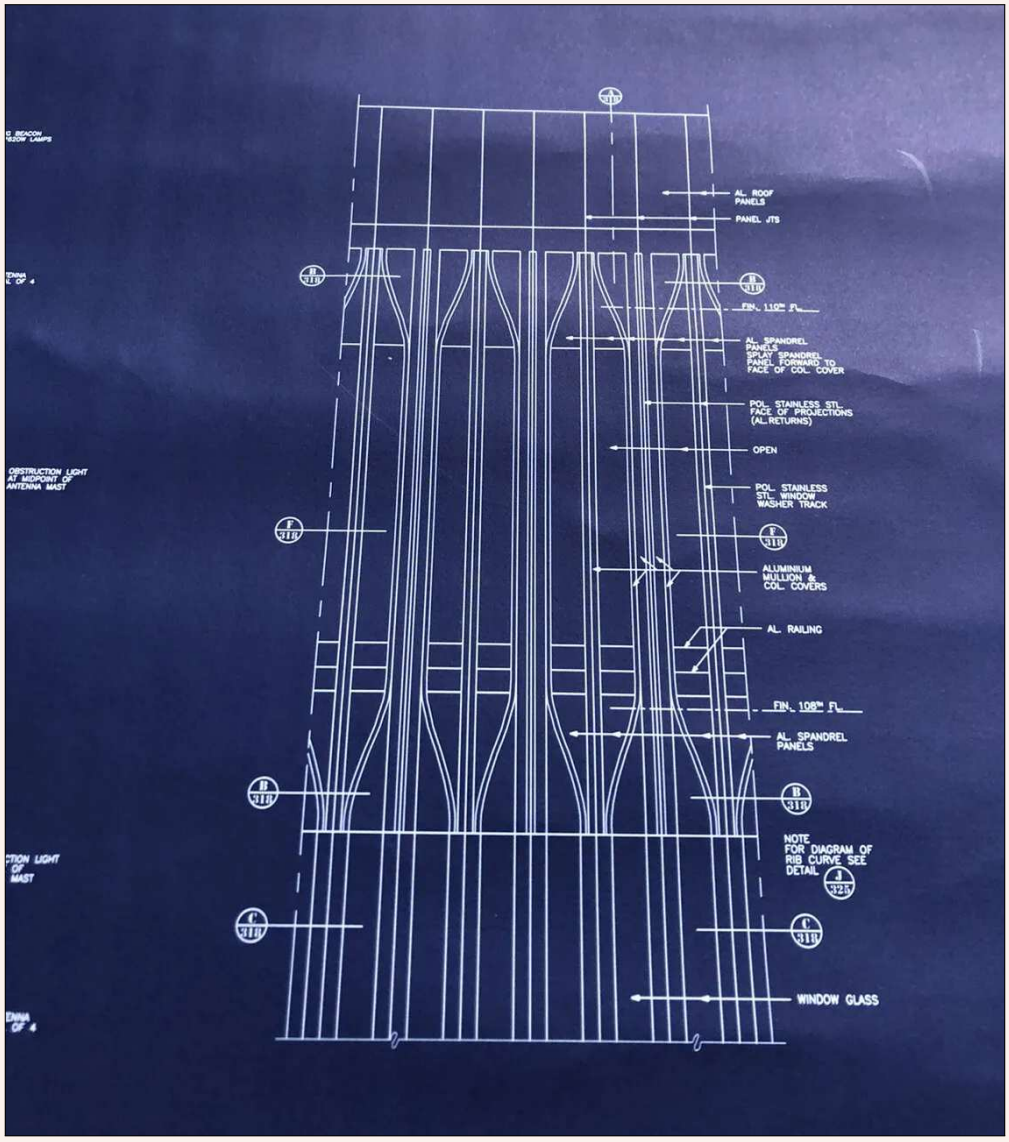
50 O desempenho pode ser avaliado para um determinado cenário ou intensidade do terremoto, ou considerando todos os terremotos que possam ocorrer, e a probabilidade de cada um, durante um período específico de tempo.

51 Desempenho expresso em termos de uma série de níveis discretos de desempenho identificados como operacional, ocupação imediata, segurança da vida e prevenção de colapso.

52 PBEE transcende o design e análise individualmente, e será coberto em muito mais detalhes no Capítulo 72

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Plantas do World Trade Center

Um projeto representa a teoria do design ilustrando a tradução de ideias conceituais em representações técnicas precisas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 37

Desenho de um arco estaticamente indeterminado

Abstract

Este capítulo apresenta dois exemplos detalhados de complexo análise estrutural aplicado a estruturas reais, ilustrando claramente como análise e design se informam através de um processo iterativo. Um arco de aço soldado para um hangar de aeronaves e uma ponte de arco amarrada com dois torrões são analisados, demonstrando a aplicação de métodos de compatibilidade em estruturas arqueadas estaticamente indeterminados.

37.1 Ex 37.1: Desenho de um arco estaticamente indeterminado 1421

37.2 Ex 37.2: A temperatura muda em um arco 1428

Os dois exemplos seguintes estão entre as melhores ilustrações de análise complexa aplicadas a estruturas reais, revelando claramente como análises e design se informam através de um processo iterativo.

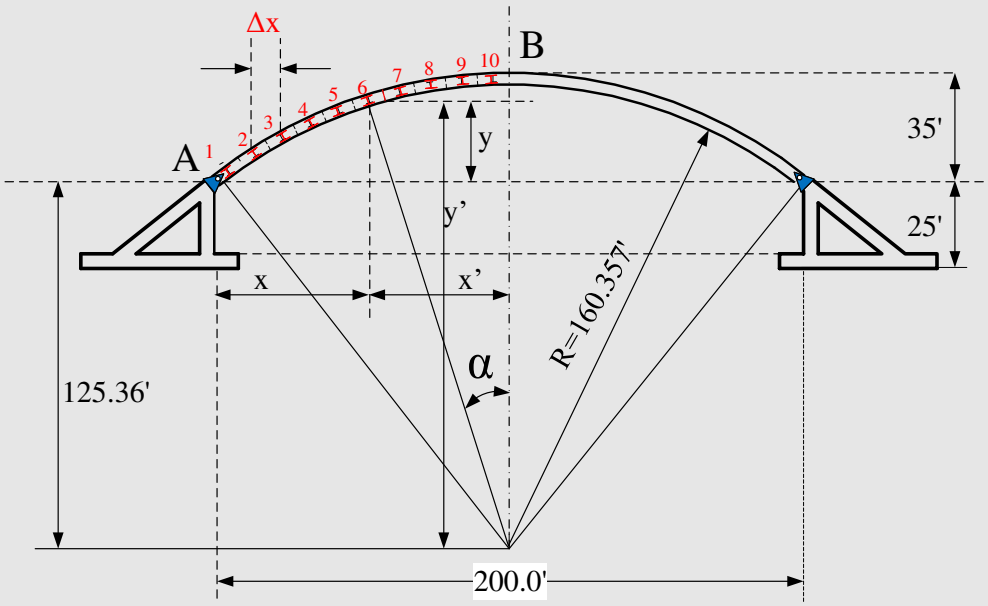
37.1 Ex 37.1: Desenho de um arco estaticamente indeterminado

A seção seguinte é reproduzida de Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Procuramos projetar uma costela de aço soldado para um hangar. O momento de inércia da costela deve variar conforme necessário. O espaço, centro para o centro das dobradiças, deve estar a 200

CÓPIA PARA REVISÃO

pés. As costelas devem ser colocadas a 35 pés de centro ao centro, com uma subida de 35 pés. Deck telhado, purlins e costelas será assumido para peso 25 libras / ft^2 na superfície do telhado, e a neve será assumida em 40 libras por metro^2 desta superfície. Vinte purlins serão igualmente espaçados ao redor da costela.



1. A linha central da costela será tomada como o segmento de um círculo. Por cálculo, o raio deste círculo é encontrado a 160.357 pés, e o comprimento de O, o $arc\ AB$ para ser 107.984 pés.
2. Para a análise do arco AB será considerado dividido em dez segmentos, Cada um com um comprimento de 10.798 pés. Assim, um carga concentrada é aplicado na costela por Os purlins enquadrando no centro de cada segmento. (Os segmentos numerados são mostrados na figura.
3. Já que o total de mortos e neve é de 65 quilos^2 da superfície do telhado, o valor de Cada força concentrada será
$$P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k} \tag{37.1}$$
4. Os cálculos necessários para avaliar os coodinatos dos centros do vários segmentos, referidos à dobradiça em A, são mostrados em Tabela 1. Também são mostrados os valores de Δx, a projeção horizontal da distância entre os centros dos vários segmentos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Seg.. Menta	α	sin α	cos α	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
Coroa					160.36	100.000	35.00	5.399

Tabela 1

5. Se a experiência está faltando e o engenheiro de projeto está, portanto, em uma perda como para as suposições iniciais sobre a variação seccional ao longo da costela, é recomendava que a primeira análise fosse baseada na suposição de um momento constante de inércia. Mesmo o engenheiro experiente muitas vezes vai descobrir que este é o melhor Procedimento.
6. O valor de H Tendo sido assim determinados, momentos e impulsos axiais são Computado em toda a costela. Áreas transversais nas várias seções são então projetado para estes momentos e impulsos axiais. Um novo valor para H, bem como revisado os valores para momentos e impulso axial ao longo da costela, são determinados para a nova costela com a variação seção transversal. Tensões são verificados na costela, e todo o processo é repetido, se necessário. Este procedimento será seguido no presente caso.
7. Pelo método geral, supondo que esse fim A está em rolos,

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0 \tag{37.2}$$

8. As deflexões serão calculadas por trabalho virtual, e assim esta expressão se torna

$$\sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta S + H_A \sum \delta\overline{M} \frac{\overline{M}}{EI} \Delta S = 0 \tag{37.3}$$

9. Desde então E e.. ΔS são constantes e, para a primeira análise, O momento de inércia é constante, a expressão final para H_A É

$$H_A = -\frac{\sum M \delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}} \tag{37.4}$$

Todos os cálculos necessários para a primeira avaliação de H_A são mostrados na tabela 2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Segmento	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) Cisalhamento para Certo (k)	(5) Δx (ft)	(6) M incremento (ft · k)	(7) M Simples viga (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{MM}$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
Coroa	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

Tabela 2

Cedendo

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{MM}} = -\frac{2\times 2,158,100}{2\times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{37.5}$$

10. Os momentos nos centros dos vários segmentos da costela, usando o Valor aproximado determinado para H_A, são computados na Tabela 3, onde um momento é considerado positivo se tende para causar compressão na superfície superior da costela.

Segmento	y (ft)	M Simples viga (ft · k)	$H_A y$ (ft · k)	Total M no segmento (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	–1,100	–50
2	9.44	3,010	–3,150	–140
3	14.98	4,830	–5,000	–170
4	19.88	6,490	–6,640	–150
5	24.13	7,950	–8,060	–110
6	27.69	9,200	–9,250	–50
7	30.57	10,220	–10,210	+10
8	32.73	11,000	–10,930	+70
9	34.18	11,530	–11,420	+110
10	34.19	11,790	–11,660	+130
Coroa	35.00	11,790	–11,690	+100

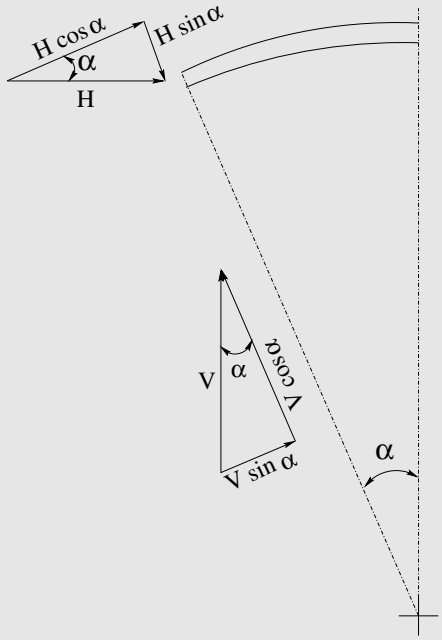
Tabela 3

11. O impulso N, normal para o seção transversal no centro de cada segmento, Deve ser calculado antes que os requisitos da seção possam ser determinados. Como uma questão de interesse os vários valores de S, o total cisalhamento na cruz Seção, também será calculada para o centro de cada segmento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

12. N e.. S são obtidos combinando componentes de H E a vertical cisalhamento V no centro de cada segmento, uma combinação que é mostrada abaixo



A partir desta figura é evidente que

$$S = V \cos \alpha - H \sin \alpha$$
$$N = V \sin \alpha + G \cos \alpha$$

13. Valores de S e.. N são computados em seguida, Tabela 4. Os valores de S estão incluídos em apoio da declaração feita anteriormente para o efeito que forças de cisalhamento são pequenas na costela normal.

Segmento	V (k)	$V \cos \alpha$	$-H \sin \alpha$	$= S$ (k)	$V \sin \alpha$	$+H \cos \alpha$	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
Coroa						+334	= 334

Tabela 4

14. Inspeção dos valores para o momento M Na Tabela 3 e para o impulso N Na Tabela 4 indicará que o segmento 3 é crítico na região do momento negativo e segmento 10 na região de Momento positivo. As seções necessárias para a costela, no centro destes dois Segmentos, devem ser determinados de acordo com as especificações do American Instituto de Construção Aço antes da mesa 5 pode ser concluída.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

15. Os flanges estão em 12. $\times$ 1 em, e o permitido tensão para dobrar é F_B=20k/in^2.. A espessura da teia é $\frac{3}{4}$ dentro., e o Axial permitido tensão[a] É F_A=17,000-0.485 L/r.

Segmento	(2) Total profundidade (In.)	(3) Área (em)^2)	(4) I (em)^4)	(5) M (ft · k)	(6) Axial Empuxo N (k)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (k/in)^2)	(8) $f_b = \frac{Mc}{I}$ (k/in)^2)	(9) Permitido F_a (k/in)^2)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$	(11) + $\frac{f_b}{F_b}$ =	(12) Decimal de Capacidade
A	23.00	39.75	3483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
Coroa	16.00	34.50	1527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

Tabela 5

16. Espessura de flange e placas web e largura de placas web são questões de Julgamento. A profundidade total determinada para o centro do segmento 3 é usada a partir da centro deste segmento até o fim da costela. A profundidade determinada para o centro de Segmento 10 é arbitrariamente usado para a profundidade da costela na coroa. A profundidade total da costela do centro do segmento 3 até a coroa é feita para variar Linerarly. As adequações das seções assim determinadas para os centros do Vários segmentos são verificados na tabela 5.
17. É necessário recalcular o valor de H_A Porque a costela agora tem um variando momento de inércia. Equação 37.4 deve ser alterado para incluir O, o I de cada segmento e agora está escrito como

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} \tag{37.6}$$

18. O valor revisto para H_A é facilmente determinado como mostrado em Mesa 6. Note que os valores em pilar (2) são encontrados dividindo Os valores de $M\delta\overline{M}$ para os segmentos correspondentes em pilar (8) de Tabela 2 pelo total I para cada segmento como mostrado em Mesa 5. Os valores em pilar (3) da tabela 6 são encontrados de uma maneira semelhante dos valores em pilar (9) de Tabela 2. Os momentos simples viga em pilar (5) da Tabela 6 são tiradas diretamente da pilar (7) da Tabela 2.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(1) Segmento	(2) $\frac{Mn}{I}$	(3) $\frac{m^2}{I}$	(4) Revisado $H_A y$ (ft · k)	(5) M Simples viga (ft · k)	(6) Revisado Momento (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
Coroa			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

Tabela 6

19. Assim, a revista H_A É

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{MM}/I} = -frac2 \times 1,010.852 \times 3.0192 = -334.81k \qquad (37.7)$$

20. Os valores revisados para o impulso axial N nos centros dos vários segmentos são computados na Tabela 7.

Segmento	V sin α	+	H cos α	=	Revisado N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
Coroa			335		335

Tabela 7

21. As seções previamente projetadas nos centros dos segmentos são verificadas Adequação na Tabela 8. Desta mesa parece que tudo Seções da costela são

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

satisfatórias. Isso não pode ser definitivamente concluído, no entanto, até que o secundário tensões causado pela deflexão da costela sejam investigados.

Segmento	$\frac{N}{A}$ (k/in)^2)	$\frac{M_c}{I}$ (k/in)^2)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	Decimal de Capacidade
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
Coroa	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

Tabela 8

[a]Nesta equação o valor de L é 10.798, desde que As costelas são feitas lateralmente em pontos de moldura purlin.

37.2 Ex 37.2: A temperatura muda em um arco

A seção seguinte é reproduzida de Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Determinar os efeitos do encurtamento de costelas e mudanças de temperatura na costela do anterior exemplo. Considere uma queda de temperatura de 100°F.

1. Para determinar os efeitos do encurtamento das costelas, é preciso primeiro encontrar A horizontal deslocamento do fim A que resultará se o elástico axial deformações, que ocorrem no arco real carregado, são introduzidos na costela enquanto termina A está em rolos. Então é necessário encontrar a horizontal deslocamento do fim A, causada por uma força horizontal de 1 k atuando em A, considerando a flexão e Axial deformações na costela. O horizontal deslocamento de A, resultante da costela O encurtamento causado pelas cargas reais, é dado por

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L \tag{37.8}$$

Onde N é o impulso axial retirado da tabela 7, $\delta\overline{N}$ é o impulso axial causado por uma força

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

horizontal fictícia de 1 k atuando em A E igual a cos α Na Tabela 1, ΔL é o comprimento de Cada segmento, e A É a área seccional certa.

2. O horizontal deslocamento de A, resultante do encurtamento das costelas causado por uma força horizontal de 1 k atuando em A, é dado por

$$\sum \frac{\delta \overline{N}}{AE} \overline{N} \Delta L \tag{37.9}$$

3. Os cálculos necessários para avaliar estas duas deflexões de A são mostrados na Tabela 9.

Segmento	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (em)^2)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

Tabela 9

4. O horizontal deslocamento de A, resultante do encurtamento das costelas causado por A carga real, é

$$\sum \delta\overline{N} \frac{N}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 87.88 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in} \tag{37.10}$$

5. O resultado do encurtamento das costelas causado por uma carga horizontal de 1 k em A É

$$\sum \delta\overline{N} \frac{\overline{N}}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 0.2300 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in} \tag{37.11}$$

6. O valor relativo da horizontal deslocamento de A, resultante do flexural deformação causado por uma força horizontal de 1 k em A, foi previamente determinado Na Tabela 6. O valor absoluto para isso é

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} \ . \tag{37.12}$$

7. O valor total para o deslocamento de A devido à flexão e axial deformações resultante de uma força horizontal de 1 k em A é, portanto,

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in} \tag{37.13}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

8. A redução em H_A devido ao encurtamento das costelas é dado por

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k} \tag{37.14}$$

9. Uma redução adicional em H_A resultará de qualquer queda na temperatura de A costela abaixo da temperatura em que o arco é erguido. Isso ocorre, é claro porque algum encurtamento adicional da costela vai resultar. A queda no comprimento da projeção horizontal da costela resultante de uma queda de temperatura de 100°F será

$$\delta L = 0.0000065 \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{37.15}$$

10. A diminuição resultante em H_A Vai ser

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k} \tag{37.16}$$

11. A queda total em H_A Devido ao encurtamento das costelas e queda de temperatura é

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k} \tag{37.17}$$

Isso terá o efeito de aumentar o momento perto do centro da extensão.

12. Inspeção de pilar (6) na tabela (8) indica esse segmento 10 deve ser verificado para possível stress como resultado deste aumento. O aumento do momento no segmento 10 será dado por

$$\Delta M = \Delta H_A(y\text{for segment10}) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{37.18}$$

13. O momento de 100 pés·k, como previamente determinado para o segmento 10, é preciso apenas nos dois primeiros lugares, e daí o momento total revisto para Segmento 10 será

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{37.19}$$

14. O impulso de 335 k, previamente determinado para o segmento 10, é preciso até três Lugares. A mudança em H_A devido ao encurtamento das costelas e mudança de temperatura deve Portanto, ser arredondado para 1 k, a fim de determinar o impulso corrigido no segmento 10. Este impulso corrigido será

$$335 - 1 = 334 \text{ k} \tag{37.20}$$

15. A fibra extrema é

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2 \tag{37.21}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

16. A seção do segmento 10 está checada, como indicado na tabela (8), por

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96 \tag{37.22}$$

    E obviamente a seção do segmento 10 é adequada.
17. Nenhuma consideração foi dada aos efeitos de um aumento de temperatura, desde que tal Uma subida só pode ocorrer durante os meses de verão quando nenhuma carga de neve é possível. Consequentemente, esta fase do problema não tem significado prático.
18. O método de análise acabado de demonstrar se aplicará igualmente bem a um reforço concreto ou um arco de madeira de duas torções. Como já foi dito, no entanto, muito poucos Arcos são construídos com duas dobradiças.
19. De nota especial aqui é o fato de que, além de axial deformação e queda de temperatura, o encolhimento do concreto em um concreto armado A costela também causará encurtamento da costela. O coeficiente de encolhimento deve ser determinado para A mistura a ser usada e aplicada na análise da mesma forma geral como demonstrado acima para o coeficiente de temperatura.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 38

Fermi Solutions (Análise aproximada)

Abstract

Engenheiros e arquitetos hábeis enfrentam o desafio de realizar cálculos rápidos, aproximados. Combinando habilmente equações fundamentais de mecânica e estática com um diagrama desenhado com precisão da forma desviada, eles podem transformar uma estrutura estaticamente indeterminada em determinada para resolver esforços internos. Da mesma forma, os edifícios podem ser simplificados para determinar as reações de base e lateral superior deslocamentos. O capítulo começa desenhando uma analogia entre a análise aproximada e os chamados problemas de Fermi. Ele então explora a análise de resposta aproximada de simples vigas e pórticos submetidos a cargas verticais e horizontais para determinar esforços internos em estruturas altamente indeterminadas. Isto é seguido por um exame da resposta estrutural aproximada dos sistemas de parede e eixo, determinando as reações de base e topo deslocamentos (drift]).

38.1 Esforços internos 1433
38.1.1 Formas defletidas & Pontos de inflexão 1433
38.1.2 Momentos em termos de apoio 1436
38.1.3 Analisa métodos 1438
38.2 Resposta estrutural 1458
38.2.1 Subsistema de eixo 1458
38.2.2 Cisalhamento parede 1460
38.2.3 Muralha de madeira 1462
38.2.4 Deflexões laterais 1464

[1] Um problema de *Fermi* é uma estimativa baseada em um cálculo aproximado para um problema complexo. Envolve formular hipóteses sobre quantidades e não busca uma solução exata; muitas vezes, a ordem de grandeza é suficiente.

[2] Relata-se que, ao testemunhar a detonação da primeira bomba atômica, Fermi criou um método simples para adivinhar a força da bomba. Ele simplesmente deixou cair pedaços de papéis durante a explosão e então mediu a distância percorrida. Ele veio com 10 kilotons bem dentro de uma ordem de magnitude do valor aceito de 21 kilotoneladas.

[3] Essa foi a gênese do chamado problema Fermi que requer suposições razoáveis e estimativas sobre uma situação para chegar a uma resposta aproximada.

CÓPIA PARA REVISÃO

4 Este é o propósito deste capítulo. Podemos fazer suposições razoáveis e aproximadas para estimar a magnitude de esforços internos em uma estrutura. Tal abordagem é sempre desejável antes de se realizar uma análise complexa para pelo menos unir a solução.

5 Este é realmente um perfeito *Problema Fermi*.

38.1 Esforços internos

6 Começamos examinando o processo de transformar um indeterminado estáticamente em determinado, simplesmente estimando a localização do ponto de inflexão na forma deformada.

38.1.1 Formas defletidas & Pontos de inflexão

7 Lembrando§22.3) que

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

Onde ρ é o raio da curvatura. e como resultado, o momento zero ocorreria em um *ponto de inflexão*, e quanto menor o raio de curvatura maior é o momento.

8 Assim, precisamos localizar pontos de zero momentos, aqueles por sua vez transformarão um problema estaticamente indeterminado em um problema estático apenas adicionando equações de condições (§19.1.3).

9 Mas primeiro precisamos esboçar corretamente a forma desviada de uma estrutura sob uma determinada carga.

10 Para desenhar corretamente a forma deformada, seguiremos algumas regras básicas:

1. Ignorar deformação axial que são insignificantes em comparação com as flexuras§53.2.1)
2. Se tivermos uma carga lateral, aplique uma pequena lateral deslocamento.
3. Deve haver compatibilidade de rotações de canto (i.e. Dobras de 90 graus permanecem em 90 graus; As pontas fixas permanecem fixas).
4. A deformação deve ser suave (exceto nas dobradiças internas).

11 A deformação da estrutura pode ser decomposta para os de

Nodos de canto Fig. 38.1, onde distinguemos três modos: a) abertura, b) fechamento e c) mistura.

Vigas Como ilustrado na figura. 38.2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

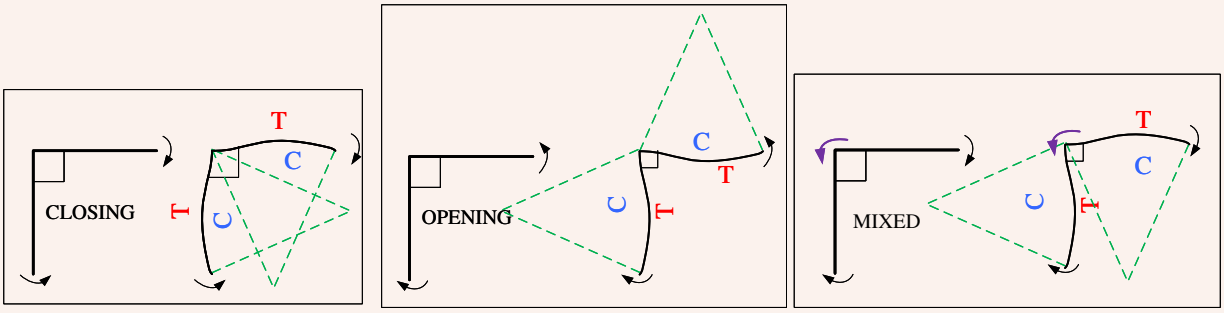


Figura 38.1: Rotações de canto compatíveis

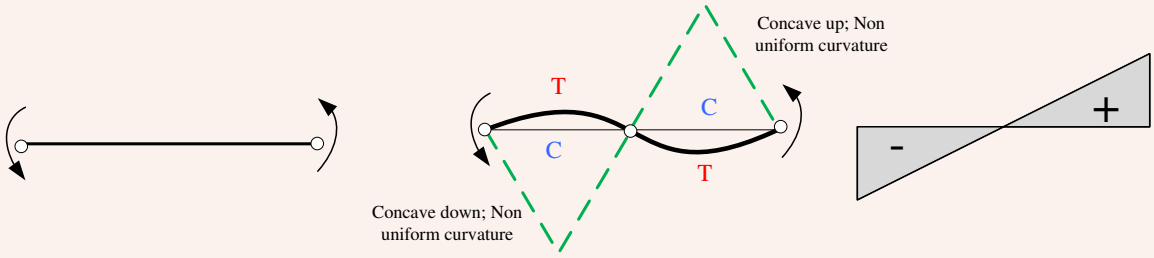


Figura 38.2: Desvio de um simples viga

Pórticos Vamos distinguir entre dois conjuntos de cargas:

Carga Vertical Exige atenção especial, pois a forma desviada dependerá muito das rigidezes relativas do pilares e do vigas (§27.3.1). Por isso consideraremos

- Rígido pilares, Fig. 38.3.. Observe quanto menor o raio, maior é o momento.

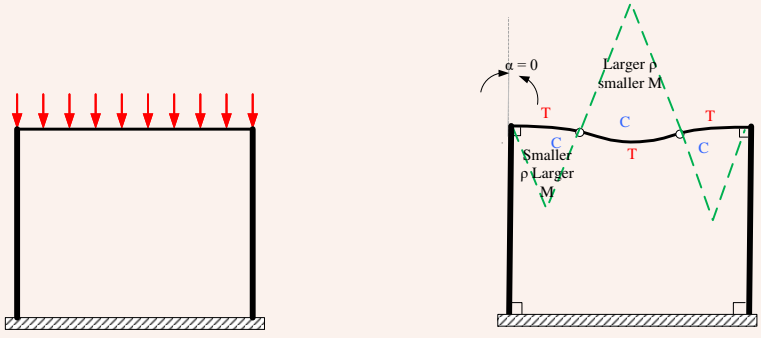


Figura 38.3: Deflexão do portal pórtico com rígido pilares sob carga vertical

CÓPIA PARA REVISÃO

- Rígido viga: Teremos pequena flexão em viga e grande forças axiais no pilares
- Situação intermediar fig. 1. 38.4

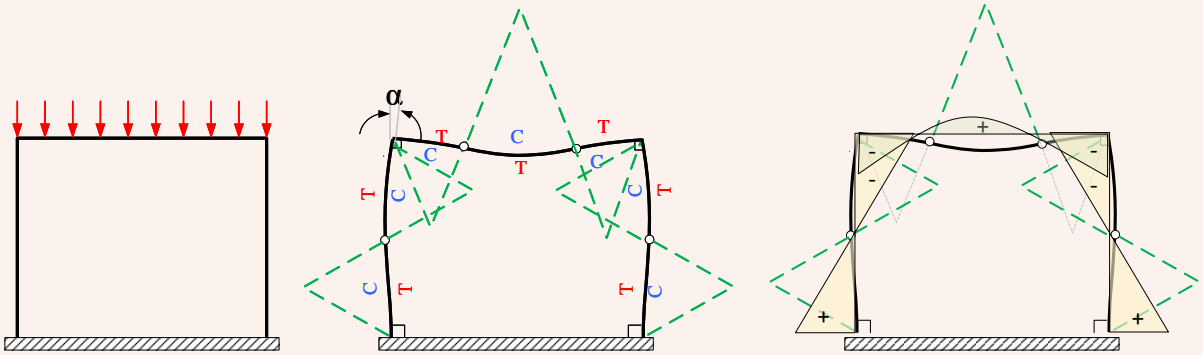
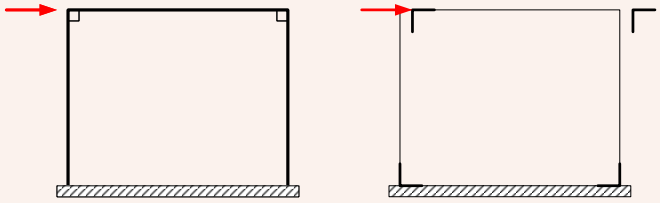


Figura 38.4: Deflexão do portal pórtico sob carga vertical

Carga Lateral como mostrado na figura. 38.5a.. Note o lado deslocamentos dos cantos superiores, Fig. 38.5b.



(a) Pórtico submetido a carga lateral

(b) Nodos de canto deslocados

Figura 38.5: Exemplo de portal pórtico sujeito a carga lateral

Nós desenhamos as formas desviadas da esquerda pilar tendo em mente:

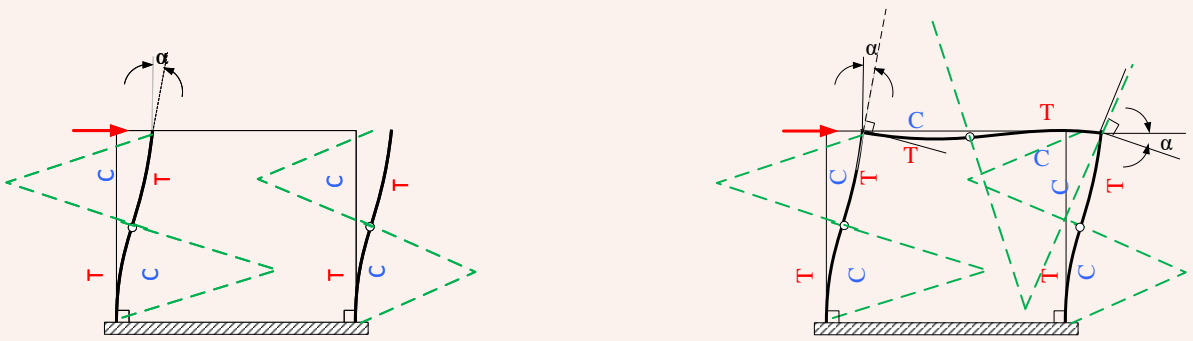
- A tangente inferior é 90 ^{o}.
- A tensão tem que estar do lado de fora (assim côncavo dentro).
- O pilar está contido no topo. Se a cruz viga é
  - Infinito rígido: A tangente ao topo do pilar também seria 90^{o}.. (Haverá um ponto de inflexão)
  - Muito flexível. Não haverá ponto de inflexão, e a concavidade estará completamente dentro.

CÓPIA PARA REVISÃO

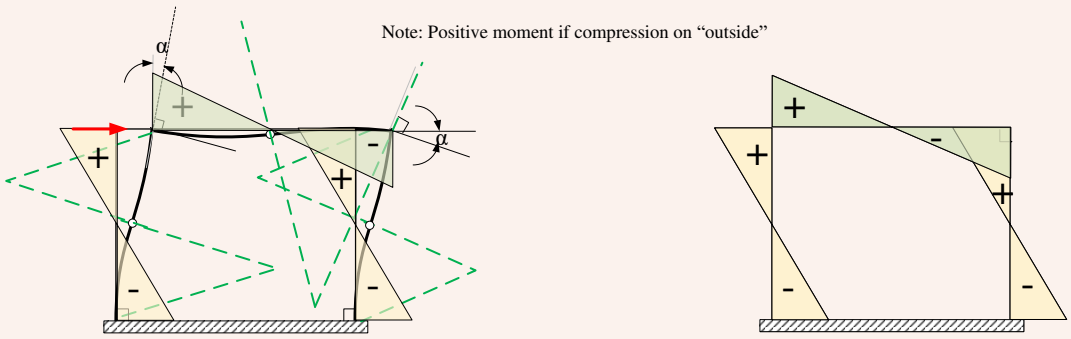
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

– Finito rigidez: não rotação zero no topo, e um ponto de inflexão.

O Pilar na direita terá a mesma forma, e a forma desviada é mostrada na figura. 38.6a.



(a) Forma defletida



(b) Diagrama do momento

Figura 38.6: Forma defletida e diagrama do momento; Portal pórtico com carga lateral

38.1.2 Momentos em termos de apoio

12 Considerando que muitas vezes consideramos vigas ser totalmente fixo ou livre em seus fins, muitas vezes a situação é mais complexa e merece atenção especial[1]

13 Se de fato a viga está ligado a um muito rígido pilar, do que para todos os fins práticos podemos supor que o rigidamente conectado no final. Da mesma forma, se a viga está conectado a relativamente flexível pilares, então a viga pode ser assumido para ter suportes livres.

14 Isto está ilustrado graficamente na figura. 38.7. e como o suporte vai de flexível

[1] Modelo numérico de vigas conectado a molas elásticas é separadamente coberto em §46.6.2.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

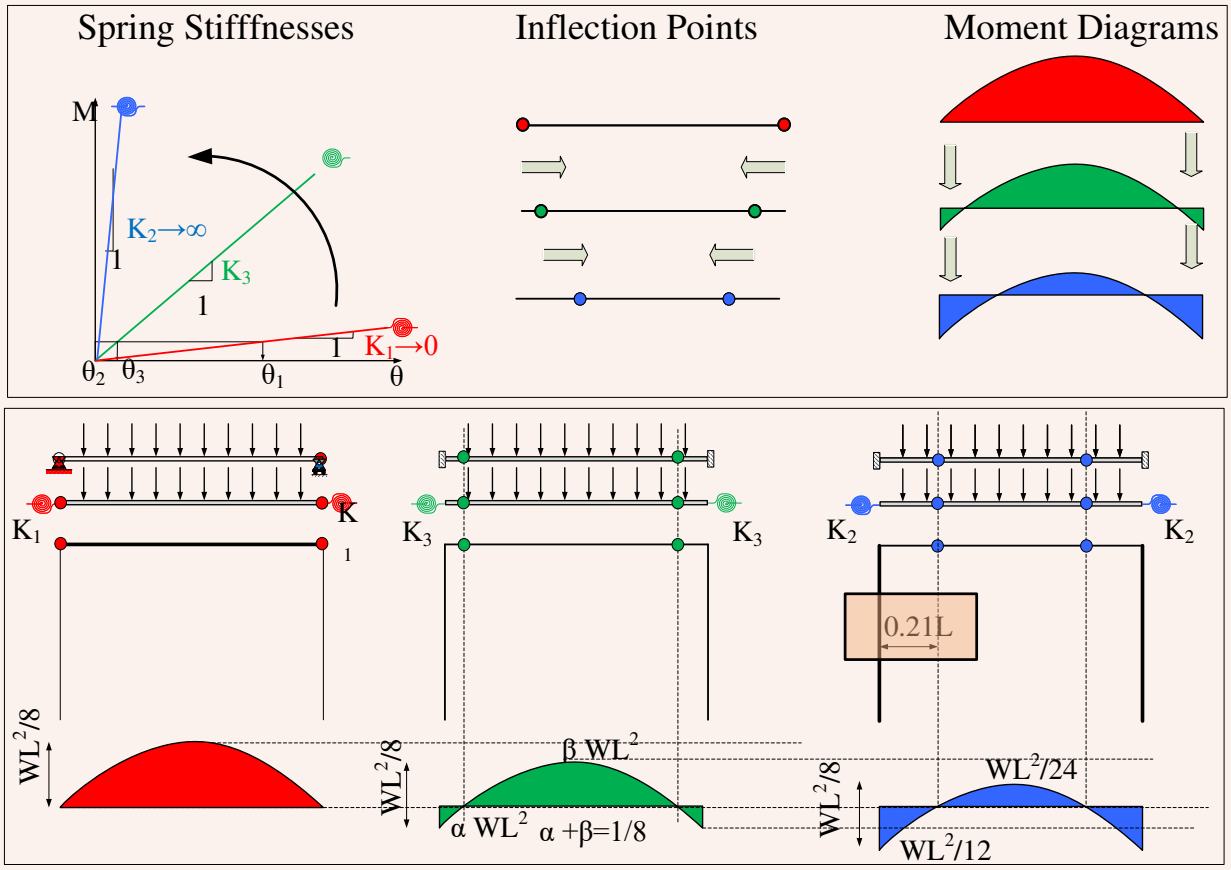


Figura 38.7: Deflexões em termos de rigidez de suporte

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(vermelho) para rígido (azul), os pontos de inflexão movem-se para aproximadamente $0{,}21L$, e o diagrama de momento é puxado para um mínimo de $wL^2/12$ no suporte. Valores intermediários são mostrados em verde.

15 Assim, dada a localização do ponto de inflexão, podemos dividir a viga em três segmentos: 2 extremidades de comprimento máximo de cada não superior a $0{,}21L$ e uma central. Cada uma é estaticamente determinada subestrutura e pode ser analisada como tal.

38.1.3 Analisa métodos

16 O dimensionamento preliminar de um edifício retangular, ou uma verificação do envelope de uma análise de computador pode ser facilmente realizada através da análise aproximada de edifícios.

17 Cargas verticais e horizontais teriam que ser manuseadas separadamente. Para cargas horizontais dois métodos:

Método do portal para edifícios de baixa elevação onde a altura é pelo menos menor que a dimensão horizontal, a forma desviada é caracterizada por deformações cisalhamento.

Método Cantilever Para edifícios de alta altitude, onde a altura é várias vezes maior do que sua menor dimensão horizontal, a forma desviada é dominada pela deformação flexural geral.

18 Existem três tipos primários de sistemas de construção:

Subsítemo de Parede: em que paredes muito rígidas compostas de A alvenaria sólida, madeira em painel ou forjada, ou aço treliças constituem Um subsistema rígido. Isso só é adequado para prédios pequenos.

Eixos verticais: com quatro paredes sólidas ou forradas formando-se uma estrutura espacial tubular. O tubular A estrutura pode ser interior (elevadores, escadas) e/ou exterior. Mais eficiente para prédios de alta altitude.

Rígido Pórtico: que consiste em componentes verticais lineares (pilares) rígidamente conectados às horizontales rígidas (vigas e vigas). Esta não é uma forma estrutural muito eficiente para resistir a cargas laterais (vento/terremoto).

38.1.3.1 Cargas verticais

19 Para um multi-baia/multi-cavalo pórtico, vigas são assumidas como contínuas vigas, e pilares são presumidas para resistir aos resultantes momentos desequilibrados das vigas. Nós ainda assumimos que

1. As vigas em cada andar agem como contínuas vigas suportando uma carga uniforme.
2. Pontos de inflexão (Fig. 38.8) são supostos para estar em

CÓPIA PARA REVISÃO

(a) Um décimo da distância de ambas as extremidades de cada viga.
(b) Meia-altura do pilares.

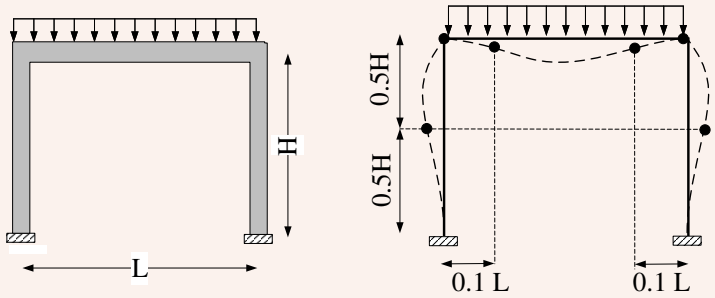


Figura 38.8: Pórtico sob carga vertical; Localização aproximada dos pontos de inflexão

3. Ignore os efeitos axiais.
4. Os momentos finais desequilibrados das vigas de cada articulação são distribuídos para o pilares acima e abaixo.

20 Então, todos as vigas são estaticamente determinados e têm uma extensão, L_s igual a 0,8 o comprimento original da viga, L.. Isso assume que o ponto de inflexão está em $0.1L$ Que é entre 0 para biapoiado viga, e $0.21L$ Para a conexão rígida vigas (figura 38.9).

21 Sequência de cálculo (muito importante)

1. Momento positivo da viga
2. Momento negativo da viga
3. Girder cisalhamento
4. Pilar forças axiais
5. Pilar momentos
6. Pilar tesouras
7. Girder forças axiais

22 O procedimento é descrito abaixo, não há necessidade de memorizar qualquer equação, apenas use equações de equilíbrio e diagramas de corpo livre onde todos os membros finais cisalhamento e momentos são assumidos como positivos.

Um. Momento positivo da viga

23 Por analogia com a Fig. 38.7, e assumindo que os pontos de inflexão para ser em $0.1L$ Pelo apoio, consideramos Fig. 38.9 e decompor a viga em três partes.

24 O momento máximo positivo será simplesmente

$$M^+ = \frac{1}{8} w L_s^2 = w \frac{1}{8} (0.8)^2 L^2 = 0.08 w L^2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

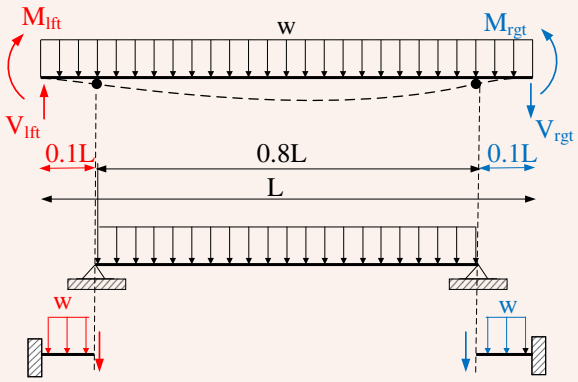


Figura 38.9: Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais; Momentos de vigas

25 Note que no CSE de totalmente engaste, e pontos de inflexão em $0.21L$O momento máximo seria.. $wL^2/24 = 0.041667$.

2. Momento negativo da viga

26 O momento negativo máximo na viga termina, novamente da Fig. 38.9, será

$$M^{left} = M^{rgt} = -\frac{w}{2}(0.1L)^2 - \frac{w}{2}(0.8L)(0.1L) = -0.045wL^2$$

3. Girder cisalhamento

27 De novo, da Fig. 38.9 O cisalhamento é prontamente obtido de

$$V^{lft} = \frac{wL}{2} \qquad V^{rgt} = -\frac{wL}{2}$$

28 Observe as direções do forças cortantes. Graficamente, eles sempre serão mostrados positivos.

4. Pilar força axial

29 Os pilar forças axiais são obtidos simplesmente somando todas as tesouras de viga conectadas ao pilar, Fig. 38.10.

$$P^{dwn} = P^{up} + V_{i-1}^{rgt} - V_i^{lft}$$

Cinco. Momento

30 Pilar momentos são determinados a partir do diagrama de corpo livre das articulações, Fig. 38.11). Da simetria, os momentos esquerdo e direito são iguais e opostos

$$M^{bot} = -M^{top}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

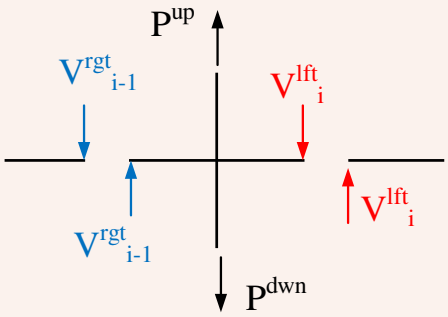


Figura 38.10: Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais; pilar forças axiais

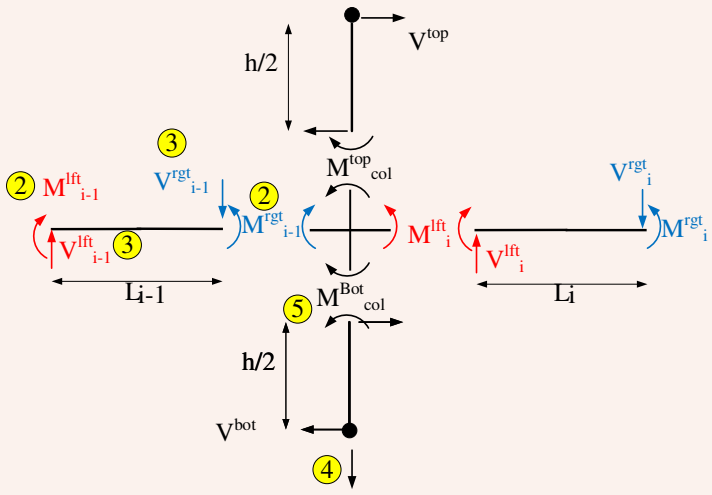


Figura 38.11: Análise aproximada de pórticos submetidas a cargas verticais

CÓPIA PARA REVISÃO

Seis. Pilar Cisalhamento

31 Já que assumimos os pontos de inflexão em altura média, com possível exceção quando o pilares no primeiro andar são dobrados na base, temos

$$V = \frac{M^{top}}{\frac{h}{2}}$$

- 7? Girder forças axiais

32 A viga forças axiais é insignificante e será ignorada.

38.1.3.2 Cargas horizontais

38.1.3.2.1 Método do portal

33 Prédios de baixa elevação sob cargas laterais sofrem predominantemente deformações cisalhamento. Como tal, sua análise aproximada pode ser facilmente realizada através dos seguintes pressupostos:

1. Da Fig. 38.6bPodemos assumir pontos de inflexão, Fig. 38.12:
   (a) Meia-altura de todos pilares acima do segundo andar.
   (b) Meia altura do chão pilares se suporte rígido, ou na base se dobrado.
   (c) No centro de cada viga.
2. Total horizontal cisalhamento na altura média de todos pilares em qualquer nível do piso será distribuído entre estes pilares para que cada um dos dois exteriores pilares carregam metade da horizontal cisalhamento como cada interior pilares do pórtico.

34 Assim, a sequência de cálculos será

1. Pilar cisalhamento
2. Pilar momentos
3. Momentos de cinta
4. Tesouras de cinta
5. Pilar força axial
6. Girder força axial

Note que é o *Ordem inversa* da caixa de carga vertical.

Um. Pilar Cisalhamento

35 As tesouras são determinadas passando uma seção horizontal através da altura média do pilares em cada andar e escrevendo uma equação de equilíbrio das forças laterais.

$$V_{ext}^{col} = \frac{\sum F^{lateral}}{2 \text{ No. of bays}}; \qquad V_{int}^{col} = 2V_{ext}^{col}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

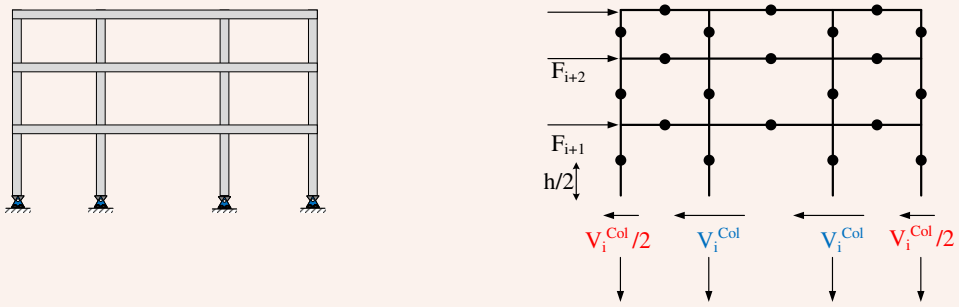


Figura 38.12: Análise aproximada de pórticos submetidos a cargas laterais; pilar cisalhamento

2. Momentos

36 O momento no final de cada pilar é igual ao cisalhamento na pilar vezes metade da altura do correspondente pilar, Fig. 38.13.

$$M_{col}^{top} = V^{col}\frac{h}{2} \qquad M^{bot} = -M^{top}$$

Cuidado exterior pilares, os momentos são metade dos do interior.

3. Momentos de Cinta

37 Os momentos de cinta são simplesmente determinados a partir do diagrama de corpo livre da conexão, Fig. 38.13.

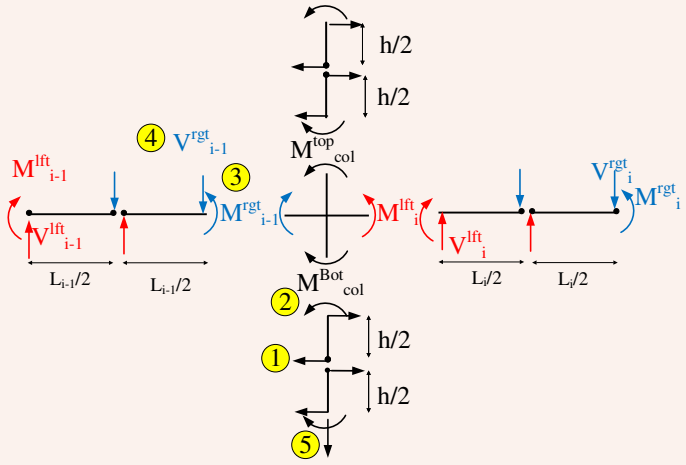


Figura 38.13: Análise aproximada de pórticos submetidos a cargas laterais; Momento da viga

$$M_i^{lft} = M_{col}^{Top} - M_{col}^{Bot} + M_{i-1}^{rgt}; \qquad M_i^{rgt} = -M_i^{lft}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Cinta de tesouras

38 Como há um ponto de inflexão no centro da viga, a viga cisalhamento é obtida considerando a soma dos momentos sobre esse ponto

$$V^{lft} = -\frac{2M}{L} \qquad V^{rgt} = V^{lft}$$

Cinco. Pilar Forças axiais

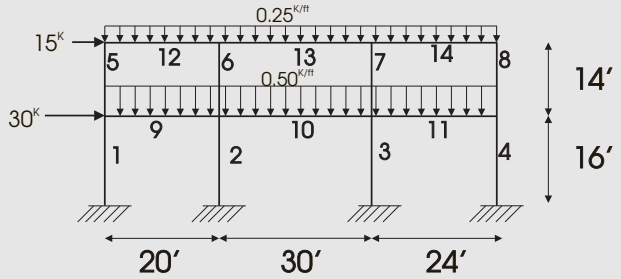
39 Pilar forças axiais são obtidos por tesouras de viga e o força axial do pilar acima

$$P = P^{above} - P^{rgt} + P^{lft}$$

Seis. Girder força axial

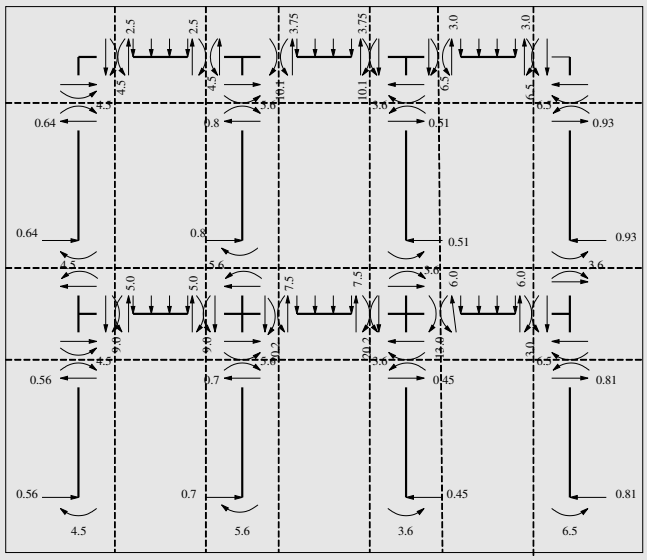
40 Girder forças axiais são considerados insignificantes.

38.1.3.2.1.1 Ex 38.1: Método do portal; Edifício de subida baixa



CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Carga Vertical

Momentos de Top Girder

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.25)(20)^2 &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.25)(20)^2 &&= 8.0 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= -0.045 w_{13} L_{13}^2 = -(0.045)(0.25)(30)^2 &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{cnt} &= 0.08 w_{13} L_{13}^2 = (0.08)(0.25)(30)^2 &&= 18.0 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= M_{13}^{lft} &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= -0.045 w_{14} L_{14}^2 = -(0.045)(0.25)(24)^2 &&= -6.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{cnt} &= 0.08 w_{14} L_{14}^2 = (0.08)(0.25)(24)^2 &&= 11.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= M_{14}^{lft} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Momentos da Viga de Baixo

$$
\begin{aligned}
M_9^{lft} &= -0.045 w_9 L_9^2 = -(0.045)(0.5)(20)^2 && = -9.0 \text{ k.ft} \\
M_9^{cnt} &= 0.08 w_9 L_9^2 = (0.08)(0.5)(20)^2 && = 16.0 \text{ k.ft} \\
M_9^{rgt} &= M_9^{lft} && = -9.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= -0.045 w_{10} L_{10}^2 = -(0.045)(0.5)(30)^2 && = -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{cnt} &= 0.08 w_{10} L_{10}^2 = (0.08)(0.5)(30)^2 && = 36.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= M_{11}^{lft} && = -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.5)(24)^2 && = -13.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.5)(24)^2 && = 23.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= M_{12}^{lft} && = -13.0 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Momentos do topo

$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= +M_{12}^{lft} && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= -M_{12}^{rgt} + M_{13}^{lft} = -(-4.5) + (-10.1) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= -M_{13}^{rgt} + M_{14}^{lft} = -(-10.1) + (-6.5) && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= -M_{14}^{rgt} = -(-6.5) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

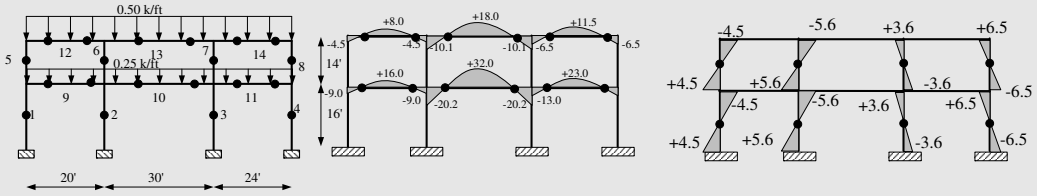
Fundo Pilar Momentos

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= +M_5^{bot} + M_9^{lft} = 4.5 - 9.0 && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &- M_1^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= +M_6^{bot} - M_9^{rgt} + M_{10}^{lft} = 5.6 - (-9.0) + (-20.3) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= +M_7^{bot} - M_{10}^{rgt} + M_{11}^{lft} = -3.6 - (-20.3) + (-13.0) && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= +M_8^{bot} - M_{11}^{rgt} = -6.5 - (-13.0) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Diagramas de Momento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Top Girder Cisalhamento

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= \frac{w_{12}L_{12}}{2} = \frac{(0.25)(20)}{2} && = 2.5 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= -V_{12}^{lft} && = -2.5 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= \frac{w_{13}L_{13}}{2} = \frac{(0.25)(30)}{2} && = 3.75 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= -V_{13}^{lft} && = -3.75 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= \frac{w_{14}L_{14}}{2} = \frac{(0.25)(24)}{2} && = 3.0 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= -V_{14}^{lft} && = -3.0 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Cinta inferior Cisalhamento

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= \frac{w_{9}L_{9}}{2} = \frac{(0.5)(20)}{2} && = 5.00 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= -V_{9}^{lft} && = -5.00 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= \frac{w_{10}L_{10}}{2} = \frac{(0.5)(30)}{2} && = 7.50 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= -V_{10}^{lft} && = -7.50 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= \frac{w_{11}L_{11}}{2} = \frac{(0.5)(24)}{2} && = 6.00 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= -V_{11}^{lft} && = -6.00 \text{ k}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pilar Shears

$$V_5 = \frac{M_5^{top}}{\frac{H_5}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{14}{2}} = -0.64 \text{ k}$$

$$V_6 = \frac{M_6^{top}}{\frac{H_6}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{14}{2}} = -0.80 \text{ k}$$

$$V_7 = \frac{M_7^{top}}{\frac{H_7}{2}} = \frac{3.6}{\frac{14}{2}} = 0.52 \text{ k}$$

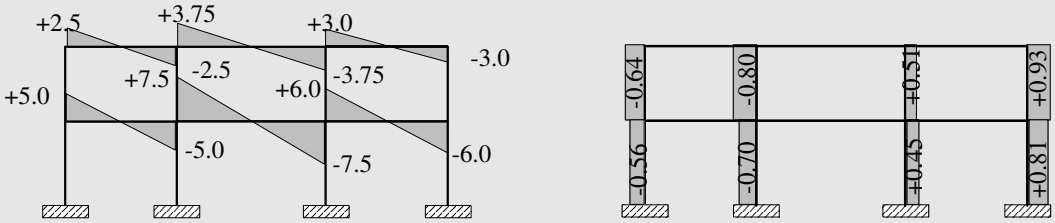
$$V_8 = \frac{M_8^{top}}{\frac{H_8}{2}} = \frac{6.5}{\frac{14}{2}} = 0.93 \text{ k}$$

$$V_1 = \frac{M_1^{top}}{\frac{H_1}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{16}{2}} = -0.56 \text{ k}$$

$$V_2 = \frac{M_2^{top}}{\frac{H_2}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{16}{2}} = -0.70 \text{ k}$$

$$V_3 = \frac{M_3^{top}}{\frac{H_3}{2}} = \frac{3.6}{\frac{16}{2}} = 0.46 \text{ k}$$

$$V_4 = \frac{M_4^{top}}{\frac{H_4}{2}} = \frac{6.5}{\frac{16}{2}} = 0.81 \text{ k}$$



Topo Pilar Forças axiais

$$P_5 = V_{12}^{lft} = 2.50 \text{ k}$$

$$P_6 = -V_{12}^{rgt} + V_{13}^{lft} = -(-2.50) + 3.75 = 6.25 \text{ k}$$

$$P_7 = -V_{13}^{rgt} + V_{14}^{lft} = -(-3.75) + 3.00 = 6.75 \text{ k}$$

$$P_8 = -V_{14}^{rgt} = 3.00 \text{ k}$$

Fundo Pilar Forças axiais

$$P_1 = P_5 + V_9^{lft} = 2.50 + 5.0 = 7.5 \text{ k}$$

$$P_2 = P_6 - V_{10}^{rgt} + V_9^{lft} = 6.25 - (-5.00) + 7.50 = 18.75 \text{ k}$$

$$P_3 = P_7 - V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 6.75 - (-7.50) + 6.0 = 20.25 \text{ k}$$

$$P_4 = P_8 - V_{11}^{rgt} = 3.00 - (-6.00) = 9.00 \text{ k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

VERTICAL LOADS

Height	Span	L1	L2	L3
		20	30	24
14	Load	0.25	0.25	0.25
16	Load	0.5	0.5	0.5

MOMENTS

	Bay 1				Bay 2				Bay 3			
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft	Cnt	Rgt		Lft	Cnr	Rgt		Lft	Cnt	Rgt	
	-4.5	8.0	-4.5		-10.1	18.0	-10.1		-6.5	11.5	-6.5	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5
	-9.0	16.0	-9.0		-20.3	36.0	-20.3		-13.0	23.0	-13.0	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5

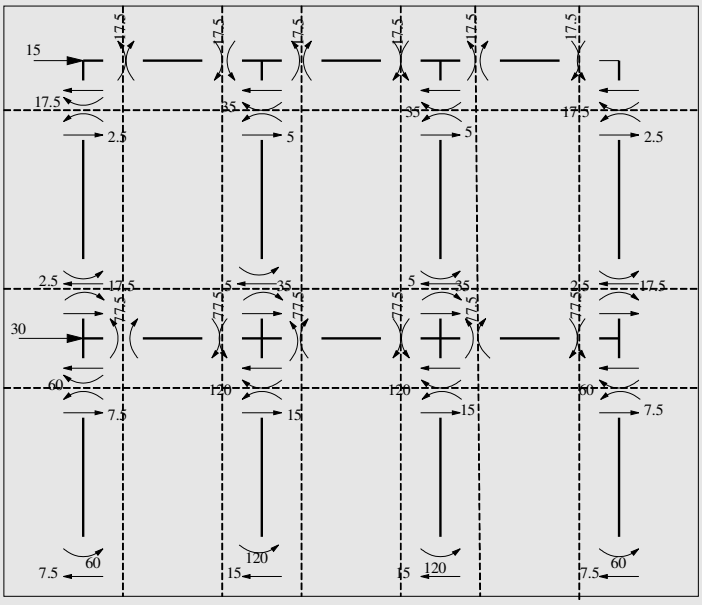
SHEAR

	Bay 1				Bay 2				Bay 3			
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft		Rgt		Lft		Rgt		Lft		Rgt	
	2.50		-2.50		3.75		-3.75		3.00		-3.00	
-0.64				-0.80				0.52				0.93
	5.00		-5.00		7.50		-7.50		6.00		-6.00	
-0.56				-0.70				0.46				0.81

AXIAL FORCE

	Bay 1		Bay 2		Bay 3	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
2.50		6.25		6.75		3.00
	0.00		0.00		0.00	
7.50		18.75		20.25		9.00

Cargas Horizontais



CÓPIA PARA REVISÃO

Pilar Shears

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \frac{15}{(2)(3)} && = 2.5 \text{ k} \\
V_6 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_7 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_8 &= V_5 && = 2.5 \text{ k} \\
V_1 &= \frac{15+30}{(2)(3)} && = 7.5 \text{ k} \\
V_2 &= 2(V_1) = (2)(7.5) && = 15 \text{ k} \\
V_3 &= 2(V_1) = (2)(2.5) && = 15 \text{ k} \\
V_4 &= V_1 && = 7.5 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Momentos do topo

$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= \frac{V_1 H_5}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = -17.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= \frac{V_6 H_6}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= \frac{V_7^{up} H_7}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= \frac{V_8^{up} H_8}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Fundo Pilar Momentos

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= \frac{V_1^{dwn} H_1}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &= -M_1^{top} && = -60 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= \frac{V_2^{dwn} H_2}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= \frac{V_3^{dwn} H_3}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= \frac{V_4^{dwn} H_4}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -60 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

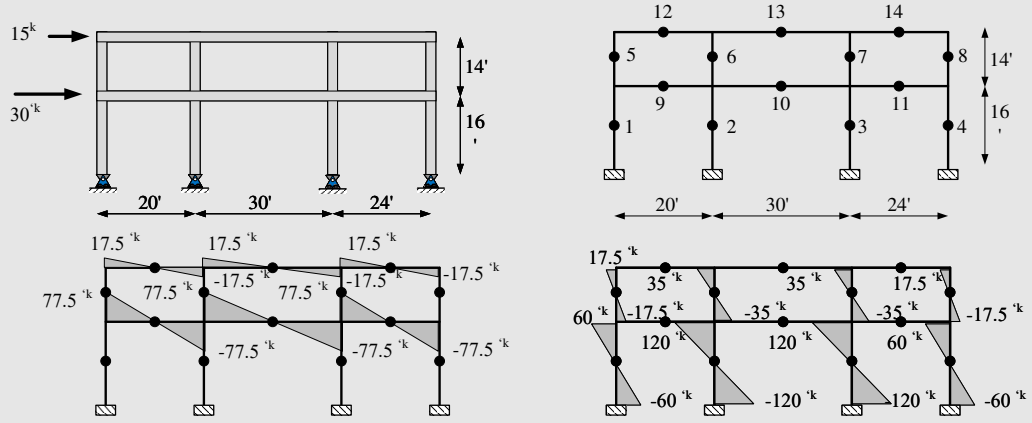
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Momentos de Top Girder

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= M_{5}^{top} &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= -M_{12}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= M_{12}^{rgt} + M_{6}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= -M_{13}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= M_{13}^{rgt} + M_{7}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= -M_{14}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

Momentos da Viga de Baixo

$$
\begin{aligned}
M_{9}^{lft} &= M_{1}^{top} - M_{5}^{bot} = 60 - (-17.5) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{9}^{rgt} &= -M_{9}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= M_{9}^{rgt} + M_{2}^{top} - M_{6}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= -M_{10}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= M_{10}^{rgt} + M_{3}^{top} - M_{7}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= -M_{11}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$



CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Top Girder Cisalhamento

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{12}} = -\frac{(2)(17.5)}{20} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= +V_{12}^{lft} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= -\frac{2M_{13}^{lft}}{L_{13}} = -\frac{(2)(17.5)}{30} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= +V_{13}^{lft} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= -\frac{2M_{14}^{lft}}{L_{14}} = -\frac{(2)(17.5)}{24} &&= -1.46 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= +V_{14}^{lft} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Cinta inferior Cisalhamento

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{9}} = -\frac{(2)(77.5)}{20} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= +V_{9}^{lft} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= -\frac{2M_{10}^{lft}}{L_{10}} = -\frac{(2)(77.5)}{30} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= +V_{10}^{lft} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= -\frac{2M_{11}^{lft}}{L_{11}} = -\frac{(2)(77.5)}{24} &&= -6.46 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= +V_{11}^{lft} &&= -6.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Topo Pilar Forças axiais (ve tensão, -ve compressão)

$$
\begin{aligned}
P_5 &= -V_{12}^{lft} &&= -(-1.75) \text{ k} \\
P_6 &= +V_{12}^{rgt} - V_{13}^{lft} = -1.75 - (-1.17) &&= -0.58 \text{ k} \\
P_7 &= +V_{13}^{rgt} - V_{14}^{lft} = -1.17 - (-1.46) &&= 0.29 \text{ k} \\
P_8 &= V_{14}^{rgt} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

Fundo Pilar Forças axiais (ve tensão, -ve compressão)

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_5 + V_{9}^{lft} = 1.75 - (-7.75) &&= 9.5 \text{ k} \\
P_2 &= P_6 + V_{10}^{rgt} + V_{9}^{lft} = -0.58 - 7.75 - (-5.17) &&= -3.16 \text{ k} \\
P_3 &= P_7 + V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 0.29 - 5.17 - (-6.46) &&= 1.58 \text{ k} \\
P_4 &= P_8 + V_{11}^{rgt} = -1.46 - 6.46 &&= -7.66 \text{ k}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

# of Bays	3

# of Storeys					2
		Force		Shear	
	H	Lat.	Tot	Ext	Int
H1	14	15	15	2.5	5
H2	16	30	45	7.5	15

HORIZONTAL LOAD

	L1			L2			L3		
	20			30			24		
MOMENTS									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	17.5	-17.5		17.5	-17.5		17.5	-17.5	
17.5			35.0			35.0			17.5
-17.5			-35.0			-35.0			-17.5
	77.5	-77.5		77.5	-77.5		77.5	-77.5	
60.0			120.0			120.0			60.0
-60.0			-120.0			-120.0			-60.0

SHEAR									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	-1.75	-1.75		-1.17	-1.17		-1.46	-1.46	
2.50			5.00			5.00			2.50
2.50			5.00			5.00			2.50
	-7.75	-7.75		-5.17	-5.17		-6.46	-6.46	
7.50			15.00			15.00			7.50
7.50			15.00			15.00			7.50

AXIAL FORCE						
Bay 1			**Bay 2**		**Bay 3**	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
1.75		-0.58		0.29		-1.46
	0.00		0.00		0.00	
9.50		-3.17		1.58		-7.92

Carga combinada

Parâmetros de projeto Com base nas duas análises aproximadas, carga vertical e lateral, agora buscamos os parâmetros de projeto para o pórtico.

Pilares

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

pilares				
Mem.		Vert.	Hor.	Desenho Valores
1	Um momento	4.50	60.00	64.50
	Axial	7.50	9.50	17.00
	Cisalhamento	0.56	7.50	8.06
2	Um momento	5.60	120.00	125.60
	Axial	18.75	15.83	34.58
	Cisalhamento	0.70	15.00	15.70
3	Um momento	3.60	120.00	123.60
	Axial	20.25	14.25	34.50
	Cisalhamento	0.45	15.00	15.45
4	Um momento	6.50	60.00	66.50
	Axial	9.00	7.92	16.92
	Cisalhamento	0.81	7.50	8.31
5	Um momento	4.50	17.50	22.00
	Axial	2.50	1.75	4.25
	Cisalhamento	0.64	2.50	3.14
6	Um momento	5.60	35.00	40.60
	Axial	6.25	2.92	9.17
	Cisalhamento	0.80	5.00	5.80
7	Um momento	3.60	35.00	38.60
	Axial	6.75	2.63	9.38
	Cisalhamento	0.51	5.00	5.51
8	Um momento	6.50	17.50	24.00
	Axial	3.00	1.46	4.46
	Cisalhamento	0.93	2.50	3.43

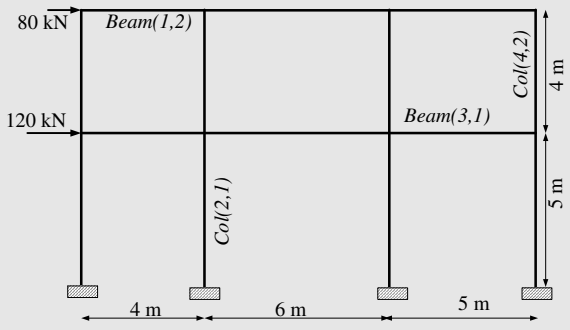
Vigas

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

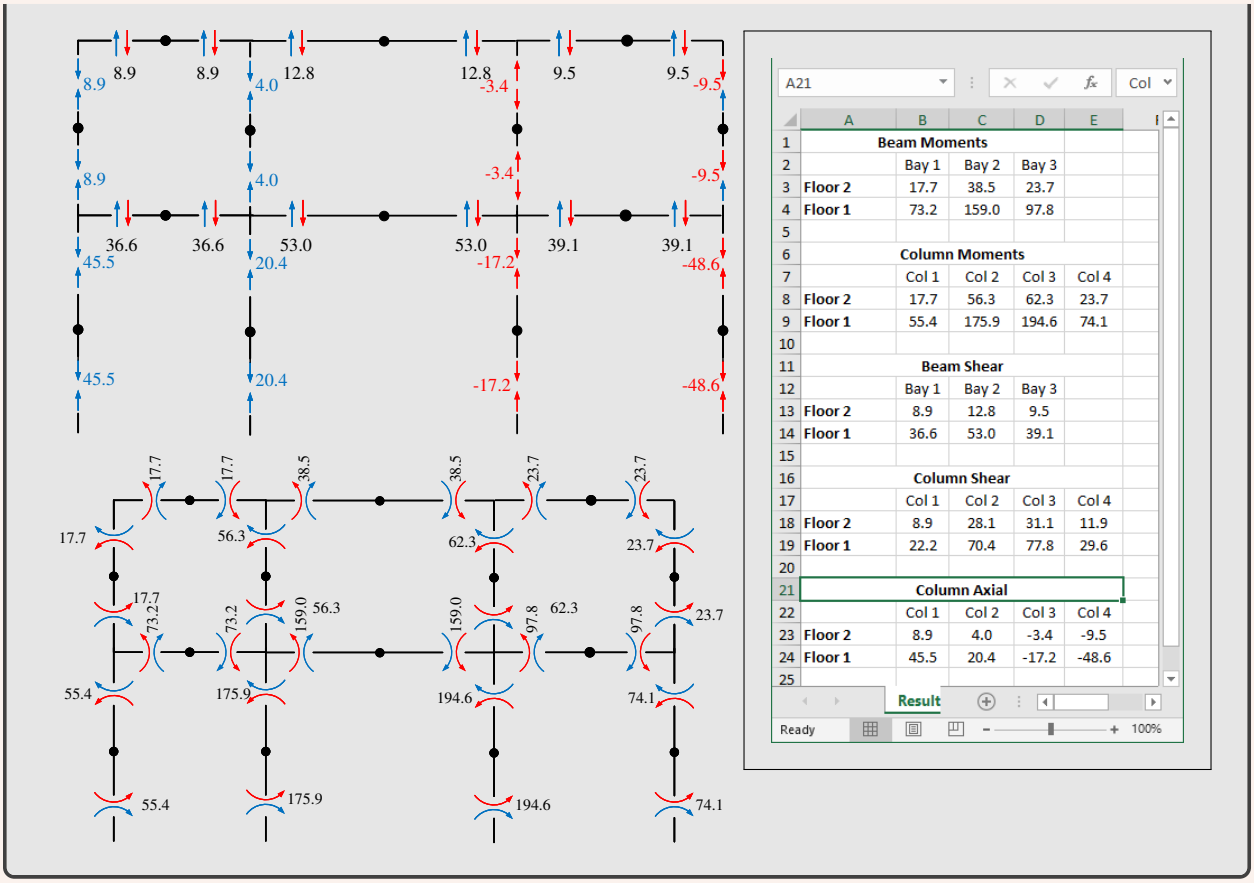
vigas				
Mem.		Vert.	Hor.	Desenho Valores
9	Momento negativo	9.00	77.50	86.50
	Momento positivo	16.00	0.00	16.00
	Cisalhamento	5.00	7.75	12.75
10	Momento negativo	20.20	77.50	97.70
	Momento positivo	36.00	0.00	36.00
	Cisalhamento	7.50	5.17	12.67
11	Momento negativo	13.0	77.50	90.50
	Momento positivo	23.00	0.00	23.00
	Cisalhamento	6.00	6.46	12.46
12	Momento negativo	4.50	17.50	22.00
	Momento positivo	8.00	0.00	8.00
	Cisalhamento	2.50	1.75	4.25
13	Momento negativo	10.10	17.50	27.60
	Momento positivo	18.00	0.00	18.00
	Cisalhamento	3.75	1.17	4.92
14	Momento negativo	6.50	17.50	24.00
	Momento positivo	11.50	0.00	11.50
	Cisalhamento	3.00	1.46	4.46

38.1.3.2.1.2 Ex 38.2: Solução Matlab



O MATLAB®Código listado em §I.2.2 foi usado para analisar o adjacente pórtico. Leitores são encorajados a resolver manualmente esse problema e comparar seus resultados com esses números.

CÓPIA PARA REVISÃO



38.1.3.2.2 Método Cantilever

41 O método é baseado na suposição de que o pórtico está agindo como um cantilever viga com as áreas transversais pilar como as fibras em uma viga. Mais especificamente:

1. O ponto de inflexão está localizado na altura média do pilar em cada andar e no ponto médio de cada viga.
2. O força axial em cada pilar é proporcional à sua distância do centro de gravidade das áreas do grupo pilar nesse nível.

42 Procedimento de análise

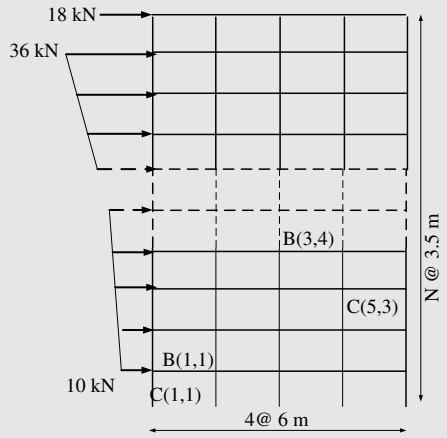
1. Determinar o centro de gravidade dos grupos pilar das áreas da área pilares (pilar pode ser assumida unidade)
2. Considere o equilíbrio do andar particular no ponto de inflexão em pilares. Pilar forças axiais são expressos em termos de um desconhecido pilar força axial, uma vez que eles são assumidos proporcionais à distância do centro de gravidade. Assim, tomando o momento de cargas externas e axial forças em pilares sobre qualquer ponto na seção, as forças desconhecidas no pilares são avaliados.

CÓPIA PARA REVISÃO

3. A viga cisalhamento é calculado usando condição, $\sum F_y = 0$ em cada junta separadamente. O pilar força axial é conhecido da etapa anterior.
4. O momento no final da viga é a viga cisalhamento multiplicado pela metade do comprimento da viga, uma vez que o ponto de inflexão se supõe estar no centro da viga.
5. Os momentos pilar são determinados considerando a condição $\sum M_z = 0$ Em.. Cada conjunto separadamente. O momento no final do vigas é conhecido da etapa anterior.
6. Verifiquem $\sum F_x = 0$ e.. $\sum F_y = 0$ nos suportes.

43 A MATLAB®código para a análise aproximada de pórtico usando o método cantilever é dado em §I.2.2.

38.1.3.2.2.1 Ex 38.3: Método Cantilever; Edifício de elevação alta



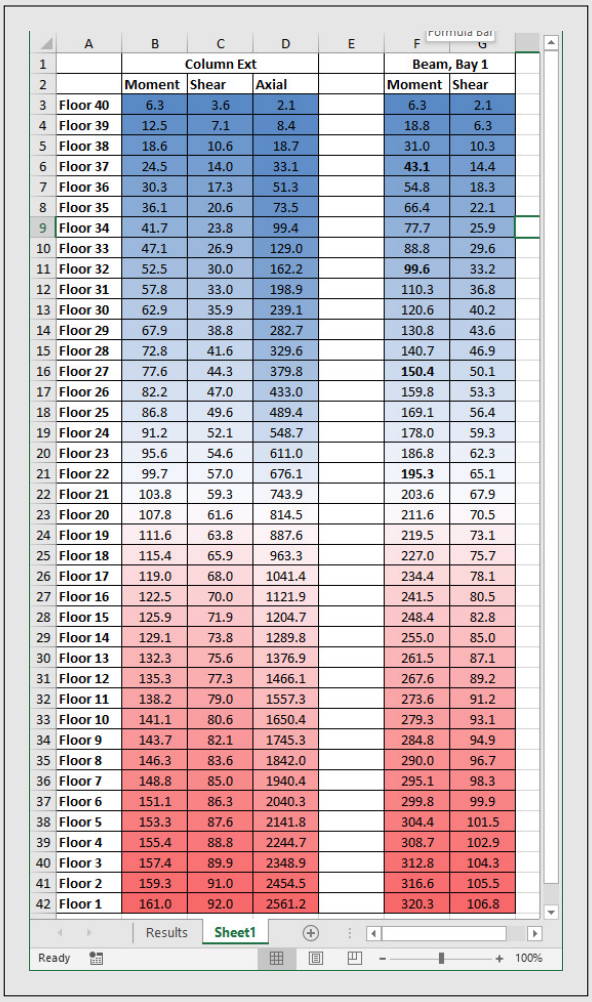
Usando novamente o MATLAB®Código (§I.2.2Analisamos o edifício adjacente de alta elevação composto por 4 baías e 50 andares. Este exemplo ilustra o flexibilidade do MATLAB®Código no apêndice.

Nós usamos o MATLAB®Código.

```
nBays=4;BaySpac=[6 6 6 6];CArea=[1 1 1 1 1];
nFloors=40;HeightCol=3.5*ones(40,1);
idf=0:39;HorLoad=10+26*idf/39;
```

e os resultados para pilar 1 e baia 1 estão tabulados abaixo.

CÓPIA PARA REVISÃO



		Column Ext				Beam, Bay 1	
		Moment	Shear	Axial		Moment	Shear
3	Floor 40	6.3	3.6	2.1		6.3	2.1
4	Floor 39	12.5	7.1	8.4		18.8	6.3
5	Floor 38	18.6	10.6	18.7		31.0	10.3
6	Floor 37	24.5	14.0	33.1		**43.1**	14.4
7	Floor 36	30.3	17.3	51.3		54.8	18.3
8	Floor 35	36.1	20.6	73.5		66.4	22.1
9	Floor 34	41.7	23.8	99.4		77.7	25.9
10	Floor 33	47.1	26.9	129.0		88.8	29.6
11	Floor 32	52.5	30.0	162.2		**99.6**	33.2
12	Floor 31	57.8	33.0	198.9		110.3	36.8
13	Floor 30	62.9	35.9	239.1		120.6	40.2
14	Floor 29	67.9	38.8	282.7		130.8	43.6
15	Floor 28	72.8	41.6	329.6		140.7	46.9
16	Floor 27	77.6	44.3	379.8		**150.4**	50.1
17	Floor 26	82.2	47.0	433.0		159.8	53.3
18	Floor 25	86.8	49.6	489.4		169.1	56.4
19	Floor 24	91.2	52.1	548.7		178.0	59.3
20	Floor 23	95.6	54.6	611.0		186.8	62.3
21	Floor 22	99.7	57.0	676.1		**195.3**	65.1
22	Floor 21	103.8	59.3	743.9		203.6	67.9
23	Floor 20	107.8	61.6	814.5		211.6	70.5
24	Floor 19	111.6	63.8	887.6		219.5	73.1
25	Floor 18	115.4	65.9	963.3		227.0	75.7
26	Floor 17	119.0	68.0	1041.4		234.4	78.1
27	Floor 16	122.5	70.0	1121.9		241.5	80.5
28	Floor 15	125.9	71.9	1204.7		248.4	82.8
29	Floor 14	129.1	73.8	1289.8		255.0	85.0
30	Floor 13	132.3	75.6	1376.9		261.5	87.1
31	Floor 12	135.3	77.3	1466.1		267.6	89.2
32	Floor 11	138.2	79.0	1557.3		273.6	91.2
33	Floor 10	141.1	80.6	1650.4		279.3	93.1
34	Floor 9	143.7	82.1	1745.3		284.8	94.9
35	Floor 8	146.3	83.6	1842.0		290.0	96.7
36	Floor 7	148.8	85.0	1940.4		295.1	98.3
37	Floor 6	151.1	86.3	2040.3		299.8	99.9
38	Floor 5	153.3	87.6	2141.8		304.4	101.5
39	Floor 4	155.4	88.8	2244.7		308.7	102.9
40	Floor 3	157.4	89.9	2348.9		312.8	104.3
41	Floor 2	159.3	91.0	2454.5		316.6	105.5
42	Floor 1	161.0	92.0	2561.2		320.3	106.8

Results Sheet1 Ready 100%

38.2 Resposta estrutural

44 Comece examinando a resposta estrutural de edifícios sob cargas laterais, focando em três tipos distintos de projetos estruturais: Subsistema de eixo, parede cisalhamento, e parede reprimida cisalhamento. Para cada um, discutiremos sua funcionalidade, vantagens e desvantagens, tabela 38.1.

38.2.1 Subsistema de eixo

45 Esta estrutura centralizada transfere cargas laterais através dos diafragmas do chão, agindo como um cantilever vertical resistindo cisalhamento e momentos fletores. Ele

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

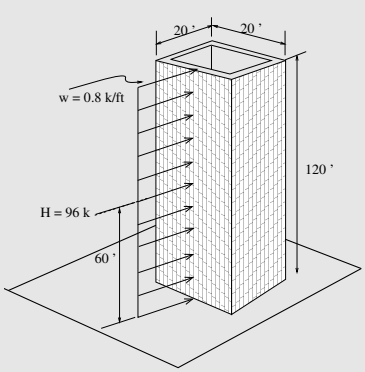
também oferece excelente resistência às cargas torcionais devido à sua localização central, e seu alto rigidez reduz significativamente a deflexão da construção sob cargas laterais.

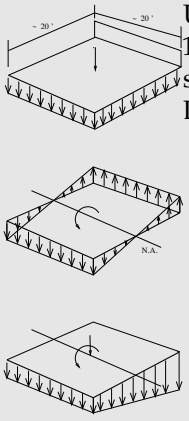
46 Em termos de funcionalidade, abriga circulação vertical (elevadores, escadas) e serviços essenciais. O núcleo central está localizado no centro, aumentando a estabilidade e fornecendo um sistema de resistência à carga central.

47 As principais vantagens incluem alta rigidez, que reduz a deflexão lateral, forte resistência torcional, e a capacidade de combinar funções estruturais e funcionais. No entanto, as principais desvantagens são a complexidade do projeto, já que integrar serviços e elementos estruturais podem ser intrincados, e utilização significativa do espaço, o que pode afetar o layout arquitetônico.

38.2.1.1 Ex 38.4: Subsistema de eixo

Adaptado de Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.





Um eixo concreto armado tem 20 pés quadrados, 120 pés de altura, e com 1 pé de paredes grossas. Está sujeita a uma força lateral de 0,8 k/ft. Determine o tensões.

1. Comparando esta estrutura com a analisada em Sect. 38.2.2.1 A carga vertical total atuando na base agora está aumentada para

$$V = 4(400) = 1,600 \text{ k}$$

2. Como antes, o momento máximo e cisalhamento são 5,760 k.ft e.. 96 k respectivamente.
3. O momento de inércia para uma seção tubular é

$$I = \Sigma \frac{bd^3}{12} = \frac{(20)(20)^3}{12} - \frac{(18)(18)^3}{12} = 4,600 \text{ ft}^4$$

4. A flexão máxima tensões:

$$\sigma_{fl} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{(5,760) \text{ k.ft}(20/2) \text{ ft}}{(4,600) \text{ ft}^4} = \pm 12.5 \text{ ksf} = \pm 87 \text{ psi}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

5. A média cisalhamento tensão

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\text{ k}}{2(20)(1)\text{ ft}^2} = 2.4\text{ ksf} = 17\text{ psi}$$

6. A carga vertical de 1.600 k produz um axial tensão de

$$\sigma_{ax} = \frac{P}{A} = \frac{-(1{,}600)\text{ k}}{(4)(20)(1)\text{ ft}^2} = -20\text{ ksf} = -140\text{ psi}$$

7. O total tensões são assim

$$\sigma = \sigma_{ax} + \sigma_{fl}$$
$$\sigma_1 = -140 + 87 = -53\text{ psi}$$
$$\sigma_2 = -140 - 87 = -227\text{ psi}$$

Assim, não temos nenhuma tração tensões, e aqueles tensões são muito melhores do que os obtidos de uma única parede.

38.2.2 Cisalhamento parede

48 Cargas laterais são transferidas através de diafragmas de piso para elementos de parede vertical, resistindo efetivamente forças cortantes e momentos fletores. Este projeto também fornece substancial rigidez para controlar deflexões laterais.

49 As paredes funcionam principalmente como elementos estruturais, mas podem incorporar funções menores como partições. Colocação flexibilidade permite que a parede seja posicionada no perímetro do prédio ou internamente.

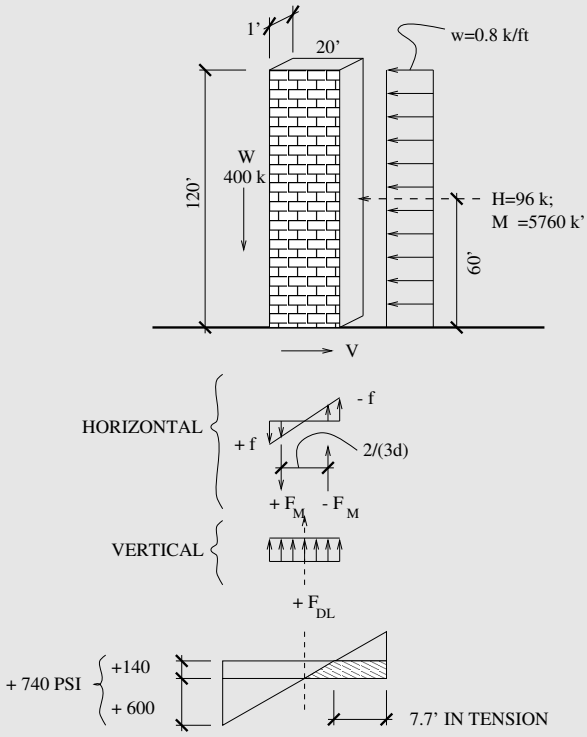
50 Suas vantagens incluem resistência eficiente às forças laterais, simplicidade no projeto e construção em comparação com sistemas mais complexos, e o flexibilidade para ser colocado estrategicamente para otimizar a resistência à carga e a utilização do espaço. No entanto, desvantagens incluem possíveis limitações nas posições de janelas e portas e resistência torcional limitada a menos que seja localizado centralmente.

38.2.2.1 Ex 38.5: Parede de concreto cisalhamento

Adaptado de Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Consideramos uma parede de 20 pés de largura, 1 metro de espessura e 120 pés de altura com uma carga vertical de 400 k atuando sobre ela na base. Como resultado do vento, assumimos uma força horizontal uniforme de 0,8 kip/ft de altura vertical atuando na parede. É necessário calcular a flexão tensões e o cisalhamento tensões na parede para resistir à carga do vento.

1. Máximo força cortante e momento fletor na base

$$V_{max} = wL = (0.8)\ \text{k.ft}(120)\ \text{ft} = 96\ \text{k}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{2} = \frac{(0.8)\ \text{k.ft}(120)^2\ \text{ft}^2}{2} = 5,760\ \text{k.ft} \tag{38.1}$$

2. A excentricidade resultante é

$$e_{\text{Actual}} = \frac{M}{P} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(400)\ \text{k}} = 14.4\ \text{ft}$$

3. A excentricidade crítica é

$$e_{cr} = \frac{L}{6} = \frac{(20)\ \text{ft}}{6} = 3.3\ \text{ft} < e_{\text{Actual}} N.G.$$

Assim haverá tensão na base.

4. O momento de inércia da parede é

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)\ \text{ft}(20)\ \text{ft}^3}{12} = 667\ \text{ft}^4$$

5. A flexão máxima será

$$\sigma_{max} = \pm\frac{Mc}{I} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}(10)\ \text{ft}}{(667)\ \text{ft}^4} = \pm(86.5)\ \text{ksf} = \pm(600)\ \text{psi}$$

6. O cisalhamento médio é

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = 4.8\ \text{ksf} = 33.3\ \text{psi}$$

Um concreto com armadura nominal cisalhamento pode transportar pelo menos 100 psi em cisalhamento, aquelas estrias calculadas cisalhamento são permitidas.

7. Na base da parede, o axial tensões será

$$\sigma = \frac{-(400)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = (20)\ \text{ksf} = \approx -140\ \text{psi}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

8. O máximo tensões será:

$$\sigma_1 = -140 + 600 = 460 \text{ psi} \quad \text{(Tension)}$$
$$\sigma_2 = -140 - 600 = -740 \text{ psi} \quad \text{(Compression)}$$

9. A compressão tensão de 740 psi pode ser facilmente sustentado pelo concreto, quanto à tração tensão de 460 Psi, teria que ser resistido por algum reforço de aço.
10. Dado que esses tensões são *Serviço* tensões e não fatorados, adotamos a abordagem WSD, e usamos um permitido tensão de 20 KSI, que por sua vez será aumentada por 4/3 para carga sísmica e de vento,

$$\sigma_{all} = \frac{4}{3}(20) = 26.7 \text{ ksi}$$

11. A distribuição tensão é linear, compressão em uma extremidade, e tensão no outro. O comprimento da área de tensão é dado por (triângulos semelhantes)

$$\frac{x}{460} = \frac{20}{460+740} \Rightarrow x = \frac{460}{460+740}(20) = 7.7 \text{ ft}$$

12. A força de tração total dentro deste bloco triangular é

$$T = \frac{1}{2}(460) \text{ ksi}(7.7 \times 12) \text{ in} \underbrace{(12) \text{ in}}_{\text{width}} = 250 \text{ k}$$

13. A quantidade total de aço necessário é

$$A_s = \frac{(250) \text{ k}}{(26.7) \text{ ksi}} = 9.4 \text{ in}^2$$

Esta quantidade de reforço deve ser fornecida em ambas as extremidades da parede desde que o Vento ou terremoto podem agir em qualquer direção. Além disso, as fundações devem ser Projetado para resistir a forças de elevação de tração (possivelmente usando pilhas).

38.2.3 Muralha de madeira

51 Cargas laterais são transferidas através de diafragmas de piso para os elementos trussed, combinando a resistência das paredes cisalhamento com a eficiência de treliças em resistir forças axiais. Esta configuração fornece alta rigidez, efetivamente reduzindo deflexões.

52 Otimiza os caminhos de carga através de suportes diagonais, criando múltiplos caminhos eficientes de distribuição de força.

53 A parede de aço combina os benefícios das paredes cisalhamento e treliças, aumentando a eficiência da distribuição de carga e proporcionando melhor desempenho sísmico através de suas capacidades de ductilidade e dissipação de energia. No entanto, o projeto pode ser complexo, exigindo planejamento cuidadoso e detalhamento. Além disso, os elementos de resistência podem impor restrições arquitetônicas, limitando o uso do espaço e projeto arquitectônico flexibilidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

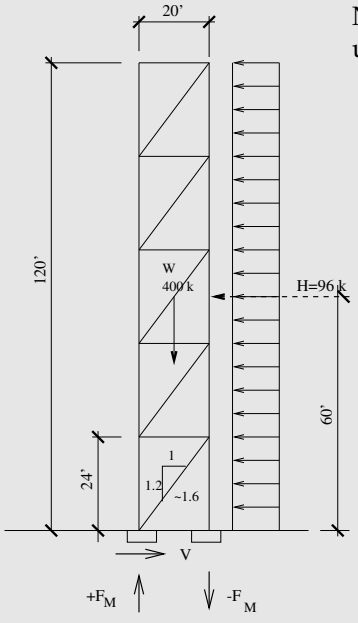
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 38.1: Comparação do subsistema de eixo, parede cisalhamento, e parede reprimida cisalhamento

Característica	Subsistema de Eixo	Muralha	Muralha trussed
Resposta Estrutural	Alta rigidez, excelente resistência torcional, transferência de carga centralizada	Alta rigidez, eficaz cisalhamento e resistência ao momento	Alta rigidez, caminhos de carga eficientes, resistência aumentada cisalhamento e momento
Funcionalidade	Multifuncional (estrutural + serviços)	Principalmente estrutural, alguns particionamentos	Principalmente estrutural com maior distribuição de carga
Vantagens	Alta resistência torcional, multi-uso, estabilidade centralizada	Resistência efetiva à carga, simplicidade, colocação flexibilidade	Aumento da força, distribuição eficiente de carga, melhora do desempenho sísmico
Desvantagens	Complexidade de projeto, uso do espaço	Restrições arquitetônicas, menos resistência torsional	Design complexo e construção, restrições arquitetônicas

38.2.3.1 Ex 38.6: Muralha de madeira

Adaptado de Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



Nós consideramos o mesmo problema analisado anteriormente, mas use um Uma parede de concreto.

1. Usando o momento máximo de 5,760 Kip-ft (Eq. 38.1), podemos calcular a compressão e tensão no pilares para um braço de alavanca de 20 pés.

$$F = \pm \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(20)\ \text{ft}} = \pm 288\ \text{k}$$

2. Se adicionarmos agora o efeito da carga vertical de 400 kip, as forças Seja

$$C = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} - 288 = -488\ \text{k}$$
$$T = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} + 288 = 88\ \text{k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

3. A força na diagonal que deve resistir a uma base de 96 kip é (triângulos semelhantes)

$$\frac{F}{96} = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20}(96) = 154 \text{ k}$$

4. O projeto poderia ser modificado para não ter forças de tração no pilares aumentando o largura da base (atualmente a 20 pés).

38.2.4 Deflexões laterais

Seção adaptada de Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

54 Mesmo em estágios de projeto ou preliminares, é importante estimar as deflexões laterais de edifícios altos pelas seguintes razões

1. Deflexões laterais são muitas vezes limitadas por requisitos de código, por exemplo $\Delta < h/500$ Onde h é a altura da história ou do edifício. Isto É importante porque os ocupantes não devem experimentar movimentos horizontais desconfortáveis.
2. Um edifício que desvia severamente sob forças laterais pode ter problemas de danos associado a vibração (como com deflexões verticais de vigas).
3. Através da avaliação da deflexão, pode-se também ter alguma idéia da carga horizontal relativa transportada pelos vários subsistemas verticais em um edifício (ou seja, Quanto é transportado pelo eixo em comparação com o pórticos). Como todos os sistemas estão conectados, eles devem se mover juntos e através de sua rigidez (deformação por unidade de carga) podemos determinar a contribuição de cada subsistema.

38.2.4.1 Parede curta

55 Em estruturas curtas (como com curto vigas, cisalhamento deflexões, Fig. 38.14 Domina. Por um carga concentrada (De Eq. 23.7)

$$\Delta \approx \frac{1.2Vh}{GA}$$

Onde para concreto e aço $G \approx \frac{2}{5}E$.

38.2.4.2 Muro alto

56 Alternativamente, em um edifício alto deformações flexurais, Fig. 38.15, são predominantes.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

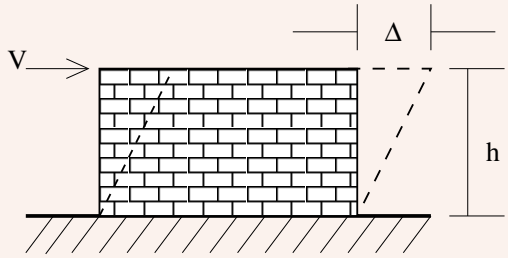


Figura 38.14: Cisalhamento deformação em um edifício curto,(Lin e Stotesbury, 1981)

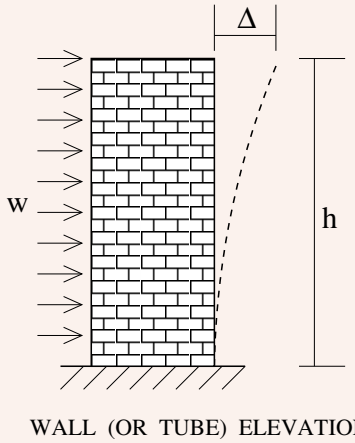


Figura 38.15: Deformação de flexão em um prédio alto, (Lin e Stotesbury, 1981)

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\Delta \approx \frac{wh^4}{8EI}$$

e o momento de inércia $I = \frac{bh^3}{12}$ para seções retangulares. Este é simplesmente o deslocamento na ponta de um cantilevered viga submetido a uma carga uniforme.

38.2.4.3 Paredes e lintel

57 Quando duas paredes finas são conectadas por lintéis (pesados), todo o subsistema pode ser feito para agir como um cantilever suportado pelas fundações e deflexões será pequeno. No entanto, se temos lintéis leves, sua deformação é maior do que as das paredes, Fig. 38.16.

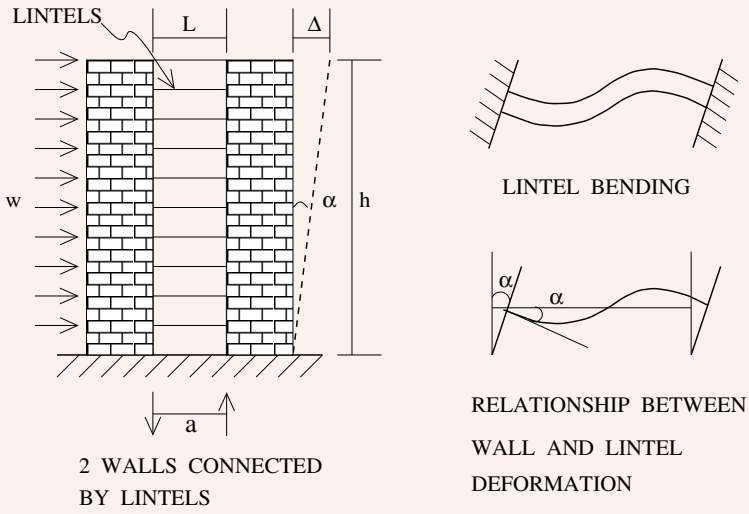


Figura 38.16: Deflexão em uma estrutura de construção composta por duas paredes finas e lintéis, (Lin e Stotesbury, 1981)

58 Neste caso, as deflexões podem ser estimadas a partir de:

$$M_{max} = \frac{wh^2}{2}$$

$$T = C = \frac{M}{a}$$

$$V/\text{Lintel} \approx \frac{T}{\#\text{ of Lintels}}$$

$$\alpha_{\text{wall}} = \alpha_{\text{lintel}} \approx \frac{VL^2}{12EI}$$

e..

$$\delta \approx \alpha h$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

38.2.4.4 Pórticos

59 A deflexão de um rígido pórtico é essencialmente causada por cisalhamento entre histórias que produzem tesouras verticais nas vigas. Pelo método portal podemos estimar essas deformações, Fig. 38.17.

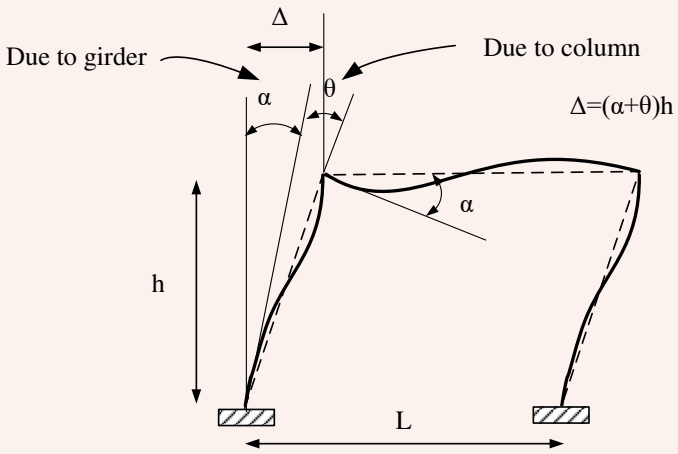


Figura 38.17: Deformação de uma dobrada (Lin e Stotesbury, 1981)

60 A deformação para a primeira história na junta exterior Pode ser aproximado de

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_E} h^3}{12 E I_{col_E}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_E} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_E} = \Delta_{col_E} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_E} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr} \right]$$

61 Para a junta interior:

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_I} h^3}{12 E I_{col_I}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_I} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_I} = \Delta_{col_I} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_I} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_I}} + \frac{L}{I_g dr} \right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde está o subscrito E e.. I se referem ao exterior e interior pilares. O total deslocamento será

$$\Delta_{tot} = n\frac{\Delta_{tot}}{2}$$

Onde n é o número de histórias, e Δ_{tot} é para o interior ou para as juntas exteriores.

62 As duas principais fontes de deflexão lateral são a flexão de pilar em resistência horizontal cisalhamento e vigas em resistência vertical cisalhamento, Fig. 38.18.

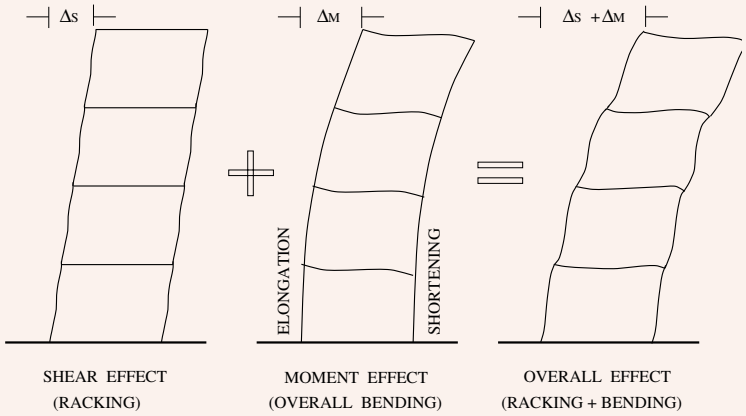


Figura 38.18: Cisalhamento e deflexão flexural de um subsistema rígido pórtico, (Lin e Stotesbury, 1981)

63 Uma carga vertical não simétrica causará deflexão lateral em pórticos, Fig. 38.19.

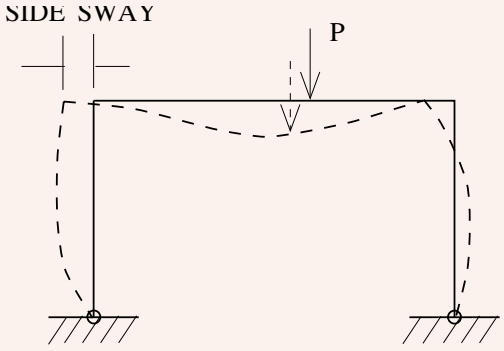


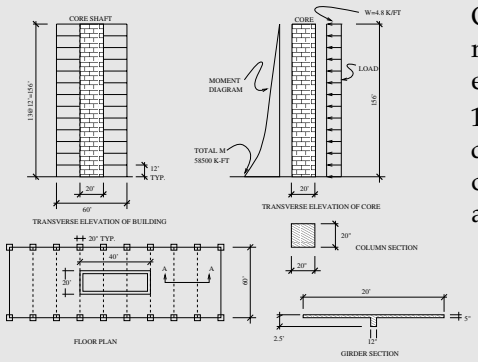
Figura 38.19: Deflexão lateral da carga vertical não simétrica, (Lin e Stotesbury, 1981)

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

38.2.4.4.1 Ex 38.7: Construindo deflexão transversal aproximada

Adaptado de Lin e Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



Os elementos laterais são o eixo central de concreto×40 pés na seção e composta por quatro paredes de 12 polegadas) e o reforçado-concreto protendido pórticos (composto por 12 polegadas×30 em T vigas, $I_{gdr} = 3.64$ ft^4, e 20 polegadas quadrada concreto armado pilares). Consideramos uma carga de vento de 4,8 k/ft na direção transversal e fazemos as seguintes suposições:

1. Pilares são de propriedades seccionais uniformes e altura para todas as histórias.
2. Paredes de eixo são de espessura uniforme para todas as histórias. Nós negligenciamos aberturas de parede.
3. A carga do vento é uniforme sobre a altura do edifício.

A solução é a seguinte:

1. Determine a deformação flexural do topo do eixo (podemos negligenciar cisalhamento deformações desde que o eixo é esbelto:

$$\Delta = \frac{wh^4}{8EI}$$

$$I = \frac{b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3}{12}$$

$$= \frac{(41)(21)^3 - (39)(19)^3}{12} = 9,400 \text{ ft}^4$$

$$E = 3 \times 10^6 \text{ psi} = 432,000 \text{ ksf}$$

$$\Delta = \frac{(4.8) \text{ k.ft}(156)^4 \text{ ft}^4}{8(432,000) \text{ ksf}(9,400) \text{ ft}^4} = 0.087 \text{ ft}$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.087}{156} = \frac{1}{1,800} \checkmark$$

O $\frac{\Delta}{h}$ A relação é muito menor que 1/500, como permitido na maioria dos códigos de construção, e está dentro do índice habitual para edifícios de concreto, que varia entre 1/1.000 e 1/2.500.

Se a espessura da parede for reduzida, e se as aberturas das portas forem consideradas, a deflexão será correspondentemente menor.

O desvio devido ao momento aumenta rapidamente no topo, o valor de 1/1.800 indica apenas o *média* índice de deriva para todo o edifício, enquanto o *História* O índice de deriva pode ser maior, especialmente para o último andar.

CÓPIA PARA REVISÃO

2. Em seguida, consideramos a deflexão do topo do pórtico. Assumindo que cada pórtico toma 1/9 da carga de vento total e cisalhamento, e negligenciando pilar encurtamento, então:

$$\Delta = \frac{V_{col_E} h^2}{12E}\left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr}\right]$$

$$I_{col} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(20/12)(20/12)^3}{12} = 0.64 \text{ ft}^4$$

$$I_{gdr} = 3.64 \text{ ft}^4$$

$$V_{col_I}^{\text{ground}} = \frac{(4.8) \text{ k.ft}(156) \text{ ft}}{(2)(9)} = 41.7 \text{ k/col}$$

$$\Delta = \frac{(41.7) \text{ k}(12)^2}{12(432,000) \text{ ksf}}\left[\frac{(12) \text{ ft}}{(0.64) \text{ ft}^4} + \frac{2(60) \text{ ft}}{(3.46) \text{ ft}^4}\right]$$

$$= 0.00116(18.8 + 34.7) = 0.062 \text{ ft}$$

3. Uma vez que a deriva da história varia com o cisalhamento na história, que diminui linearmente para o topo, a deriva média será 0.062/2 = 0.31 ft por história e a deflexão no topo do prédio é aproximadamente

$$\Delta = (13)(0.031) = 0.40\text{ft}$$

O que indica uma relação de deriva

$$\text{Drift Ratio for Building} = \frac{(0.4) \text{ ft}}{(156) \text{ ft}} = \frac{1}{400}$$

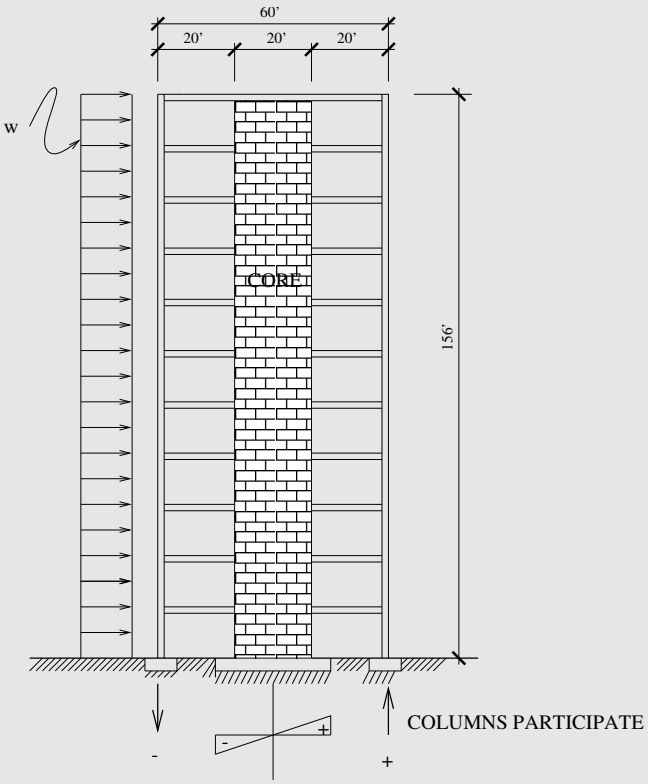
$$\text{Drift Ratio for Ground Floor} = \frac{(0.062) \text{ ft}}{(12) \text{ ft}} = \frac{1}{194}$$

4. Comparando o desvio de pórtico 0.40 ft com a deflexão do eixo de 0.087 ft, vê-se que o pórtico é cerca de cinco vezes mais flexível do que o eixo. Além disso, o pórtico não seria rígido o suficiente para carregar toda a carga lateral por si mesmo. Proporcionando a carga lateral para as rigidezes relativas, o pórtico carregaria cerca de 1/6 da carga, e os restantes 5/6 serão transportados pelo eixo.

   Aumentar o tamanho pilar endurecerá o pórtico, mas para ser realmente eficaz, a viga rigidez também precisará ser aumentada, já que as vigas contribuem com cerca de 2/3 da deflexão. Então o pórticos pode ser feito para carregar uma maior proporção da carga. Note que as formas desviadas do eixo e do pórticos são bem diferentes, de modo que a comparação acima simples de deflexões superiores não é uma avaliação precisa.

   Finalmente, não estudamos o efeito do eixo endurecido pelo exterior pilares, que são rigidamente conectados às paredes do eixo e atuarão com o eixo como uma unidade.

CÓPIA PARA REVISÃO



Isso seria bastante eficaz, pois os diafragmas horizontais do chão vão segurá-los e forçá-los a se desviarem juntos.

5. Em resumo, este parece ser um layout bastante eficiente, análise adicional iria refinar e otimizá-lo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Melencolia de Albrecht Dürer I *De novo (1514)*

Melencolia serve como uma metáfora para análise aproximada, onde intuição, estimativa e raciocínio geométrico desempenham um papel crucial na resolução de problemas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 39

Desenhos preliminares

Abstract

Através deste capítulo, fazemos uma pausa e aplicamos alguns dos conceitos (às vezes muito simples) anteriormente abordados para realizar a análise/design parcial preliminar de algumas estruturas icônicas.

Cada um desses estudos de caso foi tirado da literatura disponível, e adaptado (ajustando notação) para as necessidades deste livro.

39.1 Ex 39.1: Aeroporto Dulles 1473
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel 1480
39.3 Ex 39.3: Magazini Generali 1488
39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington . 1492
39.5 Ex 39.5: Desenho de um arco de duas voltas 1499
39.6 Ex 39.6: A temperatura muda em um arco 1507
39.7 Ex 39.7: Arco parabólico com variação secante de I 1510

39.1 Ex 39.1: Aeroporto Dulles

Adaptado de Howard, 1966 Structure: An Architect's Approach e.. Whitehead, 2020 *"Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction"*.

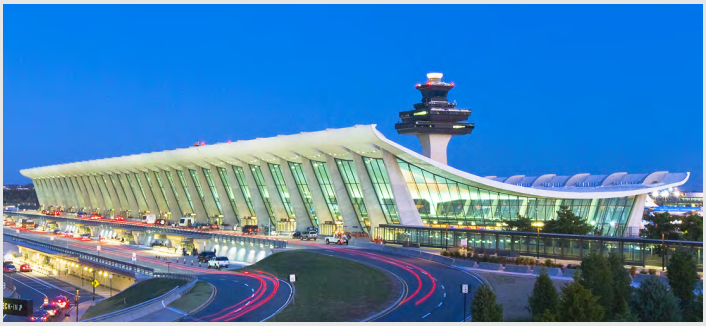
Esta icônica estrutura americana, projetada por Eero Saarinen (que também projetou o Arco St Louis Gateway quase ao mesmo tempo), combina grande estética com funcionalidade estrutural. Preliminar

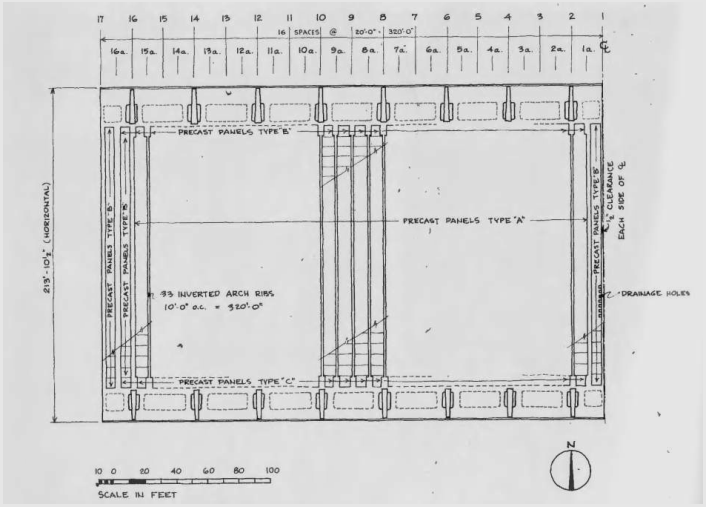
CÓPIA PARA REVISÃO

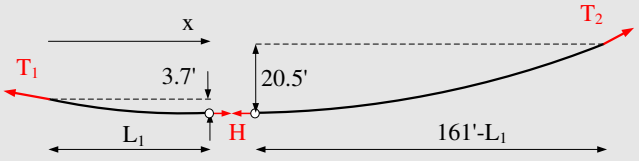
Descrição

A estrutura tem 16 pilares em cada lado da sala aberta, espaçada a 12 metros de distância, inclinando-se para fora com grandes bases para ajudar a resistir contra o impulso e o telhado. Diferentes alturas pilar criaram um telhado curvo pendurado que cobriu toda a área de 8 361 metros quadrados[2]), com uma geometria definida pela curva catenária de cabos suspensos uniformemente carregados.

Os cabos suspensos do teto foram suspensos entre as duas curvas ascendentes, moldadas no lugar, borda de concreto lajes que se ligavam ao pilares. A cada 3 metros de comprimento ao longo do perímetro da borda laje, dois pares de 2cm (2,54 cm) de cabos de aço foram suspensos 160 pés (48,8 m) através da extensão para a outra borda viga. Em seguida, 1.800 painéis pré-moldados leves com pequenos ganchos de metal nos lados foram colocados um após o outro sobre os cabos. Os cabos foram pré-tensionados à geometria funicular exata, então o telhado foi pesado por sacos de areia até que ambos os cabos (na lacuna entre os painéis) e a cobertura laje nos painéis poderiam ser envoltos em um concreto derramado leve. Não havia nenhuma cofragem necessária abaixo do telhado - ingenuamente, os painéis eram a estrutura ea cofradura para a cobertura laje.







CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Plano parcial do telhado

Tensão

Dada a pequena queda, nós podemos *Assuma* Que temos uma forma parabólica. No ponto da descida máxima (ainda a ser determinado), a tensão no cabo é simplesmente igual a h.. Considerando os diagramas livres do corpo esquerdo e direito, e tomando momentos com respeito aos suportes:

$$3.7H = w\frac{L_1^2}{2}$$
$$20.5H = w\frac{(161 - L_1)^2}{20.5}$$

Equacionando, nós obtemos $L_1 = 48.0'$ e.. $H = 311w$

Nos suportes os ângulos são

$$\alpha = \arctan\frac{V}{H} \quad = \arctan\frac{48w}{311w} \quad = 8.77^\circ$$
$$\beta = \arctan\frac{V}{H} \quad = \arctan\frac{(161-48)w}{311w} \quad = 19.97^\circ$$

As tensões esquerda e direita seriam assim

$$T_1 = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{311w}{\cos 8.77^\circ} \quad = 315w$$
$$T_2 = \frac{H}{\cos\beta} = \frac{311w}{\cos 19.97^\circ} \quad = 331w$$

O peso w é 0,33 kip/pé de extensão. Assim, a tensão máxima será $T_{max} = (331)(0.33) = 109$ Kips. Durante a construção, esta seria aproximadamente a carga transportada pelos dois fios de ponte de 1 em diâmetro, que são bons para 122 kips cada, dando um fator de segurança de 244/109, ou 2,25.

CÓPIA PARA REVISÃO

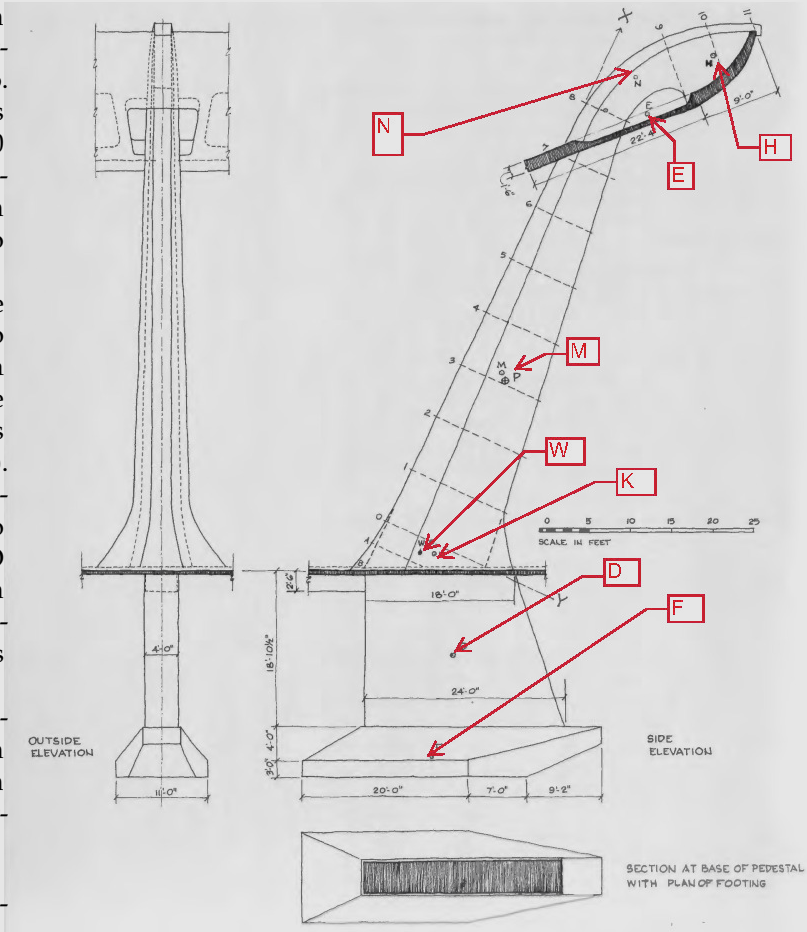
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pesos e Centroids

Nós não vamos calcular os momentos e tesouras na borda viga, porque eles não afetam a imagem geral do principal pórtico que estamos analisando. No entanto, suas proporções para o lado norte, vão de 40 pés; profundidade 32 pés, medida paralela à linha de força principal) qualifica-los como *Profundidade vigas*.

Os componentes horizontais e verticais do teto suspenso são conhecidos agora (mas devem ser multiplicados por 4 porque o pórticos são 40 pés o.c., as costelas apenas 10 pés o .c). Precisamos dos pesos e centróides da borda viga e pórtico para completar a imagem[a].. O material é concreto de pedra pesando 0,15 kip/ft^3.. As dimensões principais são dadas abaixo.

Nós não vamos calcular os momentos e tesouras na borda viga, porque eles não afetam a imagem geral do principal pórtico que estamos analisando.



[a] A seguir, relato os cálculos realizados pelo engenheiro estrutural nos anos 60, hoje em dia, o programa CAD facilmente executaria essas tarefas. No entanto, seguindo o cálculo é uma boa revisão da integração numérica e estática básica.

No entanto, suas proporções para o lado norte, vão de 40 pés; profundidade 32 pés, medida paralela à linha de força principal) qualifica-los como *Profundidade vigas*.. Os componentes horizontais e verticais do teto suspenso são conhecidos agora (mas devem ser multiplicados por 4 porque os pórticos são 40 pés o. C., as costelas apenas 10 pés o.c.). Precisamos dos pesos e centróides da borda viga e pórtico para completar a imagem. O material é concreto de pedra pesando 0,15 kip/ft^3.. As dimensões principais são dadas abaixo. A borda viga:

$$(22.3)(1.5) + (9.0)(1.3) = 45.1 \text{ ft}^2 \times 37 \text{ ft} = 1,670 \text{ ft}^3$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Subtrair:

Hole around column	(15)(5)(1.5)	= – 112
Recess	(28)(14)(1.0)	= – 392
Total		= – 504

Peso total

$$1,670 - 504 = 1,166 \text{ ft}^3 \times 0.15 \text{ kip/ft}^3 = 175 \text{ kip}$$

Seu centroide é estimado no ponto E.. O pórtico, ou pilar, é mais tedioso. Pode ser dividido em cinco partes: o eixo principal, mais ou menos uma pirâmide truncada; Uma cunha no fundo; uma saia, ou flare, no fundo do pescoço; e a cabeça. O volume do eixo principal pode ser encontrado com precisão pela fórmula prismoidal

$$\frac{1}{4}h(A_0 + 4A_4 + A_8)$$

que neste caso dá 2.220 pés^3.. Mas também precisamos da localização do centróide.

Usando a primeira regra de Simpson. Regra de Simpson é um método numérico que aproxima o valor de uma integral definida usando funções quadráticas.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Assim dividimos o comprimento do eixo em oito partes iguais por nove Seções 7 pés o.c. As áreas das seções 0, 4 e 8 são calculadas, as outras interpoladas. O centróide está localizado com referência aos eixos X e Y. Como os centróides das seções estão aproximadamente em linha reta, não é necessário calcular a distância Y.

Seção (1)	Área ft^2 (2)	Simpson Multiplicador (3)	$f(Vol)$ (2)(3) (4)	Um momento Braço (5)	$f(M)_y$ (4)(5) (6)
0	68.7	1	68.7	0	0
1	60.6	4	242.4	1	242.4
2	52.7	2	105.4	2	210.8
3	45.2	4	180.8	3	542.4
4	38.3	2	76.6	4	306.4
5	32.1	4	128.4	5	642.0
6	26.5	2	53.0	6	318.0
7	21.3	4	85.2	7	596.4
8	16.4	1	16.4	8	131.2
Σ			956.2		2,989.6

Para um espaçamento s de 7 pés, o volume é

$$\text{Volume} = f(vol) \times \frac{s}{3} = 956.9 \text{ ft}^2 \times \frac{7}{3} \text{ ft} = 2,210 \text{ ft}^3$$

O centróide estará assim em

$$\overline{X} = \frac{(s^2/3)\Sigma f(M)_y}{(s)\Sigma f(vol)} = 7.0 \times \frac{2,989.6}{956.9} = 21.9 \text{ ft}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O volume da cunha na parte inferior é encontrado calculando a área da seção A e usando a fórmula prismoidal.

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_A + A_B) = \frac{6.0}{6}(68.7 + 4(42.0) + 0) = 237 \text{ ft}^3$$

E o centróide está no ponto W.

O volume da saia é aproximadamente encontrado multiplicando a área de um triângulo 8,5 pés de altura, 2,5 pés de base por um perímetro de 48,0 pés. O volume é 510 pés ^{3} e o centróide em K

No to, o volume do pescoço é aproximadamente a área da seção 8 multiplicada por um arco de comprimento de 10,7 dando 176 pés^3 e um centróide em N.. A cabeça é calculada das áreas de seções $A_9 = 22.8$; $A_{10} = 18.7$; $A_{11} = 3{,}2$ e a fórmula prismoidal dará

$$\frac{10.8}{6}(22.8 + 4(18.7) + 3.2) = 182 \text{ ft}^3$$

O centróide está estimado em H

Combinando estes volumes para encontrar o total para o pórtico até o nível principal,

		Vol ft^3	$\overline{X}$	Vol $\times\overline{X}$ ft^4	$\overline{Y}$	Vol $\times\overline{Y}$ ft^4
Saia	K	510	-1.0	-510	6.8	3,470
Wedge	W	237	-1.8	-427	5.2	1,234
Eixo Principal	M	2,210	21.9	48,400	4.8	10,670
Pescoço	N	176	61.2	10,800	4.3	760
Cabeça	H	182	67.5	12,280	11.5	2,090
		3,315		70,543		18,224

Por isso,

$$\begin{aligned} \text{Total weight} &= 3,315 \times 0.5 = 497 \text{ k} \\ \overline{X}\text{for whole frame} &= \frac{70,543}{3,315} = 21.3 \text{ ft} \\ \overline{Y}\text{for whole frame} &= \frac{18,224}{3,315} = 5.51 \text{ ft} \end{aligned}$$

O centróide está em P.. O peso do pedestal é

$$\frac{18+24}{2}(19.0)(4.0) = 1,600 \text{ ft}^3 \times (0.15) \text{ k/ ft}^3 = 240 \text{ k}$$

E o centróide está em D.

Finalmente, o peso do pé é de aproximadamente 225 kips e seu centróide está em F.

Resumo das Forças

As forças e seus locais são mostrados aqui. Desde então $\Sigma F_y = 0$, a reação vertical do xisto deve ser 1286 kips, que está localizado no centroide da área da base. Assumindo que a reação horizontal do xisto atua no centroide da elevação final projetada da base, o momento em que os braços podem ser medidos e a magnitude desta reação horizontal calculada a partir da condição $\Sigma M_O = 0$ com O o ponto de intersecção da linha central da biela e a linha de ação da reação vertical. (Na verdade, as

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

linhas de ação das reações verticais e horizontais podem não agir através dos pontos que assumimos. Se o resultado da reação vertical se mover para a esquerda, a reação horizontal será menor, assim como a força na biela. O que a figura mostra, portanto, é apenas uma primeira aproximação. A direção e a natureza das forças estão corretas. suas linhas de ação e magnitudes podem ser um pouco diferentes.)

Elemento	Força (Kips)	Momento braço (pé)	M (k-ft)
Footing F	225	2.0	450
Pedestal D	240	4.8	1,152
Pylon P	497	10.8	5,362
Borda viga E	175	28.0	4,900
Teto vertical L_V	149	13.2	1,966
Sumário	$R_V = 1,286$		13,830
Teto horizontal L_H	410	49.5	-19,295

O momento da reação horizontal R_H Deve equilibrar isso

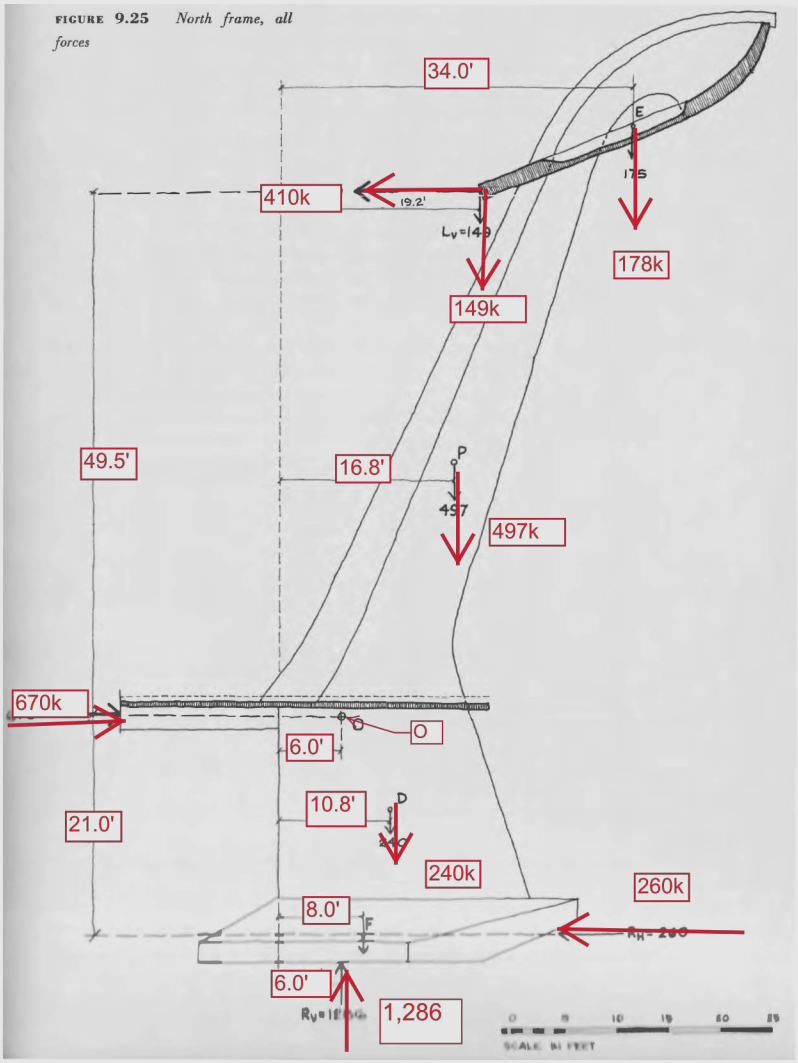
$$21R_H = 19,295 - 13,830 = 5,465 \Rightarrow R_H = 260 \text{ k}$$

E desde então.. $\Sigma F_H = 0$, o suporte deve fornecer uma força horizontal de $260 + 410 = 670$ kips.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Observamos que, apesar da inclinação íngremes dos pilares (não só por razões estéticas), isso não foi suficiente para permitir que o peso dos pilares equilibrasse a tração dos cabos e eliminasse o momento em sua base.



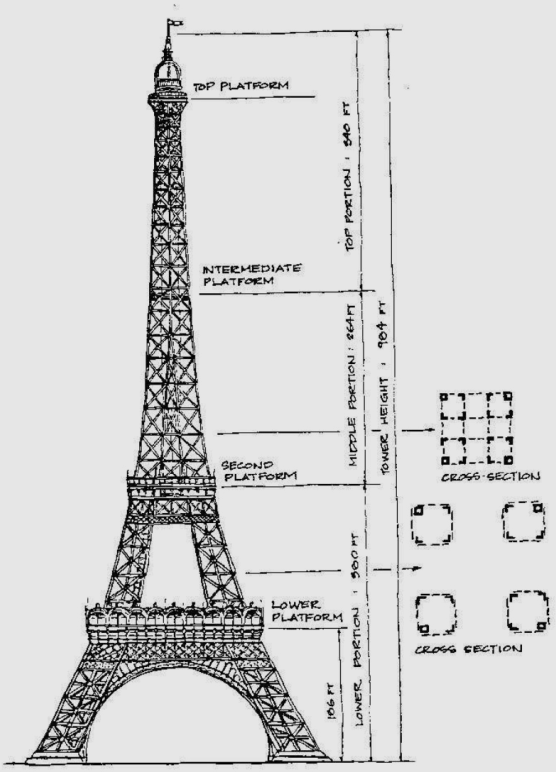
39.2 Ex 39.2: Torre Eiffel

A seção seguinte é reproduzida de Billington, 1983 Structural Studies.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Materiais, & Geometria



A torre foi construída com ferro forjado, menos caro que aço, e Eiffel tinha mais experiência com este material. A estrutura é essencialmente uma torre, submetida à gravidade e carga de vento. É uma estrutura relativamente "leve", então a carga morta é pequena em comparação com a carga do vento. Para evitar virar $\frac{M^{\text{gravity}}}{M^{\text{wind}}}$ Tinha que ser muito maior do que 1.
Isso pode ser alcançado por:

1. Aumentar o peso próprio (como no monumento de Washington)
2. Aumente a largura da base
3. Projeto de suporte para resistir à tensão.
4. Pós-tensão no suporte.

A torre tem 984 pés de altura, e 328 pés de largura na base. A grande base era essencial para Fornecer estabilidade adequada na presença de carga do vento.
Podemos supor que a forma da torre é parabólica. Se nós pegarmos o x eixo para estar ao longo do Eixo vertical de simetria e y A metade da largura, então sabemos que em $x = 984$ a (meia) largura $y = 0$ e em.. $x = 0$ A metade da largura é 328/2 = 164, assim a equação do Metade da largura é dada por

$$y = \underbrace{164\left(\frac{984-x}{984}\right)^2}_{av(x)^2}$$

Lembramos do cálculo que para $y = v(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}ax^2 = 2ax$$

Assim para o nosso problema

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{2(164)\frac{984-x}{984}}_{\frac{dy}{dv}}\underbrace{\left(-\frac{1}{984}\right)}_{\frac{dv}{dx}}$$
$$= \frac{984-x}{2,952}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Também

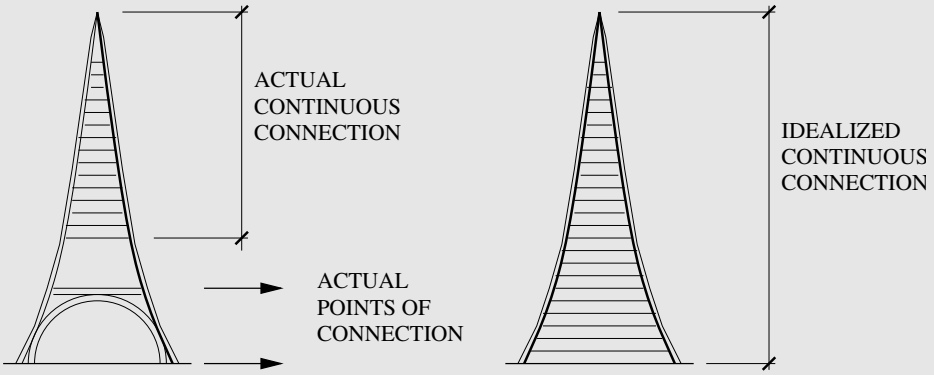
$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

Onde β é o ângulo medido a partir do x eixo para a tangente à curva.

Agora podemos tabular a largura e inclinação em várias elevações

			Largura			
Localização	Altura	Largura/2	Estimado	Real	$\frac{dy}{dx}$	β
Suporte	0	164	328		.333	18.4^o
Primeira plataforma	186	108	216	240	.270	15.1^o
Segunda plataforma	380	62	123	110	.205	11.6^o
Plataforma intermediária	644	20	40		.115	6.6^o
Plataforma de topo	906	1	2		.0264	1.5^o
Topo	984	0	0		0.000	0^o

A torre é apoiada por quatro suportes inclinados, cada um com uma seção transversal de 800 in^2. Uma idealização da torre é mostrada abaixo

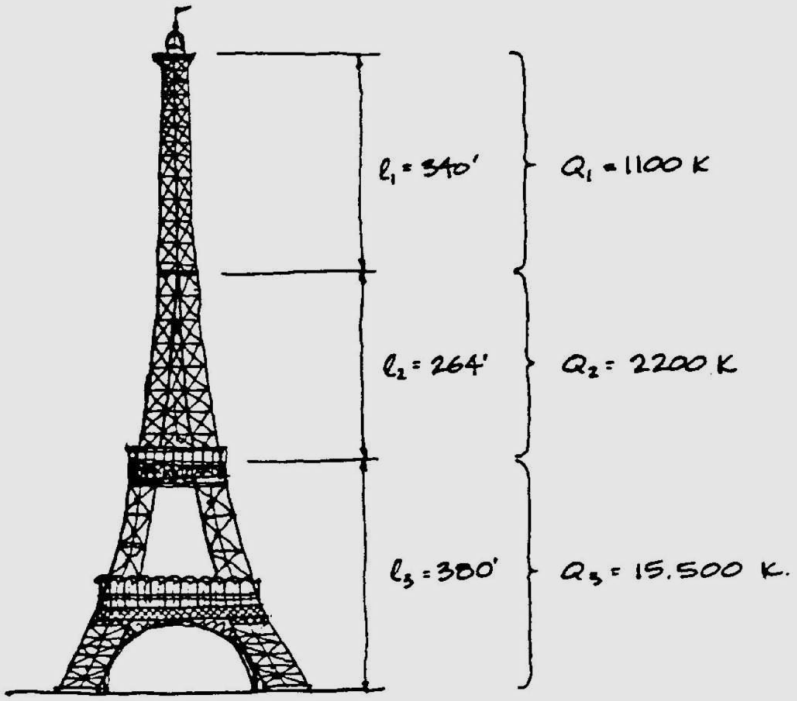


CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Carregar

O peso total da torre é 18,800 k. A carga morta não está uniformemente distribuída, e é aproximada como segue



Localização	Altura	Peso Morto
Segunda plataforma em terra	380 ft	15,500 k
Segunda plataforma intermediária	264 ft	2,200 k
plataforma intermediária - topo	340 ft	1,100 k
Total	984 ft	18,800 k

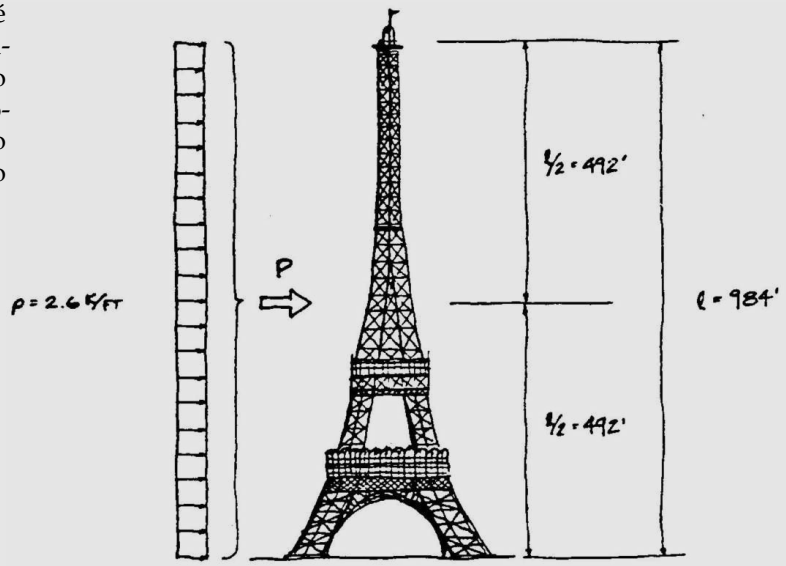
Da largura real das duas plataformas inferiores podemos estimar as cargas vivas (o Plataformas intermediárias e de topo teriam LL insignificante em comparação:

1a plataforma:	$(50)\ \text{psf}(240)^2\ \text{ft}^2 \frac{kip}{(1{,}000)\ \text{lbs}}$	2,880 k
Segunda plataforma:	$(50)\ \text{psf}(110)^2\ \text{ft}^2 \frac{\text{k}}{(1{,}000)\ \text{lbs}}$	600 k
Total:		3,480 k

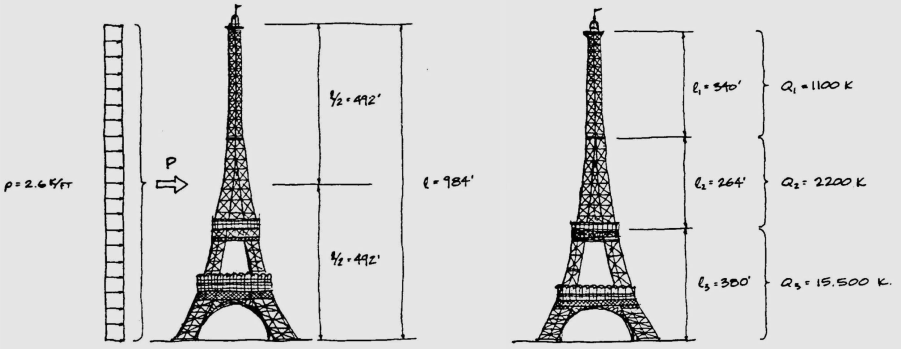
Por isso a carga vertical total é $P_{\text{vert}} = DL + LL = 18{,}800 + 3{,}480 = 22{,}280$ k.

CÓPIA PARA REVISÃO

A pressão do vento também é conhecida por ter uma distribuição parabólica (máximo no topo), o A área transversal sobre a qual o vento está atuando também é parabólica (máximo na base).



Assim, simplificaremos nossa análise considerando um *equivalente* Força do vento obtida de a *constante* Pressão do vento (força/comprimento) e *constante seção transversal* Pressupõe-se que a pressão seja de 2,6 k/ft, assim a força lateral do vento é

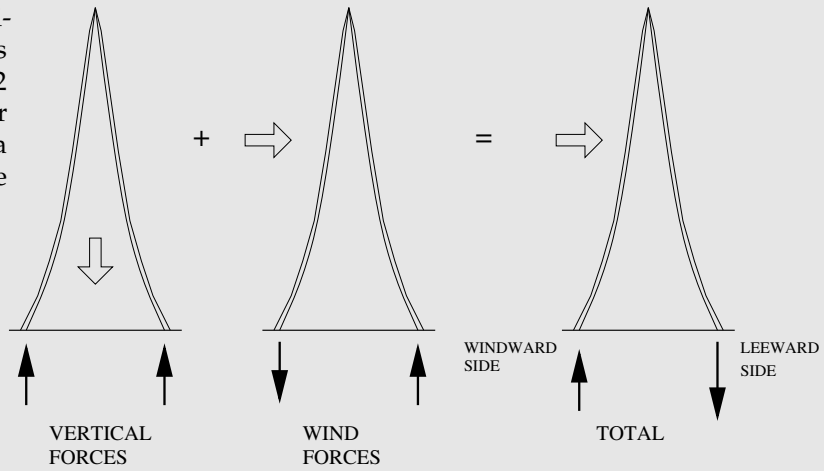


$$P_{\text{lat}} = (2.6)\ \text{k/ft}(984)\ \text{ft} = 2,560\ \text{k} \ \text{ acting at } \frac{984}{2} = 492\ \text{ft}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Reações

Simplificando a estrutura tridimensional com 4 suportes em uma bidimensional com 2 Suporta, as reações podem ser facilmente determinadas para esta estrutura estaticamente determinada.



Gravidade Carregar

$$P_{\text{vert}} = 22,280 \downarrow$$
$$R_{\text{vert}}^{\text{grav}} = \frac{22,280}{2} = 11,140 \text{ k} \uparrow$$

Lateral Carregar

Momento Lateral (temos essencialmente um cantiliver viga sujeito a uma carga uniforme). O momento à distância x do apoio ao longo da cantilevered viga submetido a um uniforme pressão p é dado por

$$M_{\text{lat}} = \underbrace{p(L-x)}_{\text{Force}} \underbrace{\frac{L-x}{2}}_{\text{Moment arm}} = p\frac{(L-x)^2}{2}$$

Assim, o momento lateral causado pelo vento é parabólico. Na base ($x = 0$), o momento máximo é igual a

$$M_{\text{lat}} = p\frac{(L-x)^2}{2} = (2.6)\ \text{k/ft}\frac{(984-0)^2}{2}\ \text{ft}^2 = 1,260,000\ \text{k.ft}$$

Observamos que a forma do diagrama de momento também é parabólica, assim como a própria torre. Isso não é acidental, pois quase ótimas estruturas têm uma forma que se aproxima seu diagrama de momento (como a profundidade variável de pontes contínuas de longo alcance).

Para determinar o resultado esforços internos causado pelo momento lateral (vento), e já que temos dois suportes (um sob tensão e outro sob compressão) usamos

$$R_{\text{vert}}^{\text{wind}} = \pm\frac{M}{d} = \frac{1,260,000\ \text{k.ft}}{328\ \text{ft}} = \pm\ 3,850 \text{ k} \uparrow\downarrow$$

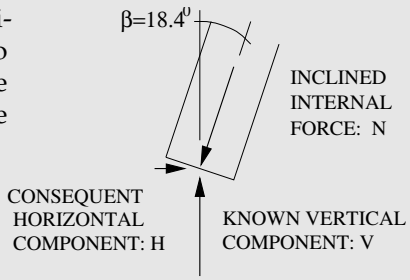
CÓPIA PARA REVISÃO

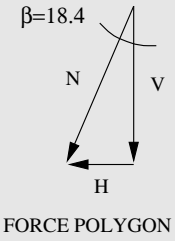
Forças Laterais para ser resistido por cada um dos dois pares. Por simetria, o lateral A força será igualmente dividida entre os dois pares de suportes e será igual a

$$R_{\text{lat}}^{\text{wind}} = \frac{(2,560)\text{ k}}{2} = 1,280\text{ k} \leftarrow$$

Esforços internos

Esforços internos são determinados primeiro na base. **Carga de gravidade** são considerados primeiro, lembre-se que esses são causados pela carga morta e Carregar ao vivo





FORCE POLYGON

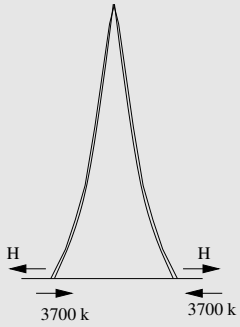
$$\cos\beta = \frac{V}{N} \Rightarrow \qquad N = \frac{V}{\cos\beta}$$

$$N = \frac{11,140\text{ k}}{\cos 18.4^o} \qquad = 11,730\text{ k}$$

$$\tan\beta = \frac{H}{V} \Rightarrow \qquad H = V\tan\beta$$

$$H = 11,140\text{ k}(\tan 18.4^o) \qquad = 3,700\text{ k}$$

As forças horizontais que devem ser resistidas pelas fundações



Como a carga vertical diminui com a altura, o força axial também diminuirá com a estatura.

Na segunda plataforma, a carga vertical total é $Q = 1,100 + 2,200 = 3,300$ k E naquela altura O ângulo é.. 11.6^o assim, o força axial (por par de pilares) será

$$N_{\text{vert}} = \frac{\frac{3,300\text{ k}}{2}}{\cos 11.6^o} = 1,685\text{ k}$$

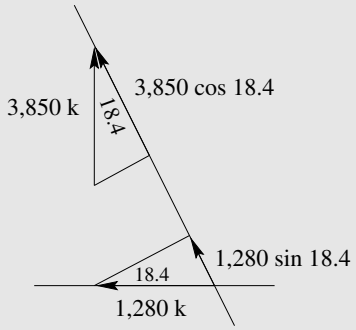
$$H_{\text{vert}} = \frac{3,300\text{ k}}{2}(\tan 11.6^o) = 339\text{ k}$$

Note que isso é cerca de sete vezes menor do que o força axial na base, que para um dado axial força, levaria o designer a reduzir (ou diminuir) a seção transversal.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A força horizontal será resistida pelo forças axiais na segunda plataforma em si. **Carga do Vento:** Agora determinamos em cada par de apoio as forças verticais e horizontais causadas pela carga do vento, o próximo passo é determinar seus componentes axiais ao longo da perna inclinada,



$$N_c = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta - R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = -(3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) - (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= -4,050\ \text{k Leeward}$$
$$N_t = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta + R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = (3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) + (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= 4,050\ \text{kip Winward}$$

Interno Tensões

As forças totais causadas por ambas as forças laterais e de gravidade podem agora ser determinadas:

$$N_L^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{-(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -15,780\text{kip Leeward side}$$
$$N_W^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{+(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -7,630\text{kip Winward side}$$

Observamos que mesmo sob carga de vento, o lado do vento ainda está sob compressão. Na idealização da geometria da torre, a área de cada par do simplificado é $1,600\ \text{in}^2$.. e assim o máximo tensões será determinado a partir de

$$\sigma_{comp} = \frac{N_L^T}{A} = \frac{-15,780\ \text{k}}{1,600\ \text{in}^2} = -9.9\ \text{ksi}$$

A força do ferro forjado é 45 ksi, daí o fator de segurança é

$$\text{Safety Factor} = \frac{\text{ultimate stress}}{\text{actual stress}} = \frac{45\ \text{ksi}}{9.9\ \text{ksi}} = 4.5$$

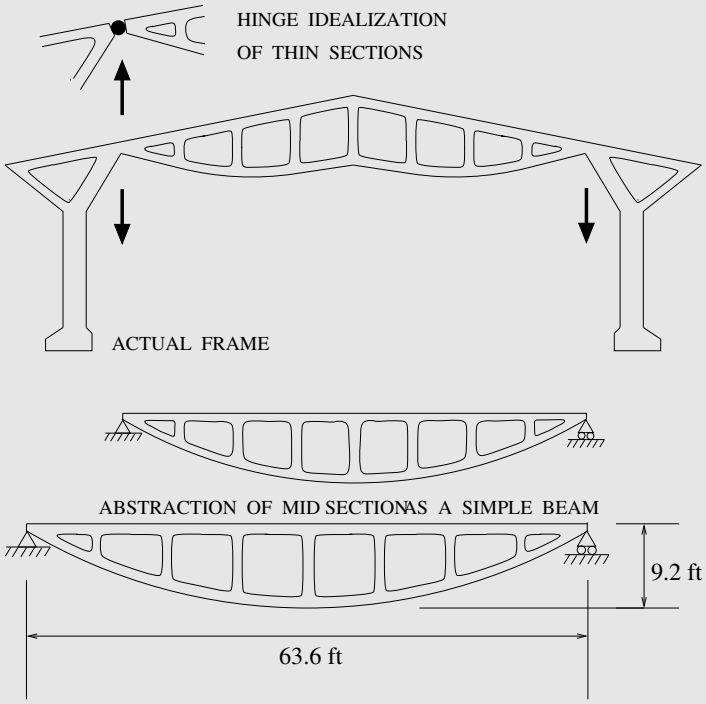
CÓPIA PARA REVISÃO

39.3 Ex 39.3: Magazini Generali

A seção seguinte é reproduzida de Billington, 1983 Structural Studies.

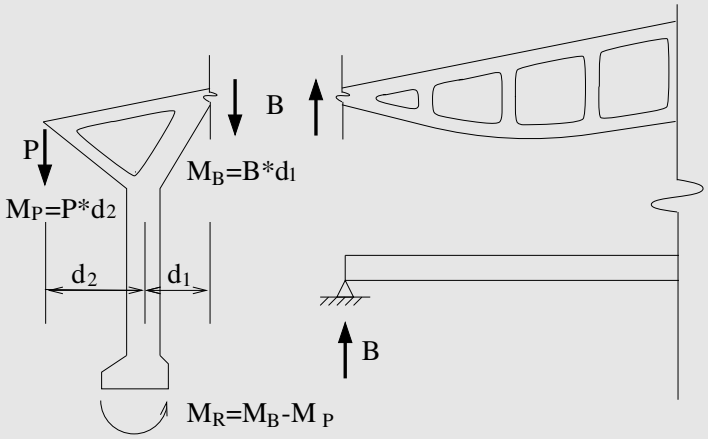
Geometria

Esta casa sotrage, construída por Maillart em Chiasso em 1924, fornece um bom exemplo do mariage entre estética e engenharia. A característica mais estranha dos Magazini Generali não é a estrutura em si, mas sim a forma de seu suporte interno pórticos.



O pórtico pode ser idealizado como um biapoiado viga pendurado em dois cantilever pilar apoia. Considerando que a viga em si é uma simples idealização estrutural, a inclinação é projetado de tal forma que minimize o momento líquido a ser transmitido ao Suporta (fundações).

CÓPIA PARA REVISÃO



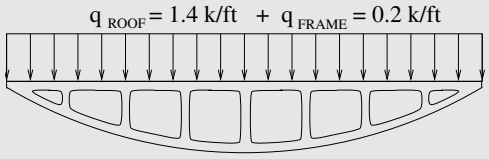
Carregar

A carga aplicada no pórtico é dos pesos do telhado laje, e o próprio pórtico. Dado o espaço entre adjacentes pórticos é 14.7 pés, e que a carga do telhado é 98 psf, e que o peso total pórtico é 13,6 kips, a carga uniforme total torna-se.

$$q_{roof} = (98)\ \text{psf}(14.7)\ \text{ft} = 1.4\ \text{k/ft}$$

$$q_{frame} = \frac{(13.6)\ \text{k}}{(63.6)\ \text{ft}} = 0.2\ \text{k/ft}$$

$$q_{total} = 1.4 + 0.2 = 1.6\ \text{k/ft}$$



q_{ROOF} = 1.4 k/ft
+ q_{FRAME} = 0.2 k/ft
q_{TOTAL} = 1.6 k/ft

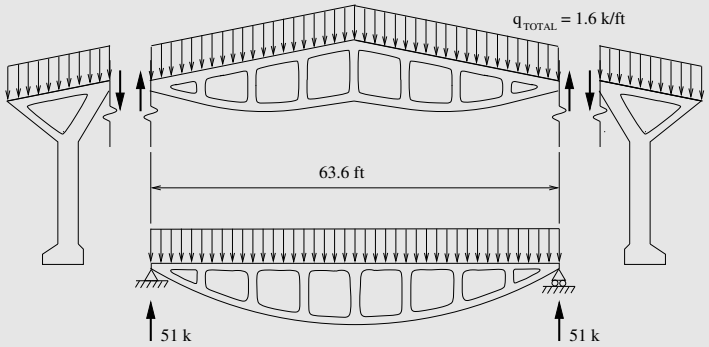
Reações

Reações para a viga são determinadas primeiro tirando vantagem da simetria.

$$W = (1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft} = 102\ \text{k}$$

$$R = \frac{W}{2} = \frac{102}{2} = 51\ \text{k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

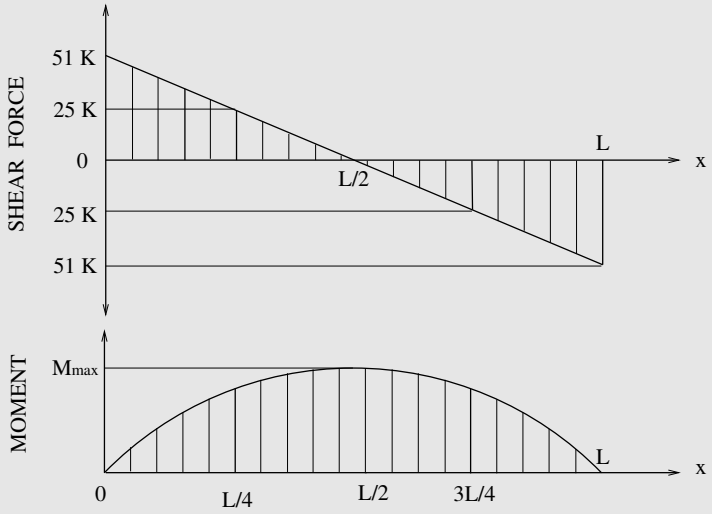


Notamos que essas reações são fornecidas pelo interno forças cortantes.

Forças

Os esforços internos são principalmente os cisalhamento e momentos. Isso pode ser facilmente determinado para A biapoiado uniformemente carregada viga. O cisalhamento varia linearmente de 51 kip para -51 kip com zero no centro, e o diagrama do momento é parabólico com o O momento máximo no centro é igual a:

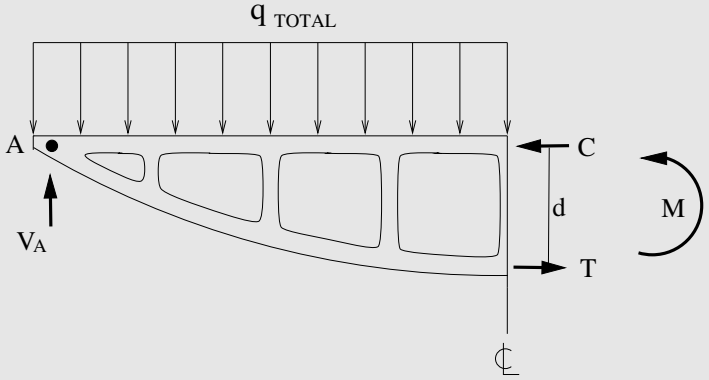
$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft}^2}{8} = 808\ \text{k.ft}$$



O momento induzido externamente no midspan deve ser resistido por um igual e oposto Momento interno. Isso pode ser conseguido através de uma combinação de força de compressão no Fibras superiores, e tração na parte inferior. Assim, a rede força axial é zero, no entanto lá é um casal interno líquido.

CÓPIA PARA REVISÃO

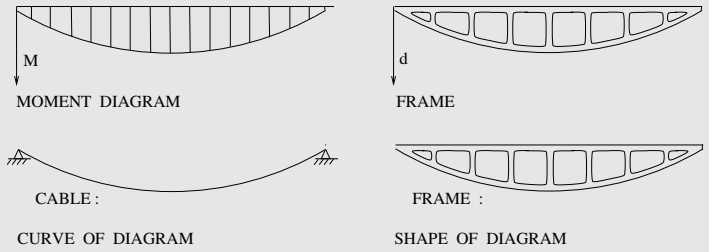
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



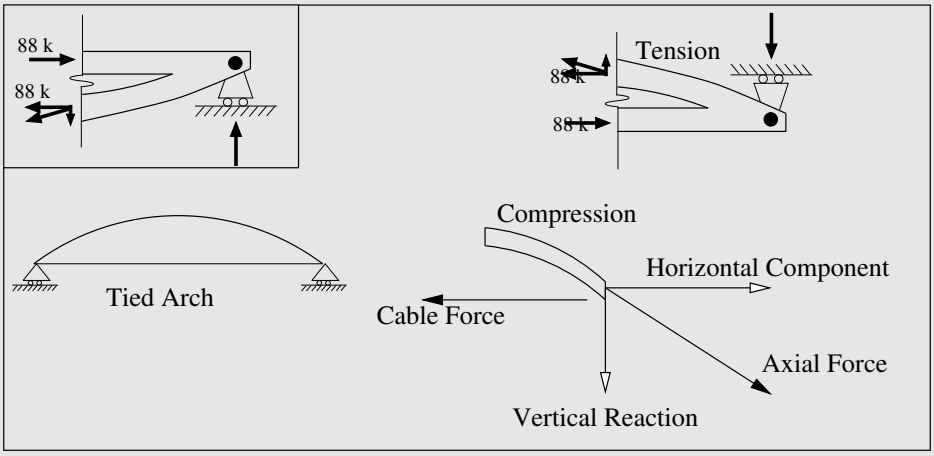
$$M_{ext} = Cd \Rightarrow C = \frac{M_{ext}}{d}$$

$$T = C = \frac{(808)\ \text{k.ft}}{(9.2)\ \text{ft}} = \pm 88\ \text{k}$$

Porque a forma pórtico (e assim $d(x)$) é aproximadamente parabólico, e o momento também é Parabólica, então as forças axiais são constantes ao longo de todo o pórtico.



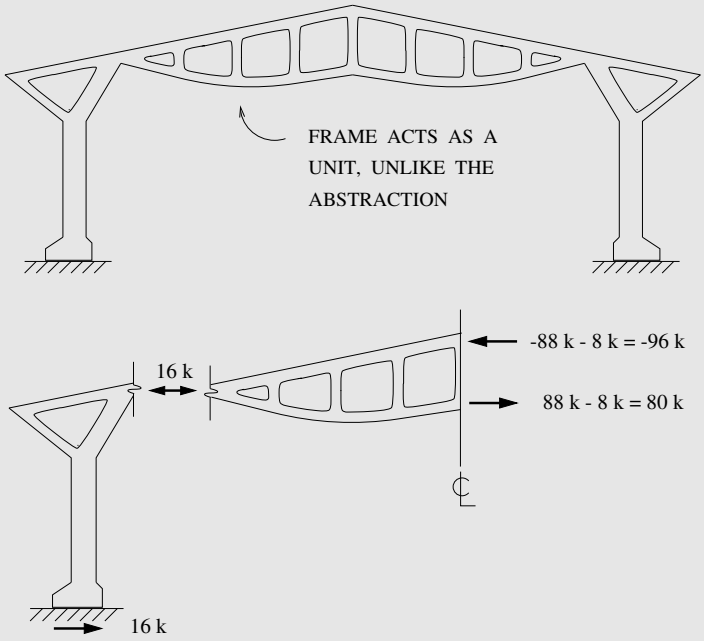
O força axial no final da viga não é equilibrado, e a compressão de 88 kip deve ser transmitido para o acorde inferior.



Isso é análogo às forças transmitidas ao apoio por um arco amarrado.

Deve-se mencionar que quando uma análise rigorosa do computador foi realizada, foi determinado que os suportes estão contribuindo com uma força de compressão de cerca de 8 kips que precisam ser sobrepostos aos valores centrais.

CÓPIA PARA REVISÃO



Interno Tensões

A compressão líquida tensão, para um acorde superior com uma área transversal de 75 in^2 é igual a

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{(88)\text{ k}}{(75)\text{ in}^2} = 1.17 \text{ ksi}$$

Isso é muito menor do que a compressão permitida tensão de concreto que é Cerca de 1.350 ksi. Se o pórtico foi lançado junto com o telhado (monolítico construção), do que este tensão seria ainda menor.

39.4 Ex 39.4: Ponte George Washington

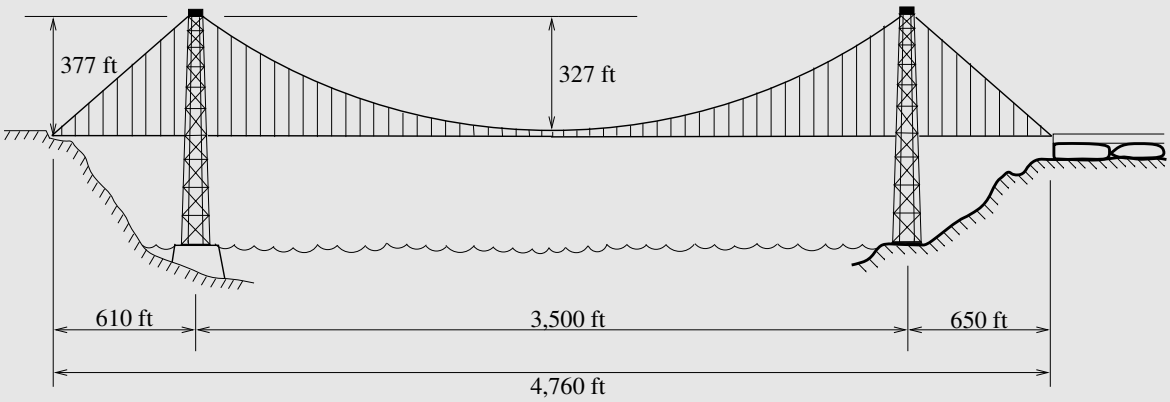
A seção seguinte é reproduzida de Billington, 1983 Structural Studies.

A ponte George Washington, é uma ponte suspensa O rio Hudson, de Nova York a Nova Jersey. Foi completada Em 1931, com uma extensão central de 3.500 pés (na época do mundo "Temporada mais longa"). A ponte foi projetada por O.H. Amã, que tinha.. Emigrou da Suíça. Em 1962, o convés foi reforçado com o Adição de um convés inferior.

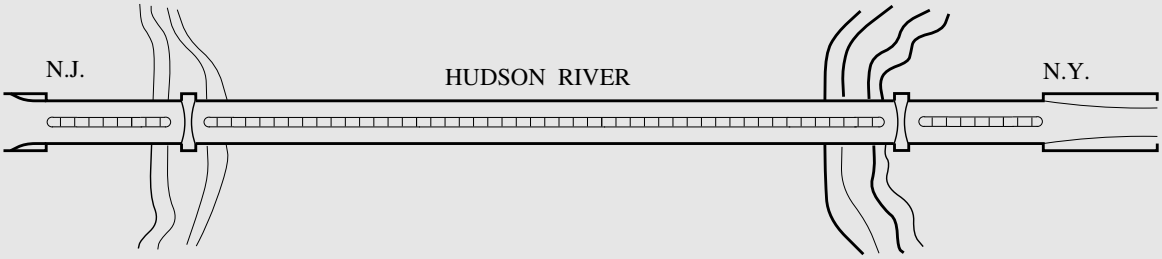
CÓPIA PARA REVISÃO

Geometria

Uma elevação longitudinal e do plano da ponte é mostrada abaixo



ELEVATION



PLAN

Por simplicidade, assumiremos em nossa análise que os dois Aproximando-se os vãos são iguais a 650 pés.

Há dois cabos de três pés de diâmetro em cada lado do Ponte. Os centros de cada par estão 9 pés separados, e os pares Eles próprios estão a 40 metros de distância. Vamos assumir uma largura de 100 pés.

Os cabos são idealizados como apoiados por rolos no topo do as torres, daí os componentes horizontais das forças em cada O lado do cabo deve ser igual (seus componentes verticais adicionarão up).

Os cabos suportam o convés que é pendurado por suspensórios Anexado aos cabos. Os cabos são feitos de 26.474 fios de aço, Cada 0,196 polegadas de diâmetro. Eles são contínuos sobre a torre apoios e estão firmemente ancorados em ambos os bancos por enormes blocos de Concreto, as âncoras.

Porque os cabos são muito mais longos do que eles são grossos (pequenos $\frac{I}{L}$Eles podem ser idealizados como membros perfeitamente flexíveis sem resistência de dobra, mas com alta força axial.

As torres têm 578 pés de altura e repousam em caissões de concreto na Rio. Por causa de nossa suposição sobre o apoio móvel para Os cabos, as torres serão submetidas apenas a forças axiais.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

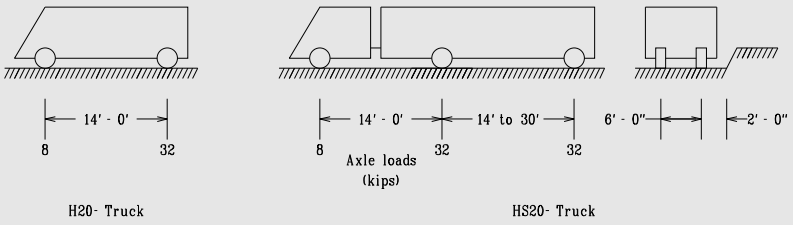
Carregar

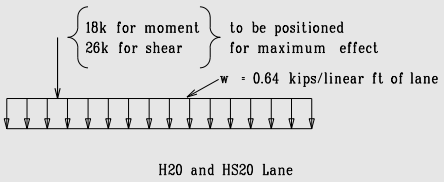
A carga morta é composta pelo peso do convés e o cabos e é estimado em 390 e 400 psf, respectivamente para o Central e lateral, respectivamente. Assumindo uma largura média de 100 pés, isso seria equivalente a

$$DL = (390)\ \text{psf}(100)\ \text{ft}\frac{\text{k}}{(1,000)\ \text{lbs}} = 39\ \text{k/ft}$$

Para o espaço principal e 40 k/ft Para os lados.

Para pontes rodoviárias, cargas de design são dadas pelo AASHTO (Associação dos Oficiais Estaduais de Transporte Rodoviário Americanos). O caminhão HS-20 é frequentemente usado para o projeto de pontes no principal Estradas. Ou o caminhão de projeto com cargas e espaçamento especificados do eixo deve ser usado **ou** O, o Carga uniforme equivalente e carga concentrada. Este carregamento deve ser.. colocado de tal forma que o máximo tensões são produzidos.





Com dois decks, estimamos que há um total de 12 pistas ou

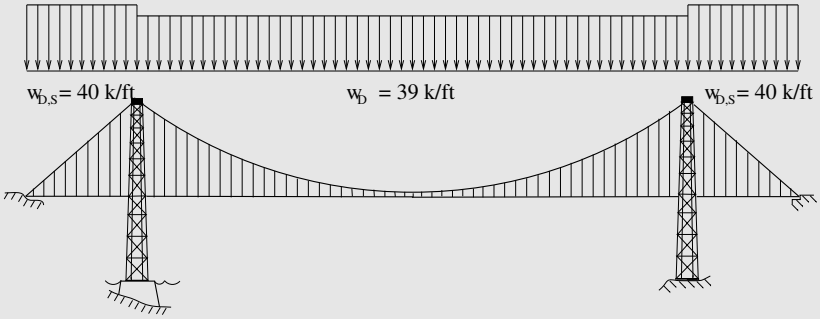
$$LL = (12)\text{Lanes}(.64)\ \text{k/ ft/Lane} = 7.68\ \text{k/ft} \approx 8\ \text{k/ft}$$

Não consideramos terremotos, ou cargas de vento nesta análise.

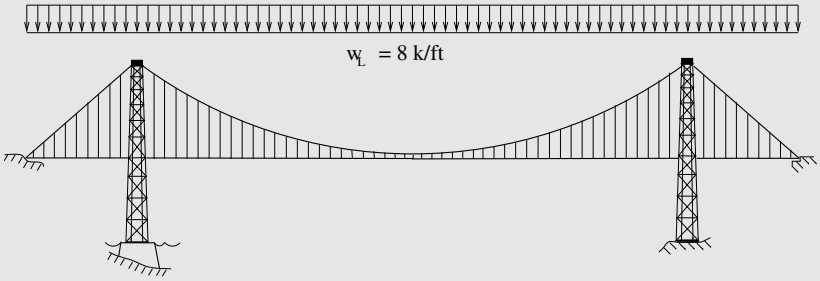
DL final e LL são $TL = 39 + 8 = 47\ \text{k/ft}$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



DEAD LOADS



Forças de Cabo

O impulso H (que é o componente horizontal do cabo Força) é determinada a partir de Eq. 30.11

$$\begin{aligned} H &= \frac{wL_{cs}^2}{8h} \\ &= \frac{(47)\text{ k/ft}(3,500)^2\text{ ft}^2}{(8)(327)\text{ ft}} \\ &= 220,000\text{ k} \end{aligned}$$

Da Eq. 30.44 A tensão máxima is

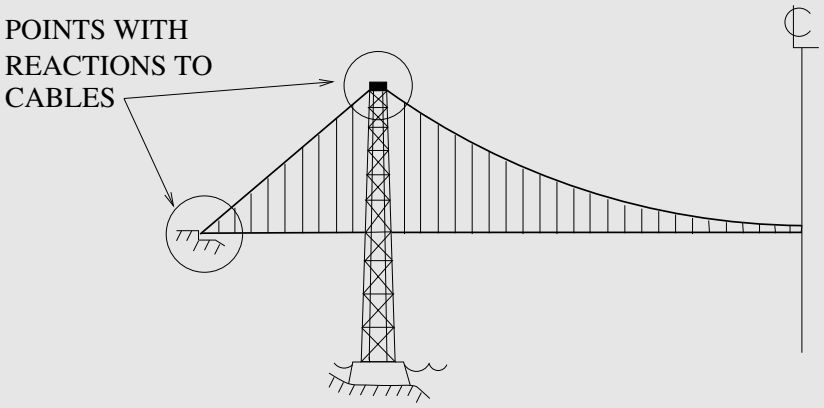
$$\begin{aligned} r &= \frac{h}{L_{cs}} = \frac{327}{3,500} = 0.0934 \\ T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (220,000)\text{ k}\sqrt{1+(16)(0.0934)^2} \\ &= (220,000)\text{ k}(1.0675) = 235,000\text{ k} \end{aligned}$$

Reações

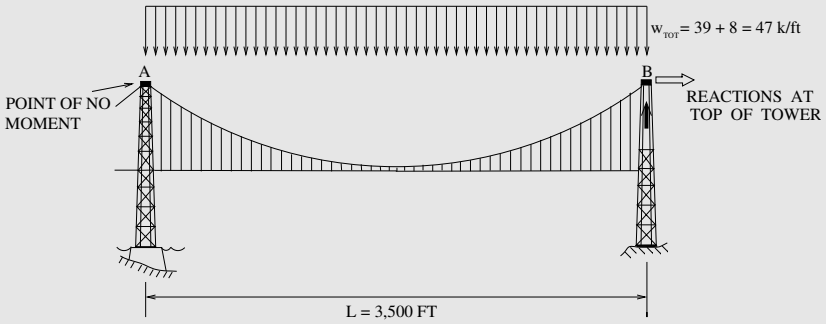
Reações por cabo são mostradas abaixo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A força vertical no pilares devido ao vão central (cs) é simplesmente o reação de apoio.



$$V_{\text{cs}} = \frac{1}{2} w L_{\text{cs}} = \frac{1}{2}(47)\ \text{k/ft}(3,500)\ \text{ft} = 82,250\ \text{k}$$

Note que podemos verificar isso determinando A soma vetorial de H e.. V Que deveria ser igual a T_{max}:

$$\sqrt{V_{\text{cs}}^2 + H^2} = \sqrt{(82,250)^2 + (220,000)^2} = 235,000\ \text{k} \checkmark$$

Ao longo dos intervalos laterais (ss), a carga total é $TL = 40 + 8 = 48\ \text{k/ft}$.. Nós determinamos a reação vertical V_{SS} Tomando o soma de momentos com respeito à âncora esquerda:

$$\Sigma M_D = 0; \circlearrowleft +; h_{\text{ss}} H + (w_{\text{ss}} L_{\text{ss}}) \frac{L_{\text{ss}}}{2} - V_{\text{ss}} L_{\text{ss}} = 0$$

$$= (377)\ \text{ft}(220,000)\ \text{k} + (48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} \frac{(650)\ \text{ft}}{2} - 650 V_{\text{ss}} = 0$$

$$V_{\text{ss}} = 143,200\ \text{k}$$

Nota: que nós temos Equilíbrio usado para determinar o componente vertical do cabo Força. Teria sido errado determinar V_{ss} De.. $V_{ss} = 220,000 \frac{377}{650}$ como fizemos no exemplo anterior, porque o cabo está carregado e não é mais reto. Nós teríamos que determinar o A forma do cabo e a tangente no suporte. Começando com Eq. 30.7:

$$-Hy = \frac{1}{2} w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$-y = \frac{w}{H} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{H} x + \frac{C_2}{H}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Em.. $x = 0$, $y = 0$, assim $C_2 = 0$; e em.. $x = 650$, $y = -377$; com $H = 220,000$ k and $w = 48$

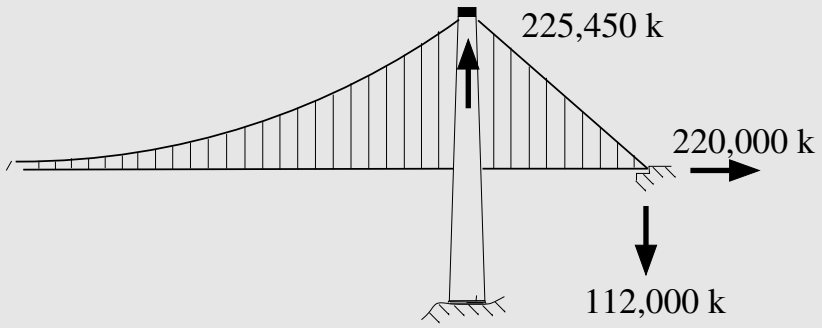
$$\begin{aligned}
y &= -\frac{(48)\text{ k}}{\text{ft}(220,000)\text{ k}}x^2 - \frac{C_1}{(220,000)\text{ k}}x \\
&= -1.091\times10^{-4}x^2 - 4.545\times10^{-6}C_1x \\
y\big|_{x=650} &= -377 = -1.091\times10^{-4}(650)^2 - 4.545\times10^{-6}C_1(650) \\
C_1 &= 112,000 \\
y &= -1.091\times10^{-4}x^2 - 0.501x \\
\frac{dy}{dx} &= -2.182\times10^{-4}x - 0.501 \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=650} &= -0.1418 - 0.501 = -0.6428 = \frac{V}{H} \\
V &= (220,000)(0.6428) = 141,423\text{ k}
\end{aligned}$$

Que é apenas 1% Diferente. Assim, o total força axial aplicado no pilar é

$$V = V_{cs} + V_{ss} = (82,250)\text{ k} + (143,200)\text{ k} = 225,450\text{ k}$$

A reação vertical na âncora é dada pela soma de As forças na y Direção

$$\begin{aligned}
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0;\ &(w_{ss}L_{ss}) + V_{ss} + R_{anchor} = 0 \\
-(48)\text{ k/ft}(650)\text{ ft} + (143,200)\text{ k} + &R_{anchor} = 0 \\
R_{anchor} &= 112,000\text{ k}\downarrow
\end{aligned}$$



O força axial no cabo lateral é determinado a soma vetorial das reações horizontais e verticais.

$$\begin{aligned}
T^{ss}_{anchor} &= \sqrt{R^2_{anchor} + H^2} = \sqrt{(112,000)^2 + (220,000)^2} = 247,000\text{ k} \\
T^{ss}_{tower} &= \sqrt{V^2_{ss} + H^2} = \sqrt{(143,200)^2 + (220,000)^2} = 262,500\text{ k}
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O cabo tensões é determinado por último

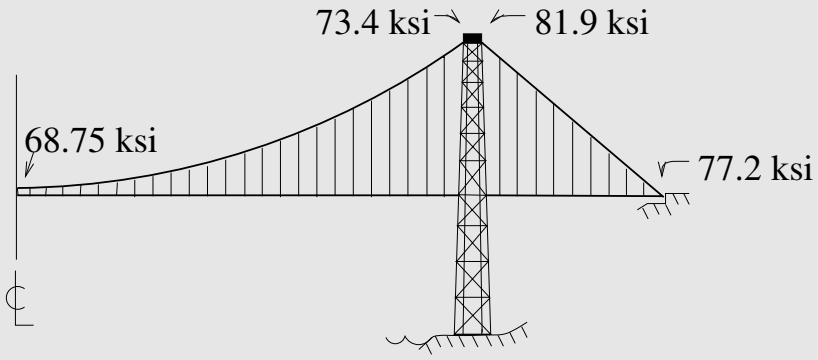
$$A_{wire} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(3.14)(0.196)^2}{4} = 0.03017 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = (4)\text{cables}(26,474)\text{wires/cable}(0.03017) \text{ in}^2\text{/wire} = 3,200 \text{ in}^2$$

$$\text{Central Span } \sigma = \frac{H}{A} = \frac{(220,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 68.75 \text{ ksi}$$

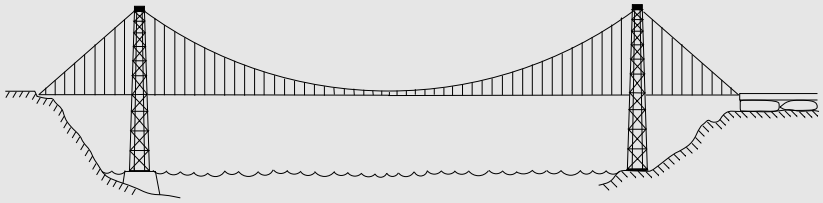
$$\text{Side Span Tower } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{tower}}{A} = \frac{(262,500) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 82 \text{ ksi}$$

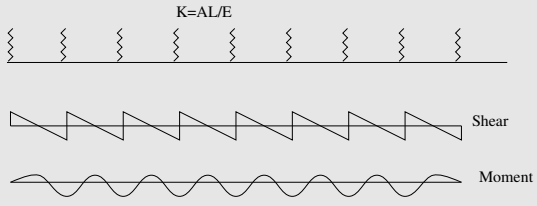
$$\text{Side Span Anchor } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{anchor}}{A} = \frac{(247,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 77.2 \text{ ksi}$$



Se os cabos fossem ancorados em um bloco de concreto, o volume do bloco deve ser, no mínimo, igual a $V = \frac{(112{,}000) \text{ k}(1{,}000) \text{ lbs/ k}}{150 \text{ lbs/ft}^3} = 747,000 \text{ ft}^3$, ou seja, um cubo de Aproximadamente 91 pés

O convés, para todos os fins práticos pode ser tratado como um contínua viga suportada por molas elásticas com rigidez $K = AL/E$ (onde L é o comprimento do cabo de apoio). Isso é frequente idealizado como uma viga sobre fundações elásticas, e o resultado cisalhamento e diagramas de momento para esta idealização são mostrados abaixo.





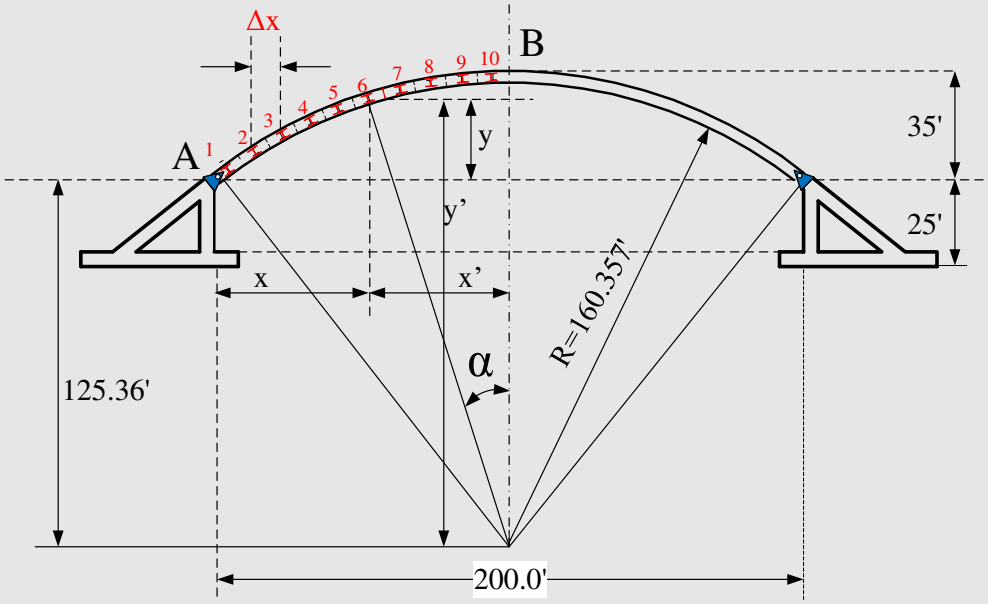
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

39.5 Ex 39.5: Desenho de um arco de duas voltas

A seção seguinte é reproduzida de Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Nós buscamos projetar um *Duas coisas*, costeleta de aço sólido para um hangar. Assuma $F_y = 30$ KSI. O momento de inércia da costela deve variar conforme necessário. O espaço, centro para o centro das dobradiças, deve estar a 200 pés. As costelas devem ser colocadas a 35 pés de centro ao centro, com uma subida de 35 pés. Deck telhado, purlins e costelas será assumido para peso 25 libras / ft^2 na superfície do telhado, e a neve será assumida em 40 libras por metro^2 desta superfície. Vinte purlins serão igualmente espaçados ao redor da costela.



Geometria

A linha central da costela será tomada como o segmento de um círculo. O raio deste círculo é

$$(R - 35)^2 + (100)^2 = R^2 \Rightarrow R = 160.357 \text{ ft}$$

O comprimento do arco é

$$\theta = \arcsin \frac{100}{160.357} = 38.580^\circ \Rightarrow S = 160.357 \times \frac{\pi}{180} 38.580 = 107.98 \text{ ft}$$

Para a análise do arco AB será considerado dividido em dez segmentos, cada um com um comprimento de

$$\Delta S = \frac{S}{10} = \frac{107.980}{10} = 10.798 \text{ ft}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Assim, um carga concentrada é aplicado na costela pelos purlins enquadrando no centro de cada segmento.

Já que o total de mortos e neve é de 65 quilos[2] O valor de cada força concentrada será

$$\Delta P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k}$$

(onde 35 corresponde ao espaçamento das costelas)

Os cálculos necessários para avaliar as coordenadas dos centros dos vários segmentos, referiam-se à dobradiça em A, são mostrados abaixo. Também são mostrados os valores de Δx, a projeção horizontal da distância entre os centros dos vários segmentos.

Seg.. Menta	α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
Coroa					160.36	100.000	35.00	5.399

Tabela 1

Desenho Inicial

Se falta experiência e o engenheiro de projeto está, portanto, em uma perda quanto aos pressupostos iniciais sobre a variação seccional ao longo da costela, recomenda-se que a primeira análise seja baseada na suposição de uma constante momento de inércia. Mesmo o engenheiro experiente muitas vezes vai descobrir que este é o melhor procedimento.

Se o valor de H é determinado, momentos e impulsos axiais podem ser calculados através da costela. Áreas transversais nas várias seções são projetadas para esses momentos e impulsos axiais. Um novo valor para H, bem como valores revisados para momentos e impulso axial em toda a costela, são determinados para a nova costela com o variado seção transversal. Tensões são verificados na costela, e todo o processo é repetido se necessário. Este procedimento será seguido no presente caso.

Impulso Horizontal

Aplicando o método flexibilidade, liberamos a reação horizontal em A

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Deflexões são calculadas por trabalho virtual. Para esta seção curva nós substituímos:

$$\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \quad \text{by} \quad \sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta S$$

e assim esta expressão se torna

$$\sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta s + H_A \sum \delta\overline{M}\frac{\overline{M}}{EI}\Delta S = 0$$

Desde então E e.. ΔS são constantes e, para a primeira análise, O momento de inércia é constante, a expressão final para H_A É

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}}$$

Computações necessárias para a primeira avaliação de H_A são mostrados abaixo

Segmento	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) Cisalhamento para Certo (k)	(5) Δx (ft)	(6) M incremento (ft · k)	(7) M Simples viga (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{M}\overline{M}$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
Coroa	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

Tabela 2

Onde

$$R_A = 100\Delta P = (100)(24.565) = 245.650$$
$$\delta\overline{M} = (1)(y) = 3.29$$
$$245.65 - 24.565 = 221.085$$
$$(245.65)(4.275) = 1,050$$
$$1,050 + 1,962 \simeq 3,010$$

Cedendo

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}\overline{M}} = -\frac{2\times 2,158,100}{2\times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{39.1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Momentos

Os momentos nos centros dos vários segmentos da costela, usando o valor aproximado apenas determinado para H_A, são computados em baixo, onde um momento é considerado positivo se tende a causar compressão na superfície superior da costela.

Segmento	y (ft)	M Simples viga (ft · k)	$H_A \cdot y$ (ft · k)	Total M no segmento (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	-1,100	-50
2	9.44	3,010	-3,150	-140
3	14.98	4,830	-5,000	-170
4	19.88	6,490	-6,640	-150
5	24.13	7,950	-8,060	-110
6	27.69	9,200	-9,250	-50
7	30.57	10,220	-10,210	+10
8	32.73	11,000	-10,930	+70
9	34.18	11,530	-11,420	+110
10	34.19	11,790	-11,660	+130
Coroa	35.00	11,790	-11,690	+100

Tabela 3

Onde

$$-333.97(9.44) \simeq -3,150$$
$$3,010 - 3,150 = -140$$

CÓPIA PARA REVISÃO

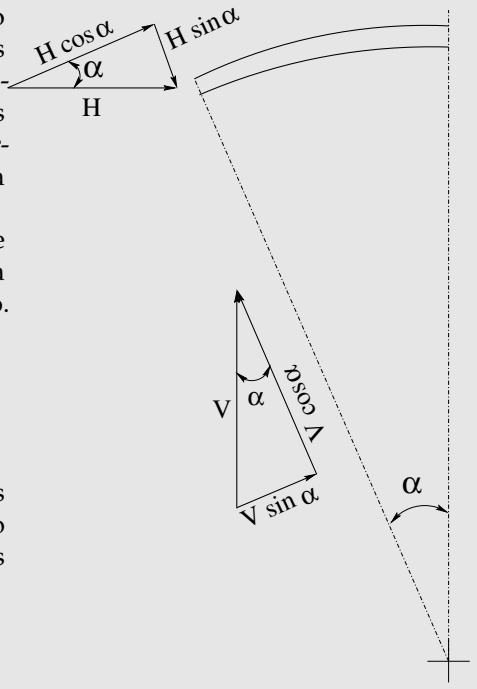
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Normal e Forças cortantes

O impulso N, normal para o seção transversal no centro de cada segmento, deve ser calculado antes que os requisitos da seção possam ser determinados. Como uma questão de interesse os vários valores de S, o total cisalhamento no seção transversal, também será calculado para o centro de cada segmento.
N e.. S são obtidos combinando componentes de H E a vertical cisalhamento V no centro de cada segmento, uma combinação que é mostrada abaixo. De trigonometria simples temos

$$S = V \cos\alpha - H \sin\alpha$$
$$N = V \sin\alpha + G \cos\alpha$$

Valores de S e.. N são computados em seguida. Os valores de S estão incluídos no apoio da declaração feita anteriormente para o efeito de que as forças cortantes são pequenas na costela do arco habitual.



Segmento	V (k)	$V \cos\alpha$	$H \sin\alpha$	$= S$(k)	$V \sin\alpha$	$+H \cos\alpha$	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
Coroa						+334	= 334

Tabela 4

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Onde

$$(221.1)(0.80229) = 177$$
$$(333.97)(0.59695) = -199$$
$$177 - 199 = -22$$
$$(221.1)(0.59695) = 132$$
$$(333.97)(0.80229) = +268$$
$$132 + 268 = 400$$

Primeiro Design

Inspeção dos valores para o momento M E para o impulso N nas duas tabelas anteriores indica que o segmento 3 é crítico na região do momento negativo e o segmento 10 na região de momento positivo. As seções necessárias para a costela, nos centros destes dois segmentos, devem ser determinadas de acordo com as especificações do Instituto Americano de Construção de Aço (AISC) antes que a mesa possa ser concluída.

Os flanges estão em 12. $\times$ 1 em, e o permitido tensão para dobrar é $F_B = 0.6F_y = (0.6)(30) = 20k/in^2$ (em volta por AISC). A espessura da teia é $\frac{3}{4}$ E o axial permitido tensão é F_A=17,000-0.485 L/r^2 (Fórmula parabólica de Johnson para $L/r > 120$Em psi. Note que a equação de Kiney caiu no quadrado r e não parece aplicar a condição em L/r.. Vamos levar $L = \Delta S = 10.798$, já que costelas estão lateralmente preparadas no ponto de enquadramento purlin.

Espessura de flange e placas da web e largura de placas da Web são questões de julgamento. A profundidade total determinada para o centro do segmento 3 é usada desde o centro deste segmento até a extremidade da costela. A profundidade determinada para o centro do segmento 10 é arbitrariamente usada para a profundidade da costela na coroa. A profundidade total da costela do centro do segmento 3 até a coroa é feita para variar linearmente. As adequações das seções assim determinadas para os centros dos vários segmentos são verificadas abaixo.

Seg.	(2) Total profundidade (In.)	(3) Área $(em)^2$)	(4) I $(em)^4$)	(5) M (ft-k)	(6) Axial Empuxo N (k)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (ksi)	(8) $f_b = \frac{M_c}{I}$ (ksi)	(9) Permita. F_a (ksi)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$ +	(11) $\frac{f_b}{F_b}$ =	(12) Decimal de Capacidade
A	23.00	39.75	3,483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3,483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3,483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3,483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3,172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2,865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2,585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2,329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2,071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1,838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1,631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
Coroa	16.00	34.50	1,527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

Tabela 5

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde

$$23-(23-16.47)*(7-3)/(10-3)=19.27$$
$$2(12)(1)+0.75(19.27-2)=36.95$$
$$2(\underbrace{\underbrace{(12)(1)^3/12}_{bh^3/12}+\underbrace{(12)(1)(17.27/2+0.5)^2}_{Ad^2}}_{\text{Flange}}+\underbrace{\underbrace{0.75(17.27/2)^3/12}_{bh^3/12}+\underbrace{0.75(17.27/2)(17.27/4)^2}_{Ad^2}}_{\text{Web}})=2,329$$
$$343/36.95=9.3$$
$$(120)(19.27)/(2)(2329)=0.5$$
$$(17,000-0.485\times 10.798\times 12/(2329/36.95))/1000=17.0\neq 15.96$$
$$9.3/15.96=0.58$$
$$0.5/20=0.02$$
$$0.58+0.02=0.61$$

Valores atualizados de impulso horizontal

Agora que temos uma variação momento de inércia, é necessário recomputar o valor de H_A.. Agora temos que usar

$$H_A=-\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I}$$

O valor revisto para H_A é facilmente determinado como mostrado abaixo. Note que os valores em pilar (2) são encontrados dividindo os valores de $M\delta\overline{M}$ para os segmentos correspondentes em pilar (8) da Tabela 2 pelo total I para cada segmento como mostrado na tabela 5. Os valores em pilar (3) da Tabela 6 são encontrados de forma semelhante aos valores empilar (9) da Tabela 2. Os momentos simples viga em pilar (5) da Tabela 6 são tomados diretamente de pilar (7) da Tabela 2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(1) Segmento	(2) $\frac{M\delta\overline{M}}{I}$	(3) $\frac{\delta\overline{M}^2}{I}$	(4) Revisado $H_A y$ (ft · k)	(5) M Simples viga (ft · k)	(6) Revisado Momento (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
Coroa			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

Tabela 6

Assim, a revista H_A É

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} = -\frac{2\times 1,010.85}{2\times 3.0192} = -334.81k$$

Os valores revisados para o impulso axial N nos centros dos vários segmentos são calculados

Segmento	V sin α	+	H cos α	=	Revisado N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
Coroa			335		335

Tabela 7

As seções previamente projetadas nos centros dos segmentos são verificadas quanto à adequação. Nesta mesa, parece que todas as partes da costela são satisfatórias. Isso não pode ser definitivamente concluído, no entanto, até que o secundário tensões causado pela deflexão da costela sejam investigados.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Segmento	$\frac{N}{A}$ $(k/in)^2)$	$\frac{M_c}{I}$ $(k/in)^2)$	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	Decimal de Capacidade
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
Coroa	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

Tabela 8

39.6 Ex 39.6: A temperatura muda em um arco

A seção seguinte é reproduzida de Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Determinar os efeitos do encurtamento das costelas e mudanças de temperatura na costela do arco do exemplo anterior (§39.5). Considere uma queda de temperatura de 100°F.

Horizontal deslocamento

Para determinar os efeitos do encurtamento das costelas, é necessário primeiro encontrar a horizontal deslocamento do fim A que resultará se o elástico axial deformações, que ocorrem no arco real carregado, forem introduzidos na costela enquanto terminam A está em rolos.

Então é necessário encontrar a horizontal deslocamento do fim A, causada por uma força horizontal de 1 k atuando em A, considerando a flexão e axial deformações na costela. O horizontal deslocamento de A, resultante do encurtamento das costelas causado pelas cargas reais, é dado por

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L$$

Onde N é o impulso axial retirado da tabela 7 (exemplo anterior), $\delta\overline{N}$ é o impulso axial causado por uma força horizontal fictícia de 1 k atuando em A E igual a cos α Na Tabela 1, ΔL é o comprimento de cada segmento, e A É a área seccional certa.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O horizontal deslocamento de A, resultante do encurtamento das costelas causado por uma força horizontal de 1 k atuando em A, é dado por

$$\sum \frac{\delta\overline{N}^2}{AE}\Delta L \tag{39.2}$$

Os cálculos necessários para avaliar estas duas deflexões de A são mostrados abaixo.

Segmento	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (em)^2)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
$\sum$				87.88	0.2300

Tabela 9

Assim, a horizontal deslocamento de A, resultante do encurtamento das costelas causado pela carga real, é

$$\sum \delta\overline{N}\frac{N}{AE}\Delta L = \frac{2\times 87.88\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in}$$

e que resulta do encurtamento das costelas causado por uma carga horizontal de 1 k em A É

$$\sum \delta\overline{N}\frac{\overline{N}}{AE}\Delta L = \frac{2\times 0.2300\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in}$$

O valor relativo da horizontal deslocamento de A, resultante da flexão deformação causada por uma força horizontal de 1 k em A, foi previamente determinado em pilar (3) da Tabela 6. O valor absoluto para isso é

$$\frac{2\times 3.019\times 10.798\times 1728\times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} .$$

O valor total para o deslocamento de A devido à flexão e axial deformações resultante de uma força horizontal de 1 k em A é, portanto,

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in}$$

Redução em H_A

Para um sistema elástico linear, a redução em H_A Devido ao encurtamento de costelas será

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Uma redução adicional em H_A resultará de qualquer queda na temperatura da costela abaixo daquela temperatura em que o arco é erguido. Isso ocorre, é claro, porque algum encurtamento adicional da costela resultará. A diminuição do comprimento da projeção horizontal da costela resultante de uma queda de temperatura de 100°F será

$$\delta L = \underbrace{0.0000065}_{\alpha} \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{39.3}$$

A diminuição resultante em H_A Vai ser

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k}$$

E a queda total em H_A Devido ao encurtamento das costelas e queda de temperatura é

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k}$$

Isso terá o efeito de aumentar o momento perto do centro da extensão.

Aumento no Momento

A inspeção de pilar (6) na tabela 8 indica que o segmento 10 deve ser verificado para possível sobretensão como resultado deste aumento.

O aumento do momento no segmento 10 será dado por

$$\Delta M = \Delta H_A((y \text{ for segment } 10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

O momento de 100 pés·k, como previamente determinado para o segmento 10, é preciso apenas nos dois primeiros lugares, e portanto o momento total revisto para o segmentos 10 será

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

O impulso de 335 k, previamente determinado para o segmento 10, é preciso em três lugares. A mudança em H_A devido ao encurtamento de costelas e mudança de temperatura, portanto, deve ser arredondado para 1 k, a fim de determinar o impulso corrigido no segmento 10. Este impulso corrigido será

$$335 - 1 = 334 \text{ k}$$

Extremo Tensões

A fibra extrema é

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2$$

A seção do segmento 10 está checada, como indicado na tabela 8, por

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96$$

E obviamente a seção no segmento 10 é Adequado.

Nenhuma consideração foi dada aos efeitos de um aumento da temperatura, uma vez que tal aumento só pode ocorrer durante os meses de verão quando nenhuma carga de neve é possível. Consequentemente, esta fase do problema não tem significado prático.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

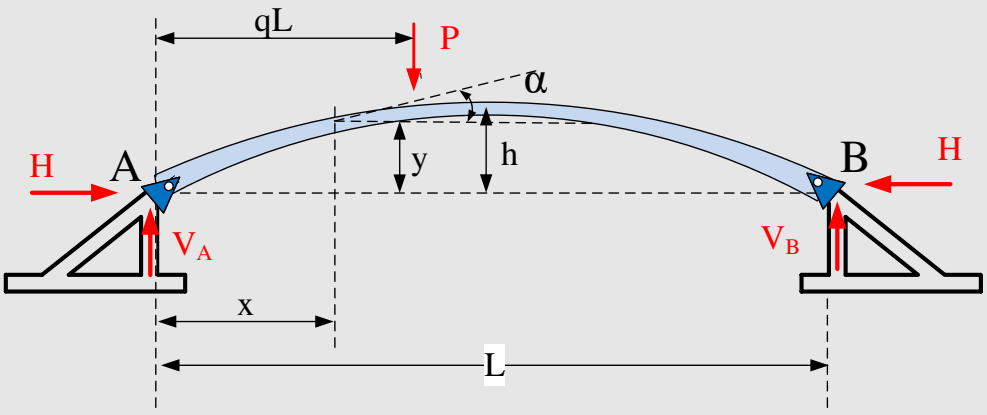
O método de análise acabado de demonstrar se aplicará igualmente bem a um concreto armado ou uma madeira com dois arcos. Como já foi dito, no entanto, muito poucos arcos concreto armado são construídos com duas dobradiças.

De nota especial aqui é o fato de que, além de axial deformação e queda de temperatura, o encolhimento do concreto em uma costela concreto armado também causará encurtamento das costelas. O coeficiente de encolhimento deve ser determinado para que a mistura seja usada e aplicada na análise da mesma forma geral como demonstrado acima para o coeficiente de temperatura.

39.7 Ex 39.7: Arco parabólico com variação secante de I

A seção seguinte é reproduzida de Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

Um arco parabólico de duas dobradiças com uma variação secante da inércia. Um método para projetar uma costela de arco de duas torções foi demonstrado em §39.5.. Foi sugerido que a primeira análise para o redundante H pode muito bem ser baseado na suposição de uma constante momento de inércia para a costela. Uma abordagem alternativa ao problema está disponível por causa do fato de que é possível conceber uma expressão bastante simples para o valor de H desde que dois requisitos sejam impostos sobre a forma e proporções da costela. Estes dois requisitos são, em primeiro lugar, que a curva do eixo da costela deve ser parabólica; E, segundo, que o momento de inércia da costela em qualquer seção específica deve ser igual ao momento de inércia na coroa multiplicado pelo secante do ângulo α, onde α é o ângulo entre a horizontal e a tangente ao eixo do arco naquela seção em particular.



Considerando a costela carregada com uma única concentração P.. Podemos assumir que o momento de inércia da costela varia de modo que

$$I = I_c \sec \alpha$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Onde I_c é o momento de inércia na coroa e I O momento de inércia em qualquer seção. O eixo do arco é parabólico. A equação para a parábola referida A, é

$$y = 4h\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

Assuma que esse fim A está em rolos. Então,

$$H = -\frac{\Delta_{Ah}}{\delta_{AhAh}} = -\frac{\int M\delta\overline{M}ds/EI}{\int \delta\overline{M}^2 ds/EI}$$

Onde Δ_{Ah} é a deflexão horizontal de A como causado por P, e δ_{aAhAh} é a deflexão horizontal de A resultante da ação de uma força horizontal de 1 k atuando à esquerda em A.. O momento na costela em qualquer seção (com fim) A Como causado por P é representado por M, e $\delta\overline{M}$ É o momento causado pela força horizontal de 1 k em A.

Na equação acima, aplicam-se as seguintes relações:

$$m = y, \qquad ds = \sec\alpha dx, \qquad I = I_c \sec\alpha$$

Quando estas substituições são feitas, a expressão acima para H reduz-se a

$$H = -\frac{\int Mydx}{\int y^2 dx}$$

e..

$$\text{For } x < qL M = P(l-q)x$$
$$\text{For } x > qL M = P(l-q)x - P(x-qL) = Pq(L-x)$$

Quando os valores para M e.. y são substituídos na equação acima para H e a integração indicada realizada, o resultado é

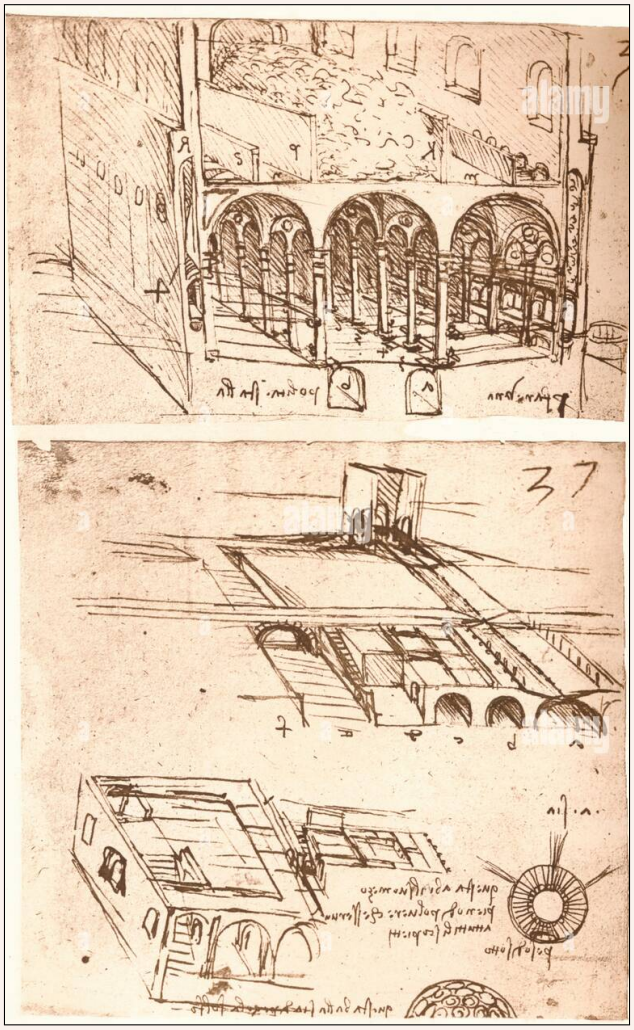
$$H = \frac{5PL}{8h}(q - 2q^3 + q^4)$$

Embora a equação acima seja derivada para o tipo particular de costela como descrito anteriormente, ela é de algum valor na análise preliminar de duas costelas sólidas com curvas axiais além de parabólicas e tendo I Variações que não são proporcionais ao secante de α.. Os valores resultantes de H será, é claro, aproximado, mas pode ser usado na proporção de uma primeira costela experimental. Se, por exemplo, a equação anterior é aplicada à costela carregada do Exemplo §39.5, o valor calculado de H Será 339.14 k. O valor correto foi de 334,81 k.

Note que se um linha de influência para H é necessário, então P é tomado como unidade e valores de q são substituídos que correspondem às várias seções para as quais linha de influência coordenadas são desejadas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Esboços Arquitetônicos, Leonardo da Vinci, no final do século 15.

Epítomiza a fase preliminar do projeto, onde as idéias iniciais são traduzidas em conceitos visuais através de desenhos espontâneos e investigativos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Parte III

Intermediário; Métodos Numéricos

Ao contrário do livro anterior, que se concentrava em soluções analíticas, este livro prioriza abordagens numéricas. Pode ser apropriadamente chamado de "Análise das Estruturas Esqueléticas".

O livro começa com uma introdução ao método da rigidez direta, usando elementos derivados das relações de força deslocamento em estruturas esqueléticas. Em seguida, o método variacional é formalmente introduzido, começando com a equação de Euler, levando à estrutura abrangente do método dos elementos finitos.

Ao longo do livro, várias considerações relacionadas a estes métodos são discutidas (como análise dinâmica, formulação do elemento isoparamétrico).

O escopo é limitado a estruturas elásticas lineares.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 40

Introdução ao Método da rigidez direta

Abstract

O primeiro capítulo do Livro III estabelecerá as bases para a análise numérica das estruturas esqueléticas. Ele vai revisitar alguns conceitos previamente definidos, mas dispersos. Mais importante, a seção final contextualizará análise estrutural como um problema de valor limite.

40.1 Por que matriz análise estrutural? . 1514
40.2 Idealização estrutural 1516
40.3 Assinar convenção 1518
40.4 Sistemas de coordenadas 1518
40.5 Flexibilidade *vs.* Rigidez 1519
40.6 Graus de liberdade 1520
40.7 Estático *vs.* Indeterminação cinemática 1522
40.8 Análise estrutural/mecânica; Um problema de valor limite 1523

40.1 Por que matriz análise estrutural?

1 Na maioria dos currículos de engenharia civil, alunos são necessários Para fazer cursos em: Estáticas, Força de Materiais, Estrutura Básica Análise. Este último curso é fundamental que introduz o básico análise estrutural (determinação de reações, desvios, e esforços internos) de ambos estaticamente determinado e indeterminado Estruturas.

2 Também são introduzidos métodos energéticos, e a maioria se não todos Exemplos são bidimensionais. Já que a ênfase está na solução manual, raramente são analisadas estruturas tridimensionais. Os métodos cobertos, para A maioria se empresta para as soluções do envelope Não necessariamente para implementação de computador.

3 Aqueles estudantes que querem uma especialização em estrutura engenharia/mecânica, fazem cursos mais avançados como Matrix Análise.

CÓPIA PARA REVISÃO

4 Matrix Análise estrutural, ou Avançado Análise estrutural, ou Introdução à Engenharia Estrutural Elemento finito, baseia-se no curso de análise introdutória para focar nos métodos que Emprestam-se à implementação do computador. Ao fazer isso, vamos colocar ênfase igual em estruturas de duas e três dimensões, e desenvolver uma compreensão completa da análise de estruturas assistidas por computador.

5 Isso é essencial, como na prática a maioria, se não todos, análise estrutural são feitos pelo computador e é imperativo que como engenheiros estruturais Você entende o que está dentro dessas "caixas pretas", desenvolver bastante auto-asseguramento de ser capaz de abri-los e modificá-los para executar certas tarefas específicas, e o mais importante para entender suas Limitações.

6 Com a ênfase recentemente colocada no método dos elementos finitos na maioria Escolas de pós-graduação, muitos alunos foram tentados a pular um curso como Este aqui e corra para um elemento finito um. Por isso, é importante que Você entende a conexão e o papel desses dois cursos. O Método dos elementos finitos aborda a análise de dois ou três Continuum dimensional. Como tal, as principais incógnitas são $\mathbf{u}$ O nodal deslocamentos, e as forças internas são geralmente restritas a tensão σ.. A única estrutura unidimensional análoga é a treliça.

7 Considerando que continuum de duas e três dimensões são essenciais em civil engenharia para modelar estruturas como represas, cascas, e fundação, A maioria das estruturas de engenharia civil são constituídas por ”rod”’ Elementos unidimensionais como vigas, vigas, ou pilares. Para aqueles elementos, “deslocamentos” e internos “‘forças” são de alguma forma mais complexo do que os encontrados no contínuo elementos finitos.

8 Assim, contrariamente ao contínuo elemento finito onde deslocamento é principalmente sinônimo de tradução, em elementos unidimensionais, e dependendo de O tipo de estrutura, generalizada deslocamentos pode incluir tradução, e/ou rotação de flexão e/ ou torção. Da mesma forma, "esforços internos’ não são tensões, mas sim axiais e forças cortantes, e/ou flexurais ou momentos torcionais. Esses conceitos são muito mais relevantes no Análise/design da maioria das estruturas de engenharia civil.

9 Assim, Matrix Análise estrutural, é realmente uma ponte entre Análise introdutória e cursos. O elemento rigidez Matriz $[\mathbf{k}]$ será primeiramente derivado usando métodos introduzidos no básico análise estrutural, e mais tarde usando conceitos baseados em energia. Isso mais tarde A abordagem é a usada exclusivamente no método dos elementos finitos.

10 Um componente importante deste curso é a programação de computador. Uma vez que a teoria e os algoritmos são completamente explicados, você Será esperado programá-los em Matlab. O programa vai Faça a análise de 2 e 3 dimensionais treliça e pórtico estruturas, e muitos alunos têm posteriormente usado em seus Atividades profissionais.

11 Haverá uma missão de computador em que você estará Espera-se realizar manipulações simbólicas simples usando *Matemática*.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

40.2 Idealização estrutural

12 Antes da análise, uma estrutura deve ser idealizada para um adequado representação matemática. Desde que é praticamente impossível (e a maioria Muitas vezes desnecessário) para modelar cada detalhe, suposições devem ser feitas. Assim, idealização estrutural é tanto uma arte quanto uma ciência. *Alguns* das perguntas que confrontam o analista incluem:

1. Dois dimensionais contra três dimensionais; Devemos modelar um único Baía de um edifício, ou toda a estrutura?
2. Pórtico ou treliça, podemos negligenciar a flexão?
3. Conexões rígidas ou semi-rígidas (mais importantes em estruturas de aço)
4. Suportes rígidos ou bases elásticas (são as fundações sobre rocha sólida, ou sobre argila que pode consolidar ao longo do tempo)
5. Inclua ou não membros secundários (tais como aparelho diagonal em um três Análise dimensional).
6. Análise dinâmica? quando a frequência da carga aplicada (excitação) de uma estrutura é menor que cerca de um terço de sua menor frequência natural vibração, então podemos negligenciar efeitos de inércia e tratar o problema como um quase-estático, caso contrário, uma dinâmica A análise deve ser realizada. Para uma estrutura muito flexível, até mesmo uma carga aplicada lentamente pode exigir uma análise dinâmica.
7. Tempo dependente deformações? Como o verme de concreto, Fig. 40.1, ou relaxamento de cabos de protensão, ou outros efeitos dependentes do tempo (como corrosão ou fadiga)
8. Efeitos da temperatura: Por exemplo, as temperaturas da pele do edifício podem ter que ser contabilizadas, Fig. 40.2 como causaria carga não simétrica.
9. Incluir ou não deformação axial de uma viga em um edifício?]
10. As propriedades seccionais cruzadas (o que é o momento de inércia de um concreto armado viga?], §46.6.3.
11. Negligentes ou não, geralmente estão presentes em zonas altas momentos negativos)
12. Análise linear ou não linear (análise linear não pode prever o pico ou carga de falha, e vai subestimar as deformações).
13. Small deformation ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$) or large deformation ($\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2$, P-Δ effects), chapter 29. Note that in the analysis of a high rise building subjected to wind load, the moments should be amplified by the product of the axial load times the lateral deformation, $P - \Delta$ effects).
14. Colapso parcial ou rendição local (seria falha de um único elemento desencadea a falha de toda a estrutura?).

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

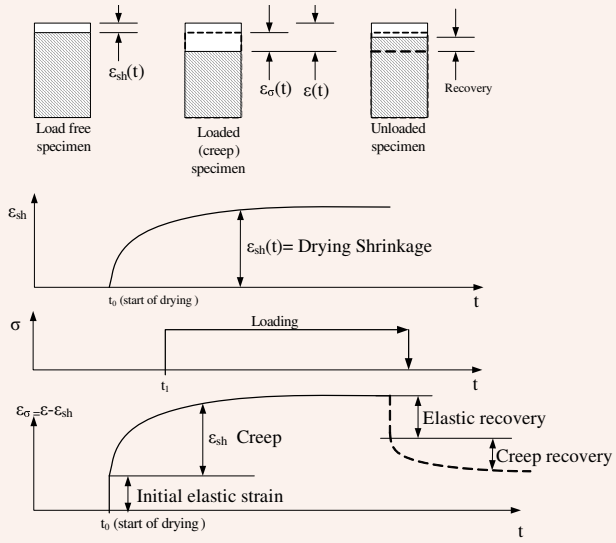


Figura 40.1: Tempo dependente deformação; Arrepio e encolhimento

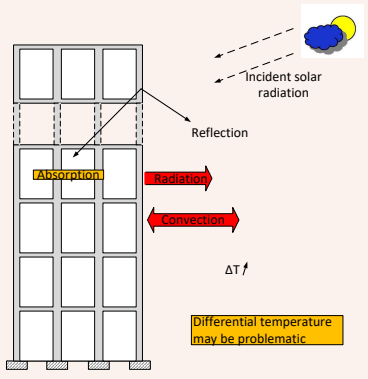


Figura 40.2: Construindo cargas térmicas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

15. Carga de vento (a deriva lateral de um edifício de alta elevação sujeita a Carga de vento, é muitas vezes a principal limitação para estruturas superiores).
16. Secundário tensões (causado pela solda. Presente na maioria estática Estruturas indeterminadas).

40.3 Assinar convenção

13 A convenção de sinais em análise estrutural é completamente diferente do anteriormente adotado em estrutura análise/design, Fig. 40.3 (onde nos concentramos principalmente na flexão e definimos um momento positivo como um causando "tensão abaixo". Seria estranho programar!).

14 Na matriz análise estrutural a convenção de sinais adotada é consistente com o sistema de coordenadas predominante. Assim, definimos um positivo momento como um que é anti-horário.

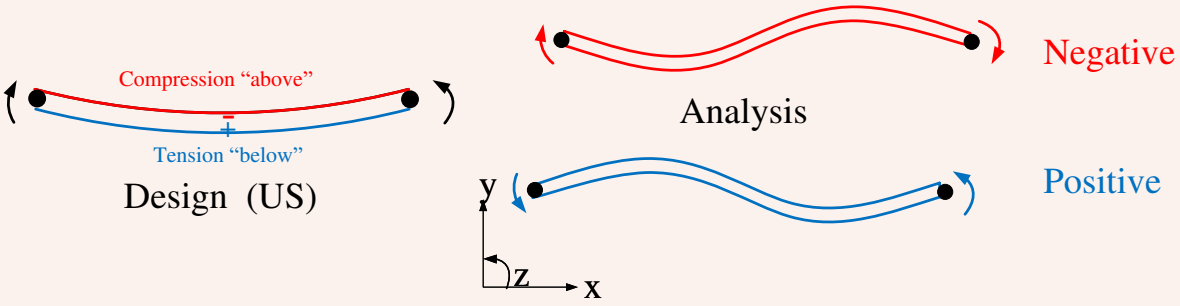


Figura 40.3: Convenção de Assinatura, Design e Análise (Fig. 26.1)

40.4 Sistemas de coordenadas

15 Devemos diferenciar entre dois sistemas de coordenadas:

Global: para descrever as coordenadas nodais. Este sistema pode ser arbitrariamente selecionado Desde que seja um lado direito, e nos associaremos com ele etiquetas do eixo superior, X, Y, Z, Fig. 40.7 Ou 1,2,3 (índices de execução dentro de um programa de computador).

Local: O sistema está associado a cada elemento e é usado para descrever o elemento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

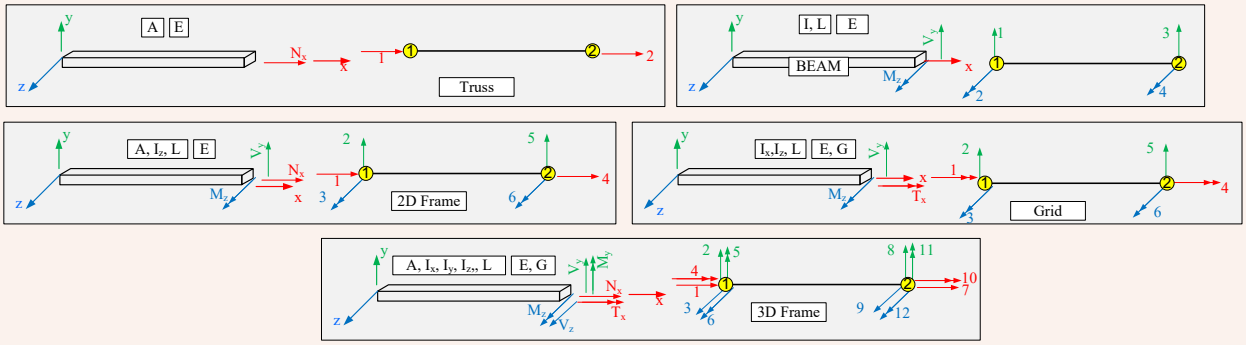


Figura 40.4: Elementos esforços internos e Dof local

esforços internos. Vamos nos associar com ele etiquetas de eixo mais baixas, x, y, z (ou 1,2,3), Fig. 40.4.

16 O x- O eixo é assumido para estar ao longo do membro, ea direção é escolhido de tal forma que aponta do 1o nó para o 2o nó, Fig. 40.4.

40.5 Flexibilidade *vs.* Rigidez

17 Em §26.1Já destacamos as principais diferenças entre os métodos de força e rigidez. Esta seção complementa essa cobertura.

18 No método flexibilidade, fizemos uma estrutura *Estaticamente determinado* e analisou toda a estrutura. No método rigidez, vamos fazer a estrutura (elemento ou estrutura inteira) *kinematicamente determinado* por

1. Aplicando uma unidade deslocamento em cada dof (§40.6) j (enquanto restringindo todos os outros para ser zero)
2. Determinando as reações associadas com todos os outros dof i:

Assim, k_ij corresponderá à reação em Dof i devido à deformação da unidade (tradução ou rotação) no dof j.

19 No método flexibilidade buscamos deslocamentos em termos de forças aplicadas externamente ($\mathbf{\Delta(F)}$). Derivado por uma estrutura; por outro lado, no método rigidez, buscamos o esforços internos em termos do imposto externamente deslocamentos ($\mathbf{F(\Delta)}$).

20 Estes já foram derivados para elementos (capítulo 26E então, elenco em forma de matriz 41).

CÓPIA PARA REVISÃO

40.6 Graus de liberdade

Definition 40.1: Grau de liberdade

A grau de liberdade (dof) é um nodal generalizado independente deslocamento ou força em um nó.

21 O deslocamentos deve ser linearmente independente e assim Não são parentes. Por exemplo, um apoio móvel em uma inclinação O avião teria três (deslocamentos) (rotação θ, e dois Tradução u e.. vNo entanto, desde que os dois deslocamentos são cinematicamente restringidos, só temos dois independentes deslocamentos, Fig. 40.5.

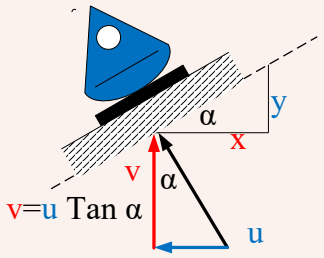


Figura 40.5: Independente deslocamentos

22 Um elemento dof é definido com seu próprio sistema de coordenadas local. Um Dof estrutural é definido com um sistema global de coordenadas, Fig. 40.6.

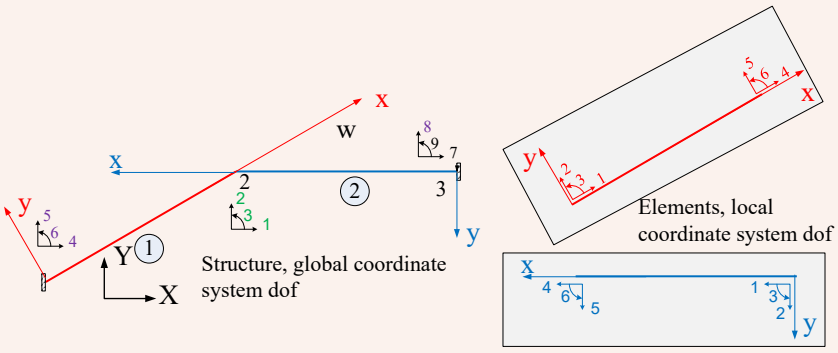


Figura 40.6: Sistema de coordenadas local e global

23 Notamos que nos referimos a *generalizada* deslocamentos, porque queremos que este termo inclua traduções, bem como rotações. Dependendo do tipo de estrutura, pode não

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

haver nenhuma, uma ou mais que uma tal deslocamento. É lamentável que, na maioria dos cursos introdutórios em análise estrutural, muita ênfase tenha sido colocada em estruturas bidimensionais, e não o suficiente tanto em três dimensionais, ou duas dimensionais com torção.

24 Na maioria dos casos, há o mesmo número de D.O.F nas coordenadas locais como no sistema global de coordenadas. Uma exceção notável é o treliça Elemento. Na coordenada local só podemos ter uma deformação axial, Considerando que em coordenadas globais há duas ou três traduções em 2D e 3D respectivamente para cada nó.

25 Portanto, é essencial que entendamos o graus de liberdade que pode ser associado com os vários tipos de estruturas compostas por elementos unidimensionais da haste.

Definition 40.2: Graus de liberdade de diferentes elementos

.

Tipo		Nó 1	Nó 2	$[\mathbf{k}^{(e)}]$ (Local)	$[\mathbf{K}^{(e)}]$ (Global)
1 Dimensão					
Viga	$\{\mathbf{p}\}$	F_{y1}, M_{z2}	F_{y3}, M_{z4}	4×4	4×4
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	v_1, θ_2	v_3, θ_4		
2 Dimensional					
Treliça	$\{\mathbf{p}\}$	F_{x1}	F_{x2}	2×2	4×4
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	u_1	u_2		
Pórtico	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1}, F_{y2}, M_{z3},$	$F_{x4}, F_{y5}, M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$u_1, v_2, \theta_3,$	$u_4, v_5, \theta_6,$		
Grelha	$\{\mathbf{p}\}$	T_{x1}, F_{y2}, M_{z3}	$T_{x4}, F_{y5}, M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	θ_1, v_2, θ_3	$\theta_4, v_5, \theta_6,$		
3 Dimensional					
Treliça	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1},$	F_{x2}	2×2	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$u_1,$	u_2		
Pórtico	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1}, F_{y2}, F_{y3},$ $T_{x4}\ M_{y5}, M_{z6}$	$F_{x7}, F_{y8}, F_{y9},$ $T_{x10}\ M_{y11}, M_{z12}$	12×12	12×12
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$u_1, v_2, w_3,$ $\theta_4, \theta_5, \theta_6,$	$u_7, v_8, w_9,$ $\theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12},$		

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

26 Devemos distinguir entre local e global Dof O esquema de numeração segue as seguintes regras simples:

Local: Dof para um dado elemento: Comece com o primeiro nó, numere o Dof local na mesma ordem que os subscritos do sistema de coordenadas local relevante, e repetir para O segundo nó, Fig. 40.4.

Global: Dof para toda a estrutura: Começando com o 1o nó, número de todos os Dofs globais irrestritos, e então passar para o próximo até que todos os D.O.F global tenham sido numerados, Fig. 40.7.

40.7 Estático *vs.* Indeterminação cinemática

27 O grau de indeterminação estática foi definido anteriormente, o número de forças desconhecidas que não podem ser determinadas a partir das equações e equilíbrio apropriados (mais as equações das condições).

28 Por analogia, o *grau de indeterminação cinemática* é o *Total* número de desconhecidos deslocamentos em uma estrutura. Este conceito é fundamental para entender adequadamente o método dos deslocamentos que será coberto nos capítulos seguintes.

29 Com referência à Fig. 40.7, Os graus de indeterminação estática e cinemática são mostrados na tabela 40.1.

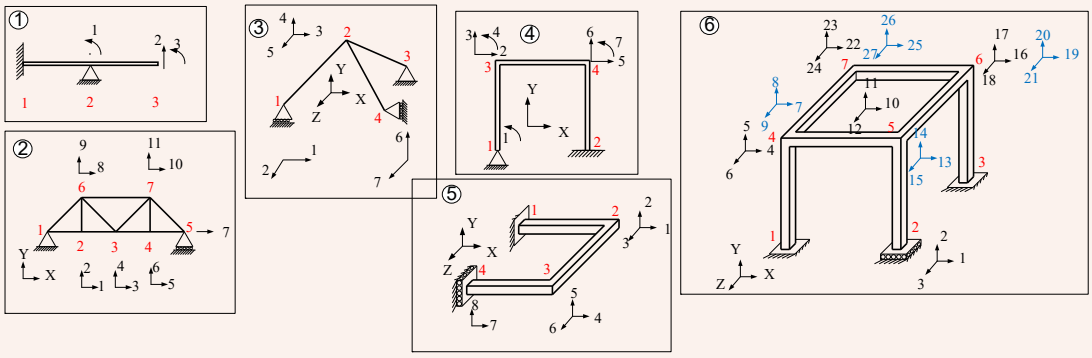


Figura 40.7: Graus de indeterminação estática e cinemática

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 40.1: Graus de indeterminação estática e cinemática

ID	Estático Indeterminação	Kinematic
1	1	3
2	0	11
3	0	7
4	2	7
5	2	6
6	9	27

40.8 Análise estrutural/mecânica; Um problema de valor limite

30 A análise de uma estrutura é essencialmente resolvendo um problema de valor limite (governado por um equação diferencial sobre o volume Ω, e sujeito ao espaço/temporal condições de contorno ao longo da fronteira Γ).

31 No nosso caso estamos discretizando nossa estrutura, e o governo equação diferencial (equilíbrio) está embutido em $\mathbf{K\Delta} = \mathbf{P}$.. E o limite pode ser decomposto em $\Gamma = \Gamma_t \bigcup \Gamma_u$ mesa 40.2.. Isso será detalhado em 47.2.6 .

Tabela 40.2: Essencial e natural condições de contorno

Γ	Tração	Displ.	Matemática.	Estruto.	DOF
Γ_t	$\mathbf{P}_t^{\checkmark}$	$\mathbf{\Delta}_t^{?}$	Neuman	Essencial	Livre
Γ_u	$\mathbf{R}_u^{?}$	$\mathbf{\Delta}_u^{\checkmark}$	Dirichlet	Natural	Fixo/Constrangido

32 Exemplos do problema de valor limite discretizado são mostrados na figura. 40.8 Para a viga e a represa, precisamos determinar o deslocamentos ao longo Γ_t e as forças (reações) ao longo Γ_u.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

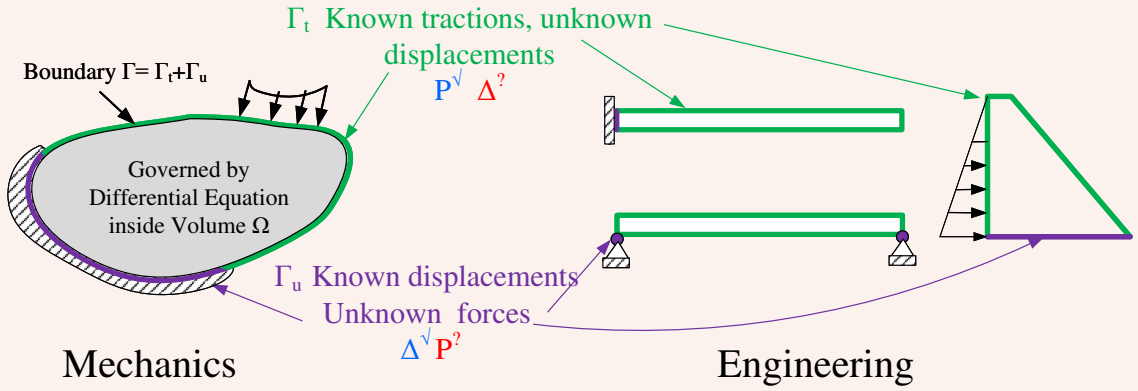
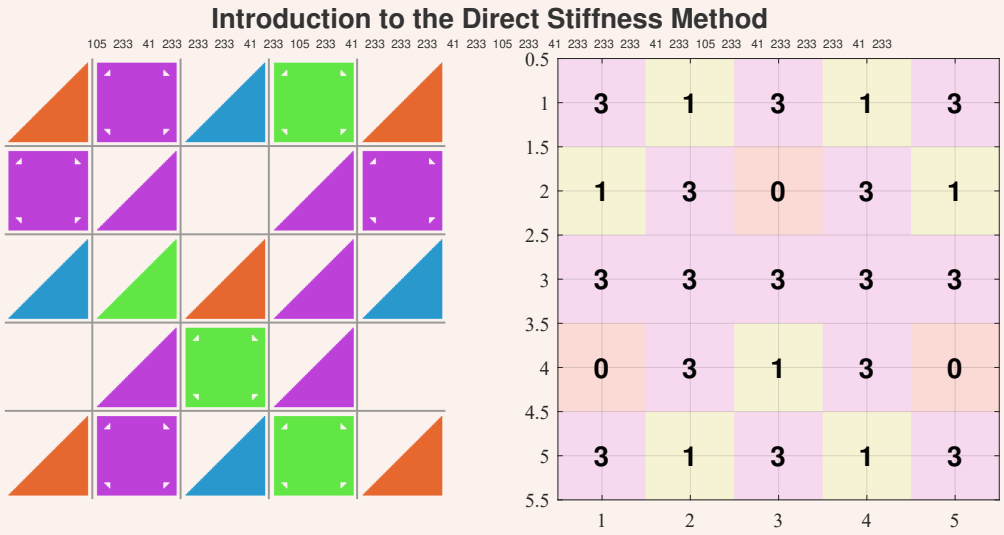


Figura 40.8: Problema de valor limite



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 41

Elemento Matrizes de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$

Abstract

No capítulo 26 nós temos expressões derivadas para forças (em equilíbrio) em termos de (compatível) deslocamentos. Muitas (mas não todas) dessas expressões foram usadas no capítulo seguinte (desflexão e distribuição de momento). Em preparação para o método da rigidez direta, nós precisaremos reorganizar essas expressões em forma de matriz, mais especificamente estaremos juntando o elemento matrizes de rigidez para diferentes tipos de elementos. Isso será expandido para incluir a torção de St Venant e Vlasov, assim como Timoshenko vigas.

41.1 Rigidez definição do termo 1525
41.2 Treliça elemento 1527
41.3 Viga: Euler-Bernoulli 1527
41.4 Elemento 2D pórtico (também conhecido como elemento viga-pilar) . . . 1528
41.5 Elemento da grade 1529
41.6 Elemento 3D viga-pilar 1529
41.7 Timoshenko viga 1532
41.7.1 Deformação adicional 1532
41.7.2 Modificação do elemento matriz de rigidez 1533
41.8 Torção Vlasov 1534

41.1 Rigidez definição do termo

1 Vamos revisitar as várias expressões para as forças em termos de conhecido deslocamentos derivado no capítulo 26, e reescrevê-los em forma de matriz. Isso resultará em chamado *rigidez coeficientes* k_{ij} Que correspondem à força em grau de liberdade i Devido a uma unidade deslocamento em grau de liberdade j, Fig. 41.1

2 Os coeficientes para diferentes tipos de elementos são mostrados na figura. 41.2. E correspondem às forças mostradas abaixo.

CÓPIA PARA REVISÃO

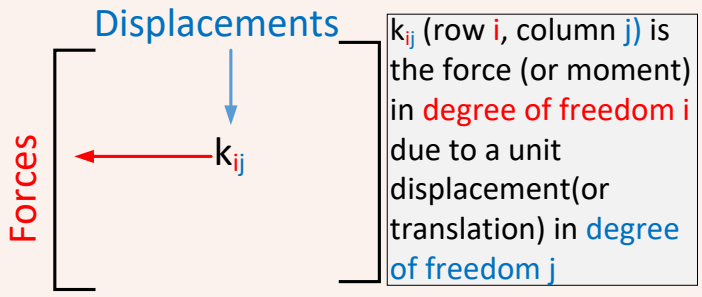


Figura 41.1: Definição do termo rigidez K_{ij}

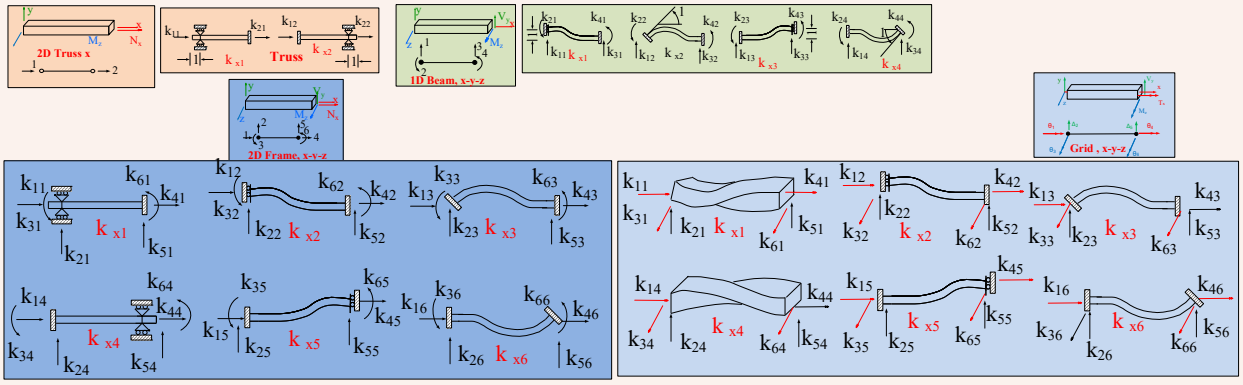


Figura 41.2: Rigidez coeficientes para vários tipos de elementos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 41.1: Esforços internos para diferentes tipos de elementos

	Forças			Momentos		
	x	y	z	x	y	z
Viga		V_y				M_z
2D Pórtico	N_x	V_y				M_z
Grelha		V_y		T_x		M_z
3D Pórtico	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z

3 Assim, este capítulo reunirá os coeficientes de elemento rigidez do Capítulo26, e armazená-los em formas matriciais: Elemento matrizes de rigidez.

41.2 Treliça elemento

4 O elemento treliça (seja em 2D ou 3D) tem apenas um grau de liberdade associado a cada nó. Por isso, da Eq. 26.1Nós temos

$$\mathbf{k}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

41.3 Viga: Euler-Bernoulli

5 Usando equações 26.4, 26.5, 26.8 e.. 26.9 Podemos determinar as forças associadas a cada unidade deslocamento.

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{matrix} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \text{Eq. } 26.8(v_1=1) & \text{Eq. } 26.8(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.8(v_2=1) & \text{Eq. } 26.8(\theta_2=1) \\ \text{Eq. } 26.4(v_1=1) & \text{Eq. } 26.4(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.4(v_2=1) & \text{Eq. } 26.4(\theta_2=1) \\ \text{Eq. } 26.9(v_1=1) & \text{Eq. } 26.9(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.9(v_2=1) & \text{Eq. } 26.9(\theta_2=1) \\ \text{Eq. } 26.5(v_1=1) & \text{Eq. } 26.5(\theta_1=1) & \text{Eq. } 26.5(v_2=1) & \text{Eq. } 26.5(\theta_2=1) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6 Substituindo

$$\mathbf{k}^{\text{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.1}$$

41.4 Elemento 2D pórtico (também conhecido como elemento viga-pilar)

7 2D pórtico elementos são viga elementos com um axial rigidez semelhante ao de um treliça. Por isso, $\mathbf{k}^{\text{2dfr}} = \mathbf{k}^{\text{b}} \cup \mathbf{k}^{\text{t}}$.. Devemos notar que não há acoplamento entre o forças axiais e o cisalhamento/momento.

$$\mathbf{k}^{\text{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\text{t}}_{11} & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{11} & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{13} & k^{\text{b}}_{14} \\ 0 & k^{\text{b}}_{21} & k^{\text{b}}_{22} & 0 & k^{\text{b}}_{23} & k^{\text{b}}_{24} \\ k^{\text{t}}_{21} & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{31} & k^{\text{b}}_{32} & 0 & k^{\text{b}}_{33} & k^{\text{b}}_{34} \\ 0 & k^{\text{b}}_{41} & k^{\text{b}}_{42} & 0 & k^{\text{b}}_{43} & k^{\text{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

8 Substituindo

$$\mathbf{k}^{\text{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

41.5 Elemento da grade

9 Matriz de rigidez do elemento da grade é muito análogo ao do elemento 2D pórtico, exceto que o componente axial é substituído pelo torcional.

$$\mathbf{k}^{\mathrm{g}} = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Eq. 23.13} & 0 & 0 & -\text{Eq. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ -\text{Eq. 23.13} & 0 & 0 & \text{Eq. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

10 Substituindo

$$[\mathbf{k}^{\mathrm{g}}] = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

41.6 Elemento 3D viga-pilar

11 Para o elemento 3D viga-pilar, nos lembramos dos 12 graus de liberdade, Fig. 41.3

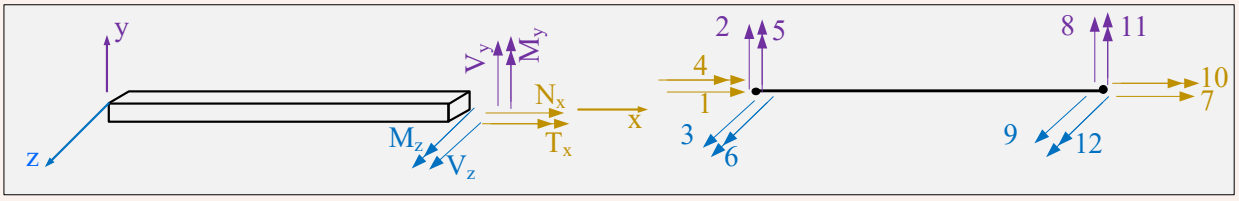


Figura 41.3: Elemento 3D viga-pilar

+

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

12 Agora, podemos reconstruir o elemento matriz de rigidez de termos já introduzidos nos de outros elementos mais simples.

$$\mathbf{k}^{\text{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\text{t}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{11} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{13} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{14} \\ 0 & 0 & k^{\text{b}}_{11} & 0 & -k^{\text{b}}_{12} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{13} & 0 & k^{\text{b}}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{\text{b}}_{21} & 0 & k^{\text{b}}_{22} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{24} & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{21} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{22} & 0 & k^{\text{b}}_{23} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{24} \\ k^{\text{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{31} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{32} & 0 & k^{\text{b}}_{33} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{34} \\ 0 & 0 & k^{\text{b}}_{31} & 0 & k^{\text{b}}_{42} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{33} & 0 & k^{\text{b}}_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{\text{b}}_{41} & 0 & k^{\text{b}}_{32} & 0 & 0 & 0 & -k^{\text{b}}_{43} & 0 & k^{\text{b}}_{44} & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{41} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{42} & 0 & k^{\text{b}}_{43} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

13 Substituindo, nós obtemos

$$\mathbf{k}^{\text{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z & 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z \\ 0 & 0 & \beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 & 0 & 0 & -\beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z & 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z \\ 0 & 0 & -\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 & 0 & 0 & \beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z \end{bmatrix} \end{array}$$

Onde

$$\alpha = \frac{EA}{L}; \quad \beta_i = \frac{12EI_i}{L^3}; \quad \gamma_i = \frac{6EI_i}{L^2}; \quad \delta_i = \frac{2EI_i}{L}; \quad \varepsilon = \frac{GI_x}{L};$$

e.. $i = [y|z]$

14 Esses coeficientes rigidez são mostrados na figura. 41.4

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

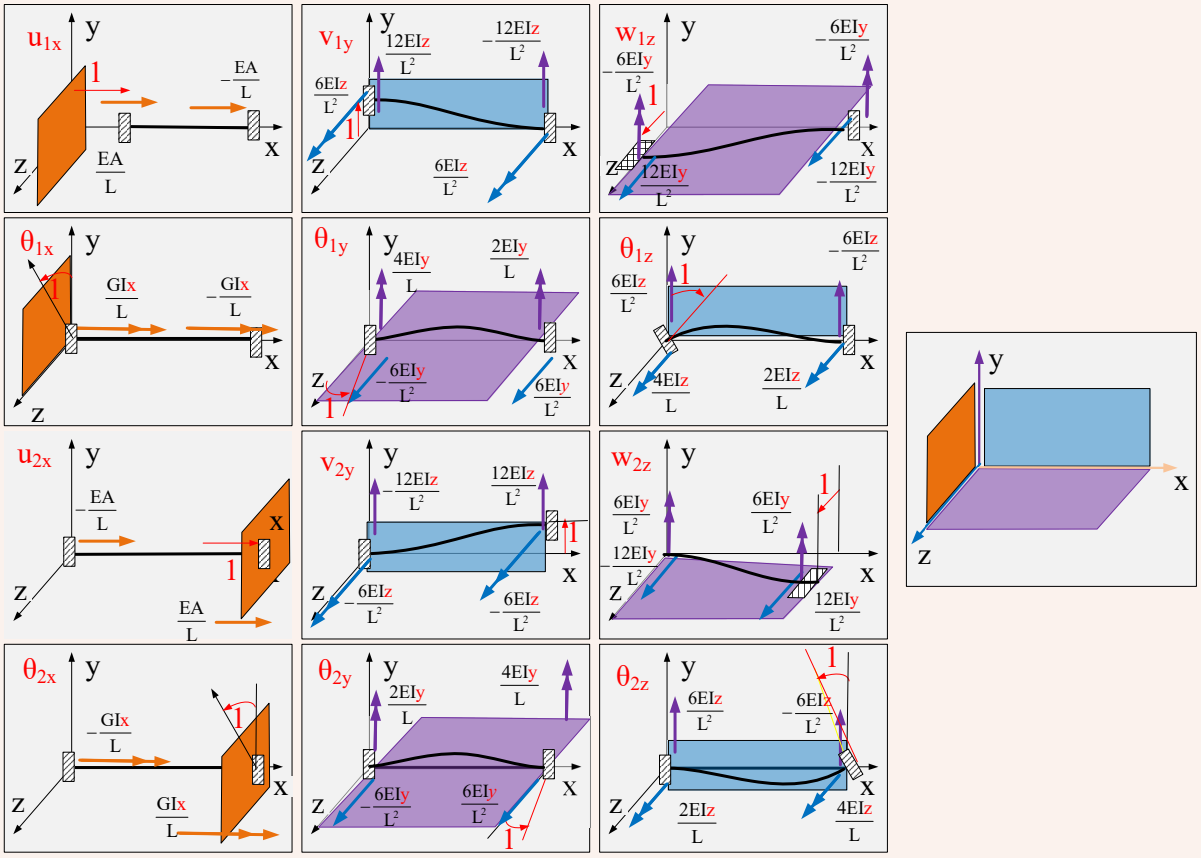


Figura 41.4: Individual rigidez termos em um 3D viga-pilar elemento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

41.7 Timoshenko viga

15 Em §23.1 temos expressões derivadas para a deformação adicional "parasitária" introduzida por cisalhamento deformações. Esta seção irá respondê-los ajustando a formulação original (Euler-Bernoulli) viga.

41.7.1 Deformação adicional

16 No espírito do método rigidez, nós impõemos uma unidade deslocamento (tradução ou rotação) no correspondente grau de liberdade enquanto todos os outros são mantidos a zero. No entanto, quando isso foi feito para flexura (§26.3), não contabilizamos cisalhamento deformação. O que, por sua vez, vai lançar alguns termos "parasitários"para as forças obtidas. Precisamos considerar o impacto deles quando tentamos impor uma unidade de tradução e rotação.

Tradução Para uma unidade imposta tradução, começamos por *arbitrariamente* definindo[1]

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \frac{12EI}{GA_sL^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_s}\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

Será mostrado mais tarde que v_s (Eq. 23.11) está relacionado com Φ. Lembre-se disso $A_s = A/\lambda_s$ (Eq. 23.4), então devido a um *Tradução vertical da unidade*, o fim força cortante é obtido de Eq. 26.8 E ajustando $v_1 = 1$ e.. $\theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0$, ou $V = \frac{12EI_z}{L^3}$. Em.. $x = 0$ Nós temos (Eq. 23.11)

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{GA_s} \\ V &= \tfrac{12EI_z}{L^3} \end{aligned}\right\} v_s = \underbrace{\frac{12EI}{GA_sL^2}}_{\Phi}$$

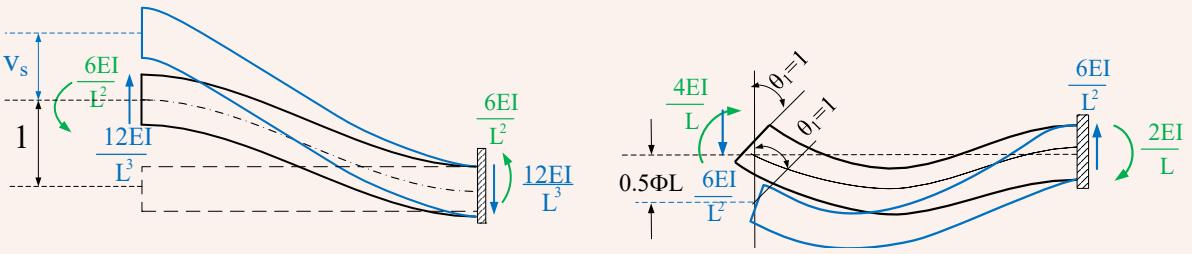
Assim, a deformação cisalhamento aumentou a tradução total de 1 para $1 + \Phi$.

Rotação Da mesma forma, agora procuramos determinar a deformação parasitária associada com uma rotação imposta da unidade. Embora uma rotação θ_1 é aplicado, um parasitário interno força cortante é induzido, e isso por sua vez vai dar origem a deformações (tradução) que devem ser canceladas (de novo, nós permitimos apenas uma grau de liberdade deformar, rotação neste caso, e todos os outros devem permanecer Zero, zero. O força cortante é obtido da Eq. 26.8 E ajustando $\theta_1 = 1$ e.. $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$, ou $V = \frac{6EI_z}{L^2}$.. Em.. $x = 0$, nós teremos

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{A_sG} \\ V &= \tfrac{6EI_z}{L^2} \\ \Phi &= \tfrac{12EI}{GA_sL^2} \end{aligned}\right\} v_s = 0.5\Phi L$$

[1] Lembre-se disso $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ e.. $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Tradução da unidade (b) Rotação da unidade

Figura 41.5: Deformação parasitária causada por deformações impostas

Assim, a deformação cisalhamento moveu o fim da viga (que deveria ter tradução zero) *Abaixem-se* Por, por, $0.5\Phi L$.

41.7.2 Modificação do elemento matriz de rigidez

17 Se cisalhamento deformações estão presentes, precisamos alterar o rigidez Matriz Eq. 41.1 para esses dois efeitos:

Tradução: dividir (ou normalizar) coeficientes do primeiro e terceiro pilares do matriz de rigidez por $1 + \Phi$ Para que a rede Tradução em ambas as extremidades é unidade caso contrário deslocamento seria $1 + \Phi$ Em vez disso.. de 1.

Rotação e o efeito da deformação cisalhamento

1. As forças induzidas nas extremidades devido a uma rotação de unidade no final 1 (Segunda pilar) negligenciando deformações, são

$$V_1 = -V_2 = \frac{6EI}{L^2}; \quad M_1 = \frac{4EI}{L}; \quad M_2 = \frac{2EI}{L}$$

2. Há uma tradução positiva de $0.5\Phi L$ No final 1 quando nós Aplicou uma rotação de unidade, sem forças adicionais induzidas.
3. Para uma rotação de unidade, todos os outros deslocamentos devem ser zero $\Rightarrow$.. Por isso, deve neutralizar esta deformação parasita cisalhamento por uma igual e oposta $\Rightarrow$ Aplique um adicional Δ vertical deslocamento. $-0.5\Phi L$ e as forças adicionais induzidas nas extremidades (primeiro pilar) são dadas por

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^b_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

$$\Delta M_1 = \Delta M_2 \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^b_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Denominadores já foram divididos por $1+\Phi$ Em k^b.

4. Resumindo todas as forças, temos as forças induzidas como resultado de uma rotação da unidade apenas quando os efeitos de dobra e deformações cisalhamento estão incluídos.

$$V_1 = -V_2 = \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^t_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = -\frac{6EI}{L^2}\frac{1}{1+\Phi}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{4EI}{L}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = \frac{4+\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI}{L}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = \frac{2-\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

18 Elemento matriz de rigidez dado em Eq. 41.1 se torna

$$\mathbf{k}^{\text{bv}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \end{bmatrix} \end{array}$$

41.8 Torção Vlasov

19 Eq. 23.2.2 desde a torção e bimomento em termos de rotação nodal final.

20 Aplicando as seguintes forças condições de contorno, (Bhatt, 1986)

$$\begin{array}{lll} \text{End 1} & x = 0, & T = -T_1, \quad B = -B_1, \\ \text{End 2} & x = L, & T = T_2, \quad\ \ B = B_2, \end{array}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Obtemos o elemento matriz de rigidez para um elemento de torção com dobra, Fig. 41.6

$$\left\{\begin{array}{c} T_{x1} \\ B_{y1} \\ T_{x2} \\ B_{y2} \end{array}\right\} = \frac{GJ}{L} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} TW_{11} & TW_{12} & -TW_{11} & TW_{12} \\ & TW_{22} & -TW_{12} & TW_{24} \\ & & TW_{11} & -TW_{12} \\ & & & TW_{22} \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{\mathrm{V}}} \left\{\begin{array}{c} \beta_{x1} \\ \beta'_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \beta'_{y2} \end{array}\right\} \tag{41.3}$$

e..

$$\begin{aligned} TW_{11} &= SpLD \\ TW_{12} &= L(C-1)D \\ TW_{22} &= L^2\left(C - \frac{S}{pL}\right)D \\ TW_{24} &= L^2\left(\frac{S}{pL} - 1\right)D \\ D &= \frac{1.0}{\left[2(1-C) + SpL\right]} \end{aligned}$$

[21] Note que $B_1 = M_{y1}d$ e.. $B_2 = M_{y2}d$ (Eq. 23.14)

[22] No entanto, este não é o elemento completo matriz de rigidez, como precisamos adicionar os Termos de St Venant ($\mathbf{k}^{gw} = \mathbf{k}^{\mathrm{g}} \cup bk^{V}$)

$$\left\{\begin{array}{c} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} \beta_{x1} & v_{y1} & \beta'_{y1} & \beta_{z1} & \beta_{x2} & v_{y2} & \beta'_{y2} & \beta_{z2} \\ TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 & -TW'_{11} - \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 \\ & \frac{12EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12}{EI}L^2 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ & & TW'_{22} & 0 & -TW'_{12} & TW'_{24} & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ & & & & TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & -TW'_{12} & 0 \\ & & & & & \frac{12EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & & TW'_{22} & 0 \\ & & & & & & & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{gw}} \left\{\begin{array}{c} \beta_{x1} \\ v_{y2} \\ \beta'_{y3} \\ \beta_{z4} \\ \beta_{x5} \\ v_{y6} \\ \beta'_{y7} \\ \beta_{z8} \end{array}\right\}$$

Onde $TW'_{ij} = \frac{GJ}{L}TW_{ij}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

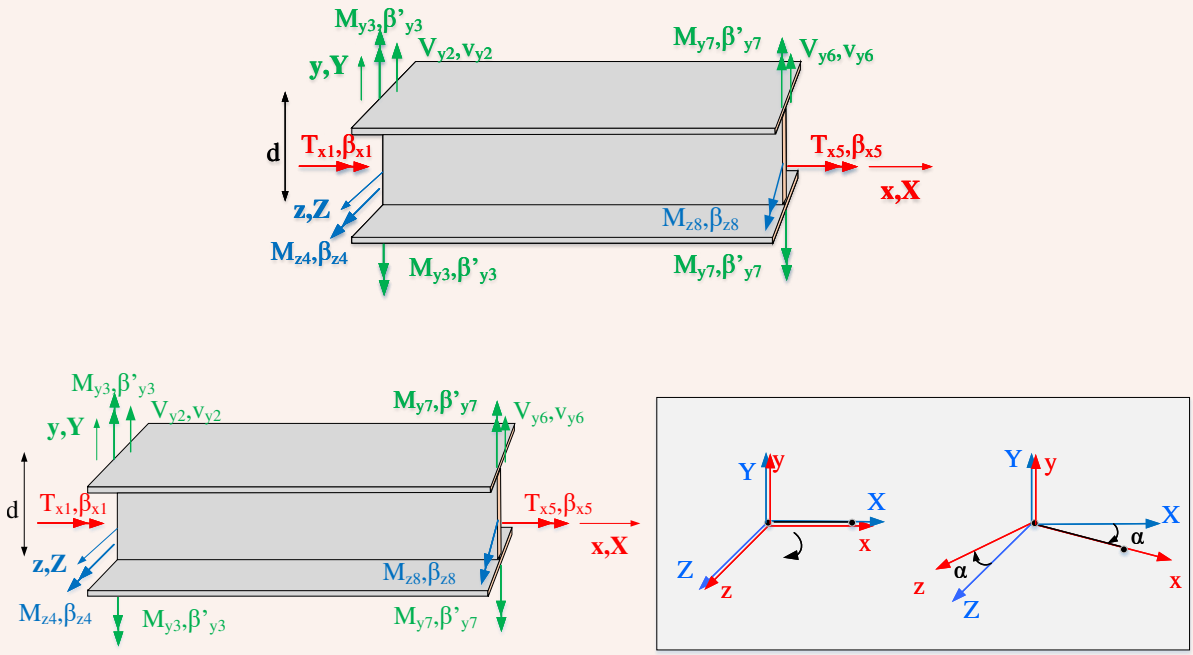
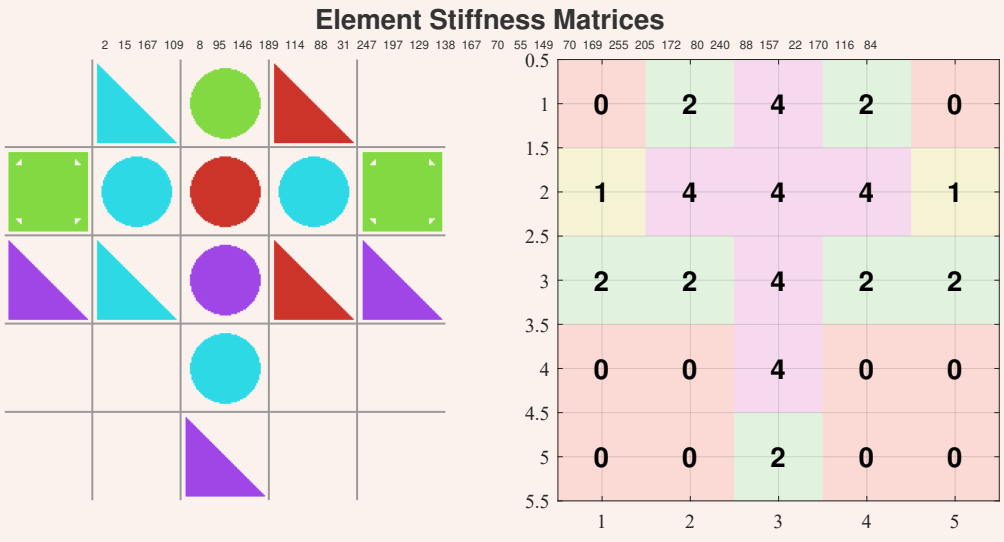


Figura 41.6: Forças finais e deslocamentos de um elemento de torção com contenção de dobra



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 42

Método; Eu, Estruturas Ortogonais

Abstract

Agora, o conceito de um elemento matriz de rigidez é entendido. Em seguida, precisamos estender este conceito a uma estrutura estrutural matriz de rigidez e analisar uma estrutura completa. No entanto, enfrentaremos o desafio de ajustar o elemento matriz de rigidez para alinhar com o sistema global de coordenadas da estrutura. Embora esta tarefa possa parecer simples, ela é deixada para o próximo capítulo. Neste capítulo, vamos simplificar o problema restringindo-nos a estruturas ortogonais, permitindo-nos ajustar o elemento matriz de rigidez por mera inspeção. Através desta simplificação, introduziremos um método sistemático para determinar o equilíbrio de toda a estrutura. Uma vez que o deslocamentos são computados, nós recuperaremos o esforços internos dentro dos elementos. Portanto, este capítulo é crítico em apresentar um método programável que estende os cálculos baseados na mão para o momento distribuição ou deflexão métodos introduzidos no Capítulo 27.

42.1 Introdução 1537
42.2 Teoria 1538
42.2.1 Flexibilidade revisitado . . . 1539
42.2.2 Método da rigidez direta . . 1539
42.2.3 De elemento para estrutura . 1540
42.3 Exemplos 1541
42.3.1 Ex 42.1: Ortogonal viga . . . 1541
42.3.2 Ex 42.2: Ortogonal pórtico . 1543
42.3.3 Ex 42.3: Grelha 1550
42.3.4 Ex 42.4: Híbrido pórtico . . . 1554
42.3.5 Ex 42.5: Grade híbrida 1558

42.1 Introdução

1 No capítulo anterior, derivámos primeiramente relações de força para diferentes tipos de elementos 1D ou haste, e então usamos essas relações para definir o elemento matrizes de rigidez em coordenadas locais para elementos individuais.

CÓPIA PARA REVISÃO

2 Neste capítulo, procuramos realizar operações semelhantes, mas para uma estrutura ortogonal em coordenadas globais.

3 No capítulo anterior, nosso ponto de partida era o básico deslocamento-força relações resultando em elemento matrizes de rigidez [**k**].

4 Neste capítulo, nosso ponto de partida são esses mesmos elementos Matrizes [**k**]E nosso objetivo é determinar a estrutura matriz de rigidez [**K**], que quando invertido, renderia o nodal deslocamentos.

5 O elemento matrizes de rigidez foi derivado para totalmente contido Elementos.

6 Este capítulo será restrito a estruturas ortogonais, e A generalização será discutida mais tarde. O matrizes de rigidez será restrito ao desenfreado graus de liberdade.

7 A partir desses exemplos, as inter-relações entre estrutura matriz de rigidez, nodal deslocamentos, e ações finais fixas se tornarão aparentes. Então o método será generalizado no capítulo 44 para descrever um algoritmo que pode automatizar a montagem da estrutura global matriz de rigidez em termos de um dos seus elementos individuais.

42.2 Teoria

8 Como um "veículo"para a introdução do método rigidez vamos considerar o problema em Fig 42.1, e reconhecer que existem apenas dois desconhecidos deslocamentos, ou mais precisamente, dois globais d.o.f: θ_1 e.. θ_2.

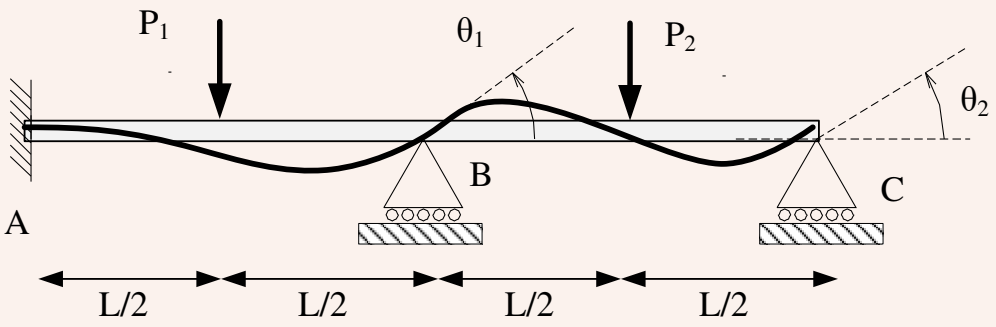


Figura 42.1: Viga exemplo para comparar os métodos flexibilidade e rigidez

9 Simplificando:

Flexibilidade: Quais são as forças (reacções) que irão garantir compatibilidade (de deslocamentos no Dof liberado)?

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Rigidez: O que são os deslocamentos] que garantirá o equilíbrio?

42.2.1 Flexibilidade revisitado

10 Se analisarmos este problema pelo método da força (ou flexibilidade], então

1. Nós fazemos a estrutura estaticamente determinada removendo *arbitrariamente* duas reações (enquanto a estrutura permanecer estável), e a viga agora está estaticamente determinado.
2. Assumindo que nós removemos os dois suportes do rolo, então determinamos as deflexões correspondentes devido à carga real (Δ_B e.. Δ_C).
3. Aplique uma carga unitária no ponto B, e então C, e computar as deflexões f_{ij} em nota i devido a uma força de unidade no nó j.
4. Escreva a compatibilidade da equação deslocamento

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. Inverta a matriz e resolva as reações

42.2.2 Método da rigidez direta

Para o contexto histórico, consultar §12.2.5

11 Vamos analisar este problema simples pelo método rigidez. Em nossa discretização, não resolvemos o problema como um contínuo através da solução de uma parcial equação diferencial, mas sim como um problema dicretizado através da álgebra linear. A discretização focará nas quantidades nodais, e se houver uma carga ao longo do elemento, devemos calcular a correspondente carga equivalente nodal (análogo às ações finais fixas, mas sinal oposto).

1. O primeiro passo consiste em torná-lo cinematicamente determinado (como opondo-se a determinar estaticamente no método flexibilidade). Kinematicamente determinado neste caso simplesmente significa restringir todo o dof e, assim, evitar rotação conjunta, Fig 42.2.
2. Então determinamos as ações de final fixo causadas pela carga do elemento, e somamos para cada ponto: A soma da carga equivalente nodal ΣNEL_1 e.. ΣNEL_2.
3. Na terceira etapa, aplicaremos uma unidade deslocamento (rotação neste caso) em cada grau de liberdade de cada vez, e em cada caso determinaremos as forças internas de reação, K_{11}, K_{21}, e K_{12}, K_{22} respectivamente. Note que usamos [**K**], em vez de [**k**] já que são forças no sistema de coordenadas global. Novamente, note que estamos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

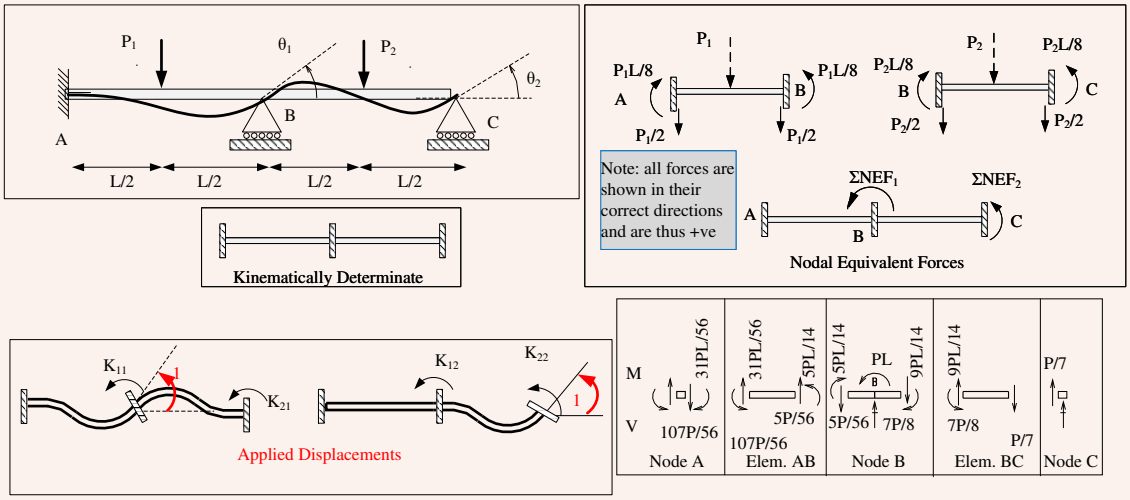


Figura 42.2: Exemplo de viga para determinar o grau de indeterminação cinemática

focando apenas nas forças de reação correspondentes a um global grau de liberdade. Por isso, nós Não estão tentando determinar a reação no nó A.

4. Finalmente, escrevemos a equação do equilíbrio em cada nó:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Sigma\text{NEL}_1 \\ \Sigma\text{NEL}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

12 Note que o FEM sendo do lado direito, eles são determinados como as reações à carga aplicada. Estritamente falando, é uma carga que deve aparecer no lado esquerdo da equação, e são as cargas nodais equivalentes à carga de elemento (mais sobre isso mais tarde).

13 Como com o elemento matriz de rigidez, cada entrada no global matriz de rigidez K_{ij}, corresponde ao esforço interno ao longo dof i devido a uma unidade deslocamento (generalizada) ao longo do dof j (ambos em sistemas de coordenadas globais).

42.2.3 De elemento para estrutura

14 Matriz de rigidez de elementos individuais foram anteriormente derivados em Sistema de coordenadas local, e atribuído letras minúsculas **k**.

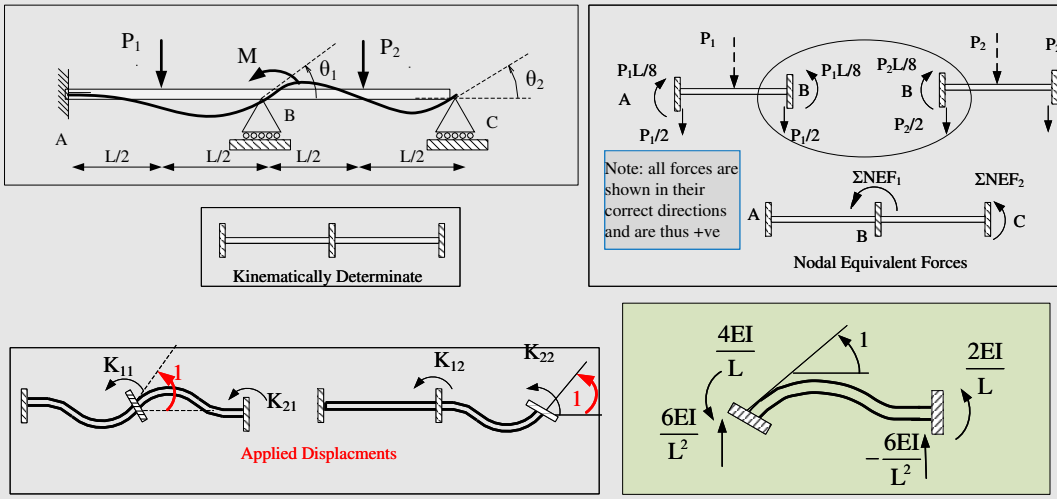
15 Agora, vamos precisar derivar o matriz de rigidez de uma estrutura em Sistema global de coordenadas E usará Cae superior **K**. Este capítulo aborda apenas estruturas ortogonais de tal forma que a transformação de **k** para **K** é intuitivo (tal como para as forças e deslocamentos).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

42.3 Exemplos

42.3.1 Ex 42.1: Ortogonal viga



Por.. $P_1 = 2P$, $M = PL$, e $P_2 = P$, nós procuramos resolver para o deslocamentos.

1. O grau de indeterminação cinemática é 2.
2. Usando a convenção de sinais previamente definida, determine a carga equivalente nodal (para a carga aplicada ao longo do membro)

$$\Sigma \text{NEF}_1 = \underbrace{\frac{P_1 L}{8}}_{BA} - \underbrace{\frac{P_2 L}{8}}_{BC} = \frac{2PL}{8} - \frac{PL}{8} = \frac{PL}{8}$$

$$\Sigma \text{NEF}_2 = \underbrace{\frac{PL}{8}}_{CB}$$

3. Se for preciso $\frac{4EI}{L}\left(k_{44}^{BA}\right)$ Para girar BA e.. $\frac{4EI}{L}\left(k_{22}^{BC}\right)$ Para girar BC, vai levar um Força total de $\frac{8EI}{L}$ Para girar simultaneamente BA e.. BC.. A soma das rigidezes rotacionais no Dof 1 global é $K_{11} = \frac{8EI}{L}$;
4. Da mesma forma, $K_{21} = \frac{2EI}{L}\left(k_{42}^{BC}\right)$. Se rodarmos o Dof 2 por um ângulo unitário, teremos $K_{22} = \frac{4EI}{L}\left(k_{22}^{BC}\right)$ e.. $K_{12} = \frac{2EI}{L}\left(k_{42}^{BC}\right)$. Equação de equilíbrio:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{NEF}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

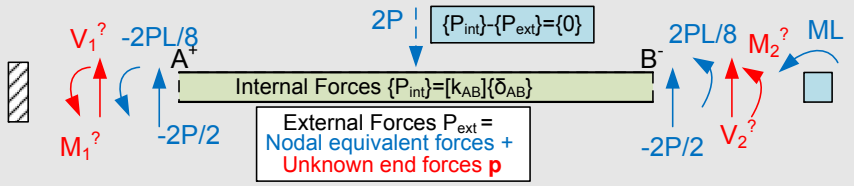
Note que temos $P_{ext} - P_{int} = 0$ e não $P_{ext} + P_{int} = 0$ Porque as forças externas devem ser resistidas pelos internos em uma direção igual e oposta. Substituindo, e reorganizando

$$\begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}$$

5. Inverter os dois por dois matriz

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

6. Em seguida, precisamos determinar o esforços internos
7. Lembre-se que para cada elemento $\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{k}]\{\boldsymbol{\delta}\}$E neste caso $\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\}$ e.. $\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\boldsymbol{\Delta}\}$ para elemento AB.. O elemento matriz de rigidez foi derivado anteriormente, e neste caso O Dof global e local são os mesmos. Em seguida, precisamos calcular o elemento esforços internos.
8. Equação de equilíbrio para o elemento AB, no nível do elemento, pode ser escrita como (note que devemos incluir as cargas equivalentes nodais para manter o equilíbrio):



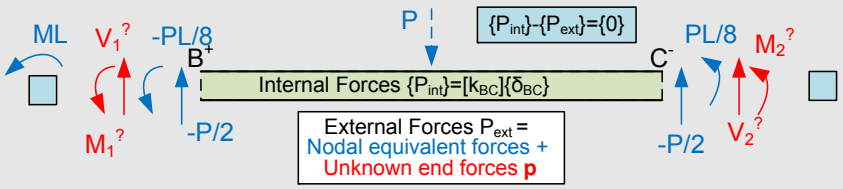
$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{2P}{2} \\ -\frac{2PL}{8} \\ -\frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{p_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{AB}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{AB}\}}}_{p_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Este passo é chamado Forçar a recuperação, i.e. determinamos o esforços internos do nodal deslocamentos. Resolvendo

$$\lfloor\ V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\ \rfloor = \lfloor\ \frac{107}{56}P \quad \frac{31}{56}PL \quad \frac{5}{56}P \quad \frac{5}{14}PL\ \rfloor$$

9. Da mesma forma, para o elemento BC:

CÓPIA PARA REVISÃO



$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{BC}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\left\{\boldsymbol{\delta}^{BC}\right\}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou

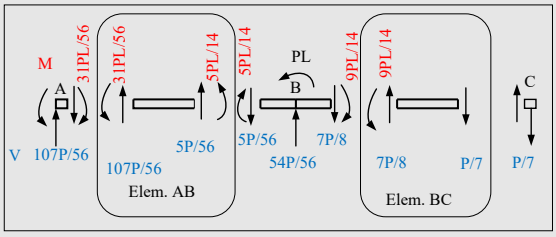
$$\lfloor\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4\ \rfloor = \lfloor\ \frac{7}{8}P \quad \frac{9}{14}PL \quad -\frac{P}{7} \quad 0\ \rfloor$$

10. Este exemplo simples exige as seguintes observações:

    (a) Node A tem contribuições de elementos AB Só, enquanto o nó B tem Contribuições de ambos AB e.. BC.

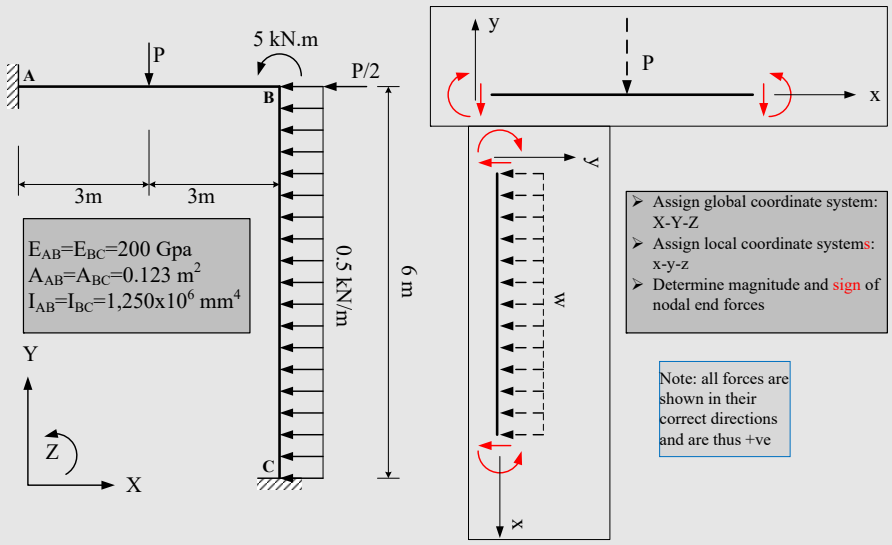
    (b) Observamos isso $p_3^{AB} \neq p_1^{BC}$ embora ambos correspondam a um força cortante no nó B, o A diferença entre eles é igual à reação em B.. Da mesma forma, $p_4^{AB} \neq p_2^{BC}$ devido ao momento aplicado externamente no nó B.

    (c) Deve concluir com o corpo livre, cisalhamento e diagramas de momento,



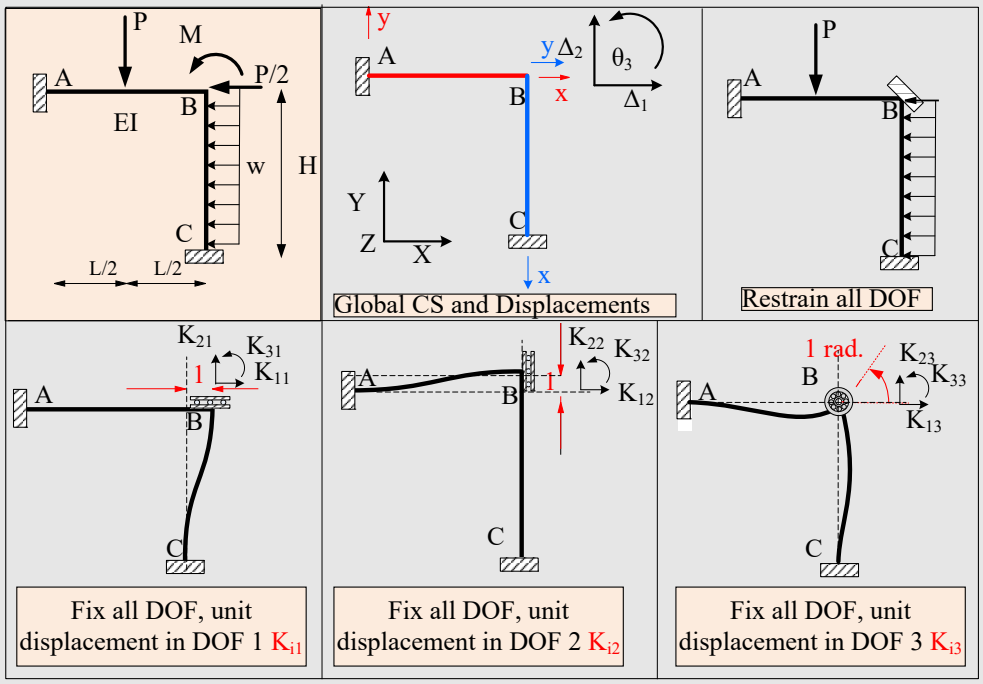
42.3.2 Ex 42.2: Ortogonal pórtico

CÓPIA PARA REVISÃO



$P = 2$ kN, $L = H = 6$ m, $M = 5$ KN.M, $w = 0.5$ kN/m, $E = 2\times10^8$ KPa, $A = 0.123$ m^2, e $I^b = I^c = 0.00125$ m^4.

1. Nós nos referimos à seguinte figura

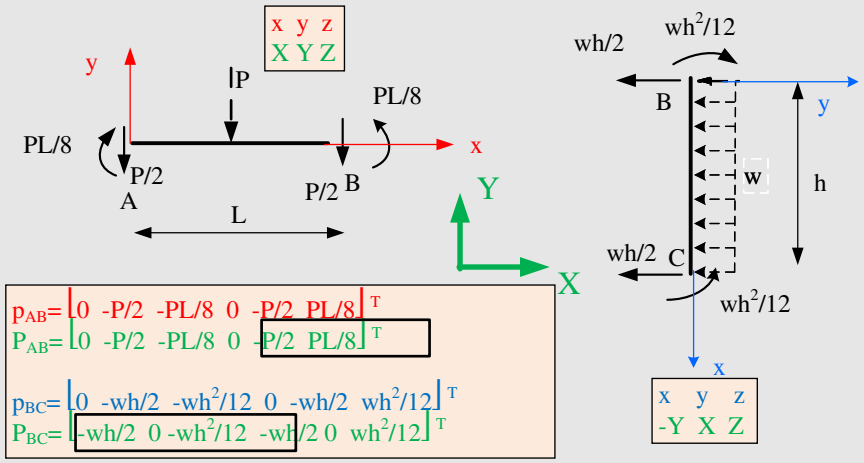


2. Assumindo deformações axiais, nós temos três globais graus de liberdade, Δ_1, Δ_2, e θ_3.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

3. Restrinjam todos os graus de liberdade, e assim tornam a estrutura cinematicamente determinada.
4. Determinar as cargas equivalentes nodais para cada elemento do sistema de coordenadas local em seu próprio sistema de coordenação local (elemento 1 é assumido como definido a partir de A para B, e elemento 2 de B para C)



$$\underbrace{\lfloor\, p_1^A \quad p_2^A \quad p_3^A \mid p_4^B \quad p_5^B \quad p_6^B \,\rfloor}_{AB} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad -\tfrac{(2)(6)}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad \tfrac{(2)(6)}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -1.0 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.0 \quad 1.5 \,\rfloor$$

$$\underbrace{\lfloor\, p_1^B \quad p_2^B \quad p_3^B \mid p_4^C \quad p_5^C \quad p_6^C \,\rfloor}_{BC} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad -\tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad \tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \,\rfloor$$

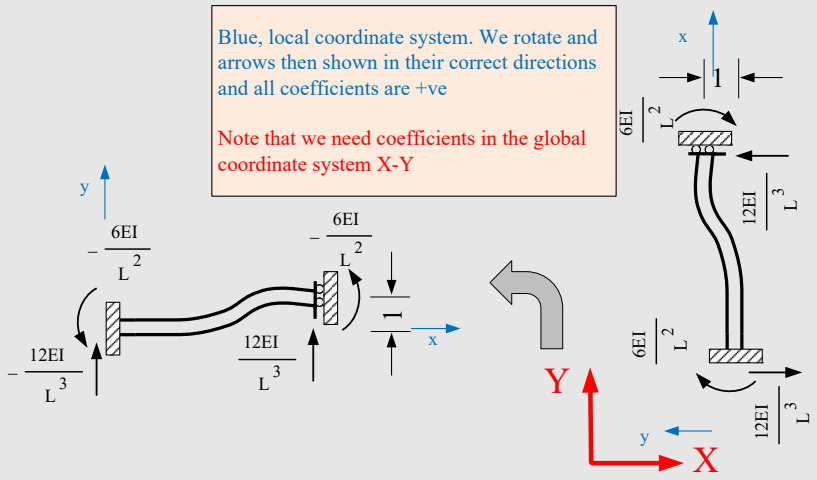
$$= \lfloor\, 0 \quad -1.5 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.5 \quad 1.5 \,\rfloor$$

e as forças equivalentes nodal no nó B teriam que ser somadas.

5. Aplique um Unidade deslocamento em cada um dos 3 global graus de liberdadePara determinar a estrutura Global matriz de rigidez. Cada entrada K_{ij} do global matriz de rigidez corresponderá ao esforço interno em grau de liberdade i, devido a uma unidade deslocamento em grau de liberdade j.
6. Recordando as relações da força deslocamento derivadas mais cedo, podemos montar o global matriz de rigidez em termos de contribuições tanto de AB e BC

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



7. Precisamos completar a tabela seguinte onde pilares correspondem à imposta deslocamentos na Dof j, e linhas correspondem ao correspondente induzido esforços internos em cada um dos elementos no dof i.. Ambos estão no sistema de coordenadas global.

   - $K_{1,2}$ é zero porque um imposto deslocamento ao longo dof 2 (horizontal), enquanto trava todos os outros deslocamentos, não induz um esforço interno em nenhum dos dois elementos.
   - K_{31} são os esforços internos (momentos aqui) resultantes de uma unidade imposta deslocamento em dof 1 (horizontal). Isso não vai "mobilizar"AB, mas irá ativar a flexão para BC. Para BC a partir da figura seguinte (já mostrado acima)
   - Note que todos os termos diagonais são +ve, e que a tabela é simétrica.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} θ_3
K_{1j} (F_X)	AB BC	$\frac{EA}{L}$ $\frac{12EI^c}{H^3}$	0 0	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$
K_{2j} (F_Y)	AB BC	0 0	$\frac{12EI^b}{L^3}$ $\frac{EA}{H}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0
K_{3j} (M_Z)	AB BC	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0	$\frac{4EI^b}{L}$ $\frac{4EI^c}{H}$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

8. Resumindo, a estrutura global [**K**] é:

$$[\mathbf{K}] = \begin{matrix} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{21}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{23}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{11}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{13}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{65}^{AB}+k_{31}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{33}^{BC} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

9. Substituindo

$$[\mathbf{K}] = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

Note que o axial rigidez (EA/L) é 4.1×10^6, enquanto o flexural ($12EI/H^3$) é 0.0071×10^6. Axial rigidez é sempre muito maior que a flexão rigidez. Nós precisamos ter P_{ext} no sistema global de coordenadas.. Das equações anteriores: Nós tivemos..

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} p_1^A & p_2^A & p_3^A & p_4^B & p_5^B & p_6^B \end{array} \right\rfloor}_{AB} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{array} \right\rfloor$$

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} p_1^B & p_2^B & p_3^B & p_4^C & p_5^C & p_6^C \end{array} \right\rfloor}_{BC} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{wH}{2} & -\frac{wH^2}{12} & 0 & -\frac{wH}{2} & \frac{wH^2}{12} \end{array} \right\rfloor$$

Elenco no sistema de coordenadas global, que será

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} P_1^A & P_2^A & P_3^A & P_4^B & P_5^B & P_6^B \end{array} \right\rfloor}_{AB} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{array} \right\rfloor$$

$$\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} P_1^B & P_2^B & P_3^B & P_4^C & P_5^C & P_6^C \end{array} \right\rfloor}_{BC} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{wH}{2} & 0 & -\frac{wH^2}{12} & -\frac{wH}{2} & 0 & \frac{wH^2}{12} \end{array} \right\rfloor$$

10. A equação global do equilíbrio pode ser escrita agora (note que para fins ilustrativos, mantivemos w E um momento M no nó B).

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ 0 \\ M \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{wH}{2} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8}-\frac{wH^2}{12} \end{Bmatrix}}_{NEL} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

11. Substituindo:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ -0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL} = \underbrace{10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

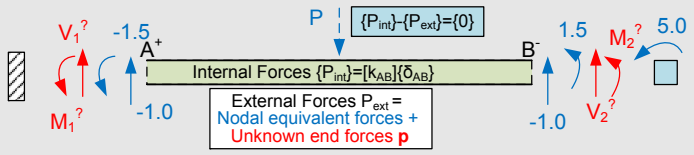
12. Resolva para o deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2 \\ -0.5 \\ 4.25 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -0.61 \text{ m} \\ 0.0084 \text{ m} \\ 12.82 \text{ radian} \end{Bmatrix}$$

13. Para obter o Elemento esforços internos, multiplicar cada elemento matriz de rigidez pelo Local deslocamentos.. Para o elemento AB, as coordenadas locais e globais coincidem



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} = \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & -4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & -13,889. & 41,667. \\ - & - & - & 0 & -41,667. & 83,333. \\ - & - & - & 4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 13,889. & -41,667 \\ - & - & -. & 0 & -41,667 & 166,667. \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{AB}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ 0.0084 \\ 12.82 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}^{AB}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -0.75 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL^{AB}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

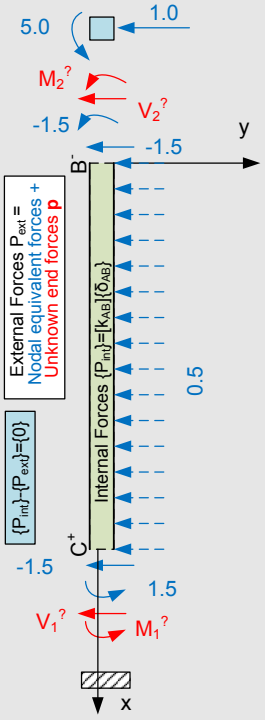
ou

$$\left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 2.52\ \text{kN} \\ 1.03\ \text{kN} \\ 1.82\ \text{kN.m.} \\ \hline -2.52\ \text{kN} \\ -0.034\ \text{kN} \\ 1.39\ \text{kN.m} \end{array}\right\}$$

14. Para o elemento BC, as coordenadas locais e globais não batem, portanto precisamos transformar o deslocamentos de seu global para seus componentes de coordenadas locais.. Por inspeção

Local	x	y	z
Global	$-Y$	$+X$	$+Z$

15. Daí o esforços internos para o elemento BC são dados por:



CÓPIA PARA REVISÃO

$$\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 13,888.9 & 41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 16,6667. & - & - & - \\ -4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & -13,888.9 & -41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 83,333.3 & - & - & - \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{BC}}$$

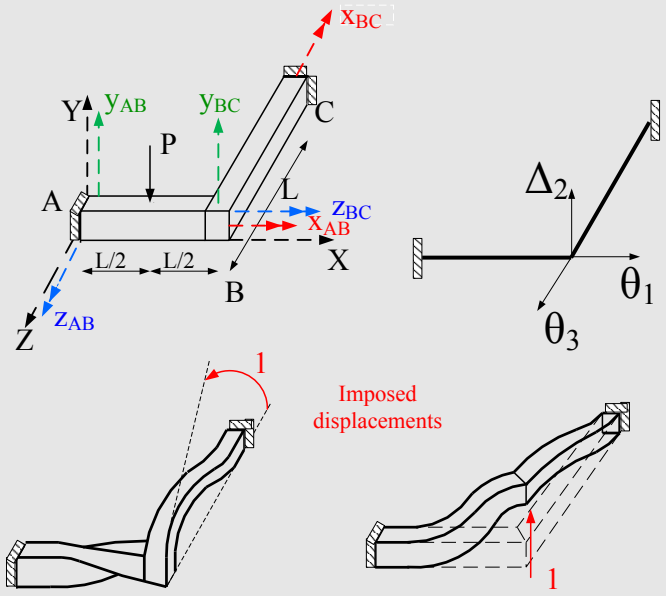
$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} -0.0084 \\ -0.61 \\ 12.82 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\delta}^{BC}} - \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -0.034 \text{ kN} \\ 2.026 \text{ kN} \\ 3.612 \text{ kN.m} \\ 0.0344 \text{ kN} \\ 0.974 \text{ kN} \\ -0.456 \text{ kN.m} \end{array}\right\}$$

A MATLAB®código para este exemplo é dado em §I.2.4

42.3.3 Ex 42.3: Grelha

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Os dois elementos têm rigidez de flexão e torção idêntica, EI e.. GJ.

1. Identifique os três graus de Liberdade, θ_1, Δ_2, e θ_3.
2. Restrinjam todas as cargas nodais.

$$\left\{\begin{array}{c} T_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{array}\right\}}_{\text{@node A}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{array}\right\}}_{\text{@node B}}$$

3. Aplique uma unidade deslocamento ao longo de cada um dos três graus de liberdade, e determine o esforços internos:

Dof 1 Global

(a) AB (Torsão) $K_{11}^{AB} = \frac{GJ}{L}$, $K_{21}^{AB} = 0$, $K_{31}^{AB} = 0$
(b) A.C. (Flexure) $K_{11}^{BC} = \frac{4EI}{L}$, $K_{21}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$, $K_{31}^{BC} = 0$

Global dof 2

(a) AB (Flexure): $K_{12}^{AB} = 0$, $K_{22}^{AB} = \frac{12EI}{L^3}$, $K_{32}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$
(b) - Sim. $K_{12}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$, $K_{22}^{BC} = \frac{12EI}{L^3}$, $K_{32}^{BC} = 0$

Global dof 3

(a) AB (Flexure): $K_{13}^{AB} = 0$, $K_{23}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$, $K_{33}^{AB} = \frac{4EI}{L}$
(b) Não, não, não. $K_{13}^{BC} = 0$, $K_{23}^{BC} = 0$, $K_{33}^{BC} = \frac{GJ}{L}$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Reúna a estrutura matriz de rigidez

$$
\begin{aligned}
2\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{33}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{31}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{23}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{21}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{13}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{11}^{BC} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{AB}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{BC}]} \\
&= \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \alpha L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha L^2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{Structure}]}
\end{aligned}
$$

   Onde $\alpha = \frac{GJ}{EI}$E na última equação supõe-se que para o elemento BC, o nó 1 corresponde a C e 2 a B.

5. A equação de equilíbrio da estrutura em forma de matriz:

$$
\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{P}_{nodes}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{el}^{B}}}_{\mathbf{P}_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \Delta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{\Delta}\}}}_{\mathbf{P}_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

6. Invertendo e resolvendo para o deslocamentos

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{16EI}\frac{5+2\alpha}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \\ -\frac{PL^3}{96EI}\frac{5+2\alpha}{1+\alpha} \\ -\frac{3PL^2}{16EI}\frac{1}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \end{Bmatrix}
$$

7. Mapa entre local e global

$$
\text{AB}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & X \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & Z \end{Bmatrix}; \qquad \text{BC}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & -Z \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & X \end{Bmatrix}
$$

8. Determinar o esforços internos multiplicando cada elemento matriz de rigidez **[k]** Pelo vetor de nodal deslocamento $\{\delta\}$.. Ambos devem estar no sistema de coordenadas local.

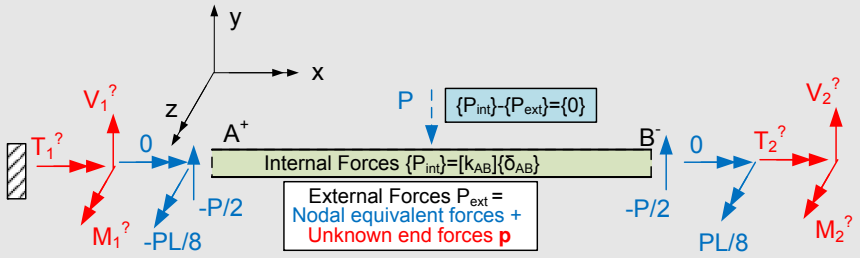
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

AB e BC o vetor de nodal deslocamentos são

$$\left\{\begin{array}{c}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ \hline \delta_4\\ \delta_5\\ \delta_6\end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\}}_{AB} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\theta_3\\ \Delta_2\\ \theta_1\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{BC}$$

AB

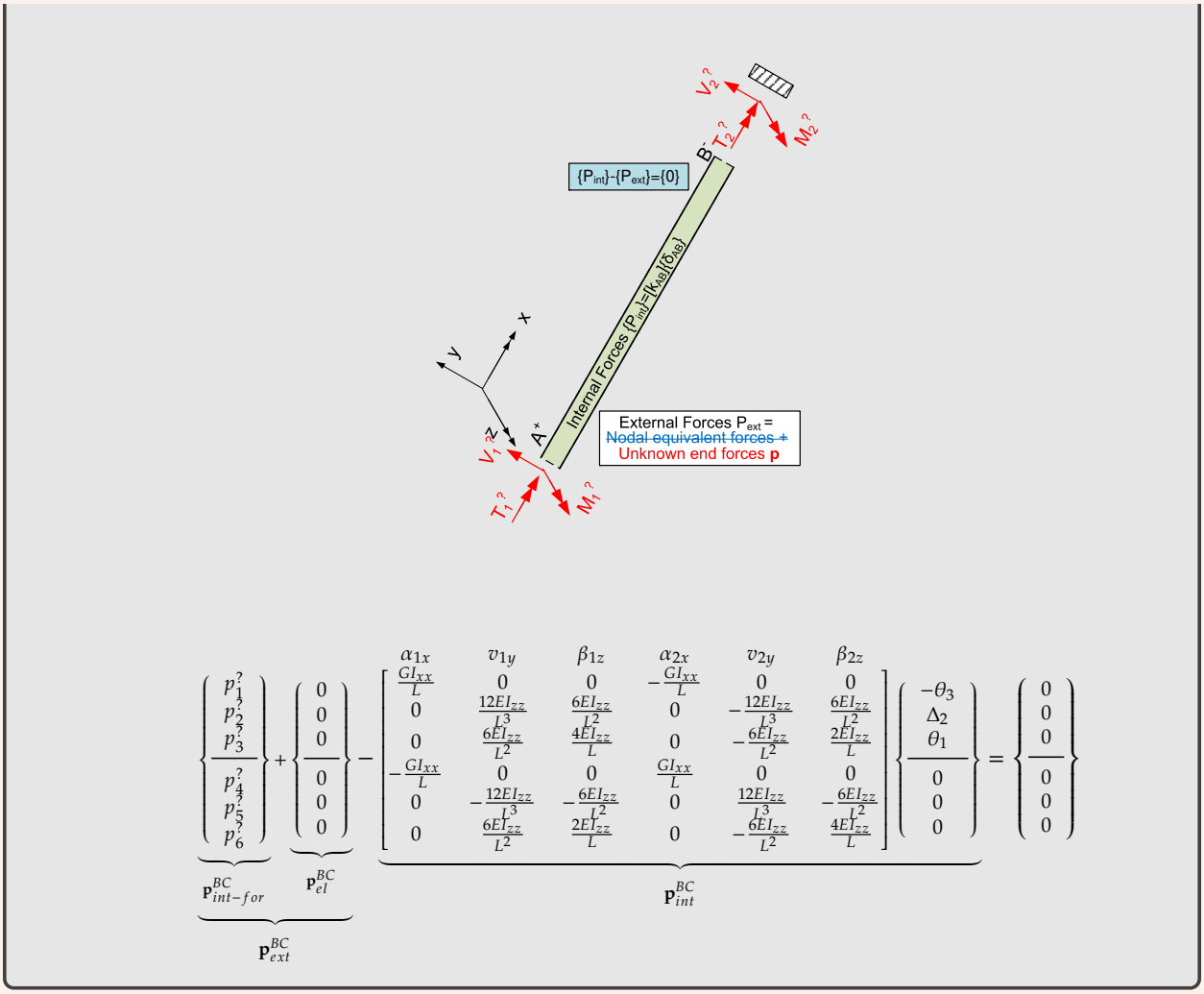


$$\underbrace{\underbrace{\left\{\begin{array}{c}p_1^?\\ p_2^?\\ p_3^?\\ \hline p_4^?\\ p_5^?\\ p_6^?\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}^{AB}_{int-for}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ -P/2\\ -PL/8\\ \hline 0\\ -P/2\\ PL/8\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}^{BC}_{el}}}_{\mathbf{p}^{AB}_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}\alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z}\\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L}\\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L}\end{array}\right]}_{\mathbf{p}^{AB}_{int}} \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$$

BC

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{int-for}^{BC}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{el}^{BC}} - \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{array}\right]}_{\mathbf{p}_{int}^{BC}} \left\{\begin{array}{c} -\theta_3 \\ \Delta_2 \\ \theta_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

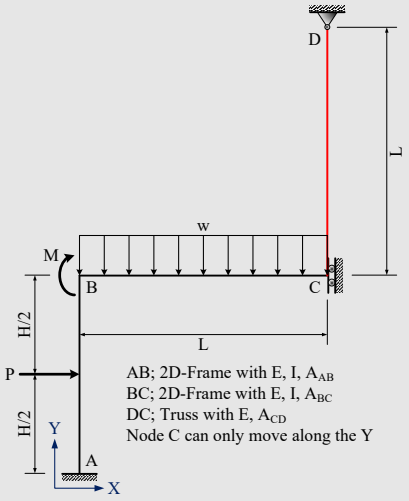
$\mathbf{p}_{ext}^{BC}$

42.3.4 Ex 42.4: Híbrido pórtico

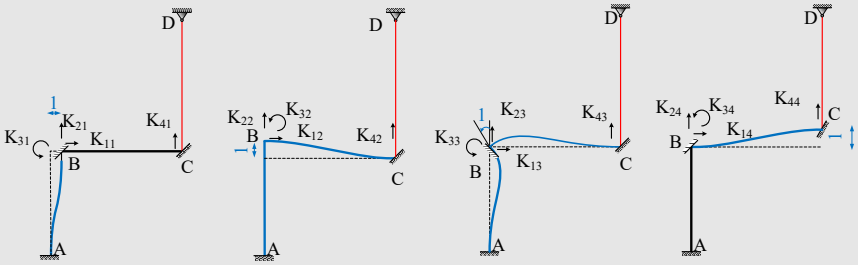
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós procuramos analisar isso pórtico para $E = 200$ GPa, $I = 200 \times 10^6$ mm^4, $L_{AB} = H = 8$m, $L_{BC} = L_{DC} = 10$ m, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000$ mm^2, $A_{DC} = 100$ mm^2, $P = 10$ kN, $M = P \cdot L_{BC}$ e.. $w = 1$kN/m. Use GPa, KN e mm.



1. O Dof Global é $\Delta_1^{BH}, \Delta_2^{BV}, \Delta_3^{BZ}, \Delta_4^{CV}$
2. Identifique os Dofs globais e desenhe a correspondente deformação



3. Tabule as forças reais associadas a cada unidade deslocamento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

		K_{i1}	K_{i2}	K_{i3}	K_{i4}
		Δ_1	Δ_2	θ_3	Δ_4
K_{1i}	AB	$\frac{12EI}{L_{AB}^3}$	0	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0
	BC	$\frac{EA_{BC}}{L_{BC}}$	0	0	0
	DC	0	0	0	0
K_{2i}	AB	0	$\frac{EA_{AB}}{L_{AB}}$	0	0
	BC	0	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	0
K_{3i}	AB	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0	$\frac{4EI}{L_{AB}}$	0
	BC	0	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{4EI}{L_{BC}}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$
	DC	0	0	0	0
K_{4i}	AB	0	0	0	0
	BC	0	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	$\frac{EA_{DC}}{L_{DC}}$

4. Reúna analiticamente o global matriz de rigidez, escreva o equilíbrio da equação global.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_{AB}^3} + \frac{EA_{BC}}{L_{BC}} & 0 & \frac{6EI}{L_{AB}^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA_{AB}}{L_{AB}} + \frac{12EI}{L_{BC}^3} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} \\ \frac{6EI}{L_{AB}^2} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{4EI}{L_{AB}} + \frac{4EI}{L_{BC}} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{12EI}{L_{BC}^3} \frac{EA_{DC}}{L_{DC}} \end{bmatrix}}_{K_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}}_{\Delta}$$

onde, NF são forças nodais e forças equivalentes nodalas NEF. Para determinar Δ,

$$\Delta = [K_{tt}]^{-1}(NF + NEF)$$

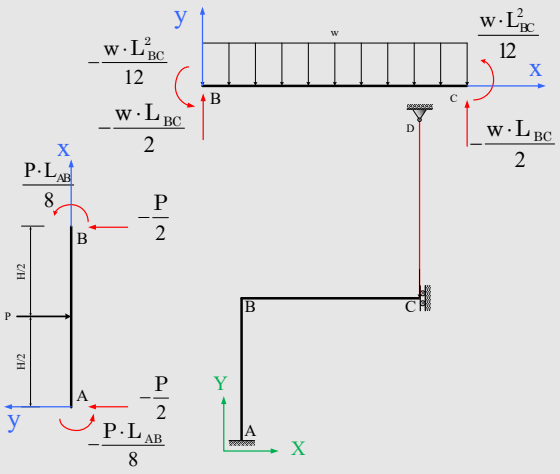
5. Forças finais nodais. Mas primeiro, mapeie sistemas de coordenadas locais e globais

Global	X	Y	Z
AB	-y	x	z
BC	x	y	z

Local	x	y	z
AB	Y	-X	Z
BC	X	Y	Z

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

6. Substituta com $E = 200GPa$, $I = 200\times10^6 mm^4$, $L_{AB} = H = 8m$, $L_{BC} = L_{DC} = 10m$, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000mm^2$, $A_{DC} = 100mm^2$, $P = 10kN$, $M = P\cdot L_{BC}$ e.. $w = 1kN/m$.. Determine as forças nodais finais, e então resolva para o nodal deslocamentos. MATLAB®O roteiro está dentro §I.2.5

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1640\ [mm] \\ -2.36\times10^{-5}\ [mm] \\ -0.00308\ [radian] \\ -4.999\ [mm] \end{Bmatrix}$$

7. Determine o esforços internos em todos os membros.
8. Colete elementos nodal e cargas equivalentes:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_2 \quad -\Delta_1 \quad \theta_3\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad 0.0 \quad 0.00 \quad -23.6e-006 \quad -164.03e-003 \quad -3.08e-003\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{AB}} &= \lfloor\ 0 \quad -P/2 \quad -PL_{AB}ab/8; 0 \quad -P/2 \quad PL_{AB}/8\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -10,000.0 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 10,000\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{\delta}_{BC} &= \lfloor\ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_3 \quad 0 \quad \Delta_4 \quad 0\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 164.03e-003 \quad -23.6e-006 \quad -3.08e-003 \quad 0.0 \quad -5.00 \quad 0.0\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{BC}} &= \lfloor\ 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad -wL_{BC}^2/12 \quad 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad wL_{BC}^2/12\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -8,333 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 8,333\ \rfloor^T
\end{aligned}$$

9. Compute esforços internos de

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} NEF_1 \\ NEF_2 \\ NEF_3 \\ \hline NEF_4 \\ NEF_5 \\ NEF_6 \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

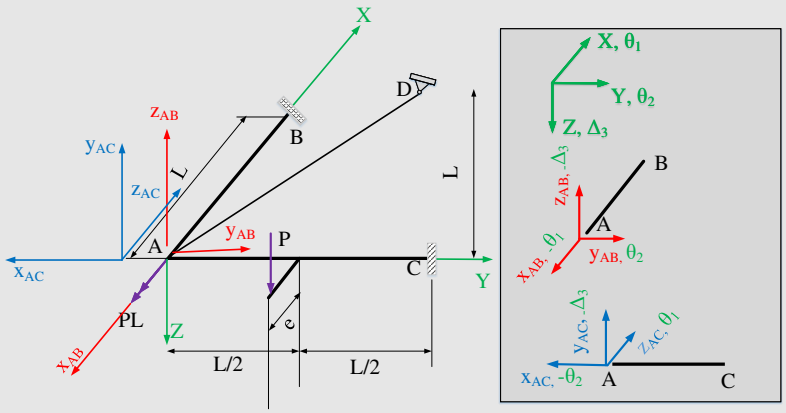
10. Substituindo

$$\mathbf{p}_{AB} = \left\{ \begin{array}{c} P_A^x \\ V_A^y \\ M_A^z \\ \hline P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.00295\ [kN] \\ -6.403\ [kN] \\ -20,203.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -0.00295\ [kN] \\ 16.403\ [kN] \\ -71,021.\ [kN \cdot mm] \end{array} \right\}; \mathbf{p}_{BC} = \left\{ \begin{array}{c} P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \\ \hline P_C^x \\ V_C^y \\ M_C^z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 16.403\ [kN] \\ 0.00295\ [kN] \\ -28,979.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -16.403\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \\ -20,991.\ [kN \cdot mm] \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{p}_{DC} = \left\{ \begin{array}{c} P_D^x \\ P_C^x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -9.997\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \end{array} \right\} \text{ (Tension)}$$

42.3.5 Ex 42.5: Grade híbrida

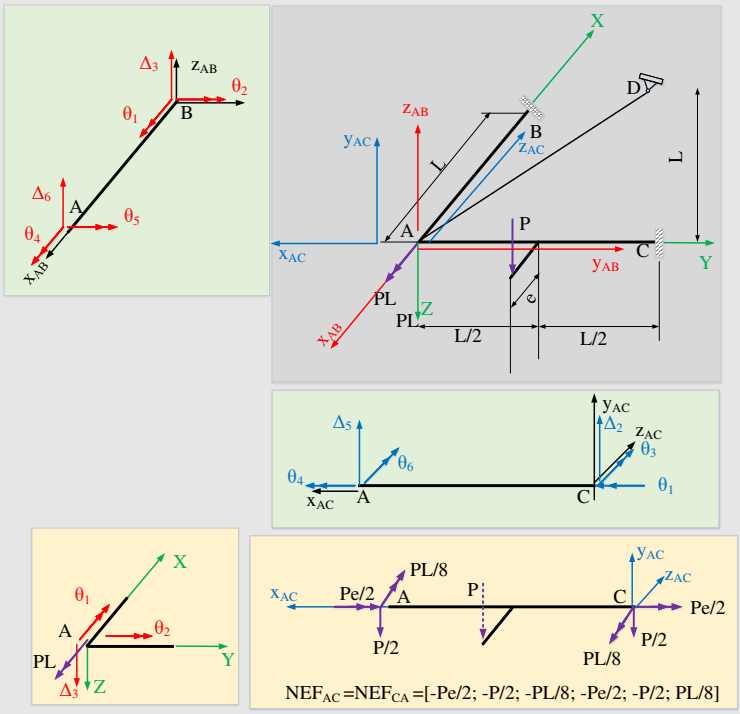
Analise a seguinte grade



O membro da nota AD é um cabo caracterizado por A e.. E e está na $Y-Z$ Avião. Alguns dos eixos de coordenadas locais para os dois membros são mostrados em vermelho e azul. Use L=10 m; E=200 GPa; $I = 200 \times 10^6 \text{mm}^4$; $J = I_{xx} = 4 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $A_{AD} = 100\ \text{mm}^2$, e = 1m, e P10 kN. Use GPa, KN e mm.

1. Os três globais são θ_1^X, θ_2^Y e.. Δ_3^Z.

CÓPIA PARA REVISÃO



2. (a) O carga concentrada causará momento e torção em cada uma das duas extremidades. Assim, as forças equivalentes nodais (no sistema de coordenadas locais) são

$$\begin{aligned}
NEF_{CA} &= \lfloor\ -Pe/2 \quad -P/2 \quad -PL/8 \mid -Pe/2 \quad -P/2 \quad PL/8\ \rfloor^T \text{ Nodes C and A}\\
&= \lfloor\ -5,000 \quad -5 \quad -12,500 \mid -5,000 \quad -5 \quad 12,500\ \rfloor^T\\
NEF_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \text{ Nodes A and B}\\
NF &= \lfloor\ -PL \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T\\
&= \lfloor\ -100,000 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T
\end{aligned}$$

(b) Rotação da unidade no Dof 1

$$\begin{array}{llllll}
\text{AB} & \text{Torsion} & K_{11} = \frac{GJ}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = 0\\
\text{AC} & \text{Flexure} & K_{11} = \frac{4EI}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = \frac{6EI}{L^2}
\end{array}$$

(c) Rotação da unidade no dof 2

$$\begin{array}{llllll}
\text{AB} & \text{Flexure} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{4EI}{L} & K_{32} = -\frac{6EI}{L^2}\\
\text{AC} & \text{Torsion} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{GJ}{L} & K_{32} = 0
\end{array}$$

(d) Unidade deslocamento no Dof 3

$$\begin{array}{llllll}
\text{AB} & \text{Flexure} & K_{13} = 0 & K_{23} = -\frac{6EI}{L^2} & & K_{33} = \frac{12EI}{L^3}\\
\text{AC} & \text{Flexure} & K_{13} = \frac{6EI}{L^2} & K_{23} = 0 & & K_{33} = \frac{12EI}{L^3}\\
\text{Cable} & & & K_{33} = \frac{AE}{\sqrt{2}L}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AE}{2L} & &
\end{array}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(e) Sistema de coordenadas local para cada elemento

(f) Escrevendo a equação de equilíbrio (note o realinhamento da carga equivalente nodal em sistema global de coordenadas).

$$\left\{\begin{array}{c} -PL \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} PL/8 \\ Pe/2 \\ P/2 \end{array}\right\} = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{ccc} (4+\eta)L^2 & 0 & 6L \\ 0 & (4+\eta)L^2 & -6L \\ 6L & -6L & 24+\frac{AE}{2L}\xi \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{array}\right\}$$

Onde $\eta = \frac{GJ}{EI}$ e.. $\xi = \frac{L^3}{EI}$.

ou

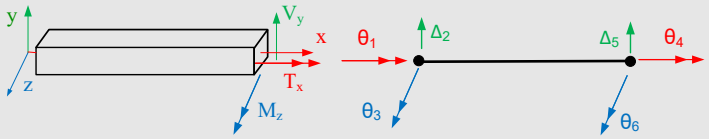
$$\left\{\begin{array}{c} -100,000 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 12,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{array}\right\} = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{ccc} 1.6032\times10^7 & 0. & 2400. \\ 0. & 1.6032\times10^7 & -2400. \\ 2400. & -2400. & 1.\times10^8 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{array}\right\}$$

or

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 6.23752\times10^{-8} & -2.24103\times10^{-16} & -1.49701\times10^{-12} \\ -2.24103\times10^{-16} & 6.23752\times10^{-8} & 1.49701\times10^{-12} \\ -1.49701\times10^{-12} & 1.49701\times10^{-12} & 1\times10^{-8} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} -87,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \end{array}\right\}$$

3. Para determinar o esforços internos, lembre-se que temos usado o seguinte local x, y, z



4. Para recuperar o elemento AB, mapeamos o global com o local

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

pode ser derivado do elemento anterior matriz de rigidez como os sistemas de coordenadas coincidem ($\theta_{1x}; \Delta_{2y}; \theta_{3z};$)

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Substituindo

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -174.651 \\ 0.120482 \\ 802.965 \\ \hline 174.651 \\ -0.120482 \\ 0.748526 \end{array}\right\}$$

5. Repetimos o mesmo procedimento para o elemento CA. Comece mapeando o global deslocamentos com o local

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

pode ser derivado do elemento anterior matriz de rigidez como os sistemas de coordenadas coincidem ($\theta_{1x}; \Delta_{2y}; \theta_{3z};$)

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -Pe/2 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ \hline -Pe/2 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

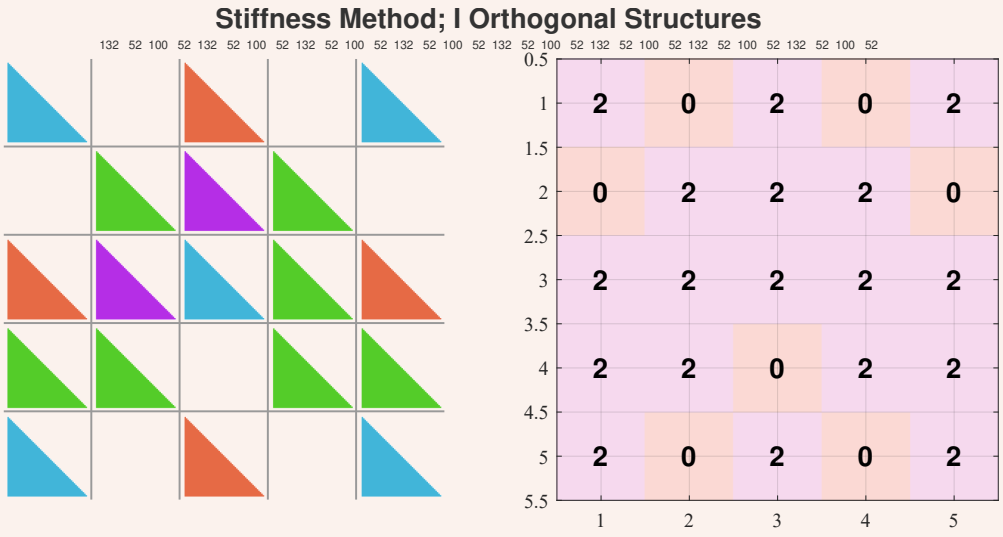
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Substituindo

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -5,000 \\ -5 \\ -12,500 \\ \hline -5,000 \\ -5 \\ 12,500 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$- \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0.0003118 \\ -0.00005013 \\ -0.005457 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5,009.98 \\ -8.09879 \\ -31,162.6 \\ \hline 4,990.02 \\ 18.0988 \\ -99,825.3 \end{array}\right\}$$



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 43

Matrizes de Transformação

Abstract

No capítulo anterior introduzimos o método da rigidez direta através da análise de estruturas ortogonais. Nós, portanto, contamos com muito simples 90° rotações para primeiro montar o global matriz de rigidez (indo de sistemas de coordenadas locais para globais), e depois de global para local para recuperação de força. Claramente, isso é impossível para estruturas gerais, e precisamos introduzir uma matriz de transformação para realizar essas operações. Enquanto isso pode ser elementar para membros simples (como 2D pórtico, torna-se mais complexo para grades, e muito mais complexa para elementos 3D pórtico. Expressões matemáticas das matrizes de transformação para diferentes elementos é o assunto deste capítulo.

43.1 Introdução 1563
43.2 Alguma teoria 1565
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ Relacionamento . . 1565
43.2.2 Direção cossenos 1565
43.3 Matrizes de transformação para elementos de estrutura 1568
43.3.1 Dois casos 1568
43.3.2 3D pórtico 1571
43.3.3 Rotações Eulerianas 1572
43.3.4 Torção do eixo de elementos 1574
43.3.5 3D treliça 1576

43.1 Introdução

1 No capítulo anterior, no qual nos concentramos em estruturas ortogonais, a montagem da estrutura matriz de rigidez $[\mathbf{K}^e]$ em termos do elemento matrizes de rigidez foi relativamente direto.

2 A determinação do elemento matriz de rigidez em coordenadas globais, a partir do elemento (matriz de rigidez nas coordenadas locais requer, Fig. 43.1 A introdução de uma matriz de transformação.

CÓPIA PARA REVISÃO

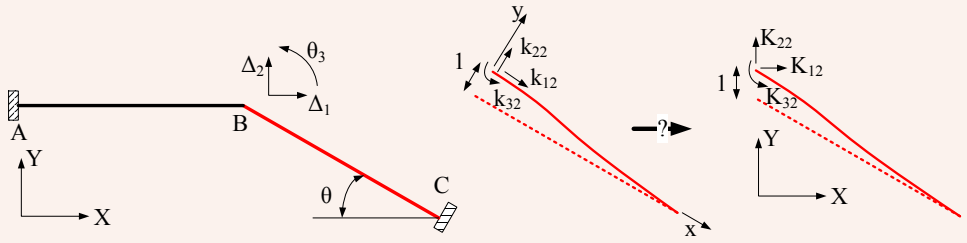


Figura 43.1: Local**k**^{e}) e global (**K**^{e}) Elemento matrizes de rigidez

3 Certamente para um simples membro (como um elemento pórtico, isso pode ser facilmente realizado, Fig. 43.2.. No entanto, procuramos racionalmente derivar matrizes de transformação para diferentes tipos de membros (o 3D pórtico sendo o mais desafiador).

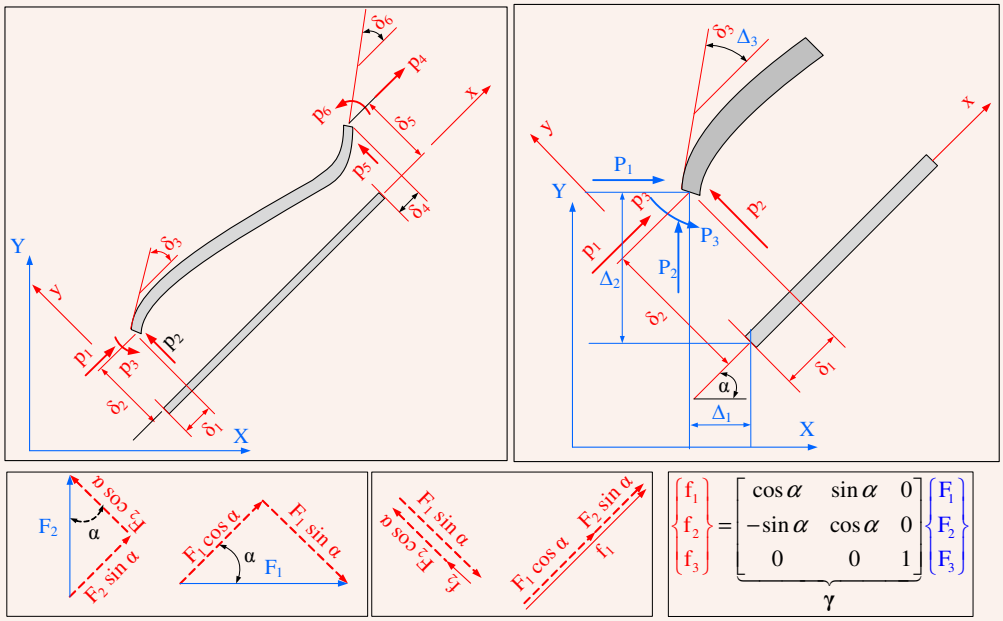


Figura 43.2: Matriz de transformação para um 2D viga-pilar

4 Este capítulo examinará as transformações 2D e 3D necessárias para obter um elemento matriz de rigidez no sistema de coordenadas global antes da montagem (como discutido no próximo capítulo).

CÓPIA PARA REVISÃO

43.2 Alguma teoria

43.2.1 $[k^e]$ $[K^e]$ Relacionamento

Lembre-se

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$
$$\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

Vamos definir uma matriz de transformação vetorial $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$ De tal forma que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(e)} &\overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}\\ \mathbf{p}^{(e)} &\overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)}\end{aligned} \tag{43.1}$$

Substituindo o Eq. 43.1 Eq. 43.2.1

$$\mathbf{p}^{e} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

Pré-multiplicando por $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

Mas já que a matriz de rotação é ortogonal, temos $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}$ (e $\boldsymbol{\Delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$)

$$\mathbf{P}^{(e)} = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}}_{\mathbf{K}^{(e)}}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

ou

$$\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$$

que é a relação geral entre o elemento matriz de rigidez no local e Coordenadas globais.

43.2.2 Direção cossenos

O produto de dois vetores

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Onde $|\mathbf{A}|$ É a norma (comprimento) de $\vec{\mathbf{A}}$, e α é o ângulo entre os dois vetores.

Um vetor $\vec{\mathbf{V}}$

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

pode ser normalizado

$$\vec{\mathbf{V}}_n = \frac{V_x}{|V|}\vec{\mathbf{i}} + \frac{V_y}{|V|}\vec{\mathbf{j}} + \frac{V_z}{|V|}\vec{\mathbf{k}} = \frac{x_2 - x_1}{L}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y_2 - y_1}{L}\vec{\mathbf{j}} + \frac{z_2 - z_1}{L}\vec{\mathbf{k}}$$

Onde $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ e assim obter os três cossenos de direção do vetor $\vec{\mathbf{V}}$ Nós simplesmente tomamos o produto ponto de sua forma normalizada com os três vetores unitários que formam o sistema de coordenadas ortogonais

$$\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{i}} = \frac{x_2 - x_1}{L} = l_{vx}$$
$$\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{j}} = \frac{y_2 - y_1}{L} = l_{vy}$$
$$\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{k}} = \frac{z_2 - z_1}{L} = l_{vz}$$

Observe que, como ambos os vetores estão normalizados, o produto do ponto é igual ao cosseno de direção.

11 O problema que nos confronta é a transformação geral de um vetor **V** De.. (**X**, **Y**, **Z**) Coordene o sistema para (**x**, **y**, **z**), Fig. 43.3: onde:

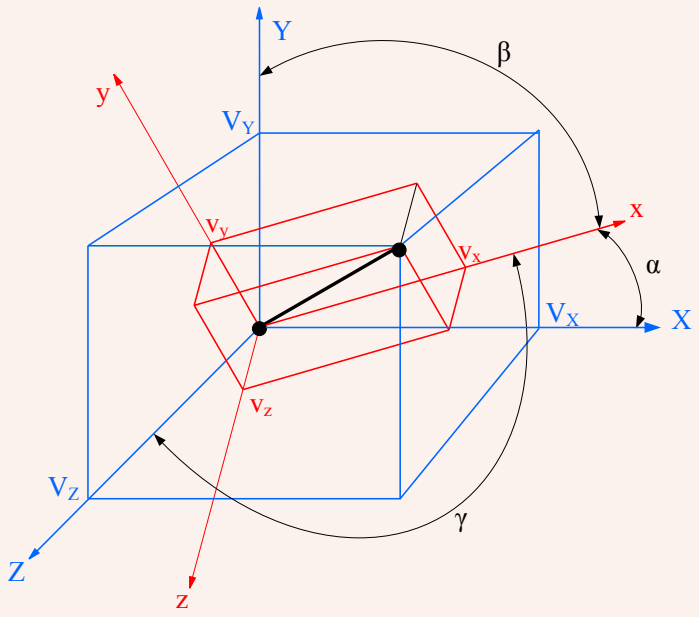


Figura 43.3: Transformação do vetor 3D arbitrário

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\left\{\begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \end{array}\right]}_{\gamma} \left\{\begin{array}{c} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{array}\right\} \tag{43.2}$$

Onde l_{ij} é o *direção cosseno* do eixo i com respeito ao eixo j, $l_{xX} = \cos(\alpha)$, e $l_{xY} = \cos(\beta)$. (Lembre-se disso $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, portanto a direção do ângulo é irrelevante).

12 Por isso, γ Leva-nos do global para os sistemas de coordenadas locais. Por exemplo

$$\begin{aligned} V_x &= V_X l_{xX} + V_Y l_{xY} + V_Z l_{xZ} \\ &= V_X \cos\alpha + V_Y \cos\beta + V_Z \cos\gamma \end{aligned}$$

13 Os cossenos de direção são vetores ortogonais da unidade que satisfazem as seguintes relações:

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,3$$

Ou seja:

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1 \text{ or } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \delta_{11}$$

e..

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{kj} = 0 \left\{\begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ k = 1,2,3 \\ i \neq k \end{array}\right.$$

$$l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} + l_{13}l_{23} = 0 = \delta_{12}$$

14 Pela multiplicação direta de $[\gamma]^T$ por $[\gamma]$, pode-se mostrar que: $[\gamma]^T [\gamma] = [\mathbf{I}] \Rightarrow [\gamma]^T = [\gamma]^{-1} \Rightarrow [\gamma]$ is an *orthogonal matrix* (i.e. orthonormal).

15 A transformação reversa (de local para global) seria

$$\mathbf{V} = \gamma^T \mathbf{v}$$

16 Finalmente, a primeira fila de Eq. 43.2 é dado por (em termos de minúsculas $x - y - z$)

$$l_{xX} = C_X = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad l_{xY} = C_Y = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad l_{xZ} = C_Z = \frac{z_j - z_i}{L} \tag{43.3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

43.3 Matrizes de transformação para elementos de estrutura

17 A matriz de rotação, $[\Gamma]$, obviamente vai variar com o tipo de elemento. No caso mais geral (3D elemento, 6 D.O.F. Por nó), teríamos que definir:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ \hline M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \gamma & & & \\ \hline & \gamma & & \\ \hline & & \gamma & \\ \hline & & & \gamma \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ \hline M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \\ \hline F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \\ \hline M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{Bmatrix} \tag{43.4}$$

e deve distinguir entre a transformação do vetor $[\gamma]$ e a matriz de transformação de elementos $[\Gamma]$.

18 Nas próximas seções, examinaremos a matriz de transformação de cada tipo de elemento onde começaremos com o elemento alinhado com o global X e girá-lo para sua posição atual que define $x - y - z$.

43.3.1 Dois casos

43.3.1.1 2D pórtico

19 Para o elemento 2D pórtico, Fig. 43.4 e da Eq. 43.2 a matriz de rotação vetorial é definida

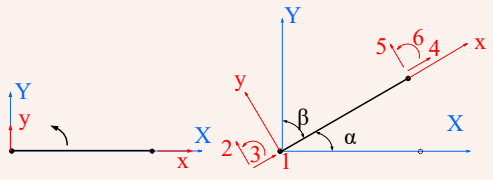


Figura 43.4: 2D pórtico rotação de elementos com relação a Z (ou z)

em termos de 9 cossenos de direção de 9 ângulos diferentes. No entanto, para o caso 2D, notaremos que quatro ângulos estão inter-relacionados$l_{xX}, l_{xY}, l_{yX}, l_{yY}$) e todos podem ser

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

expressos em termos de um único α, onde α é a direção do local x eixo (entre o membro do primeiro para o segundo nó) em relação ao global X Eixo.

20 Os 5 termos restantes estão relacionados com o ângulo entre Z e.. z, que é zero, e o Z $x-y$ O avião, que é $\pi/2$.. Assim, a matriz de rotação pode ser escrita como:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e observamos que os ângulos são definidos desde o segundo subscrito até o primeiro, e que no sentido anti-horário ângulos positivos.

21 A matriz de rotação do elemento **Γ** Então será dado por

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.2 Grelha

22 A matriz de transformação para o elemento da grade, Fig. 43.5 é muito análogo ao elemento pórtico exceto que a rotação é com respeito à y eixo em vez de z Eixo.

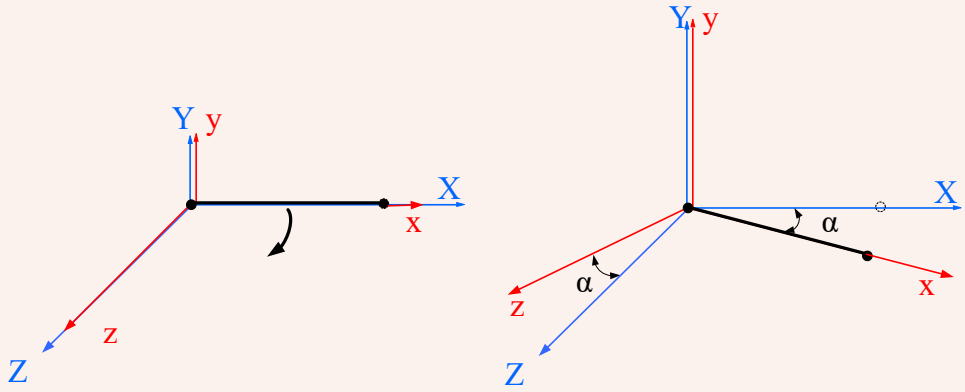


Figura 43.5: Rotação do elemento da grade

23 Da Eq. 43.2 a matriz de rotação vetorial é definida em termos de 9 cossenos de direção de 9 ângulos diferentes. No entanto, notaremos que quatro ângulos estão inter-relacionados$l_{xX}, l_{xZ}, l_{zX}, l_{zZ}$) e todos podem ser expressos em termos de um único α, onde

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

α é a direção do local x eixo (entre o membro do primeiro para o segundo nó) em relação ao global X Eixo.

24 Os 5 termos restantes estão relacionados com o ângulo entre Y e.. y, que é zero, e o Y $x-z$ O avião, que é $\pi/2$.. Assim, a matriz de rotação pode ser escrita como:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

e observamos que os ângulos são definidos desde o segundo subscrito até o primeiro, e que no sentido anti-horário ângulos positivos.

25 A matriz de rotação do elemento [**Γ**] Então será dado por

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\mathbf{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.3 Vlasov viga

26 O matriz de rigidez do elemento grade com revestimento restrito foi dado pelo Eq. 41.3 (§41.8). Sua matriz de transformação será análoga à da grade, exceto que agora temos um dof extra (M_y), Fig. 43.6.

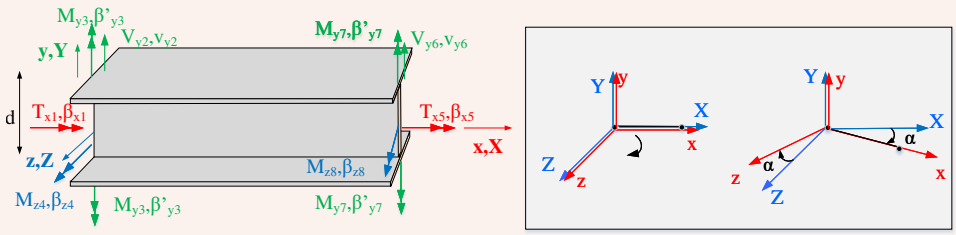


Figura 43.6: Matriz de transformação para o vlasov viga

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

27 A matriz de rotação do elemento [Γ] Então será dado por

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix}$$

43.3.1.4 2D treliça

28 Para o elemento 2D treliça, o sistema de coordenadas global é bidimensional, enquanto que o local é apenas um dimensional, daí a matriz de transformação vetorial ser, fig. 1. 43.7.

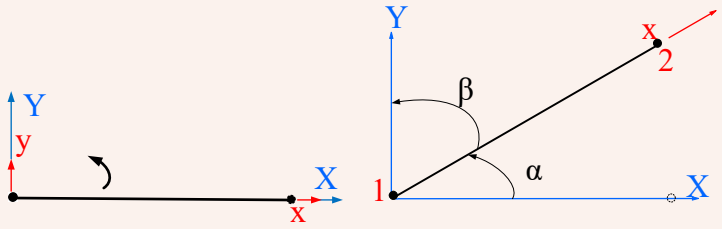


Figura 43.7: 2D treliça rotação

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

29 A matriz de rotação do elemento [Γ] será então montado a partir da matriz de rotação vetorial [γ].

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

43.3.2 3D pórtico

30 Dado que os elementos da haste, são definidos de tal forma a ter o seu local x eixo alinhado com o seu eixo principal, e que o elemento é definido pelos dois nós finais

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(de coordenadas conhecidas), então recordando a definição do cossenos de direção deve ser aparente que a avaliação da primeira linha, apenas, é bastante simples em termos de C_X, C_Y, e C_Z Onde $C_X = l_{X_2X_1} = \frac{x_j - x_i}{L}$, $C_Y = l_{X_2Y_1} = \frac{y_j - y_i}{L}$, $C_Z = l_{X_2Z_1} = \frac{z_j - z_i}{L}$, $L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$.. No entanto, a avaliação dos outros termos é mais complexa.

31 Essa transformação generalizada de $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ foi realizado em um passo no caso bidimensional, mas intermediários terão que ser definidos no caso 3D.

32 Começando com referência (X_1, Y_1, Z_1) coordenar o sistema que corresponde ao sistema de coordenadas global, nós procuramos transformar um elemento originalmente ao longo do X_1 eixo em sua nova posição ao longo do X_2 eixo (ou x).

33 No caso 2D, isso foi feito através de uma única rotação α, e todos os outros ângulos onde definido em termos de ele.

34 No caso 3D, queremos nos transformar da configuração inicial $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ Para a configuração final $\mathbf{X_2}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Z_2}$.. Isso vai levar um mínimo de duas rotações β e.. γ, e possivelmente um terceiro α (diferente do que em 2D) para alcançar esta transformação, Tabela 43.1.. Esses três ângulos também são chamados de *Ângulos eulerianos*.

43.3.3 Rotações Eulerianas

35 Podemos começar com a primeira linha da matriz de transformação que corresponde à direção cossenos do eixo de referência $(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Z_1})$ com respeito a $\mathbf{X_2}$.. Isso definirá a primeira linha da matriz de rotação vetorial $[\gamma]$:

$$\gamma = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

Ainda temos que definir a segunda e terceira fileiras. Isso é conseguido através de duas rotações sucessivas (assumindo que)X_1, Y_1, Z_1 e.. X_2, Y_2, Z_2 são originalmente coincidentes) (assumindo que o eixo verical do membro permanece vertical). Com referência à Fig. 43.8, a sequência de transformações é dada pela tabela 43.1.

Tabela 43.1: Transformações 3D de elementos lineares

De..	Para	Com respeito a	Ângulo
X_1, Y_1, Z_1	$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$Y_1 \equiv Y_\beta$	β
$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$Z_\beta \equiv Z_\gamma$	γ
Opcional			
$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	$X_\gamma \equiv X_\alpha$	α

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

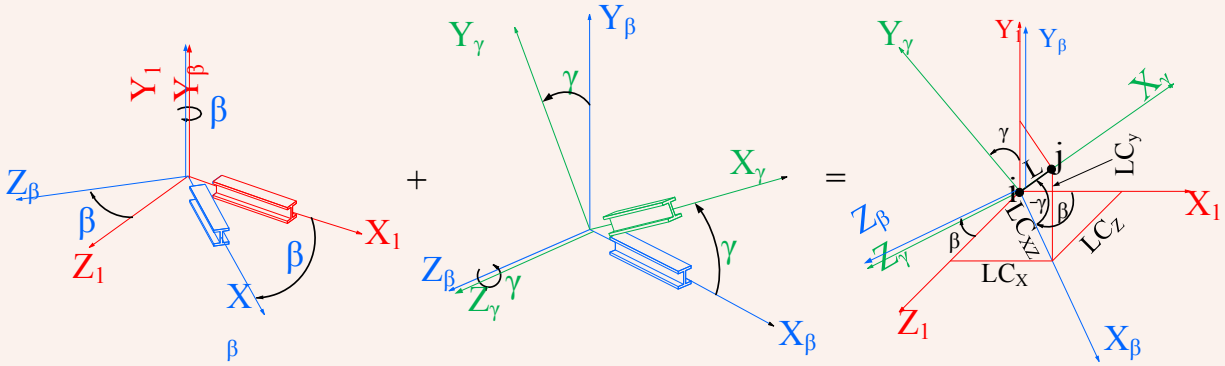


Figura 43.8: Rotação 3D reduzida

Rotação por β sobre o Y_1 eixo , $X_1 \rightarrow X_\beta$.. Essa rotação $\mathbf{R}_\beta$ é feito de direção cossenos do β eixo $(X_\beta, Y_\beta, Z_\beta)$ com respeito a..X_1, Y_1, Z_1):

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_X}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_Z}{C_{XZ}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.5}$$

$\cos\beta = \frac{C_X}{C_{XZ}}$, $\sin\beta = \frac{C_Z}{C_{XZ}}$, e de Eq. 43.3:

$$C_X = \frac{x_j - x_i}{L};\ C_Y = \frac{y_j - y_i}{L};\ C_Z = \frac{z_j - z_i}{L};\ C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2}$$

Rotação por γ sobre o Z eixo

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XZ} & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.6}$$

Onde $\cos\gamma = C_{XZ}$, e $\sin\gamma = C_Y$.

36 Combinando EQ. 43.3, 43.5 e.. 43.6 Rendimentos:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y}{C_{XZ}} & C_{XZ} & \frac{-C_Y C_Z}{C_{XZ}} \\ \frac{-C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.7}$$

37 Para o membro vertical Y) a matriz precedente não é mais válida como C_{XZ} é indefinido$X_i = X_j \Rightarrow C_X = 0$ e.. $Z_i = Z_j \Rightarrow C_Z = 0$). Não há rotação através de β.. Rotação é com respeito ao Z_1 eixo por um ângulo γ de 90^o ou 270^o. Há duas possibilidades, Fig. 43.9:

CÓPIA PARA REVISÃO

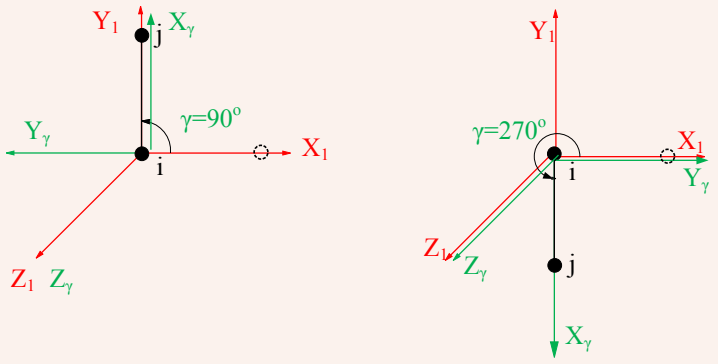


Figura 43.9: Caso especial de transformação 3D para membros verticais

1. $x_\gamma \uparrow$: X_2 O eixo está alinhado com..Y_1, Y_2 O eixo está alinhado com..X_1, Z_2 O eixo está alinhado com..Z_1
2. $x_\gamma \downarrow$: X_2 O eixo está alinhado com Y_1, Y_2 O eixo está alinhado com..X_1 e.. Z_2 O eixo está alinhado com Z_1

Daí a matriz de rotação em relação ao y eixo, é semelhante ao anteriormente derivado para rotação em relação ao z Eixo, exceto pela reordenação dos termos:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.8}$$

que é válido para ambos os casos ($C_Y = 1$ para $\gamma = 90$ deg, e $C_Y = -1$ para $\gamma = 270$ deg).

43.3.4 Torção do eixo de elementos

38 Se os eixos principais devem ser girados (incluindo uma torção final do eixo do elemento), então precisamos definir uma rotação adicional para a transformação anterior de um ângulo α sobre o X_γ Eixo, Fig. 43.10.

39 Esta rotação é definida de tal forma que:

1. X_α está alinhado com X_2 e normal para ambos Y_2 e.. Z_2
2. Y_α faz um ângulo 0, α e.. $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, com respeito a X_2, Y_2 e.. Z_2 respectivamente
3. Z_α faz um ângulo 0, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ e.. α, com respeito a X_2, Y_2 e.. Z_2 respectivamente

CÓPIA PARA REVISÃO

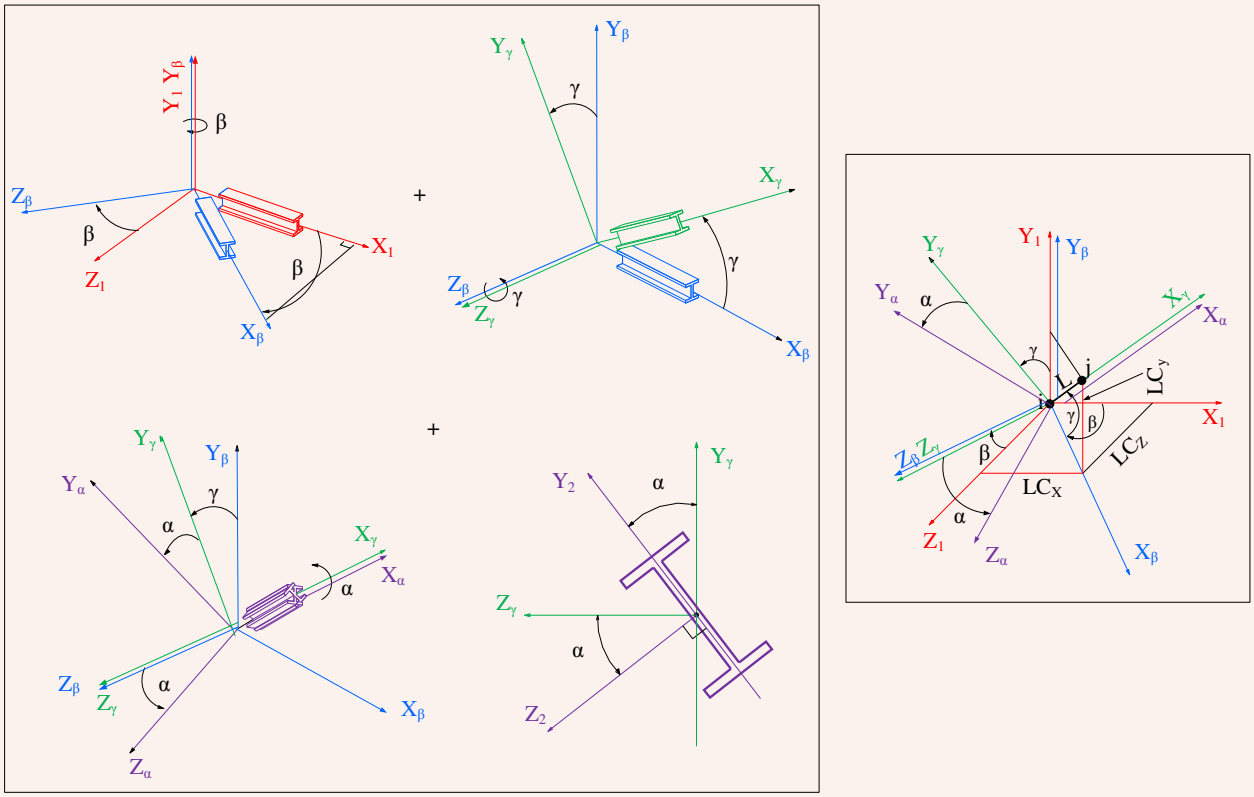


Figura 43.10: Rotação complexa em 3D

40 Observando que $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ e $\cos\beta = \sin\alpha$, os cossenos diretores dessa transformação são dados por:

$$\mathbf{R_{ff}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{43.9}$$

causando o $Y_2 - Z_2$ eixo para coincidir com os eixos principais do seção transversal. Isto vai render-se:

$$\gamma = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \tag{43.10}$$

$$= \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos\alpha - C_Z \sin\alpha}{C_{XZ}} & C_{XZ}\cos\alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos\alpha + C_X \sin\alpha}{C_{XZ}} \\ \frac{C_X C_Y \sin\alpha - C_Z \cos\alpha}{C_{XZ}} & -C_{XZ}\sin\alpha & \frac{C_Y C_Z \sin\alpha + C_X \cos\alpha}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.11}$$

41 Quanto ao caso mais simples, a equação anterior é indefinida para os membros verticais, e uma contrapartida para Eq. 43.8 deve ser derivado. Isso será alcançado em duas etapas:

1. Rodar o membro para que:

CÓPIA PARA REVISÃO

(a) X_2 eixo alinhado com Y_1
(b) Y_2 Eixo alinhado com..X_1
(c) Z_2 eixo alinhado com Z_1

Isso foi feito anteriormente e resultou em Eq. 43.8

$$[\mathbf{R_{fl}}] = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.12}$$

2. O segundo passo consiste em realizar uma rotação de ângulo α com respeito ao novo X_2 como definido em Eq. 43.9.
3. Finalmente, multiplicamos as duas matrizes de transformação $[\mathbf{R_{ff}}][\mathbf{R_{fl}}]$ dado por Eq. 43.12 e.. 43.9 para obter:

$$\gamma = \mathbf{R_{ff}}\mathbf{R_{fl}} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_Y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Anote com $\alpha = 0$Nós recuperamos o Eq. 43.8.
4. A matriz de rotação final seria Eq. 43.4 com o γ derivado desta seção.

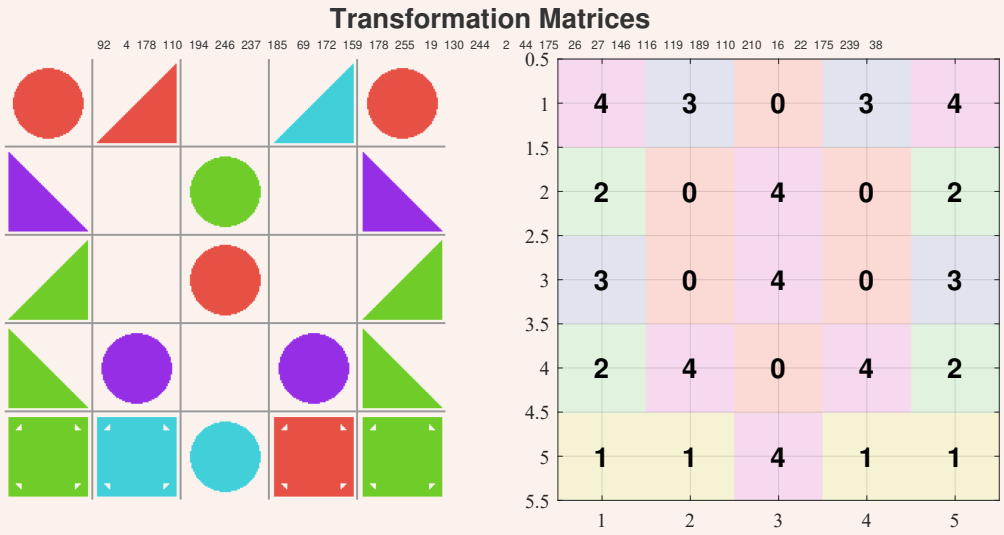
43.3.5 3D treliça

42 Com referência à primeira parte da derivação da transformação do elemento 3D pórtico, a matriz de transformação dos elementos 3Dtreliça é

$$\left\{\begin{matrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{array}\right]}_{\mathbf{\Gamma}} \left\{\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 44

Método da rigidez direta

Abstract

No Capítulo 42, nós introduzimos pela primeira vez o conceito de sistema global de coordenadas, dof global e estrutura matriz de rigidez no sistema global. Então, capítulo 43 introduziu o conceito de matriz de transformação que pode ser usado para transformar o elemento matrizes de rigidez de sistemas de coordenadas locais para globais. Este capítulo, generalizará a abordagem, introduzida pela primeira vez no Capítulo 42, para incluir estruturas arbitrárias (não-ortogonais). É importante notar que o conteúdo deste capítulo é fundamental para todos os códigos elemento finito, que são então envoltos por interfaces gráficas de usuário amigáveis para facilitar a operação.

44.1 Objetivos 1578
44.2 Teoria 1579
44.3 Discretização 1581
44.3.1 Sem restrições vs restritas . . 1581
44.3.2 Discretização estrutural . . . 1582
44.4 Implementação de computador . . . 1583
44.4.1 Condições de contorno, [id] Matriz 1583
44.4.2 **LM** vetor 1584
44.4.3 Assembléia global matriz de rigidez 1585
44.4.4 Procedimento passo a passo 1586
44.5 Exemplos 1587
44.5.1 Ex 44.1: Pórtico 1588
44.5.2 Ex 44.3: Treliça 1598

44.1 Objetivos

1 Até agora, introduzimos o método da rigidez direta para estruturas ortogonais através de um procedimento "manual", montado no global em termos de livre graus de liberdade (ou seja, Sem restrições). Nós também introduzimos as matrizes de transformação para vários tipos de elementos, e podemos determinar o elemento matriz de rigidez no sistema (ou seja, Global) coordenar o sistema através $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\mathbf{\Gamma}^{(e)}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

2 Este capítulo por sua vez generalizará o método da rigidez direta para

1. Endereçar geometrias estruturais arbitrárias. Não ortogonal).
2. Determinação das reações através do uso de *Aumentado matriz de rigidez*.
3. Descreva algoritmos para automatizar totalmente (i.e. Escreva um programa de computador) o procedimento.

44.2 Teoria

3 Anteriormente, Capítulo 42, nós reunimos o *reduzido* matriz de rigidez correspondendo apenas à mangueira ativa graus de liberdade que são ativos (ou seja, desenfreada). É aquele que foi invertido (ou decomposto) para determinar o nodal deslocamentos.

4 Na generalização, buscamos reunir o *Aumentado* matriz de rigidez em termos de *Todos* O dof (restreado ou não).

5 Vamos então dividir a matriz em duas partes, com o subscrito "u" Onde o deslocamentos são conhecidos (zero ou outro), e t Onde as cargas são conhecidas, Mesa 40.2.

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\checkmark\\ \hline \mathbf{R}_u?\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\mathbf{\Delta}_t?\\ \hline \mathbf{\Delta}_u\checkmark\end{array}\right\} \tag{44.1}$$

Nós notamos que $\mathbf{K}_{tt}$ corresponde à estrutura matriz de rigidez.

6 Com referência a §40.8, notamos que os dois tipos de cargas (ou deslocamentos) correspondem a *essencial* e.. *Natural* condições de contorno.

7 A primeira equação permite o cálculo do desconhecido deslocamentos. Note que requer a inversão (computacionalmente cara) da matriz (decomposição seria um termo mais apropriado aqui).

$$\mathbf{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\left(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u\right)$$

8 A segunda equação permite o cálculo das reações

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\mathbf{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{\Delta}_u$$

É apenas uma multiplicação de matriz.

9 Para fins de contabilidade interna, já que estamos montando o *Aumentado* matriz de rigidez, prosseguiremos em duas etapas:

1. Primeiro número, todo o global sem restrições graus de liberdade
2. Em seguida, numerar separadamente todos os global contido graus de liberdade (i.e. aqueles com conhecido deslocamentos, zero ou outro), multiplicado por -1, Isso nos permitirá distinguir mais tarde o isolado do sem restrições.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

10 O elemento esforços internos (axial e forças cortantes, e momento em cada extremidade do membro) são finalmente determinados a partir de

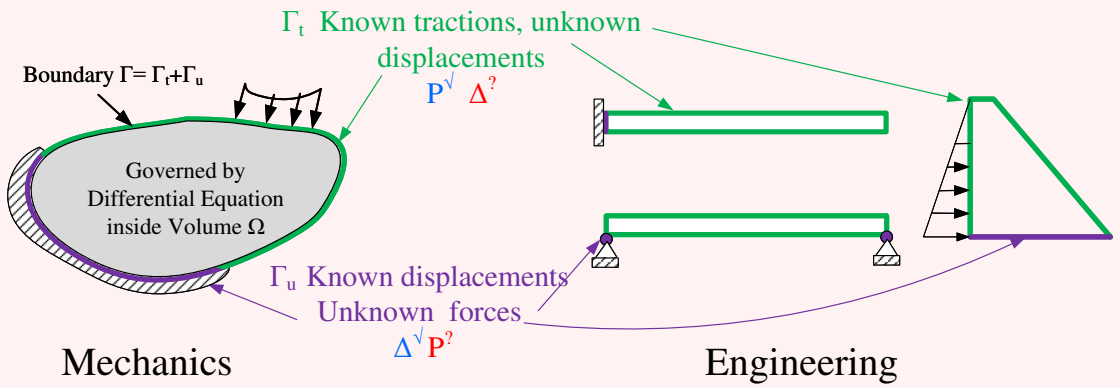
$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

no nível do elemento onde $p_{int}^{(e)}$ é a matriz seis por seis de esforços internos, $\mathbf{k}^{(e)}$ o elemento matriz de rigidez em sistemas de coordenadas locais, e $\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ é o vetor de nodal deslocamentos no sistema de coordenadas local. Note que esta última matriz é obtida identificando primeiro o deslocamentos no sistema global de coordenadas, e então pré-multiplicando-o pela matriz de transformação para obter o deslocamentos no sistemas local de coordenadas.

11 Deve ser notado que em Eq. 44.1, o aumento matriz de rigidez $\mathbf{K}$ tem uma patente r menor do que.. n, enquanto que $\mathbf{K}_{tt}$ Tem $r = n$ (§L.3.1).

12 Este último processo é semelhante à recuperação tensão em contínuo elementos finitos.

Definition 44.1: Coração do Método da rigidez direta



CÓPIA PARA REVISÃO

- Global Sistema de coordenadas

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{k}^e \mathbf{\Gamma}$$

$$\mathbf{K}^S = \sum_{e=1}^{e=nelem} \mathbf{K}^e$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_t^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{R}_u^{?} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu} \\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{array}\right]}_{\text{Augmented Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_t^{?} \\ \hline \mathbf{\Delta}_u^{\checkmark} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \mathbf{f}^{-1};\ \text{Matriz de rigidez reduzida}$$

$$\mathbf{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \underbrace{(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u)}_{\mathbf{P}'_t}$$

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\mathbf{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{\Delta}_u$$

- Local Sistema de coordenadas

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathbf{\Gamma}^{(e)}\mathbf{\Delta}^{(e)}$$

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

Efeito de nota de $\mathbf{P}_{el}$ Não incluído para clareza

44.3 Discretização

44.3.1 Sem restrições vs restritas

13 Anteriormente, nós rotulamos o Dof global associado ao Dof sem restriçõesΓ$_t$Apenas, e então resolvemos para o deslocamentos invertendo o associado *reduzido* estrutura matriz de rigidez.

14 Na generalização do método da rigidez direta, Eq. 44.1, nós vamos rotular o Dof ao longo Γ_t Primeiro, e depois os que estão junto Γ_u (Da mesa seguinte) 40.2 , estes correspondem ao Neuman/Essential e o Dirichlet/Natural condições de contorno, respectivamente).

15 Isso resultará em *Aumentado* matriz de rigidez. A ordem de numeração está ilustrada na figura. 44.1 e é auto-explicativo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

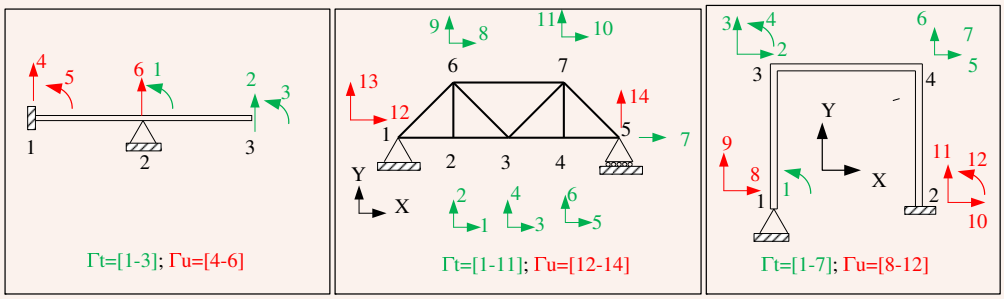


Figura 44.1: Dof sem restrições e constrangido

44.3.2 Discretização estrutural

16 A aplicação do método da rigidez direta depende da discretização matemática adequada da estrutura, Tabela 44.1.

Tabela 44.1: Discretização de estruturas

Nós	Coordenadas	Condições de contorno	Carregar
Membros	Conectividade	Tipo	Carregar
Tipo de elemento	Características geométricas	Propriedades elásticas	

17 A modelagem numérica de uma estrutura requer que possamos descrever matematicamente: geometria, conectividade, propriedades de elementos e cargas.

18 Isso é melhor explicado através do exemplo mostrado na Fig. 44.2.

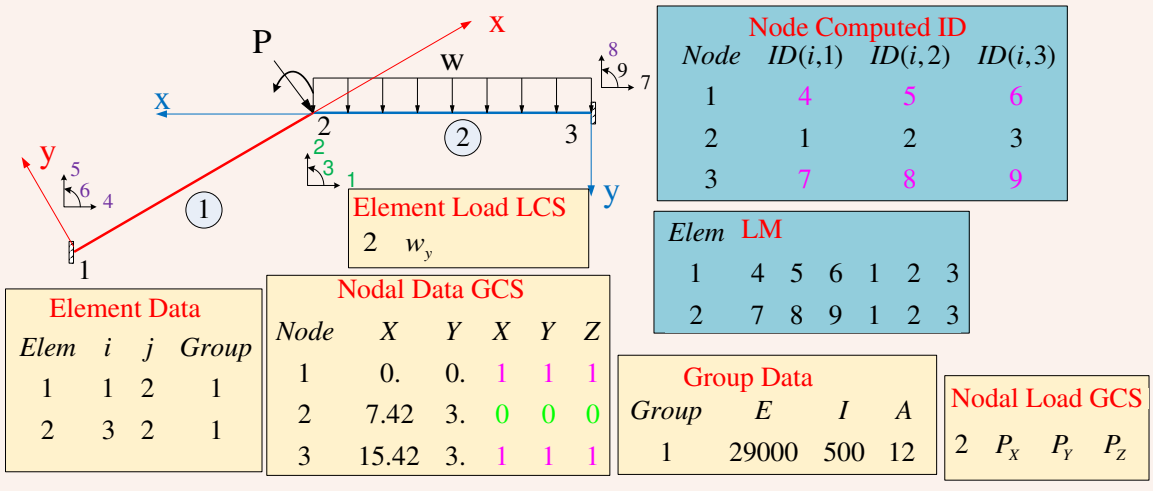


Figura 44.2: Exemplo de discretização estrutural

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 O usuário tem que definir os dados nas caixas mais baixas. Mais especificamente

Dados do elemento define o primeiro e segundo nó (a ordem é irrelevante) conectado pelo elemento; Número do grupo.

Nodal Data define para cada nó: a) as 2 ou 3 coordenadas no sistema de coordenadas global; b) o condições de contorno para cada um dos dof correspondentes (ver caixa) 40.2). 0 significa dof livre, e 1 significa correspondente conhecido deslocamento (não necessariamente zero).

Dados do Grupo para cada número de grupo define as propriedades elásticas e seccionais.

Nodal Load listará os nós com um carga concentrada ao longo de cada um de seus dof global.

Carga do elemento lista os elementos com uma carga ao longo do membro.

44.4 Implementação de computador

20 Com a estrutura totalmente discretizada, e de acordo com o generalizado método da rigidez direta (§44.2), o programa de computador assume daqui.

21 A MATLAB®A implementação do método (para 2D pórticos) é dada em §I.2.7.

44.4.1 Condições de contorno, [id] Matriz

22 Por causa das restrições condição de contorno, o número total da estrutura de *Ativo* graus de liberdade (ou seja, sem restrições) será menor do que o número de nós vezes o número graus de liberdade por nó.

23 Para obter o global grau de liberdade para um dado nó, precisamos definir um [ID] Matriz tal que:

`ID` Tem dimensões $l \times k$ Onde l é o número de grau de liberdade por nó, e k é o número de Nós, nós.

`ID` A matriz está inicializada para zero.

1. No estágio de entrada lido `ID(idof,inod)` de cada grau de liberdade para cada nó De tal forma que:

$$\texttt{ID}(\texttt{idof},\texttt{inod}) = \begin{cases} 0 & \text{if unrestrained d.o.f.} \\ 1 & \text{if restrained d.o.f.} \end{cases}$$

2. Depois de todo o nó condições de contorno ter sido lido, Atribua números de equação incremental

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

(a) Primeiro para todo o Dof ativo
(b) Então para o outro (restreed) dof, começando com -1 (ou alternativamente continuar a incrementar após o último dof irrestreed).

Note que o número total de pontos será igual ao número de nós vezes o número de dof/node `NEQA`.

3. O maior *positivo* O número global será igual a `NEQ` (Número de Equações), que é o tamanho do quadrado matriz que terá que ser decomposta.

24 Por exemplo, para o pórtico mostrado em Fig. 44.3:

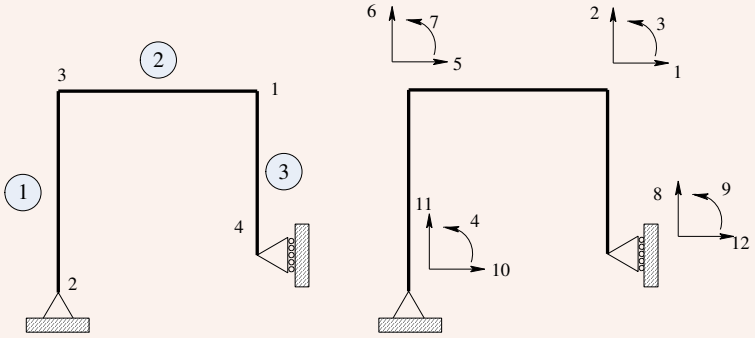


Figura 44.3: Exemplo para [**ID**] Determinação da matriz

1. O original **ID** Matriz seria..

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Depois de atribuirmos o Dof global (ou *Números da equação*Nós teríamos:

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

44.4.2 LM vetor

25 **LM** *Matriz de localização* é um mapeamento entre o Dof local e global para cada membro. Para a estrutura mostrada na figura. 44.3Nós teríamos:

$$\mathbf{LM} = \begin{bmatrix} -10 & -11 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

26 O **LM** matrizes, correspondentes às estruturas mostradas na figura. 44.1 são mostrados na figura. 44.4.

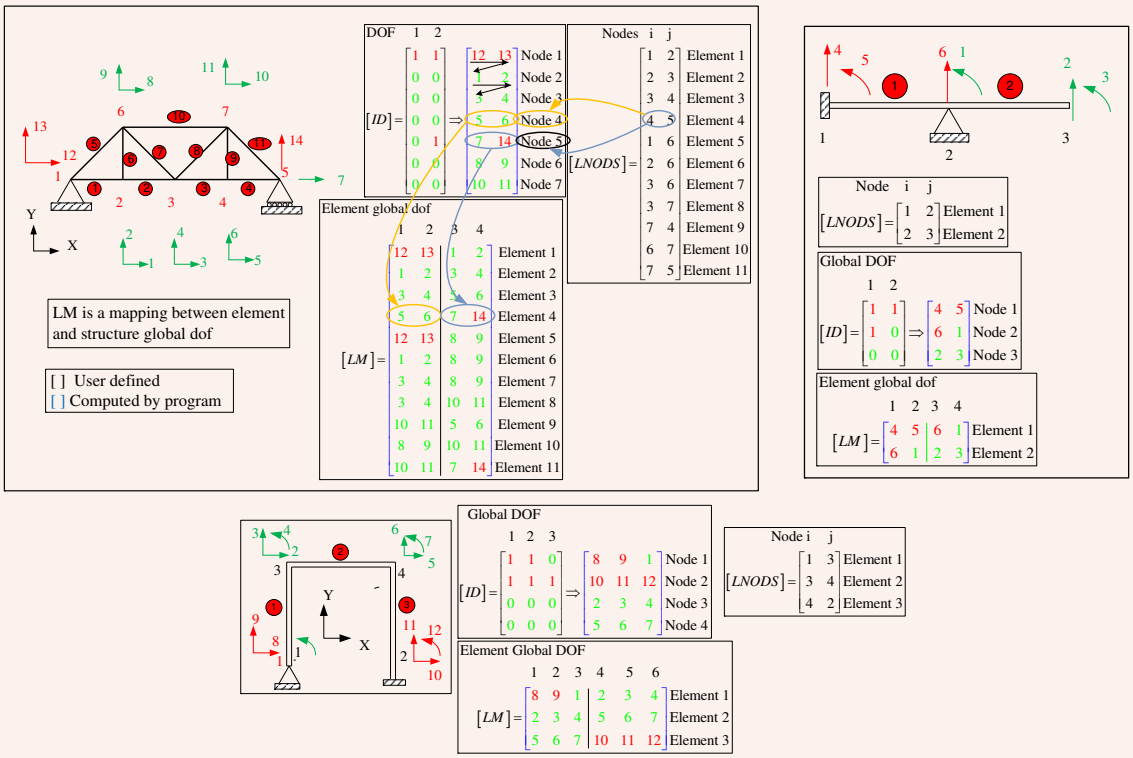


Figura 44.4: Exemplos de **LM** Tarefas

44.4.3 Assembléia global matriz de rigidez

27 O aumento (ou global) matriz de rigidez **K** é a seguir montado de todos os elementos individuais matrizes de rigidez no sistema global de coordenadas ($\mathbf{K}^{(e)}$). Esta seção descreverá uma procedência comumente usada para montagem, enquanto que uma alternativa (transformação de cultura) será coberta em §46.5.

28 Para cada um K_{ij} Vamos adicionar a contribuição de todos os elementos que podem se conectar i Para grau de liberdade j.. Isso será realizado através do **LM** Matriz.

29 Primeiro devemos inicializar o global matriz de rigidez $\mathbf{K}^S = \mathbf{0}$, e então passar por todos os elementos, e montar usando o através do **LM** Matriz.

$$K^{(e)}_{ij} \rightarrow K^{(S)}_{st} \quad \text{and} \quad \begin{cases} s = LM(e,i) \\ t = LM(e,j) \end{cases}$$

30 Fig. 44.5 mostra o processo de montagem para o pórtico mostrado na figura. 44.2

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

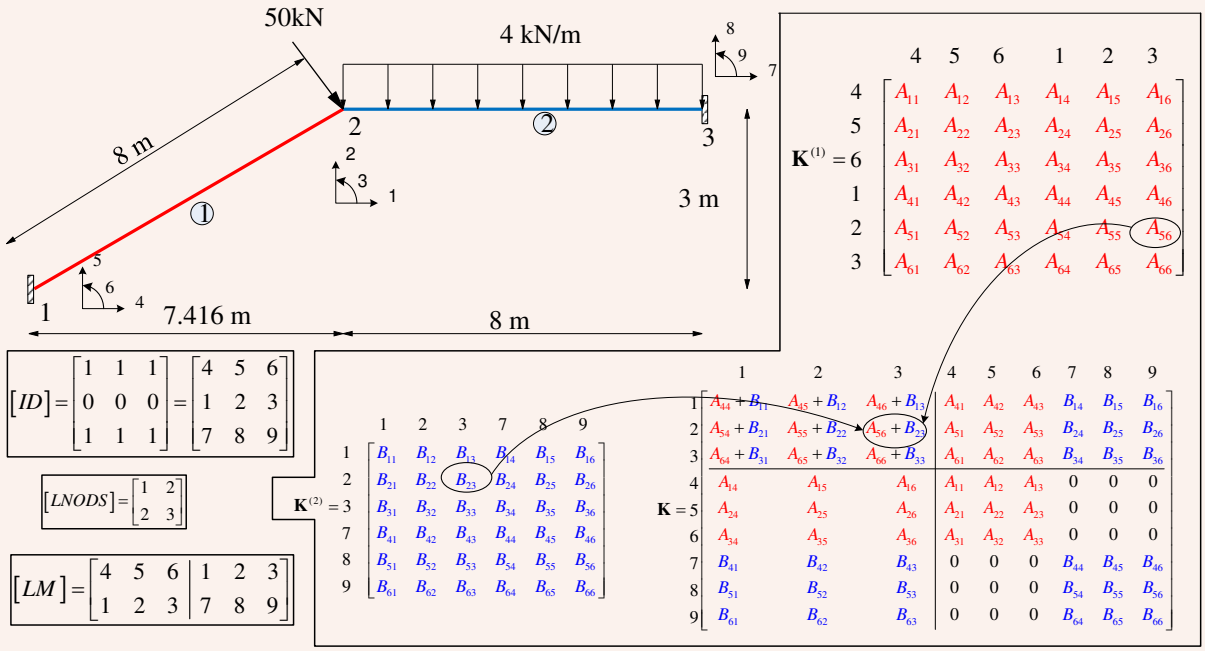


Figura 44.5: Assembléia do processo global matriz de rigidez

31 Note-se que há um método alternativo para montar o global matriz de rigidez, baseado em *Abordagem de transformação congruente*, §46.5.

44.4.4 Procedimento passo a passo

32 O algoritmo para o método da rigidez direta é descrito passo a passo:

Preliminares

1. Leia o modelo matemático da estrutura (tipo, coordenadas, conectividade, propriedades transversais e materiais, cargas)
2. Determine o número de nós (`nnode`), número de elementos (`Nellem`), número máximo dof/node (`Ndofpn`), tamanho de K_{tt} (`Tamanho`), número total de dof (`Ndoft`), atualização **ID** e determinar **LM** Matrizes

Análise, Global

1. Para cada elemento, determinar
   (a) Vetor **LM** Mapeando o elemento local para graus de liberdade da estrutura global.
   (b) Elemento matriz de rigidez $[\mathbf{k}^{(e)}]$

CÓPIA PARA REVISÃO

   (c) Matriz de transformação $[\mathbf{\Gamma}^{(e)}]$
   (d) Elemento matriz de rigidez em coordenadas globais $[\mathbf{K}^{(e)}] = [\mathbf{\Gamma}^{(e)}]^T[\mathbf{k}^{(e)}][\mathbf{\Gamma}^{(e)}]$
2. Reúna o aumentado matriz de rigidez $[\mathbf{K}^{(S)}] = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{k}^{(e)}$ desconstraídos e restritos grau de liberdade.
3. Extrair $[\mathbf{K}_{tt}]$ De.. $[\mathbf{K}^{(S)}]$ e inverter.
4. Carregar Vetor
   (a) Calcular vetores de forças equivalentes nodais para cada elemento do sistema de coordenadas local $\mathbf{p}_{El}^{(e)}$ e no sistema global de coordenadas $\mathbf{P}_{El}^{(e)} = \mathbf{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{p}_{El}^{(e)}$
   (b) Reúna o vetor de carga nodal para incluir cargas nodal e forças equivalentes nodal (note **P** É para a estrutura). $\mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{P}_{El}^{(e)} + \mathbf{P}_{nodes}(LM^{(e)}(i)); \forall LM^{(e)} \leq \text{size}(K_{tt})$
5. Substitua-se e obtenha uma coordenada global Sistema, $\mathbf{\Delta} = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}_t$
6. Extrair $\mathbf{K}_{ut}$
7. Determine $\mathbf{P}_R$ Que vai armazenar

$$\mathbf{P}_R(1{:}\text{ndof-sizet}) = \sum_{e=1}^{nelem} \Gamma^{(e)}\mathbf{p}_{el}^{(e)}; \forall LM^{(e)} > \text{size}(K_{tt})$$

   Essas são as cargas de elementos transformadas no sistema global de coordenadas para aqueles graus de liberdade que estão fixos. Por isso afetarão a reação.
8. Resolva as reações, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\mathbf{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{\Delta}_u - \mathbf{P}_R$

Força de Recuperação, local (Esforços internos): para cada elemento

1. Determine o elemento nodal deslocamentos no sistema de coordenadas global do nodal global deslocamentos
2. Transforme seu nodal deslocamento de coordenadas globais para locais $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [\mathbf{\Gamma}^{(e)}]\mathbf{\Delta}^{(e)}$.
3. Determine o esforços internos $\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} - \mathbf{p}_{El}^{(e)}$.

44.5 Exemplos

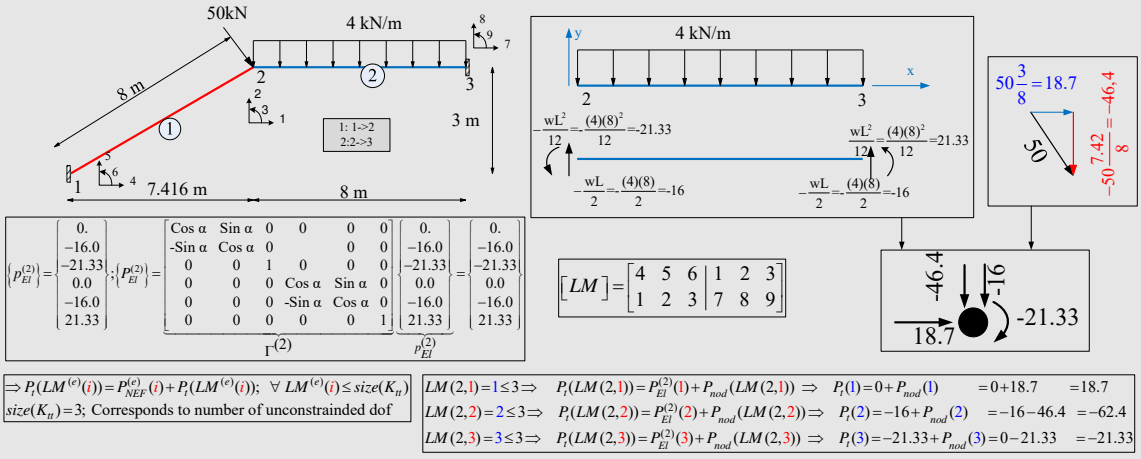
CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

44.5.1 Ex 44.1: Pórtico

Nós revisitamos o simples pórtico previamente estudado, e passamos pela solução passo a passo completa. Valores intermediários serão essenciais para ajudar os usuários a depurar seu próprio código (e um MATLAB®A solução deste problema é dada em §I.2.6).

44.5.1.1 Preliminares



$$\left\{p_{El}^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix};\left\{P_{El}^{(2)}\right\}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\Gamma^{(2)}}\underbrace{\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}}_{p_{El}^{(2)}}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}$$

$$\left[LM\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&5&6&1&2&3\\1&2&3&7&8&9\end{array}\right]$$

$\Rightarrow P_t(LM^{(e)}(i))=P_{NEF}^{(e)}(i)+P_t(LM^{(e)}(i));\ \forall\ LM^{(e)}(i)\le size(K_n)$
$size(K_n)=3$; Corresponds to number of unconstrained dof

$$\begin{aligned}
&LM(2,1)=1\le 3\Rightarrow\quad P_t(LM(2,1))=P_{El}^{(2)}(1)+P_{nod}(LM(2,1))\ \Rightarrow\quad P_t(1)=0+P_{nod}(1)\quad =0+18.7\quad =18.7\\
&LM(2,2)=2\le 3\Rightarrow\quad P_t(LM(2,2))=P_{El}^{(2)}(2)+P_{nod}(LM(2,2))\Rightarrow\quad P_t(2)=-16+P_{nod}(2)\quad =-16-46.4\quad =-62.4\\
&LM(2,3)=3\le 3\Rightarrow\quad P_t(LM(2,3))=P_{El}^{(2)}(3)+P_{nod}(LM(2,3))\ \Rightarrow\quad P_t(3)=-21.33+P_{nod}(3)=0-21.33\quad =-21.33
\end{aligned}$$

Matrizes de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$

$$k_1=k_2=10^5\begin{bmatrix}1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0\\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375\\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000\\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0\\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375\\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000\end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Matrizes de transformação Γ

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rigidez $\mathbf{K}^{(e)} \leftarrow \mathbf{k}^{(e)}$

$$[K_1] = [\Gamma_1]^T [k_1] [\Gamma_1] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0.0141 & -0.0348 & 0.100 \\ -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & 1.2904 & 0.5182 & 0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0.5182 & 0.2190 & -0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.100 & 0.0141 & -0.0348 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [\Gamma_2]^T [k_2] [\Gamma_2] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

Assembléia global matriz de rigidez

$$[K_{Aug}] = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{tu} \\ K_{ut} & K_{uu} \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & -1.5000 & 0 & 0 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Forçar vetores

$$p_{el}{}^{(1)(2)} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$P_{el}{}^{(2)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{p_{El}} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 18.75 \\ -46.35 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{P_{Nodes}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{El}} = \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

Deslocamentos

$$\{\Delta\} = [K_{tt}]^{-1} \{P\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0619 & -0.1405 & -0.0012 \\ -0.1405 & 0.7567 & -0.0002 \\ -0.0012 & -0.0002 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

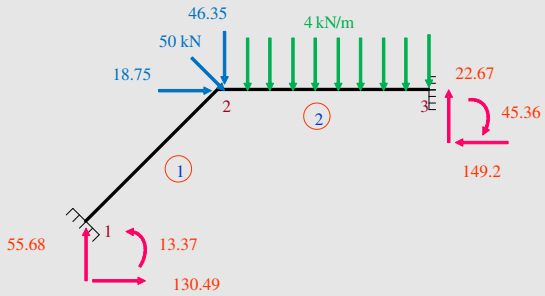
Reações

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}_{ut}]\{\mathbf{\Delta}\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EI}^{(2)}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 130.49 \\ 55.676 \\ 13.374 \\ -149.24 \\ 22.673 \\ -45.35 \end{Bmatrix}$$

Cheque



$$\Sigma F_x = 130.49 - 149.2 + 18.75 = 0.04 \checkmark$$
$$\Sigma F_y = 55.68 + 22.67 - 46.35 - (4)(8) = 0.0 \checkmark$$

Local deslocamentos $\delta \leftarrow \Delta$

$$[\delta_1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Displ.}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

$$[\delta_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Disp}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Esforços internos

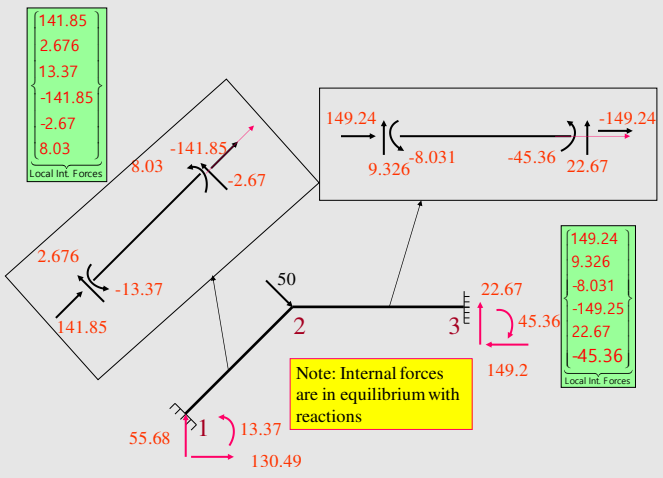
$$[p_1] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix, Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp.}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}}_{P_{EI}^{(1)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 141.85 \\ 2.676 \\ 13.37 \\ -141.85 \\ -2.67 \\ 8.03 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

$$[p_2] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -16.00 \\ -21.33 \\ 0.00 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EL}^{(2)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 149.24 \\ 9.326 \\ -8.031 \\ -149.25 \\ 22.67 \\ -45.36 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

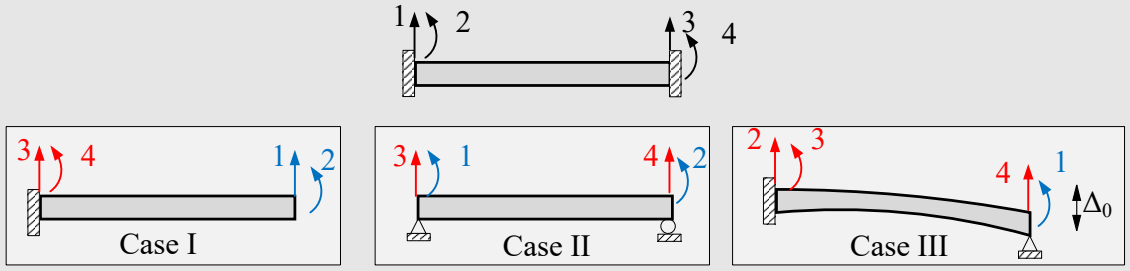
Final diagrama de corpo livre



CÓPIA PARA REVISÃO

Ex 44.2: Viga

Este exemplo não só destaca o método da rigidez direta, mas também mostra como os dados internos podem ser armazenados em um código compacto de computador.



O total matriz de rigidez de um elemento viga é dado por

$$[\mathbf{k}^e] = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

Como sabemos, esta matriz é singular, tem uma classificação 2 e ordem 4 (como incorpora também dois movimentos rígidos do corpo). Ainda assim, pode ser analisado considerando os três casos acima.

Eu cantilevered Viga / Carga concentrada

1. O *elemento* matriz de rigidez é

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. O aumento *Estrutura* matriz de rigidez está montado

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

3. A matriz global pode ser reescrita como

$$\left\{\begin{array}{c} -P\checkmark \\ 0\checkmark \\ \hline R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \theta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. $\mathbf{K}_{tt}$ é invertido (ou realmente decomposto) e armazenado no mesma matriz global

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right]$$

5. Em seguida, calculamos a carga equivalente $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$, e sobrescrever $\mathbf{P}_t$ por $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} \\ L^2/2EI & L/EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -P \\ 0 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. Agora determinamos o deslocamento $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\Delta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} r$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-PL^3/3EI} \\ \boxed{-PL^2/2EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

7. Finalmente, resolvemos para as reações, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, e sobrescrever $\boldsymbol{\Delta}_u$ por $\mathbf{R}_u$

$$\left\{\begin{array}{c} -PL^3/3EI \\ -PL^2/2EI \\ \hline \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ L^2/2EI & L/EI & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-PL^3/3EI} \\ \boxed{-PL^2/2EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -PL^3/3EI \\ -PL^2/2EI \\ \hline \boxed{P} \\ \boxed{PL} \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

II Biapoiado Viga / Fim Momento

1. O *elemento* matriz de rigidez é

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & 1 & -4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. O aumento *Estrutura* matriz de rigidez está montado

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. O matriz de rigidez global pode ser reescrito como

$$\left\{\begin{array}{c} 0\checkmark \\ M\checkmark \\ \hline \\ R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ está invertida

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. Nós calculamos a carga equivalente, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u$, e sobrescrever $\mathbf{P}_t$ por $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\mathbf{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ -L/6EI & L/3EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ M \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

6. Resolva para o deslocamentos, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, e sobrescrever $\mathbf{P}_t$ por $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\begin{Bmatrix} \boxed{\theta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7. Resolva as reações, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, e sobrescrever $\boldsymbol{\Delta}_u$ por $\mathbf{R}_u$

$$\begin{Bmatrix} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{R_1} \\ \boxed{R_2} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ -L/6EI & L/3EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{6EI/L^2} & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{M/L} \\ \boxed{-M/L} \end{Bmatrix}$$

III Cantilevered Viga/Inicial Deslocamento e conhecido Deslocamentos

1. O *elemento* matriz de rigidez é

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -3 & -4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. O aumento *Estrutura* matriz de rigidez está montado

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. A matriz global pode ser reescrita como

$$\begin{Bmatrix} M\checkmark \\ \hline R_2? \\ R_3? \\ R_4? \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_1? \\ \hline \Delta_2\checkmark \\ \theta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. $\mathbf{K}_{tt}$ é invertido (ou realmente decomposto) e armazenado no same global matrix

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. Em seguida, calculamos a carga equivalente $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$, e sobrescrever $\mathbf{P}_t$ por $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{c|ccc} L/4EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. Agora nós resolvemos para o deslocamentos, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, e sobrescrever $\mathbf{P}_t$ por $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\theta_1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{array}\right\}$$

7. Finalmente, resolvemos para as reações, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, e sobrescrever $\boldsymbol{\Delta}_u$ por $\mathbf{R}_u$

$$\left\{\begin{array}{c} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \hline \boxed{R_2} \\ \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L/4EI & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right]$$

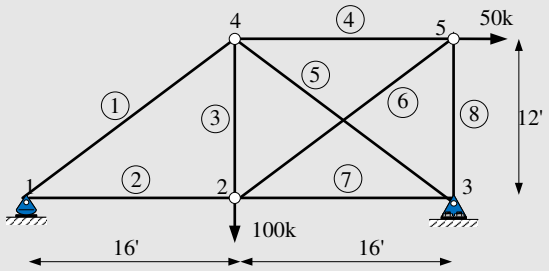
$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \hline \boxed{3M/2L - 3EI\Delta^0/L^3} \\ \boxed{M/2 - 3EI\Delta^0/L^2} \\ \boxed{-3M/2L + 3EI\Delta^0/L^3} \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

44.5.2 Ex 44.3: Treliça



1. Graus de liberdade e **LM** (conectividade: de baixo para maior número de nó)

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \\ 9 & 10 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{LM} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Elemento matriz de rigidez

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}$; $s = \sin\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$

3. Substituto

Elemento 1: $L = 20'$, $c = \frac{16-0}{20} = 0.8$, $s = \frac{12-0}{20} = 0.6$, $\frac{EA}{L} = \frac{(30{,}000ksi)(10in^2)}{20'} = 15{,}000\ k/ft$.

$$[K_1] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9{,}600 & 7200 & -9{,}600 & -7{,}200 \\ 7{,}200 & 5{,}400 & -7{,}200 & -5{,}400 \\ -9{,}600 & -7{,}200 & 9{,}600 & 7{,}200 \\ -7{,}200 & -5{,}400 & 7{,}200 & 5{,}400 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento 2: $L = 16'$, $c = 1$, $s = 0$, $\frac{EA}{L} = 18{,}750$ k/ft.

$$[K_2] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18{,}750 & 0 & -18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18{,}750 & 0 & 18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento 3 $L = 12'$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25{,}000\ k/ft$

CÓPIA PARA REVISÃO

$$[K_3] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,000 & 0 & -25,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemento 8 $L = 12^{'}$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25,000\ k/ft$

$$[K_8] = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 9 & 10 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,000 & 0 & -25,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Reúna o global matriz de rigidez em k/ft Note que não estamos montando o aumentado matriz de rigidez, mas sim sua submatriz $[\mathbf{K}_{tt}]$.
5. Converta-se em k/in e simplifique

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2,362.5 & -1,562.5 & 0.00 & -800 & -600 & 0 & 0 \\ & 3,925.0 & 600 & 0 & 0 & -800 & -600 \\ & & 2,533.33 & 0.00 & -2,083.33 & -600 & -450 \\ & & & 3,162.5 & 0 & -1,562.5 & 0 \\ & & \text{SYMMETRIC} & & 2,983.33 & 0 & 0 \\ & & & & & 2,362.5 & 600 \\ & & & & & & 2,533.33 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_t}$$

6. Inverter matriz de rigidez e resolver para deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0223 \text{ in.} \\ 0.00433 \text{ in.} \\ -0.116 \text{ in.} \\ -0.0102 \text{ in.} \\ -0.0856 \text{ in.} \\ -0.00919 \text{ in.} \\ -0.0174 \text{ in.} \end{Bmatrix}$$

7. Resolva para o membro esforços internos (Neste caso forças axiais) em Sistemas de coordenadas locais

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \underbrace{\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{\Delta}}}_{\boldsymbol{\delta}}$$

$$= \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Elemento 1:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}^1 = (15,000 \text{ kpf}) \left(\frac{1}{12} \frac{\text{ft.}}{\text{in.}} \right) \left[\begin{array}{cccc} 0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -0.0223 \\ 0.00 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 52.1 \text{ kip} \\ -52.1 \text{ kip} \end{array} \right\} \text{ Compression}$$

Elemento 2:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}^2 = 18,750 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12} \frac{\text{ft}}{\text{in.}} \right) \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -0.0233 \\ 0.00 \\ 0.00433 \\ -0.116 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -43.2 \text{ kip} \\ 43.2 \text{ kip} \end{array} \right\} \text{ Tension}$$

Elemento 3:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}^3 = 25,000 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12} \frac{\text{ft.}}{\text{in.}} \right) \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0.00433 \\ -0.116 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -63.3 \text{ kip} \\ 63.3 \text{ kip} \end{array} \right\} \text{ Tension}$$

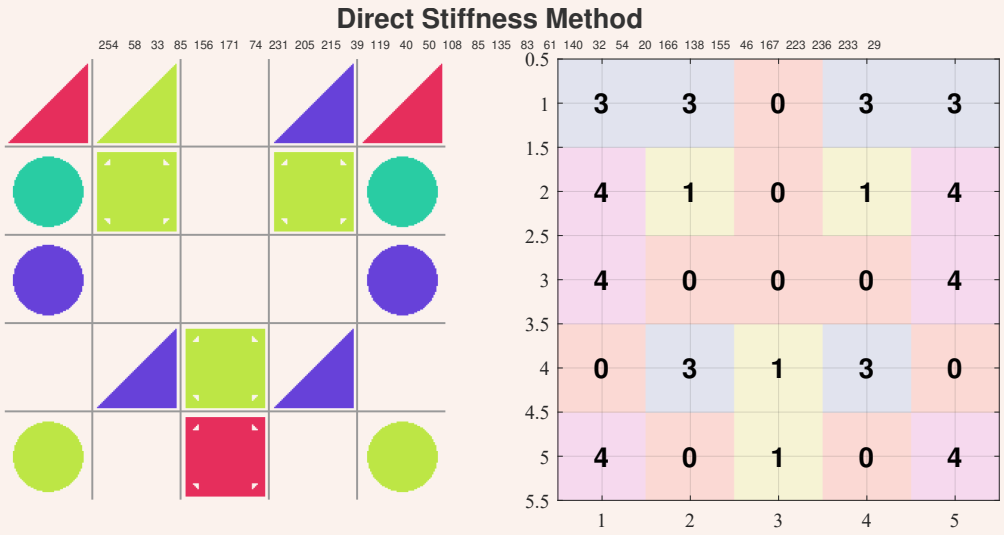
Elemento 4:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}^4 = 18,750 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12} \frac{\text{ft.}}{\text{in.}} \right) \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -0.0102 \\ -0.0856 \\ -0.00919 \\ -0.0174 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -1.58 \text{ kip} \\ 1.58 \text{ kip} \end{array} \right\} \text{ Tension}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 45

Propriedades Matemáticas de Matriz de rigidez; Questões Computacionais

Abstract

A matriz de rigidez não é apenas um mapeamento entre deslocamentos e forças; Também contém uma riqueza de metadados adicionais que podem informar o analista sobre a precisão da solução. Examinaremos esses metadados e introduziremos o conceito do número da condição. Primeiro, examinaremos detalhadamente o mapeamento acima mencionado e visualizaremos as relações entre os vetores de entrada e saída em 2D. Isso levará a medidas que podem ser tomadas pelo modelista para minimizar o mal-condicionamento do global matriz de rigidez. Em seguida, uma breve nota sobre a decomposição versus inversão de uma matriz é apresentada. Finalmente, abordaremos a numeração de nó quase ideal, pois é de suma importância para reduzir o tempo computacional na determinação $\mathbf{K}^{-1}$*. Embora esses conceitos não sejam essenciais para a compreensão básica, eles são úteis para um bom engenheiro estrutural.*

45.1 Matrizes mal condicionadas 1603
45.1.1 Valores próprios 1603
45.1.2 Número da condição 1608
45.1.3 Ill-conditioned matrizes de rigidez 1608
45.2 Considerações numéricas 1612
45.2.1 Inversão vs decomposição . 1612
45.2.2 Numeração Nodal 1612

Este capítulo é baseado em Gavin, 2012, cujo tratamento claro e perspicaz das propriedades matemáticas de O autor agradece. A apresentação foi ampliada e reorganizada, e vários Exemplos numéricos se originam do Professor Gavin.

CÓPIA PARA REVISÃO

45.1 Matrizes mal condicionadas

45.1.1 Valores próprios

1 O matriz de rigidez $[k]$ (ou $[K]$) pode ser visto como um *mapeamento do vetor deslocamento* **u** *em um vetor de força* **p**.. Não há razão para esses vetores estarem alinhados, Fig. 45.1a

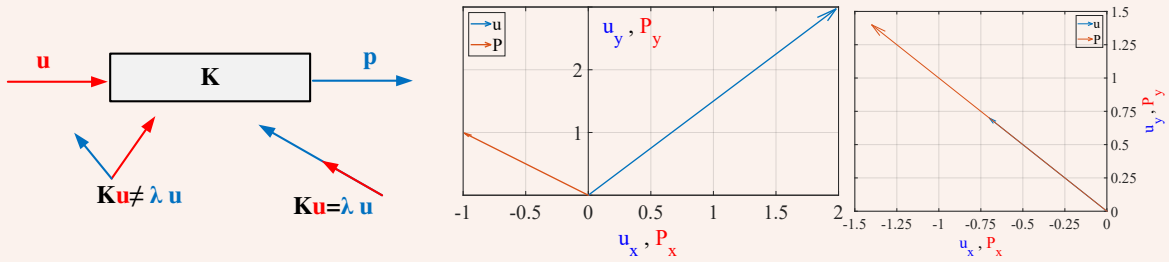
2 Por exemplo, para

$$\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{truss}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

O **u** e.. **p** Os vetores são mostrados na figura. 45.1b (supondo $AE/L = 1$). Por outro lado, para

$$\mathbf{ku} = \lambda \mathbf{u}$$

O autovetor é.. $-0.707 \quad 0.707$ E neste caso **u** e.. **p** Estão alinhados, Fig. 45.1c.



(a) Mapeamento (b) $\mathbf{Ku} \neq \lambda \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{Ku} = \lambda \mathbf{u}$

Figura 45.1: Mapeamento de deslocamentos em forças

3 O conteúdo geométrico deste mapeamento pode ser tornado vívido considerando O que acontece com um *Conjunto completo* de vetores deslocamento simultaneamente, em vez de rastrear um único vetor.. Suponhamos que coletemos todos os vetores possíveis **u** de tamanho unitário, Ou seja... Cada um **u** Satisfatório

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 = 1.$$

Por.. $N = 2$, as pontas desses vetores rastreiam o círculo unitário; para o general N Rastreiam a hiperesfera da unidade. Aplicando **K** Para cada vetor neste conjunto - computação **p** = **Ku** para cada um produz um novo conjunto de vetores de força. O fato geométrico chave é: *uma esfera unitária de mapas deslocamentos abaixo* **K** *para um elipsoide de forças.*

4 Os comprimentos do semieixo desta força elipsoide são precisamente os autovalores λ_i de **K**E as direções dessas semi-eixos são os autovetores correspondentes $\mathbf{u}_i$. Como os

CÓPIA PARA REVISÃO

autovetores de uma matriz simétrica real são mutuamente ortogonais, Os eixos principais da força elipsoide são perpendiculares uns aos outros, Fig. 45.2. No exemplo bem condicionado do painel (a),

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.54, \quad \lambda_2 = 2.16, \quad \kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4.0,$$

ambos os autovalores são positivos e a elipse não é degenerada. Observe que **u** e.. **p** = **Ku** do *Não* geralmente, ponto no Mesma direção. Eles só coincidem quando **u** está alinhado com um dos Os autovetores.

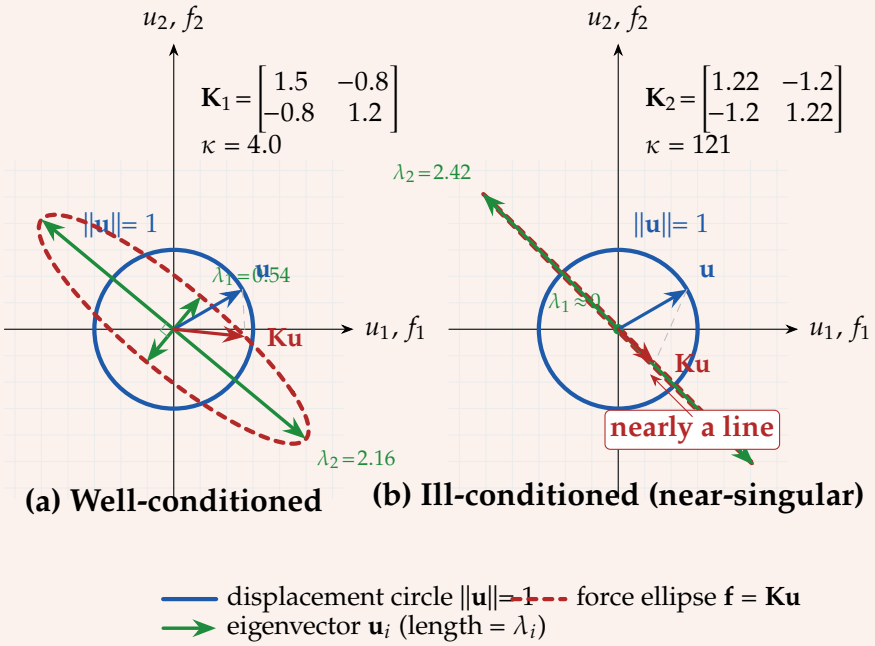


Figura 45.2: Mapeando uma unidade deslocamento círculo em uma elipse de força, (Gavin, 2012).

5 **O que um zero ou quase zero autovalor significa geometricamente.** Se um autovalor é exatamente zero, um semi-eixo da força elipsoide desaba até um ponto: para $N = 2$ A elipse degenera em um segmento de linha. Isso significa que toda uma família de vetores deslocamento alinhados com o eigenvector correspondente $\mathbf{u}_1$ - Mapa para o *Mesmo* vetor de força, ou seja, o vetor zero: $\mathbf{K}\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. A estrutura pode passar pelo modo de deformação $\mathbf{u}_1$ Sem desenvolvimento Qualquer força de restauração: Isso é um *movimento rígido do corpo* ou um *mecanismo*, e **K** é singular. Inversamente, para um determinado vetor de força não há nenhum único deslocamento Quando **K** A solução é indeterminada.

Painel (b) mostra o caso quase-singular

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.02, \quad \lambda_2 = 2.42, \quad \kappa = 121.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

O menor autovalor não é zero, mas é minúsculo em relação ao maior. A elipse de força é tão alongada que é quase um segmento de linha: Dois Vetores muito diferentes deslocamento $\mathbf{u}$ produzir quase a mesma força vetor $\mathbf{p}$. A consequência numérica é que a solução calculada $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ Não é confiável. Pequenos erros em $\mathbf{p}$ (De arredondamento ou modelagem de carga) produzir grandes erros em $\mathbf{u}$.

6 **Definição positiva e estabilidade estrutural.** A matriz de rigidez $\mathbf{K}$ É *positivo definitivo* Se e somente se todos seus autovalores são estritamente positivos:

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} > 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall\, i.$$

O lado esquerdo é a energia interna, que deve ser positiva para qualquer deformação não trivial de uma estrutura estável e passiva. Para provar a equivalência, substitua $\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ e usar $\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \sum u_j^2 > 0$:

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\, \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \lambda_i \sum u_j^2.$$

Desde então $\sum u_j^2 > 0$, positividade de U requer $\lambda_i > 0$. Um autovalor zero sinaliza um modo rígido do corpo (zero deformação energia); Um autovalor negativo fisicamente impossível para uma estrutura passiva implicaria em um modo que libera energia. Além disso, já que o determinante de $\mathbf{K}$ é o produto de sua autovalores,

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

uma matriz definitiva positiva tem $\det(\mathbf{K}) > 0$ e é invertível, Enquanto qualquer autovalor zero torna a matriz singular (det = 0).

7 **O problema da matriz rígida.** Uma matriz é dita para ser *Endurecido* no sentido numérico se $\kappa(\mathbf{K}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$, mesmo quando tudo Os autovalores são estritamente positivos e a matriz é formalmente invertível. Uma matriz rígida não é singular, mas está mal condicionada. Um parente Perturbação de tamanho ε nos dados (cargas, coordenadas) pode produzir uma perturbação relativa de tamanho $\kappa\,\varepsilon$ Em A solução. Em análise estrutural esta situação surge mais comumente quando elementos Por exemplo, uma grande variedade de rigidezs divide um nó flexível viga enquadrando em um quase-rígido pilar, ou o uso de uma artificialmente grande rigidez para modelar uma ligação rígida. O número da condição quantifica esta sensibilidade precisamente e é Discutimos mais na próxima seção.

45.1.1.1 Interpretação física dos autovalores

8 A energia interna armazenada em um elemento pode ser determinada a partir de

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{up} = \frac{1}{2}\,\mathbf{uku} \tag{45.1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Agora, se considerarmos um sistema onde a carga $\{\mathbf{p}\}$ aplicado a cada nó é proporcional ao elemento nodal deslocamento $\{\mathbf{u}\}$ por um fator λNós temos: $\mathbf{ku} = \lambda\mathbf{u}$ ou $(\mathbf{k} - \lambda[\mathbf{I}])\,\mathbf{u} = 0$

9 Isto é por definição um *Eigenproblema*E haverá tantos autovalores λ_i como há graus de liberdade (ou linhas em $\mathbf{k}$). Para cada valor próprio λ_i corresponde a um autovetor $\mathbf{u}_i$.

10 Os autovetores são normalizados de tal forma que: $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^t = 1$, assim

$$\mathbf{u}_i\mathbf{k}\mathbf{u}_i^t = \lambda_i$$

Comparando com Eq. 45.1É evidente que..

Definition 45.1: Matriz de rigidez autovalores

O autovalor matriz de rigidez λ_i é igual ao dobro da energia interna deformação armazenada em um elemento submetido a uma deformação (normalizada) definida por $\mathbf{u}_i$.

11 Em um movimento rígido do corpo, todos os nós deslocam (ou giram) pela mesma quantidade, e não há interno deformações. Portanto, em um movimento rígido do corpo a energia deformação U (e assim correspondente λ) deve ser igual a zero.

12 Deve haver tantos valores zero como possíveis movimentos rígidos independentes do corpo (isto é, Número de equações de equilíbrio. Portanto, para um elemento lagrangeano bidimensional, deve haver três valores de auto zero, correspondendo a duas traduções e uma rotação.

13 Poucos autovalores zero é uma indicação de um elemento sem a capacidade de movimento rígido do corpo sem deformação.

14 Muitos autovalores zero é uma indicação de mecanismo indesejável (ou falha).

15 Ao comparar o matrizes de rigidez de dois elementos idênticos, mas baseado em formulações diferentes, aquele com a menor deformação energia (tr$\mathbf{k} = \Sigma\lambda_i$É o melhor.

Definition 45.2: Características do elemento Matriz de rigidez

Um elemento matriz de rigidez terá:

Ordem: corresponde ao número de graus de liberdade (ou seja, tamanho da matriz).

Rank: corresponde ao número total de equações linearmente independentes que é igual à ordem menos o número de movimentos rígidos do corpo (§L.3.1).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Deficiencia de classificação: seria igual ao número total de autovalores zero menos a classificação.

16 Mais tarde, iremos derivar a expressão do aumento rigidez em Eq. 46.22:

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

Onde $\mathcal{B}$ é a matriz estática (ou equilíbrio), relacionando forças nodais externas com esforços internos; $\mathbf{d}$ é um matriz de flexibilidade, e $\mathbf{d}^{-1}$ é seu inverso ou reduzido matriz de rigidez. O matriz de rigidez é obviamente singular, já que a segunda "linha" é linearmente dependente do primeiro, enquanto o reduzido matriz de rigidez, que é o inverso de um matriz de flexibilidade, não é. Portanto, haverá tantos valores zero como o tamanho de $\mathcal{B}$.

17 A título de ilustração, consideramos Fig. 45.3: e os conjuntos correspondentes de

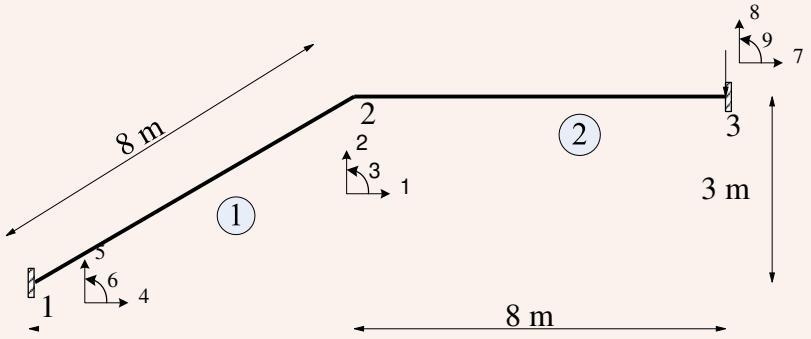


Figura 45.3: Problema do teste de autovalor

autovalores são dados por

$$\begin{aligned}
\lambda_{Kaug} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0059 \quad 0.1274 \quad 0.2201 \quad 0.4821 \quad 1.6109 \quad 4.3911 \ \rfloor \\
\lambda_{Ktt} &= 10^5 \lfloor\ 0.1275 \quad 0.3999 \quad 2.8913 \ \rfloor \\
\lambda_{k} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001 \ \rfloor \\
\lambda_{K^1} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001 \ \rfloor \\
\lambda_{K^2} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3187 \quad 3.0000 \ \rfloor
\end{aligned}$$

Notamos que o aumento matriz de rigidez da estrutura, e o elemento matriz de rigidez ambos têm de fato três valores próprios zero. Por outro lado, ambos os elementos têm também os mesmos autovalores que os de seus elementos pais no sistema de coordenadas local.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

45.1.2 Número da condição

Definition 45.3: Número da condição

O número da condição de uma matriz $\mathbf{K}$ é definido como

$$\kappa(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|_2 \, \|\mathbf{K}^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

E um aviso deve ser levantado se o número da condição for grande. Números de condição medem a mudança máxima da solução para um problema com relação às pequenas mudanças no problema (ou seja, sensibilidade).

18 Há duas causas principais para um grande número de condição:

- Falta de conectividade: elementos adjacentes que deveriam compartilhar um nó comum mas estão conectados a diferentes nós que são coincidentes, resultando em um dos elementos com restrições insuficientes.
- Conectando elementos com rigidezs drasticamente diferentes.

19 O leitor que procura se aprofundar na precisão e estabilidade dos algoritmos numéricos deve consultar a excelente cobertura (e legível) em Higham, 2002.

20 Para fins ilustrativos, vamos considerar a matriz [estrutural rigidez][1] de uma estrutura dois graus de liberdade

$$K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 = P_1$$
$$K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 = P_2$$

Podemos resolver essas equações para Δ_2 em termos de Δ_1,

$$\Delta_2 = -\frac{K_{11}}{K_{12}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{12}}P_1$$
$$\Delta_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{22}}P_2$$

21 Vamos considerar um exemplo numérico para ilustrar o papel de κ

45.1.3 Ill-conditioned matrizes de rigidez

22 Em seguida, procuramos construir um mal condicionado matriz de rigidez conectando um membro rígido (axial) a um mais suave, Fig. 45.4. A estrutura matriz de rigidez e seu

[1] Todos matrizes de rigidez são simétricos em virtude da reciprocidade de Maxwell $K_{ij} = K_{ji}$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

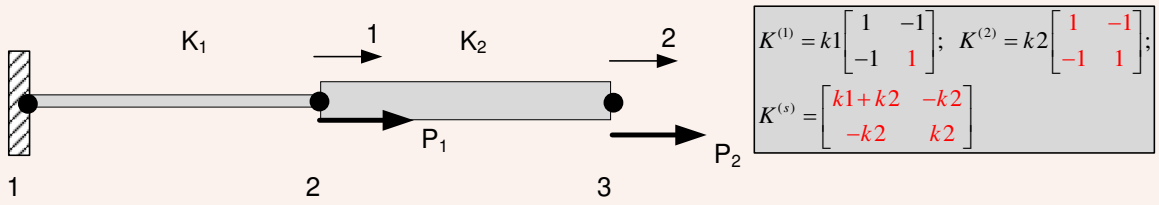


Figura 45.4: Assemblage de membros resultando em mal-condicionado **K**

inverso são dados por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{(K_1 + K_2)K_2 - K_2^2} \begin{bmatrix} K_2 & K_2 \\ K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1 K_2} \end{bmatrix}$$

23 Solução para o vetor deslocamento é

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1 K_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Nós reorganizamos para obter duas equações para $\Delta_2 = f(\Delta_1, 1/K_2)$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_1 = K_1\Delta_1 - P_2 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1 + K_2)}{K_1 K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{1}{K_2} P_2$$

Igualmente

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_2 = K_1\Delta_1 - P_1 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1 + K_2)}{K_1 K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \frac{K_1 + K_2}{K_2}\Delta_1 - \frac{1}{K_2} P_1$$

ou

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K_1+K_2}{K_2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_2} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix}$$

Se notarmos o termo diagonal, controlará o número de condição da matriz.

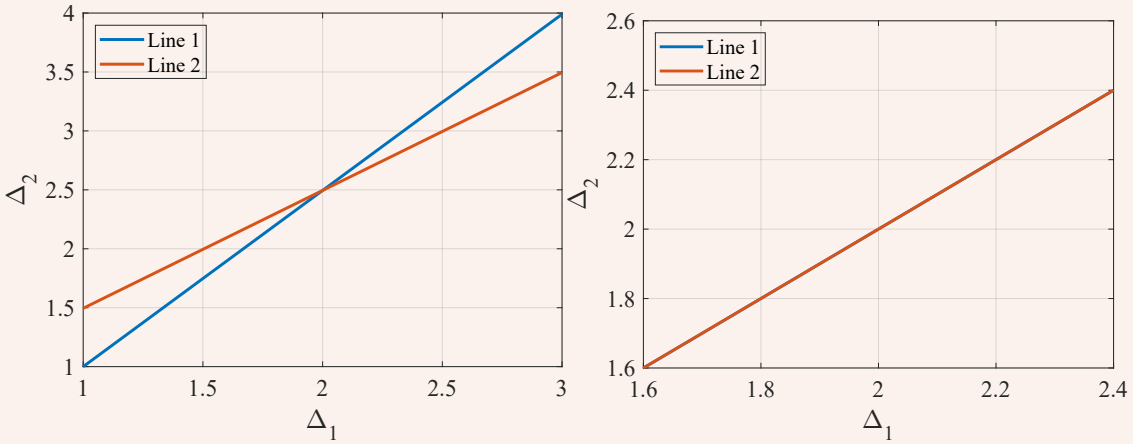
CÓPIA PARA REVISÃO

24 Para fins ilustrativos, consideremos dois casos:

$$3 \quad K_1 \quad K_2 \quad = \quad 1 \quad 2 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.5000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_1 \quad K_2 \quad = \quad 1 \quad 10,000 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.0001 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

E nós traçamos as soluções para Δ_2 em termos de Δ_1 com $P_1 \quad P_2 \quad = \quad 1 \quad 1$, Fig. 45.5.



(a) 1 2 (b) 1 10,000

Figura 45.5: Matrizes condicionadas em termos $K_1 \quad K_2$

E os resultados estão resumidos na tabela 45.1.

Tabela 45.1: Impacto de matrizes mal condicionadas

	Bem condicionado		Ill Condited	
	K_1	K_2	K_1	K_2
2-5	1.0	2.0	1.0	10,000
2-5 (Δ_1, Δ_2)	(4.0000, 5.0000)		10^4(1.999999999999668, 2.000099999999668)	
(λ_1, λ_2)	(0.2247,-2.2247)		(0.000049998750062, -2.000049998750063)	
$\kappa(\mathbf{K})$	9.9		4.0e+04	

Matlab 64 bits EPS=2.2204e-16

25 Perdemos precisão com números de condição muito grandes.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 45.4: Precisão e condição de doença

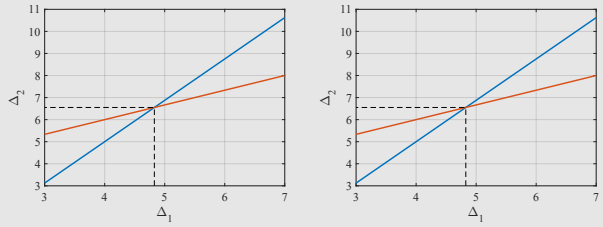
Como regra do polegar, uma matriz é dita mal-condicionada quando o número da condição ($\sim 1/(\mathsf{EPS})$ é maior do que o recíproco da precisão da máquina, por exemplo, 10^7 para uma precisão simples típica (32 bits) aritmética, e 10^{16} para um computador de 64 bits. Para matrizes severamente mal-condicionadas, use técnicas de decomposição de valor único.

[26] Matrizes inofensivas são melhor decompostas através do pré-condicionamento preliminar§L.3.4).

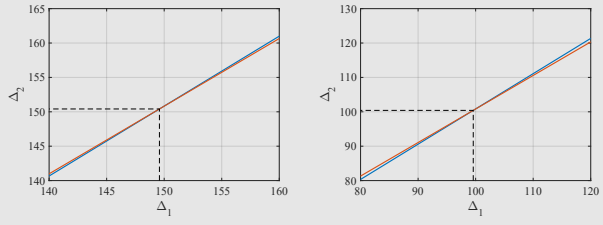
45.1.3.1 Ex 45.1: Inquilinoso

Nós consideramos os seguintes 4 casos,

		Bem condicionado	
		Inicial	Com perturbação
$[K]$		$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.79 \\ -0.79 & 1.2 \end{bmatrix}$
Δ_1	Δ_2	4.8276 6.5517	4.7283 6.4461
λ_1	λ_2	0.5361 2.1639	0.5459 2.1541
$\kappa(\mathbf{K})$		4.04	3.95



		Ill Condited	
		Inicial	Com perturbação
$[K]$		$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.19 \\ -1.19 & 1.22 \end{bmatrix}$
Δ_1	Δ_2	149.5868 150.4132	99.5851 100.4149
λ_1	λ_2	0.0200 2.4200	0.0300 2.4100
$\kappa(\mathbf{K})$		121.00	80.33



Notamos a correlação entre matrizes mal condicionadas e o elevado número de condições, e o impacto de pequenas perturbações nos números da condição.

CÓPIA PARA REVISÃO

45.2 Considerações numéricas

45.2.1 Inversão vs decomposição

27 A estrutura global $\mathbf{K}_{tt}$ deve ser invertido ($\mathbf{K}_{tt}^{-1}$). Inversão explícita só é possível através da regra de Cramer, no entanto este método só é viável para um 2×2 Matriz, para um maior, nós decompomos a matriz em uma LU ou LDU produto através de variações dos procedimentos de eliminação Gauss (§L.2.2). A decomposição de matrizes pode ser categorizada como

1. Métodos diretos, onde há um número fixo de operações numéricas. No caso mais geral, nós realizamos um **L**.**U** decomposição, e se a matriz é simétrica e positiva definitiva, nós temos uma decomposição de Cholesky $\mathbf{L}.\mathbf{L}^T$ Uma.
2. Métodos indiretos, ou seja. iterativo, sem número fixo de operações (Gauss-Seidel). Mais adequado para matrizes muito grandes.

28 Alguns desses métodos são descritos em §L.2.1.

29 Para aqueles casos especiais onde temos uma matriz rígida (número de condição grande), então *Decomposição de valor singular* (§L.2.2.5) ou pré-condicionamento (§L.3.4As técnicas de métodos devem ser usadas.

30 É claro que, na maioria dos casos, o usuário não precisa se preocupar com as estratégias de solução, pois essas podem ser facilmente invocadas em programas como MATLAB®.. Algumas das funções relevantes são

`Inv(.)`	Gauss-Jordan
`lu(.)`	Decomposição da LU
`Chol`	Decomposição de Cholesky
`Simrcm (.)`	Esparse reverso Cuthill-McKee encomendando
`Espião`	Traça o padrão de esparsidade de uma matriz

e são revisados em detalhes no Capítulo L.

45.2.2 Numeração Nodal

31 Em geral, **K** É escassamente povoada, ou seja. Há muitos zeros na matriz. Independentemente da solução, a decomposição de uma matriz substituirá tudo K_{ij} que estão abaixo de uma "skyline"' quer sejam zero ou não. Todos os termos zero acima da "skyline"' permanecerão intocados. A linha do horizonte é o menor termo não zero em um dado pilar.

32 Há um grande benefício em empacotar todos os termos não-zero perto da diagonal para minimizar tanto o armazenamento quanto o tempo computacional. Assumindo que há

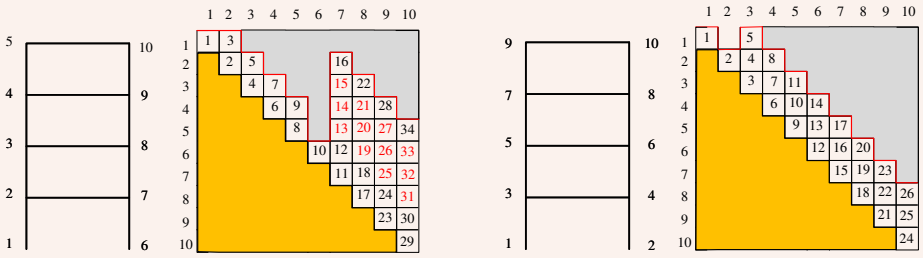
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

apenas um dof por nó na baía, 4 andares de construção. Fig. 45.6a e.. 45.6a são exemplos de nós mal e criteriosamente numerados, respectivamente.

33 Células coloridas estão abaixo da diagonal e não precisam ser armazenadas em virtude da simetria, assim como as células cinzentas que estão acima do horizonte não precisam de ser guardadas. Por outro lado, os termos não-zero são marcados em preto, e os zeros sob o horizonte estão marcados de vermelho. Ambos seriam submetidos a operações de decomposição.

34 Requisitos de armazenamento, e esforço computacional se beneficiam de "embalar" tantos termos não zero em torno da diagonal quanto possível. Esta tarefa é hoje em dia automaticamente manipulada por geradores de malha, que internamente pode usar o algoritmo Cuthill-McKnee (RCMH) para renumerar (Cuthill e McKee, 1969).



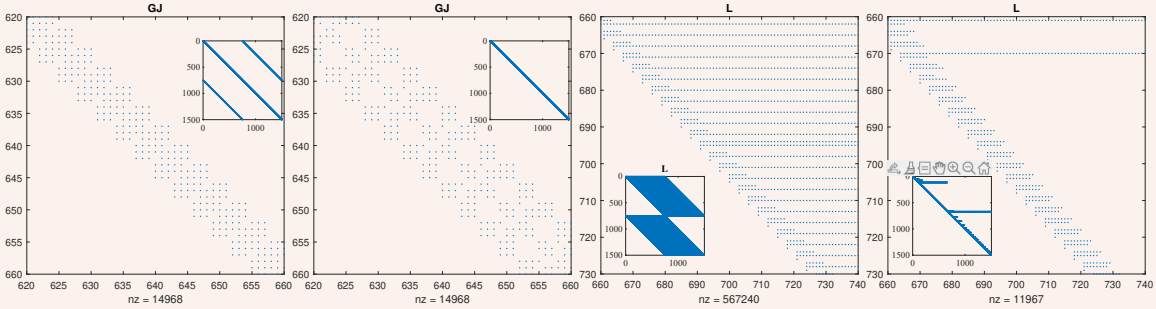
(a) Mal numerado (b) Bem numerado

Figura 45.6: Importância da numeração nodal

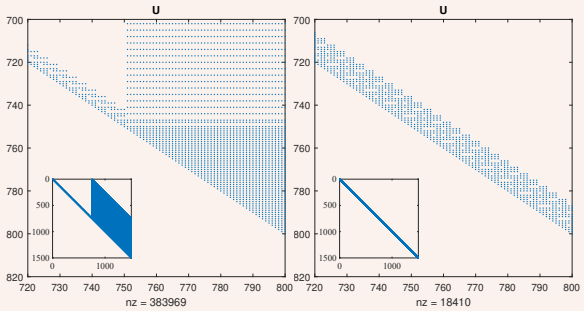
35 Para destacar ainda mais a natureza esparsa de uma estrutura matriz de rigidez, e suas implicações sobre os requisitos de armazenamento, juntamente com o custo computacional, consideramos uma baía única de 250 andares pórtico com 1.500 ($250 \times 2 \times 3$) equações. Para diferentes estratégias de decomposição (Gauss-Jordan, LU Decomposition, e Cholesky) contrastamos a distribuição dos termos não-zero com e sem o algoritmo RCMH. O número de termos não-zero é rotulado como `nz` abaixo de cada figura.

CÓPIA PARA REVISÃO

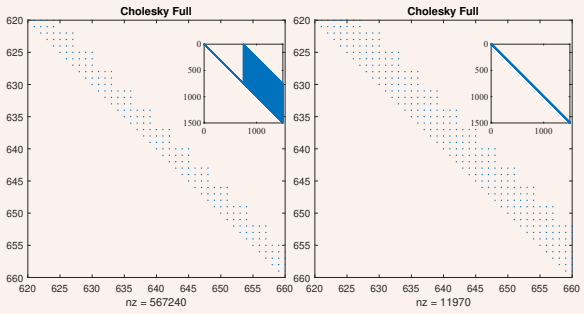
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Gauss-Jordan (b) Gauss-Jordan com RCMH (c) L decomposição (d) L decomposição com RCMH



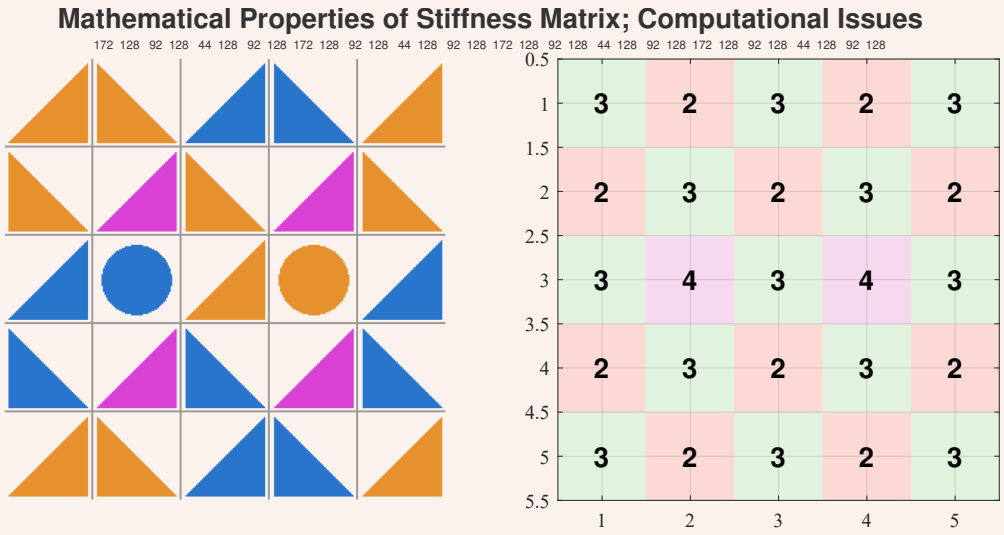
(e) Descomposição U (f) U Descomposição com RCMH



(g) Cholseky (h) Cholesky com RCMH

Figura 45.7: Requisitos de armazenamento para a estrutura matriz de rigidez

CÓPIA PARA REVISÃO



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 46

Tópicos Especiais

Abstract

Este capítulo contém uma potpourri *de diversos tópicos relacionados à matriz análise estrutural. Começamos com condensação/subestruturação, embora hoje em dia eles raramente são usados devido ao custo reduzido da memória do computador. Então, os conceitos de estática e matrizes cinemática são introduzidos. Estes conceitos serão usados para derivar as relações rigidez-flexibilidade, análise de matriz de treliças (§20.4), e a formulação do elemento baseado flexibilidade (§61.4.1.1). Em seguida, a transformação congruente, um método alternativo para realizar a montagem do aumentado matriz de rigidez (§44.4.3), será apresentado. Este método é favorecido em alguns códigos. O capítulo terminará com três tipos de especiais viga: a) vigas com deslocamentos rígidos, b) semi-rígido vigas (suportado por molas), e c) vigas com seção transversal variável.*

46.1 Condensação/subestruturação . . . 1617
46.2 Equações de estática e cinemática . . 1618
46.2.1 Matriz estática $\mathcal{B}$ 1618
46.2.2 Cinemática matriz $\mathcal{A}$ 1626
46.2.3 Estática - cinemática matricial relacionamento 1627
46.3 Relações cinemáticas através do inverso da matriz estática 1629
46.4 Rigidez-flexibilidade relações 1630
46.4.1 De rigidez a flexibilidade . . 1630
46.4.2 De flexibilidade a rigidez . . 1631
46.4.3 Duplaidade entre os métodos flexibilidade e rigidez . . 1636
46.5 Abordagem de transformação congruente para **K** 1636
46.5.1 Ex 46.9: Transformação congruente 1638
46.5.2 Ex 46.10: Transformação congruente de um pórtico 1640
46.6 Elementos especiais 1642
46.6.1 Deslocamento rígido. 1642
46.6.2 Semi-rígido vigas 1644
46.6.3 Variável seções transversais . 1650
46.7 Fontes de deriva lateral no momento 1652

CÓPIA PARA REVISÃO

46.1 Condensação/subestruturação

1 Condensação é o processo de reduzir o número de mortos. por substituição. Em um nível de elemento, podemos querer condensar um nó interno (como no elemento Lagrangiano), a nível global, isso está intimamente associado com subestruturação.

2 Vamos considerar $\mathbf{kd} = \mathbf{p}$ e vamos $\mathbf{d}$ ser dividido em

$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\}$$

Onde os subscritos r e.. c Se refere a retido e condensado D.O.F. respectivamente.

3 Para subestruturar, subscripts r e.. c Se refere à interface e ao interior do D.O.F. Por isso,

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{rr} & \mathbf{k}_{rc} \\ \mathbf{k}_{cr} & \mathbf{k}_{cc} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_c \end{array} \right\}$$

ou

$$\mathbf{k}' \mathbf{d}_r = \mathbf{p}'$$

Onde

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{rc} \mathbf{k}_{cc}^{-1} \mathbf{k}_{cr}$$
$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_r - \mathbf{k}_{rc} \mathbf{k}_{cc}^{-1} \mathbf{p}_c$$

4 Observando a forma comum das duas equações acima, deduzimos que a condensação também pode ser vista como uma transformação de um $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{k}$ sistema para um $\mathbf{d}_r, \mathbf{p}', \mathbf{k}'$ através da transformação seguinte

$$\mathbf{k}' = \mathbf{\Gamma}_c^T \mathbf{k} \mathbf{\Gamma}_c$$
$$\mathbf{p}' = \mathbf{\Gamma}_c^T \mathbf{p}$$

Onde

$$\mathbf{\Gamma}_c = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{k}_{cc}^{-1} \mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{I} \end{array} \right\}$$

5 $\mathbf{k}'$ é um r por c Matriz, enquanto $\mathbf{k}$ era $r + c$ por $r + c$ Ainda temos que nos decompor separadamente $\mathbf{k}_{cc}$ Que é c por c).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

46.2 Equações de estática e cinemática

46.2.1 Matriz estática $\mathcal{B}$

46.2.1.1 Derivação

Esta seção é tirada de *Matrix Structural Analysis* por McGuire e Gallagher, 1979[a].

[a] Infelizmente, a seção original da primeira edição tinha sido deletada da segunda.

46.2.1.2 Determinado estaticamente

6 A matriz estática $\mathcal{B}$ relaciona o vetor de toda a estrutura **P** Forças nodais em coordenadas globais para todos os desconhecidos forças (elemento esforços internos em seu sistema de coordenadas local e estrutura Reações externas) **F**, através de relações de equilíbrio e é definido como:

$$\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F} \tag{46.1}$$

7 $\mathcal{B}$ Teria tantas linhas quanto o número total de independentes Equações de equilíbrio; e tantos como independentes. Isso é uma reminiscência da matriz de equilíbrio obtida na análise treliças pelo "método de articulações".

8 Dependendo do tipo de estrutura, as forças internas dos elementos, e o As forças de equilíbrio vão variar de acordo com a tabela 46.1. Como no método flexibilidade, há mais

Tabela 46.1: Definição de força interna para a matriz estática

Tipo	Esforços internos	Equações do equilíbrio
Treliça	Força axial em uma extremidade	$\Sigma F_X = 0, \Sigma F_Y = 0$
Viga 1	Cisalhamento e momento em uma extremidade	$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$
Viga 2	Cisalhamento em cada extremidade	$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma F_y^B = 0$
Viga 3	Momento em cada fim	$\Sigma M_z^A = 0, \Sigma M_z^B = 0$
2D Pórtico 1	Axial, Cisalhamento, Momento em uma extremidade	$\Sigma F_x^A = 0, \Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$

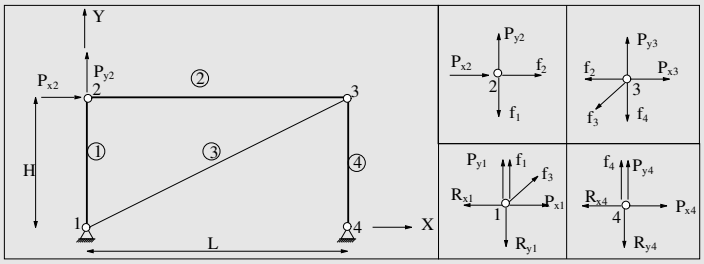
de uma combinação de Elemento independente esforços internos que pode ser selecionado.

9 Matriz $\mathcal{B}$ será uma matriz quadrada para um determinado estaticamente estrutura, e retangular (mais pilares do que linhas) caso contrário.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

46.2.1.2.1 Ex 46.1: Determinar estaticamente a matriz estática



Este treliça tem 8 forças desconhecidas (4 forças internas e 4 reações externas), e 8 equações de equilíbrio (2 em cada um dos 4 nós). Assumindo que todas as forças dos elementos para ser tração, e as reações como mostrado na figura, As equações de equilíbrio são:

Nó	$\Sigma F_X = 0$	$\Sigma F_Y = 0$
Nó 1	$\underbrace{P_{x1}}_{0} + F_3 C - R_{x1} = 0$	$\underbrace{P_{y1}}_{0} + F_1 + F_3 S - R_{y1} = 0$
Nó 2	$P_{x2} + F_2 = 0$	$P_{y2} - F_1 = 0$
Nó 3	$\underbrace{P_{x3}}_{0} - F_2 - F_3 C = 0$	$\underbrace{P_{y3}}_{0} - F_4 - F_3 S = 0$
Nó 4	$\underbrace{P_{x4}}_{0} + R_{x4} = 0$	$\underbrace{P_{y4}}_{0} + F_4 - R_{y4} = 0$

Onde $\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}} = C$ e.. $\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} = S$.. Essas equações de equilíbrio podem ser moldadas em matriz

$$\begin{matrix}\Sigma F_x^1:\\ \Sigma F_y^1:\\ \Sigma F_x^2:\\ \Sigma F_y^2:\\ \Sigma F_x^3:\\ \Sigma F_y^3:\\ \Sigma F_x^4:\\ \Sigma F_y^4:\end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ P_{x3}\\ P_{y3}\\ P_{x4}\\ P_{y4}\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} \tag{46.2}$$

as forças e reações desconhecidas podem ser determinadas através da inversão de $\mathcal{B}$:

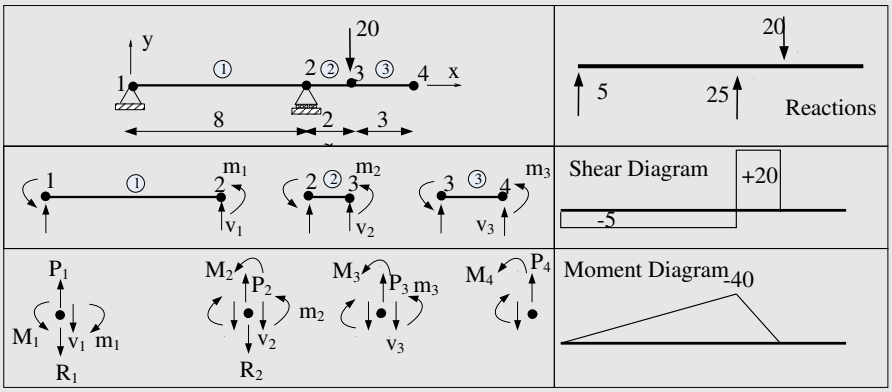
$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c} P_{y2}\\ -P_{x2}\\ \frac{P_{x2}}{C}\\ -\frac{S}{C}P_{x2}\\ \hline P_{x2}\\ \frac{S}{C}P_{x2}+P_{y2}\\ 0\\ -\frac{S}{C}P_{x2}\end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Observamos que a matriz $\mathcal{B}$ é totalmente independente do exterior carga, e uma vez invertido pode ser usado para vários casos de carga com Esforços computacionais mínimos.

46.2.1.2.2 Ex 46.2: Viga matriz estática



Este é composto por três elementos, cada um com 2 desconhecidos internos (v e.. m) mais dois Reações desconhecidas, num total de 8 desconhecidos. Para resolver essas incógnitas temos 2 equações de equilíbrio em cada um dos 4 nós. Note que neste problema nós selecionamos como principais desconhecidos o cisalhamento e momento na extremidade direita de cada elemento. Os componentes esquerdos podem ser recuperados do equilíbrio. Do equilíbrio temos assim:

$$\begin{matrix}\Sigma F_1:\\ \Sigma M_1:\\ \Sigma F_2:\\ \Sigma M_2:\\ \Sigma F_3:\\ \Sigma M_3:\\ \Sigma F_4:\\ \Sigma M_4:\end{matrix}\underbrace{\begin{Bmatrix}P_1\\ M_1\\ P_2\\ M_2\\ P_3\\ M_3\\ P_4\\ M_4\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}}=\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|cc}-1&0&0&0&0&0&1&0\\ -8&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0&1\\ 0&1&-2&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&1&-3&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\end{array}\right]}_{\mathcal{B}}\underbrace{\begin{Bmatrix}v_1\\ m_1\\ v_2\\ m_2\\ v_3\\ m_3\\ \hline R_1\\ R_2\end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

Inverter esta matriz 8 por 8 renderia

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}v_1\\ m_1\\ v_2\\ m_2\\ v_3\\ m_3\\ \hline R_1\\ R_2\end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}=\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc}0&-\frac{1}{8}&0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}&-\frac{1}{8}\\ 0&0&0&1&2&1&5&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&3&1\\ 0&0&&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ \hline 1&-\frac{1}{8}&0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}&-\frac{5}{8}&-\frac{1}{8}\\ 0&\frac{1}{8}&1&\frac{1}{8}&\frac{5}{4}&\frac{1}{8}&\frac{13}{8}&\frac{1}{8}\end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}}\underbrace{\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\-20\\0\\0\\0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}}=\begin{Bmatrix}5\\-40\\-20\\0\\0\\0\\\hline 5\\-25\end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

46.2.1.3 Estaticamente indeterminado

10 Para o caso de uma estrutura estaticamente indeterminada, Eq. 46.1 Pode ser generalizado como:

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{ \frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_x} \right\}_{(2n+r)\times 1} \tag{46.3}$$

Onde $\mathcal{B}_0$ é uma matriz quadrada, $\{\mathbf{F}_0\}$ O, o Vetor de forças internas desconhecidas ou reações externas, e.. $\mathbf{F}_x$ O vetor do desconhecido *redundante* interno forças ou reações.

11 Assim, podemos determinar $\{\mathbf{F}_0\}$ De..

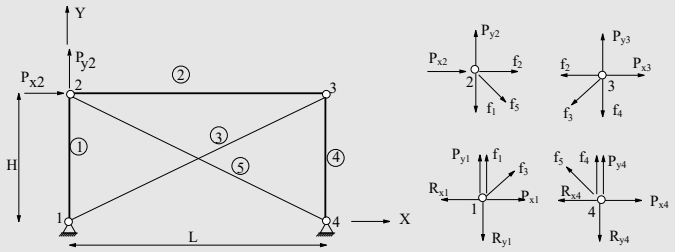
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathcal{B}_0^{-1}\mathbf{P} - \mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x\mathbf{F}_x \\ &= C_{1\,2n\times 2n}\mathbf{P} - C_{2\,2n\times r}\mathbf{F}_x \end{aligned} \tag{46.4}$$

12 Note as seguintes definições que serão usadas mais tarde:

$$\mathcal{B}_0^{-1} \equiv C_1 \tag{46.5}$$

$$-\mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x \equiv C_2 \tag{46.6}$$

46.2.1.3.1 Ex 46.3: Estaticamente indeterminada matriz estática



Revisitando o primeiro problema de exemplo, mas com um membro adicional que torna estaticamente indeterminado, agora tem 9 forças desconhecidas (5 forças internas dos membros e 4 reações externas),

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e apenas 8 equações de equilíbrio. Selecionando a força do quinto elemento como o redundante força, e com $r = 1$Nós escrevemos Eq. 46.3

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \end{array} \right\}_{(2n+r)\times 1}$$

$$\mathbf{P} = [\mathcal{B}_0]\{\mathbf{F}_0\} + [\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\begin{array}{l} \Sigma F_x^1: \\ \Sigma F_y^1: \\ \Sigma F_x^2: \\ \Sigma F_y^2: \\ \Sigma F_x^3: \\ \Sigma F_y^3: \\ \Sigma F_x^4: \\ \Sigma F_y^4: \end{array} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{array} \right\}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{02nx2n}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}_{2nx1}} + \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -C \\ S \\ 0 \\ 0 \\ C \\ -S \end{array} \right]}_{\mathcal{B}_{xnx1}} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}$$

Podemos resolver para o esforços internos em termos do (ainda desconhecido) Força redundante

$$\{\mathbf{F}_0\} = [\mathcal{B}_0]^{-1}\mathbf{P} - [\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}_0^{-1}\equiv C_1} \left[\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -C \\ S \\ 0 \\ 0 \\ C \\ -S \end{array} \right\}}_{[\mathcal{B}_x]} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \right]$$

Ou usando as seguintes relações $[\mathcal{B}_0]^{-1} \equiv [C_1]$ e.. $-[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] \equiv [C_2]$ Nós conseguimos

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array} \right\}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{C_1} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -S \\ -C \\ 1 \\ -S \\ C \\ 0 \\ -C \\ 0 \end{array} \right\}}_{C_2} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \tag{46.7}$$

Note, que esta equação não é suficiente para resolver para as forças desconhecidas, Como $\mathbf{F}_x$ Deve ser obtido através da força deslocamento Relações (**D** ou **K**).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

46.2.1.4 Identificação de forças redundantes

13 Considerando que a identificação das forças redundantes foi feita por mera inspeção da estrutura em análise manual baseada na estrutura, Este processo de identificação pode ser automatizado.

14 Começando com

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{(2n+r)\times 1}\\ \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{2n+r\times 1} - \mathbf{I}_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathbf{0}\\ \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]_{2n\times(4n+r)}\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}\\ \hline \mathbf{P}\end{array}\right\} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Onde $\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]$ corresponde para o *Matriz aumentada*.

15 Se aplicarmos um processo de eliminação Gauss-Jordan para o aumento matriz, esta equação é transformada em:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{2n\times 2n} & -C_{2_{2n\times r}} & -C_{1_{2n\times 2n}}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\\ \hline \mathbf{P}\end{array}\right\}_{4n+r\times 1} = \{\mathbf{0}\}$$

ou:

$$\{\mathbf{F}_0\}_{2n\times 1} = [C_1]_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} + [C_2]_{2n\times r}\{\mathbf{F}_x\}_{r\times 1}$$

Que é idêntico ao Eq. 46.4; Como antes, $\mathbf{F}_x$ são as forças redundantes e sua solução obviamente seria Depende das propriedades dos elementos elásticos.

46.2.1.4.1 Ex 46.4: Seleção de forças redundantes

Revisitando o indeterminado estáticamente treliça do exemplo anterior Mas com a adição de um quinto elemento, o treliça agora seria estática indeterminada em primeiro grau. A equação do equilíbrio 46.2 Então será escrito como:

$$\begin{array}{c} \\ \Sigma F_x^1 : A \\ \Sigma F_y^1 : B \\ \Sigma F_x^2 : C \\ \Sigma F_y^2 : D \\ \Sigma F_x^3 : E \\ \Sigma F_y^3 : F \\ \Sigma F_x^4 : G \\ \Sigma F_y^4 : H \end{array}\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|cccc||cc} 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c||c} \mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]}\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\\ \hline P_{x2}\\ P_{y2}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Observe que, uma vez que a carga é aplicada apenas no nó 2, nós consideramos um subconjunto da matriz de identidade **I**.

1. Começamos com a seguinte matriz

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x1} & R_{y1} & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

2. Troca pilares

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3. Operar como indica

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B' = B + DB \\ C \\ D \\ E' = \frac{E+C}{C} \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -S & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

4. Operar como indicado

$$\begin{array}{r} \\ A' = A + CE' \\ B'' = B' + SE' \\ C' = -C \\ D \\ E' \\ F' = F - SE' \\ G \\ H' = H + F' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S & 0 & 0 & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5. Troque e observe que F_5 é o selecionado redundante.

$$\begin{array}{c} \\ A' \\ B'' \\ C' \\ D \\ E' \\ F' \\ G \\ H' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & R_{x4} & R_{y4} & F_5 & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Da Eq. 46.4 Nós temos

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} R_{x1} \\ R_{y1} \\ F_2 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ S/C & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/C & 0 \\ -S/C & 0 \\ 0 & 0 \\ -S/C & 0 \end{array}\right]}_{C_1} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} P_{x2} \\ P_{y2} \end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} C \\ 0 \\ -C \\ -S \\ 1 \\ -S \\ -C \\ 0 \end{array}\right\}}_{C_2} \underbrace{\{F_5\}}_{\mathbf{F}_x}$$

Que é idêntico aos resultados em Eq. 46.7 Exceto pela ordem dos termos.

46.2.1.5 Instabilidade cinemática

16 A instabilidade cinemática resulta de uma estrutura com contenção inadequada no qual o movimento rígido do corpo pode ocorrer. A instabilidade cinemática resultará em uma matriz que é singular, e decomposição desta matriz resultará em uma divisão por zero causando um computador Programa para ”crash”. Por isso, muitas vezes é desejável para "Grandes"estruturas para determinar *A priori* se uma estrutura é cinematicamente instável antes da análise ser realizada.

17 Condições para determinação estática e instabilidade podem ser ditas como uma função da patente de $\mathcal{B}$. If $\mathcal{B}$ Tem n linhas (correspondente ao número de equações de equilíbrio), u pilares (correspondente ao número de esforços internos e reações), e é de categoria r, então as condições de instabilidade cinemática estão resumidas na tabela 46.2

18 Note que instabilidade cinemática nem sempre é sinônimo de colapso da estrutura. Em alguns casos, o equilíbrio só será recuperado depois geometria teria sido completamente alterada (como com um cabo flexível As estruturas) e equações de equilíbrio teriam que ser completamente Reescrito com a nova geometria.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 46.2: Condições para determinação estática, e instabilidade cinemática

$n > u$ -Kinematicamente instável	
$n = u$ Estaticamente determinado	
$n = u = r$	Estável
$n = u > r$	instável com $n - r$ Modos de instabilidade cinemática
$n < r$ Estaticamente indeterminado (grau) $u - n$)	
$n = r$	Estável
$n > r$	instável com $n - r$ Modos de instabilidade cinemática

46.2.2 Cinemática matriz $\mathcal{A}$

19 A matriz cinemática $\mathcal{A}$ Relaciona todo o nodal da estrutura *Total deslocamentos* em coordenadas globais $\mathbf{\Delta}$ para o elemento *deslocamentos* Em seu sistema de coordenadas local e.. O apoio deslocamento (que pode não ser zero se o acordo ocorrer) $\mathbf{\Upsilon}$ e é definido como:

$$\mathbf{\Upsilon} \equiv \mathcal{A}\mathbf{\Delta} \tag{46.8}$$

20 $\mathcal{A}$ é uma matriz retangular, número de linhas é igual a número do elemento interno deslocamentos, e o número de pilares é igual a o número de nodal deslocamentos.

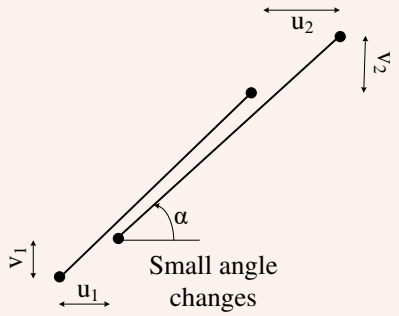


Figura 46.1: Cinemática de um elemento treliça

21 Contrariamente à matriz de rotação introduzida mais cedo e que transforma o deslocamentos De global a local coordenar para um *Solteiro* Elemento, o A matriz se aplica a toda a estrutura.

22 Pode ser facilmente mostrado que para treliças (que corresponde a encurtamento ou alongamento do membro, e pequena mudança de ângulo α):

$$\Upsilon^{(e)} = (u_2 - u_1)\cos\alpha + (v_2 - v_1)\sin\alpha$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

46.2.2.1 Ex 46.5: Cinemática matriz: treliça exemplo

Considerando novamente a determinação estática treliça do exemplo anterior, a matriz cinemática será dada por:

$$\Delta_1^{(e)} = v_2 - v_1; \quad \Delta_2^{(e)} = u_3 - u_2; \quad \Delta_3^{(e)} = (u_3 - u_1)C + (v_3 - v_1)S; \quad \Delta_i^{(e)} = \cdots$$

ou em forma de matriz:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta_1^{(e)}\\ \Delta_2^{(e)}\\ \Delta_3^{(e)}\\ \Delta_4^{(e)}\\ \hline u_1\\ v_1\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\}$$

Aplicando as restrições: $u_1 = 0$; $v_1 = 0$; $u_4 = 0$; e.. $v_4 = 0$ Nós obtemos:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta_1^{(e)}\\ \Delta_2^{(e)}\\ \Delta_3^{(e)}\\ \Delta_4^{(e)}\\ \hline 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\}$$

Devemos observar isso $\mathcal{A}$ é a transposição do $\mathcal{B}$ Matriz em Eq. 46.2.1.4.1

46.2.3 Estática - cinemática matricial relacionamento

23 Tendo definido a estática $\mathcal{B}$ e cinemática $\mathcal{A}$ matrizes, É intuitivo que essas duas matrizes devem estar relacionadas. Nesta seção buscamos determinar essa relação para ambos os estaticamente determinados e casos estaticamente indeterminados.

46.2.3.1 Determinado estaticamente

24 O trabalho externo sendo definido como

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\boldsymbol{\Delta}\\ \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F}\end{aligned}\right\} W_{ext} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

25 Alternativamente, o trabalho interno é dado por:

$$\left.\begin{aligned} W_{int} &= \frac{1}{2}\mathbf{F}\{\boldsymbol{\Upsilon}\} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\} W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

26 Equacionando o externo ao trabalho interno $W_{ext} = W_{int}$ Nós obtemos:

$$\frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

ou

$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A} \tag{46.9}$$

27 As contrapartes no nível contínuo são

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

ou $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ Onde $\mathbf{L}$ é o Operador Linear (Eq. O.7), e..

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = 0$$

ou $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$

46.2.3.2 Estaticamente indeterminado

28 Enquanto no caso anterior usamos Eq. 46.1 para $\mathcal{B}$, para o caso mais geral de estruturas estaticamente indeterminadas podemos Começando pela EQ. 46.3 e escreva:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_x \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \end{Bmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Onde $\mathbf{F}_x$ corresponde às forças redundantes. O trabalho externo será então

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\lfloor\ \mathbf{F}_0 \mid \mathbf{F}_x\ \rfloor \begin{bmatrix} [\mathcal{B}_0]^t \\ \hline [\mathcal{B}_x]^t \end{bmatrix} \mathbf{\Delta}$$

29 Novamente, podemos generalizar o Eq. 46.8 e escrever

$$\left\{ \frac{\mathbf{\Upsilon}_0}{\mathbf{\Upsilon}_x} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 \\ \hline \mathcal{A}_x \end{bmatrix} \mathbf{\Delta} \tag{46.10}$$

Onde $\mathbf{\Upsilon}_0$ e.. $\mathbf{\Upsilon}_x$ são relativos deslocamentos correspondentes a $\mathbf{F}_0$ e.. $\{\mathbf{F}_x\}$ respectivamente.

30 Consequentemente, o trabalho interno seria dado por:

$$W_{int} = \frac{1}{2}\lfloor\ \mathbf{F}_0 \mid \mathbf{F}_x\ \rfloor \begin{bmatrix} [\mathcal{A}_0] \\ \hline [\mathcal{A}_x] \end{bmatrix} \mathbf{\Delta}$$

31 Como antes, equiparando o externo ao trabalho interno $W_{ext} = W_{int}$ e simplificando, nós obtemos:

$$\mathcal{B}_0^T = \mathcal{A}_0$$
$$\mathcal{B}_x^T = \mathcal{A}_x$$

VERIFY

46.3 Relações cinemáticas através do inverso da matriz estática

32 Agora procuramos derivar algumas relações adicionais entre o deslocamentos através do inverso da matriz estática. Essas relações serão usadas mais tarde nos métodos flexibilidade, e não terão aplicações imediatas. Reescrevendo o QE. 46.10 Como

$$\mathbf{\Delta} = [\mathcal{A}_0]^{-1} \{\mathbf{\Upsilon}_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^t\right]^{-1} \{\mathbf{\Upsilon}_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t \{\mathbf{\Upsilon}_0\} \tag{46.11}$$

Podemos resolver para $\{\mathbf{F}_0\}$ De Eq. 46.4

$$\{\mathbf{F}_0\} = \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}}_{[C_1]} \mathbf{P} - \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]}_{[C_2]} \{\mathbf{F}_x\}$$

33 Combinando esta equação com $[\mathcal{B}_0]^{-1} = [C_1]$ De Eq. 46.5, e com Eq. 46.11 Nós conseguimos

$$\mathbf{\Delta} = [C_1]^t \{\mathbf{\Upsilon}_0\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

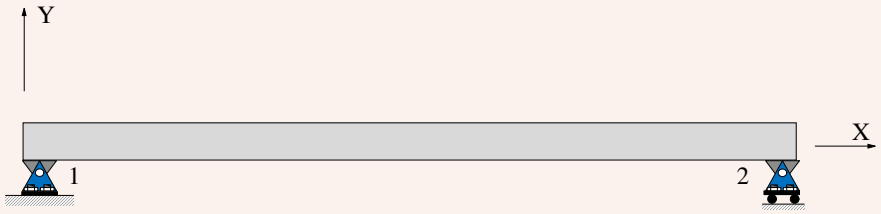


Figura 46.2: Elemento estável e estaticamente determinado

34 Da mesma forma, podemos revisitar o Eq. 46.10 e escrever

$$\{\Upsilon_x\} = [\mathcal{A}_x]\Delta$$

Quando a equação anterior é combinada com o lado mais direito do Eq. 46.3 e.. 46.11 Nós conseguimos

$$\{\Upsilon_x\} = [\mathcal{B}_x]^t \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t \{\Upsilon_0\}$$

35 Assim, com $[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] = -[C_2]$ De.. Eq. 46.6

$$\{\Upsilon_x\} = -[C_2]^t \{\Upsilon_0\} \tag{46.12}$$

Esta equação relaciona o parente desconhecido deslocamentos com os parentes conhecidos.

46.4 Rigidez-flexibilidade relações

Objetivos

36 Tendo introduzido tanto os métodos rigidez e flexibilidade, vamos considerar rigorosamente a relação entre as duas matrizes **K** e.. **[D]** no nível da estrutura.

37 O ponto de partida para nossas derivações é Eq. 44.1

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\\ \hline \mathbf{P}_u\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\mathbf{\Delta}_t\\ \hline \mathbf{\Delta}_u\end{array}\right\}$$

46.4.1 De rigidez a flexibilidade

38 Para obter **d** A estrutura deve ser suportada em um estábulo e estática Determinar o caminho, como para a viga em Fig. 46.2. Para o qual teríamos:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\boldsymbol{\delta}_f = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \text{ and } \boldsymbol{\delta}_s = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_t = \left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_s = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\}$$

39 Desde então $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ A equação acima reduz-se a:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{p}_s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{k}_{tt} \\ \mathbf{k}_{ut} \end{array} \right] \boldsymbol{\delta}_f$$

E teríamos:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.13}$$

Definition 46.1: Relacionamento

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}_{tt}^{-1}$$

46.4.1.1 Ex 46.6: Matriz de flexibilidade

Este é um caso simples, de onde começar Fig. 46.2 A relação de rotação do momento é dada por

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{EI}{L} \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{k}_{tt}} \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

Daí:

$$\mathbf{k}_{tt}^{-1} = \mathbf{d} = \frac{L}{EI} \frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right] = \frac{L}{6EI} \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$$

46.4.2 De flexibilidade a rigidez

40 Nós começamos a partir de

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{p}_s^{?} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tu} \\ \hline \mathbf{k}_{ut} & \mathbf{k}_{uu} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\delta}_f^{?} \\ \hline \boldsymbol{\delta}_s^{\checkmark} \end{array} \right\} \tag{46.14}$$

e procurarão derivar cada termo do matriz de rigidez separadamente.

41 $\mathbf{k}_{tt}$:. Da Eq. 46.14, $\mathbf{k}$ foi subdividido em D.O.F.s livres e apoiados, e nós mostramos que $\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1}$, ou $\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt} \boldsymbol{\delta}_t$ Mas ainda temos que determinar $\mathbf{k}_{tu}$, $\mathbf{k}_{ut}$, e.. $\mathbf{k}_{uu}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

42 $\mathbf{k}_{ut}$:. Desde então $\mathbf{d}$ é obtido para uma estrutura estável estaticamente determinada, temos:

$$\mathbf{p}_u = \mathcal{B} \underbrace{\mathbf{p}_t}_{\text{Eq. 46.13}} \tag{46.15}$$

$$= \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{k}_{tt}}_{\mathbf{k}_{ut}} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.16}$$

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} \tag{46.17}$$

Onde $\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F}$ é a matriz de equilíbrio estática (Eq. 46.1).

43 $\mathbf{k}_{tu}$:. Equacionando o externo ao interno Trabalho:

1. Trabalho externo: $W_{ext} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_t \mathbf{p}_t$
2. Trabalho interno: $W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_u \boldsymbol{\delta}_u$

Equacionando W_{ext} para W_{int} e combinando com

$$\mathbf{p}_u = \boldsymbol{\delta}_t \mathbf{k}_{ut}^T \tag{46.18}$$

De Eq. 46.14 com $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ (Suporte zero Nós obtemos:

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{k}_{ut}^T = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T$$

44 $\mathbf{k}_{uu}$:. Este último termo é obtido de

$$\mathbf{p}_s = \mathcal{B}\mathbf{p}_f \tag{46.19}$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{k}_{tu}\boldsymbol{\delta}_s \tag{46.20}$$

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \tag{46.21}$$

Combinando Eqns. 46.19, 46.20, e 46.21 we obter:

$$\mathbf{p}_u = \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T}_{\mathbf{k}_{uu}} \boldsymbol{\delta}_u$$

45 Em resumo, temos:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 46.2: Relacionamento

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right] \tag{46.22}$$

46 Uma observação muito importante, é que o matriz de rigidez é obviamente singular, uma vez que a segunda "row" 'é linearmente dependente do primeiro (através $\mathcal{B}$) e assim, seu determinante é igual a zero.

46.4.2.1 Ex 46.7: Flexibilidade para rigidez

Com referência à Fig. 46.2E com ambos M_1 e.. M_2 Supondo ser positivo (ccw):

1. O matriz de flexibilidade é dado por:

$$\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\ \theta_2\end{array}\right\} = \underbrace{\frac{L}{6EI}\left[\begin{array}{cc}2 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right]}_{\mathbf{d}}\left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$

2. A matriz estática $\mathcal{B}$ Relacionando-se com o exterior de esforços internos é dado Por:

$$\left\{\begin{array}{c}V_1\\ V_2\end{array}\right\} = \underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & -1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}}\left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$

3. $\mathbf{k}_{tt}$:. Seria simplesmente dado por:

$$\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1} = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]$$

4. $\mathbf{k}_{tu}$:. A parte superior off-diagonal

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right] = \frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc}6 & -6\\ 6 & -6\end{array}\right]$$

5. $\mathbf{k}_{ut}$:. Termo off-diagonal inferior

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} = \frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & -1\end{array}\right]\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right] = \frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc}6 & 6\\ -6 & -6\end{array}\right]$$

6. $\mathbf{k}_{uu}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{uu} &= \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \mathbf{k}_{ut}\mathcal{B}^T\\ &= \frac{EI}{L^2}\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}6 & 6\\ -6 & -6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right] = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc}12 & -12\\ -12 & 12\end{array}\right]\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Observemos que podemos reescrever:

$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \hline V_1 \\ V_2 \end{array}\right\} = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc} 4L^2 & 2L^2 & 6l & -6l \\ 2L^2 & 4L^2 & 6l & -6l \\ \hline 6l & 6l & 12 & -12 \\ -6l & -6l & -12 & 12 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hline v_1 \\ v_2 \end{array}\right\}$$

Se reorganizarmos o matriz de rigidez nós teríamos:

$$\left\{\begin{array}{c} V_1 \\ M_1 \\ \hline V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \underbrace{\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{-6}{L} & 2 \\ \hline \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{array}\right]}_{\mathbf{k}}\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ \hline v_2 \\ \theta_2 \end{array}\right\}$$

e é o mesmo matriz de rigidez derivado mais cedo. A dependência linear das linhas e pilares é destacada pela seguinte expressão desta mesma matriz.

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & k^r_{11} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{12} \\ -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & k^r_{21} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{22} \end{array}\right]$$

Onde k^r corresponde a.. k_{tt}

46.4.2.2 Ex 46.8: Matriz de rigidez de um elemento curvo

Nós procuramos determinar o matriz de rigidez de uma circular arco de raio R e sustentando um ângulo θ. Primeiro, nós determinamos o matriz de flexibilidade de um arco cantilevered De..

$$\delta U = \int_s \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{R}{EI}\int_0^\theta \delta\overline{M}Md\phi$$

Onde M é o momento real em ponto arbitrário A causado por cargas e.. $\delta\overline{M}$ é o momento virtual em A causada por carga unitária

47 O matriz de flexibilidade será assim dado por:

$$\left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} N \\ V \\ M \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e..

$$M = M_3 + N(R - R\cos\phi) + V(R_2 \sin\phi)$$

$\delta\overline{M}+$ $\qquad 1_3 = R(1 - \cos_1\phi) + R\sin_2\phi$

$f_{ij} =$ Disp. in DOF i caused by unit load in DOF j

$$f_{11} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta \delta M_{p1}\cdot M_{D1} d\phi$$
$$= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2(1-\cos\phi)^2 d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\phi - 2\sin\phi + \phi/2 = 1/4\sin 2\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin\phi(1-\cos\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (\sin\phi - \cos\phi\sin\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[-\cos\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[(-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta) - (-1-0)\right]$$
$$= f_{21} = \frac{R^3}{EI}\left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R(1-\cos\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^2}{EI}\left[\phi - \sin\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^2}{EI}\left[\theta - \sin\theta\right]$$

$$f_{22} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin^2\phi d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{\phi}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_o^\theta$$
$$= f_{22}\frac{R^3}{EI}\left[\frac{\theta}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R\sin\phi d\phi$$
$$= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\theta + 1\right]$$

$$f_{33} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta d\theta$$
$$= \frac{R\theta}{EI}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

46.4.3 Duplaidade entre os métodos flexibilidade e rigidez

	Flexibilidade	**Rigidez**
Indeterminação	Estático	Kinematic
Governando o Equat.	Kinematic	Equilíbrio
Desconhecidos Primários	Forças Nodais	Nodal Deslocamentos
Princípio Variacional	Força Virtual	Virtual Deslocamento
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}'\mathbf{P}$	$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma\Delta}$
	$\mathbf{d}$	$\mathbf{K}$
	$D = \mathcal{B}^T\mathbf{d}\mathcal{B}$	$\mathbf{K} = \Sigma\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{K\Gamma}$
	$\begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_P^? \\ \mathbf{\Delta}_R^{\surd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{\surd} \\ \mathbf{R}^? \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{\surd} \\ \mathbf{R}^? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ff} & \mathbf{D}_{fr} \\ \mathbf{D}_{rf} & \mathbf{D}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta}_f^? \\ \mathbf{\Delta}_r^{\surd} \end{Bmatrix}$
	$\mathbf{R} = D_{22}^{-1}(\mathbf{\Delta}_R - \mathbf{D}_{21}\mathbf{P})$	$\mathbf{\Delta}_f = K_{ff}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{fr}\mathbf{\Delta}_r)$
	$\mathbf{\Delta}_P = D_{11}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})$	$\mathbf{R} = K_{rf}\mathbf{\Delta}_f + \mathbf{k}_{rr}\mathbf{\Delta}_r$
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{P}$	$\mathbf{P} = \mathbf{K\Gamma\Delta}$

46.5 Abordagem de transformação congruente para K

Nota: Esta seção é baseada na seção 3.3 do (Gallagher, 1975)

47 Em §44.4.3 Nós cobrimos um procedimento para montar o aumento matriz de rigidez. Esta seção descreverá uma abordagem alternativa.

48 Para uma estrutura arbitrária composta de n elementos, podemos definir O, o *Sem conexão* Carga nodal e vetores em global Coordenar como

$$\mathbf{P}^{(e)} = \lfloor\ P^1 \quad P^2 \quad \ldots \quad P^n\ \rfloor^T$$
$$\mathbf{\Upsilon}^{(e)} = \lfloor\ \Upsilon^1 \quad \Upsilon^2 \quad \ldots \quad \Upsilon^n\ \rfloor^T$$

Onde $\{\mathbf{P}^i\}$ e.. $\{\mathbf{\Delta}^i\}$ são a carga nodal e deslocamentos matrizes de elementos i.. O tamanho de cada submatriz (ou mais precisamente de cada subarraia) é igual ao número total de D.O.F. em coordenadas globais para o elemento i.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

49 Da mesma forma, podemos definir o não conectado (ou desmontado) global matriz de rigidez da estrutura como $[\mathbf{K}^{(e)}]$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\{\boldsymbol{\Upsilon}\}$$
$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & & \\ & & \mathbf{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}^n \end{bmatrix}$$

50 Note que todos os outros termos desta matriz são iguais a zero, e que não há nenhuma interseção entre as várias submatrizes. Assim, esta matriz não reflete a conectividade entre todos os elementos.

51 Lembramos das seguintes relações (Eq. 46.1, 46.8, e 46.9 (respectivamente)

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$
$$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{F}$$
$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A}$$

Agora combinamos essas matrizes com a definição de matriz de rigidez:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{A}^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathcal{A}^T\mathbf{F} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\}$$

Definition 46.3: Transformação Congruente

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$$

52 Assim, acabamos de definir uma transformação congruente no global não conectado matriz de rigidez escrito em termos de $[\mathbf{K}^{(e)}]$ para obter a estrutura matriz de rigidez. Vamos notar que:

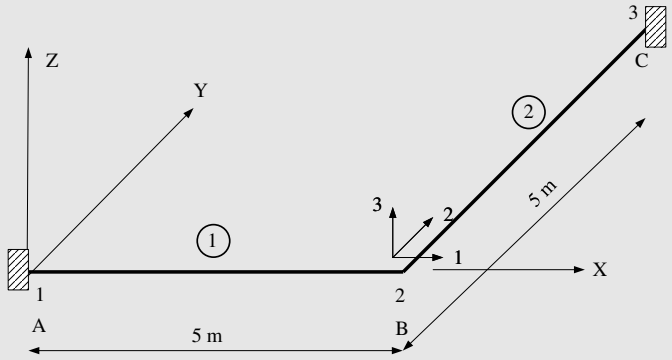
1. If $\mathbf{K}^{(e)}$ é expresso em coordenadas globais, então $\mathcal{A}$ é um Matriz booleana.
2. If $\mathbf{K}^{(e)}$ está nas coordenadas locais, então $\mathcal{A}$ deve incluir transformação de elementos a sistemas globais de coordenadas, e não é mais booleano.
3. **K** Contas para o B.C. como esses termos associados Com o D.O.F. contido Não estão incluídos.
4. Note a semelhança entre o método da rigidez direta: $\mathbf{K} = \sum \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}$ e a aproximação de transformação congruente: $\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5. Se a estrutura é um pórtico com n Então, nós teríamos $\mathbf{K}_{neq\times neq} = \sum_1^n \mathbf{\Gamma}^T_{6\times 6}\mathbf{K}_{6\times 6}\mathbf{\Gamma}_{6\times 6}$ e pela abordagem da transformação congruente: $\mathbf{K}_{neq\times neq} = \mathcal{A}^T_{neq\times 6n}\mathbf{K}^{(e)}_{6n\times 6n}\mathcal{A}_{6n\times neq}$.
6. A abordagem congruente parece ser menos eficiente que a direta rigidez método como ambos $\mathbf{K}^{(e)}$ e.. $\mathcal{A}$ são maiores do que $\mathbf{K}$.

46.5.1 Ex 46.9: Transformação congruente



Nós procuramos montar o global matriz de rigidez da grade mostrada acima usando o método de transformação congruente. O 2 elemento matrizes de rigidez no sistema de coordenadas global são dados por:

$$\mathbf{K}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0. & 0. & -7.692 & 0. & 0. \\ & .4\times 10^5 & -12. & 0. & .2\times 10^5 & 12. \\ & & .0048 & 0. & -12. & -.0048 \\ \hline & & & 7.692 & 0. & 0. \\ & & & & .4\times 10^5 & 12. \\ & & & & & .0048 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}_{BC} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1\times 10^5 & 0. & 18.75 & .5\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & 14.423 & 0. & 0. & -14.423 & 0. \\ & & .00469 & 18.75 & 0. & -.00469 \\ \hline & & & 1\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & & & .00469 \end{array}\right]$$

Vamos determinar o global matriz de rigidez usando as duas abordagens:

CÓPIA PARA REVISÃO

Localização Matrix LM

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LM}^1 = \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{LM}^2 = \lfloor\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (7.692 + 1 \times 10^5) & (0. + 0.) & (18.75 + 0.) \\ (0. + 0.) & (.4 \times 10^5 + 14.423) & (12. + 0.) \\ (0. + 18.75) & (12. + 0.) & (.0048 + .00469) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 10^5 & 0. & 18.75 \\ 0. & .4 \times 10^5 & 12. \\ 18.75 & 12. & .00949 \end{bmatrix}$$

Transformação Congruente

1. Os não montados matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$, para o nó 2, é dado por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c} M_x^1 \\ M_y^1 \\ F_z^1 \\ \hline M_x^2 \\ M_y^2 \\ F_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0 & 0 & & 0. & \\ & .4 \times 10^5 & 12. & & & \\ \text{sym} & & .0048 & & & \\ \hline & & & 1 \times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & 0. & & & 14.423 & 0. \\ & & & \text{sym} & & .00469 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Theta_x^1 \\ \Theta_y^1 \\ W_z^1 \\ \hline \Theta_x^2 \\ \Theta_y^2 \\ W_z^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{element 1} \\ \\ \\ \text{element 2} \end{array}$$

   Observe que o B.C. são implicitamente contabilizados ignorando os presos D.O.F. No entanto, a conectividade dos elementos não é refletida por esta matriz.

2. A matriz cinemática é dada por:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ w_z^1 \\ \hline \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \\ w_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_x \\ \theta_y \\ w_z \end{array}\right\}$$

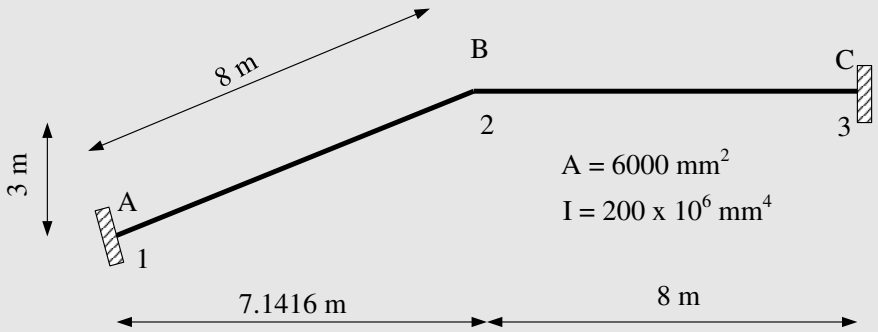
   Quanto à matriz cinemática, estamos relacionando o local deslocamentos de cada elemento para os globais. Por isso, esta matriz é análoga ao Matriz de conectividade. Considerando que a matriz de conectividade definida anteriormente refletiu a conexão de elementos, este reflete a conectividade entre todos os Não se preocupe, graus de liberdade.

3. Se pegarmos o produto: $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ Então nós nos recuperaremos **K** como mostrado acima.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

46.5.2 Ex 46.10: Transformação congruente de um pórtico



Em seguida, procuramos montar o matriz de rigidez do pórtico usando a matriz localizadora, bem como as duas aproximações congruentes. O matrizes de rigidez de elementos AB e BC no sistema de coordenadas local são dados por:

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BC} = 200 \begin{bmatrix} .75 & 0. & 0. & -.75 & 0. & 0. \\ & .00469 & 18.75 & 0 & -.0048 & 18.75 \\ & & 1\times10^5 & 0 & -18.75 & .5\times10^5 \\ & & & .75 & 0. & 0. \\ & \text{sym} & & & .00469 & -18.75 \\ & & & & & 1\times10^5 \end{bmatrix}$$

Enquanto a matriz de rotação é dada por:

$$\mathbf{\Gamma}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} .9272 & .375 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -.375 & .927 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1 & 0. & 0. & 0. \\ \hline 0. & 0. & 0. & .9272 & .375 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{\Gamma}_{BC} = \mathbf{I}$$

O elemento matrizes de rigidez nas coordenadas globais será então dado por:

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{\Gamma}_{AB}^T \mathbf{K}_{AB} \mathbf{\Gamma}_{AB}$$

$$= 200 \begin{bmatrix} .645 & .259 & -7.031 & -.645 & -.259 & -7.031 \\ & .109 & 17.381 & -.259 & -.109 & 17.381 \\ & & 1\times10^5 & 7.031 & -17.381 & .5\times10^5 \\ & & & .645 & .259 & 7.031 \\ & \text{sym} & & & .109 & -17.381 \\ & & & & & 1\times10^5 \end{bmatrix}$$

e.. $\mathbf{K}_{BC} = \mathbf{K}_{BC}$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Matriz do Localizador: Nós podemos facilmente montar o global matriz de rigidez:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= 200\begin{bmatrix}(.645+.75) & (.259+0.) & (7.031+0.)\\ & (.109+.00469) & (-17.38+18.75)\\ \text{sym} & & (1+1)\times 10^5\end{bmatrix}\\ &= 200\begin{bmatrix}1.395 & .259 & 7.031\\ & .1137 & 1.37\\ \text{sym} & & 2\times 10^5\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{46.23}$$

Transformação congruente, eixo global, booleano $\mathcal{A}$

1. Começamos com o não conectado global matriz de rigidez em global Sistema de coordenadas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c}P_X^1\\ P_Y^1\\ M_Z^1\\ \hline P_X^2\\ P_Y^2\\ M_Z^2\end{array}\right\} = 200\left[\begin{array}{ccc|ccc}.645 & .259 & 7.031 & & & \\ & .109 & -17.381 & & 0 & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0.\\ & 0 & & & .00469 & 18.75\\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}U_X^1\\ V_Y^1\\ \Theta_Z^1\\ \hline U_X^2\\ V_Y^2\\ \Theta_Z^2\end{array}\right\}$$

2. Em seguida, determinamos a matriz cinemática $\mathcal{A}$:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c}u^1\\ v^1\\ \theta^1\\ u^2\\ v^2\\ \theta^2\end{array}\right\} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}u\\ v\\ \theta\end{array}\right\}$$

3. Finalmente, se pegarmos o produto $\underbrace{\mathcal{A}^T}_{3\times 6}\ \underbrace{\mathbf{K}^{(e)}}_{6\times 6}\ \underbrace{\mathcal{A}}_{6\times 3}$ Obtemos a estrutura global matriz de rigidez **K** Em Eq. 46.23

Transformação Congruente (eixo local):

1. Sem conexão matriz de rigidez nas coordenadas locais:

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

$$\left\{\begin{array}{c}P_X^1\\ P_Y^1\\ M_Z^1\\ \hline P_X^2\\ P_Y^2\\ M_Z^2\end{array}\right\} = 200\left[\begin{array}{ccc|ccc}.75 & 0. & 0. & & & \\ & .00469 & -18.75 & & & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0.\\ & & & & .00469 & 18.75\\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_x^1\\ v_y^1\\ \theta_z^1\\ \hline u_x^2\\ v_y^2\\ \theta_z^2\end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. A matriz cinemática $[\mathcal{A}]$ Agora é dado por:

$$\delta^{(e)} = \mathcal{A}\Delta$$

$$\begin{Bmatrix} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} .9272 & .375 & 0. \\ -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \\ \hline 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_X \\ V_Y \\ \Theta_Z \end{Bmatrix}$$

3. Quando o produto: $\mathcal{A}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{A}$ Nos recuperamos A estrutura global matriz de rigidez

46.6 Elementos especiais

46.6.1 Deslocamento rígido.

53 Até agora, todos os membros eram considerados rígidos e conectando linhas centrais às linhas centrais. Em muitos casos, ou temos uma dobradiça, uma conexão semi-rígida e podemos querer levar em conta o deslocamento do membro, Fig. 46.3.

Diagrama de corpo livre

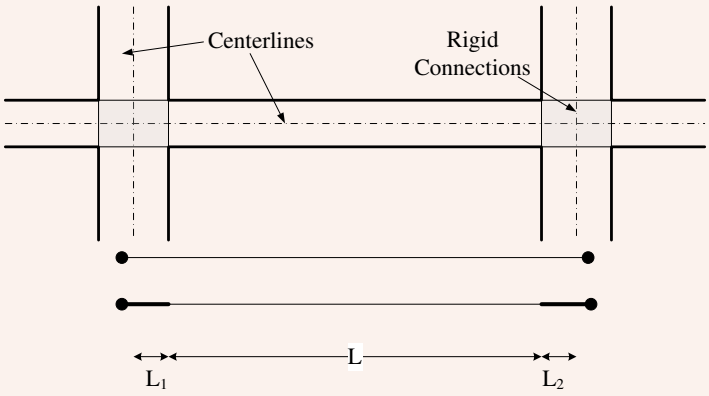


Figura 46.3: Viga com deslocamento rígido

54 O correspondente diagrama de corpo livre, Fig. 46.4, leva a

$$\mathbf{p} = \lfloor\ N_1 \quad V_2 \quad M_3 \quad N_4 \quad V_5 \quad M_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \lfloor\ \overline{N}_1 \quad \overline{V}_2 \quad \overline{M}_3 \quad \overline{N}_4 \quad \overline{V}_5 \quad \overline{M}_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{u}} = \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\theta}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{\theta}_6\ \rfloor$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

que representam as forças atuando nos lados interno e externo do elo rígido, e no exterior deslocamentos, respectivamente.

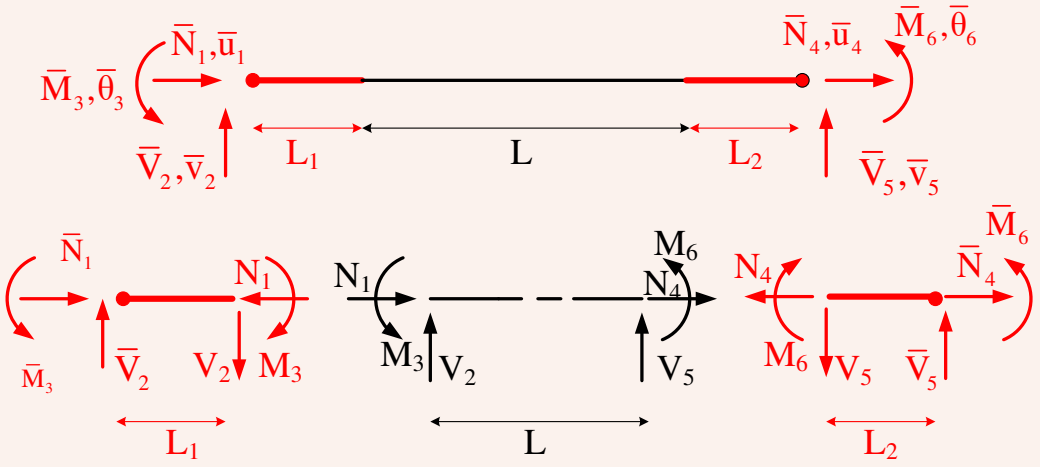


Figura 46.4: Fbd de viga com deslocamento rígido

Equilíbrio

55 Forças exteriores e interiores devem estar em equilíbrio

$$\overline{N}1 = N_1; \quad \overline{V}_2 = V_2; \quad \overline{M}_3 = L_1V_2 + M_3$$
$$\overline{N}4 = N_4; \quad \overline{V}_5 = V_5; \quad \overline{M}_6 = -L_2V_5 + M_6$$

ou

$$\overline{\mathbf{p}} = \mathcal{B}\mathbf{p} \tag{46.24}$$

$\mathcal{B}$ é o *Matriz estática* (Eq. 46.1)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

56 Da mesma forma, podemos definir uma matriz cinemática (Eq. 46.8) $\mathcal{A}$ De tal forma que..

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}\overline{\mathbf{u}} \tag{46.25}$$

E nós sabemos (Eq. 46.9) que $\mathcal{A} = \mathcal{B}^T$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

E matrizes NEF

57 Estamos agora prontos para determinar o rigidez para o elemento viga com Desloque rígido em termos de O conhecido

$$\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku} \tag{46.26}$$

Se multiplicarmos ambos os lados por $\mathcal{B}$ E substitua o Eq. 46.24 e.. 46.25 em 46.26:

$$\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} = \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{A}\overline{\mathbf{u}}$$
$$\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} = \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{B}^T\overline{\mathbf{u}}$$
$$\overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{NEF}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}}$$

Onde

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & \alpha_1 & 0-12 & \alpha_2 & \\ 0 & \alpha_1 & \gamma & 0-\alpha_1 & \beta & \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -\alpha_1 & 012 & -\alpha_2 & \\ 0 & \alpha_2 & \beta & 0 & -\alpha_2 & \gamma \end{bmatrix}$$

e.. $\alpha_i = 6L + 12L_i$, $\beta = 2L^2 + 6LL_1 + 6LL_2 + 12L_1L_2$, e $\gamma = 4L^2 + 12LL_2 + 12L_2^2$

58 As forças nodais serão então dadas por

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FN_1} \\ \overline{FV_2} \\ \overline{FM_3} \\ \overline{FN_4} \\ \overline{FV_5} \\ \overline{FM_6} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FN_1 \\ FV_2 \\ FM_3 \\ FN_4 \\ FV_5 \\ FM_6 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

46.6.2 Semi-rígido vigas

Nota: Adaptado de (Kassimali, 2021, pg. 532)

54 Muitas vezes, uma viga não tem uma conexão flexível ou rígida, mas sim uma semi-rígida (como na conexão de aço tipo II), Fig. 46.5

55 O matriz de rigidez de um elemento regular viga pode ser expresso como, Eq. 41.1:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{NEF}} = \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{46.27}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

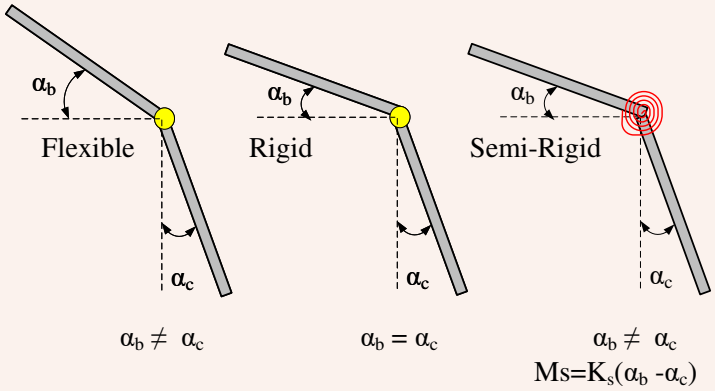


Figura 46.5: Flexível, rígida e semi-rígida vigas

Ou simplesmente **p** + **NEF** = **ku**.

56 Agora procuramos determinar o rigidez para o elemento viga com conexão semi-rígida

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

em termos de **k**, **NEF** e das duas rigidezes das molas k^s_{lft} e.. k^s_{rgt} na extremidade esquerda e direita do membro (primeiro e segundo nó).

Diagrama de corpo livre

57 Com referência à Fig. 46.6Nós denotamos por

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \lfloor\ V_1 \quad M_2 \quad V_3 \quad M_4\ \rfloor \\
\overline{\mathbf{p}} &= \lfloor\ \overline{V}_1 \quad \overline{M}_2 \quad \overline{V}_3 \quad \overline{M}_4\ \rfloor \\
\mathbf{u} &= \lfloor\ v_1 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_4\ \rfloor \\
\overline{\mathbf{u}} &= \lfloor\ \overline{v}_1 \quad \overline{\theta}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{\theta}_4\ \rfloor
\end{aligned}$$

As forças que atuam no interior e exterior das molas, bem como o nódulo deslocamentos dos lados interior e exterior das molas, respectivamente.

Equilíbrio

58 Equilíbrio dita que $\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

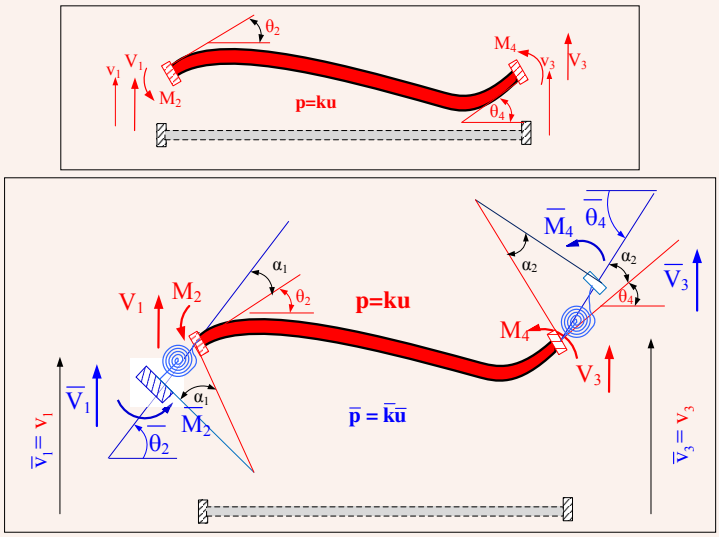


Figura 46.6: Deformações de um semi-rígido vigas

59 Quanto ao deslocamentos, e assumindo que as molas são infinitamente pequenas, temos

$$\begin{aligned} v_1 &= \overline{v}_1 \\ \theta_2 + \alpha_{\text{lft}} = \overline{\theta}_2 \Longrightarrow \theta_2 &= \overline{\theta}_2 - \underbrace{\frac{M_2}{k^s_{\text{lft}}}}_{\alpha_{\text{lft}}} \\ v_3 &= \overline{v}_3 \\ \theta_4 + \alpha_{\text{rgt}} = \overline{\theta}_4 \Longrightarrow \theta_4 &= \overline{\theta}_4 - \underbrace{\frac{M_4}{k^s_{\text{rgt}}}}_{\alpha_{\text{rgt}}} \end{aligned} \tag{46.28}$$

Onde k^s_{lft} e.. k^s_{rgt} são as molas esquerda e direita, respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

60 Substituindo o Eq. 46.28 Eq. 46.27Nós obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1 + FV_1 &= \frac{EI}{L^3}\left[12\overline{v}_1 + 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 12\overline{v}_3 + 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{M}_2 + FM_2 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 4L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 2L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{V}_3 + FV_3 &= \frac{EI}{L^3}\left[-12\overline{v}_1 - 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) + 12\overline{v}_3 - 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{M}_4 + FM_4 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 2L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 4L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{46.29}$$

61 Essas 4 equações estão acopladasM_2 e.. M_4 ambos estão dentro e fora do matriz de rigidez), nós procuramos desacoplá-los e expressar as forças exclusivamente em termos de deslocamento.

$$\begin{aligned}
\overline{M}_2 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_b}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 4L^2(3-2\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 + 2L^2\phi_{\text{rgt}}\overline{\theta}_4\right] \\
&\quad + \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})FM_2 - 2(1-\phi_{\text{rgt}})FM_4\right] \\
\overline{M}_4 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_1 + 2L^2\phi_{\text{lft}}\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_3 + 4L^2(3-2\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\right] \\
&\quad + \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2 + (4-3\phi_{\text{lft}})FM_4 - 2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2\right]
\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{lft}} &= \frac{k^s_{\text{lft}}L}{EI + k^s_{\text{lft}}L} \\
\phi_{\text{rgt}} &= \frac{k^s_{\text{rgt}}L}{EI + k^s_{\text{rgt}}L} \\
\Phi &= 12 - 8\phi_{\text{lft}} - 8\phi_{\text{rgt}} + 5\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}
\end{aligned}$$

ϕ pode ser interpretado como um *fator de rigidez*.. Para uma conexão rígida $\phi = 1$, enquanto para os dobradiças $\phi = 0$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62 Em seguida, substituímos estas duas últimas equações na primeira e terceira equações do Eq. 46.29 e obter:

$$\begin{aligned}\overline{V}_1 &= \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 \\ &\quad +6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_1 - \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})FM_4\right] \\ \overline{V}_3 &= \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[-12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 - 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 + 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 \\ &\quad -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_3 + \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})FM_4\right]\end{aligned}$$

Matriz de rigidez

63 Podemos expressar essas expressões como

$$\overline{P} = \overline{\mathbf{k}}\overline{u} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

Onde

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{\Phi L^3}\begin{bmatrix} 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & -12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) \\ 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 4L^2\phi_{\text{lft}}(3-2\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} \\ -12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_b) \\ 6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} & -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) & 4L^2\phi_{\text{rgt}}(3-2\phi_{\text{lft}}) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\overline{FV_1}\\ \overline{FM_2}\\ \overline{FV_3}\\ \overline{FM_4}\end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1-\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})\right] & 0 & -\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})\right] & \\ 0 & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})\right] & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{rgt}})\right] & \\ 0 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})\right] & 1 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})\right] \\ 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})\right] & 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})\right] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix}FV_1\\ FM_2\\ FV_3\\ FM_4\end{Bmatrix}}_{NEF}$$

64 Está claro que para conexões totalmente rígidas, $\phi = 1$, recuperamos o original rigidez matriz da viga, Eq. 46.27.

65 Se nós expressarmos a primavera rigidez k^s Como $k^s = \alpha EI/L$, então $\phi = \alpha/(1+\alpha)$. Fig. 46.7 mostra a dependência do $\overline{K}_{22}$ Coeficiente sobre α (supondo Ambas as molas tendo o mesmo rigidez).

Observação

66 Para conexões totalmente rígidas, $\phi = 1$, we recuperar o original matriz de rigidez da viga.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

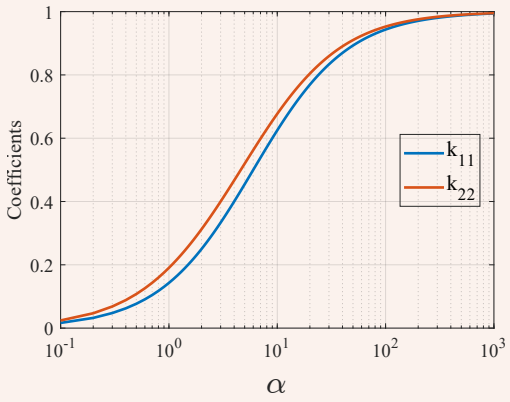


Figura 46.7: $\overline{K}_{22}$ Coeficiente para conexões semi-flexíveis

67 Se nós definirmos $\phi_1 = 0$ e.. $\phi_2 = 1$ Então temos uma dobradiça à esquerda, e uma conexão rígida à direita e ao correspondente matriz de rigidez é:

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

68 O matriz de rigidez de uma viga com uma dobradiça à sua direita será então:

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se a dobradiça estiver na ponta esquerda

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

69 Cuidado. O dof global correspondente a um dof local zero não deve ser zero, ou seja, outro elemento deve "contribuir"para o termo global.

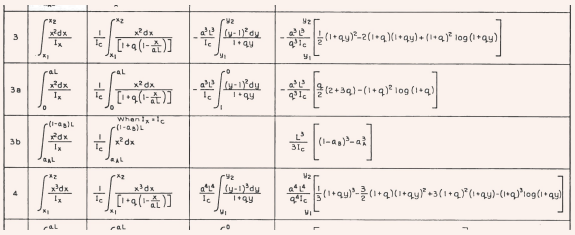
70 Se nós expressarmos a primavera rigidez k^s Como $k^s = \alpha EI/L$, então $\phi = \alpha/(1+\alpha)$. A dependência do $\overline{K}_{22}$ Coeficiente sobre α (supondo que ambas as molas tenham o mesmo rigidez).

CÓPIA PARA REVISÃO

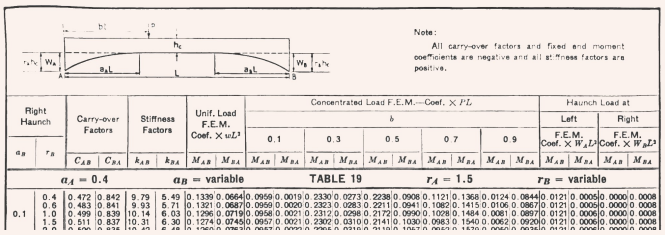
46.6.3 Variável seções transversais

71 Normalmente, no suporte temos momentos negativos maiores do que os positivos no centro. Conseqüentemente, há um benefício para ter uma viga com maior momento de inércia no suporte (através de profundidade aumentada). Esta é uma tentativa prática de ter a viga moldado como o diagrama do momento (para uma carga uniforme).

72 Portanto, há uma necessidade de determinar o matriz de rigidez de tais elementos. Tanto quanto sei, não há publicação que forneça uma solução simples para este problema, e a referência mais autoritária é (Portland Cement Association, 1947). Este manual vale alguns comentários, já que foi um dos maiores *Tour de force* em três contas: a) as soluções analíticas complexas, mas elegantes para integrais complexas, fig. 1. 46.8a; b) as 26 tabelas, 1.320 membros considerados com 25 diferentes conjuntos de dimensões 46.8b; c) facilidade de uso. E, esses cálculos foram feitos em 1947! Bem, idade pré-computador. Com referência à



(a) Integrações analíticas complexas



(b) Valores numéricos

Figura 46.8: Extratos do manual de constantes pórtico (Portland Cement Association, 1947)

Fig. 46.9 Nós definimos

a	Razão entre o comprimento do haunch no final A e o comprimento da extensão
b	Razão entre o comprimento do haunch na extremidade B e o comprimento da extensão
h_a	Altura no suporte A
h_b	Altura no apoio B
h_c	Altura no midspan
I_c	Momento de inércia da seção no midspan
I_x	Momento de inércia de qualquer distância da seção x de A
r_a	$(h_A - h_c)/h_c$ para retangular seção transversal no final A
r_b	$(h_B - h_c)/h_c$ para retangular seção transversal no final B
x	Distância do ponto variável ao fim A

e usar as seguintes equações para a variável momento de inércia:

$$I_x = \begin{cases} Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)^2\right]^3 & \text{Parabolic haunches} \\ Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)\right]^3 & \text{Straight haunches} \end{cases} \tag{46.30}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

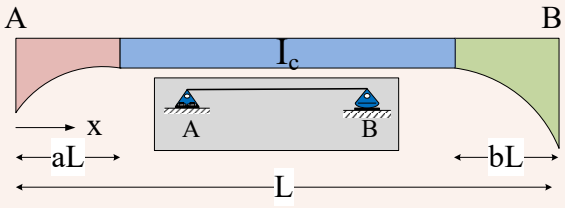


Figura 46.9: Viga com seção variável

73 O elemento matriz de rigidez será derivado do flexibilidade e estático um (**d** e.. $\mathcal{B}$(como derivado de Eq. 46.22):

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

74 A matriz estática $\mathcal{B}$ Relacionando-se externamente a esforços internos para um biapoiado viga é dado por

$$\begin{Bmatrix} R_1 = V_1 \\ R_2 = V_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

75 O matriz de flexibilidade por sua vez foi derivado no Capítulo 25, onde a força deslocamento relacionamentos são dados por

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Usando o complementar trabalho virtual (Chap 24Nós temos

$$d_{ij} = \int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx \tag{46.31}$$

Isso é direto para o membro com profundidade constante.

76 Para membros de profundidade variável, precisamos substituir o momento de inércia dado pela Eq 46.30 Em Eq. 46.31, e quebrar a integral em três partes:

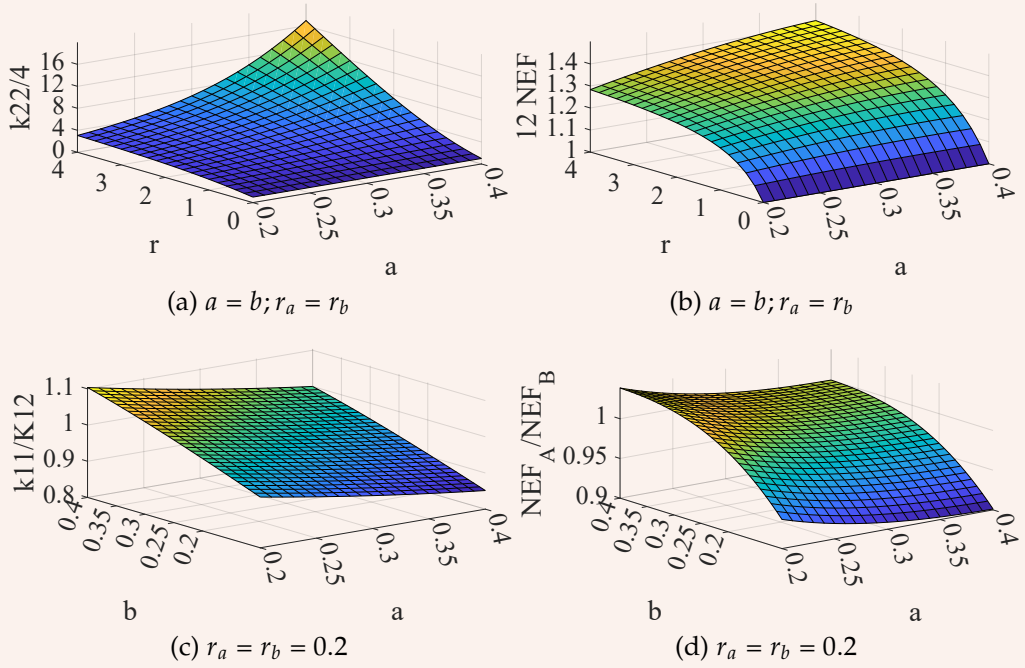
$$\begin{aligned} d_{ij} = &\int_0^{aL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,a,L,r_a}} dx && \text{Left haunch} \\ &+ \int_{aL}^{L-al} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_c} dx && \text{Central part} \\ &+ \int_0^{bL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,b,L,r_b}} dx && \text{Right haunch} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

77 Tentei resolver essas equações com o Mathematica, mas a solução analítica resultante foi bastante complexa e impraticável. Assim, a solução teria que ser obtida numericamente. Por isso, um.. MATLAB®O código foi escrito§I.2.9), tal que Eq. 41.1 Poderia ser modificado para refletir a presença de ambas as coisas.

$$\mathbf{k}^b = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

Isso foi usado para gerar as parcelas mostradas na figura. 46.10 e.. 46.11 com $L = I_z = w = 1$ .. Note que k_{22} e o **NEF** são normalizados por 4 e 12 respectivamente (coeficientes correspondentes a uma constante seção transversal).



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

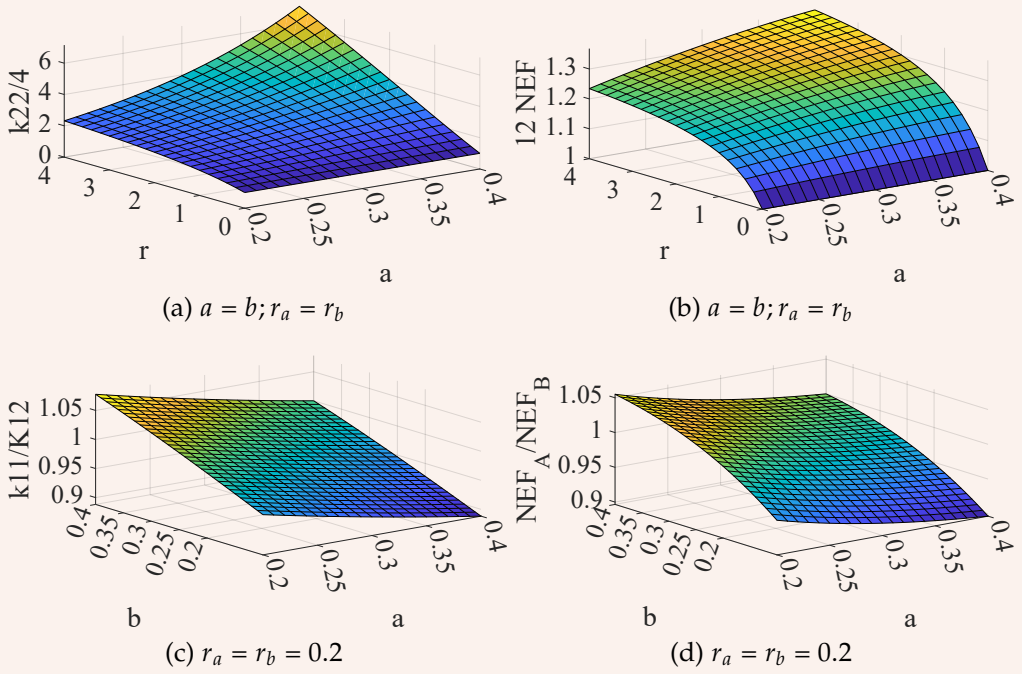
Figura 46.10: Seção com profundidade linear variável; Estudo paramétrico

46.7 Fontes de deriva lateral no momento

78 Antes de um edifício pórtico pode ser analisado dinamicamente - para encontrar o seu período natural, seu formas modais, ou sua resposta sísmica Primeiro, entenda o seu *Laterais*

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

Figura 46.11: Seção com profundidade variável parabólica; Estudo paramétrico

rigidez k. O período natural $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ é inteiramente governado por isso quantidade, e um mal-entendido de onde k Vem de leads inevitavelmente para um mal-entendido de tudo o que se segue. Esta seção, portanto, começa com uma dissecação cuidadosa e analítica das fontes de deriva lateral em um momento resistindo pórtico, antes quaisquer forças de inércia ou efeitos dinâmicos são introduzidos.

79 As perguntas aqui feitas são inspiradas por um influente ensaio de Powell, 2008, que argumentou que a educação análise estrutural dedica muito esforço aos métodos clássicos da mão Deflexão de inclinação, distribuição do momento, montagem e muito pouco para o que realmente importa na prática: Entendendo o que um resultado calculado significa fisicamente, e reconhecer quando é Errado.

80 O remédio de Powell era colocar um programa de computador nas mãos do aluno desde o primeiro dia e deixe a visão física crescer de números guiados Experimentos: Varie a viga rigidez, observe a deriva, verifique equilíbrio com um corpo livre, repita. Somos inteiramente compreensivos com essa filosofia, e as perguntas Abaixo, siga a estrutura de Powell.

81 No entanto, em um tratado deste tipo - destinado aos leitores que desejam Entender o comportamento estrutural dos primeiros princípios ao invés de Desenvolvemos uma prática de design de rotina. Seguimos um deliberadamente diferente Rota. Em vez de guiar o leitor através de experimentos de computador, nós derivar soluções analíticas de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

forma fechada em termos de pórtico parâmetros V, H, L, EI_c, e EI_b. A razão é simples: álgebra faz *visível* Que computador Esconde.

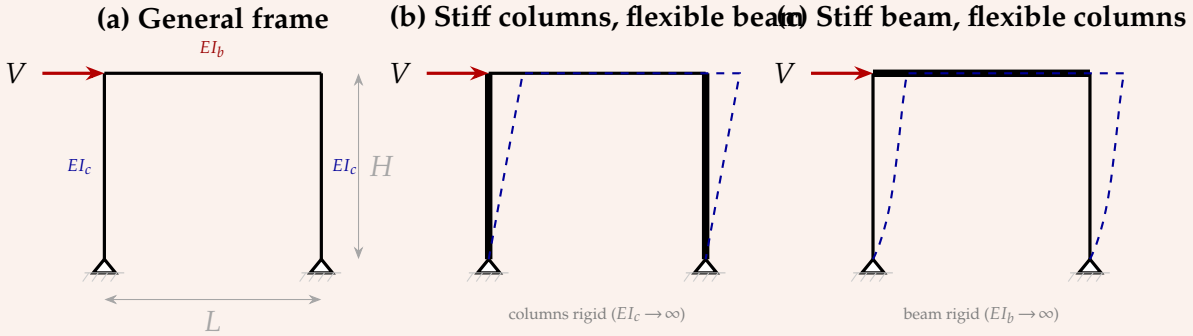
82 Uma expressão em forma fechada mostra imediatamente qual parâmetro controla a deriva, como viga e pilar flexibilidade interagem através da articulação equilíbrio, por que o ponto de inflexão em um pilar se move quando o viga muda, e onde o fator de quatro entre preso e fixo As rigidezes de base vêm.

83 Estes são exatamente os tipos de verdades físicas que Powell quer Engenheiros para entender; Nós simplesmente acreditamos que, para uma matemática leitor inclinado, uma bem interpretada derivação analítica atinge que a compreensão mais direta e duravelmente do que uma paramétrica Estudo numérico.

84 As duas abordagens são complementares, não competem. Um praticante que trabalhou através da álgebra uma vez vai Reconheça imediatamente a fórmula do valor D em uma impressão de computador, Saberão instintivamente se o local do ponto de inflexão em um pilar diagrama é plausível, e entenderá imediatamente porque atribuindo um astronomicamente grande rigidez a um elemento "rígido" envenena a solução numérica.

85 O experimento de Powell e o tratamento analítico abaixo Finalmente ensinar a mesma verdade física; Eles diferem apenas no Rota tomada para alcançá-lo.

86 O pórtico considerado ao longo de todo é um n-Continente, m-Bay Resistindo a momentos. Storeys estão numerados 1 (fundo) para n (telhado); storyy i Tem altura h_i e bay j tem largura L_j. Pilar (i, j) Tem flexão rigidez $EI_{c,ij}$ e viga em Nível i, bay j Tem flexão rigidez $EI_{b,ij}$. Cargas laterais $\{F_i\}$ agir em cada andar; O andar cisalhamento ao nível i é a carga cumulativa acima desse nível, $\hat{V}_i = \sum_{k=i}^{n} F_k$. Todos os membros são prismáticos e a análise é elástica linear. As bases estão fixas, a menos que seja dito o contrário. O único andar, um bay case ($n = m = 1$, carregar V No telhado, altura H, largura L) é usado como o principal Caso ilustrativo; Generalizações para os vários andares são anotado explicitamente onde o comportamento difere em uma qualitativa É um caminho importante.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Estudos básicos

Pergunta 1 - Análise completa

Analise o pórtico com ambos vigas e pilares deformável. Identifique o graus de liberdade, escreva a estrutura da lateral rigidez, e obter a deriva do telhado Δ, pilar momentos finais, e pilar tesoura em termos de V, H, L, EI_c, EI_b. Para a generalização de vários andares, descrever o matriz de rigidez estrutura e equações de andar à deriva.

Solução

Graus de liberdade. Para um único compartimento, há três independentes DOFs: O balanço do telhado Δ E a junta de dois.. rotações θ_L, θ_R. Por simetria $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$, reduzindo o sistema para dois desconhecidos (Δ, θ).
Equações de deflexão. Para cada pilar (comprimento H, rotação de acordes $\psi = \Delta/H$, Rotação quase-final θ, rotação de ponta 0 Na base fixa:

$$M_{\text{top}} = \frac{2EI_c}{H}(2\theta - 3\psi),$$
$$M_{\text{bot}} = \frac{2EI_c}{H}(\theta - 3\psi).$$

Para a viga (sem rotação de acordes, rotação distante) $-\theta$ por Antisimetria:

$$M_{\text{beam}} = \frac{2EI_b}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

Equilíbrio articular ($\sum M = 0$ No nível viga:

$$2M_{\text{top}} + M_{\text{beam}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

Equilíbrio lateral ($\sum Q = V$, cada pilar cisalhamento $Q = (M_{\text{top}} + M_{\text{bot}})/H$):

$$\boxed{\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.}$$

Pilar cisalhamento: $Q = V/2$ (antisimetria). Pilar momentos finais:

$$M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+\rho/3}{1+\rho/6}, \qquad M_{\text{top}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+2\rho/3}{1+\rho/6}.$$

Generalização de vários andares. Com pisos rígidos de diafragma, os DOFs laterais

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

são os n piso deslocamentos $\{u_i\}$.. Ordenando estes como um vetor, o global lateral matriz de rigidez é tridiagonal:

$$\mathbf{K}_{\text{sway}} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k_n & k_n \end{bmatrix},$$

Onde k_i é o andar rigidez no nível i (sum sobre tudo) pilares, modificado para viga flexibilidade como acima). Desconhecida $\delta_i = u_i - u_{i-1}$ são obtidos de $\mathbf{K}_{\text{sway}}\mathbf{u} = \mathbf{F}$.

Pergunta 2 - Cisalhamento-limite de construção: infinitamente rígido vigas

Vamos $EI_b \to \infty$ (Figura c). Derivar o diagrama lateral rigidez, de deriva do teto, e pilar momento. Explique a forma distorcida. Generalizar para n -Storeys.

Solução

Com $EI_b \to \infty$, rotações conjuntas são suprimidas ($\theta = 0$, $\rho \to \infty$). Cada pilar se comporta como um *Consertado, consertado* membro em dobro Curvação.

Lateral rigidez e deriva:

$$k^{\infty} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \boxed{\Delta^{\infty} = \frac{VH^3}{24EI_c}.}$$

Pilar momentos (igual e inferior, inflexão em Meia-altura:

$$M_{\text{top}} = M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}.$$

Forma defletida. A viga traduz-se como um corpo rígido sem rotação. Ambos pilares deformam-se em curvatura dupla (S-forma) com uma inflexão Aponte exatamente no meio da altura. Este é o *cisalhamento-construindo* Suposição, amplamente usada em Design preliminar.

Multi andares. O andar rigidez no nível i é a soma sobre tudo m+1 pilares:

$$k_i = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}.$$

Cada pilar carrega cisalhamento proporcional ao seu rigidez; o diagrama de momento fletor em cada pilar é linear com o ponto de inflexão no meio da altura, independentemente do número de andares. Para um uniforme pórtico sob uma única carga de teto V, Cada andar deriva pela mesma quantia $\delta = V/k$, dando uma linearmente variável Perfil.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pergunta 3 - Viga-flexibilidade limite e modo cantilever

Vamos $EI_c \to \infty$ para dobrar, mas manter axial finito rigidez EA_c (Figura b). Mostre que o pórtico agora desvia em um *Cantilever flexural* modo impulsionado pela deformação axial diferencial do pilares. Derivar a deriva correspondente do telhado. Discutir quando este modo se torna significativo em relação ao Modo de construção.

Solução

Viga-flexibilidade contribuição (história única). Quando pilares são flexualmente rígidas, não ocorre flexão. Rotações conjuntas θ são controlados inteiramente por viga flexibilidade. Ajustando $EI_c \to \infty$ Na equação de equilíbrio articular dá

$$\theta = \frac{VH^2\,L}{12\,EI_b},$$

E a deriva da rotação conjunta sozinha (“viga-flexibilidade deriva’):

$$\Delta^{\text{beam}} = \theta H = \frac{VH^3}{12\,EI_b/L \cdot H^2}.$$

Modo Cantilever (axial). Para um multi-andar pórtico com flexuramente rígido pilares, O pórtico balança sobre sua base como um cantilever vertical. A rigidez flexural equivalente do sistema pilar-axial é

$$EI_{\text{eq}} = \sum_j EA_{c,j}\,s_j^2,$$

Onde s_j É a distância de pilar j do eixo centróide. A deriva do telhado é então idêntica à de um cantilever:

$$\boxed{\Delta^{\text{ax}} = \frac{VH^3}{3\,EI_{\text{eq}}}.}$$

Quando esse modo importa? A razão de deriva axial para cisalhamento-construção é aproximadamente

$$\frac{\Delta^{\text{ax}}}{\Delta^{\infty}} \propto \frac{I_c\,H^2}{A_c\,s^2},$$

Que cresce com pórtico *Esbelta* H/B Onde B é o Largura da baía. Para o edifício baixo pórticos ($H/B < 3$O modo axial é insignificante. Para um arranha-céus esbelto$H/B > 6$–8) pode contribuir 30–50 % e deve ser explicitamente controlado por aumentando pilar áreas ou adicionando um núcleo rígido.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pergunta 4 - Superposição de componentes de deriva

Mostrar que a deriva total pode ser aproximadamente decomposta como

$$\Delta \approx \Delta^{\text{col}} + \Delta^{\text{beam}} + \Delta^{\text{ax}},$$

Explique por que essa decomposição é aproximada ao invés de exata e discutir seu valor prático.

Solução

Três fontes. A completa deriva da pergunta Pode ser escrito para primeira ordem como:

(i) **Pilar dobrando** Δ^{col}:. drift quando o viga é rígida (Questão 2).
(ii) **Viga flexibilidade** Δ^{beam}:. adicional derivar da rotação conjunta quando pilares são rígidos (Pergunta 3).
(iii) **Pilar axial** Δ^{ax}:. Modo de balanço de Alongamento diferencial (Pergunta 3).

Adicionar estes três dá a fórmula aproximada; O resultado exato da Questão 1 mostra que as três fontes interagem através da articulação equilíbrio, produzindo termos de acoplamento cruzado que a simples soma Ignora. Quantitativamente, o erro na aproximação aditiva é tipicamente 5–15 % para proporções práticas pórtico.

Por que não exatamente. A flexão produz rotações conjuntas que aumentam momentos. viga flexibilidade reduz os momentos e desloca a inflexão Ponto; A deformação axial altera ligeiramente a altura efetiva. Essas interações são capturadas exatamente apenas pelo total rigidez Solução.

Valor prático. Apesar da aproximação, a decomposição é o mais útil Ferramenta de diagnóstico disponível. Ele imediatamente identifica qual fonte domina e, portanto, onde o esforço de enrijecimento deve ser direcionado: Endureça o pilares Para reduzir Δ^{col}, endurecer o vigas para reduzir Δ^{beam}, aumentar pilar áreas ou adicionar uma parede cisalhamento Para reduzir Δ^{ax}. Nenhuma saída de computador, por mais detalhada que seja, transmite este material físico Entendendo diretamente.

Pergunta 5 - Checagem do equilíbrio

Use diagramas de corpo livre para verificar que: a) A soma de tesouras pilar é igual à carga lateral aplicada; (b) as tesouras pilar são consistentes com os momentos finais pilar; (c) equilíbrio momento conjunto é Satisfeito nas conexões viga-pilar. Generalizar para um multi-história pórtico.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Solução

(a) Equilíbrio horizontal global. Um corte horizontal através do pórtico em qualquer nível revela que o soma de pilar tesouras devem igualar a força lateral total acima daquela Corta. Para o único andar pórtico: $Q_L + Q_R = V$. Por antisimetria $Q_L = Q_R = V/2$. Para os vários andares pórtico no andar i: $\sum_j Q_{ij} = \hat{V}_i = \sum_{k \geq i} F_k$. ✓
(b) Momento - cisalhamento consistência. Isolando uma de altura h Como um corpo livre:

$$Q = \frac{M_{\text{top}} + M_{\text{bot}}}{h}.$$

Substituindo os momentos da Questão 1 confirma $Q = V/2$ para Ambos pilares. ✓
(c) equilíbrio momento conjunto. Na junta viga-pilar (nível do teto, esquerda pilar):

$$M_{\text{col,top}} + M_{\text{beam,left}} = 0,$$

Ou seja... O momento de topo deve ser igual e oposto ao momento viga Fim do tempo naquele lugar. Substituindo a pergunta 1: $M_{\text{col,top}} + \frac{6EI_b}{L}\theta = 0$, que está satisfeito pela construção do equilíbrio entre deflexão e inclinação equação. ✓
Equilíbrio articular de vários andares. Em uma junta interior i, pilar linha j):

$$M_{ij}^{\text{col,top}} + M_{i+1,j}^{\text{col,bot}} + M_{b,ij}^{\text{left}} + M_{b,ij}^{\text{right}} = 0.$$

Isso deve ser verificado em cada lugar. Qualquer violação indica que.. Erro de modelagem. Verificações de equilíbrio deste tipo são a ferramenta mais confiável para Detectando erros em um modelo de computador, e Powell (Powell, 2008 PDF) corretamente os identifica como uma habilidade de engenharia indispensável.

Pergunta 6 - Verificação por geometria direta

Para o limite de construção cisalhamento (Pergunta 2), verificar a deriva usando $\delta = PL^3/12EI$ para um fixo... fixo pilar. Para a contribuição viga-flexibilidade (Pergunta 3), use a viga Fórmula de rotação final $\theta = ML/6EI_b$ para estimar o adicional Drift. Mostre como eles se combinam para dar a aproximação de valor D.

Solução

Cisalhamento-construindo deriva por geometria direta. Um fixo... fixado pilar de altura H Em baixo de cisalhamento $Q = V/2$ - Não, não Um ponto de inflexão no meio

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

da altura. Cada metade se comporta como um cantilever fixo de comprimento $H/2$ sob carga Q:

$$\Delta = 2 \times \frac{Q(H/2)^3}{3EI_c} = \frac{VH^3}{24EI_c},$$

Confirmando pergunta Dois exatamente. ✓

Correção. A viga, dobrado anti-simetricamente sob igual e oposta extremidade Momentos M, tem rotação final $\theta = ML/6EI_b$. Esta rotação conjunta adiciona deriva θH para o pilar-dobrando Drift. Ajustando $M = M_{\text{top}}$ da solução completa e expressando o resultado como um fator de correção no rigido-viga deriva dá a *D-valor* Por pilar (i, j):

$$D_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{K_{c,ij}}{K_{c,ij} + \frac{1}{2}(K_{b,ij}^{\text{above}} + K_{b,ij}^{\text{below}})},$$

com $K_c = EI_c/h$, $K_b = EI_b/L$. A deriva do andar, incluindo viga flexibilidade é então:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}}.}$$

O método do valor D recupera o resultado exato quando $\alpha = 1$ (viga) e fornece uma aproximação confiável (tipicamente dentro de 5-10 % do resultado da matriz rigidez para todas as proporções práticas rigidez.

Pergunta 7 - Viga rotações finais e momentos

Dada a deriva do telhado Δ da Questão 1, computar a junta Rotação θ e verificar que os momentos finais viga calculados a partir de viga rigidez concordam com os obtidos da análise global. Generalizar para um multi-história pórtico e indicar o equilíbrio articular equação em um nó interno geral.

Solução

De um andar. Do equilíbrio conjunto derivado da Questão 1:

$$\theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

O momento final viga (flexão antisimétrica, rotação de ponta $-\theta$):

$$M_{\text{beam}} = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo θ E então.. Δ da Questão 1 se recupera M_{top} Exatamente. ✓
Multi-história pórtico. Em uma junta interior geral (chão) i, pilar linha j), o Equação de equilíbrio articular é:

$$\left(\frac{4EI_{c,ij}}{h_i}+\frac{4EI_{c,i+1,j}}{h_{i+1}}+\frac{4EI_{b,ij}}{L_j}+\frac{4EI_{b,i,j-1}}{L_{j-1}}\right)\theta_{ij} = \text{carry-over terms} + \text{chord-rotation terms}.$$

Os termos de transição surgem das rotações nas juntas adjacentes; Os termos de rotação são proporcionais às derivas entre andares δ_i e.. δ_{i+1}. Ajustando esta equação em cada articulação e unindo-a com o Equações de equilíbrio do pavimento produzem o sistema completo rigidez resolvido em Questão 1.

Estudos Adicionais

Pergunta A1 - Pined vs bases fixas

Para o único andar pórtico com um rígido viga, compare a lateral rigidez com bases fixas pilar Prove analiticamente que a base fixa é exatamente quatro vezes Mais flexível. Desenhe e interprete os diagramas do momento de flexão para ambos os casos. Generalize-se para um multi andares pórtico e discutir como a base A condição se propaga nos andares superiores.

Solução

Bases fixas, rígidas viga. Cada pilar é fixo-fixo; da Questão 2:

$$k^{\text{fixed}} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{fixed}} = \frac{VH^3}{24EI_c}.$$

Bases fixas, rígidas. Cada pilar está preso na base e fixado no topo (sem rotação, rígida viga): Um cantilever fixo. Fórmula padrão para um pilar fixado em cima e preso na base:

$$k^{\text{pinned}}_{\text{col}} = \frac{3EI_c}{H^3}, \qquad k^{\text{pinned}} = \frac{6EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{pinned}} = \frac{VH^3}{6EI_c}.$$

Flexibilidade relação:

$$\frac{\Delta^{\text{pinned}}}{\Delta^{\text{fixed}}} = \frac{VH^3/6EI_c}{VH^3/24EI_c} = 4. \qquad ✓$$

A proporção de 4 segue diretamente da razão do rigidez coeficientes: $12EI/H^3$ (fixo-fixo) versus $3EI/H^3$ (fixo-pined).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Diagramas do momento de dobra. Com bases fixas, ambos carregam momentos iguais de cima e de baixo $M = VH/4$ em dupla curvatura, com um ponto de inflexão no Meia-altura. Com bases fixas, o momento é zero na base, sobe linearmente para $M = VH/2$ no nível viga, e o pilar se deforma em single curvatura sem ponto de inflexão. O momento final viga é duas vezes maior com bases presas.
Multi-história pórtico. O fator 4 aplica-se apenas ao *Primeiro andar*; superior Os andares são delimitados por cima e por baixo por vigas e permanecem fixos - fixo independentemente da condição básica. No entanto, a maior deriva de primeiro andar muda o momento em que a demanda O primeiro andar vigas: com bases fixas estes vigas devem resistir duas vezes o momento final do caso de base fixa, que pode governar o viga design em baixo-rise pórticos.

Pergunta A2 - Efeito de diferentes tamanhos de membros

Discuta como o perfil de deriva e a distribuição do momento pilar mudam quando a) pilar tamanhos diminuem em andares superiores, e b) viga tamanhos Variar por andar. Identifique a proporção rigidez $\rho = EI_b H/(EI_c L)$ como o governando o parâmetro e descrevendo seu comportamento limitante.

Solução

Parâmetro de governo. Da pergunta 1, a deriva total é:

$$\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c} \cdot \frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.$$

Limite	ρ	Drift	Pilar momento padrão
Rígido viga	$\rho \to 0$	$VH^3/24EI_c$	Dupla curvatura, $M_{\text{top}} = M_{\text{bot}}$
Rígido pilar	$\rho \to \infty$	$VH^3L/(12EI_bH^2)$	Curvação única, $M_{\text{bot}} = VH/2$
Prático	$\rho \approx 1$–6	Intermediário	Misturado, IP acima da altura média

Tamanhos variáveis pilar (multi-saída). Se pilar tamanhos diminuir mais rápido em andares superiores do que o andar cisalhamento diminui, andares superiores tornam-se relativamente mais flexível e O perfil de deriva é *Topo-pesado*. Um bem proporcional pórtico mantém a deriva aproximadamente uniforme Razões δ_i/h_i em todos os níveis.
Localização do ponto de inflexão. O ponto de inflexão em pilar (i, j) Eleva-se acima da altura média quando A viga abaixo é mais rígido do que a viga acima (ou quando se aproxima uma base presa), e desce em direção à altura média como o vigas se tornar mais quase igual. Rastrear o ponto de inflexão é uma qualidade confiável Verifique a plausibilidade de um diagrama do momento do computador.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pergunta A3: Zonas extremas em conexões..

Adicione zonas rígidas de comprimento $a = d_c/2$ em cada final viga, contabilizando a largura finita pilar d_c. Mostre como é o alcance efetivo $L' = L - d_c$ muda o Coeficiente rigidez, o valor D e a deriva de piso. A correção é mais significativa no alto?

Solução

Coeficientes modificados. Substituindo todo o espaço L com o espaço livre $L' = L - d_c$ Em Todas as expressões:

$$K'_b = \frac{EI_b}{L'} > K_b = \frac{EI_b}{L},$$

Dando um maior α', um maior valor D, e portanto *menor* Drift:

$$\delta' = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D'_{ij}} < \delta.$$

Para um aço típico pórtico com $d_c \approx 0.4$ M e $L = 6$ m, a correção é $L'/L = 5.6/6 \approx 0.93$, resultando em $K'_b/K_b \approx 1.07$ (viga 7 % mais rígida) e em uma redução da deriva de Aproximadamente 5-8 %.

Mais significativo no alto pórticos. Em altura pórticos a correção de altura pilar é proporcionalmente mais Importante. If $h = 3.5$ M e $d_b = 0.5$ M (viga profundidade), o claro pilar altura é $h' = 3.0$ M e a relação entre rigidez e rigidez $(h/h')^3 = (3.5/3.0)^3 \approx 1.59$ — a 59 % Aumento em.. pilar dobrando rigidez que não pode ser ignorado em uma análise séria. Ignorando zonas de painel em um multi-história pórtico tipicamente overpredicts drift lateral por 15-30 %.

Pergunta A4 - Astronomicamente rígido pilares: Precisão numérica

Preparar $EI_c = \alpha\, EI_b$ com $\alpha \gg 1$ para simular rígida pilares. Mostrar como o número de condição do matriz de rigidez cresce com α, estimar a perda de precisão numérica, e identificar O limite prático para além do qual os resultados se tornam pouco confiáveis.

Solução

Número da condição. O número de condição das escalas montadas matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K}) \sim \alpha = EI_c/EI_b$. Por.. $\alpha = 10^n$, aproximadamente n dígitos decimais de precisão estão perdidos da solução. Na aritmética padrão de dupla precisão (aproximadamente 15 significantes) Os dígitos, a precisão utilizável é reduzida para $15 - n$ dígitos.

Forçar a recuperação. Mesmo quando deslocamentos permanecerem aceitáveis, as forças no Um membro muito rígido é calculado como rigidez × deslocamento: um grande número multiplicado por um número muito pequeno, que é *Catastrófico*

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

cancelamento em aritmética de ponto flutuante. Forças nos membros flexíveis (vigas) são geralmente confiáveis; forças no astronomicamente rígido pilares não são.
Limite prático. Razões até $\alpha \approx 10^3$–10^4 estão seguros para o padrão Solucionadores de precisão dupla em pórticos até 50 andares. Além disso, o remédio preferido é rígida ligação restrições (Pergunta A5), sem precisão estendida.
Interpretação física. Mesmo antes da falha numérica, fazendo 100 ou mais vezes Mais forte do que o vigas produz resultados que são fisicamente indistinguível do verdadeiro limite rígido-pilar; o adicional rigidez não tem efeito prático na deriva ou viga momentos. Este é o regime em que o modelo de construção cisalhamento é um essencialmente descrição exata do pórtico.

Pergunta A5 — Restrições de ligação rígidas: exatos valores de P, M, V

Substitua o astronomicamente rígido pilares da pergunta A4 com *Restrições de ligação rígidas* (mestre-escravo restrições cinemáticas). Explique por que esta abordagem é numericamente estável e Fisicamente exato, e por que o P, M, V valores calculados no Membro restrito difere daqueles calculados em Questão A4. Identifique o diafragma rígido como o caso especial mais comum.

Solução

Restrição cinemática. Uma ligação rígida entre o nó mestre A e nó escravo B Obrigações

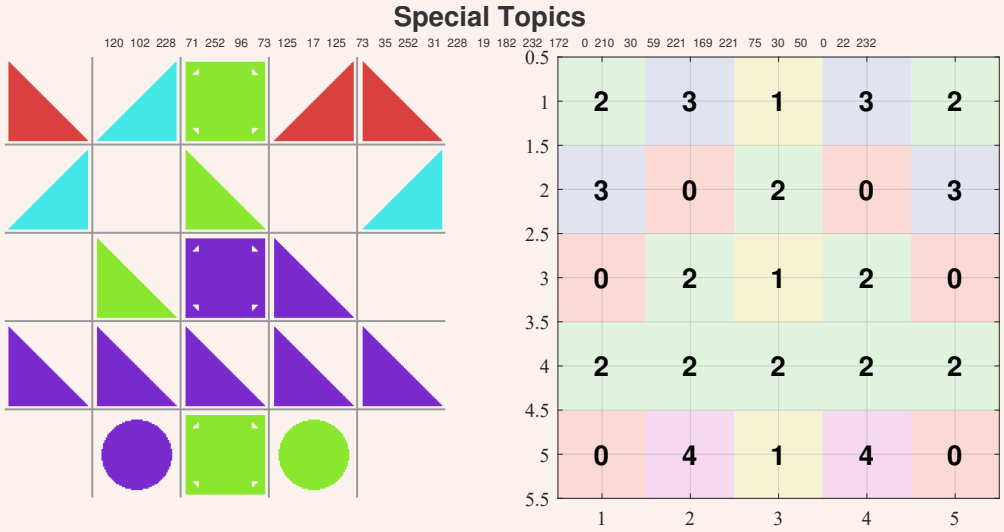
$$\mathbf{u}_B = \mathbf{T}_{AB}\,\mathbf{u}_A,$$

Onde $\mathbf{T}_{AB}$ é a transformação rígida do corpo. Os DOFs escravos são eliminados do sistema global; Restrição forças são recuperadas do equilíbrio da *adjacentes Membros flexíveis* Não aparece em nenhum lugar A computação. O resultado é numericamente exato e completamente independente do Razão.
Por que P, M, Os valores de V diferem da pergunta A4. No modelo grande-rigidez as forças pilar são calculadas como $F = K_c\,\delta$, um produto de um grande e pequeno número, Convergindo para o valor correto apenas como $\alpha \to \infty$ e.. Sofrendo cancelamento catastrófico em precisão finita. Com uma ligação rígida, a força de restrição é exatamente estática Reação necessária para impor compatibilidade, calculada diretamente de equilíbrio dos membros flexíveis conectados. Quando restrições rígidas de ligação são usadas, o computador informa *zero* P interno, M, V no elemento restrito (desde que Não carrega deformação), e todas as forças aparecem como restrições Reações... fisicamente exatas e numericamente estáveis.
Diafragma rígido. O diafragma rígido do chão, usado em praticamente todos os vários andares modelo de construção, é precisamente um conjunto de restrições rígidas de ligação Forçando que todos os nós em um determinado nível de piso passam pelo mesmo Tradução horizontal mais uma rotação rígida do corpo. As forças

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

diafragmáticas no avião (forças axiais, tesouras são recuperadas como reações de restrição: Exatamente, bem condicionado e independente do laje rigidez atribuído no modelo. O mesmo princípio deve ser aplicado sempre que um elemento estrutural pretende-se ser verdadeiramente rígido: modelar com restrições, não com Rigidez irrealistamente grande.



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 47

Cálculo Variacional em Mecânica: O Marco Euler-Lagrange

Abstract

Este capítulo desenvolve o referencial teórico para métodos variacionais na mecânica, fornecendo uma base para as abordagens baseadas em energia discutidas no próximo capítulo.

Começa com uma Introdução que contrasta as abordagens newtonianas e lagrangianas para análise estrutural, enfatizando o papel dos princípios variacionais na mecânica. A seção Euler introduz o cálculo de variações, definindo funcionais e derivando as equações Euler-Lagrange, que são centrais tanto para estática quanto para dinâmica. A distinção entre a forma forte (equações diferenciais) e a forma fraca (declarações integrais) é destacada, juntamente com seu significado na mecânica.

O capítulo explora então condições de contorno, distinguindo entre essencial e natural condições de contorno e suas implicações em formulações variacionais.

O Princípio da Energia Potencial Total é introduzido como uma pedra angular para métodos baseados em energia, levando ao Princípio de Trabalho virtual. Finalmente, o Princípio de Hamilton é apresentado, estendendo a abordagem variacional para sistemas dinâmicos, seguido por uma discussão sobre princípios variacionais multicampo, incluindo a formulação Hu-Washizu.

Enquanto este capítulo vem de (Reddy, 2017; Sokolnikoff, 1956; Pilkey e Wunderlich, 1994), foram feitos esforços para unificar a notação para consistência através desta e discussões subsequentes. O material é destinado aos leitores com um forte interesse matemático em mecânica estrutural; aqueles focados apenas em aplicações podem seguir diretamente para o próximo capítulo.

47.1 Introdução 1667
47.2 Euler 1667
47.2.1 Preliminares 1667
47.2.2 Forma diferente de $\delta\Pi$ . . . 1669
47.2.3 Equação de Euler 1670
47.2.4 $\delta\Pi$ 1671
47.2.5 Observações 1672
47.2.6 Condições de contorno . . . 1672
47.3 Princípio da Energia Potencial Total 1676
47.4 Hamilton 1680
47.4.1 Dinâmico; Euler/Lagrange . 1680
47.4.2 Ex 47.3: Hamilton 1684
47.5 General Hu-Washizu Princípio de Variação 1687
47.6 Diagramas de Pseudo-Tonti 1691
47.6.1 Princípio de D'Alembert . . . 1691
47.6.2 Equações de Hamilton 1691
47.6.3 Equações de Lagrange 1692

CÓPIA PARA REVISÃO

47.1 Introdução

1 A análise das estruturas até agora, foi alcançada através da solução de problemas específicos de valor limite expressos em termos de equações diferenciais parciais.

2 No entanto, engenharia estrutural (e mecânica) pode ser abordada de dois ângulos diferentes:

Newtonian aproximação, equilíbrio do momento (equilíbrio).

Lagrangian Abordagem: Equilíbrio de energia (termodinâmica).

3 A segunda abordagem, explorando princípios mínimos que caracterizam os estados de equilíbrio dos corpos elásticos, é desenvolvida neste capítulo. É uma abordagem baseada no uso de métodos diretos no cálculo de variações proposto primeiramente por Rayleigh e W. Ritz e depois por R. Courant, B. Galerkin e outros.

4 Este capítulo será:

1. Fornecer uma estrutura rigorosa para métodos variacionais que são a base dos chamados métodos de energia. Ao fazê-lo, formalizar a definição de Natural e Essencial condições de contorno.
2. Junte os vários "métodos de energia"e mostre que são todos (essencialmente) iguais.
3. Desenvolva o *Princípio do virtual deslocamento* como um prelúdio para o método dos elementos finitos.
4. Mostre a dualidade entre a chamada forma forte (equação diferencial) e a forma fraca (satisfação de um princípio em um sentido médio).

47.2 Euler

47.2.1 Preliminares

5 Cálculo diferencial (DC) envolve uma função de uma ou mais variáveis, enquanto cálculo variacional (VC) envolve função de função, ou funcional.

6 O problema fundamental do cálculo da variação, por outro lado, é encontrar uma função $u(x)$ De tal forma que..

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{47.1}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

E que está parado

$$\delta\Pi = 0$$

Onde δ indica que o *operador de variação* (Não confundir com derivativo)

7 Defina $u(x)$ para ser uma função de x no intervalo (a, b), e F para ser uma função real conhecida (como a densidade de energia), e nós definir o *Domínio* de um funcional como a coleção de funções admissíveis pertencentes a uma classe de funções no espaço de função em vez de uma região no espaço coordenadas (como é o caso de uma função).

8 Procure a função $u(x)$ Que extremiza Π.. Então, vamos lá $\tilde{u}(x)$ ser uma família de caminhos vizinhos da função extremizadora $u(x)$ e assumir que no final $x = a, b$ Eles coincidem.

9 Defina $u(\tilde{x})$ como a soma do caminho extremizador e alguma variação arbitrária, Fig. 47.1.

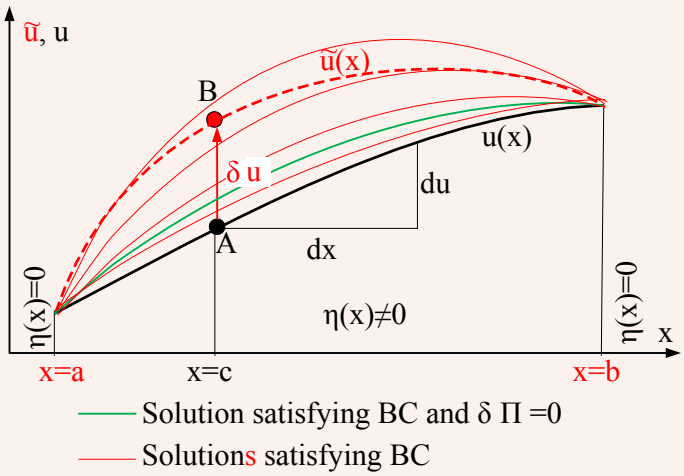


Figura 47.1: Operadores diferentes e diferenciais

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x) \tag{47.2}$$

Onde ε é um pequeno parâmetro, e $\delta u(x)$ é o *Variação* de $u(x)$

$$\begin{aligned}\delta u &= \tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x) \\ &= \varepsilon\eta(x)\end{aligned}$$

e.. $\eta(x)$ é duas vezes diferenciável, tem amplitude indefinida mas é tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Note que $\tilde{u}$ coincide com u if $\varepsilon = 0$.

10 Note que:

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- A condição necessária para extremizar um valor em DC é que a primeira derivada seja igual a zero, e que a 1a variação seja zero em CV.
- O resultado da extremização é uma única variável x em DC, e $u(x)$ em VC.

11 O operador variacional δ é análogo ao δ associado com virtual deslocamento mais tarde.

12 Pode-se mostrar que a variação e os operadores de derivação são comutativos

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\\ \delta u' &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\end{aligned}\right\} \frac{d}{dx}(\delta u) = \delta\left(\frac{du}{dx}\right)$$

13 Operador de variações δ e o operador de cálculo diferencial d pode ser usado de forma similar, ou seja.

$$\begin{aligned}\delta(u')^2 &= 2u'\delta u'\\ \delta(u+v) &= \delta u + \delta v\\ \delta\left(\int u dx\right) &= \int(\delta u)dx\\ \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\end{aligned}$$

No entanto, eles têm significados claramente diferentes. du está associado a um ponto vizinho à distância dx, no entanto δu é uma pequena mudança arbitrária na função u por um dado x (não há associação δx).

14 Para os limites onde u é especificado, sua variação deve ser zero, e é arbitrária em outro lugar. A variação δu de u Diz-se que sofre uma mudança virtual.

47.2.2 Forma diferente de $\delta\Pi$

15 Lançar a formulação variacional ($\delta\Pi = 0$) em um diferencial $\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ e usar cálculo básico.

16 Defina $\Phi(\varepsilon)$ Como

$$\Phi(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \Pi(u + \varepsilon\eta(x)) = \int_a^b F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))dx \tag{47.3}$$

Note que isso será referido como o *Forma fraca* ("fraco' porque precisa derivativo de uma ordem menor).

17 Desde então $\tilde{u}(x) \to u(x)$ Como $\varepsilon \to 0$, a condição necessária para Π Ser um extremum é

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

18 Da Eq. 47.2 $\tilde{u} = u + \varepsilon\eta$, e $\tilde{u(x)}' = u'(x) + \varepsilon\eta'(x)$, e aplicando a regra da cadeia

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \frac{d\tilde{u}'}{d\varepsilon} \right) dx = \int_a^b \left(\eta \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} + \eta' \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \right) dx$$

para $\varepsilon = 0$, $\tilde{u} = u$, assim

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u} + \eta' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx = 0 \tag{47.4}$$

19 Integração por parte $\int f g' dx = fg - \int f' g dx$) do segundo termo leva a

$$\int_a^b \left(\eta' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx = \eta \frac{\partial F}{\partial u'} \Big|_a^b - \int_a^b \eta(x) \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx$$

20 Substituindo,

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x) \frac{\partial F}{\partial u'} \Big|_a^b}_{\text{II } (x = a, b)} = 0 \tag{47.5}$$

21 Cada termo deve ser zero.

1. A primeira parte nos dará o *Equação de Euler*.
2. A segunda parte nos permitirá definir o *condições de contorno*.

47.2.3 Equação de Euler

22 Lema fundamental do cálculo da variação afirma que para contínua $\Psi(x)$ Em $a \le x \le b$E com função contínua arbitrária $\eta(x)$ Que desaparece em a e.. b, então

$$\int_a^b \eta(x) \Psi(x) dx = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = 0$$

Assim, parte I na Eq. 47.5 Rende a Forma Forte.

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{47.6}$$

23 Este equação diferencial é chamado de *Equação Euler-Lagrange* associada a Π e é uma condição necessária para $u(x)$ Para extremizar Π.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24 Note que a forma fraca é em termos de u' (Eq. 47.3) e a forma forte em termos de u'' Eq. 47.6.

25 A equação anterior pode ser generalizada para um funcional Π que depende de duas variáveis de campo, $u = u(x, y)$ e.. $v = v(x, y)$

$$\Pi = \int\int F(x, y, u, v, u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, \cdots, v_{,yy}) dx dy \tag{47.7}$$

e haveria tantas equações de Euler quanto variáveis de campo dependentes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,yy}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,yy}} = 0 \end{cases} \tag{47.8}$$

26 Note que as Equações Funcionais e as correspondentes de Euler, Eq. 47.1 e.. 47.6, ou Eq. 47.7 e.. 47.8 Descreva o mesmo problema.

27 As equações de Euler geralmente correspondem ao governo equação diferencial e são referidas como a forma forte (ou forma clássica).

28 O funcional é referido como a forma fraca (ou solução generalizada).

29 Na Mecânica, o equilíbrio é forçado em um sentido médio sobre o corpo (e a variável de campo é diferenciada) m tempos na forma fraca, e $2m$ Eq. 47.3 *vs* Eq. 47.6.

30 Pode-se mostrar que, no princípio da virtual deslocamentos, as equações de Euler são as equações do equilíbrio, enquanto que no princípio das forças virtuais, elas são equações de compatibilidade.

31 Equações de Euler são equações diferenciais que nem sempre podem ser resolvidas por métodos exatos. Um método alternativo consiste em ignorar as equações de Euler e ir diretamente para a declaração variacional do problema para a solução das equações de euler.

32 Será mostrado que a formulação Elemento finito é baseada na forma fraca, enquanto a formulação de Diferenças finitas são baseadas na forma forte.

47.2.4 $\delta\Pi$

33 Na seção anterior, acabamos de mostrar que $d\Phi(\varepsilon)/d\varepsilon$ leva para o *Euler-Lagrange* equação (Eq. 47.5)

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x = a, b)} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós ainda temos que definir $\delta\Pi$.

34 A primeira variação de uma expressão funcional é

$$\left.\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \\ \delta\Pi &= \int_a^b \delta F dx\end{aligned}\right\} \delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'\delta u'}\right) dx \tag{47.9}$$

Integração por partes. R.3O segundo mandato, como em Eq. 47.4) rende

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta u \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right) dx \tag{47.10}$$

47.2.5 Observações

35 Apenas mostrou que encontrar o valor estacionário de Π Por definir $\delta\Pi = 0$ é equivalente a encontrar o valor extremo de Π Por definir $\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ igual a zero.

36 Da mesma forma, pode-se mostrar que como com os derivados secundários em cálculo, a segunda variação $\delta^2\Pi$ pode ser usado para caracterizar o extremo como um mínimo ou máximo.

37 Uma observação importante é que a formulação variacional é escalar, enquanto a euleriana é vetorial.

47.2.6 Condições de contorno

38 Revisitando a segunda parte da Eq. 47.5,

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x=a,b)} = 0$$

nos permite definir o condições de contorno, Fig. 47.1.

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{47.11}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Isso pode ser alcançado através das seguintes combinações

$$\begin{array}{rcrcll} \eta(a)=0 & \text{e} & \eta(b) & =0 & \text{Essencial} & \Gamma_u \\ \eta(a)=0 & \text{e} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Mista} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\ \frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{e} & \eta(b) & =0 & \text{Mista} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\ \frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{e} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Natural} & \Gamma_t \end{array}$$

[39] Generalizando, para um problema com, uma variável de campo, em que a derivada mais alta no governo equação diferencial é da ordem $2m$ (ou simplesmente m No funcional correspondente), então temos, Fig. 47.2,

Essencial (ou forçado, ou geométrico) condições de contorno, (porque era essencial para a derivação da equação de Euler) se $\eta(a)$ ou $\eta(b)$ =0. Essencial condições de contorno, envolver derivativos da ordem zero (a própria variável de campo) através de m-1. Matematicamente, isso corresponde a *Problemas de valor limite Dirichlet*.

Natural (ou natural ou estático) se partimos η para ser arbitrária, então seria necessário usar $\frac{\partial F}{\partial u'}=0$ Em.. $x=a$ ou b.. Natural condições de contorno, envolver derivados da ordem m E para cima. Esse B.C. está implícito pela satisfação da afirmação variacional, mas não explicitamente declarada no próprio funcional. Matematicamente, isso corresponde a *Neuman, problemas de valor limite*.

Condições de contorno mistas são problemas em que condições de contorno essenciais e naturais são especificadas em porções complementares da fronteira (como Γ_u e Γ_t).

Problema	Membro Axial Carga distribuída	Membro Flexural Carga distribuída
Equação diferencial	$AE\frac{d^2u}{dx^2}-q=0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4}-q=0$
m	1	2
B.C. Essencial. $[0,m-1]$	u	$w,\frac{dw}{dx}$
B.C. Natural. $[m,2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ ou $\sigma_{xx}=Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ e.. $\frac{d^3w}{dx^3}$ ou $M=EIw_{,xx}$ e.. $V=EIw_{,xxx}$

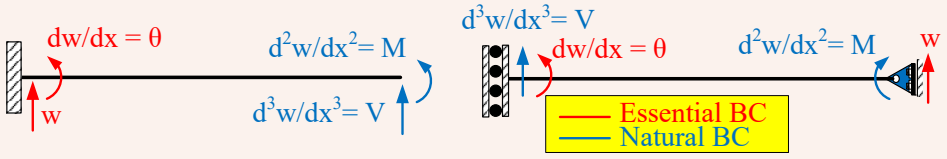


Figura 47.2: Exemplos de essenciais e naturais condições de contorno

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

47.2.6.1 Ex 47.1: Euler: Axial

Energia potencial Π de um membro axial (L, E, A), fixado na extremidade esquerda e submetido a um força axial P A direita é dada por

$$\Pi = \underbrace{\int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{\text{Strain Energy}} \underbrace{-Pu(L)}_{\text{Work}}$$

Determine a Equação de Euler, exigindo que Π Seja o mínimo.

Solução I

Siga o procedimento usado para a derivação das Equações de Euler, a primeira variação de Π:

$$\delta\Pi = \int_0^L \underbrace{\frac{EA}{2}2\left(\frac{du}{dx}\right)}_{a}\underbrace{\delta\left(\frac{du}{dx}\right)}_{b'} dx - P\delta u(L)$$

Integrando por partes (Eq. R.3)

$$\delta\Pi = + \underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{a}\underbrace{\delta u}_{b}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{a'}\underbrace{\delta u}_{b} dx - P\delta u(L) = 0$$

$$= -\int_0^L \delta u \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{\text{Euler Eq.}} dx + \underbrace{\left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} - P\right]}_{\text{B.C.}}\delta u(L)$$

$$\underbrace{- \left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\underbrace{\delta u(0)}_{0}}_{0}$$

Lembre-se disso δ em um operador arbitrário que pode ser atribuído qualquer valor, nós estabelecemos os coeficientes de δu entre $(0, L)$ e aqueles para δu Em.. $x = L$ igual a zero separadamente, e obter

- Equação de Euler:

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad 0 < x < L$$

  Observe como o funcional foi em termos de u' e a equação de Euler em termos de u''.
- Natural Condição de contorno:

$$EA\frac{du}{dx} - P = 0 \quad \text{at} \quad x = L$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Solução II

Use resultados de derivação anterior (Eq. 47.6): Nós derivámos:

$$F(x,u,u') = \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

(note que desde P é uma carga aplicada no final do membro, não aparece como parte de $F(x,u,u')$. A seguir, determinamos a Equação Euler da Eq. 47.6

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} &= 0 \\
\Rightarrow -\frac{d}{dx}(EAu') = -EA\frac{d^2u}{dx^2} &= 0 \ \text{ Euler Equation}
\end{aligned}$$

Finalmente, os condição de contorno são obtidos da Eq. 47.11:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial u'} &= EAu' \\
EA\frac{du}{dx} &= 0
\end{aligned}$$

47.2.6.2 Ex 47.2: Euler: flexura

A energia potencial total de uma viga suportando uma carga uniforme p é dado por

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right)dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F} dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós procuramos derivar a primeira variação de Π. Extendendo o EQ. 47.9, e integração por parte (Eq. R.3) duas vezes

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w \right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w \right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p \right]}_{\text{Euler Eq.}} \delta w dx = 0
\end{aligned}$$

Ou

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{for all x}$$

que é o governo equação diferencial de vigas e os condições de contorno são dados por

Essencial		Natural
$\delta w' = 0$	ou	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	ou	$(EIw'')' = -V = 0$

47.3 Princípio da Energia Potencial Total

40 A expressão para a energia potencial total (EPT) é dada por

$$\begin{aligned}
\Pi &\overset{\text{def}}{=} U - W_e \\
W_e &\overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \\
U &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega
\end{aligned}$$

o funcional para a forma geral do O princípio variacional de energia potencial é obtido

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega}_{U} \underbrace{- \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma - \mathbf{uP}}_{-W_e} \quad (47.12)$$

41 Uma declaração variacional é obtida tomando a primeira variação de Π E definir essa quantidade escalar igual a zero.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

42 A declaração variacional para a forma geral do potencial energia funcional (i.e. Equação 47.12) é

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (47.13)$$

que é o *Princípio de Trabalho virtual*.

43 Nós reescrever as relações deformação-deslocamento em termos de um **linear operador diferencial L** (Eq. O.2.3.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

Onde $\mathbf{L}$ é um operador diferencial linear e $\mathbf{u}$ é o deslocamento vetor definido em Eq. O.7:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

44 Desde que o operador diferencial $\mathbf{L}$ É *linear*, a variação do deformações $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ pode ser expresso em termos da variação do deslocamentos $\delta\mathbf{u}$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) = \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \quad (47.14)$$

45 Nós consideramos duas formas da declaração variacional

Um. Em termos de deformações: que é mais adequado para a derivação de as equações de Euler correspondentes,

$$\underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} d\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega}_{\delta U} \underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{-\delta W_e} = 0 \quad (47.15)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. **Em termos de deslocamentos:** (usando Equação 47.14) O que é mais adequado para a discretização subsequente.

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}(\mathbf{Lu})\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega}_{\delta U}$$
$$\underbrace{-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0$$

46 Para obter as equações de Euler para a forma geral do Energia potencial variacional Princípio do volume integral definindo a energia virtual deformação δU na Equação 47.15 deve ser integrado por partes, a fim de converter A variação da deformações $\delta(\mathbf{Lu})$ Em uma variação de O deslocamentos $\delta\mathbf{u}$.

47 Integração por partes dessas integrais usando o teorema de Green (Eq. R.6)

$$\int_\Omega R\frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial x}S\mathrm{d}\Omega + \oint_\Gamma RSn_x\mathrm{d}\Gamma$$

Rende-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Omega \\
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Omega \\
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{47.16}$$

Onde $\mathbf{G}$ é uma matriz de transformação contendo os cossenos de direção Para uma unidade normal vetor de tal forma que as traçãos da superfície $\mathbf{t}$ são definidos Como $\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ E as integrais da superfície estão acabadas Toda a superfície do corpo Γ.

48 Substituindo a Equação 47.16 na Equação 47.15, A declaração variacional torna-se

$$\delta\Pi = -\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{L}^T\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}\}\mathrm{d}\Omega$$
$$+\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

49 Desde então $\delta\mathbf{u}$ é arbitrária as expressões no inteiro dentro O aparelho deve ser igual a zero para $\delta\Pi$ para ser igual a zero. Reconhecendo que a relação tensão-deformação aparece tanto no volume quanto nas integrais de superfície, as equações de Euler são

$$\text{(BE): Equilibrium} \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ on } \Omega \tag{47.17}$$

$$\text{(NBC): Natural B.C.} \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t \tag{47.18}$$

onde a primeira equação de Euler é a equação do equilíbrio e a segunda A equação de Euler define o natural condições de contorno. O natural condições de contorno são definidos em Γ_t ao invés de.. Γ Porque ambas as traçãos de superfície aplicadas $\hat{\mathbf{t}}$ e o vetor matriz produto $\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ são idênticos zero fora Γ_t.

50 Em geral, apenas certas formas de equações diferenciais são Euler equações de um funcional variacional.

51 Para o problema elastostática, é possível começar a partir do Equações de Euler, e então derivar o potencial total energia funcional realizando As operações acabaram de se apresentar em ordem inversa.

52 O diagrama de Tonti para o TPE é mostrado na figura. 47.3. Neste diagrama, fortes conexões são mostradas por linhas sólidas, ligações fracas por primavera símbolos, caixas com linhas sólidas denotam o campo primário desconhecido, variáveis dentro das caixas tracejadas são internamente Campos derivados, e caixas sombreadas indicam campos prescritos.

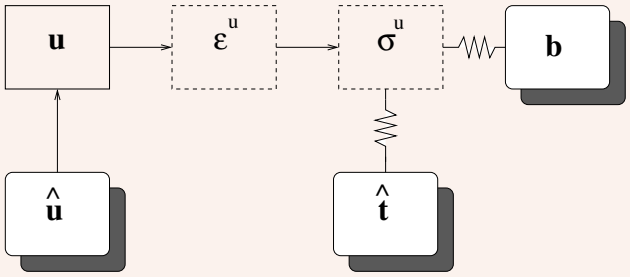


Figura 47.3: Tonti diagrap para o método de energia potencial total

53 §48.4.1 Expandir ainda mais nesta seção.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

47.4 Hamilton

47.4.1 Dinâmico; Euler/Lagrange

47.4.1.1 Sistema discreto

54 Se considerarmos uma única partícula de massa m movendo-se sob a influência de uma força $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$, o caminho $\mathbf{r}(t)$ seguida pela partícula deve satisfazer a segunda lei de movimento de Newton

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

55 Um caminho que difere do verdadeiro caminho é expresso como $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, onde $\delta\mathbf{r}$ é a variação do caminho para qualquer tempo fixo t.. Nós assumimos que o caminho real $\mathbf{r}$ E o caminho variado difere, exceto em dois momentos distintos t_1 e.. t_2; Isso é, $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$.

56 Pegando o produto escalar da equação anterior com a variação $\mathbf{r}$, e integrando-se com respeito ao tempo entre t_1 e.. t_2Nós obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\delta\mathbf{r}dt = 0$$

Integrando por parte (Eq. R.3) o primeiro termo produz

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r}\right)dt + \left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{47.19}$$

O segundo termo desaparece desde então $\delta\mathbf{R}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$.. Além disso, notamos que

$$\delta K \overset{\text{def}}{=} m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \delta\left[\frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$$

Por isso, Eq. 47.19 se torna

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K + \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r})dt = 0 \tag{47.20}$$

que é precisamente *Forma geral do princípio de Hamilton* para uma única partícula.

57 Se a força $\mathbf{F}$ é conservador (que é a soma de seu potencial e energias cinéticas são constantes), podemos substituí-lo pelo gradiente de um potencial (o 1o teorema de Castigliano)

$$\mathbf{F} = -\nabla\Pi$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{r})$ é a energia potencial da partícula. Por isso, reescreveremos o Eq. 47.20 Agora pode ser reescrita como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt = 0 \tag{47.21}$$

Porque..

$$\nabla \Pi \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \delta x_3 = \delta \Pi(x_1, x_2, x_3)$$

58 A diferença entre a energia cinética e as energias potenciais é chamada de *Lagrangian* função

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} K - \Pi$$

Eq. 47.21 É o princípio de Hamilton para o movimento conservador de uma partícula

Definition 47.1: Princípio de Hamilton

O movimento de uma partícula agiu por forças conservadoras entre dois instantes arbitrários do tempo t_1 e.. t_2 é tal que a linha integral sobre a função Lagrangiana é um extremo para o movimento caminho.

59 Isso também pode ser dito em outras palavras *De todos os caminhos possíveis que a partícula poderia viajar de sua posição no momento t_1 Para sua posição no momento t_2, seus caminhos reais será o único para o qual*

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt.$$

é um extremo.

60 Se o caminho pode ser definido em termos de coordenadas generalizadas[1] q_i $(i = 1, 2, 3)$, então

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \mathrm{d}t = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Note que o termo dentro do parêntese quadrado pode ser facilmente derivado através de um procedimento semelhante ao §47.2.4.

[1] Coordenadas generalizadas são um conjunto de parâmetros usados para representar o estado de um sistema em um espaço de configuração. Esses parâmetros devem definir a configuração do sistema em relação a um estado de referência.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

61 Se todos q_i são linearmente independentes (i.e. Sem restrições entre eles), as variações δq_i são independentes de t, exceto $\delta q_i = 0$ Em.. t_1 e.. t_2.. Portanto, os coeficientes de δq_1, δq_2, e δq_3 Desapareça separadamente, cedendo o *Lagrangian equações de movimento*, também conhecido como *Euler-Lagrange* equações.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

O que é, claro, análogo ao Eq. 47.6.

62 Para forças não conservadoras, o leitor deve se referir (Reddy, 2017, pg. 148).

47.4.1.2 Sistema de continuidade

63 Seguindo essencialmente o mesmo procedimento que o desenvolvido para sistemas discretos, podemos desenvolver o princípio de Hamilton para a dinâmica do corpo deformável. Considerando que a segunda lei de movimento ainda se aplica, agora que o corpo é deformável, precisaremos de uma equação constitutiva.

64 Começando com

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

O caminho real $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ Seguiu uma partícula material em posição $\mathbf{x}$ varia consistente com cinemática (essencial) condição de contorno para $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ Onde $\delta\mathbf{u}$ é a variação admissível (ou virtual deslocamento) do caminho.

65 Como antes, nós supomos que o caminho variado difere do atual, exceto às vezes t_1 e.. t_2.. Assim, uma variação admissível de $\delta\mathbf{u}$ satisfaz as condições (equação de governo e condições de contorno)

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= 0 && \text{on } \Gamma_u \text{ for all } t \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) &= \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) && \text{for all } \mathbf{x} \end{aligned} \tag{47.22}$$

Onde Γ_u Denota a parte da superfície do corpo onde o deslocamento vetor $\mathbf{u}$ é especificado.

66 O trabalho feito no corpo na hora t pela força resultante em mover-se através do virtual deslocamento $\delta\mathbf{u}$ É

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

Onde 4$\mathbf{b}$ é o vetor de força corporal, $\mathbf{t}$ a tração especificada, $\boldsymbol{\sigma}$ e.. $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os tensores tensão e deformação. Os últimos termos representam o trabalho virtual do esforços internos armazenado no corpo (assim negativo).

67 O trabalho feito pela força de inércia $m\mathbf{a}$ Movendo-se através do virtual deslocamento $\delta\mathbf{u}$ É

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde ρ é a densidade de massa.

68 Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_\Omega \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega-\left(\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma-\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega\right)\right]dt=0\\ \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_\Omega \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial t}d\Omega-\left(\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma-\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega\right)\right]dt=0\end{aligned} \tag{47.23}$$

O primeiro termo na segunda expressão foi obtido através da integração por partes; os termos integrados desaparecem por causa do inicial e final condições de contorno (Eq. 47.22).

69 Eq. 47.23 é a forma geral do princípio de Hamilton para um meio contínuo (conservador e elástico ou não).

70 O potencial do trabalho externo por sua vez é definido por (Eq. 48.6).

$$\delta\mathcal{W}_e=-\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega-\int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma$$

e desde então para um corpo elástico ideal **b** e.. **t** são conservadoras e a energia deformação U_0 existe de tal forma que

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial U_0}{\partial\varepsilon_{ij}},\qquad \text{onde } U_0=U_0(\varepsilon_{ij})$$

(Aplicando o teorema fundamental de cálculo

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\quad\text{e}\quad F'(x)=f(x)$$

Para Eq. 48.3).

71 Substituindo esta última equação em Eq. 47.23 Nós conseguimos

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[K-(\mathcal{W}_e+U)\right]dt=0 \tag{47.24}$$

Onde K e.. U são as cinéticas e deformação energias

$$K=\int_\Omega\frac{\rho}{2}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\partial t}d\Omega,\qquad U=\int_\Omega U_0d\Omega$$

72 Eq. 47.24 representa o princípio de Hamilton para um corpo elástico (de novo, linear ou não linear).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

[73] Desde então $\Pi = U + \mathcal{W}_e$ é a energia potencial total, Eq. 48.6, para o corpo sem movimento (i.e. forças são aplicadas suficientemente lentamente que o movimento é independente do tempo e as forças de inércia são insignificantes), o princípio de Hamilton reduz ao princípio virtual deslocamento.

[74] as equações Euler-Lagrange associadas com os Lagrangianos $L = K - \Pi$, pode ser obtido a partir de Eq. 47.24.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(u_i, \dot{u}_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t} - \widehat{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \right] dt \end{aligned}$$

Onde $\widehat{\mathbf{t}}$ é a tração superficial especificada ao longo de Γ_t. Chegamos à última equação da Eq. 47.24 através da integração por partes, teoremas de gradiente e Eq. 47.22.

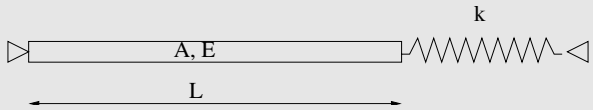
[75] Desde então $\delta \mathbf{u}$ é arbitrário para $t_1 < t < t_2$, e $\mathbf{x}$ Dentro Ω E continua Γ_t, segue-se que

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad &\text{in } \Omega \\ t - \widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad &\text{on } \Gamma_t \end{aligned}$$

Esta é a equação Euler-Lagrange para um corpo elástico.

47.4.2 Ex 47.3: Hamilton

Para um uniforme seção transversal bar de comprimento L, área transversal A, Módulo de Young E, e densidade de massa ρ fixado em uma extremidade, e conectado a um suporte rígido na outra por uma mola com rigidez k



Estamos interessados em determinar o movimento periódico, que tem a Formar

$$u(x,t) = u_0(x) e^{i\omega t}$$

Onde ω é a frequência da vibração natural, e $u_0(x)$ é a amplitude. As energias cinéticas e deformação são dadas por

$$\begin{aligned} K &= \int_\Omega \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{\rho A}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\ U &= \int_\Omega \frac{E}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{k}{2} [u(L)]^2 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Na ausência de um potencial de trabalho externo, Eq. 47.24 (com $\mathcal{W} = 0$)

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt \\ &= \frac{1}{2}\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x - k[u(L)]^2 \right\} \mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Nós presumimos

$$u(x,t) = u_0(x) e^{i\omega t}$$

Onde ω é a frequência da vibração natural, e $u_0(x)$ é o amplitude, e substituto

$$\delta \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} \left[\rho A \omega^2 [u_0(x)]^2 - EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x - \frac{k}{2} [u_0(L)]^2 \right\} = 0$$

Onde $\int_{t_1}^{t_2} \exp^{2i\omega t} \, \mathrm{d}t$ Ser não-zero está fora de questão. Em vez de usar fórmula derivada anteriormente, rederivamos a correspondente Equação Euler

$$\begin{aligned}&\delta \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} \left[\rho A \omega^2 (u_0)^2 - EA \left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x - \frac{k}{2} [u_0(L)]^2 \right\} = \\ &\int_0^L \left[\rho A \omega^2 u_0 \delta u_0 - EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \mathrm{d}x - k u_0(L) \delta u_0(L) = 0\end{aligned}$$

Integrando por parte (Eq. R.3)

$$\int_0^L \underbrace{EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}_{u} \underbrace{\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}_{v'} \mathrm{d}x = \underbrace{EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}_{u} \underbrace{\delta u_0}_{v} \Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}_{u'} \underbrace{\delta u_0}_{v} \mathrm{d}x$$

Substituindo

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left[\rho A \omega^2 [u_0(x)] - EA \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \mathrm{d}x - k u_0(L) \delta u_0(L) \\ &= \int_0^L \rho A \omega [u_0(x)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \underbrace{- EA \left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} \right) \delta u_0 \Big|_0^L}_{0} - k u_0(L) \delta u_0(L) = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(EA \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} \right) + \rho A \omega^2 u_0 = 0 \ \text{ for } \ 0 < x < L \\ \left(EA \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} + k u_0 \right) = 0 \ \text{ for } \ x = L\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo $\overline{x} = \frac{x}{L}$, $\mathrm{d}x = L\mathrm{d}\overline{x}$, $\overline{u} = \frac{u_0}{L}$, e.. $\alpha = \frac{kL}{EA}$, $\lambda = \frac{\omega^2 \rho L^2}{E}$ Nós temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2 (u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda EA}{L^2}(L\overline{u})^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right] L\mathrm{d}\overline{x} - \frac{k}{2}\left[L\overline{u}_0(1)\right]^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} EAL\left[\lambda(\overline{u})^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \frac{kL^2}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2 \\
&= \frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\} \\
&\Rightarrow \delta\left[\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\right] = 0 \\
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\lambda(\overline{u})^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \frac{\alpha}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

Usando o método Rayleigh-Ritz com

$$u = c_1 x + c_2 x^2$$

e reescrever a equação anterior em termos de u

$$\begin{aligned}
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\lambda(u)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2}\left[u(1)\right]^2\right\} = 0 \\
&\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)(\delta c_1 x + \delta c_2 x^2) - (c_1 + 2c_2 x)(\delta c_1 + 2\delta c_2 x)\right]\mathrm{d}x \\
&- (c_1 + c_2)(\delta c_1 + \delta c - 2) = 0
\end{aligned}$$

Coletando os coeficientes de δc_1 e.. δc_2 E colocá-los para Zero separadamente, temos

$$\begin{aligned}
\delta c_1 : &\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)x - (c_1 + 2c_2 x)\right]\mathrm{d}x - (c_1 + c_2) = 0 \\
\delta c_2 : &\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)x^2 - (c_1 + 2c_2 x)2x\right]\mathrm{d}x - (c_1 + c_2) = 0
\end{aligned}$$

Integrando, reduzindo e compactando

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Uma solução não trivial existe se e somente se

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{\lambda}{3} & 2 - \frac{\lambda}{4} \\ 2 - \frac{\lambda}{4} & \frac{7}{3} - \frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$15\lambda^2 - 640\lambda + 2400 = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Esta equação quadrática tem duas raízes

$$\lambda_1 = 4.1545 \qquad \lambda_2 = 38.512$$

Que correspondem a..

$$\omega_1 = \frac{2.038}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{6.206}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

A solução exata é dada por

$$\lambda + \tan\lambda = 0$$

De quem são as primeiras duas raízes

$$\omega_1 = \frac{2.02875}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{4.91318}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

47.5 General Hu-Washizu Princípio de Variação

A seção seguinte é reproduzida de Reich, 1993 *"On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams"*.

76 A *Multi-campo* princípio variacional é um que tem mais de um campo mestre (ou variável de estado), que é mais de um campo desconhecido está sujeito a variações independentes.

77 Em elastostáticas lineares, podemos ter deslocamento, $\mathbf{u}$, deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, ou tensão $\boldsymbol{\sigma}$ Como potenciais candidatos para campos mestres. Daí sete combinações são possíveis, (Felippa, 2000), Mesa 47.1.

78 O princípio variacional de Hu-Washizu (HW) é uma variação de três campos princípio em que o *deslocamentos, deformações, e tensões* são tratados Como *Campos independentes* (ao contrário de apenas o deslocamento no total Princípio da energia potencial).

79 Naturalmente, as duas variáveis de campo adicionais, com respeito ao princípio variacional TPE, aparecem não só no funcional, mas também no sistema discretizado de equações. Consequentemente, para um domínio com uma dada discretização o sistema discreto de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$\mathbf{u}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma}$	Nome
			Campo Único
Y			Energia Potencial Total
		Y	Total de Energia Potencial Complementar
	Y		Nenhum nome
			Dois Campos
Y		Y	Hellinger-Reissner
Y	Y		de Veubeke
	Y	Y	Nenhum nome
			Três Campos
Y	Y	Y	Hu-Washizu

Tabela 47.1: Funcionais na elasticidade linear

equações Derivado do princípio variacional HW será muito maior que o Sistema discreto de equações derivadas do princípio variacional TPE.

80 Com o aumento do número de equações, melhorias significativas no A precisão pode ser observada para a solução obtida do discreto Forma do princípio variacional da HW comparado com a solução obtida da forma discreta do princípio variacional TPE para o mesmo Discretização. Isso significa que discretizações grosseiras podem ser usadas com A forma discreta do princípio variacional HW para obter o mesmo grau de precisão que seria observada com discretizações muito mais finas usando o Princípio variacional do TPE.

81 O funcional para o princípio variacional HW é derivado do funcional para o princípio variacional do TPE, impondo deformação-deslocamento equação como uma condição subsidiária finita usando o método de multiplicadores Lagrange.

82 A condição subsidiária finita ou restrição é escrita na forma residual como

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \tag{47.25}$$

e aplicada em um sentido médio sobre todo o corpo Ω.

83 Impondo a equação deformação-deslocamento como uma restrição C^0 contínuas deformações e tensões são obtidas na forma discreta do Declarações variáveis, em oposição ao discontious deformações e tensões obtidos na forma discreta da declaração variacional para o princípio de variação TPE.

84 O funcional restrito é escrito como

$$\Pi_{HW} = \Pi_{\text{TPE}} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{47.26}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o multiplicador Lagrange e para ser consistente com o integrais no funcional TPE (i.e. Equação 47.12) o O multiplicador Lagrange deve ter as unidades de tensão. Já que é assim, $\boldsymbol{\sigma}$ será usado para o multiplicador Lagrange em vez de mais Típico $\boldsymbol{\lambda}$ de tal forma que o significado físico do Lagrange O multiplicador é mais aparente.

85 O funcional para o princípio variacional HW torna-se assim

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} = & \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega}_{U} \\ & \underbrace{-\int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma}_{-W_e} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon})\,\mathrm{d}\Omega}_{\text{Constraint}}\end{aligned} \tag{47.27}$$

86 Uma declaração variacional é obtida tomando o primeiro variação do funcional e definir esta quantidade escalar igual a Zero.

87 A primeira variação do funcional HW, com termos arranjados De acordo com qual variável de campo é variada,

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HW} = & \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ & + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \\ & + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon})\,\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{47.28}$$

Note que o 4o e 7o mandatos foram adicionados e cancelados uns aos outros.

88 Desde então $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, e $\boldsymbol{\sigma}$ são variáveis de campo independentes, termos envolvendo $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\epsilon}$, e $\delta\boldsymbol{\sigma}$ deve somar a zero individualmente e são, portanto Agrupados para formar três declarações variáveis separadas (analógicas ao método) de separação das variáveis na solução de equações diferenciais parciais)

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.29}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T [\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}]\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{47.30}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon})\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{47.31}$$

89 Para obter as equações correspondentes de Euler para a forma geral do Princípio variacional da HW o volume integral na Equação 47.29 contendo a variação da deformações

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$\delta(\mathbf{Lu})$ definido em termos de deslocamentos $\mathbf{u}$ deve ser integrado por peças usando Teorema de Green (Eq. R.2.6Para obter uma forma de variação Declaração em termos da variação do deslocamentos $\delta\mathbf{u}$.

90 Integração por partes. R.3) desta integral Rende-se

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \tag{47.32}$$

Onde $\mathbf{G}$ é uma matriz de transformação contendo os cossenos de direção Para uma unidade normal vetor de tal forma que as traçãos da superfície $\mathbf{t}$ são definidos Como $\mathbf{t} = \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ E a integral da superfície é sobre o Toda a superfície do corpo Γ.

91 Substituindo a Equação 47.32 na Equação 47.29, A primeira afirmação variacional torna-se

$$-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.33}$$

Desde então $\delta\mathbf{u}$ é arbitrária as expressões no inteiro dentro Os parênteses devem ser iguais a zero para que a soma das integrais seja igual a zero.

92 Igualmente $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ e.. $\delta\boldsymbol{\sigma}$ são também arbitrárias e as expressões dentro do aparelho no segundo Afirmação variacional (isto é, Equação 47.30) e dentro dos parênteses na terceira declaração variacional (i.e. Equação 47.31) devem ser ambos iguais a zero para o integral para ser igual a zero.

93 As equações de Euler para o funcional HW são

$$\text{(EB): Equilíbrio} \qquad \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \tag{47.34}$$

$$\text{(CE): Stress-Strain} \qquad \mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \tag{47.35}$$

$$\text{(KE): Strain-Displacement} \qquad \mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \tag{47.36}$$

$$\text{(NBC): Natural B.C.} \qquad \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t \tag{47.37}$$

onde a primeira equação de Euler é a equação do equilíbrio; O, o A segunda equação de Euler é a relação tensão-deformação; O terceiro Euler equação é a equação deformação-deslocamento; e o quarto Euler equação define o natural condições de contorno.

94 A fronteira natural As condições são definidas em Γ_t ao invés de.. Γ Porque.. ambas as traçãos de superfície aplicadas $\hat{\mathbf{t}}$ e o vetor matriz produto $\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ são idênticos zero fora Γ_t. A partir das equações de Euler, é possível derivar o HW Funcionando realizando as operações apresentadas em ordem inversa.

95 Este último conjunto de quatro equações de Euler, deve ser comparado com o Dois (Eq. 47.17 e.. 47.18) obtido a partir do TPE original. As duas equações adicionais trazem em jogo tensão-deformação e deformação deslocamento. Além disso, enquanto a formulação original (Eq. 47.17 e.. 47.18) foi em termos de deslocamento Só isso$\mathbf{u}$), a formulação Hu-Washizu é em termos de três independentes Variáveis ($\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ e.. $\boldsymbol{\varepsilon}$), Tabela 47.2.

96 O diagrama de Tonti (§O.8) para o princípio variacional Hu-Washizu é mostrado na figura. 47.4.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

			TPE	HW
Equações Euler				
Equilíbrio	$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$	Ω	Y	Y
Tensão-Deformação	$\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$	Ω	N	Y
Deformação-Deslocamento	$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$	Ω	N	Y
B.C. Natural.	$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$	Γ_t	Y	Y
Variáveis				
Deslocamento	$\mathbf{u}$		Y	Y
Deformação	$\boldsymbol{\epsilon}$		N	Y
Tensão	$\boldsymbol{\sigma}$		N	Y

Tabela 47.2: Comparação entre energia potencial total e fórmulas Hu-Washizu

47.6 Diagramas de Pseudo-Tonti

47.6.1 Princípio de D'Alembert

97 O Princípio de D'Alembert é uma reformulação da Segunda Lei de Newton que introduz forças inerciais, transformando um sistema dinâmico em uma forma de equilíbrio quase estática. Este princípio serve como uma ponte entre a mecânica newtoniana e a mecânica lagrangiana, expressando o equações de movimento como um equilíbrio entre forças aplicadas e reações inerciais.

98 O diagrama de Tonti para o Princípio de D'Alembert, Fig. 47.5c, coloca-o como um nó central ligando as Leis de Newton para Trabalho virtual e Equações de Lagrange, destacando como os sistemas mecânicos evoluem através de coordenadas generalizadas. O diagrama também incorpora forças generalizadas, forças inerciais (ma), energia cinética (T), e energia potencial (V), demonstrando como este princípio se integra tanto em formulações de mecânica baseadas na força quanto em energia.

47.6.2 Equações de Hamilton

99 As Equações de Hamilton surgem de uma transformação Legendre das Equativas de Lagrange, transicionando a mecânica de uma formulação baseada em configuração para uma representação de fase-espaço.

100 O diagrama de Tonti para as Equações de Hamilton, Fig. 47.5b, liga as Leis de Newton, o Princípio de D'Alembert, e as Equações de Lagrange a coordenadas generalizadas (q), velocidades generalizadas ($\dot{q}$), e momenta generalizada (p). Além disso, conecta a função Hamiltoniana (H), que representa energia total, para expressões cinéticas e potenciais de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

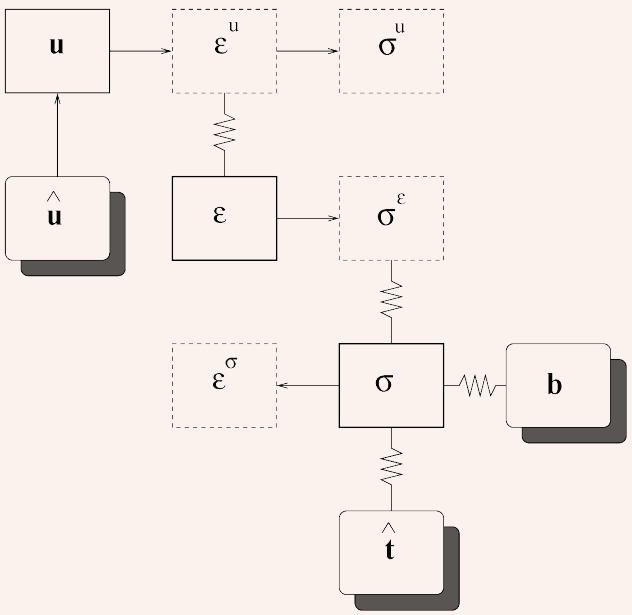


Figura 47.4: Diagrama Tonti para Hu-Washizu, (Červenka, 1994)

energia. Esta estrutura destaca como a mecânica Hamiltoniana fornece uma poderosa estrutura para dinâmica clássica, permitindo aplicação direta às transformações canônicas, geometria simplética e mecânica quântica.

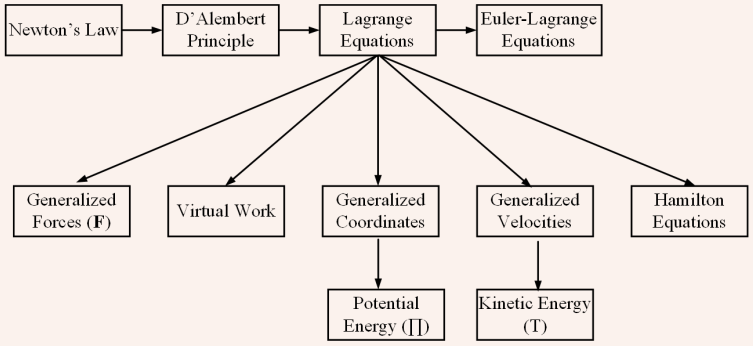
47.6.3 Equações de Lagrange

101 As Equações de Lagrange formam a base da mecânica variacional, oferecendo uma formulação elegante que expressa dinâmica puramente em termos de coordenadas generalizadas (q) e velocidades ($\dot{q}$).

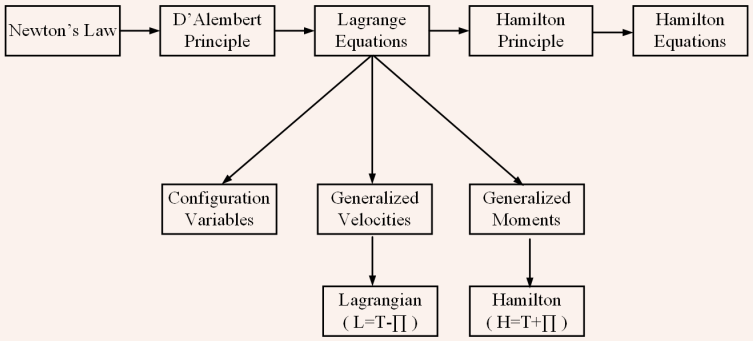
102 O diagrama de Tonti para as Equações de Lagrange, fig. 47.5a, conecta-o à mecânica Newtoniana através do Princípio de D'Alembert, ao mesmo tempo em que a liga aos Métodos de Energia. Ele ainda une a lacuna às Equações de Hamilton através da transformação do Legendre e se conecta com equações Euler-Lagrange, enfatizando sua profunda conexão com cálculo de variações. Mostrando a transição de descrições baseadas em força para abordagens baseadas em energia, o diagrama ilustra como a mecânica lagrangiana unifica a mecânica clássica sob uma poderosa estrutura analítica.

CÓPIA PARA REVISÃO

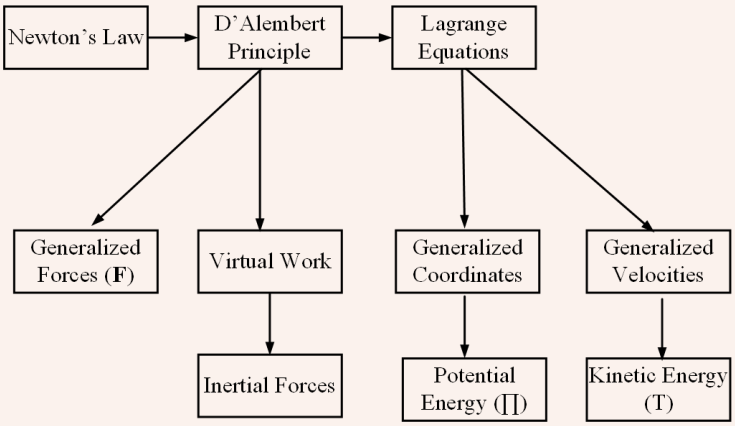
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Lagrange



(b) Hamilton



(c) D'Alembert

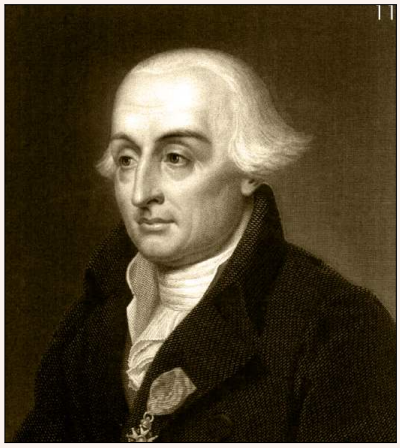
Figura 47.5: Diagramas de Tonti para Lagrange, Hamilton e D'Alembert

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Euler (1707)-1783)



Lagrange (1736-1813)



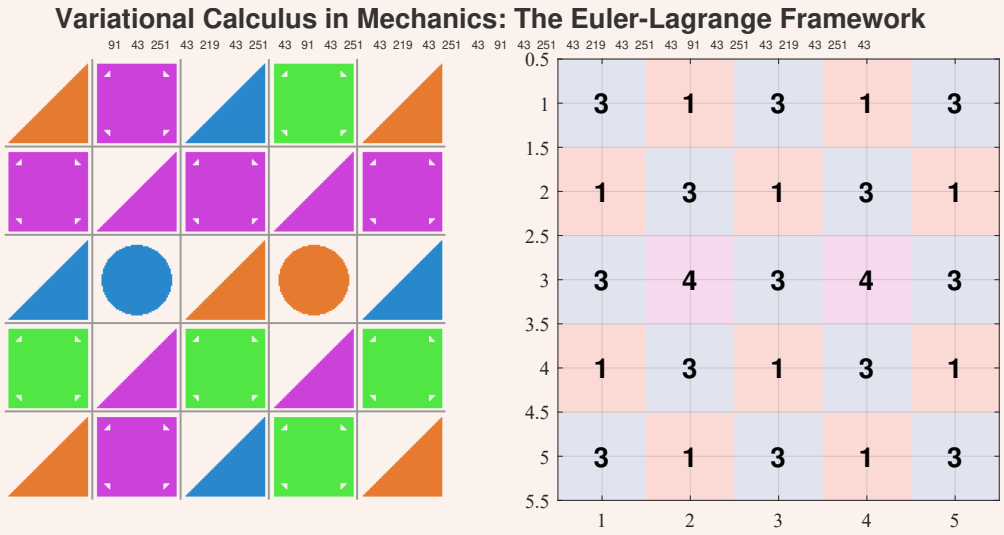
Hamilton (1805-1865)



D'Alembert (1717-1813)

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 48

Princípios Variacionais e Energia em Análise estrutural

Abstract

Este capítulo introduzirá um esquema de solução radicalmente diferente em comparação com a abordagem anteriormente adotada baseada no equilíbrio (Newtonian) 44).

Abraçará o conceito de estacionalidade de um funcional, como derivado dos princípios variacionais discutidos no capítulo anterior. Essa classe de soluções é chamada de Lagrangian.

Várias soluções serão derivadas, embora todas elas estejam inter-relacionadas (ou seja, uma delas pode derivar qualquer uma delas de outra). Isso vai levar a formulações mais conhecidas como o Princípio da Energia Mínima Total Potencial, Método Ritz e Teoremas de Castigliano. Alguns deles já podem ser familiares para o leitor (capítulo 24).

Finalmente, o princípio do virtual deslocamento vai lançar as bases para o método dos elementos finitos apresentado no Capítulo 50.

48.1 Introdução 1697
48.1.1 Termodinâmica 1697
48.1.2 Relações básicas 1698
48.1.3 Definições 1699
48.1.4 Termos reais 1699
48.1.5 Expressões virtuais 1700
48.1.6 Observações 1701
48.1.7 Aplicações para elementos 1D 1703
48.1.8 Resumo de VW e CVW . . . 1708
48.2 Aproxime-se 1709
48.3 Trabalho virtual 1710
48.3.1 Princípio da complementaridade trabalho virtual (PCVW) 1710
48.3.2 Ex 48.2: Três arcos semicirculares dobradiças 1714
48.3.3 Princípio de trabalho virtual (PVW) 1715
48.4 Princípios da energia potencial . . . 1719
48.4.1 Princípio da energia potencial total (PTPE) 1719
48.4.2 Princípio da energia potencial total complementar (PTCPE) 1723
48.5 Os teoremas de Castigliano 1723
48.5.1 Primeiro teorema 1723
48.5.2 Segundo teorema 1726
48.6 Método Rayleigh-Ritz 1729
48.6.1 Derivação 1729
48.7 Resumo 1739

CÓPIA PARA REVISÃO

1 Este capítulo é inspirado em grande parte por (Pilkey e Wunderlich, 1994) e.. (Reddy, 2017).

48.1 Introdução

2 Esta seção irá simplesmente listar várias definições sem qualquer tentativa de unir par de termos. Isso será feito, Ater, uma vez que tenhamos um entendimento claro do significado de cada termo.

48.1.1 Termodinâmica

3 O trabalho é definido como o produto de uma força e deslocamento

$$W \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{s}$$
$$\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y$$

4 Energia é uma quantidade que representa a capacidade ou capacidade de executar Trabalho.

5 A mudança de energia é proporcional ao Muito trabalho realizado. Desde então Apenas a mudança de energia está envolvida, qualquer dado pode ser usado como base para medir a energia. Por isso a energia não é criada nem consumida.

Definition 48.1: Primeira lei da termodinâmica

A taxa de variação da energia total (ou seja, soma da energia cinética) K e.. A energia interna U) é igual à soma da taxa de trabalho feito pelo exterior forças W_e E a mudança de calor por unidade de tempo H:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K + U) = W_e + H \tag{48.1}$$

Onde K é a energia cinética, U a energia interna deformação, W o trabalho externo, e H A entrada de calor no sistema.

6 Para um sistema adiabático (sem troca de calor) e se as cargas são aplicadas em uma quase Maneira estática (sem energia cinética), a relação acima simplifica para:

$$W_e = U \tag{48.2}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

7 Ainda temos que definir os dois U e.. W_e no contexto de mecânica estrutural. Isso será feito em seguida.

48.1.2 Relações básicas

8 Antes de começarmos, precisamos definir uma série de expressões que serão necessárias. Essas serão posteriormente referenciadas.

Relacionamento $\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$

Onde $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva; ε é o deformação vetor devido ao deslocamentos $\mathbf{u}$; ε_0 é o vetor inicial deformação; σ_0 é o vetor inicial tensão; e.. σ é o vetor tensão.

9 As iniciais deformações e tensões são o resultado de condições como aquecimento ou resfriamento de um sistema ou presença de pressões de poros em um sistema.

Forças Em mecânica estrutural, temos apenas dois tipos de forças:

Tração de superfície $\hat{\mathbf{t}}$, Fig. 48.1 Nota: A força do ponto está relacionada com a tração

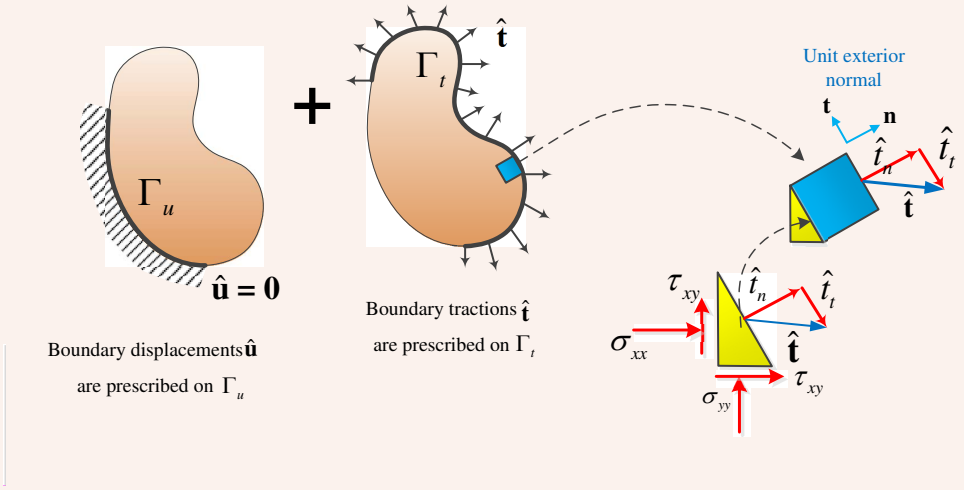


Figura 48.1: Definição da tração

através de *Função Dirac* $\delta(z-d) = 0, z \neq d$, portanto:

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta(z-d)dz = 1$$

$$\int_{0}^{L} \delta(z-d)dz = 1$$

$$\int_{0}^{L} f(z)\delta(z-d)dz = f(d)$$

Força corporal $\mathbf{b}$ (como gravidade ou eletromagnético).

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Força de Ponto/Momento

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P d\Delta + \int_0^{\theta_f} M d\theta$$

48.1.3 Definições

48.1.4 Termos reais

Densidade de Energia Interna

$$U_0 \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{48.3}$$

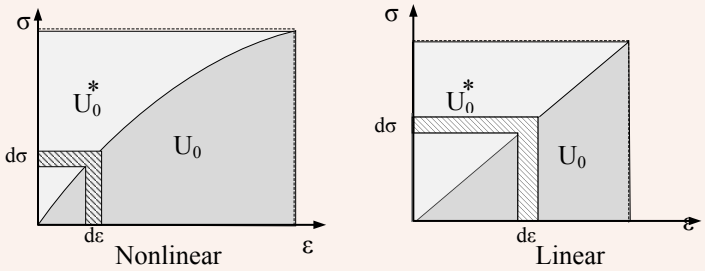


Figura 48.2: Deformação e densidades de energia complementares deformação

Densidade Energética Complementar $U_0^* \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \varepsilon \mathrm{d}\sigma$

Strain Energy $U \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0 d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$

Para um sistema elástico linear

$$U = \frac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega$$

Onde Ω é o volume do sistema.

Energia complementar Deformação $U^* \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0^* d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \varepsilon \mathrm{d}\sigma d\Omega$

Trabalho externo

$$W_e \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P \mathrm{d}\Delta + \int_0^{\theta_f} M \mathrm{d}\theta$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Por.. **Sistemas elásticos lineares**, nós temos para cargas concentradas

$$\left.\begin{aligned} P &= K\Delta \\ W_e &= \int_0^{\Delta_P} P \mathrm{d}\Delta \end{aligned}\right\} W_e = K\int_0^{\Delta_P} \Delta \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2}K\Delta_P^2$$

Quando esta última equação é combinada com $P = K\Delta_P$ Nós conseguimos

$$W_e = \frac{1}{2}P\Delta_P \tag{48.4}$$

Onde K é o **rigidez** da estrutura.

10 Da mesma forma por um momento aplicado temos

$$W_e = \frac{1}{2}M\theta_M \tag{48.5}$$

Potencial de trabalho externo

$$\mathcal{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{uP} \tag{48.6}$$

Note que a energia potencial das forças externas não é o mesmo que o trabalho do exterior *Aumentando* (que aumenta com deslocamento). A energia potencial das forças externas é o trabalho de *constante* forças passando por um deslocamento. Eles são assim diferentes por um fator de 1/2.

Energia potencial

$$\Pi \overset{\text{def}}{=} U - \mathcal{W}_e = \int_\Omega U_0 d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{ub} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right) \tag{48.7}$$

A energia potencial é assim a soma da energia deformação e do *potencial do trabalho externo* (e não o trabalho). Como mostrado na Fig. 48.3, a energia deformação aumenta quadricamente com deslocamento, enquanto o potencial do trabalho externo diminui com o aumento deslocamento.

Energia potencial complementar

$$\Pi^* \overset{\text{def}}{=} U^* - \mathcal{W}_e^* = \int_\Omega U_0^* d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{ub} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right)$$

48.1.5 Expressões virtuais

11 Deve-se notar que as quantidades virtuais são precedidas por δ.. Considerando que não atribuímos este símbolo qualquer significado matemático particular, este mesmo δ será usado para denotar o operador diferencial no Princípio de energia potencial total (ou complementar) mínima.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

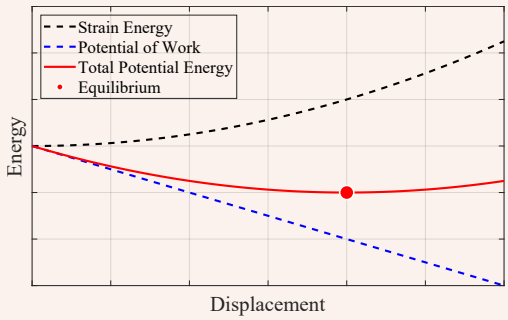


Figura 48.3: Energia potencial

Energia interna virtual Deformação $\delta\overline{U} = -\delta\overline{W}_i \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}d\Omega$

Energia Virtual Complementar Deformação $\delta\overline{U}^* = -\delta\overline{W}_i^* \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}d\Omega$

Externo Trabalho virtual $\delta\overline{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma + \int_\Omega \delta\overline{\mathbf{u}}^t\mathbf{b}d\Omega$

Externo Complementar Trabalho virtual

$$\delta\overline{W}_e^* \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}^t\delta\overline{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{48.8}$$

48.1.6 Observações

48.1.6.1 Trabalho interno versus deformação energia

12 Durante o incremento deformação, o trabalho feito por esforços internos em um elemento diferencial será o negativo do que realizado pela tensões agindo sobre isso.

$$W_i \overset{\text{def}}{=} -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{\varepsilon}\text{d}\Omega$$

13 Se o sólido elástico estirado fosse permitido voltar lentamente para o seu O estado descontrolado, então o sólido retornaria o trabalho realizado pelo Forças externas. Isso é devido à liberação de energia armazenada no sólido.

14 Assim, na ausência de inicial deformações,

$$U = -W_i$$

15 O trabalho interno depende do histórico de carga, isto é ilustrado considerando um membro axial submetido a dois casos de carga, Fig. 48.4: a) térmica inicial deformações (sem aumento correspondente tensão, seguido por uma força externa; e b) Força externa,

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

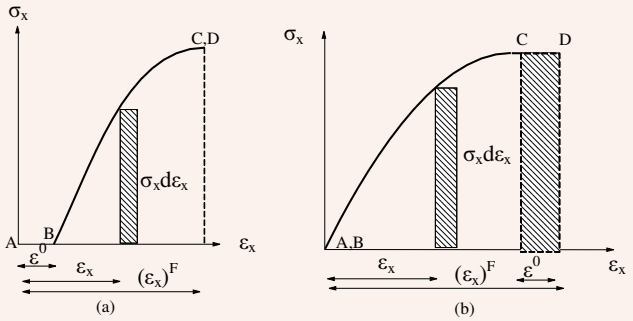


Figura 48.4: Efeitos da história de carga em U e.. W_i

seguida de térmica deformação. Em ambos os casos, o trabalho interno é igual à área sob a curva ABCD.

$$U_i = \int_0^L \left(\int_0^{(\varepsilon_x)_F} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x$$
$$W_i^a = -U_i$$
$$W_i^b = -U_i - \int_0^L \left(\int_0^{\varepsilon^0} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x$$

Por isso, W_i Nem sempre é igual a $-U_i$.

48.1.6.2 Caminho independência do trabalho externo

16 Nesta seção procuramos provar que o trabalho total realizado em andamento do estado A ao B é independente do caminho.

17 Em 2D a expressão diferencial do trabalho é dada por

$$\mathrm{d}W_e = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{48.9}$$

18 Do cálculo, uma condição necessária e suficiente para $\mathrm{d}W_e$ para ser um O diferencial exato é que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{48.10}$$

19 Se a força se movesse ao longo de um contorno fechado (ou de A para B e então De volta a A ao longo de qualquer caminho arbitrário), correspondendo a Γ, em seguida, a partir do teorema de Green (Eq. R.2.6Nós temos

$$\oint (R\mathrm{d}x + S\mathrm{d}y) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.11}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Se deixarmos $R = F_x$ e.. $S = F_y$, então

$$W_e = \oint (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.12}$$

20 Assim, da Eq. 48.10 O trabalho é igual a zero,

21 Se decompormos o caminho

$$W_e = \oint = \int_A^B + \int_B^A = 0 \Rightarrow \int_A^B = -\int_B^A \tag{48.13}$$

então, a integração para o trabalho leva a

$$W_e = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) \tag{48.14}$$

Que é independente.

22 Note que se nenhum trabalho na rede é feito em mover-se ao redor de um caminho fechado, o O sistema é dito ser *Conservador*.. Este é o caso para puramente Sistemas elásticos.

23 Quando o atrito ou as deformações plásticas (ou amortecidas) ocorrem, então nós ter um *não conservante* Sistema.

48.1.7 Aplicações para elementos 1D

48.1.7.1 Energia complementar, elástico linear U^*

Membros do Axial

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon \sigma d\Omega \\ \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U^* = A \int_\Omega \int_0^L \frac{P}{AE} \frac{dP}{A} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{AE} dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Membros Flexurais

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dAdx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} U^* = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2(x)}{EI_z}dx \tag{48.15}$$

48.1.7.2 Energia, elástico linear U

Membros do Axial

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon\sigma d\Omega \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \sigma &= \frac{1}{E}\frac{du}{dx} \\ d\Omega &= Adx \end{aligned}\right\} U = \frac{A}{E}\int_\Omega\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}dx = \frac{A}{2E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

Membros Flexurais

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dAdx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \\ \frac{M(x)}{EI} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} U = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \int_0^L EI_z y''\frac{EI_z y''}{EI_z}dx = EI_z\int_0^L (y'')^2 dx$$

48.1.7.3 Energia virtual complementar deformação δU^*

Membros do Axial

24 Tensões e forças constituem as quantidades virtuais identificadas por δ.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Sistema elástico

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}\varepsilon d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$$

Elástico linear

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon\delta\overline{\sigma} d\Omega \\ \delta\overline{\sigma} &= \frac{\delta\overline{P}}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\text{“}\delta\overline{\sigma}\text{”}} \underbrace{\frac{P}{AE}}_{\text{“}\varepsilon\text{”}} dx$$

Membros Flexurais

Sistema elástico

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}_{xx}\varepsilon_x d\Omega \\ \delta\overline{M}(x) &= \int_A \delta\overline{\sigma}_x y dA \Rightarrow \frac{\delta\overline{M}(x)}{y} = \int_A \delta\overline{\sigma}_x dA \\ \phi &= \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \phi y = \varepsilon_x \\ d\Omega &= \int_0^L\int_A dA dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\phi dx$$

Elástico linear

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}}_{\delta\overline{\sigma}} d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}(x)}_{\text{“}\delta\overline{\sigma}\text{”}} \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{\text{“}\varepsilon\text{”}} dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Membros da Torção

Sistema elástico

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \varepsilon \delta\sigma dvol \\ \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy}\gamma_{xy} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \mathrm{d}\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \frac{\delta T}{J}\gamma_{xy}\mathrm{d}x \tag{48.16}$$

Elástico linear

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy} \underbrace{G\tau_{xy}}_{\gamma_{xy}} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \mathrm{d}\Omega &= r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\ J &= \int_o^r\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \underbrace{\delta T}_{\text{“}\delta\sigma\text{”}} \underbrace{\frac{T}{GJ}}_{\text{“}\varepsilon\text{”}} \mathrm{d}x \tag{48.17}$$

48.1.7.4 Energia virtual deformação δU

25 A energia virtual interna deformação é expressa em termos de deformação ou interno deslocamentos.

26 Isso levará à formulação na raiz do método dos elementos finitos.

Membros do Axial

27 Deformações e deslocamentos constituem as quantidades virtuais identificadas por δ.

Sistema elástico

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = A\int_0^L \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x dx$$

Elástico linear

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x = E\frac{du}{dx} \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{d(\delta\overline{u})}{dx} \\ d\Omega &= Adx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{\delta\overline{\varepsilon}}\underbrace{Adx}_{d\Omega}$$

Membros Flexurais

Sistema elástico

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ M(x) &= \int_A \sigma_x y dA \Rightarrow \frac{M(x)}{y} = \int_A \sigma_x dA \\ \delta\overline{\phi} &= \frac{\delta\overline{\varepsilon}_x}{y} \Rightarrow \delta\overline{\phi} y = \delta\overline{\varepsilon}_x \\ d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L M(x)\delta\overline{\phi} dx$$

Elástico linear

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{M(x)y}{I_z} \\ M(x) &= \frac{d^2v}{dx^2}EI_z\end{aligned}\right\} \sigma_x &= \underbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}_{\kappa} Ey \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\overline{\sigma}_x}{E} = \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}y \\ d\Omega &= Adx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \int_A \frac{d^2v}{dx^2} Ey \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y dA dx$$

Desde então $\int_A y^2 dA = I_z \Rightarrow$

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{EI_z\frac{d^2v}{dx^2}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{\delta\overline{\varepsilon}} dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

48.1.8 Resumo de VW e CVW

28 Mesa 48.1 é uma visão "panorâmica"das várias expressões previamente definidas.

Nota: Precisa derivar energia potencial em termos de deslocamentos em viga e livro

Tabela 48.1: Resumo das equações para vw, cvw, pe, cpe

Energias Virtuais Internas				
	Energia $\delta\overline{U}$		**Compl. Energia**: $\delta\overline{U}^*$	
	Elastic	**Linear Elastic**	**Elastic**	**Linear Elastic**
Axial	$A\int_0^L \sigma\delta\overline{\varepsilon}dx$	$\int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{\delta\overline{\varepsilon}}\underbrace{Adx}_{d\Omega}$	$A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{P}{AE}}_{\varepsilon}dx$
Flexura	$\int_0^L M\delta\overline{\phi}dx$	$\int_0^L \underbrace{EI_z\frac{d^2v}{dx^2}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{\delta\overline{\varepsilon}}dx$	$\int_0^L \delta\overline{M}\phi dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{M}{EI_z}}_{\varepsilon}dx$
Externo Trabalho virtual				
P	$\sum_i^n P_i\delta\overline{\Delta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{P}_i\Delta_i$	
M	$\sum_i^n M_i\delta\overline{\theta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{M}_i\theta_i$	
w	$\int_0^L w(x)\delta\overline{v}(x)dx$		$\int_0^L \delta\overline{w}(x)v(x)dx$	
Energia				
	Energia U Deslocamento		**Compl. Energia U^* (Força)**	
Axial	$\frac{1}{2}\frac{A}{E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE}dx$	
Flexural	$\frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx$	

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

48.2 Aproxime-se

29 Até agora, definimos cada ingrediente das equações ainda não derivadas. Novamente, até agora esses termos eram independentes um do outro, e não havia relações entre eles.

30 Assim, antes de nos aprofundarmos nos detalhes, é melhor olhar para as duas abordagens possíveis: os princípios de Trabalho virtual (PVW) e o princípio de Complementar Trabalho virtual (PCVW) que se relacionam

Força sistemas que satisfazem os requisitos de equilíbrio
Deformação sistemas que satisfazem a exigência de cinemática.

31 Nós claramente temos dois caminhos para tomar combinar quantidades virtuais e reais, tabela 48.2, e Fig. 48.5, para a derivação dos dois princípios.

Tabela 48.2: Caminhos alternativos para os princípios de trabalho virtual e princípio da complementar trabalho virtual

Princípio	Virtual			Procure	Real	
	Começando com	Satisfatório			Satisfatório	
		Fraco	B.C.		Fortemente	B.C.
CVW $\delta\overline{U}^* = \delta\overline{W}_e^*$	Forças.	Equilíbrio	Natural Γ_t	Displ.	Compatibilidade	Essencial Γ_u
VW $\delta\overline{U} = \delta\overline{W}_e$	Displ.	Compatibilidade	Essencial Γ_u	Forças	Equilíbrio	Natural $\Gamma_t jh$

32 Note que por compatibilidade, nós queremos dizer

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

e pelo equilíbrio:

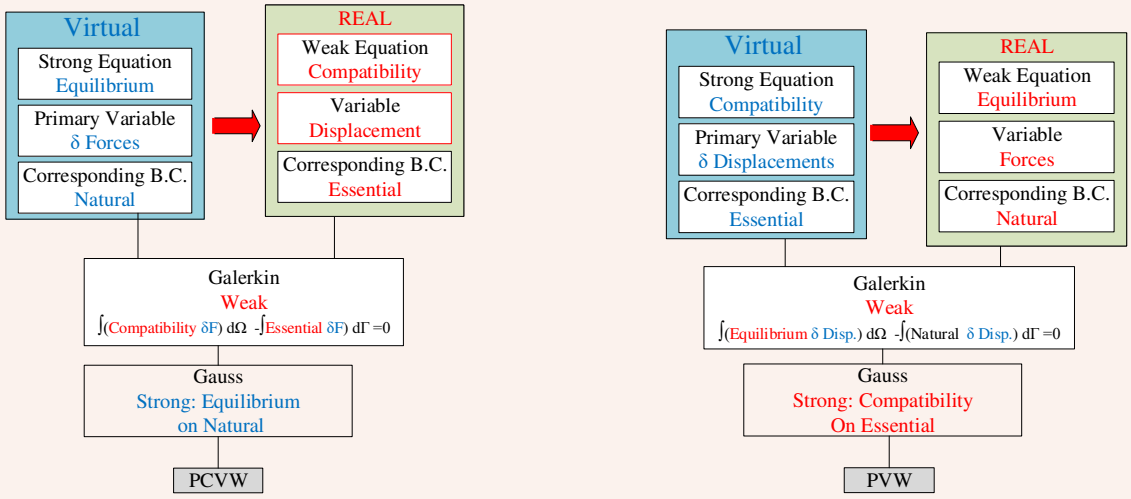
$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

33 No entanto, antes de seguirmos em frente, o leitor deve ter uma boa compreensão, Fig. 48.5:

Forte-fraco formulários cobertos em §47.2.3.
Essencial e natural BC Coberto em (§47.2.6)
Elasticidade (Equações básicas) (§O.8)

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Complementar Trabalho virtual

(b) Trabalho virtual

Figura 48.5: Diagramas ilustrativos dos princípios de obras virtuais e complementares

48.3 Trabalho virtual

48.3.1 Princípio da complementaridade trabalho virtual (PCVW)

34 Começamos com a derivação do PCVW, como o leitor já pode estar familiarizado com o método (anterior e esquematicamente introduzido em §24.2) para a determinação das deflexões).

48.3.1.1 Derivação

35 A derivação do princípio da complementar trabalho virtual começa com a existência de um conjunto estaticamente admissível de força virtual (equilíbrio satisfatório) e o correspondente natural condição de contorno. Buscamos o correspondente real, kinematicamente admissível deslocamentos que também satisfazem o essencial correspondente condições de contorno, Tabela 48.2, Fig. 48.5a.

36 A condição cinemática (compatibilidade) é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

37 Note que isso pode ser reescrito como (Eq. O.7)

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

e que mais tarde (sob a derivação do PVW), a equação de equilíbrio será expressa como (Eq. O.9).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = 0$$

ou

$$\underbrace{\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}}_{\text{div } \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0$$

38 O natural condições de contorno são expressos como

$$u_i = \hat{u} \text{ on } \Gamma_u$$

Onde $\hat{u}$ são conhecidos deslocamentos ao longo Γ_u.

39 Essas duas equações são reescritas como

$$\varepsilon_{ij} - u_{i,j} = 0; \qquad u_i - \hat{u} = 0$$

40 Agora vamos satisfazer em um sentido médio (fraco sobre uma integral) estas fortes equações diferenciais usando o *Método Galerkin*.. Pré-multiplicar primeira equação por campo virtual tensão $\delta\overline{\sigma}_{ij}$ e integrar-se sobre o volume; Em segundo lugar, por tração virtual correspondente $\delta\bar{t}_i$ e integrar-se sobre a superfície correspondente, produzindo a forma fraca

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\varepsilon_{ij} - u_{i,j}\right) \delta\overline{\sigma}_{ij}}_{\text{Compatibility}} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \underbrace{\left(u_i - \hat{u}\right) \delta\bar{t}_i}_{\text{Essential B.C.}} d\Gamma = 0 \tag{48.18}$$

41 Foco em $\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_t} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

E note que o segundo termo do lado direito é zero desde então

$$\delta\bar{t}_i = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_t$$

para satisfazer o natural condições de contorno.

42 Por isso

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta(\overline{\sigma}_{ij} n_j) d\Gamma \tag{48.19}$$

43 Nós nos dirigimos ao $u_i \delta\bar{t}_i$ termo aplicando o teorema de Gauss (§R) juntamente com $t_i = \sigma_{ij} n_j$ Então..

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i) n_j d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) d\Omega\end{aligned}$$

Assim, agora podemos converter Eq. 48.19 em um volume integral

$$\int_{\Gamma} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_i \delta\overline{\sigma}_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

44 O virtual presumido tensões deve ser estaticamente admissível (i.e. em equilíbrio) dentro Ω (Em contraste, no princípio de Trabalho virtual/deslocamento, o virtual deslocamentos deve ser kinematicamente admissível). Na ausência de forças do corpo:

$$\delta\overline{\sigma}_{ij,j} = 0 \ \text{ in } \ \Omega$$

ou

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

45 Combinando esta última equação com Eq. 48.18 leva a

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega = 0 \tag{48.20}$$

O que simplifica em

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma = 0 \tag{48.21}$$

46 Cada um dos termos é uma expressão de trabalho, o primeiro corresponde ao complementar interno trabalho virtual, e o segundo ao complementar externo trabalho virtual, Eq. 48.8

$$-\delta W_i^* - \delta W_e^* = 0 \tag{48.22}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou

$$\delta U_i^* = \delta W_e^* \tag{48.23}$$

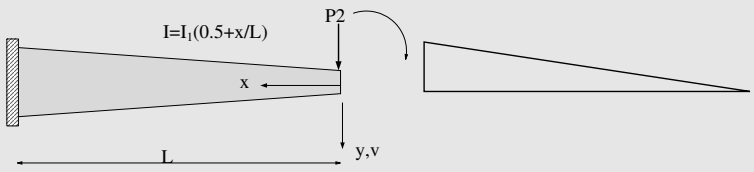
que é o Princípio do Trabalho Virtual Complementar (ou Forças Virtuais)

Definition 48.2: Princípio do trabalho virtual complementar

Um sistema deformável satisfaz todos os requisitos cinemáticos (Eq. 48.2) se a soma do complementar externo trabalho virtual e o complementar interno trabalho virtual é zero para todos virtual estaticamente admissível tensões $\delta\overline{\sigma}_{ij}$.

Este princípio leva ao matriz de flexibilidade.

48.3.1.2 Ex 48.1: PCVW, cantilevered cônico viga



$$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\text{Interno}} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{Externo}}$$

Aqui. $\delta\overline{M}$ e.. $\delta\overline{P}$ são as forças virtuais, e $\frac{M}{EI_z}$ e.. Δ são os reais deslocamentos.

If $\delta\overline{P} = 1$, então $\delta\overline{M} = x$ e.. $M = P_2 x$ ou:

$$(1)\Delta = \int_0^L x\frac{P_2 x}{EI_1(.5+\frac{x}{L})}dx = \frac{P_2}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{\frac{L+x}{2L}}dx = \frac{P_2 2L}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{L+x}dx$$

De.. *Matemática* Nós sabemos disso:

$$\int \frac{x^2}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)dx\right]$$

Assim, substituindo $a = L$ e.. $b = 1$ Nós obtemos:

$$\Delta = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[\frac{1}{2}(L+x)^2 - 2L(L+x) + L^2\ln(L+x)\right]\Big|_0^L = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[L^2(\ln 2 - \frac{1}{2})\right] = \frac{P_2L^3}{2.5887EI_1}$$

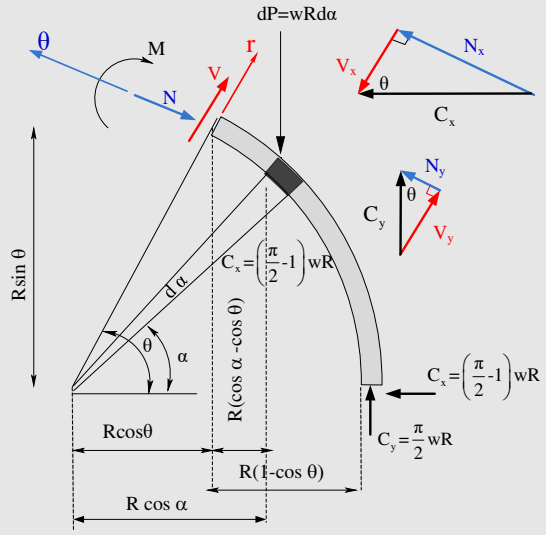
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Da mesma forma:

$$\theta = \int_0^L \frac{M(1)}{EI_1\left(.5+\frac{x}{L}\right)} = \frac{2ML}{EI_1}\int_0^L \frac{1}{L+x} = \frac{2ML}{EI_1}\ln(L+x)\,|_0^L = \frac{ML}{.721EI_1}$$

48.3.2 Ex 48.2: Três arcos semi-circulares dobradiças



Procuramos determinar a deflexão vertical da coroa dos três dobrados O arco semicircular estaticamente determinado sob seu próprio peso morto w.
Primeiro procuramos determinar a expressão analítica do diagrama de momento. Da estática, pode-se mostrar que as reações verticais e horizontais são $R_v = \frac{\pi}{2}wR$ e.. $R_h = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR$.
Em seguida, considerando o diagrama de corpo livre do arco, e somando as forças na direção radial ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\cos\theta + \frac{\pi}{2}wR\sin\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta + V = 0$$
$$V = wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos\theta + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\right]$$

Da mesma forma, se considerarmos o somatório de forças na direção axial ($\Sigma F_T = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\sin\theta + \frac{\pi}{2}wR\cos\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta + N = 0$$
$$N = wR\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\theta\right]$$

Agora podemos considerar a terceira equação de equilíbrio ($\Sigma M_\theta = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\cdot R\sin\theta - \frac{\pi}{2}wR^2(1-\cos\theta) +$$
$$\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta) + M = 0$$
$$M = wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

A verdadeira curvatura ϕ é obtido dividindo o momento por EI

$$\phi = \frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

A força virtual δP Será um ponto vertical da unidade direção da deflexão desejada, causando um momento interno virtual

$$\delta M = \frac{R}{2}\left[1-\cos\theta-\sin\theta\right] \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Assim, a aplicação da equação trabalho virtual produz:

$$\underbrace{1}_{\delta P}\cdot\Delta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]}_{\phi}\cdot\underbrace{\frac{R}{2}\cdot\left[1-\cos\theta-\sin\theta\right]}_{\delta M}\underbrace{R\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{wR^4}{16EI}\left[7\pi^2-18\pi-12\right]$$

$$= 0337\frac{wR^4}{EI}$$

48.3.3 Princípio de trabalho virtual (PVW)

48.3.3.1 Derivação

47 A derivação do princípio de trabalho virtual começa com a existência de virtual cinematicamente admissível deslocamentos (satisfatória compatibilidade) e o essencial correspondente condição de contorno.

48 Buscamos o correspondente conjunto de forças reais e estaticamente admissíveis que também satisfazem o natural condições de contorno.

49 tensões internos estão em equilíbrio se

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{b}=0 \tag{48.24}$$

50 O essencial correspondente é dado por

$$\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}=0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad \text{Essential B.C.} \tag{48.25}$$

Onde $\hat{t}$ são conhecidos por tração ao longo Γ_t.

51 Equações 48.24 e.. 48.25 Constituem uma estática Campo admissível.

52 Vamos impor a satisfação da condição local de equilíbrio Eq. 48.24 e o Eq estático. 48.25 em forma global (ou integral/fraca). Isto é realizado multiplicando ambas as equações por um virtual deslocamento $\delta\overline{\mathbf{u}}$.

53 A Forma Fraca é assim dada por

$$-\int_\Omega \delta\overline{\mathbf{u}}^T\underbrace{\left(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}\right)}_{\text{Equil.}}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\delta\overline{\mathbf{u}}^T\underbrace{(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}})}_{\text{Essential B.C.}}d\Gamma=0 \tag{48.26}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

54 Um requisito importante sobre o (virtual) deslocamentos, é que eles devem satisfazer a exigência de compatibilidade (em contraste, no princípio da complementar trabalho virtual, tensões tinha que ser estaticamente admissível). O virtual deslocamentos deve satisfazer o essencial.

$$\mathbf{L}\delta\overline{\mathbf{u}} = \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}} = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{48.27}$$

55 Foco em $\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

Procuramos converter em um volume integral através do Teorema de Gauss. Lembre-se da definição do vetor de tração

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \text{ or } t_i = \sigma_{ij} n_j$$

Aplicando o teorema de Gauss nós obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \text{div}\boldsymbol{\sigma} d\Omega\end{aligned}$$

No entanto, $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}$ Assim

$$\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

56 Seguindo alguns passos ignorados e emocionantes, a equação acima rende O Princípio de Trabalho virtual (Deslocamentos)

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{-\delta\overline{W}_i = \delta\overline{U}_i} \underbrace{- \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{-\delta\overline{W}_e} = 0 \tag{48.28}$$

ou

$$\delta\overline{U}_i = \delta\overline{W}_e$$

Definition 48.3: Princípio do Virtual Deslocamento

Um sistema deformável está em equilíbrio (Eq. 48.24) se a soma do externo trabalho

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

virtual e o interno trabalho virtual é zero para virtual deslocamentos $\delta\overline{\mathbf{u}}$ que satisfazem a equação cinemática e cinemática condições de contorno (Eq. 48.27).

57 Para um elemento dimensional, isso reduz-se a

$$\underbrace{\int \sigma \delta\overline{\varepsilon} d\Omega}_{\delta\overline{U}} = \underbrace{P\delta\overline{v}}_{\delta\overline{W}}$$

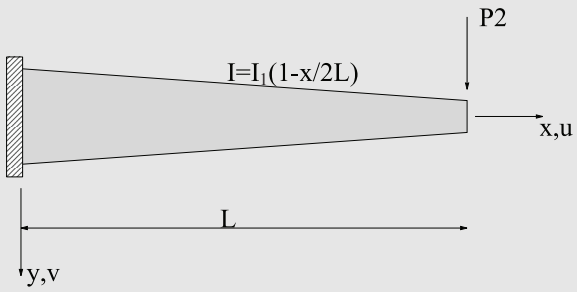
Observe que posar $\delta U - \delta W = 0$, podemos fatorizar todos os termos de um dado δv_i e defina igual a zero. Isso vai resultar em

$$A_1\delta v_1 + A_2\delta v_2 + \cdots + A_n\delta v_n = 0$$

Porque.. δv_i pode ser escolhido arbitrário, então cada um A_i deve ser igual a zero. Isso resultará em um sistema de n Equações lineares:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta v_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta v_n \end{bmatrix}}_{\text{Ignore}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}}_{\text{Resolver}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{48.29}$$

48.3.3.2 Ex 48.3: PVW, cantilever cônico



Ao aplicarmos o PVW, precisamos ter uma aproximação do atual deslocamento v e o virtual $\delta\overline{v}$.. Essas expressões devem satisfazer o essencial condições de contorno (deslocamento e inclinação para vigas).
As soluções aproximadas propostas para este problema são

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) v_2 \tag{48.30}$$

$$v = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] v_2 \tag{48.31}$$

Eles satisfazem o essencial B.C.: $v = v' = 0$ Em.. $x = 0$.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Nós consideramos três casos:

Solução	Real	Virtual
1	Eqn. 48.30	Eqn. 48.31
2	Eqn. 48.30	Eqn. 48.30
3	Eqn. 48.31	Eqn. 48.31

- A aplicação do PVW requer avaliação das funções derivadas.

	Trigonometria (Eqn. 48.30)	Polinomial (Eqn. 48.31)
v	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)v_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_2$
$\delta\overline{v}$	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\delta\overline{v}_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\delta\overline{v}_2$
v''	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}v_2$	$\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)v_2$
$\delta\overline{v}''$	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2$	$\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2$

$$\delta\overline{U}=\int_0^L EI_z\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}dx;\qquad \delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

Solução 1:

$$\begin{aligned}\delta\overline{U}&=\int_0^L\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)v_2}_{v''}\underbrace{\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx\\&=\frac{3\pi EI_1}{2L^3}\left[1-\frac{10}{\pi}+\frac{16}{\pi^2}\right]v_2\delta\overline{v}_2\\\delta\overline{W}&=P_2\delta\overline{v}_2\end{aligned}$$

Que rende:

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.648EI_1}$$

Solução 2:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{v''}\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx=\frac{\pi^4EI_1}{32L^3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

Que rende:

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.57EI_1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Solução 3:

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{\left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right] v_2}_{v''} \underbrace{\left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right] \delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''} \underbrace{EI_1\left(1 - \frac{x}{2L}\right)}_{EI} dx = \frac{9EI}{L^3} v_2 \delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W} = P_2 \delta\overline{v}_2$$

Que rende:

$$v_2 = \frac{P_2 L^3}{9EI_1}$$

48.4 Princípios da energia potencial

58 Uma abordagem completamente diferente, mas relacionada será apresentada agora. Em vez de convoluir quantidades reais e virtuais, nós simplesmente tentaremos minimizar a energia total (ou complementar) potencial. Esses dois princípios serão derivados da energia virtual deformação (e a operação inversa é naturalmente possível).

59 É importante notar que aqui, o δ O operador assumirá todo o seu significado matemático: Diferencial, enquanto antes implicava uma quantidade virtual.

60 Note que o princípio da energia potencial complementar é apenas levemente relevante, e não será discutido.

48.4.1 Princípio da energia potencial total (PTPE)

61 Nós revisitamos este princípio, anteriormente abordado em §47.3

48.4.1.1 Derivação

62 Lembrete: Diferenciação é o método matemático usado para calcular a variação em torno de um ponto.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

63 If U_0 é uma função potencial, nós tomamos seu diferencial $\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}$ e o teorema fundamental do cálculo afirma que $\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = f(x)$.. Assim

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ U_0 &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ \frac{\delta}{\delta \varepsilon_{ij}} \int_0^x \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

64 O princípio de trabalho virtual (Eq. 48.28)

$$\int_\Omega \delta \overline{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega \delta \overline{u}_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \overline{u}_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

Agora pode ser reescrito como

$$\int_\Omega \delta U_0 d\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

65 Até agora δ Referindo-se a uma quantidade virtual, nós agora fazemos a troca e δ Vai se referir à variação.

66 Se nem as traçãos da superfície, nem as forças do corpo alterarem suas magnitudes ou direções durante a deformação, isso pode ser simplificado

$$\delta \left[\underbrace{\overbrace{\int_\Omega U_0 d\Omega}^{U} \overbrace{- \int_\Omega u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \hat{t}_i d\Gamma}^{-W_e}}_{\Pi} \right] = 0 \tag{48.32}$$

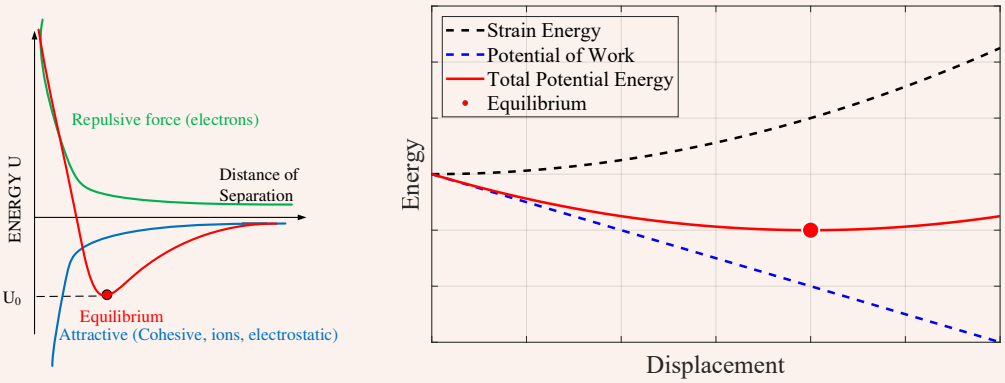
67 Comparando esta última equação, com Eq. 48.7 concluímos que a variação da energia potencial é zero.

$$\delta \Pi = 0 \tag{48.33}$$

Isso está claramente ilustrado na figura. 48.6b onde o equilíbrio corresponde ao mínimo da energia potencial total. Isso é análogo ao estado de equilíbrio entre forças interatômicos na mecânica quântica, fig. 1. 48.6a.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Mecânica quântica (b) Mecânica clássica

Figura 48.6: Minimizações em mecânica quântica e clássica

Definition 48.4: Princípio do Valor Estacionário da Energia Potencial

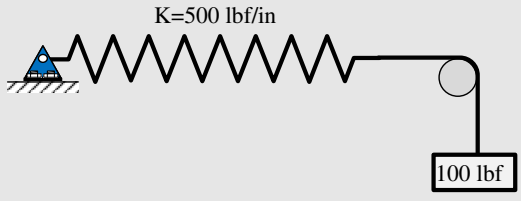
De todas as deformações cinematicamente admissíveis (deslocamentos satisfazendo o essencial condições de contorno, as deformação reais (aqueles que correspondem a tensões que satisfazem o equilíbrio) são aqueles para os quais a energia potencial total assume um Valor estacionário.

68 Para problemas envolvendo múltiplos graus de liberdade,

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_1}\delta\Delta_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_2}\delta\Delta_2}_{0} + \cdots \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_n}\delta\Delta_n}_{0} = 0 \tag{48.34}$$

ou n equações com n Incógnitos.

48.4.1.2 Ex 48.4: PEPT, primavera e massa



Procuramos determinar a posição de equilíbrio da massa.
Newtonian $\Delta = \frac{F}{K} = \frac{100}{500} = 0.2$ in
Lagrangian: A energia deformação U e potencial do trabalho externo W são dados por

$$U = \frac{1}{2}u(Ku) = 250u^2 \qquad W_e = mgu = 100u$$

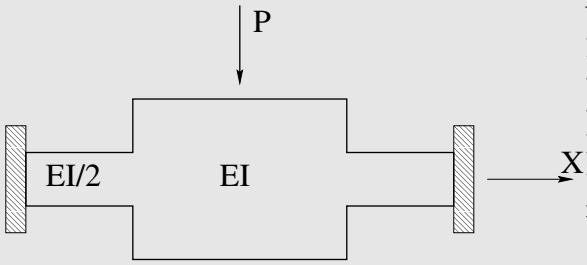
CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Note que não há $1/2$ em W_e Porque a força é constante durante o trabalho. A energia potencial total é $\Pi = U - W_e$ e é $\Pi = 250u^2 - 100u$, deve ser estacionária

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{du} = 0 \Rightarrow 500u - 100 = 0 \Rightarrow u = 0.2 \text{ in}$$

48.4.1.3 Ex 48.5: PTPE; Preso viga com varieble I





Vamos supor que.. $v = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$
Esta solução deve satisfazer o essencial B.C.: $v = v' = 0$ Em.. $x = 0$; Em segundo lugar, $v = v_{max}$ e.. $v' = 0$ Em.. $x = \frac{L}{2}$.
Isto será imposto determinando os quatro parâmetros em termos de uma única quantidade desconhecida (4 equações e 4 aC):

$$\begin{array}{llll}
@x = 0 & v = 0 & & \Rightarrow a_4 = 0 \\
@x = 0 & \frac{dv}{dx} = 0 & & \Rightarrow a_3 = 0 \\
@x = \frac{L}{2} & v = v_{max} & \Rightarrow v_{max} = a_1\frac{L^3}{8} + a_2\frac{L^2}{4} & \\
@x = \frac{L}{2} & \frac{dv}{dx} = 0 & \Rightarrow \frac{3}{4}a_1L^2 + a_2L = 0 & \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}a_1L
\end{array}$$

após a substituição, nós obtemos:

$$v = \left(-\frac{16x^3}{L^3} + \frac{12x^2}{L^2}\right) v_{max}$$

Assim, neste problema a solução é em termos de apenas uma variável desconhecida v_{max}.

A fim de aplicar o princípio da Energia Potencial Mínima, devemos avaliar: Energia interna Deformação U:. para membros flexurais, expresso em termos de deslocamentos (um deve neste métodо) é dado por

$$U = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{L/2} E\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 I_z dx\right]$$

Assim, devemos avaliar $\frac{d^2v}{dx^2}$:

$$\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{48x^2}{L^3} + \frac{24x}{L^2}\right) v_{max}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{24}{L^2}\left(1 - \frac{4x}{L}\right) v_{max}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Substituindo

$$\frac{U}{2} = \frac{E}{2}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{24^2}{L^4}\left(1-\frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 \frac{I_z}{2}dx + \frac{E}{2}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \frac{24^2}{L^4}\left(1-\frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 I_z dx$$

$$U = \frac{72EI_z}{L^3}v_{max}^2$$

Potencial do Trabalho Externo W_e:] Por um carga concentrada, $W_e = Pv_{max}$

Finalmente,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial v_{max}} - \frac{\partial W_e}{\partial v_{max}} = 0 \quad \frac{144EI_z}{L^3}v_{max} = P \quad \Rightarrow v_{max} = \frac{PL^3}{144EI_z}$$

48.4.2 Princípio da energia potencial total complementar (PTCPE)

69 Seguindo uma abordagem semelhante à da TPE, pode-se facilmente mostrar que

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta \mathcal{W}_e^* \tag{48.35}$$

48.5 Os teoremas de Castigliano

Para o contexto histórico, consultar §11.4.3

Embora o teorema de Castigliano seja fundamentalmente semelhante ao Princípio de Trabalho virtual, é muitas vezes o método preferido de solução para certos problemas. Isso é mostrado nos exemplos.

O método não separa o real das quatidades virtuais, mas sustenta uma única expressão da energia deformação em termos de ambas as quantidades, e então pega a derivada com relação à virtual.

48.5.1 Primeiro teorema

70 O primeiro teorema de Castigliano é baseado no princípio do potencial energético total. Revisitando o Eq. 48.33 Pode ser reescrito como

$$\delta\Pi = \delta U - \delta \mathcal{W}_e = 0$$

O segundo termo pode ser expresso como

$$\delta \mathcal{W}_e = F\delta u + \frac{1}{2}\Delta F \delta u + \cdots$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Combinando[1] Nós conseguimos

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u} - F\right)\delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u} = F$$

que é o primeiro teorema de Castigliano:

Definition 48.5: Primeiro Teorema de Castigliano

A primeira derivada parcial da energia interna total (deformação energia) em uma estrutura com relação a qualquer componente de deflexão particular em um ponto é igual à força aplicada naquele ponto e na direção correspondente a esse componente de desvio.

71 Este primeiro teorema é aplicável a estruturas linearmente ou não linearmente elásticas em que a temperatura é constante e os suportes são inflexíveis.

72 Até agora nos referimos a um sistema com apenas uma força. Isso pode ser generalizado para um sistema com N forças onde

$$\mathcal{W}_e = \sum_{i=1}^{N} F_i u_i$$

Então, a energia potencial total pode ser expressa como

$$\Pi = U - \mathcal{W}_e = U(u_1, u_2, \cdots, u_N) - \sum_{i=1}^{N} F_i u_i$$

Para qualquer variação virtual δu_i no deslocamento u_i, a variação de $\delta\Pi$ no potencial total de energia Π Deve desaparecer (pelo princípio da energia potencial total)

$$\delta\Pi = \frac{\partial U}{\partial u_i}\delta u_i - F_i\delta u_i = \left(\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i\right)\delta u_i = 0$$

Desde a variação de $\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_N$ são independentes um do outro, segue-se que

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

Que é a declaração geral do primeiro teorema de Castigliano

Se a energia deformação de um sistema estrutural pode ser expressa em termos N independente deslocamentos, $u_1, u_2, \cdots, u_N$ correspondente a.. N forças especificadas, $F_1, F_2, \cdots, F_N$, a primeira derivada parcial da energia deformação em relação à qualquer deslocamento u_i (em carga) F_i) é igual à força F_i Na direção de u_i.

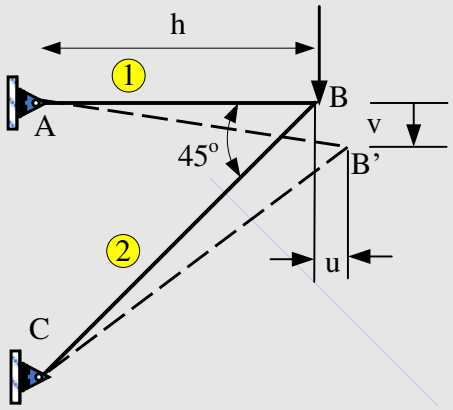
[1] Lembre-se disso $\delta F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

48.5.1.1 Ex 48.6: Não linear elástico treliça

De.. (Reddy, 2017)



Para o pino adjacente conectado treliça buscamos determinar a horizontal e vertical deslocamentos da articulação B sob a carga aplicada P.. As barras são feitas de material elástico não linear cujo comportamento é dado por

$$\sigma = \begin{cases} K\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon \geq 0 \\ -K\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

e a seção transversal de cada membro é A.

Do cinemática (i.e., geometria da deformatina) do treliça, o deformação em cada membro são dados por

$$\varepsilon_1 = \frac{AB' - AB}{AB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + v^2}{h^2}} - 1$$
$$\varepsilon_2 = \frac{CB' - CB}{CB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + (h-v)^2}{2h^2}} - 1$$

Mas já que temos pequeno deslocamentos (i.e $u^2 \simeq 0$ e.. $v62 \simeq 0$, isso simplifica para

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\frac{u}{h}} - 1 \simeq \frac{u}{h}$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{(u-v)}{h}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{h}\right)$$

A densidade de energia da estrutura é dada por $U_0 = U_{01} + U_{02}$

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_1} K\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_2} -K\sqrt{-\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2K}{3}(\varepsilon_1)^{3/2} + \frac{2K}{3}(-\varepsilon_2)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}K\left[\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

Nós pegamos o membro 2 para estar sob compressão.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A energia total é dada por $U = U_1 + U_2$

$$U = Ah\frac{2}{3}K\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + A\sqrt{2}h\frac{2}{3}K\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}$$
$$= \frac{AK}{3\sqrt{h}}\left[2u\sqrt{u} + (v-u)\sqrt{v-u}\right]$$

Agora usamos o primeiro teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 0 = \frac{AK}{2\sqrt{h}}(2\sqrt{u} - \sqrt{v-u})$$
$$\frac{\partial U}{\partial v} = P = \frac{AK}{2\sqrt{h}}\sqrt{v-u}$$

Resolvendo para u e.. v

$$u = \frac{P^2h}{A^2K^2}, \qquad v = \frac{5P^2h}{A^2K^2}$$

48.5.2 Segundo teorema

73 O segundo teorema de Castigliano é baseado no princípio do potencial total complementar da energia. Revisitando o Eq. 48.35 Pode ser reescrito como

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta\mathcal{W}_e^* \Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial F}\delta F - u\delta F = 0$$

ou

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = u$$

+

74 Esta equação pode ser generalizada para um sistema estrutural

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 48.6: Segundo teorema de Castiglione

A primeira derivada parcial da energia interna total em uma estrutura com relação à força aplicada em qualquer ponto é igual à deflexão no ponto de aplicação dessa força na direção de sua linha de ação.

75 Se usarmos a expressão de U^* De.. §48.1.7.1

$$U* = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE} \\ \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \end{cases}$$

Então..

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{P}{AE}\frac{\partial P}{\partial P_i} \\ \theta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i} \end{aligned} \tag{48.36}$$

48.5.2.1 Ex 48.7: Castigliano 2; Cantilevered viga

Procuramos o deslocamento da ponta de um cantilever carregado por um carga concentrada.

Da Eq. 48.15, a energia complementar é $U^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x$, e para um carga concentrada, o Trabalho externo é.. $\mathcal{W}^*{}_e = P\Delta$ assim, a energia potencial do sistema é

$$\begin{aligned} \Pi^* &= U^* - \mathcal{W}^*{}_e \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\mathrm{d}x - P\Delta \end{aligned} \tag{48.37}$$

No entanto, para o carga concentrada, o momento é $M = Px$, substituindo acima

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2x^2}{EI}\mathrm{d}x - P\Delta \\ &= \frac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI} - P\Delta \\ \frac{\mathrm{d}\Pi^*}{\mathrm{d}P} &= \frac{1}{3}\frac{P^2L^3}{EI} - \Delta = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \frac{1}{3}\frac{PL^3}{EI} \end{aligned} \tag{48.38}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

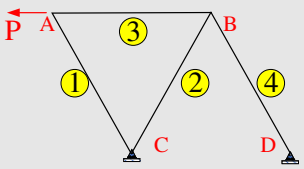
48.5.2.2 Ex 48.8: Castigliano 2; deflexão de um uniformemente carregado viga usando o segundo teorema de Castigliano

Considerando um biapoiado uniformemente carregado viga, buscamos a deflexão do meio do espaço.

Neste caso, teremos que apresentar um *Força fictícia* R No midspan, e o momento é assim $M(x) = \frac{wL}{2}x + \frac{R}{2}x - w\frac{x^2}{2}$. A energia complementar é $U^* = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$ e o deslocamento

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial U^*}{\partial R}\Big|_{R=0} \\ &= \left(\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M\frac{\partial M}{\partial R}\mathrm{d}x\right)\Big|_{R=0} = \left\{\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left[\left(\frac{wL}{2}+\frac{R}{2}\right)x - w\frac{x^2}{2}\right]\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right\}\Big|_{R=0} \\ &= \frac{5wL^4}{384EI}\end{aligned} \tag{48.39}$$

48.5.2.3 Ex 48.9: Castigliano 2, não linear



O adjacente (equilateral) treliça é composto de barras com uma relação de força não linear deslocamento $u = k_1F + k_2F^2$.
Como o material não é linear $U_i^* \neq U_i$ e neste caso devemos usar a energia complementar deformação

$$U_i^* = \sum \int_0^F u dF$$

Do equilíbrio estático

$$\lfloor\ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4\ \rfloor = \lfloor\ 0 \quad -P \quad P \quad P\ \rfloor$$

Assim

$$\lfloor\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\ \rfloor = \lfloor\ 0 \quad -k_1P + k_2P^2 \quad k_1P + k_2P^2 \quad k_1P + k_2P^2\ \rfloor$$

Assim, a energia total complementar deformação da estrutura se torna

$$U_i^* = 2\left(\frac{k_1F^2}{2} + \frac{k_2P^3}{3}\right) + \left(\frac{k_1F^2}{2} - \frac{k_2P^3}{3}\right) = \frac{3k_1F^2}{2} + \frac{k_2P^3}{3}$$

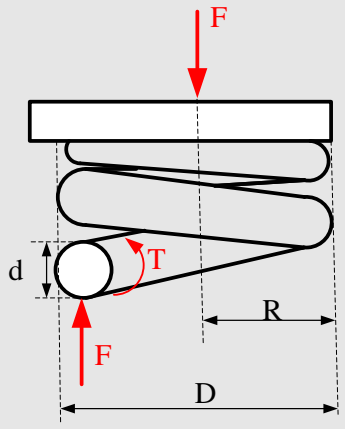
Assim

$$v_A^H = \frac{\partial U_i^*}{\partial P} = 3k_1P + k_2P^2$$

48.5.2.4 Ex 48.10: Castigliano 2, deflexão da primavera

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Para a mola de compressão helicoidal adjacente feita de seção circular de hastes submetidas à torção cisalhamento tensão e transversal cisalhamento (ignorando flexão).
A energia completa complementar é dada por

$$U^* = U_T^* + U_S^* = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG}$$

Onde L é o comprimento do fio.
Substituindo $T = FD/2$, $L = N\pi D$, $J = \pi d^4/32$ e.. $A = \pi d^2/4$ Nós conseguimos

$$U^* = \frac{4NF^2D^3}{d^4G} + \frac{2NF^2D}{d^2G}$$

Onde N é o número de bobinas ativas.
Então aplicamos o segundo teorema de Castigliano para determinar a deflexão da primavera

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{8NFD^3}{d^4G} + \frac{4NFD}{d^2G}$$

48.6 Método Rayleigh-Ritz

Para o contexto histórico, consultar §12.3.1

48.6.1 Derivação

76 Na minimização da energia potencial total, expressamos a energia potencial em termos de quantidades físicas (deslocamentos/rotações) em certos nós, e então afirmamos que o potencial é estacionário, ou seja,

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_1}\delta\Delta_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_2}\delta\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_n}\delta\Delta_n$$

77 Uma abordagem mais geral (e ainda aproximada) é expressar o deslocamentos, e assim o potencial em termos de coeficientes desconhecidos em uma função como:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} a_i\Phi_i + \Phi_0$$

Onde a_i Denotam parâmetros indeterminados, e Φ são funções apropriadas pré-definidas de posições (mais tarde, estas serão funções de forma N_i na formulação elemento finito).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

78 No PTPE, tivemos um único campo em termos n variáveis (desconhecidos deslocamentos, agora temos múltiplas expressões do campo deslocamento em termos de n coeficientes a.

79 Φ deve satisfazer três condições

1. Seja contínuo.
2. Deve ser admissível, ou seja. satisfazer o essencial condições de contorno (o natural condições de contorno já estão incluídos na declaração variacional. No entanto, se Φ Também satisfazê-los, então melhores resultados são alcançados).
3. Deve ser independente e completo (o que significa que o exato deslocamento e seus derivados que aparecem em Π Pode ser arbitrário se termos suficientes forem usados. Os termos de ordem mais baixos também devem ser incluídos.

80 Em geral Φ é uma função polinomial ou trigonométrica.

81 Nós determinamos os parâmetros c_i satisfazendo a estandarte de Π para variações arbitrárias δc_i.

$$\delta\Pi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i}\delta a_i = 0$$

Para variações arbitrárias e independentes de δa_i,

82 assim se segue que

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2}_{0} + \ldots + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\delta a_n}_{0} = 0 \tag{48.40}$$

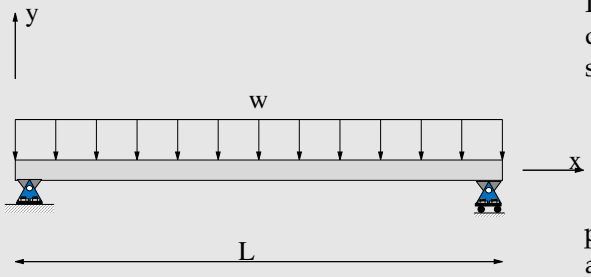
Anote analogia com Eq. 48.34

83 Assim, conseguimos um total de n Equações simultâneas linearmente independentes. A partir destes deslocamentos, podemos então determinar deformações e tensões (ou esforços internos). Por isso substituímos um problema com um número infinito de d.o.f por um número finito.

48.6.1.1 Ex 48.11: Rayleigh Ritz uniformemente carregado biapoiado viga

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Procuramos determinar a deflexão da mutilação do adjacente viga usando uma solução dada pela seguinte série infinita:

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$

para esta solução em particular, vamos manter apenas o primeiro termo:

$$v(x) = a_1 x(L-x)$$

Observamos isso:

1. Contrariamente ao exemplo anterior, o problema essencial (ou geométrico) B.C. são imediatamente satisfeito em ambos $x = 0$ e.. $x = L$.
2. Nós podemos ficar v em termos de a_1 e tomar $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ (Se tivéssemos ido embora v em termos de a_1 e.. a_2 Nós deveríamos Então tenho que levar os dois $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$, e $\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$).
3. Ou podemos resolver para a_1 em termos de v_{max} Em.. $x = \frac{L}{2}$ e tomar $\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0$.

$$\begin{aligned}
\Pi(a_1) &= U(a_1) - W_e(a_1) \\
&= \int_0^L \frac{EI_z}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv(x)dx \\
&= \int_0^L \left[\frac{EI_z}{2}(-2a_1)^2 - a_1 wx(L-x)\right] dx \\
&= \frac{EI_z}{2} 4a_1^2 L - a_1 w\frac{L^3}{2} + a_1 w\frac{L^3}{3} \\
&= 2a_1^2 EI_z L - \frac{a_1 wL^3}{6}
\end{aligned}$$

Se agora tomarmos $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$, nós obteríamos:

$$\begin{aligned}
4a_1 EI_z L - \frac{wL^3}{6} &= 0 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{24EI_z}
\end{aligned}$$

Tendo resolvido o campo deslocamento em termos de a_1, nós agora determinamos $v_{\max}$ Em.. $\frac{L}{2}$:

$$v = \underbrace{\frac{wL^4}{24EI_z}}_{a_1}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) = \frac{wL^4}{96EI_z}$$

Isso deve ser comparado com o valor exato $v_{\max}^{exact} = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_z} = \frac{wL^4}{76.8EI_z}$, o que representa ≈ 17% Erro.

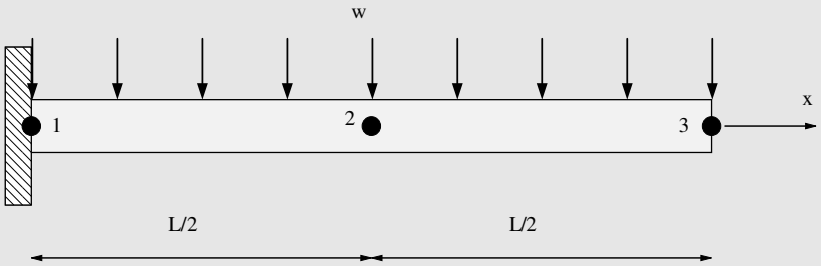
Nota: Se dois termos $a_1 x(L-x) + a_2 x^2(L-x)^2$ foram retidos, então teríamos obtido: $a_1 = \frac{wL^2}{24EI_z}$ e.. $a_2 = \frac{w}{24EI_z}$ e.. $v_{\max}$ Seria igual a $v_{\max}^{exact}$.. Por quê

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

48.6.1.2 Ex 48.12: Métodos de variação

Para os cantilevered viga mostrado abaixo:



sujeito a uma carga constante. Procuramos analisar o mesmo problema usando os seguintes métodos:

1. **Princípio da complementaridade trabalho virtual**, (usando uma unidade virtual carga concentrada), e:
   (a) Determine a vertical deslocamento do ponto 3.
   (b) Computar a energia potencial complementar total $\left(\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx\right)$
2. **Princípio de trabalho virtual** usando a seguinte expressão para os sistemas virtual e real:
   $$v = a_1x^2 + a_2x^3$$
   e:
   (a) Determine a vertical deslocamento do nó 3.
   (b) Com base em seus resultados, desenhe o diagrama do momento (expresso em termos da segunda derivada do deslocamentos], e o cisalhamento (derivado do momento).
   (c) Calcular a energia potencial total do sistema.
   (d) Compare seus resultados com os do problema 1 (solução exata) e.. *Discutir*.

   Nota: Devemos primeiro ajustar os coeficientes a_1 e.. a_2 ao deslocamentos dos pontos 2 e 3, v_2 e.. v_3.
3. **Princípio da energia potencial total mínima**.
4. **Rayleigh Ritz**
5. **PVW; Trigonometria Deslocamento**
   $$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2$$
   em vez da aproximação polinomial deslocamento.

Solução

A solução da lição de casa de Kathryn Sufka

Note, a solução completa passo a passo será dada aqui (cortesia de Kathryn Sufka). A solução Mathematica para uma carga linearmente variável é dada no Apêndice I.2.14.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Um. Princípio do Complementar Trabalho virtual Vertical deslocamento no ponto 3. PCVW: $\delta U^* = \delta W^*$

$$\delta U^* = \int_0^L \delta \bar{M} * MEIdx$$
$$\delta M = x$$
$$M = \frac{wx^2}{2}$$
$$\delta U^* = \int_0^L x * \frac{wx^2}{2EI} dx = \frac{w}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \frac{w}{2EI}[\frac{x^4}{4}]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$
$$\delta W^* = \delta P * \Delta$$
$$\delta P = 1$$
$$\delta W^* = \Delta$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

Total de energia potencial complementar

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(wx^2)^2}{4EI} dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4 dx$$
$$\Pi^* = \frac{w^2L^5}{40EI}$$

2. Princípio de Trabalho virtual

1. Vertical deslocamento do ponto 3. $v = a_1x^2 + a_2x^3$

   Reescrever v em termos de v_2 e.. v_3, o deslocamentos nos pontos 2 e 3:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1\frac{L^2}{4} + a_2\frac{L^3}{8}$$
$$v_3 = v(L) = a_1L^2 + a_2L^3$$

   Resolva a_1 e.. a_2 em termos de deslocamentos

$$a_1 = \frac{8v_2 - v_3}{L^2}$$
$$a_2 = \frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}$$

   Então..

$$v = \left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{dv}{dx} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x + 3\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^2$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Da mesma forma,

$$\delta v = \left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = 2\left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x$$

2. PVW: $\delta U = \delta W$

$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx = \frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3)$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx = \frac{2wL\delta v_2}{3} + \frac{wL\delta v_3}{6}$$

3. $\delta U - \delta W = 0$

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3) - \frac{2wL\delta v_2}{3} - \frac{wL\delta v_3}{6} = 0$$
$$\left[\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3}\right]\delta v_2 + \left[\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6}\right]\delta v_3 = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3} = 0$$
$$64v_2 - 20v_3 = \frac{wL^4}{6EI}$$
$$64v_2 = \frac{wL^4}{6EI} + 20v_3$$
$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$
$$\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6} = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}\left[-20\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) + 7v_3\right] - \frac{wL}{6} = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}\left[\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3\right] = \frac{wL}{6}$$
$$\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$
$$\frac{3v_3}{4} = \frac{3wL^4}{32EI}$$
$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Cisalhamento e diagrama de momento.

$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$v'' = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$M(x)=EIv''\frac{5wL^2}{12} - \frac{wLx}{2}$$
$$V(x)=M'(x) = \frac{-wL}{2}$$

5. Calcular a energia potencial total.

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wvdx$$
$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$\Pi = \frac{7w^2L^5}{8EI} - \frac{7w^2L^5}{144EI}$$
$$\Pi=\frac{119w^2L^5}{144EI}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

3. Princípio do potencial energético total mínimo $\delta\Pi = 0$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2)$$

$$W = \int_0^L wv dx = \frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}$$

$$\Pi = U - W = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2) - \left(\frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}\right)$$

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial v_2}\delta v_2 + \frac{\partial\Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = 0$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial v_2} = 0 \text{ e } \frac{\partial\Pi}{\partial v_3} = 0$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial v_2} = \frac{2EI}{L^3}(128v_2 - 40v_3) - \frac{2Lw}{3} = \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) - \frac{2Lw}{3} = 0 \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) = \frac{2Lw}{3}$$

$$16v_2 - 5v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$

$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = \frac{2EI}{L^3}(-40v_2 + 14v_3) - \frac{Lw}{6} = \frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EIv_2}{L^3} - \frac{Lw}{6} = 0$$

$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EI}{L^3}\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{25EIv_3}{L^3} - \frac{5wL}{24} - = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{3EIv_3}{L^3} = \frac{9wL}{24}$$

$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

4. Rayleigh Ritz $\delta\Pi = 0$

$$
\begin{aligned}
v &= a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \\
\phi_1 &= x^2 \text{ e } \phi_2 = x^3 \\
v &= a_1x^2 + a_2x^3 \\
\frac{dv}{dx} &= 2a_1x + 3a_2x^2 \\
\frac{d^2v}{dx^2} &= 2a_1 + 6a_2x \\
\Pi &= U - W \\
U &= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \\
&= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2) \\
W &= \int_0^L wv\,dx = \frac{a_1wL^3}{3} + \frac{a_2wL^4}{4} \\
\Pi &= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2) - \frac{a_1wL^3}{3} - \frac{a_2wL^4}{4} \\
\delta\Pi &= \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= 0 \text{ e } \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= EI(4a_1L + 6a_2L^2) - \frac{wL^3}{3} = 0 \\
4a_1L + 6a_2L^2 &= \frac{wL^3}{3EI} \\
4a_1L &= \frac{wL^3}{3EI} - 6a_2L^2 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2L}{2} \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_2} &= 6EI(2a_2L^3 + a_1L^2) - \frac{wl^4}{4} = 0 \\
6EI\left[2a_2L^3 + \left(\frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2L}{2}\right)L^2\right] - \frac{wL^4}{4} &= 0 \\
12EIL^3a_2 + \frac{wL^4}{2} - 9EIL^3a_2 - \frac{wL^4}{4} &= 0 \\
3EIL^3a_2 &= -\frac{wL^4}{4} \\
a_2 &= -\frac{wL}{12EI} \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \left(\frac{3L}{2} * \frac{-wL}{12EI}\right) \\
a_1 &= -\frac{wL^2}{24EI} \\
v &= \frac{-wL^2}{24EI}x^2 + \frac{-wL}{12EI}x^3 \\
v_3 &= v(L) = \frac{-wL^2}{24EI}L^2 + \frac{-wL}{12EI}L^3 \\
v_3 &= \frac{-wL^4}{8EI}
\end{aligned}
$$

Nota: v_3 é negativo porque o deslocamento está na direção negativa y.

5. PVW, deslocamento trigonométrico (com alguma ajuda do Mathematica)

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Reescrever v em termos de v_2 e.. v_3, o deslocamentos nos pontos 2 e 3:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1(1-\sqrt{2}/2) + a_2(1+\sqrt{2}/2)$$
$$v_3 = v(L) = a_1 + a_2$$

Resolva a_1 e.. a_2 em termos de deslocamentos

$$a_1 = \frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}$$
$$a_2 = \frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}$$

Portanto..

$$v = \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}\right) + \left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}v_2 - v_3 + \sqrt{2}v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\delta v = \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right) + \left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}\delta v_2 - \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\text{PVW} : \delta U = \delta W$$
$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx$$
$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41+20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123-80\sqrt{2})v_3\delta v_3]$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx$$
$$\delta W = \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2-4\sqrt{2}+3\pi)\delta v_3]$$
$$\delta U - \delta W = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41+20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123-80\sqrt{2})v_3\delta v_3] - \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2-4\sqrt{2}+3\pi)\delta v_3] = 0$$

$$\left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})\right]\delta v_2 + \left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)\right]\delta v_3 = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2}) = 0$$
$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] = \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})$$
$$82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI}$$
$$82v_2 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI} - 2(-41+20\sqrt{2})v_3$$
$$v_2 = \frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3$$
$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3]$$
$$-\frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi) = 0$$
$$2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$
$$2(-41+20\sqrt{2})\left[\frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3\right] + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$
$$-37.4275\frac{wL^4}{\pi^5 EI} - 7.8873v_3 + 9.8629v_3 = 37.7157\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$
$$1.9756v_3 = 75.1432\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$
$$v_3 = 0.1243\frac{wL^4}{EI}$$

48.7 Resumo

84 Um resumo dos vários métodos introduzidos neste capítulo é mostrado na figura. 48.7.

85 A dualidade entre os dois princípios variacionais é destacada pela figura. 48.8, onde começando com kinematicamente admissível deslocamentos, o princípio de trabalho virtual fornece soluções estaticamente admissíveis. Da mesma forma, para a admissível estática tensões, o princípio da complementar trabalho virtual leva a soluções kinematicamente admissíveis.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

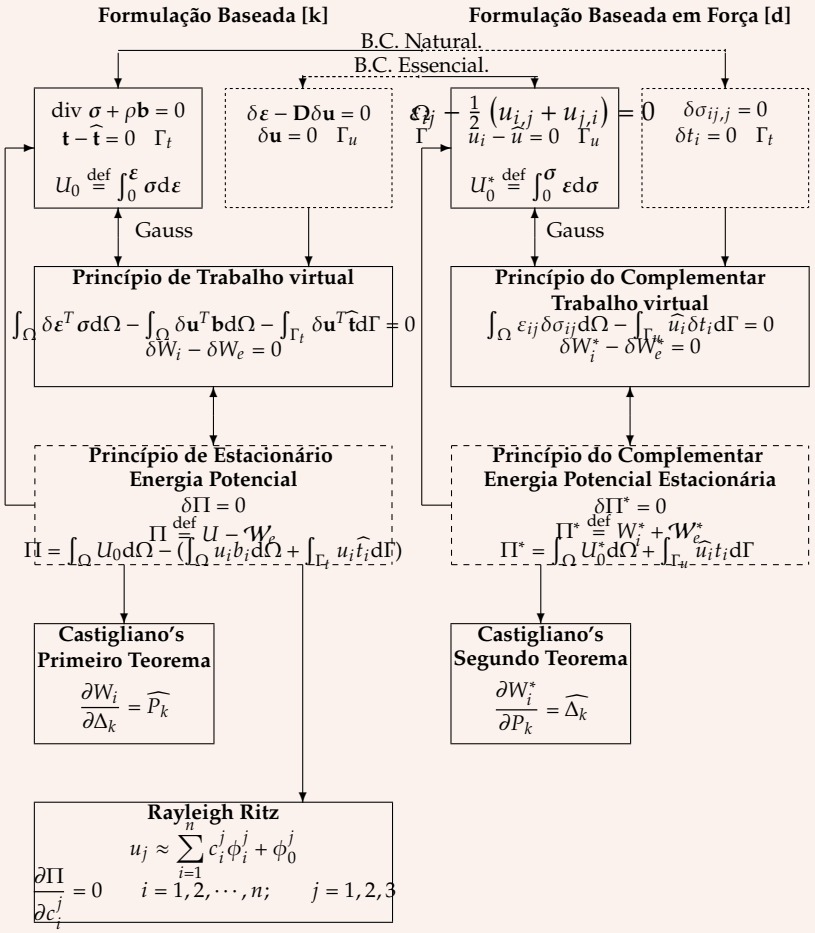
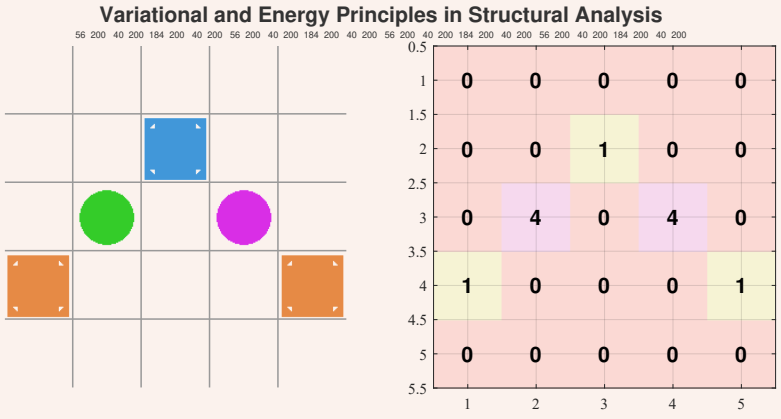


Figura 48.7: Resumo dos métodos de variação



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

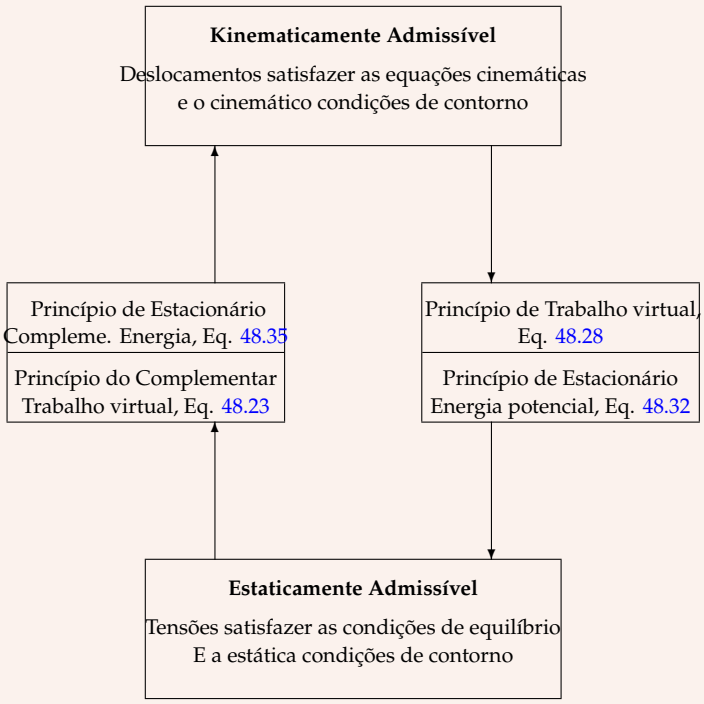


Figura 48.8: A dualidade dos princípios variacionais

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 49

Funções de Interpolação

Abstract

No método de Rayleigh Ritz resolvemos o problema variacional usando uma aproximação funcional para o campo deslocamento (§48.6). No entanto, os coeficientes utilizados não tinham significado físico. Neste capítulo, introduziremos aproximações polinomiais deslocamento em termos de nodal conhecido deslocamentos. Essas funções de interpolação são conhecidas como Funções de forma.

Interpolações para diferentes graus polinomiais, em termos de sistemas cartesianos, triangulares e de coordenadas naturais serão apresentadas, para 1D, bem como 2D e 3D (para contínuo elementos finitos).

Semelhante a como introduzimos matrizes de transformação antes de cobrir o Método da rigidez direta, vamos preceder a introdução do método dos elementos finitos com uma discussão sobre funções de forma.

49.1 Introdução 1742
49.1.1 Características de funções de forma 1742
49.1.2 Triângulo de Pascal 1743
49.1.3 Sistemas de coordenadas . . 1745
49.1.4 Continuação 1750
49.2 Funções de forma 1750
49.2.1 Formulação direta 1750
49.2.2 Funções de interpolação lagrangeanas 1756
49.2.3 Funções de interpolação hermítica 1762

49.1 Introdução

49.1.1 Características de funções de forma

1 No método de Rayleigh-Ritz (§48.6Nós mencionamos que a função Φ deve ser contínuo, satisfazer o condições de contorno, e ser independente e *completo*.

CÓPIA PARA REVISÃO

2 Mudando para o método dos elementos finitos, onde o Φ Coeficientes são substituídos por *funções de forma* **N**.

3 A função de forma é uma função matemática usada para interpolar a solução da variável de campo (como deslocamento, temperatura, etc.) dentro de um elemento. Funções de forma, defina como a variável de campo varia dentro do elemento com base nos valores dos nós do elemento.

4 As principais características de funções de forma incluem:

Interpolação: Interpole a variável de campo entre nós. Se a variável de campo é conhecida nos nós, o função de forma permite o cálculo da variável em qualquer ponto dentro do elemento.

Valores Nodais: Em qualquer nó dado i, o função de forma N_i tem um valor de 1 no nó i e 0 em todos os outros nós do elemento. Isso garante que a interpolação seja exata nos nós.

Continuidade: A continuidade de funções de forma depende do tipo de elemento e da natureza do problema. Por exemplo, elementos lineares têm contínuos funções de forma, enquanto elementos de ordem mais alta têm funções de forma que podem ser contínuos em derivados de ordem superior.

Movimento rígido do corpo: deve ser capturado (i.e. $v = a_1 + \ldots$)

Constante deformação: deve ser capturado também

Dimension-Dependente: Funções de forma variam dependendo da dimensionalidade do elemento.

49.1.2 Triângulo de Pascal

5 Existe uma conexão entre funções de forma e o Triângulo de Pascal através da estrutura matemática e propriedades do polinômio funções de forma (particularmente para elementos de ordem superior).

6 Os coeficientes de base polinomial podem estar relacionados com os coeficientes binomiais, que são encontrados no Triângulo de Pascal.

7 Na verdade, o Triângulo de Pascal fornece os coeficientes binomiais usados na expansão dos polinômios. Por exemplo, a expansão de $(a+b)^n$ envolve coeficientes que são exatamente as entradas do Triângulo de Pascal. Da mesma forma, em 2D o funções de forma pode ser escrito usando termos polinomiais que envolvem combinações de x e.. y.. Os coeficientes desses termos, quando expandidos, seguem o padrão dos coeficientes binomiais.

8 Para um elemento triangular quadrático, o funções de forma pode parecer como:

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 xy + f_1 y^2$$

$$N_2(x, y) = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 x^2 + e_2 xy + f_2 y^2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$N_3(x,y) = a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 x^2 + e_3 xy + f_3 y^2$$

Os coeficientes $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ será determinado com base nos valores nodais e pode ser relacionado aos coeficientes binomiais.

9 Uma interpretação esquemática de funções de forma em termos da série polinomial é dada pelo triângulo de Pascal que é mostrado na tabela 49.1. Os termos polinomiais

Tabela 49.1: Interpretação de funções de forma em termos de série polinomial (1d & 2d)

Constant					a_1				
Linear				$a_2 x$		$a_3 y$			
Quadratic			$a_4 x^2$		$a_5 xy$		$a_6 y^2$		
Cubic		$a_7 x^3$		$a_8 x^2 y$		$a_9 xy^2$		$a_{10} y^3$	
Quartic	$a_{11} x^4$		$a_{12} x^3 y$		$a_{13} x^2 y^2$		$a_{14} xy^3$		$a_{15} x^4$

presentes em várias formulações elementares são mostrados em Mesa 49.2

Tabela 49.2: Termos polinomiais em várias formulações de elementos (1d) & 2d)

Elemento	Termos	# de nós (termos)
Linear	a_1, a_2	2
Quadrática	a_1, a_2, a_4	3
Bi-linhar (triângulo)	$a_1, a_2, a_3,$	3
Bi-Linear (quadrilateral)	a_1, a_2, a_3, a_5	4
Bi-Quadratic (Serendipidade)	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9$	8
Bi-Quadratic (Lagrangian)	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{13}$	9

10 A *completo* O polinômio contém todos os termos acima de uma certa linha no triângulo Pascal. Quanto mais termos forem incluídos, maior a precisão. Por exemplo $u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_5 xy$ é mais preciso do que $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$, No entanto, a taxa de convergência é inalterada (porque a segunda aproximação não é quadrática completa).

11 Termos na aproximação que não melhoram a taxa de convergência são chamados *Parasita* termos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

49.1.3 Sistemas de coordenadas

49.1.3.1 Cartesiano

12 Para um elemento (finito ou não), podemos escrever uma expressão para o generalizada deslocamento (tradução/rotação), u em qualquer ponto Em termos de todos os seus nodais, $\overline{\mathbf{u}}$.

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(X)\overline{\Delta}_i = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

onde:

1. $\overline{u}_i$ é o (generalizado) nodal deslocamento correspondente a D.O.F i
2. N_i é uma função de interpolação, ou *função de forma* que tem as seguintes características:
   (a) $N_i = 1$ Em.. $\overline{u}_i$
   (b) $N_i = 0$ Em.. $\overline{u}_j$ Onde $i \neq j$.
3. **N** Pode ser derivado das bases de:
   (a) Estado de deformação presumido definido em termos de série polinomial.
   (b) Função de Interpolação (Lagrangian ou Hermitian).

13 Vamos distinguir entre duas classes de problemas:

C^0 onde apenas deslocamento continuidade deve ser assegurada através elementos (treliça, torção, plano tensão/deformação, elasticidade 3D).

C^1 onde devemos garantir a continuidade de *Os dois* deslocamentos e seus derivados (como vigas, placas, e cascas).

49.1.3.2 Natural

14 Nós definimos duas coordenadas naturais ξ_1 e.. ξ_2, Fig. 49.1

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{L_2}{L}$$

Desde então $L_1 + L_2 = L$Nós temos

$$\xi_1 + \xi_2 = 1$$

Nós notamos que $\xi_i = 1$ No nó i e zero em todos os outros nós.

15 Um ponto arbitrário P com coordenadas x Tem

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

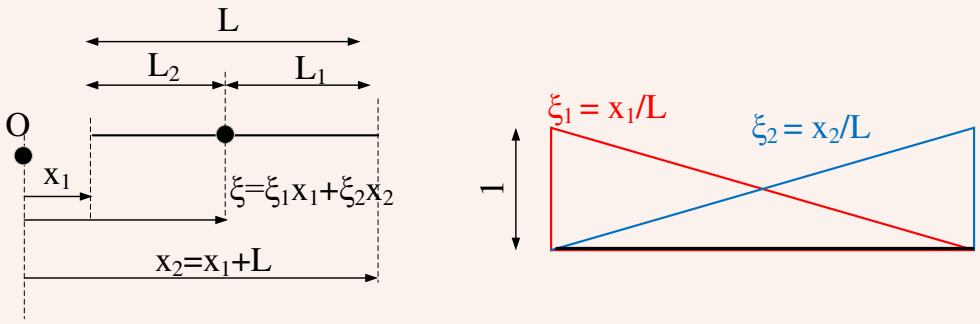


Figura 49.1: Sistema de coordenadas naturais em linha reta

Assim, para cada ponto x, corresponde a um conjunto de (não independente) Coordenadas naturais ξ_1, ξ_2.. Essas equações podem ser ditas como

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \left[\begin{array}{cc} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\}$$

16 A Interpol pode ser feita em coordenadas naturais

$$\phi = \underbrace{\lfloor \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \rfloor}_{\mathbf{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\phi}_1 \\ \overline{\phi}_2 \end{array} \right\}$$

17 Integração de polinômios em ξ_1 e.. ξ_2 pode ser feito através de (a A prova rigorosa é desenvolvida abaixo através da Eq. 49.1)

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \mathrm{d}L = L \frac{k!\, l!}{(1+k+l)!}$$

Além disso..

$$\begin{array}{rcll} \int_L x \mathrm{d}L & = & \int_L (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \mathrm{d}L & = \frac{L}{2}(x_1 + x_2) \\ \int_L \xi_1 \xi_2^2 \mathrm{d}L & = & L \frac{2}{4!} & = \frac{L}{12} \end{array}$$

49.1.3.3 Triangular

18 Coordenadas naturais são dimensionadas e definidas com relação ao comprimento do elemento/área/volume, em vez do sistema global de coordenadas.

19 Eles são frequentemente usados na formulação de elementos de *Simplex* elementos (onde em um n Espaço dimensional, há $n+1$ Vértices e $n+1$ Superfícies de dimensionalidade $n-1$).

20 Elementos triangulares permitem um polinômio completo na coordenada cartesiana para ser usado no campo (por exemplo, temperatura, deslocamento) quantidade. Assim,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Todos termos de um triângulo Pascal truncado são usados no funções de forma. (Este não será o caso para o elemento quadrilateral bilinear).

21 Nós procuramos determinar $\phi = \sum N_i \overline{\phi}_i$ Onde $\overline{\phi}_i$ são nodais D.O.F. e.. $N_i = N_i(L_1, L_2, L_3)$.

Vamos começar com $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i L_1^q, L_2^r, L_3^s)$ Onde q, r e.. s Alcance ao longo do n Possíveis combinações para as quais $q + r + s = p$ e onde p é a ordem do polinômio. Por exemplo,

Elemento linear:

$$\phi = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y$$

Elemento quadrático:

$$\phi = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2 + a_3 L_3^2 + a_4 L_1 L_2 + a_5 L_2 L_3 + a_6 L_3 L_1 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y + a'_4 x^2 + a'_5 xy + a'_6 y^2$$

22 O funções de forma para o Triângulo Linear são simplesmente as coordenadas de área,

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

E cada um é igual à unidade em um nó, zero nos outros, e varia linearmente.

23 Para uma superfície triangular, qualquer ponto P divide o triângulo 1-2-3 em três Subáreas A_1, A_2, A_3, Fig. 49.2 assim, definimos coordenadas de área como relações de

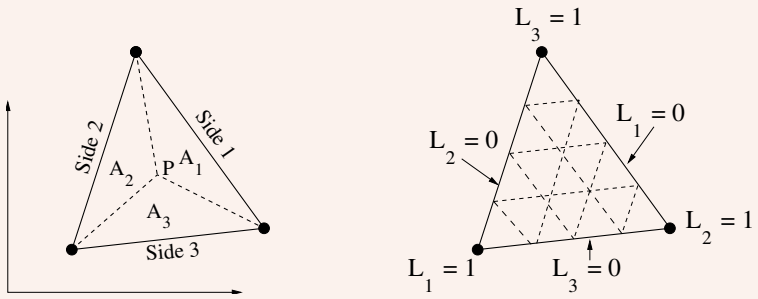


Figura 49.2: Sistema de coordenadas naturais para um triângulo

áreas

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_{21}}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

Onde A é a área do triângulo 1-2-3. Desde então $A = A_1 + A_2 + A_3$ Então..

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

E o centróide está em $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$

CÓPIA PARA REVISÃO

24 Novamente as equações de restrições são

$$\left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right]}_{\mathbf{a}} \left\{\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right\}$$

Invertendo

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right\} &= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{array}\right]}_{\mathbf{a}^{-1}} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{ccc} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\} \end{aligned}$$

Onde $x_{ij} = x_i - x_j$

25 Observamos que a área é igual ao determinante sobre dois.

$$2A = |\mathbf{A}| = x_2 - x_1y_3 - y_1 - x_{31}y_{21}$$

E se as etiquetas forem revertidas de tal forma que 1-2-3 é no sentido horário, então O determinante é negativo.

26 Uma função ϕ pode ser expressa em termos de coordenadas de área

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(L_1, L_2, L_3) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y} \end{aligned}$$

e..

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{y_2-y_3}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{y_3-y_1}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{y_1-y_2}{2A}; \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{x_3-x_2}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{x_1-x_3}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{x_2-x_1}{2A}; \end{array}$$

27 Integração para o matriz de rigidez Exigir integração na área de coordenação das expressões do formulário $\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A$.. Para realizar esta operação, e com referência a Fig. 49.3, (Eisenberg e Malvern, 1973):

$$\begin{aligned} dA &= (\mathrm{d}s_1)\csc\theta_3(\mathrm{d}s_2) \\ &= (h_1\mathrm{d}L_1)\csc\theta_3(h_2\mathrm{d}L_2) \\ &= 2A\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

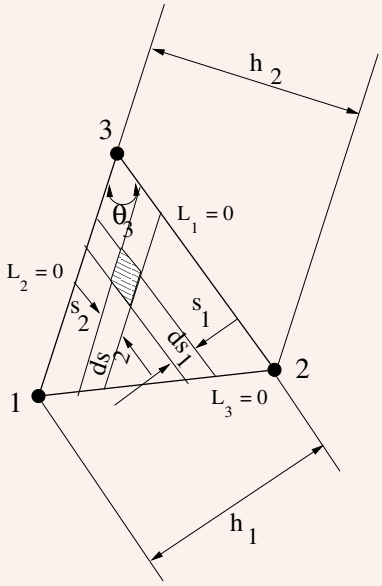


Figura 49.3: Integração sobre um triângulo

Assim

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \int_0^1 \left[\int_0^{1-L_1} L_1^k L_2^l (1 - L_1 - L_2)^m \mathrm{d}L_2 \right] \mathrm{d}L_1$$

Vamos substituir o próximo $L_2 = t(1 - L_1)$ e.. $\mathrm{d}L_2 = (1 - L_1)\mathrm{d}t$ Que se entrega

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \int_0^1 L_1^k (1 - L_1)^{l+m+1} \mathrm{d}L_1 \int_0^1 t^l (1 - t)^m \mathrm{d}t$$

Cada uma das integrais do lado direito é da forma do beta função (Abramowitz e Stegun, 1970)

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

Onde Γ Denota a função gama que satisfaz $\Gamma(n + 1) = n!$ para inteiros $n \geq 0$.. Assim

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{\Gamma(k + 1)\Gamma(l + 1)\Gamma(m + 1)}{\Gamma(k + l + m + 3)}$$

Desde então k, l, e m são números inteiros não negativos,

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{k!\, l!\, m!}{(k + l + m + 2)!} \tag{49.1}$$

[28] Deve-se notar que a relação acima só é usada se tivermos elementos do lado reto e a formulação do elemento pode ser derivada analiticamente. Alternativamente, se tivermos um lado curvilíneo, esta fórmula não será usada, e o elemento será numericamente integrado no contexto de uma formulação isoparamétrico.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

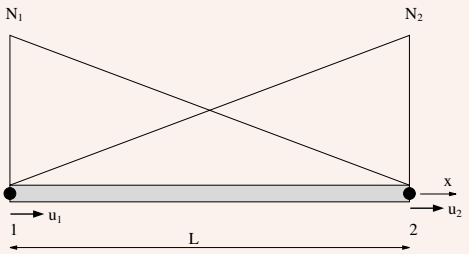


Figura 49.4: Axial elemento finito

49.1.4 Continuação

29 C^0 continuidade refere-se ao requisito de que uma função seja contínua através dos limites de adjacentes elementos finitos, mas não necessariamente seus primeiros ou mais elevados derivados (axial ou torção, por exemplo).

30 C^1 A continuidade refere-se ao requisito de que tanto uma função como sua primeira derivada sejam contínuas através dos limites de membros adjacentes elementos finitos (tipicamente flexurais).

49.2 Funções de forma

49.2.1 Formulação direta

49.2.1.1 Treliça elemento; linear

31 Começamos com o simples elemento treliça, desenvolvemos explicitamente o função de forma, e então derivamos uma fórmula para sua generalização.

32 Com referência à Fig. 49.4 Começamos com:

$$\begin{aligned} u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 \\ \theta_x &= N_1\overline{\theta}_{x1} + N_2\overline{\theta}_{x2} \end{aligned}$$

33 Já que temos 2 D.O.F., assumiremos um estado de deformação linear

$$u = a_1 x + a_2 \tag{49.2}$$

Onde u pode ser qualquer um u ou θ, E os B.C.'s são dados por: $u = \overline{u}_1$ Em.. $x = 0$, e $u = \overline{u}_2$ Em.. $x = L$.. Assim temos:

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= a_2 \\ \overline{u}_2 &= a_1 L + a_2 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

34 Solucionando a_1 e.. a_2 em termos de $\overline{u}_1$ e.. $\overline{u}_2$ Nós obtemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L} \\ a_2 &= \overline{u}_1 \end{aligned}$$

35 Substituindo e reorganizando essas expressões em Eq. 49.2 Nós conseguimos

$$\begin{aligned} u &= (\frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L})x + \overline{u}_1 \\ &= \underbrace{(1 - \frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= \tfrac{x}{L} \end{aligned} \tag{49.3}$$

49.2.1.2 Generalização

36 A derivação anterior pode ser generalizada por escrito:

$$u = a_1 x + a_2 = \underbrace{\lfloor\, x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \tag{49.4}$$

Onde **p** corresponde à aproximação polinomial, e **a** é o vetor do coeficiente.

37 Em seguida, aplicamos o condições de contorno:

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}}_{\mathbf{a}}$$

Após a inversão de $\mathcal{L}$, isso leva a

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

38 Substituindo esta última equação em Eq. 49.4, nós obtemos:

$$u = \underbrace{\underbrace{\lfloor\, (1 - \tfrac{x}{L}) \quad \tfrac{x}{L} \,\rfloor}_{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Assim, o funções de forma **N** Pode ser obtido diretamente de

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$$

39 Note que em alguns casos $\mathcal{L}^{-1}$ Nem sempre é possível obter, e isso em Outros podem haver consideráveis dificuldades algébricas para geometrias arbitrárias. Por isso, apresentaremos mais tarde as funções de interpolação Lagrangian e Hermitian.

49.2.1.3 Elemento triângulo constante deformação

40 Em seguida, consideramos um elemento triangular, Fig. 49.5 com *Bi-linear* deslocamento

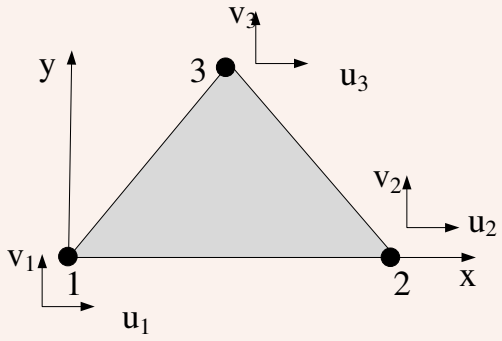


Figura 49.5: Elemento triângulo constante deformação

campo (em ambos x e.. y):

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \\ u &= \underbrace{\lfloor\, 1 \quad x \quad y \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \end{aligned}$$

41 Como antes, nós primeiro buscamos o funções de forma, e por isso aplicamos o condições de contorno nos nós para o u deslocamentos primeiro:

$$\underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{matrix} \right]}_{[\mathcal{L}]} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\}}_{\mathbf{a}} \tag{49.5}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Então multiplicamos o inverso de $\mathcal{L}$ Em Eq. 49.5 por $\mathbf{p}$ e obter:

$$u = N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + N_3\overline{u}_3$$

Onde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{x_2y_3}(x_2y_3 - xy_3 - x_2y + x_3y) \\ N_2 &= \frac{1}{x_2y_3}(xy_3 - x_3y) \\ N_3 &= \frac{y}{y_3} \end{aligned}$$

e observe que cada um dos três funções de forma é igual a 1 no correspondente nó, e igual a 0 nos outros dois.

42 O mesmo funções de forma pode ser derivado para v:

$$v = N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + N_3\overline{v}_3$$

43 Assim, o campo deslocamento será dado por:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \end{array} \right\}$$

E o elemento correspondente que ele é avaliado como *Triângulo constante deformação* (CST) porque ele tem um campo linear deslocamento, e, portanto, uma constante deformação.

49.2.1.4 Elemento retangular bilinear

44 Em seguida, consideramos um elemento quadrilátero, Fig. 49.6 com *Bi-linear* deslocamento campo (em ambos x e.. y). Usando a função de interpolação Lagrangiana do Eq. 49.6, e começando com o u deslocamento, realizamos duas interpolação: O primeiro ao longo da borda inferior (1-2) e ao longo do topo (4-3).

45 Da Eq. 49.6 com $m = 1$ Nós obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{u}_{12} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_2 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

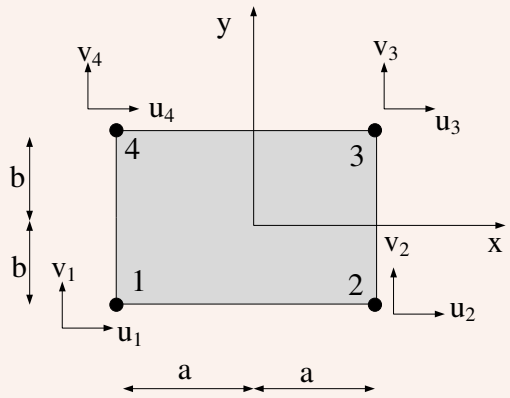


Figura 49.6: Elemento retangular bilinear

Da mesma forma

$$\begin{aligned}\overline{u}_{43} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_4 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_3 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_3\end{aligned}$$

46 Em seguida, nós interpolamos no y Direção ao longo de 1-4 e 2-3 entre $\overline{u}_{12}$ e.. $\overline{u}_{43}$.. De novo, usamos Eq. 49.6 No entanto, Desta vez nós substituiremos x por y:

$$\begin{aligned}u &= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\overline{u}_{12} + \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}\overline{u}_{43} \\ &= \frac{b - y}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{b - y}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 + \frac{y + b}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{y + b}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_3 \\ &= \underbrace{\frac{(a - x)(b - y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{(a + x)(b - y)}{4ab}}_{N_2}\overline{u}_2 + \underbrace{\frac{(a + x)(b + y)}{4ab}}_{N_3}\overline{u}_3 + \underbrace{\frac{(a - x)(b + y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_4\end{aligned}$$

47 Pode-se facilmente verificar isso em cada nó i o correspondente N_i É igual a 1, e todos os outros a zero, e que em qualquer ponto $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1$. Assim, o campo deslocamento será dado por:

$$\left\{\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

48 Funções de forma para o elemento quadrilátero quatro nós isoparamétrico são mostrados na figura. 49.7

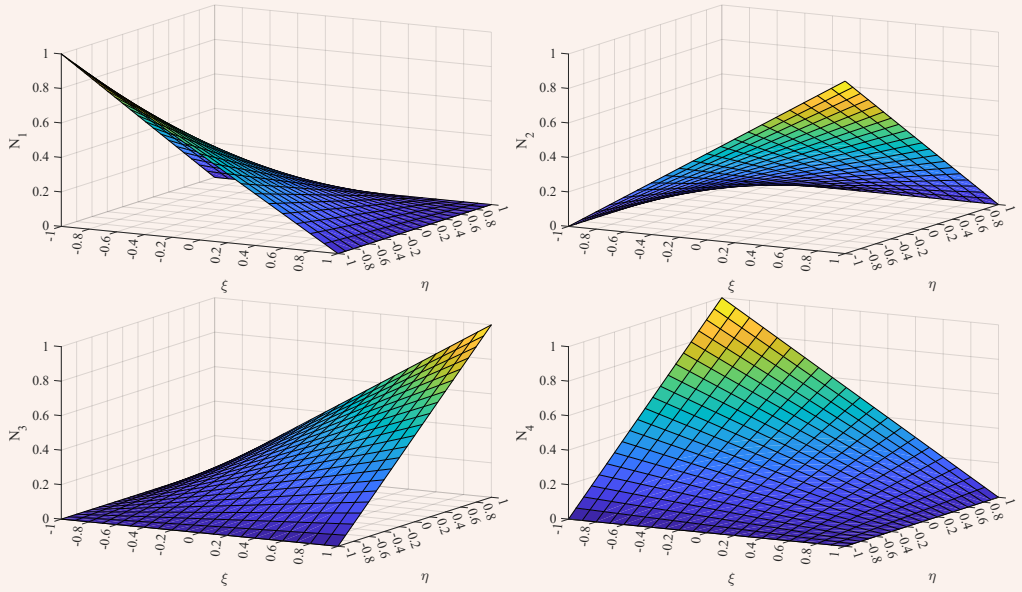


Figura 49.7: Funções de forma para 4 nós quadriláteros elemento

49.2.1.5 Elemento trilinear de tijolo

49 Por extensão à derivação anterior, o funções de forma de um Elemento sólido trilinear retangular, fig. 1. 49.8 Será dado por:

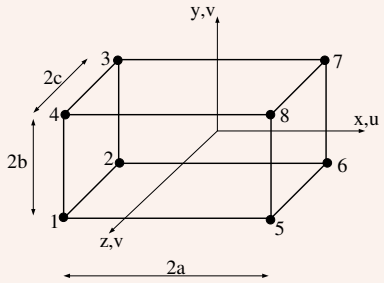


Figura 49.8: Elemento retangular trilinear sólido

CÓPIA PARA REVISÃO

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{w}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \\ \overline{w}_4 \end{array} \right\}$$

Onde

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc}$$

49.2.2 Funções de interpolação lagrangeanas

49.2.2.1 Quadrilaterais

50 Em nossa abordagem anterior, o funções de forma foi obtido por:

1. Suposição de uma função polinomial: $u = \mathbf{pa}$
2. Aplicação do condições de contorno $\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{L}\mathbf{a}$
3. Inversão de $\mathcal{L}$
4. E finalmente $\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$

Seguindo estas operações, nós definimos o *Funções de Interpolação Lagrangiana* para problemas com C^0 continuidade interelementar (ou seja, continuidade de deslocamento apenas).

51 A interpolação Lagrangiana define os coeficientes (**N** em nossa Caso) de uma representação polinomial de uma função em termos de valores definidos em pontos discretos (nós no nosso caso). Para os pontos ao longo de uma linha, isso renderia:

$$N_i = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x - x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x_i - x_j)} \tag{49.6}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Se expandida, a equação anterior renderia:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{m+1})} \\ N_2 &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{m+1})} \\ N_{m+1} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2)\cdots(x_{m+1}-x_m)} \end{aligned}$$

52 Para o membro axial, $m = 1$, $x_1 = 0$, e $x_2 = L$, as equações acima resultarão em:

$$u = \frac{(x-L)}{-L}\overline{u}_1 + \frac{x}{L}\overline{u}_2 = \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2$$

Que é idêntico ao Eq. 49.3.

49.2.2.2 Triângulos

53 O funções de forma para outros elementos pode ser obtido a partir do Função de interpolação Lagrangiana usada mais cedo. 49.6

$$\begin{aligned} l_k^n &= \frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L-L_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L_k-L_i)} \\ &= \frac{(L-L_0)(L-L_1)\cdots(L-L_{k-1})(L-L_{k+1})\cdots(L-L_n)}{(L_k-L_0)(L_k-L_1)\cdots(L_k-L_{k-1})(L_k-L_{k+1})\cdots(L_k-L_n)} \end{aligned}$$

54 Assim, denotando um nó típico i por três números q, r e.. s correspondente Para a posição das coordenadas L_{1i}, L_{2i} e.. L_{3i}, podemos escrever o funções de forma em termos de três funções de interpolação Lagrangian

$$N_i = l_q^q(L_1)l_r^r(L_2)l_s^s(L_3)$$

55 Usando esta fórmula, o funções de forma para elementos de ordem superior são

Triângulo linear

$$N_i = L_i$$

Triângulo quadrático

$$\begin{aligned} N_i &= L_i(2L_i-1) && \text{Corner nodes} \\ N_j &= 4L_iL_k && \text{Nós de lado, } i,j,k \text{ pertencem ao mesmo lado} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Triângulo cúbico

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{2}L_i(3L_i-1)(3L_i-2) && \text{Corner nodes} \\ N_j &= \tfrac{9}{2}L_iL_k(3L_i-1) && \text{Nós de lado, } i,j,k \text{ pertencem ao mesmo lado} \\ N_{10} &= 27L_1L_2L_3 && \text{Nó interno} \end{aligned}$$

56 Funções de forma para o triângulo linear de três nós são mostrados na figura. 49.9.. Nota nas coordenadas de área, a única maneira de visualizar o funções de forma é determinar **N** em termos de L_1 e.. L_2

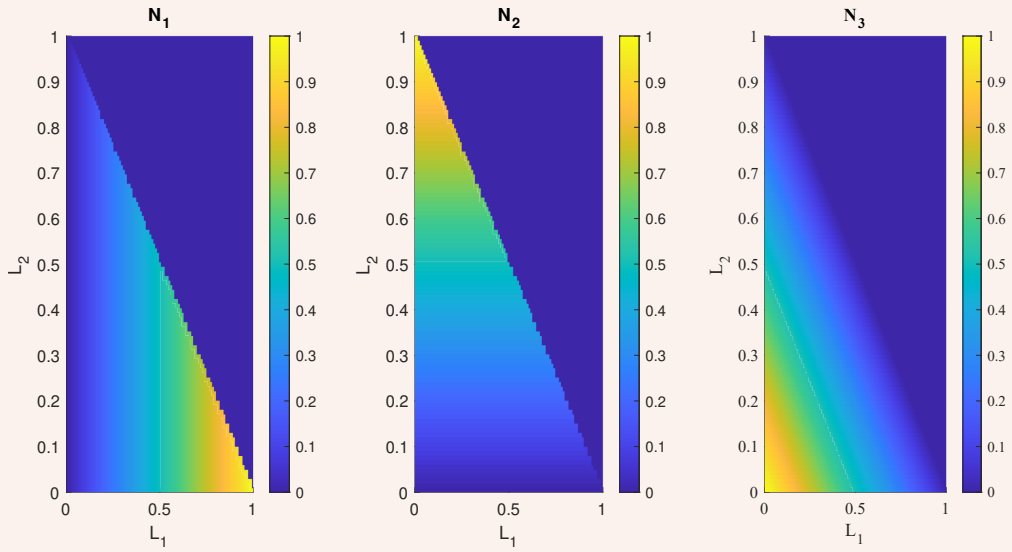


Figura 49.9: Funções de forma para 3 nós elemento triangular linear

49.2.2.3 Treliça elemento; Quadrático

57 Agora aplicamos a função de interpolação Lagrangiana para derivar o funções de forma de um elemento quadrático treliça.

58 Os três elementos quadráticos, Fig. 49.10.

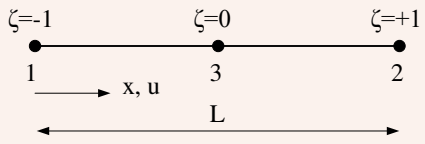


Figura 49.10: Elemento de barras quadráticas com três nós

CÓPIA PARA REVISÃO

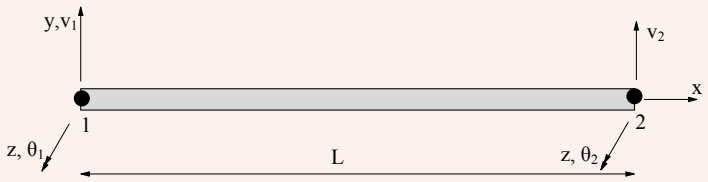


Figura 49.11: Flexural elemento finito

59 O funções de forma para o elemento pode ser obtido a partir do Função de interpolação Lagrangeana da Eq. 49.6, e em que Nós substituímos x por ξ.. O kO termo em Um polinômio de ordem $n-1$ Seriam

$$\begin{aligned} N_k^n &= \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi-\xi_i)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi_k-\xi_i)} \\ &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)(\xi_k-\xi_2)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\cdots(\xi_k-\xi_n)} \end{aligned}$$

60 Por um elemento quadrático de três nós $\xi_1=-1$, $\xi_2=+1$, e $\xi_3=0$. Substituindo, nós obtemos os três funções de forma

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{(\xi-1)(\xi-0)}{(-1-1)(-1-0)} = \frac{1}{2}(\xi^2-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(\xi^2+\xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-\xi^2 \end{aligned}$$

Por isso,

$$x(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \overline{x}_3\ \rfloor^T \quad \text{e} \quad u(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3\ \rfloor^T \tag{49.7}$$

Onde

$$\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \lfloor\ \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \quad \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \quad 1-\xi^2\ \rfloor \tag{49.8}$$

49.2.2.4 Viga

61 Vamos usar as equações derivadas em §49.2.1.2.. Com referência à Fig. 49.11. Temos 4 DOF's $\{\mathbf{u}\}_{4\times1}$: e, portanto, precisará de 4 funções de forma, N_1 para N_4, e esses serão obtidos através de 4 condições de contorno. Portanto, precisamos assumir uma aproximação polinomial para deslocamentos de grau 3.

$$\begin{aligned} v &= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ \theta &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Note que v pode ser reescrito como:

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \tag{49.9}$$

62 Agora aplicamos o condições de contorno:

1. $v = \overline{v}_1$ Em.. $x = 0$
2. $v = \overline{v}_2$ Em.. $x = L$
3. $\theta = \overline{\theta}_1 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ Em.. $x = 0$
4. $\theta = \overline{\theta}_2 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ Em.. $x = L$

ou:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

Que quando invertidos se rendem:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{49.10}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

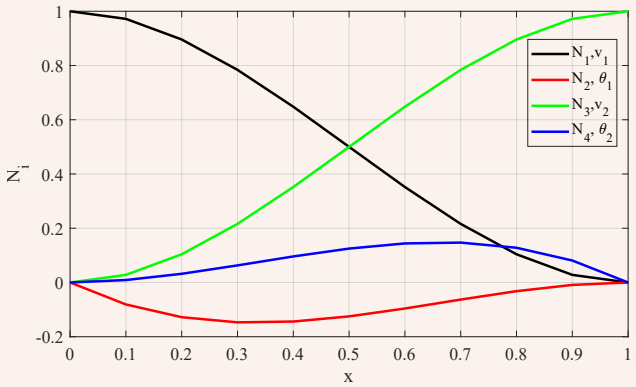


Figura 49.12: Funções de forma para flexão de elemento uniforme viga.

63 Combinando EQ. 49.10 com Eq. 49.9, nós obtemos:

$$
\begin{aligned}
u &= \underbrace{\lfloor\, x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\
&= \underbrace{\lfloor\, \underbrace{(1+2\xi^3-3\xi^2)}_{N_1} \quad \underbrace{x(1-\xi)^2}_{N_2} \quad \underbrace{(3\xi^2-2\xi^3)}_{N_3} \quad \underbrace{(\xi^2-\xi)}_{N_4} \,\rfloor}_{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ v_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}
$$

Onde $\xi = \frac{x}{l}$.

64 Assim, o funções de forma para o elemento de flexão são dados por:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2) \\
N_2 &= x(1-\xi)^2 \\
N_3 &= (3\xi^2 - 2\xi^3) \\
N_4 &= x(\xi^2 - \xi)
\end{aligned}
\tag{49.11}
$$

e são mostrados na Fig 49.12. Mesa 49.3 ilustra as características desses funções de forma

65 Note que nós vamos rederive o mesmo funções de forma abaixo (§49.2.3.1) usando as funções de interpolação hermitana.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

	$\xi = 0$		$\xi = 1$	
Função	N_i	$N_{i,x}$	N_i	$N_{i,x}$
$N_1 = (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2)$	1	0	0	0
$N_2 = x(1 - \xi)^2$	0	1	0	0
$N_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3)$	0	0	1	0
$N_4 = x(\xi^2 - \xi)$	0	0	0	1

Tabela 49.3: Características do elemento viga

49.2.3 Funções de interpolação hermítica

66 Para problemas envolvendo a primeira derivada do função de forma, Isso é com C^1 Continuidade interelementar (ou seja, continuidade da primeira derivada ou inclinação) Como para a flexão, *Funções de interpolação hermítica* ao invés de.. Lagrangians devem ser usados.

67 As funções de interpolação hermítica são funções cúbicas que satisfazem as condições de deslocamento e inclinação (C^0, C^1) continuidades. Eles são extensivamente usados em CAD como curvas de Bezier.

68 Uma função de interpolação hermítica é um tipo de interpolação polinomial usada para estimar o valor de uma função baseada em valores de função e valores derivados nos pontos de interpotência (nós). A interpolação hermítica garante não só que o polinômio interpolado corresponde aos valores de função indicados nos nós, mas também que os primeiros derivados (e potencialmente mais elevados) coincidem com esses nós. Isso resulta em uma aproximação mais suave e precisa, especialmente quando a função que está sendo interpolada é conhecida por ter certos valores derivados.

69 Por exemplo, consideramos um caso simples onde queremos interpolar uma função $f(x)$ em dois pontos x_0 e.. x_1 usando a interpolação hermitana. Temos os valores de função $f(x_0)$, $f(x_1)$ e seus primeiros derivados $f'(x_0)$, $f'(x_1)$.

70 O polinômio de interpolação hermitano $H(x)$ O grau 3 pode ser construído da seguinte forma:

$$H(x) = h_0(x)f(x_0) + h_1(x)f(x_1) + h_2(x)f'(x_0) + h_3(x)f'(x_1)$$

onde a base funciona $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, e $h_3(x)$ são definidos para garantir que as condições de interpolação sejam cumpridas.

71 As funções básicas são construídas para satisfazer as condições de interpolação nos nós. Por dois nós x_0 e.. x_1, as funções de base podem ser definidas como:

$$h_0(x) = (1 - 2(x - x_0)\frac{d}{dx}L_0(x))(L_0(x))^2$$

$$h_1(x) = (1 - 2(x - x_1)\frac{d}{dx}L_1(x))(L_1(x))^2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$h_2(x) = (x - x_0)(L_0(x))^2$$
$$h_3(x) = (x - x_1)(L_1(x))^2$$

Onde $L_0(x)$ e.. $L_1(x)$ são os polinômios lineares de base Lagrange dados por:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

49.2.3.1 Viga funções de forma revisitado

72 Em §49.2.2.4 derivamos o funções de forma de uma viga usando o método desenvolvido em §49.2.1.2 e com referência a Fig. 49.11.

73 Na teoria de Euler-Bernoulli viga, as principais incógnitas são a transversal deslocamento w e a rotação (declive) $\theta = \frac{dw}{dx}$.. Para modelar o comportamento de vigas passando por flexão, o funções de forma deve garantir a continuidade de ambos deslocamento e inclinação através dos limites dos elementos. Hermitian funções de forma são ideais para este propósito.

74 Considere um elemento viga com dois nós, x_0 e.. x_1.. Cada nó tem dois graus de liberdade: o transverso deslocamento w e a rotação (declive) $\theta = \frac{dw}{dx}$.. Os polinômios de interpolação hermitanos são construídos para garantir que tanto o deslocamento como a inclinação sejam contínuos através dos limites dos elementos.

75 O polinômio de interpolação hermitano $H(x)$ para um elemento viga pode ser escrito como um polinômio cúbico em termos das funções de base e dos valores nodais:

$$H(x) = h_0(x)w_0 + h_1(x)\theta_0 + h_2(x)w_1 + h_3(x)\theta_1$$

onde:

- w_0 e.. θ_0 são o deslocamento e inclinação no nó x_0,
- w_1 e.. θ_1 são o deslocamento e inclinação no nó x_1,
- $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, e $h_3(x)$ são os hermitanos funções de forma.

76 Para determinar o funções de forma $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, e $h_3(x)$Precisamos impor as seguintes condições nos nós:

1. $H(x_0) = w_0$
2. $\frac{dH}{dx}(x_0) = \theta_0$
3. $H(x_1) = w_1$
4. $\frac{dH}{dx}(x_1) = \theta_1$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

77 Para construir as funções de base, usamos a coordenada normalizada $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$.. As funções de base são então definidas da seguinte forma:

1. $h_0(\xi)$:. Deslocamento em x_0
2. $h_1(\xi)$:. Declive em x_0
3. $h_2(\xi)$:. Deslocamento em x_1
4. $h_3(\xi)$:. Declive em x_1

$h_0(x)$

$$h_0(x_0) = 1, \quad h_0'(x_0) = 0, \quad h_0(x_1) = 0, \quad h_0'(x_1) = 0$$

Nós construímos $h_0(\xi)$ como:

$$h_0(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$h_1(x)$

$$h_1(x_0) = 0, \quad h_1'(x_0) = 1, \quad h_1(x_1) = 0, \quad h_1'(x_1) = 0$$

Nós construímos $h_1(\xi)$ como:

$$h_1(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$h_2(x)$

$$h_2(x_0) = 0, \quad h_2'(x_0) = 0, \quad h_2(x_1) = 1, \quad h_2'(x_1) = 0$$

Nós construímos $h_2(\xi)$ como:

$$h_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$h_3(x)$

$$h_3(x_0) = 0, \quad h_3'(x_0) = 0, \quad h_3(x_1) = 0, \quad h_3'(x_1) = 1$$

Nós construímos $h_3(\xi)$ como:

$$h_3(\xi) = \xi^2 - \xi^3$$

Combinando estes resultados, o polinômio de interpolação hermitana para um elemento viga é:

$$H(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_0 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(x - x_0)\theta_0 + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_1 + (\xi^2 - \xi^3)(x - x_1)\theta_1$$

Onde $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$. que são idênticos aos anteriores derivados em §49.2.2.4.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

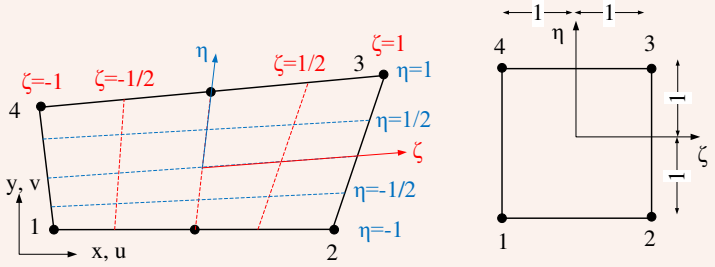


Figura 49.13: Elemento 4 nós isoparamétrico

49.2.3.2 Elementos quadrilaterais

49.2.3.2.1 Quadrilateral Linar (q4) [78] Nós anteriormente derivamos o matriz de rigidez de um retangular elemento (alinhado com o eixo de coordenadas), esta formulação generalizará para uma forma quadrilátero arbitrária.

[79] Fig. 49.13 ilustra o elemento

[80] Para o caso bidimensional

$$u(\xi,\eta) = \sum N_{ij}\overline{u}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_j(\xi)N_i(\eta)\overline{u}_k$$

Onde $k = (i-1)m + j$. Para um elemento bilinear, $n = m = 2$Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \lfloor\, N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \,\rfloor \begin{bmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_3 \\ \overline{u}_2 & \overline{u}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\xi^T \overline{\mathbf{u}} \mathbf{N}_\eta \\ &= N_1(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_2 + N_1(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_4 + N_2(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_3 \\ &= N_1(\xi,\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi,\eta)\overline{u}_2 + N_3(\xi,\eta)\overline{u}_3 + N_4(\xi,\eta)\overline{u}_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i\overline{u}_i \end{aligned}$$

[81] Aplicando a equação de interpolação Lagrangiana, Eq. 49.7 Nós conseguimos

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)} = \frac{(\xi-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)} = \frac{(\xi+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_1(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)} = \frac{(\eta-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ N_2(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)} = \frac{(\eta+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituindo-se em Eq. 49.12

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{aligned} \tag{49.12}$$

Deve-se notar que para este caso simples, o funções de forma poderia ter sido determinado por mera inspeção.

49.2.3.2.2 Quadráticos quadriláteros

82 Para um elemento quadrilateral quadrático, há duas possibilidades Fig. 49.14.

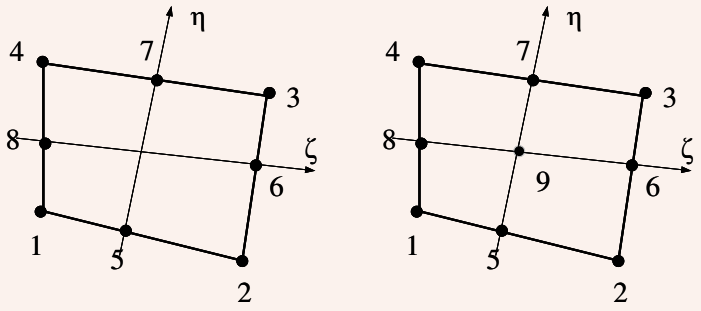


Figura 49.14: Serendipity e quadrilatros quadráticos Lagrangianos

83 O triângulo Pascal, Fig. 49.15, será usado mais tarde para justificar a escolha de termos no campo deslocamento de elementos isoparamétricos.

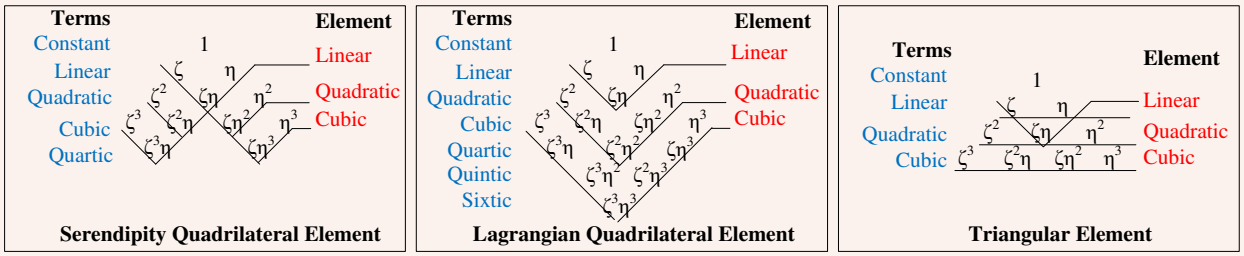


Figura 49.15: Triângulos Pascal para elementos quadrilaterais e triângulos

49.2.3.2.2.1 Elemento de serendipidade (q8)

84 Baseado no triângulo de Pascal, o deslocamento O campo é dado por

$$u = \underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x + a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y + a_9xy^2}_{\boxed{3}}$$

85 Nesta formulação, o x^2y^2 O termo está faltando e os 8 termos no polinômio presumido A expansão corresponde aos 8 nós (4 canto e 4 lado médio).

CÓPIA PARA REVISÃO

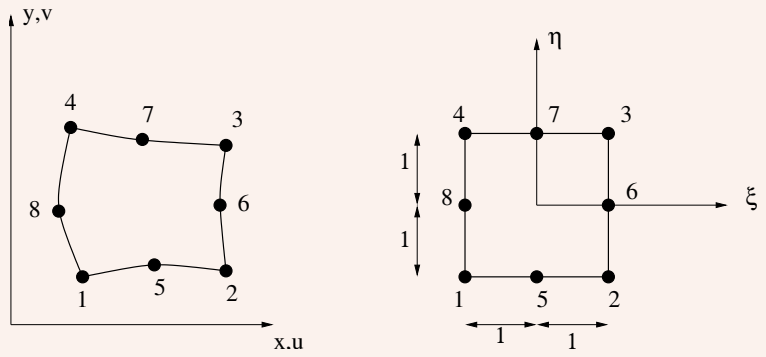


Figura 49.16: Serendipity isoparamétrico quadrática: Elemento global e pai

86 Por analogia com as tabelas 49.1 e.. 49.2, o funções de forma pode ser obtido por mera inspeção (i.e. *Seependiciosamente*),

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta\eta_i\right)\left(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1\right) && i=1,2,3,4 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta\eta_i\right) && i=5,7 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta^2\right) && i=6,8 \end{aligned}$$

e estão tabulados na tabela 49.4.

Tabela 49.4: Funções de forma, e derivados naturais para elemento q8

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

87 O funções de forma para o canto e nós midisde são mostrado em Fig. 49.17.

49.2.3.2.2.2 Elemento Lagrangiano (Q9)

CÓPIA PARA REVISÃO

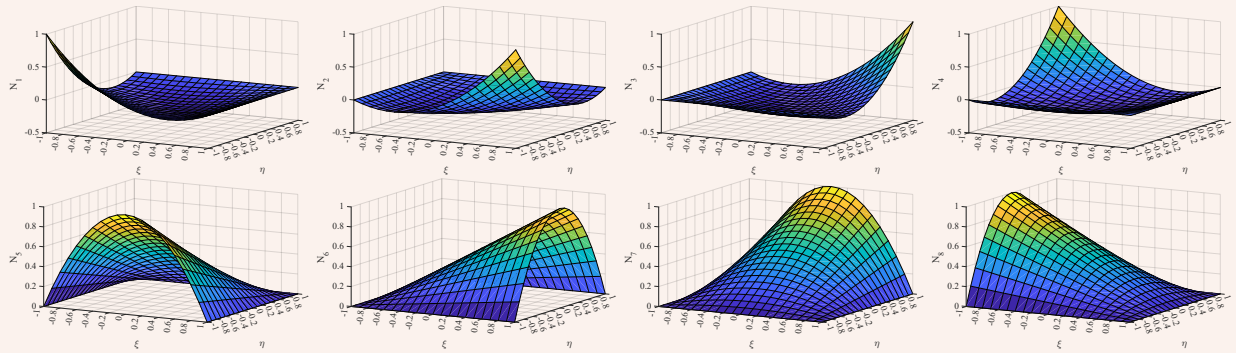


Figura 49.17: Funções de forma para 8 nós quadriláteros elemento

88 Neste elemento, o campo deslocamento é dado por

$$u = \underbrace{\underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x + a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y + a_9xy^2}_{\boxed{3}}}_{\text{Serendipity}} + \underbrace{a_{12}x^2y^2}_{\boxed{4}}$$

89 Todos os termos quadráticos estão presentes, portanto há 9 termos no Expansão polinomial, e o nono nó corresponderá a um nó interno.

90 O funções de forma neste caso pode ser obtido diretamente das funções de interpolação Lagrangiana, produzindo

91 O elemento Q9 tem nove nós e usa funções de forma que são quadráticos em ambos os ξ e.. η - Direções. Os funções de forma são derivados usando interpolação Lagrangiana.

92 O elemento Q9 tem os seguintes nós e coordenadas no sistema de coordenadas naturais (ξ, η) mostrados na tabela 49.5.

Tabela 49.5: Coordenadas nodais (naturais) do elemento q9

Nó	1	2	3	4	5	5	7	8	9
ξ	-1	0	1	1	1	0	-1	-1	0
τ	-1	-1	-1	0	1	1	1	0	0

93 O Lagrange funções de forma para um elemento quadrático em 1D são dados por:

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

94 Para um elemento quadrático com nós em $\xi = -1$, $\xi = 0$, e $\xi = 1$, os funções de forma são:

Função de forma $N_0(\xi)$ para $\xi = -1$

$$N_0(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

Função de forma $N_1(\xi)$ para $\xi = 0$

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{-1} = 1 - \xi^2$$

Função de forma $N_2(\xi)$ para $\xi = 1$

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

95 O 2D Lagrange funções de forma para o elemento Q9 são produtos do 1D LaGrange funções de forma no ξ e.. η Direção:

$$N_{ij}(\xi, \eta) = N_i(\xi) \cdot N_j(\eta)$$

96 Nós agora construímos o funções de forma

1. Em.. $(\xi, \eta) = (-1, -1)$:

$$N_{11}(\xi, \eta) = N_0(\xi)N_0(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi - 1)}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)}{4}$$

2. Em.. $(\xi, \eta) = (0, -1)$:

$$N_{21}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_0(\eta) = (1 - \xi^2)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)}{2}$$

3. Em.. $(\xi, \eta) = (1, -1)$:

$$N_{31}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_0(\eta) = \left(\frac{(\xi + 1)\xi}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{(\xi + 1)\xi\eta(\eta - 1)}{4}$$

4. Em.. $(\xi, \eta) = (1, 0)$:

$$N_{32}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_1(\eta) = \left(\frac{(\xi + 1)\xi}{2}\right)(1 - \eta^2) = \frac{(\xi + 1)\xi(1 - \eta^2)}{2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5. Em.. $(\xi,\eta) = (1,1)$:

$$N_{33}(\xi,\eta) = N_2(\xi)N_2(\eta) = \left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right) = \frac{(\xi+1)\xi(\eta+1)\eta}{4}$$

6. Em.. $(\xi,\eta) = (0,1)$:

$$N_{23}(\xi,\eta) = N_1(\xi)N_2(\eta) = (1-\xi^2)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right) = \frac{(1-\xi^2)(\eta+1)\eta}{2}$$

7. Em.. $(\xi,\eta) = (-1,1)$:

$$N_{13}(\xi,\eta) = N_0(\xi)N_2(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right) = \frac{\xi(\xi-1)(\eta+1)\eta}{4}$$

8. Em.. $(\xi,\eta) = (-1,0)$:

$$N_{12}(\xi,\eta) = N_0(\xi)N_1(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)(1-\eta^2) = \frac{\xi(\xi-1)(1-\eta^2)}{2}$$

9. Em.. $(\xi,\eta) = (0,0)$:

$$N_{22}(\xi,\eta) = N_1(\xi)N_1(\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

97 O último função de forma é muitas vezes chamado *função de bolha*

98 Esses função de forma diferem ligeiramente daqueles do elemento serendipidade.

99 Os funções de forma são mostrados na figura. 49.18.

100 Os elementos Q9 são muito melhores que os Q8 se as bordas não forem paralelas ou ligeiramente curvado.

49.2.3.3 Elemento variável (hierárquico)

101 Baseado no acima, podemos generalizar a formulação para uma de Elemento quadrilátero com número variável de nós. Este elemento pode ter uma ordem de variação diferente ao longo de diferentes bordas, e é bastante útil para facilitar a classificação de uma malha elemento finito.

102 Na sua formulação mais simples, tem quatro nós, e tem uma variação linear ao longo de todos os lados, e no caso mais geral é um elemento quadrático completo. O funções de forma pode não ser obtido na mesa 49.6. Note que estes funções de forma são para o elemento hierárquico em que o Nodos de canto são numerados primeiro, e no meio do lado depois, Fig. 49.19.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

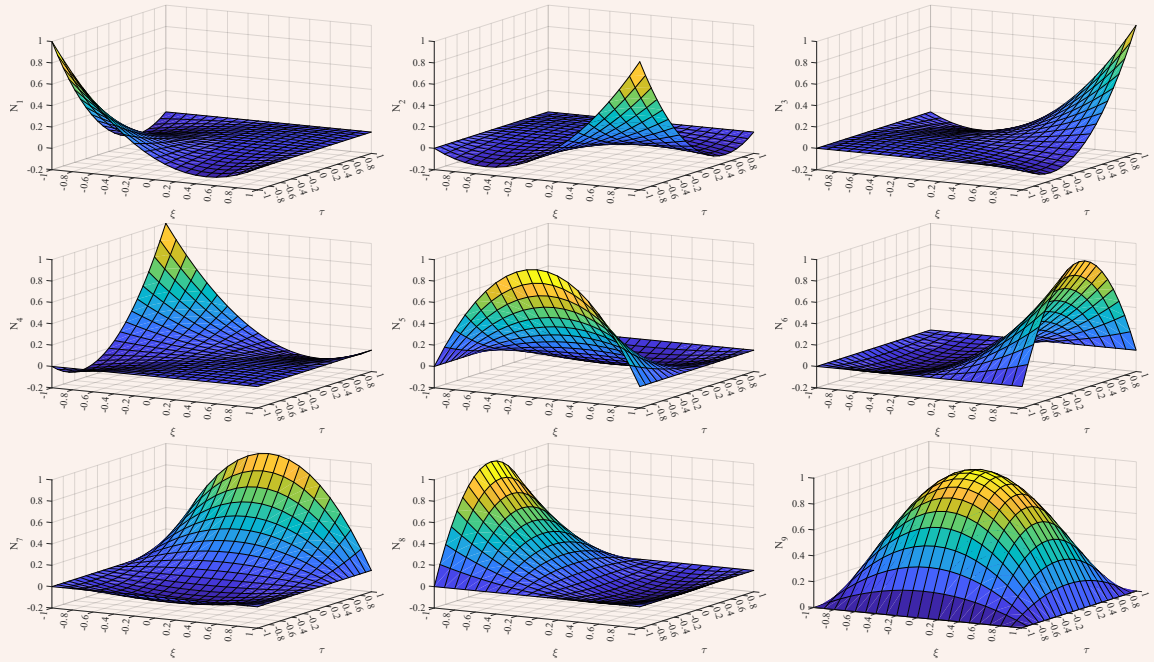


Figura 49.18: Funções de forma para 9 nós quadriláteros elemento

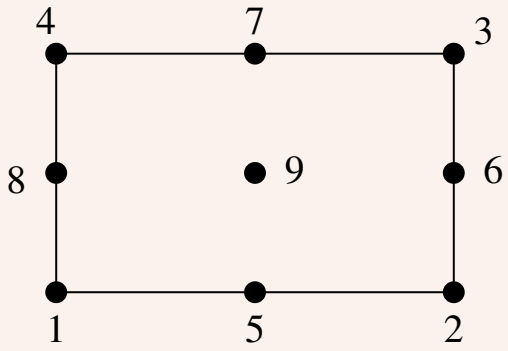


Figura 49.19: Numeração nodal para elementos isoparamétricos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 49.6: Funções de forma para elementos de nó variável

		Só se o nó i Está presente				
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
N_1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$\frac{1}{4}N_9$
N_3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$\frac{1}{4}N_9$
N_4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

49.2.3.4 Elemento triangular (t6)

103 Quadrático deslocamento funções de forma pode ser escrito em natural coordenadas como:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i \tag{49.13}$$

onde o funções de forma foram obtidos em Eq. 49.2.2.2

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \tag{49.14}$$

104 Deve-se notar que alternativamente, poderíamos ter obtido essa forma funções assumindo que

$$U(L1, L2) = a1 + a2L1 + a3L2 + a4L1L2 + a6L2^2 \tag{49.15}$$

e então determinar os coeficientes através de satisfação do apropriado condições de contorno.

105 O funções de forma e seus derivados em relação ao natural coordenadas L_1 e.. L_2 são dadas na tabela 49.7 (em termos de L_1, L_2, e L_3).

106 Funções de forma para o triângulo quadrático de seis nós são mostrados na figura. 49.20.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 49.7: Funções de forma e derivados para o elemento T6

i	N_i	N_{i,L_1}	N_{i,L_2}	N_{i,L_3}
1	$(2L_1-1)L_1$	$4L_1-1$	0	0
2	$(2L_2-1)L_2$	0	$4L_2-1$	0
3	$(2L_3-1)L_3$	0	0	$4L_3-1$
4	$4L_1L_2$	$4L_2$	$4L_1$	0
5	$4L_2L_3$	0	$4L_3$	$4L_2$
6	$4L_1L_3$	$4L_3$	0	$4L_1$

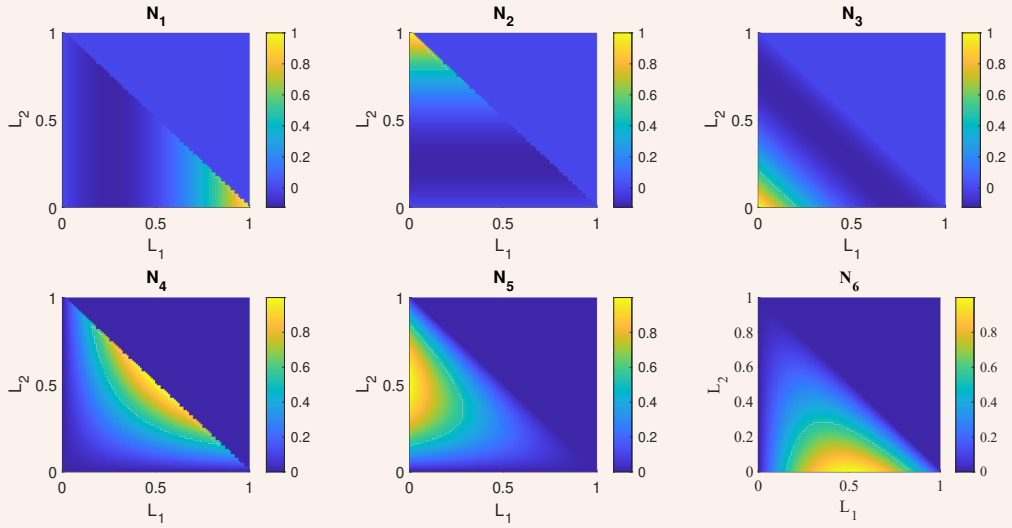
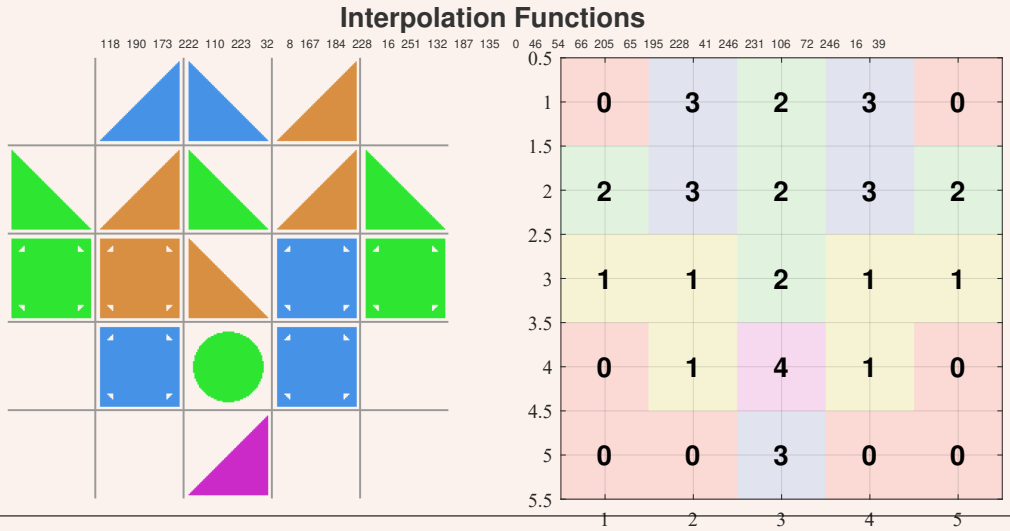


Figura 49.20: Funções de forma para 6 nós elemento triangular quadrático



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Idêntico específico de capítulo, chapter H
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 50

Formulação de elementos lineares

Abstract

Nos capítulos anteriores, introduzimos métodos variacionais, particularmente o princípio de trabalho virtual e discutimos funções de interpolação para o campo deslocamento em termos dos valores nodais. Agora, é hora de aplicar esses conceitos para formular o método dos elementos finitos. Este capítulo fornece uma formulação geral para 1D (viga/treliça) e elementos contínuos. Note que esta não é a única abordagem, em um capítulo seguinte vamos examinar o método Galerkin (§52) que, para todos os fins práticos, resultará em uma formulação idêntica na mecânica.

50.1 Introdução 1774
50.2 Elemento finito 1775
50.2.1 Introdução 1775
50.2.2 Deformação deslocamento relações 1775
50.2.3 Virtual deslocamento e deformações 1776
50.2.4 Formulação do elemento matriz de rigidez 1777
50.2.5 Tensão recuperação 1778
50.3 Aplicação 1779
50.3.1 Treliça elemento 1779
50.3.2 Elemento de flexão 1779
50.4 Requisitos gerais de elementos . . . 1780
50.5 Erro de discretização e taxa de convergência 1782
50.6 Caráter inferior das soluções mínimas baseadas em energia 1783
50.7 Equilíbrio e compatibilidade na solução 1784

50.1 Introdução

1 Até agora consideramos sistemas contínuos, neste capítulo procuramos aplicar as relações anteriormente derivadas para Discretizado Sistemas. Soluções primárias apenas na Só nós (ao contrário de uma solução contínua dentro Ω). A aplicação do Princípio do Virtual requer um Suposta Campo. Este campo pode ser aproximado por funções de interpolação escrito em termos de:

CÓPIA PARA REVISÃO

1. Coeficientes polinomiais desconhecidos, mais apropriados para sistemas contínuos. Por exemplo: e o Rayleigh Ritz método

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$

   Uma grande desvantagem desta abordagem, é que os coeficientes não têm nenhum físico Significando.
2. Deformações nodais desconhecidas, mais apropriadas para sistemas discretos e Potenciais formulações baseadas em energia

$$v(\overline{\mathbf{u}}_i) = u = N_1\overline{\mathbf{u}}_1 + N_2\overline{\mathbf{u}}_2 + \dots + N_n\overline{\mathbf{u}}_n$$

   Onde $\overline{\mathbf{u}}_i$ É o conhecido deslocamento em Dof i.

50.2 Elemento finito

50.2.1 Introdução

2 No capítulo 41, nós derivamos o matrizes de rigidez de um elemento dimensional da haste, a abordagem utilizada não poderia ser generalizada ao general elemento finito. Alternativamente, a derivação deste capítulo será aplicáveis a ambos os elementos de uma haste dimensional (ou quase contínuo) ou contínuo (2D ou 3D).

3 É importante notar que enquanto o anteriormente apresentado método para derivar o matriz de rigidez produziu uma solução exata, não pode ser generalizado para o contínuo (2 elementos D/3D). Por outro lado, o método aqui apresentado é um aproximado método, que resulta em um exato matriz de rigidez para elementos unidimensionais de flexão. Apesar de sua aproximação, este chamado método dos elementos finitos produzirá excelentes resultados se forem usados elementos suficientes.

50.2.2 Deformação deslocamento relações

4 O deslocamento u Em qualquer ponto dentro de um elemento pode ser escrito em termos do funções de forma $\mathbf{N}$ e o nodal deslocamentos $\overline{\mathbf{u}}$ Como

$$\mathbf{u}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

5 O deformação é então definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{u}} \tag{50.1}$$

Onde $\mathbf{B}$ é a matriz que relaciona nodal deslocamentos ao campo deformação e está claramente expressa em termos de derivadas de $\mathbf{N}$.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

50.2.2.1 Membros do Axial

6 Usando o funções de forma derivado em Eq 49.3, então Eq. 50.1 Dará

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \underbrace{\lfloor \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1} \quad \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \rfloor}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\
\varepsilon(x) &= \varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\left\lfloor \underbrace{-\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_1}{\partial x}} \quad \underbrace{\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_2}{\partial x}} \right\rfloor}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}
$$

50.2.2.2 Membros de flexão

7 Usando o funções de forma para elementos de flexão anteriormente derivados em Eq. 49.11

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{y}{\rho} = y\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = y\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}x^2}\overline{\mathbf{v}} \\
&= \underbrace{y \left\lfloor \underbrace{\frac{6}{L^2}(2\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-2)}_{\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}} \quad \underbrace{\frac{6}{L^2}(-2\xi+1)}_{\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}} \right\rfloor}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}
\tag{50.2}
$$

50.2.3 Virtual deslocamento e deformações

8 Em antecipação da aplicação do princípio de virtual deslocamento, nós definimos os vetores de virtual deslocamentos e deformação em termos de nodal deslocamentos e funções de forma:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x)\delta\overline{\mathbf{u}} \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \mathbf{B}(x)\delta\overline{\mathbf{u}}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

50.2.4 Formulação do elemento matriz de rigidez

9 Vamos aplicar agora o Princípio do virtual deslocamento e reafirmar algumas relações conhecidas (cuidados com matrizes):

$$\delta U = \delta W \tag{50.3}$$

$$\delta U = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega \tag{50.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{50.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \tag{50.6}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\overline{\mathbf{u}}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \tag{50.7}$$

Combinando Eqns. 50.3, 50.4, 50.5, 50.7, e 50.6, o Energia virtual interna deformação é dado por:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}\underbrace{\mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}}_{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}\underbrace{\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0}_{\boldsymbol{\sigma}^0}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{50.8}$$

10 O virtual Trabalho externo Por sua vez é dado por:

$$\delta W = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}}_{\text{Virt. Nodal Displ.}}\quad\underbrace{\overline{\mathbf{F}}}_{\text{Nodal Force}} + \int_l \delta\mathbf{u}q(x)\mathrm{d}x$$

11 Combinando esta equação com $\{\delta\mathbf{u}\} = \mathbf{N}\{\delta\overline{\mathbf{u}}\}$ Rendimentos:

$$\delta W = \delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}}\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\,\mathrm{d} \tag{50.9}$$

12 Equacionando a energia interna deformação Eqn. 50.8 para o trabalho externo Eqn. 50.9, nós obtemos:

$$\underbrace{\underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega}_{\overline{\mathbf{F}}^0}}_{\delta U} = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\,\mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{F}}^e}}_{\delta W}}_{} \tag{50.10}$$

ou

$$\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^o = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e \tag{50.11}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

13 Cancelando o $\delta\overline{\mathbf{u}}$ termo, esta é a mesma equação de equilíbrio que foi escrita anteriormente. Relaciona o nodal desconhecido $\overline{\mathbf{u}}$, a estrutura matriz de rigidez $\mathbf{k}$, o vetor de força nodal externo $\overline{\mathbf{F}}$, a força de elementos distribuídos $\overline{\mathbf{F}}^e$, e o vetor inicial deslocamento.

14 A partir desta relação, definimos:

Definition 50.1: Matriz de rigidez e Forças Elementares

O elemento matriz de rigidez:

$$\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega \tag{50.12}$$

Elemento vetor de força inicial:

$$\overline{\mathbf{F}}^0 = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega \tag{50.13}$$

Elemento vetor de carga equivalente:

$$\overline{\mathbf{F}}^e = \int_0^L \mathbf{N}\, q(x)\,\mathrm{d}x \tag{50.14}$$

15 O general equação de equilíbrio pode ser escrito como:

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^0}_{F_{\text{int}}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e}_{F_{\text{ext}}} = 0$$

Este é o Equação de Euler discretizada (equação de equilíbrio) associado com o variacional definido pelo princípio de trabalho virtual.

50.2.5 Tensão recuperação

16 Considerando que da seção anterior, nós derivamos uma relação geral em que o nodal deslocamentos são as principais desconhecidas, a seguir procuramos determinar o interno (generalizado) tensões que são mais frequentemente necessários para o design. Lembrando que temos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Com o vetor de nodal deslocamento $\overline{\mathbf{u}}$ Sabe-se, que essas duas equações se renderiam:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Observamos que as variáveis secundárias (deformação e tensões) são derivadas das variáveis primárias (deslocamento), e como tal nem sempre podem ser determinadas com a mesma precisão.

50.3 Aplicação

50.3.1 Treliça elemento

17 O funções de forma do elemento treliça derivado em Eq. 49.3

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

18 A relação correspondente deformação deslocamento **B** é dado por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{\mathrm{d}x} & \frac{dN_2}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Para o elemento treliça, a matriz constitutiva **D** Reduz para o escalar E; Assim, substituindo-se por Eq. 50.12, com $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A\mathrm{d}x$: $\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega$ Mas.. $\mathrm{d}\Omega = A\mathrm{d}x$ e para elementos com área transversal constante nós obtemos:

$$\mathbf{k} = A\int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \lfloor\ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\ \rfloor \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

50.3.2 Elemento de flexão

19 Para um elemento viga, o funções de forma foram derivados em Eq. 49.11 e o **B** Matriz em Eq. 50.2, substituindo em Eq. 50.12:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, y^2\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}x$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Notando isso $\int_A y^2 \, dA = I_z$ Eq. 50.12 reduz-se a

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} I_z \, dx$$

Para este caso simples, temos: $\mathbf{D} = E$, assim:

$$\mathbf{k} = E I_z \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, dx$$

20 Notando a mudança da variável integração de dx para $d\xi$Nós obtemos

$$\mathbf{k} = E I_z \int_0^1 \begin{Bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi - 1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi - 2) \\ \frac{6}{L^2}(-2\xi + 1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi - 1) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi - 1) & -\frac{2}{L}(3\xi - 2) & \frac{6}{L^2}(-2\xi + 1) & -\frac{2}{L}(3\xi - 1) \end{bmatrix} \underbrace{L d\xi}_{dx}$$

ou

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overline{v}_1 & \overline{\theta}_1 & \overline{v}_2 & \overline{\theta}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

que é realmente idêntico à matriz anteriormente derivada em Eq. 41.1

21 Na verdade, passamos por quatro capítulos (começando com o capítulo) 47 para este aqui 50) para finalmente estar em posição de derivar esta matriz usando uma abordagem generalizada que pode ser aplicada a qualquer tipo de elemento finito. Esta abordagem será explorada no próximo capítulo para derivar o matriz de rigidez de elementos isoparamétricos.

50.4 Requisitos gerais de elementos

22 Um campo de aproximadamente 10000 A formulação de Rayleigh-Ritz deve satisfazer duas coisas básicas *requisitos*

Completude: A discretização FE deve *Pelo menos* Acomodar constante deslocamento e constante deformação (ou gradiente de temperatura e temperatura). Isso está feito incluindo em problemas bidimensionais o seguinte

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + \text{ possibly additional terms}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Compatibilidade ou Conformidade: A aproximação do campo sobre o elemento Os limites devem ser contínuos^0 ou C^1 Continuidade). A maioria está se conformando, mas alguns Não são.

23 Por exemplo, com respeito à Fig. 50.1, elemento A deve ser capaz de sofrer movimento rígido do corpo sem interno deformações/tensões, e No nó B devemos ter continuidade de deslocamento (mas não inclinação para este elemento).

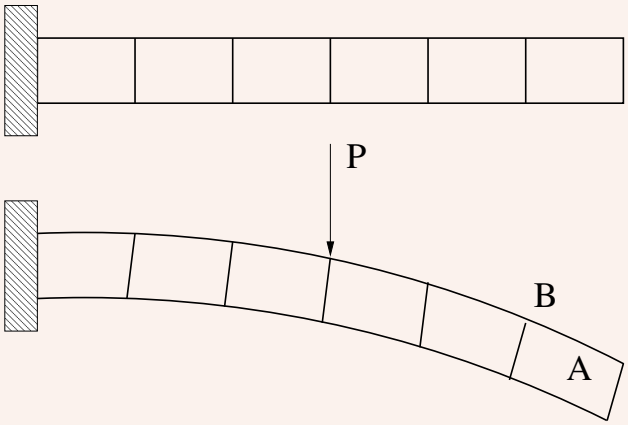


Figura 50.1: Completude e compatibilidade

24 Se esses dois requisitos forem cumpridos, então.. *convergência* Está certo. No método FE solução aproximada são obtidos, e quanto mais elementos nós Quanto mais preciso for a solução aproximada. No limite, para elementos infinitamente pequenos, nós exigimos que a solução seja também infinitamente perto do exato. Assim, a convergência é assegurada se completa e Os requisitos de compatibilidade estão satisfeitos.

25 *Teorema da equivalência de Lax*:

Definition 50.2: Critério de convergência

Critério de Convergência=completude+ Requisitos de compatibilidade

26 Dois requisitos essenciais:

Teste de patch: Completude pode ser avaliada através do *Teste de patch* Que será Discutimos mais tarde.

Zero Deformação Energia: Para problemas estruturais, deve haver zero deformação de energia quando o elemento é submetido a um movimento rígido do corpo. Lembre-se que no matriz de rigidez formulação, a matriz é singular porque incorpora não só a força deslocamento relações, mas as equações de equilíbrio também. Para cada uma dessas equações, corresponde a modo rígido do corpo que pode ser detectado por uma análise de autovalor (mais sobre isso mais tarde).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

50.5 Erro de discretização e taxa de convergência

27 A aproximação produzirá uma solução exata no limite como o tamanho h de O elemento se aproxima de zero.

28 Em alguns casos, a solução exata é obtida com um número finito de elementos (ou mesmo com apenas um) se a expansão polinomial usado nesse elemento pode caber exatamente a solução correta. (por exemplo. Treliça, viga elementos, avião tensão elemento usado em uma placa sob puro Carga axial).

29 A solução exata sempre pode ser expandida nas proximidades de qualquer nó i como um polinômio

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots$$

Se dentro de um elemento de tamanho h um polinômio de grau p é usado, então a expansão da série Taylor até esse grau pode ser acomodado e o erro é da ordem $O(h^{p+1})$.

30 Assim, para um elemento linear, o *convergência* A taxa é de ordem $O(h^2)$, ou seja, o erro em deslocamento é reduzido para $1/4$ do original Erro ao reduzir para metade a malha.

31 Por um argumento semelhante, pode-se mostrar que o deformações (ou tensões) Que são dadas pela mOs derivados do deslocamento devem convergir com um erro de $O(h^{p+1-m})$, e a energia deformação (que é dada pela Quadrado do erro será $O(h^{2(p+1-m)})$

32 Pelos argumentos acima, o conhecimento da ordem de convergência pode ajudar em extrapolar as soluções para a "correta". Assim, por exemplo, Se o deslocamento convergir em $O(h^2)$, e temos duas soluções aproximadas u_1 e.. u_2 obtidos com malhas de tamanhos h e.. $h/2$Então nós.. Pode escrever

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

Onde u é o valor extrapolado.

33 Convergência para a solução exata pode ser acelerada, Fig. 50.2.

- **h** reduzindo o tamanho dos elementos (ou refinamento de malha).
- **p** Aumentando a ordem do polinômio (mesmo número de elementos, mas maior número de nós/dof).
- **r** relocando os nós da malha elemento finito sem mudar a topologia da malha.

Uma terceira forma de aceleração é a chamada **r** refinamento em que O mesmo número de nós/elementos é retido mas a malha é deslocada em torno para aumentar sua densidade em zonas de elevado gradiente tensão.

34 Os procedimentos de convergência acima podem ser acelerados dentro do contexto de um programa que pode acomodar *Remessing adaptativo* Técnicas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

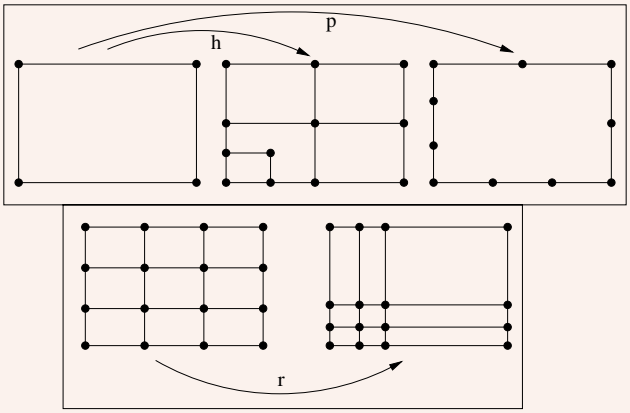


Figura 50.2: h, p e.. r convergência

35 Finalmente, erros adicionais podem vir de *round-off* dentro do Computador.

50.6 Caráter inferior das soluções mínimas baseadas em energia

36 Uma solução numérica que é derivada do princípio do total mínimo A energia potencial é um *Encaixe mais baixo* solução, porque a energia deformação é menor que o exato (i.e. obtido de um número infinito de Elementos).

37 Isso pode ser facilmente mostrado se considerarmos o deslocamento u_i Causado por uma carga P_i que é aumentado de zero para seu valor estipulado. O trabalho feito é $\frac{P_i u_i}{2}$ e deve ser igual ao interno deformação energia U.. Alternativamente, o potencial da carga aplicada é $P_i u_i$E o potencial exato da energia é

$$\Pi_{\text{exact}} = \frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2} - P_i u_i^{\text{exact}} = -\frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2}$$

Da mesma forma, o valor aproximado da energia potencial é

$$\Pi_{\text{approx}} = -\frac{P_i u_i^{\text{approx}}}{2}$$

Sabemos que a aproximação de Π É *algebricamente* Mais alto que o O valor exato (já que o valor exato é mínimo), portanto,

$$\underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{exact}}}}{2}}_{\Pi_{\text{exact}}} < \underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{approx}}}}{2}}_{\Pi_{\text{approx}}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou

$$u_i^{\text{approx}} < u_i^{\text{exact}} \tag{50.15}$$

Ou alternativamente, a solução é *Muito duro*.

38 Note a semelhança com o método Rayleigh-Ritz, a falta de suficiente termos em nossa aproximação polinomial também resultaram em uma solução rígida.

50.7 Equilíbrio e compatibilidade na solução

39 Em um *solução exata* sobre cada elemento diferencial equilíbrio e A compatibilidade prevalece.

40 Em uma discretização elemento finito, este não é necessariamente o caso:

Equilíbrio das Forças Nodais: Esses estão automaticamente satisfeitos por definição ($\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} = 0$) nos nós.

Compatibilidade em nós: Elementos conectados um ao outro têm o mesmo deslocamentos (ao longo correspondente dof) no nó de conexão.

Continuidade do interelemento de Tensão: geralmente não está satisfeito, isso é O equilíbrio entre os elementos não necessariamente prevalece. Por exemplo, considere Fig. 50.3 Se o nó 4 é o único deslocado (todos os outros permanecem fixos), então

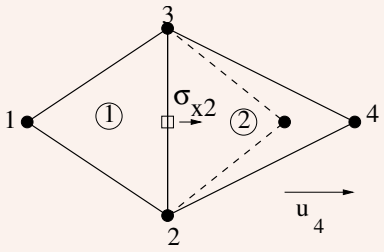


Figura 50.3: Continuidade do interelemento de tensão

Haverá uma descontinuidade de σ_{xx} através do limite de elementos 2-3.

Compatibilidade de interelemento de Deslocamentos: A maioria dos elementos tem essa exigência Satisfeito. Se um elemento não faz, então é rotulado como *incompatível* ou *não-conformidade*, Fig. 50.4

Equilíbrio Dentro dos Elementos: Nem sempre está satisfeito. Em geral, satisfação de equilíbrio em cada ponto exige relações entre os dof que não O resultado é necessariamente de $\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} = 0$

Compatibilidade dentro de um elemento: Está satisfeito, pois só precisamos disso O elemento deslocamento é contínuo e de valor único.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

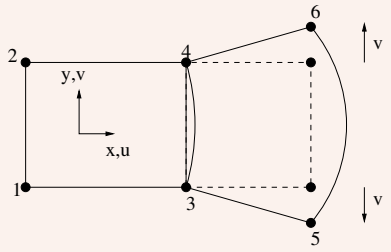
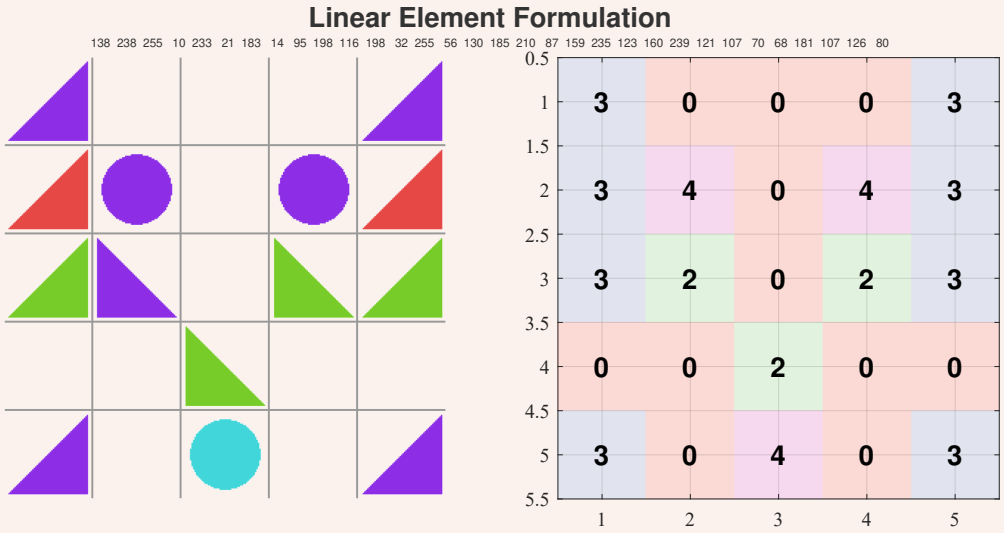


Figura 50.4: Continuidade do interelemento de deformação



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 51

Elementos

Abstract

Embora este livro se concentre principalmente em elementos 1D, a teoria subjacente na seção elemento finito também se aplica a elementos contínuos. Um elemento continuum popular é baseado na formulação isoparamétrico. Isoparamétrico elementos usam o mesmo funções de forma tanto para deslocamentos e geometria. Isso permite bordas curvas em um elemento, proporcionando mais flexibilidade em malhar uma estrutura. Os funções de forma foram derivados no capítulo anterior. Neste capítulo, vamos derivar rigorosamente o matriz de rigidez deste tipo de elemento, especificamente para o elemento Q4. Um procedimento similar pode ser seguido para outros elementos. Embora a formulação possa parecer inicialmente tediosa e confusa, leva a uma simples implementação do programa de computador e é aplicável tanto à análise bidimensional quanto tridimensional tensão bem como problemas não estruturais. O matriz de rigidez do elemento será avaliado através da integração numérica. Portanto, a segunda parte deste capítulo abordará detalhadamente a integração numérica.

51.1 Introdução 1787
51.2 Formulação de elementos 1789
51.2.1 Elemento de barras 1789
51.2.2 Quadrilateral (q4); Formulação detalhada 1790
51.2.3 Elementos triangulares . . . 1794
51.2.4 Ex 51.1: Operadores Jacobianos 1797
51.3 Integração numérica 1798
51.3.1 Newton-Cotes 1799
51.3.2 Quadratura Gauss-legendre 1801
51.3.3 Regiões retangulares e prismas 1804
51.3.4 Regiões triangulares 1804
51.4 Tensão recuperação; Nodal tensões . 1804
51.5 Cargas equivalentes nodais 1807
51.5.1 Carga de gravidade 1807
51.5.2 Carga de tração 1808
51.5.3 Inicial deformações/tensões; Carga térmica 1810
51.5.4 Ordem de integração 1811
51.6 Parasítico cisalhamento / elementos incompatíveis 1813
51.6.1 Q4, o problema 1813
51.6.2 Q6, a solução 1814
51.6.3 Qm6, mais melhorias 1815
51.7 -Dófice rotacional. 1816

CÓPIA PARA REVISÃO

51.1 Introdução

1 Nós já examinamos antes simples elementos finitos, nesta palestra Vamos distorcer esses elementos mais simples em outros de forma mais arbitrária.

2 Correspondentemente, as coordenadas naturais serão distorcidas em novas conjuntos curvilíneos quando plotados em um cartesiano x, y, z Espaço, Fig. 51.1.

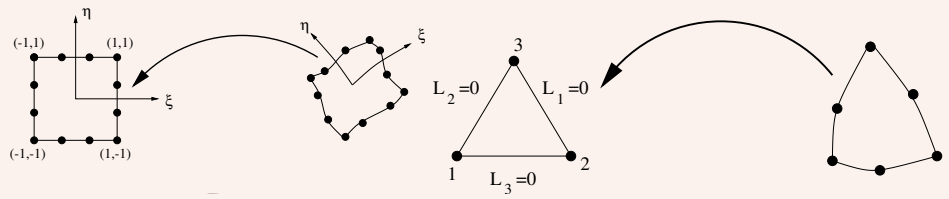


Figura 51.1: Mapa bidimensional de alguns elementos

3 Na formulação isoparamétrico, deslocamentos são expressos em termos de coordenadas naturais, no entanto devem ser diferenciadas em relação a Coordenadas cartesianas x, y, z.. Isso é feito através de uma transformação Matriz **J**, e integração não pode mais ser realizada analiticamente mas deve ser feito numericamente.

4 As coordenadas naturais variam de -1 a +1, Fig. 51.2

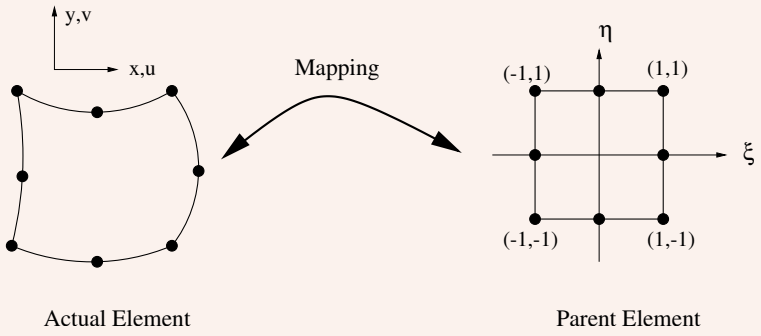


Figura 51.2: Elementos reais e pais

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5 Nodal deslocamentos em qualquer ponto dentro do elemento pode ser escrito em termos de nodal conhecido deslocamentos e o funções de forma

$$\begin{aligned} u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + \cdots &&= \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\\ \vdots\end{array}\right\} &&= \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e \\ v &= N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + \cdots &&= \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\\ \vdots\end{array}\right\} &&= \mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}_e \\ w &= N_1\overline{w}_1 + N_2\overline{w}_2 + \cdots &&= \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{w}_1\\ \overline{w}_2\\ \vdots\end{array}\right\} &&= \mathbf{N}\overline{\mathbf{w}}_e \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{u} = \lfloor\ u \quad v \quad w\ \rfloor^T = [\mathbf{N}]\overline{\mathbf{u}}_e$$

6 Quando os elementos também são distorcidos, as coordenadas de qualquer ponto Pode **Também** Seja expresso em termos de coordenadas nodais

$$\begin{aligned} x &= \tilde{N}_1\overline{x}_1 + \tilde{N}_2\overline{x}_2 + \cdots &&= \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\\ \vdots\end{array}\right\} &&= \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{x}} \\ y &= \tilde{N}_1\overline{y}_1 + \tilde{N}_2\overline{y}_2 + \cdots &&= \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{y}_1\\ \overline{y}_2\\ \vdots\end{array}\right\} &&= \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{y}} \\ z &= \tilde{N}_1\overline{z}_1 + \tilde{N}_2\overline{z}_2 + \cdots &&= \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{z}_1\\ \overline{z}_2\\ \vdots\end{array}\right\} &&= \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

ou

$$c = \lfloor\ x \quad y \quad z\ \rfloor^T = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{c}} \tag{51.1}$$

7 Matrizes $\mathbf{N}$ e.. $\tilde{\mathbf{N}}$ são funções de ξ, η, e.. ζ.. Assim, três casos possíveis surgem, Fig. 51.3

Isoparamtérico: $\mathbf{N}$ e.. $\tilde{\mathbf{N}}$ são idênticos

Subparamtérico: $\mathbf{N}$ é de maior grau do que $[\tilde{\mathbf{N}}]$

Superparamtérico: $\mathbf{N}$ é de menor grau do que $[\tilde{\mathbf{N}}]$

8 Sub e Super elementos paramétricos são muito raramente usados.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

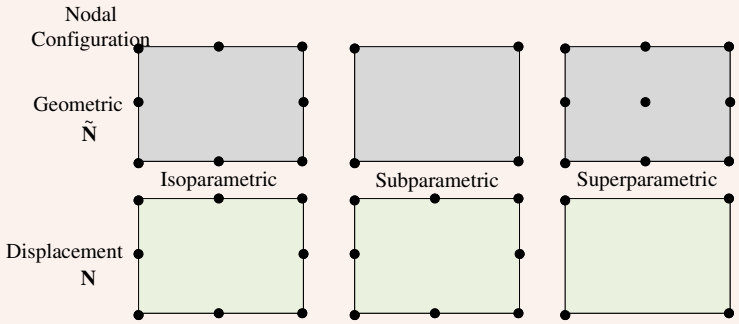


Figura 51.3: Iso, super e sub-paramétrico elementos

51.2 Formulação de elementos

51.2.1 Elemento de barras

9 Funções de forma foram derivados em §49.2.2.3.

10 A relação deformação deslocamento é dada por $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_e$E o operador diferencial $\mathbf{L}$ é igual a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.. Para este caso dimensional, isso reduz-se a

$$\varepsilon_x = \frac{du}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{L} \lfloor \mathbf{N} \rfloor}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{array} \right\} \tag{51.2}$$

11 Invocamos a regra da cadeia já que o funções de forma são expressos em termos de coordenadas naturais:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} \tag{51.3}$$

O primeiro termo pode estar prontamente disponível a partir do funções de forma, Eq. 49.8Mas o segundo não é.

12 Considerando que.. $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$ Não está disponível, podemos determinar seu inverso $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}$, de Eq.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

49.7, que denotaremos por J ou **Jacobian**. A operadora Jacobiana J é um fator de escala que relaciona Cartesiano com Coordenadas naturais $\mathrm{d}x = J\mathrm{d}\xi$.

$$J(\xi) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\underbrace{\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi-1) & \frac{1}{2}(2\xi+1) & -2\xi \end{array} \rfloor}_{\frac{\mathrm{d}_N}{\mathrm{d}_\xi}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\}}_{\frac{\mathrm{d}_x}{\mathrm{d}_\xi}}$$

13 Podemos reescrever o Eq. 51.3 Como

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}}_{J^{-1}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}$$

e o **B** A matriz é assim obtida substituindo-se em Eq. 51.2

$$\lfloor \mathbf{B}(\xi) \rfloor = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \frac{1}{J}\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi-1) & \frac{1}{2}(2\xi+1) & -2\xi \end{array} \rfloor$$

14 A área diferencial é

$$d\Omega = A\mathrm{d}x = AJd\xi$$

15 Substituindo, o elemento matriz de rigidez é finalmente obtido De Eq. 50.12

$$\mathbf{K}_e(\xi) = \int_0^L \mathbf{B}^T(\xi)AE\mathbf{B}(\xi)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\xi)AE\mathbf{B}(\xi)J(\xi)d\xi$$

16 Observamos isso **B**, em geral, contém ξ Em ambos os termos, numerador e denominador, e portanto a expressão não pode ser Analiticamente invertido. Além disso, os limites da integração são agora de -1 a +1, e veremos mais tarde como numericamente integre-o.

51.2.2 Quadrilateral (q4); Formulação detalhada

17 Coordenadas e deslocamentos são dadas por

$$\begin{array}{rclrcl} x &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{x}_i; & y &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{y}_i \\ u &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{u}_i; & v &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{v}_i \end{array} \tag{51.4}$$

onde os funções de forma foram derivados em Eq. 49.12.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

18 A relação deformação deslocamento é dada por

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} \tag{51.5}$$

No entanto, o deslocamentos pode ser obtido de Eq. 51.4

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{array} \right]}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{51.6}$$

19 Combinando EQ. 51.5 e.. 51.6 Rende-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{LN}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(\xi,\eta) \\ \varepsilon_{yy}(\xi,\eta) \\ \gamma_{xy}(\xi,\eta) \end{array} \right\} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned} \tag{51.7}$$

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{array} \right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}^{-1}} \tag{51.8}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

20 Considerando as coordenadas locais ξ, η E o correspondente global x, y, as regras da cadeia daria

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Esta última equação é a chave para obter todos os componentes que irão entrar no **B** Matriz.

21 Expandindo a definição de Jacobiano

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{y}_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{y}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \hline \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccc} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ \hline -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{J}} \end{aligned} \tag{51.9}$$

22 De volta ao Jacobian

$$\mathbf{J}^{-1} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{y}_i & -\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{y}_i \\ -\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{x}_i \end{bmatrix}$$

23 De cálculo, se ξ e.. η são alguns curvilíneas arbitrárias Coordenadas, Fig. 51.4, Então..

$$d\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} d\xi \quad \text{and} \quad d\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\eta$$

são vetores direcionados tangencialmente para ξ = constante, e η = constante respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

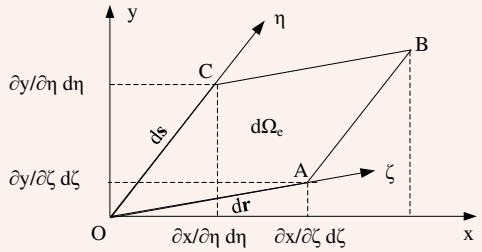


Figura 51.4: Elemento diferencial no sistema de coordenadas curvilíneas

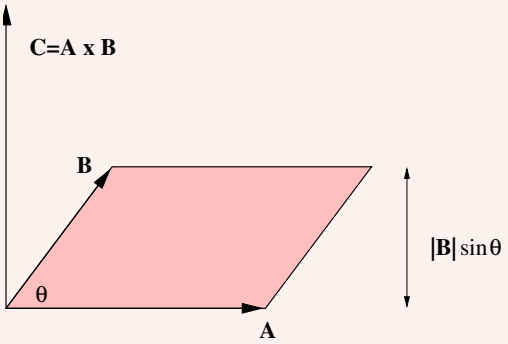


Figura 51.5: Produto cruzado de dois vetores

24 Da álgebra vetorial, o produto cruzado de dois vetores que estão na Um avião x-y, Fig. 51.5 É

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
&= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(A_xB_y - B_xA_y)}_{\text{Area}}\mathbf{k} \\
|\mathbf{C}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta
\end{aligned}$$

Portanto, a área diferencial $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ é então igual ao comprimento do vetor resultante do produto cruzado de $d\mathbf{r}d\mathbf{s}$ E é igual a

$$\mathrm{d}(area) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{51.10}$$

25 Finalmente determinar o elemento matriz de rigidez de

$$\mathbf{k}_{8\times8} = \int\int \mathbf{B}^T_{8\times3}\mathbf{D}_{3x3}\mathbf{B}_{3\times8}t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}t\det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

26 A avaliação do elemento matriz de rigidez envolve dA.. Se considerarmos um elemento infinitesimal, de comprimento dr e.. ds, no vértice de um elemento, ele tem os limites do elemento como seus lados. Então, da Eq. 51.10

$$dA = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\sin\theta$$

No entanto, de Eq. 51.10 Nós temos $dA = \det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta$, assim

$$\det\mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta}\sin\theta$$

Assim, observamos que se θ é pequeno ou perto de 180^o, então det **J** será muito pequeno, se o ângulo for maior que 180 ^{o}O determinante é negativo (implicando um negativo rigidez que normalmente irá desencadear um erro / parar em uma análise FE).

27 Em geral, recomenda-se que $30^o < \theta < 150^o$.

28 O inverso do jacobiano existe enquanto o elemento não é muito distorcido ou dobra sobre si mesmo, Fig. 51.6 nesses casos não há uma relação única entre as coordenadas.

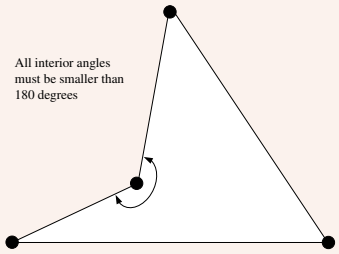


Figura 51.6: Elemento com possíveis jacobianos singulares

29 Pode-se facilmente mostrar que para paralelogramas, o Jacobiano é constante, enquanto para não paralelogramas não é.

30 Em geral **J** é um indicador da quantidade de distorção do elemento em relação a um quadrado 2x2. Algumas vezes é constante, outras varia dentro do elemento.

51.2.3 Elementos triangulares

51.2.3.1 Triângulo T3

31 O funções de forma deste triângulo são dados em §49.2.2.2.

32 O **B** Matriz é obtida de:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{array}\right\} \tag{51.11}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

ou

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}}_i \\ \overline{\mathbf{v}}_i \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{cc} \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial x} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad \frac{\partial L_3}{\partial x} \rfloor [\mathbf{N}_L] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial y} \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} \rfloor [\mathbf{N}_L] \\ \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial y} \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} \quad \frac{\partial L_3}{\partial y} \rfloor [\mathbf{N}_L] & \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial x} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad \frac{\partial L_3}{\partial x} \rfloor [\mathbf{N}_L] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}_L] &= \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \frac{\partial N_3}{\partial L_1} & \frac{\partial N_4}{\partial L_1} & \frac{\partial N_5}{\partial L_1} & \frac{\partial N_6}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \frac{\partial N_3}{\partial L_2} & \frac{\partial N_4}{\partial L_2} & \frac{\partial N_5}{\partial L_2} & \frac{\partial N_6}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \frac{\partial N_3}{\partial L_3} & \frac{\partial N_4}{\partial L_3} & \frac{\partial N_5}{\partial L_3} & \frac{\partial N_6}{\partial L_3} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{cccccc} 4L_1-1 & 0 & 0 & 4L_2 & 0 & 4L_3 \\ 0 & 4L_2-1 & 0 & 4L_1 & 4L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4L_3-1 & 0 & 4L_2 & 4L_1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

33 A equação anterior pode ser mais simplificada

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{N}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}$$

Onde

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{N}_x^T | \mathbf{N}_y^T \right] &= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial L_1}{\partial x}(4L_1-1) & \frac{\partial L_1}{\partial y}(4L_1-1) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x}(4L_2-1) & \frac{\partial L_2}{\partial y}(4L_2-1) \\ \frac{\partial L_3}{\partial x}(4L_3-1) & \frac{\partial L_3}{\partial y}(4L_3-1) \\ 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_1 & 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_1 \\ 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_2 & 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_2 \\ 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_3 & 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_3 \end{array} \right] \\
\lfloor \overline{\mathbf{u}} \quad \overline{\mathbf{v}} \rfloor &= \lfloor \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{u}_5 \quad \overline{u}_6 \mid \overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{v}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{v}_6 \rfloor
\end{aligned}$$

34 Esta expressão é então analiticamente integrada usando Eq. 49.1.. Em geral, uma integração numérica é "Preferível"(Seção 51.2.3).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

51.2.3.2 Triângulo T6

35 Para o triângulo de seis nós, as derivadas parciais de uma variável ϕ com respeito a x e.. y pode ser expresso como, (Felippa, 2000)

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right\} \tag{51.12}$$

36 Transpondo os dois lados

$$\lfloor \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \rfloor \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \lfloor \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rfloor$$

37 Agora nós fazemos $\phi \equiv 1$, x, e y:

$$\left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{array} \right]$$

38 Mas.. $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$, e $\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, pois x e y são coordenadas independentes. Além disso, todas as entradas na primeira linha são iguais a uma constante (3 para o elemento T6), E como o lado direito correspondente, esta linha pode ser normalizada, produzindo a matriz Jacobiana para este elemento

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

39 Substituindo da mesa 49.7 Nós conseguimos

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1(4L_1 - 1) + 4x_4L_2 + 4x_6L_3 & x_2(4L_2 - 1) + 4x_5L_3 + 4x_4L_1 & x_3(4L_3 - 1) + 4x_6L_1 + 4x_5L_2 \\ y_1(4L_1 - 1) + 4y_4L_2 + 4y_6L_3 & y_2(4L_2 - 1) + 4y_5L_3 + 4y_4L_1 & y_3(4L_3 - 1) + 4y_6L_1 + 4y_5L_2 \end{array} \right]}_{\mathbf{J}}$$
$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

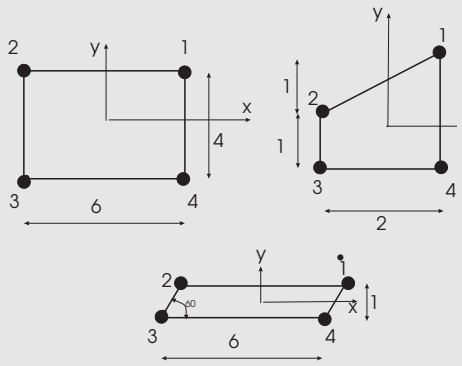
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

40 Em seguida, invertemos a matriz e resolvemos para as seis coordenadas triangulares parciais e substitutas em Eq. 51.12 O que, por sua vez, nos permitirá determinar o **B** Matriz em Eq. 51.7

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \gamma_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

51.2.4 Ex 51.1: Operadores Jacobianos

Exemplo de
Procuramos determinar os operadores jacobitas **J** Para o 2o dimensional adjacente Elementos.
As coordenadas são dadas pelo Eq. 51.1, o funções de forma Por Eq. 49.12, e o Jacobian por Eq. 51.9.



Elemento 1:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{x}_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{x}_4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{x}_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{x}_2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-3) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{y}_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{y}_4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{y}_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{y}_2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathrm{J}] &= \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Nós notamos que $A = 24 = \det[J](2 \times 2) = 6 \times 4$

CÓPIA PARA REVISÃO

Elemento 2:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-(3+1/(2\sqrt{3}))) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3-1/2\sqrt{3})) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3+1/2\sqrt{3})) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-(3-1/2\sqrt{3}))) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elemento 3:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1) + \frac{1}{4}(1-\xi)(-1) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(5/4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1/4) \\ [\mathbf{J}] &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & (1+\eta) \\ 0 & (3+\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

51.3 Integração numérica

41 Compreender a integração numérica não é apenas essencial para uma adequada integração da família isoparamétrica de elementos, mas também útil em Entendendo os métodos de ponderação residual (capítulo 52),

42 Um aspecto crucial da formulação de elementos isoparamétrico é a numérica integração que pode ser expressa como

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

Na prática, realizamos a integração numericamente usando

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_i \mathbf{W}_i\mathbf{F}(\xi_i) + \mathbf{R}_n \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_i\sum_j \mathbf{W}_{ij}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j) + \mathbf{R}_n$$

onde as somas se estendem sobre todos i e.. j, e $\mathbf{W}_i$, $\mathbf{W}_{ij}$ são fatores de ponderação, e $\mathbf{F}(\xi_i)$ e $\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j)$ são as matrizes avaliadas nos pontos especificados nos argumentos.

43 As matrizes $\mathbf{R}_n$ são matrizes de erros, que em geral não são calculadas.

44 Como mostrado acima, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T.\mathbf{D}.\mathbf{B}$ Por elemento finito matriz de rigidez avaliação, e cada elemento é integrado individualmente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

45 A integração de $\int_a^b F(\xi)d\xi$ é essencialmente baseado na passagem um polinômio $P(\xi)$ através de valores dados de $F(\xi)$ e então usar $\int_a^b P(\xi)d\xi$ como uma aproximação.

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \int_a^b P(\xi)d\xi$$

46 Usando $P(\xi) = F(\xi)$ Em.. n e lembrando as propriedades das funções de interpolação lagrangeana, nós obtemos

$$\begin{aligned} P(\xi) &= l_1(\xi)F(\xi_1) + l_2(\xi)F(\xi_2) + \cdots + l_n(\xi)F(\xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i) \end{aligned}$$

e note que em $\xi = \xi_i$ $l_i = 1$, enquanto todos os outros $l_i = 0$.

51.3.1 Newton-Cotes

47 Na integração Newton-Cotes, assume-se que os pontos de amostragem são **Equivocadamente espaçada**, Fig. 51.7, assim nós definimos

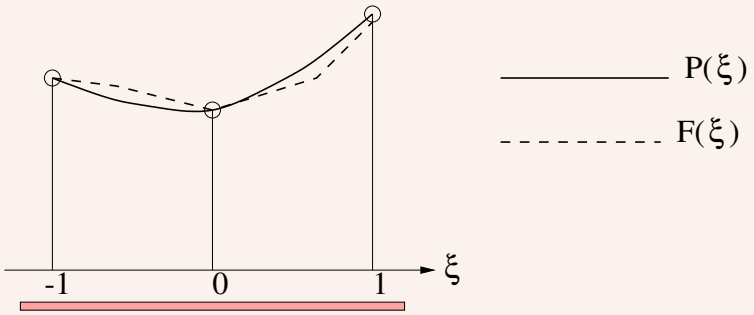


Figura 51.7: Integração numérica Newton-Cotes

$$\int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi F(\xi_i) \tag{51.13}$$

ou

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi & = & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = (b-a)C_i^{(n)} \end{array}$$

Onde $C_i^{(n)}$ são os "pesos"do *Newton-Cotes quadratura* para integração numérica com n -Pontos de amostragem igualmente espaçados.

48 As constantes de Newton-Cotes, e o lembrete correspondente são mostrados na Tabela 51.1, (Bathe, 1996)

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 51.1: Pesos para fórmulas de quadratura Newton-Cotes

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	Erro
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3F^{II}(\xi)$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-6}(b-a)^7F^{VI}(\xi)$

49 Pode-se mostrar que este método permite a integração exata do polinômio da ordem $n-1$, E que se n É estranho, então podemos exatamente integrar polinômios de ordem n.. Por isso usamos em geral valores estranhos de n,

50 Por.. $n=2$ Câmbio $[-1,1]$Nós selecionamos pontos igualmente espaçados em $\xi_1=-1$ e.. $\xi_2=1$ para avaliar $\int_{-1}^{1}P(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$
\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{2} l_i(\xi)F(\xi_i)\\
l_1(\xi) &= \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=\frac{1}{2}(1-\xi)\\
l_2(\xi) &= \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=\frac{1}{2}(1+\xi)\\
W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
\int_{-1}^{1}F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1}P(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{2}W_i^{(2)}F(\xi_i)=F(-1)+F(1)
\end{aligned}
$$

que é o *Regra trapezoidal*

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

51 Por.. $n = 3$ Câmbio $[-1, 1]$Nós selecionamos pontos igualmente espaçados em $\xi_1 = -1$ $\xi_2 = 0$, e $\xi_3 = 1$, para avaliar $\int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{3} l_i(\xi)F(\xi_i) \\
l_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\
l_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = -(1+\xi)(\xi-1) \\
l_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\
W_1^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(\xi-1)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
W_2^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} -(1+\xi)(\xi-1)\mathrm{d}\xi = \frac{4}{3} \\
W_3^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_3(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(1+\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{3} W_i^{(3)}F(\xi_i) = \frac{1}{3}[F(-1)+4F(0)+F(1)]
\end{aligned}$$

Que é *Regra de Simpson*

51.3.2 Quadratura Gauss-legendre

52 Na quadratura Gauss-Legendre, os pontos não são fixos e igualmente espaçados, mas são selecionados para alcançar *Melhor precisão*.

53 De novo, começamos com

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)}F(\xi_i)$$

mas nesta formulação, *Os dois* $W_i^{(n)}$ e.. ξ_i são desconhecidos Ainda não está determinado. Assim, temos um total de $2n$ Incógnitos.

54 Nos pontos de integração $P(\xi_i) = F(\xi_i)$, entretanto no intermediário pontos a diferença pode ser expressa como

$$F(\xi) = P(\xi) + \underbrace{\chi(\xi)(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \cdots)}_{0 \text{ at } \xi=\xi_i;i=1,2,\cdots,n}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Já que queremos que o lado esquerdo seja exatamente igual a $P(\xi)$ na integração Pontos, nós definimos

$$\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)...(\xi - \xi_n)$$

como um polinômio de ordem n, para ser igual a zero na integração Pontos ξ_i.

55 β_i deve ser apropriadamente selecionado em orer para eliminar a lacuna entre $F(\xi)$ e.. $P(\xi)$ Em pontos intermediários.

56 Integrando

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

Dividimos o último mandato

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

57 Truncando os últimos termos da expansão

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi \tag{51.14}$$

Observamos que a primeira integral do lado direito envolve um polinômio de ordem $n-1$, e a segunda integral um polinômio de ordem $2n-1$. Assim nós estabelecemos

$$\int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{51.15}$$

O que resultaria em um conjunto de n Equações simultâneas de ordem n em termos dos desconhecidos ξ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

58 De volta ao EQ. 51.14

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i)$$

ou

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi & \approx & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \text{Gauss Points} & \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi & = & 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \end{array}$$

59 Pontos de integração ξ_i e coeficientes de peso $W_i^{(n)}$ são dado na mesa 51.2, (Bathe, 1996)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 51.2: Pontos de integração e pesos para fórmulas de geometria ao longo do intervalo$[-1,1]$

n	ξ_i	$W_i^{(n)}$	Erro
1	0	2	$\frac{1}{3}F^{(2)}(\xi)$
2	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	1 1	$\frac{1}{135}F^{(4)}(\xi)$
3	$-\sqrt{3/5}$ 0 $\sqrt{3/5}$	5/9 8/9 5/9	$\frac{1}{15{,}750}F^{(6)}(\xi)$

51.3.2.1 Lendre polinomial

60 As soluções (pontos de integração Gauss) são iguais às raízes de um Lendre polinomial definido por

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \\ L_1(\xi) &= \xi \\ L_k(\xi) &= \tfrac{2k-1}{k}\xi L_{k-1}(\xi) - \tfrac{k-1}{k}\xi L_{k-2}(\xi) \quad 2 \le k \le n \end{aligned}$$

e o n Os pontos de integração Gauss são determinados pela resolução $L_n(\xi) = 0$ Por suas raízes ξ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

61 As funções de ponderação são dadas por

$$W_i^{(n)} = \frac{2(1-\xi_i^2)}{[nL_{n-1}(\xi_i)]^2}$$

51.3.2.2 Quadratura Gauss-Legendre para $n = 2$

62 Primeiro buscamos os pontos de integração para $n = 2$, $\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$E as equações resultantes são

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^0 \mathrm{d}\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^1 \mathrm{d}\xi &= 0 \end{aligned}$$

Após a integração, conseguimos

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \xi_1 + \xi_2 = 0$$

Por isso

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Os coeficientes de peso são

$$\begin{aligned} W_i^{(n)} &= \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_2}{\xi_1-\xi_2} = 1.0 \\ W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_1}{\xi_1-\xi_2} = 1.0 \end{aligned}$$

51.3.3 Regiões retangulares e prismas

63 Integração numérica de $F(\xi,\eta)$ sobre uma região retangular $-1 \le \xi \le 1$, e $-1 \le \eta \le 1$, é realizado selecionando m e.. n (Não confundir com a ordem do polinômio) pontos de integração na ξ e.. η Direção

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi.\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_i^{(m)} W_j^{(n)} F(\xi_i,\eta_j)$$

E o número total de pontos de integração será $m \times n$, Fig. 51.8.

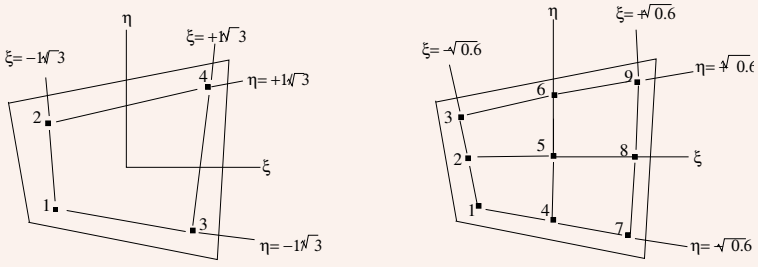


Figura 51.8: Integração Gauss-Leendre sobre uma superfície

51.3.4 Regiões triangulares

64 Para a integração numérica sobre um triângulo, os pontos Gauss são mostrados em Fig. 51.9, e as coordenadas triangulares correspondentes são dadas Por Tabela 51.3.

51.4 Tensão recuperação; Nodal tensões

65 Tensões são avaliados a partir

$$\sigma = \mathbf{DB}\overline{\mathbf{u}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

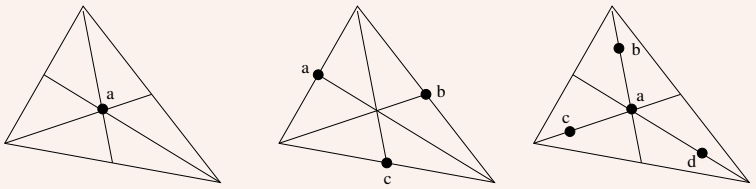


Figura 51.9: Integração numérica sobre um triângulo

Tabela 51.3: Coordenadas e pesos para integração numérica sobre um triângulo

Ordem	Erro	Pontos	Triang. Coord.	Pesos
Linear	$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadrática		a	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
	$R = O(h^3)$	b	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$	$\frac{1}{3}$
		c	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Cubic		a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
	$R = O(h^4)$	b	$0.6, 0.2, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		c	$0.2, 0.6, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		d	$0.2, 0.2, 0.6$	$\frac{25}{48}$

em geral, é desejável que eles sejam avaliados no elementos nodal pontos. No entanto, deve ser lembrado Que tensões computado em um dado nós de diferentes elementos Não precisa ser o mesmo (desde que tensões não são obrigados a ser contínuas em formulações baseadas em elemento finito. Daí algum tipo de média em pontos nodais pode ser desejável.

66 Na formulação isoparamétrico, nodal tensões são muito pobres, E os melhores resultados são obtidos nos pontos de Gauss.

67 Para avaliar o nodal, duas abordagens:

1. Avaliar $\boldsymbol{\sigma}$ diretamente nos nós$\xi = \eta = \pm 1$)
2. Avaliar o tensões nos pontos Gauss e depois extrapolar.

A segunda abordagem produz resultados muito melhores.

68 Extrapolação dos pontos Gauss será ilustrada através Fig. 51.10 para o quadrilátero 4 nós isoparamétrico. Nós especificamos um elemento "interno" com seus próprios nós e Coordenadas naturais ξ' e.. η' que estão relacionados com ξ e.. η através da mesa 51.4 ou

$$\xi' = \sqrt{3}\xi \qquad \eta' = \sqrt{3}\eta$$

Por isso, qualquer quantidade escalar σ (tal como σ_{xx}) Cujos valores σ'_i é conhecido no

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

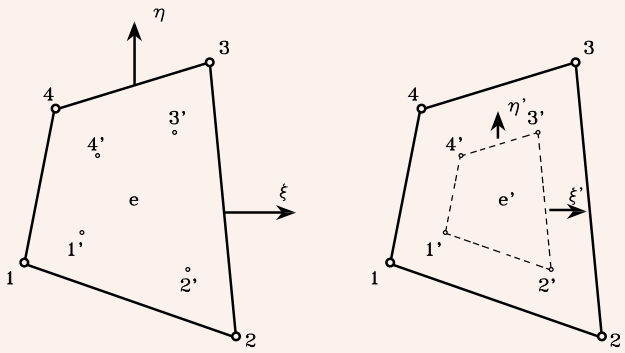


Figura 51.10: Extrapolação de 4 nós quad gauss pontos (Felippa, 1999)

Tabela 51.4: Coordenadas naturais dos nós quadrilaterais bilineares

Canto Nó	ξ	η	ξ'	η'	Gauss Nó	ξ	η	ξ'	η'
1	-1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$1'$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-1	-1
2	$+1$	-1	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$2'$	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$+1$	-1
3	$+1$	$+1$	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	$3'$	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	$+1$	$+1$
4	-1	$+1$	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	$4'$	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	-1	$+1$

elemento Gauss Os cantos podem ser interpolados através do habitual bilinear agora expressa em termos de ξ' e.. η'

$$\sigma(\xi',\eta') = \lfloor\ N_1^{e'} \quad N_2^{e'} \quad N_3^{e'} \quad N_4^{e'}\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \end{array} \right\}$$

Onde

$$\begin{aligned} N_1^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1-\eta') \\ N_2^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1-\eta') \\ N_3^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1+\eta') \\ N_4^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1+\eta') \end{aligned}$$

Da mesma forma, nós podemos *extrapolar* σ Para os cantos do elemento. Para o canto 1,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

por exemplo, nós substituímos ξ' e.. η' nas equações anteriores por $-\sqrt{3}$.. Fazendo isso para os quatro cantos, nós conseguimos

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc} 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\end{array}\right\}$$

Como esperado, a soma de cada linha é igual a uma, e para tensões Nós substituímos σ por σ_{xx}, σ_{yy}, e τ_{xy}

69 Como sabemos, nodal diferente tensões será obtido de adjacentes Elementos. Para obter um único valor, nós podemos tomar

1. Média não ponderada de todos os nodais.
2. Média ponderada de nodal tensões baseado no parente Os tamanhos dos elementos determinados a partir de sua área através Det$J$).

51.5 Cargas equivalentes nodais

70 Na formulação elemento finito, todas as cargas devem ser substituído por uma carga nodal de energia equivalente.

71 Vamos considerar os seguintes casos: Carga nodal, gravidade, tração e térmica.

72 Mas primeiro, vamos reescrever o Eq. 48.32 em termos de valores nodais

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^t\mathbf{b}d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}^t\mathbf{b}d\Omega$$
$$\int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\hat{\mathbf{t}}d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma$$

ou

$$\mathbf{f}_e = \int_\Omega \mathbf{N}^t\mathbf{b}d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{51.16}$$

51.5.1 Carga de gravidade

73 As forças de gravidade são equivalentes a uma força corporal/volume unitário Atuando dentro do sólido na direção do eixo gravitacional, Fig. 51.11, (que não precisam ser coincidentes com nenhum dos eixos de coordenadas).

$$\begin{aligned} dG_x &= \rho g d\Omega \sin\theta \\ dG_y &= -\rho g d\Omega \cos\theta \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

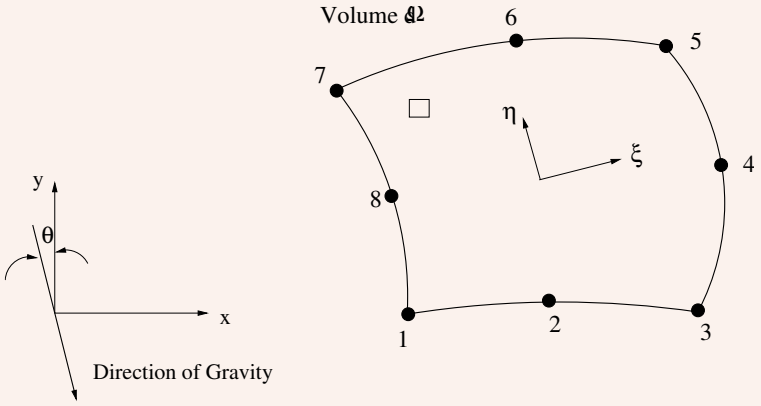


Figura 51.11: Carregamento de gravidade

Onde g é a aceleração gravitacional e ρ é a massa Densidade.

74 Da Eq. 51.16

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega$$

Nós conseguimos

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \int_{\Omega_e} N_i \rho g \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} d\Omega$$

Ou as forças nodais equivalentes de energia para o nó i são

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{ngaus} \sum_{k=1}^{ngaus} \rho g t \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} N_i(\xi_j \eta_k) W_j W_k \det \mathbf{J}(\xi_j, \eta_k)$$

75 O ângulo θ deve ser medido no sentido anti-horário a partir do positivo y Eixo.

51.5.2 Carga de tração

76 Qualquer borda de elemento pode ter um carga distribuída por unidade de comprimento em um normal e direção tangencial prescrita.

77 A variação do carga distribuída é polinomial e Sua ordem não pode exceder a ordem do elemento. Por causa da consistência, nós carregados também estão listados no sentido anti-horário.

78 Primeiro determinamos os componentes do cargas distribuídas no x e.. y instruções considerando as forças agindo em um incremental comprimento dS da borda carregada, Fig. 51.12:

$$\begin{aligned} dP_x &= (p_t dS \cos\theta - p_n dS \sin\theta) = (p_t dx - p_n dy) \\ dP_y &= (p_n dS \cos\theta - p_t dS \sin\theta) = (p_n dx - p_t dy) \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

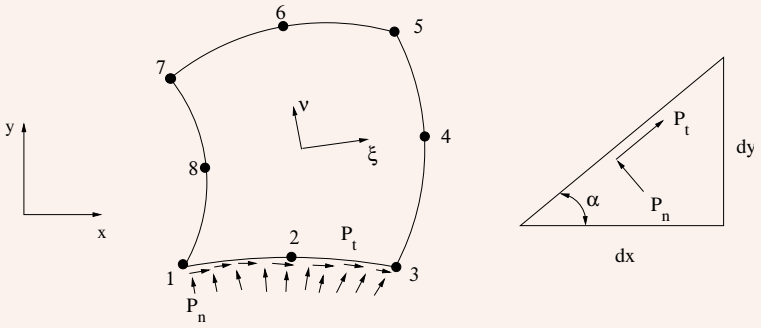


Figura 51.12: Carga de tração em elementos isoparamétrico

79 Mas já que a integração deve ser feita em termos de coordenadas naturais:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi$$

Substituindo

$$\begin{aligned} dP_x &= \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \\ dP_y &= \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

80 Da Eq. 51.16 Nós temos

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$

Assim

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \\ P_{yi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

A integração é novamente realizada numericamente (ao longo da borda) e as forças nodais equivalentes de energia para o nó i são

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) W_j \\ P_{yi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) W_j \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

onde a integração é realizada numericamente ao longo da borda. e note que $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ e.. $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ são tirados diretamente do Jacobian Matriz.

81 Note que já que a integração deve ser levada ao longo da borda, Nós temos usado ξ.

82 Para elementos adjacentes, Fig. 51.13.

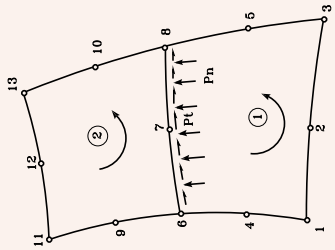


Figura 51.13: Carga de tração em elementos contíguos isoparamétrico

51.5.3 Inicial deformações/tensões; Carga térmica

83 Distinguimos dois casos:

Avião Tensão Que é o mais simples

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= \alpha\Delta T \\ \varepsilon^0_{yy} &= \alpha\Delta T \\ \gamma^0_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Avião Deformação Nós temos

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T \\ \varepsilon^0_{yy} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T \\ \gamma^0_{xy} &= 0 \\ \varepsilon^0_{zz} &= \frac{\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T = 0 \end{aligned}$$

Usando a última expressão para eliminar σ^0_{zz}Nós obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \varepsilon^0_{yy} &= (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \gamma^0_{xy} &= 0 \\ \sigma^0_{zz} &= -E\alpha\Delta T \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

84 Essas expressões são substituídas em Eq. 50.13

$$\mathbf{f}_{0_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega$$

e integrado numericamente.

51.5.4 Ordem de integração

51.5.4.1 Integração total

85 Para elementos numericamente integrados, uma questão de suma importância é o *Ordem* da integração numérica. Se a ordem de integração é também

Alto: Isso certamente resultaria em uma formulação exata, que No entanto, pode ser computacionalmente caro.

Baixo: Então podemos ter deficiência de patente.

Por isso, devemos selecionar corretamente a ordem da quadratura numérica.

86 Lembramos disso

1. Nós procuramos integrar $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J}$.
2. O Jacobiano é constante apenas para paralelogramas.
3. Em Gaussian Quadrature, integração com n Pontos corretamente integra um polinômio de ordem $2n - 1$ (Considerando para Newton-Cotes foi $n + 1$).

Assim, para um elemento de paralelograma bilinear, $\mathbf{F}$ é uma função polinomial, de ordem 2, em termos das coordenadas naturais ξ e.. η Que pode ser exatamente Integrado por $n = 2$ Pontos (i.e 2×2).

87 Por argumentos semelhantes, um quadrilátero quadrático deve ser integrado por três pontos (F Agora é da ordem 4, e assim $2 \times 3 - 1 = 5$).

88 Essas ordens de aproximações só são válidas para paralelogramas, como o A borda fica inclinada, então o erro aumenta.

51.5.4.2 Integração reduzida

89 Redução da integração, ou seja. usando menos pontos Gauss do que o necessário para um exatamente integração, fará o elemento amolecer porque a ordem mais alta Termos polinomiais podem desaparecer nos pontos de ordem inferior.

90 Em um corpo elástico, a solução FE permite apenas aqueles deslocamentos que pode ser representado por uma combinação linear do funções de forma. Em geral, o campo exato

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

deslocamento será diferente do assumido, em ou seja, o funções de forma impede que a estrutura deforma Como ele quer[1].

91 Dado que a formulação rigidez é muito rígida, (Eq. 50.15), o amolecimento introduzido por um número reduzido A integração é benéfica.

92 Ordens recomendadas de integração para elementos quadrilaterais são mostrados na tabela 51.5.

Tabela 51.5: Integrações numéricas completas e reduzidas para elementos quadrilaterais .

Elemento	Integração confiável	Integração Reduzida
4-Node	2x2	-
4 nós distorcidos	2x2	-
8-Node	3x3	2x2
8o Nó distorcido	3x3	2x2
9-Node	3x3	2x2
9-node distorcido	3x3	2x2

93 Se o elemento for artificialmente suavizado, então haverá *Espúrio Modos de energia zero*, e o matriz de rigidez será *Rank deficiente*, i.e. Sua posição é menor que o número de elementos D.O.F. menos o número de modos rígidos do corpo.

94 Os modos independentes de um elemento bilinear são mostrado em Fig. 51.14. Os

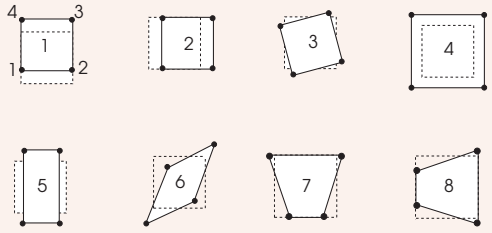


Figura 51.14: Modos independentes para um elemento bilinear

três primeiros modos são rígidos, os próximos três são constantes deformações, e os dois últimos são modos de dobra.

95 Já que o elemento não oferece resistência a todos os espúrios Modos de energia zero (que podem ser usados em combinação linear) com os outros modos para descrever o campo deslocamento), em seguida, o efeito de integração reduzida é para suavizar o rigidez do modelo FE.

[1]Isso é análogo ao trucating uma série de Fourrier, que Caso contrário, poderia ter sido um substituto exato para um conjunto de físico observações.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

96 Se adotarmos um esquema de integração reduzido, vamos substancialmente Reduzir o esforço computacional, no entanto perderemos alguns muito especiais Propriedades do método dos deslocamentos, ou seja: a) Limite e b) convergência monotônica em direção a uma solução exata.

97 Uma ilustração dos problemas que surgem com a integração reduzida é ilustrado para os seguintes elementos

Q4 Para uma única integração, o ponto Gauss está no centro. No centro de um elemento submetido à flexão, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$; portanto, $U = 0$ para os modos correspondentes 4 e 5 em Fig. 51.14Esses modos espúrios desaparecerão se $n = 2$.

Q9 Deslocamento é dado por $u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2$ e.. $v = 0$.. Se o elemento é integrado por 2x2 pontos, Em.. $\xi = \eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Pode-se mostrar que nesses pontos os deformações são zero e os mecanismos correspondentes, ou **ampulheta** são mostrados na figura. 51.15.

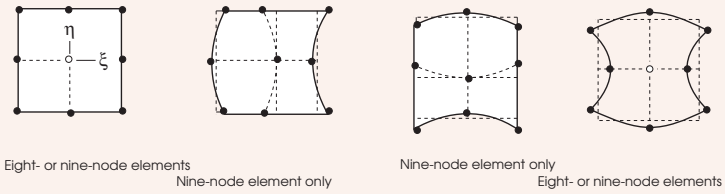


Figura 51.15: Modos hourglas em elemento quadrático subintegrado

51.5.4.3 Seletiva integração reduzida

98 Na integração seletiva, integramos os diferentes termos deformação diferentes ordens de integração.

99 Mais sobre esta técnica no capítulo seguinte.

51.6 Parasítico cisalhamento / elementos incompatíveis

51.6.1 Q4, o problema

100 O funções de forma para o elemento bilinear é dado por Eq. 49.12

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{aligned} \tag{51.17}$$

Onde $\xi = x/a$ e.. $\eta = y/b$.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

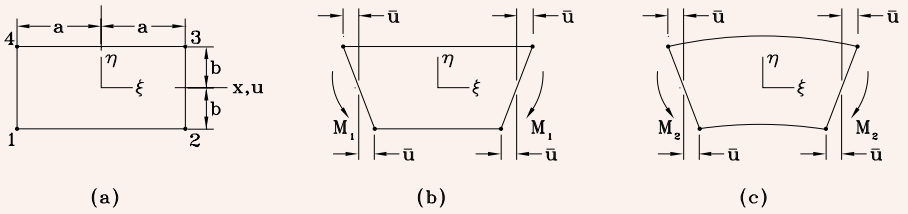


Figura 51.16: Elemento retangular bilinear submetido à flexão; Elemento bilinear e geometria correta

101 Impondo o campo deslocamento de Fig. 51.16 O elemento bilinear e correto deslocamentos e deformações são dados Por Tabela 51.6.

Tabela 51.6: Bilinsear e exato deslocamentos/deformações

	Bilinear Elemento	Exatamente Formulação
u	$\xi\eta\overline{u}$	$\xi\eta\overline{u}$
v	0	$(1-\xi^2)\frac{a\overline{u}}{2b}+(1-\eta^2)\nu\frac{b\overline{u}}{2a}$
ε_{xx}	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$
ε_{yy}	0	$-\nu\eta\frac{\overline{u}}{a}$
γ_{xy}	$\xi\frac{\overline{u}}{b}$	0

102 Desta mesa notamos que o parasita contribui para deformação energia armazenada no elemento (que é igual a $\mathbf{P}^T.\mathbf{d}$). Portanto, para um dado imposto deslocamento, as forças seriam maiores e $M_1 > M_2$.

103 Computando a proporção de deformação energias dos dois elementos, nós obtemos

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{1+\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

Por isso, como a/b Aumenta, o elemento "locks" (um termo que será explicado em capítulos posteriores).

104 Assim, o indesejado cisalhamento deformação que produz $M_1 > M_2$ é chamado de *Parasitário cisalhamento*.

51.6.2 Q6, a solução

105 Comparando os campos deslocamento na tabela 51.6 we Observe que o elemento bilinear erra da solução exata, omitindo o modo deslocamento associado com $(1-\xi^2)$ e.. $(1-\eta^2)$.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

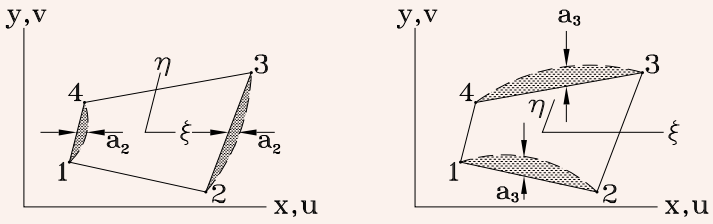


Figura 51.17: Deslocamentos associado com modos incompatíveis para o elemento q6

106 Podemos remediar esta situação adicionando os modos que faltam como nós internos

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i \overline{u}_i + (1-\xi^2)a_1 + (1-\eta^2)a_2 \\ v &= \sum N_i \overline{v}_i + (1-\xi^2)a_3 + (1-\eta^2)a_4 \end{aligned}$$

Onde N_i são dados pelo Eq. 51.17, e a_i são - Não, não. O elemento agora tem 6 graus de liberdade, e portanto o elemento é referido para como Q6.

107 O **B** Matriz teria que ser ajustada e seguindo sua formulação, a D.O.F. adicional. a_i são eliminados através da condensação (Sect. 46.1).

108 O elemento Q6 é *incompatível* (ou não-conformidade) devido ao distribuição quadrada de u ou v ao longo da borda que é definida apenas por Dois nós, Fig. 51.17.

109 A suavização neste caso contrapõe o excesso inerente do O padrão assumiu a formulação.

51.6.3 Qm6, mais melhorias

110 Pode-se mostrar que o elemento Q6 passa no teste de patch somente se É retangular.

111 Para remediar esta deficiência, consideramos que parte do **B** Matriz associada com o D.O.F. E rotulá-lo $\mathbf{B}_a$, e então O vetor de carga nodal consistente correspondente é

$$\mathbf{p}_a^e = -\int_\Omega^e \mathbf{B}_a^T \sigma_0 d\Omega$$

Onde σ_0 representar o inicial tensões causado pelo elemento padrão formulação associada com d_r no Nodal D.O.F.

112 Porque o elemento padrão isoparamétrico passa no teste de patch, Quando σ_0 é constante, sem Esta carga adicional associada com o a_i, então $\mathbf{p}_a^e$ deve também ser zero para constante σ_0 ou

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_a^T t \det\mathbf{J} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0$$

Para os elementos gerais (não rectangulares) esta equação não está satisfeita e o teste de remendo falha.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

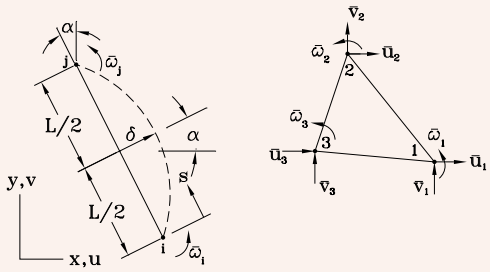


Figura 51.18: Lado deslocamentos induzido pela perfuração do D.O.F

113 Isso pode ser artificialmente corrigido na formação $\mathbf{B}_a$ e integrando usando $\mathbf{J}_0$ onde o jacobiano é avaliado em $\xi = \eta = 0$ mas sim.. que no ponto Quadratura de Gauss, e usamos o correspondente t_0 Para a espessura.

114 Quando tal operação é realizada, o elemento resultante é chamado de QM6, e funciona quase tão bem quanto o elemento quadrático se retangular, e é consideravelmente mais preciso que o elemento bilinear.

115 Tensões são computados com todos os DOF, incluindo o a_i. Melhores resultados são alcançados se o elemento Nodal carregar $\mathbf{p}^e$ Que são associados a modos incompatíveis são ajustados para zero durante a recuperação do associado D.O.F. a_i (seguindo condensação).

51.7 -Dófice rotacional.

116 *Perfuração do D.O.F.* são rotações em nós de canto. No contexto do avião elementos, eles estão associados com formas deslocadas parabólicas das bordas, Fig. 51.18.. Eles são de importância em cascas definido como um Assemblagem de elementos planos. Assim, o elemento pode modelar flexura e ação de membrana.

117 Assumindo rotação $\overline{\omega}_i$ e.. $\overline{\omega}_j$ nos nós i e.. j de Um elemento do lado do comprimento L, os momentos finais de um imaginário viga será

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{L}\left(2\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j\right) \\ M_j &= \frac{2EI}{L}\left(\overline{\omega}_i + 2\overline{\omega}_j\right) \end{aligned}$$

Por isso, de $M = M_i + (M_j - M_i)\frac{x}{L}$ E o vitual método das forças nós podemos Resolva para a borda do meio-normal deslocamento

$$\delta = \frac{L}{8}(\overline{\omega}_j - \overline{\omega}_i)$$

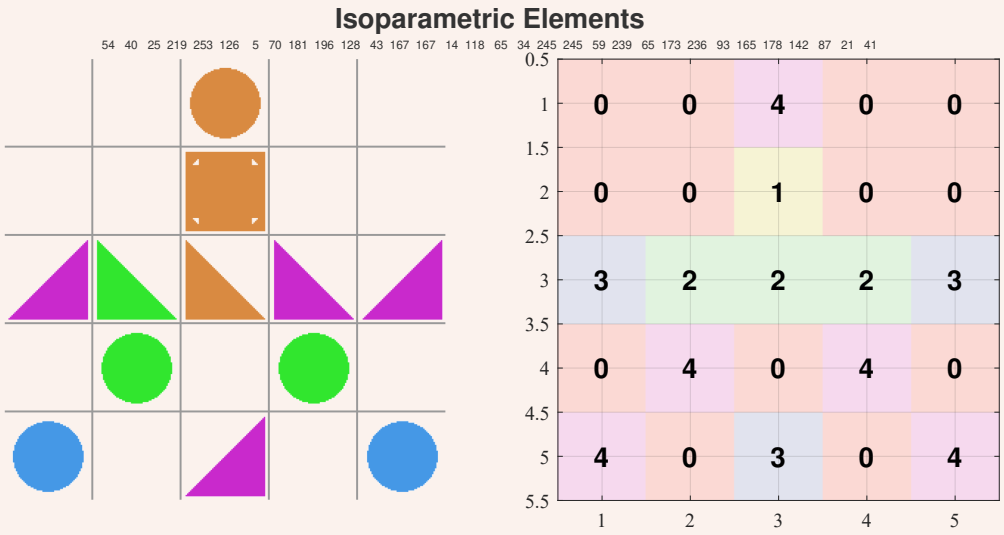
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

118 Daí a borda deslocamento é causada por duas partes: Tradução e Distorção parabólica:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \frac{L-s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\} + \frac{s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{array} \right\} + \frac{L-s}{2L} s(\omega_j - \omega_i) \left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right\}$$

e expressões semelhantes podem ser escritas para outras bordas.



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 52

Métodos Residuais Ponderados

Abstract

A formulação elemento finito apresentada no capítulo 50 estava enraizado no princípio de trabalho virtual e princípios variacionais. Ele afirma que para um corpo em equilíbrio, o trabalho virtual feito por interno tensões é igual ao trabalho virtual feito pelas forças externas para qualquer virtual deslocamento que seja cinematicamente admissível.

Em contraste, este capítulo apresentará um método alternativo. O método Galerkin é uma abordagem residual ponderada usada na solução numérica de equações diferenciais. Envolve multiplicar o governo equação diferencial por um conjunto de funções de teste e integrar sobre o domínio do problema para minimizar os resíduos.

O método de Galerkin é mais geral e pode ser aplicado a uma ampla gama de equações diferenciais além daquelas em mecânica estrutural.

Este capítulo apresentará brevemente e sucintamente o método de Galerkin.

52.1 Introdução 1819
52.2 Formulação geral 1819
52.2.1 Operadores diferenciais . . . 1819
52.2.2 Formulação residual 1820
52.3 Métodos residuais ponderados . . . 1822
52.3.1 Método de colocação de pontos 1823
52.3.2 Método de recolocação do subdomínio 1823
52.3.3 Método dos mínimos quadrados 1823
52.3.4 Método Galerkin 1823
52.4 Aplicações do método Galerkin para problemas de elasticidade 3D 1826
52.4.1 Derivação da forma fraca . . 1826
52.4.2 Fe discretização 1828

O capítulo seguinte é adaptado de Ottosen e Petersson, 1992 Introduction to the Finite Element Method.

CÓPIA PARA REVISÃO

52.1 Introdução

1 Até agora, o método dos elementos finitos foi derivado de um princípio variacional através do método Rayleigh-Ritz.

2 Em Elasto-Statics, o princípio variacional usado é a minimização da energia potencial total, e a formulação fraca resultante é equivalente à equação de equilíbrio (forma forte).

3 Em muitos ramos das ciências físicas, um princípio variacional pode não estar disponível, e tudo o que está disponível é um equação diferencial e seu associado condições de contorno.

4 Deve-se notar que uma formulação variacional não é possível quando a ordem do equação diferencial é *Estranho*.

5 É para esses problemas que o *Métodos residuais ponderados* estão empregados. É essencialmente um método matemático.

6 A formulação resultante é integral, e assim é "fraca".

7 O método de Galerkin é mais geral e pode ser aplicado a uma ampla gama de equações diferenciais além daquelas em mecânica estrutural. Além disso, é consistente com os Princípios Variacionais: O método é consistente com o método Ritz e os princípios variacionais.

52.2 Formulação geral

52.2.1 Operadores diferenciais

8 Considerando um general equação diferencial

$$\begin{array}{lrcll} \text{Governing Differential Equation} & L\phi + g & = & 0; & \Omega \\ \text{Boundary conditions} & B_i(\phi) & = & q_i; & \Gamma_i \end{array} \tag{52.1}$$

Onde L é um operador diferencial. Assumindo um problema 1D, $\phi = \phi(x)$ é uma função desconhecida que representa a variável de estado a ser determinada. deslocamento, temperatura, cabeça, etc ...), $g(x)$ é uma função de forçante conhecida.

9 Nós presumimos que o operador diferencial seja simétrico e positivo definitivo,

$$\begin{array}{lrcl} \text{Symmetric} & \int_\Omega (L[u])v \mathrm{d}\Omega & = & \int_\Omega (L[v])u \mathrm{d}\Omega \\ \text{Positive Definite} & \int_\Omega (L[u])u \mathrm{d}\Omega & > & 0 \end{array} \tag{52.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde u e.. v são todas as funções que *satisfazer essencial e natural condições de contorno*, L é o operador linear definido no Eq. O.7.

52.2.1.1 Ex 52.1: Verifique simetria e definição positiva do membro 1D axial

Como exemplo, vamos considerar a resposta do estado estacionário de uma barra axial. Os governantes equação diferencial e condições de contorno são

$$\begin{array}{lll} \text{Governing Differential Equation} & -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = 0 \\ \text{Essential Boundary conditions} & u\big|_{x=0} & = 0 \\ \text{Natural Boundary conditions} & EA\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l} & = P \end{array}$$

Por isso

$$\begin{array}{lllllllll} L[.] & = & -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}; & \phi & = & u; & g & = & 0; \\ B_1 & = & 1; & q_1 & = & 0; & B_2 & = & EA\frac{\partial}{\partial x}; \quad q_2 = P; \end{array}$$

Para determinar se o operador L é simétrico e positivo Definitivamente, nós consideramos $P = 0$, e integrando por parte duas vezes[a] Nós conseguimos

$$\begin{aligned} \int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \mathrm{d}x &= -EA\frac{\partial u}{\partial x} v\Big|_0^l + \int_0^l EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= -EA\frac{\partial u}{\partial x} v\Big|_0^l + EAu\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Mas já que os condições de contorno são $u = v = 0$ Em.. $x = 0$ e.. $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$ Em.. $x = l$, então só nós "tenho"

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \mathrm{d}x = \int_0^l -EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \mathrm{d}x$$

Por isso o O operador é simétrico.

Também podemos concluir que o O operador é positivo De.. Eq. 52.3

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \mathrm{d}x = \int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

[a] Da Eq.R.3: $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

52.2.2 Formulação residual

Agora alteramos o Eq. 52.1, e para um problema 1D reescrevê-lo como

$$\int_a^b w(L\phi + g)\mathrm{d}x = 0 \tag{52.3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Onde w é uma arbitrária *função de peso*[1].. Observamos que através desta equação, o governar equação diferencial é satisfeito em um *Fraco* Sentido.

11 Agora buscamos uma solução numérica aproximada para a função desconhecida $\phi(x)$, portanto, em geral podemos assumir

$$\begin{aligned}\phi(x)^{app} &= a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \cdots + a_n\psi_n(x) \\ &= \mathbf{a}\boldsymbol{\psi}\end{aligned} \tag{52.4}$$

Onde a_i são os parâmetros desconhecidos, e $\psi(x)$ são pré-especificados *Julgamento* funções[2] de x.

12 Substituindo a equação anterior em Eq. 52.3

$$\int_a^b w(L\phi^{app} + g)\mathrm{d}x = 0$$

Desde então ϕ^{app} em geral não satisfará o equação diferencial Exatamente, então

$$L\phi^{app} + g = R$$
$$\int_a^b wR = 0$$

Onde $R(x)$ é uma medida do erro, e é chamado de *Residual*; Impõe-se assim a exigência de que os pesos e resíduos Ser funções ortogonais[3].

13 O resíduo depende claramente dos coeficientes a_i, assim nosso objetivo É selecionar o peso $w(x)$ De tal forma que o *Pesado resíduos* $w(x)R(x)$ Câmbio $a - b$ é zero.

14 As funções de peso arbitrário são selecionadas primeiro

$$\begin{aligned}w &= c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + \cdots + c_nW_n(x) \\ &= \lfloor\ W_1(x) \quad W_2(x) \quad \cdots \quad W_n(x)\ \rfloor \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{52.5}$$

e.. $W_i(x)$ são funções predefinidas de x, c_i são parâmetros. Assim, podemos reescrever o Eq. 52.3 Como

$$\mathbf{c}^T \int_a^b \mathbf{W}^T R\mathrm{d}x = 0 \tag{52.6}$$

[1]Observe a semelhança com a derivação do princípio de trabalho virtual do equilíbrio equação e condição de contorno.

[2]Mais tarde, no método Galerkin, que é uma forma especial de resíduos ponderados, ϕ corresponderá ao deslocamento, $\boldsymbol{\psi}$ para o funções de forma $\mathbf{N}$, e $\mathbf{a}$ para o Nodal deslocamentos $\overline{\mathbf{u}}$.

[3]Dois vetores $\mathbf{a}$ e.. $\mathbf{b}$ são Ortogonais se $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$, Da mesma forma, duas funções $u(x)$ e.. $v(x)$ são ortogonais se $\int v(x)u(x) = 0$.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Mas desde então.. **c** Não depende das coordenadas, então

$$\int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{52.7}$$

Esta equação representa realmente um sistema de n equações.

15 Substituindo o Eq. 52.3, e desde então **a** Não depende do coordenadas

$$R = L(\boldsymbol{\psi}\mathbf{a}) + g = L(\boldsymbol{\psi})\mathbf{a} + g$$

Assim, tomando a média ponderada

$$\underbrace{\left(\int_a^b \mathbf{W}^T L(\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}x\right)}_{\mathbf{K}^e}\mathbf{a} = \underbrace{-\int_a^b \mathbf{W} g \mathrm{d}x}_{\mathbf{f}}$$

ou

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b W_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b W_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b W_1 g \mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 g \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b W_n g \mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

16 $\mathbf{K}^e$ é assim um n por n Matriz, e da equação que precede Podemos resolver para você coeficientes desconhecidos **a**.

52.3 Métodos residuais ponderados

17 A formulação anterior era muito geral, e diferentes técnicas Vai variar de acordo com os pesos selecionados, ou seja. Nossa escolha para **W**.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

52.3.1 Método de colocação de pontos

18 Neste método, a função do peso w é baseado em *Dirac's função delta* $\delta(x - x_i)$ e assim O resíduo está definido para ser exatamente igual a zero em n Pontos. Isso é conseguido adotando para a função peso w O, o *Função delta de Dirac* $\delta(x - x_i)$ Onde

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty & \text{if } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\mathrm{d}x = 1$$

52.3.2 Método de recolocação do subdomínio

19 Subdividemos a região de interesse em n sub-regiões, e dentro Cada um deles a integral do resíduo é definida como zero.

52.3.3 Método dos mínimos quadrados

20 A integral do quadrado dos resíduos são minimizados com respeito a a_i.

$$I = \int R^2(x, y, z, a_1, \cdots, a_n)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

52.3.4 Método Galerkin

Para o contexto histórico, consultar §12.3.1

21 No método Galerkin, selecionamos

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\psi}$$

Ou seja... As funções de peso são iguais às funções experimentais. Já que as funções de teste são ortogonais para os resíduos (Eq. 52.3), Então, Eq. 52.7 se torna

$$\int_a^b \boldsymbol{\psi}^T R\mathrm{d}x = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e..

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \psi_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b \psi_1 g\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 g\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \psi_n g\mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

52.3.4.1 Ex 52.2: Vibração de cordas

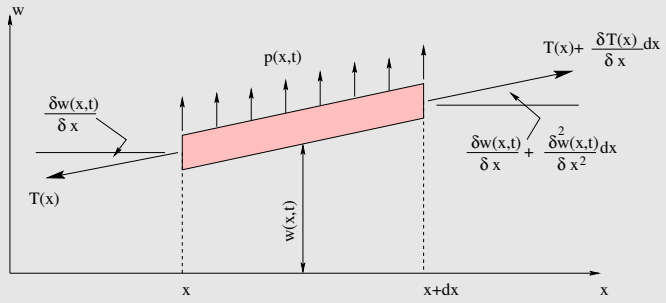
Nós procuramos formular as matrizes elemento finito pelo método de Galerkin para um um elemento de uma corda submetido a uma tensão $T(x)$, e para um Força transversal externa por unidade de comprimento ser $p(x,t)$. A massa por unidade de comprimento é denotada por ρ. Nós assumimos pequeno deslocamentos e resolvemos para a frequência fundamental de vibração.

1. Primeiro escrevemos Newton's equação de movimento na direção transversal ($\Sigma F_y = ma$) para um elemento da corda

$$\left[T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right] + p(x,t)\mathrm{d}x - T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

   O que reduz a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + p(x,t = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$



2. No caso de vibração livre $p(x,t) = 0$, e para tensão constante T =Cst, nós obtemos

$$Tw_{,xx} - \rho w_{,tt} = 0$$

   que é o *Equação de onda*.

3. Em seguida, aplicamos o método Galerkin

$$\int_0^L \mathbf{N}^T\left[Tw_{,xx} - \rho\ddot{w}\right]\mathrm{d}x = 0$$

   Onde $w = \mathbf{N}\overline{w}$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Integrar por partes

$$-\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T w_{,x} \mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{N}^T \rho \ddot{w} \mathrm{d}x + \left[\mathbf{N}^T T w_{,x}\right]\Big|_0^L = 0$$

O último termo é igual a zero porque o funções de forma no correspondente nós são iguais a zero. Por analogia com o virtual método dos deslocamentos, $\mathbf{N}$ corresponde ao virtual deslocamento que deve ser igual a zero nos suportes em ordem para satisfazer o essencial condições de contorno.

5. Substituindo $w = \mathbf{N}\overline{w}$ e.. $w_{,x} = \mathbf{N}_{,x}\overline{w}$ Nós conseguimos

$$\underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T \mathbf{N}_{,x} \mathrm{d}x}_{\mathbf{k}}\, \overline{w} + \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \mathrm{d}x}_{\mathbf{m}}\, \ddot{\overline{w}} = 0$$

Onde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N}_{,x} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Substituindo

$$\mathbf{k} = \frac{T}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{m} = \frac{\rho L}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Se considerarmos dois elementos, e suprimirmos o D.O.F fixo (1 e 3), então..

$$2\frac{T}{L}\overline{w}_2 + 4\frac{\rho L}{6}\ddot{\overline{w}}_2 = 0$$

8. Para uma vibração livre

$$\overline{w}_2 = A \sin \omega t$$
$$\ddot{\overline{w}}_2 = -\omega^2 A \sin \omega t$$

9. Substituindo

$$\left(2\frac{T}{L} - 4\frac{\rho L}{6}\omega^2\right) A \sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3\frac{T}{\rho L^2}$$

Note que a resposta exata é $w^2 = \frac{\pi^2 T}{4\rho L^2}$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

52.4 Aplicações do método Galerkin para problemas de elasticidade 3D

22 Vamos aplicar o método Galerkin a duas classes de problemas.

23 Começamos com problemas de elasticidade, para mostrar que o método Galerkin Resulta exatamente na mesma formulação que a obtida da Princípio variacional.

24 Seguindo esta "validação"do método, consideraremos (no próximo capítulo) uma aula de problemas que não têm um princípio variacional, e assim o O método Galerkin é a única técnica aplicável. A segunda aplicação Será a equação do calor.

52.4.1 Derivação da forma fraca

25 Agora aplicaremos o método de Galerkin à equação da elasticidade e mostrar que vamos recuperar o princípio de trabalho virtual que foi derivado de um princípio variacional. Assim, neste particular Caso os dois métodos sejam realmente (como previsto) equivalentes.

26 Começando com a equação de equilíbrio (Eq. O.9)

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ e..

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix};$$

27 Expandindo as equações de equilíbrio que temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \tag{52.8}$$

28 Multiplicamos a primeira equação em Eq. 52.8 pelo arbitrário função w_x E nós nos integramos sobre o volume[4] Ω:

$$\int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} d\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} d\Omega + \int_\Omega w_x b_x d\Omega = 0$$

[4] Observe semelhança com a derivação do princípio de trabalho virtual.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

29 Agora aplicamos o teorema de Green-Gauss (uma forma do teorema da divergência)[5])

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma Wx\sigma_{xx}Nx\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial Wx}{\partial x}\sigma_{xx}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma Wx\sigma_{xy}No\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial Wx}{\partial y}\sigma_{xy}\mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Gamma Wx\sigma_{xz}Nz\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial Wx}{\partial z}\sigma_{xz}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega Wxbx\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{52.9}$$

30 Lembrando que as traçãos são dadas por Eq. O.5

$$\begin{aligned}t_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ t_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ t_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z\end{aligned}$$

Então a equação anterior reduz-se para

$$\int_\Gamma w_x t_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\sigma_{xz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0$$

31 Da mesma forma, nós obtemos para as outras duas equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}\int_\Gamma w_y t_y \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_y}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\sigma_{yz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_y b_y \mathrm{d}\Omega &= 0 \\ \int_\Gamma w_z t_z \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_z b_z \mathrm{d}\Omega &= 0\end{aligned}$$

32 Somando essas três equações

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_\Gamma (w_x t_x + w_y t_y + w_z t_z)\mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{W}^T\mathbf{t}} + \underbrace{\int_\Omega (w_x b_x + w_y b_y + w_z b_z)\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{w}^T\mathbf{b}} \\ &-\int_\Omega \left[\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \right. \\ &\left.\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\sigma_{yz}\right]\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{52.10}$$

33 Vamos nos concentrar no terceiro termo da equação anterior. For $\mathbf{w} = \lfloor\ w_x \quad w_y \quad w_z\ \rfloor^T$, then

$$(\mathbf{Lw})^T = \lfloor\ \frac{\partial w_x}{\partial x};\quad \frac{\partial w_y}{\partial y};\quad \frac{\partial w_z}{\partial z};\quad \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x};\quad \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x};\quad \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y};\ \rfloor$$

[5] Da Eq. R.6, $\int_\Omega \Phi\nabla\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega(\nabla\Phi)^T\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega$. If we set $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$, we obtain $\int_\Omega \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi\mathrm{d}\Omega$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

e..

$$(\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\sigma_{yz} \tag{52.11}$$

34 Assim, substituindo o Eq. 52.11 Eq. 52.10 Nós conseguimos

$$\int_\Omega (\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

35 Mas desde que.. $\mathbf{L}$ O operador é simétrico, da Eq. 52.2, a equação acima também pode ser escrita como

$$\int_\Omega \mathbf{w}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega \tag{52.12}$$

que é o *Forma fraca* do equação diferencial de equilíbrio submetido à tração (natural) condições de contorno.

36 O *Vetor de peso* $\mathbf{w}$ é completamente arbitrário. No princípio do virtual deslocamento, corresponderia ao virtual deslocamento, compare esta última equação com Eq. 48.26.

$$\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{52.13}$$

52.4.2 Fe discretização

37 Dado que o campo deslocamento está escrito como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}$$

Onde $\mathbf{N}$ são os funções de forma, e $\overline{\mathbf{u}}$ são os nodais conhecidos deslocamentos. Note que esta é a aplicação da Eq. 52.4

38 O método Galerkin usa o funções de forma para o peso (funções W_i) Por isso, Eq. 52.5 Vai ser

$$\mathbf{w} = \mathbf{Nc}; \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^T$$

e..

$$\mathbf{Lw} = \mathbf{LNc} = \mathbf{Bc}$$

39 Inserindo as duas últimas equações na forma fraca, e lembrando que o L operador (O.7) é simétrico, Eq. 52.12, os rendimentos

$$\mathbf{c}^T\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega\right) = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(Note semelhança com Eq. 52.6). Desde então **c** é uma matriz arbitrária, concluímos que

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \tag{52.14}$$

Esta equação é aplicável tanto a sistemas lineares quanto não lineares. A mão direita O lado representa o efeito da carga.

40 Em seguida, introduzimos um modelo constitutivo, Eq. O.11 Que é Reescrito em forma de vetor

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$$

41 Os tensão e deformação são dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

42 Inserindo essas duas equações em Eq. 52.14, os rendimentos

$$\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega}_{\mathbf{K}^e}\, \overline{\mathbf{u}} = \underbrace{\int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma}_{\mathbf{f}_1} + \underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega}_{\mathbf{f}_0}$$

43 Assim, usando a abordagem de Galerkin, recuperamos a mesma formulação rigidez que a obtida anteriormente de um Princípio Variacional Eq. 50.10).

44 Considerando que pode não haver nenhuma vantagem mais clara em usar o Galerkin abordagem quando um princípio variacional está disponível, esta pode ser a única formulação possível na ausência do segundo.

52.4.2.1 Ex 52.3: Matriz de rigidez de um elemento viga

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Introdução

Nós procuramos derivar o matriz de rigidez para um elemento viga usando o método Galerkin.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

A equação básica para a deflexão $v(x)$ de um Euler-Bernoulli viga sob um carga distribuída $q(x)$ é:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

Multiplique ambos os lados do equação diferencial por uma função de peso $\psi(x)$ E integrar-se ao longo do comprimento L do elemento viga

$$\int_0^L \psi(x)\left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x)\right)dx = 0$$

Para reduzir a ordem dos derivados em v, nós integramos por partes. Considere o termo com a mais alta derivada:

$$\int_0^L \psi(x)EI\frac{d^4v}{dx^4}dx$$

Integrar por partes duas vezes para mover derivados de v para ψ:

$$\int_0^L \psi EI\frac{d^4v}{dx^4}dx = -\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx + \left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$$

Os termos de fronteira $\left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$ são zero se a função de peso ψ satisfaz o condições de contorno.

Aplicando integração por partes novamente para $\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx$:

$$-\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx = \int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx - \left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$$

Novamente, os termos de fronteira $\left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$ Desapareça sob o adequado condições de contorno ψ.

Assim, a forma fraca da equação governante torna-se:

$$\int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx = \int_0^L \psi q(x)dx$$

Suponha uma solução aproximada para $v(x)$ como uma combinação linear de funções de forma $N_i(x)$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)$$

Onde v_i são os nodais deslocamentos e $N_i(x)$ são os funções de forma.

Da mesma forma, escolha as funções de peso ψ Ser o funções de forma $N_j(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

Substitua as aproximações na equação da forma fraca:

$$\int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2}EI\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)\right)dx = \int_0^L N_j(x)q(x)dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Isso simplifica:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

Nós claramente reconhecemos uma declaração de equilíbrio em termos de matriz de rigidez, deslocamento, e força. Assim

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} dx$$

$$f_j = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

Para o elemento de dois nós viga com cúbico funções de forma:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

Computar suas segundas derivadas:

$$\frac{d^2N_1}{dx^2} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2N_2}{dx^2} = \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}$$

$$\frac{d^2N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2N_4}{dx^2} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

Agora, computar as entradas matriz de rigidez:

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} EI \frac{d^2N_j}{dx^2} dx$$

Para um elemento típico viga, o resultado matriz de rigidez é 4×4 Matriz:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

52.4.2.2 Ex 52.4: Transferência de calor

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Nós procuramos resolver o problema de transferência de calor caracterizado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde: $u(x,t)$ é a distribuição de temperatura, α é a difusividade térmica.

Resolvemos esta equação no domínio $0 \leq x \leq L$ com a seguinte inicial e condições de contorno:

- Condição inicial: $u(x,0) = u_0(x)$,
- Condições de contorno: $u(0,t) = u_L$ e.. $u(L,t) = u_R$.

O método Galerkin envolve os seguintes passos:

1. Forma Fraca da Equação de Calor
2. Solução aproximada usando funções de base
3. Formulação de Galerkin
4. Montagem do Sistema de Equações
5. Integração do Tempo

Primeiro, multiplique a equação de calor por uma função de teste $\psi(x)$ E integrar-se sobre o domínio $[0, L]$:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2}\, dx$$

Integrar o lado direito por partes para reduzir a ordem da derivada:

$$\alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx + \left[\alpha \psi(x) \frac{\partial u}{dx}\right]_0^L$$

Assumindo a função de teste $\psi(x)$ satisfaz o condições de contorno para que os termos de limite desapareçam, nós temos:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx$$

Nós assumimos uma solução aproximada $u(x,t)$ como uma combinação linear de funções de base $N_i(x)$:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x)$$

Onde $U_i(t)$ são coeficientes dependentes do tempo a serem determinados e $N_i(x)$ são as funções de base espacial.

Escolha as funções de teste ψ para ser o mesmo que as funções de base $N_j(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substituímos a solução aproximada e as funções de teste na forma fraca:

$$\int_0^L N_j(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t)N_i(x)\right)dx = -\alpha\int_0^L \frac{\partial N_j}{dx}\frac{\partial}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t)N_i(x)\right)dx$$

Isso simplifica:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dU_i(t)}{dt}\int_0^L N_j(x)N_i(x)\,dx = -\alpha\sum_{i=1}^{n}U_i(t)\int_0^L \frac{\partial N_j}{dx}\frac{\partial N_i}{dx}\,dx$$

Defina o matriz de massa M e o matriz de rigidez K:

$$M_{ji} = \int_0^L N_j(x)N_i(x)\,dx$$

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx}\frac{\partial N_i}{dx}\,dx$$

O sistema de equações torna-se:

$$M\frac{dU}{dt} = -\alpha KU$$

Onde $U = [U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)]^2$.

Use um método de passo no tempo, como o método Euler para integrar o sistema de equações no tempo:

$$M\frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha KU^{(k)}$$

Reorganizar dá:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t M^{-1}(-\alpha KU^{(k)})$$

Agora consideramos funções específicas de base. Ou a simplicidade, nós Considere funções de base linear. Divida o domínio $[0, L]$ em n Elementos de comprimento igual $h = L/n$.. Defina as funções de base $N_i(x)$ como funções lineares que são 1 no nó i e 0 em todos os outros nós.

Para dois elementos lineares, as funções de base $N_1(x)$ e.. $N_2(x)$ Pode ser definido como:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 1 - \frac{x-h}{h} & h \le x \le 2h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

O matriz de massa M e matriz de rigidez K para estas funções de base são calculadas como:

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

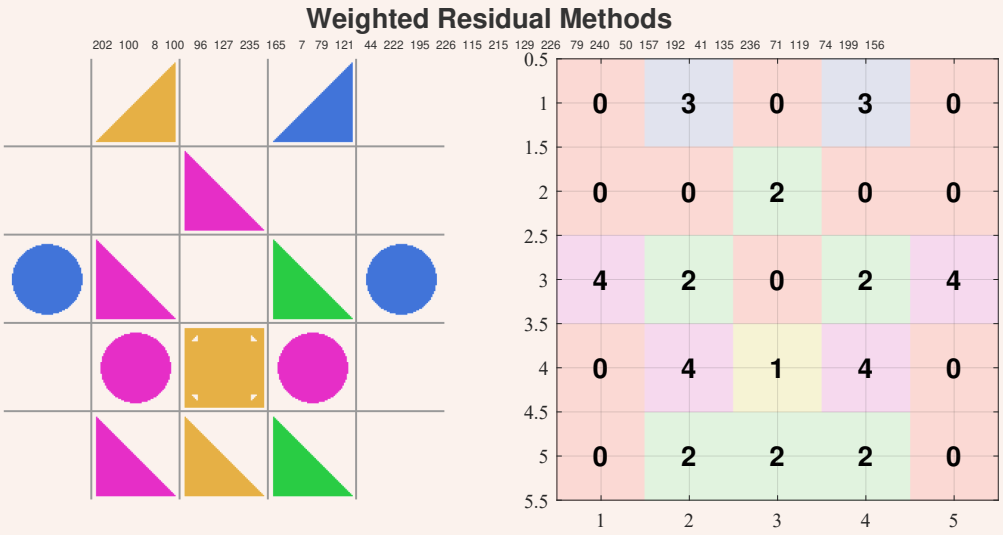
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O sistema de equações para o método Euler dianteiro torna-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

Solucionando $U^{(k+1)}$:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \frac{\alpha \Delta t}{h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 53

Dinâmica II

Abstract

Este capítulo é destinado a um curso de pós-graduação do primeiro ano e desenvolve as ferramentas computacionais e avançadas necessárias para uma análise dinâmica realista. Depois de formular o general equações de movimento para sistemas estruturais e estabelecer as idealizações usadas para estruturas emolduradas, enfatiza a análise transitória através da discretização do tempo e integração passo-a-passo. Algoritmos clássicos (diferença central e métodos do tipo Newmark) são apresentados com atenção à estabilidade, precisão e numérica amortecimento. O capítulo então estende a discussão para sistemas contínuos e dinâmica não linear, e conclui com considerações práticas de modelagem e uma clara distinção entre verificação e validação. Quando apropriado, medidas de resposta determinísticas estão ligadas ao Capítulo 72 Para sua interpretação probabilística baseada em desempenho.

Posto de sinalização. Capítulo 35 enfatizou a compreensão analítica sob suposições lineares. O presente capítulo começa onde métodos lineares de forma fechada atingem seus limites: Formulações generalizadas do sistema, computação transitória e resposta não linear.

Análise Dinâmica Transiente

Abstract

Dynamics é um Sene qua non *para investigação sísmica de estruturas. Em vez de revisar seus fundamentos, este capítulo focará nos aspectos computacionais como implementados em códigos de análise elemento finito. O capítulo começa com a discretização de um edifício para análise dinâmica, seguido pela formulação variacional do problema dinâmico, então técnicas de integração temporal são discutidas.*

CÓPIA PARA REVISÃO

53.1 Introdução 1836
53.2 idealização para análise dinâmica . 1837
53.2.1 Axial *vs* Flexural Rigidez . . 1837
53.2.2 Modelo 1838
53.3 Formulação de problemas 1842
53.3.1 Formulação variada 1842
53.3.2 Representação em massa . . 1844
53.3.3 Amortecimento 1845
53.3.4 Técnica numérica: Métodos Euler 1849
53.4 Discretização do tempo 1851
53.4.1 Implícito 1852
53.4.2 Integração de tempo explícita 1857
53.5 Métodos numéricos para análise dinâmica 1861
53.5.1 Método de Diferença Central 1861
53.5.2 Ex 53.5: Passo de estabilidade da diferença central . . 1861
53.5.3 Método Newmark-Beta . . . 1862
53.5.4 Superposição Modal vs. Integração Direta 1862
53.6 Sistemas contínuos 1863
53.6.1 Vibração Axial de Barras . . 1863
53.6.2 Vibração transversal de Vigas 1865
53.7 Dinâmica não linear 1866
53.7.1 Fontes de não linearidade . . 1866
53.7.2 Dutilidade e Design de Capacidade 1866
53.8 Considerações Práticas 1867
53.8.1 Amortecimento em Estruturas Real 1867
53.8.2 Interação estrutura-solo . . . 1867
53.8.3 Ajustados Dampers de Massa 1867
53.8.4 Isolamento Base 1868
53.9 Resumo 1868

Para o contexto histórico, consultar §12.3.6

53.1 Introdução

1 Quando a frequência da carga aplicada (excitação) de uma estrutura é menor que cerca de um terço de sua menor frequência natural vibração, então podemos negligenciar efeitos de inércia e tratar o problema como um quase-estático, caso contrário, uma análise dinâmica deve ser Realizado.

2 Para uma estrutura muito flexível, até mesmo um *Carga aplicada lentamente* Pode precisar de uma análise dinâmica.

3 Se a estrutura é submetida a um carga de impacto, do que se deve estar principalmente preocupado com a propagação da onda (tensão). Em tal problema, muitas vezes temos *Freqüências altas* E a duração da análise dinâmica é sobre o tempo que leva para a onda viajar através da estrutura.

4 Se as forças de inércia estão presentes, então somos confrontados com um problema dinâmico e podemos analisá-lo através de qualquer um dos seguintes procedimentos de solução:

1. Espectro de resposta (somente sistemas elásticos lineares)
2. Análise da história do tempo através de análise modal (novamente elástico linear), ou Integração em tempo direto.

CÓPIA PARA REVISÃO

3. Prof. Wilson disse:

   > *Ray Clough e eu lamentamos termos criado o método aproximado espectro de resposta para análise sísmica de estruturas em 1962... Naquela época, muitos membros da profissão estavam usando a soma dos valores absolutos dos valores modais para estimar as forças máximas dos membros. Ray sugeriu usar o método SRSS para combinar os valores modais. No entanto, fui eu quem colocou o método aproximado em muitos programas de análise dinâmica que permitiram aos engenheiros produzir números positivos sem sentido de pouco ou nenhum valor... Depois de trabalhar com o RSM por mais de 50 anos, eu recomendo que não seja usado para análise sísmica.*

4. Métodos de dinâmica estrutural são essencialmente independentes da análise elemento finito como esses métodos presumem que já temos a massa, e matrizes de amortecimento. Essas matrizes podem ser obtidas de um único sistema grau de liberdade, de uma idealização/simplificação de uma estrutura pórtico, ou de uma malha muito complexa elemento finito. O procedimento de análise do histórico temporal continua o mesmo.

5 Note que o apêndice 35.4.3 e.. K cobrirá brevemente as técnicas de filtragem de vibrações livres e registros sísmicos.

53.2 idealização para análise dinâmica

53.2.1 Axial *vs* Flexural Rigidez

6 Como um lembrete, antes de examinarmos a modelagem da construção sujeita à lateral (por exemplo: carga sísmica, pode ser útil para colocar em perspectiva a importância do axial *vs* Rigidez da flexão, Fig. 53.1a.

7 A razão entre axial e flexão é:

$$\alpha = \frac{k_a}{k_t} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{AL^2}{12I}$$

Por um.. $b \times h$ Seção retangular, com $b = h/2$, e $L = 10h$Nós teríamos.. $\alpha = 100$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

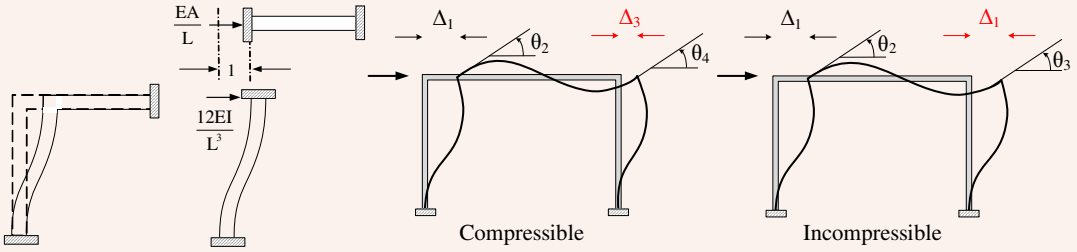
8 Para uma seção W com

$$\left.\begin{aligned} Z &\approx \frac{wd}{9} \\ \frac{Z}{S} &= \xi = 1.1 \\ S &= \frac{I}{\frac{d}{2}} \\ w &= (490)\ \text{lbs/ft}^3 A \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} I &\approx 0.208 A d^2 \\ \alpha &= \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12E(0.208)Ad^2}{L^3}} = 0.4\left(\frac{L}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

9 Para a estrutura de aço, podemos supor
$L = 20d, \Rightarrow \alpha = 160$

10 Nota: Podemos ter deformações axiais insignificantes, no entanto força axial não é negligenciável. Isto é muitas vezes explorado em análise sísmica, permitindo-nos substituir um (curto) edifício multi-baias por um único pilar com massas amontoadas.

11 If $\alpha >\approx 10$ Nós podemos ignorar a deformação axial, e Reduzir o número de graus de liberdade, Fig. 53.1b.. Portanto, se o pórtico é submetido a carga lateral (vento ou terremoto), força cortante em cada pilar é proporcional à sua flexão rigidez.



(a) Rigidez axial e flexural (b) Impacto na análise pórtico

Figura 53.1: Axial *vs* Rigidez da flexão

53.2.2 Modelo

12 Para multi-história/baias pórticos, podemos reduzir substancialmente o número de sem restrições graus de liberdade (e, portanto, tamanho de matrizes a serem invertidas).

13 Ignorando a deformação axial, facilita grandemente a análise dinâmica do edifício de pequena elevação pórticos submetido à carga lateral (vento, terremotos).

14 O diagrama de corpo livre de um edifício submetido à carga lateral e com axial ignorada rigidez, é mostrado na figura. 53.1a.

CÓPIA PARA REVISÃO

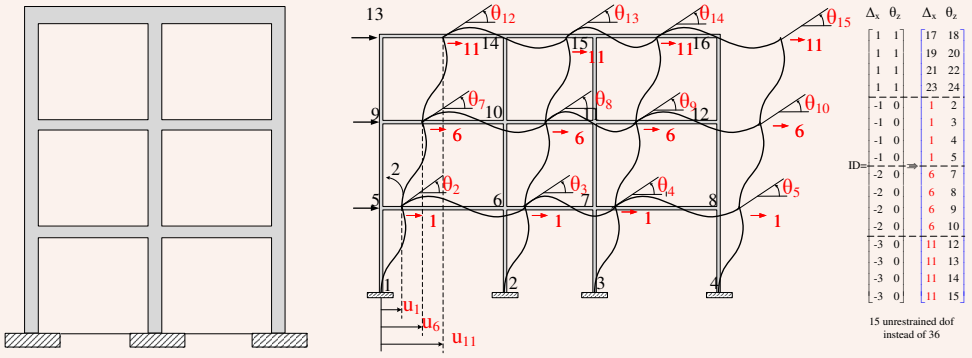


Figura 53.2: Redução de sem restrições quando axial é ignorada

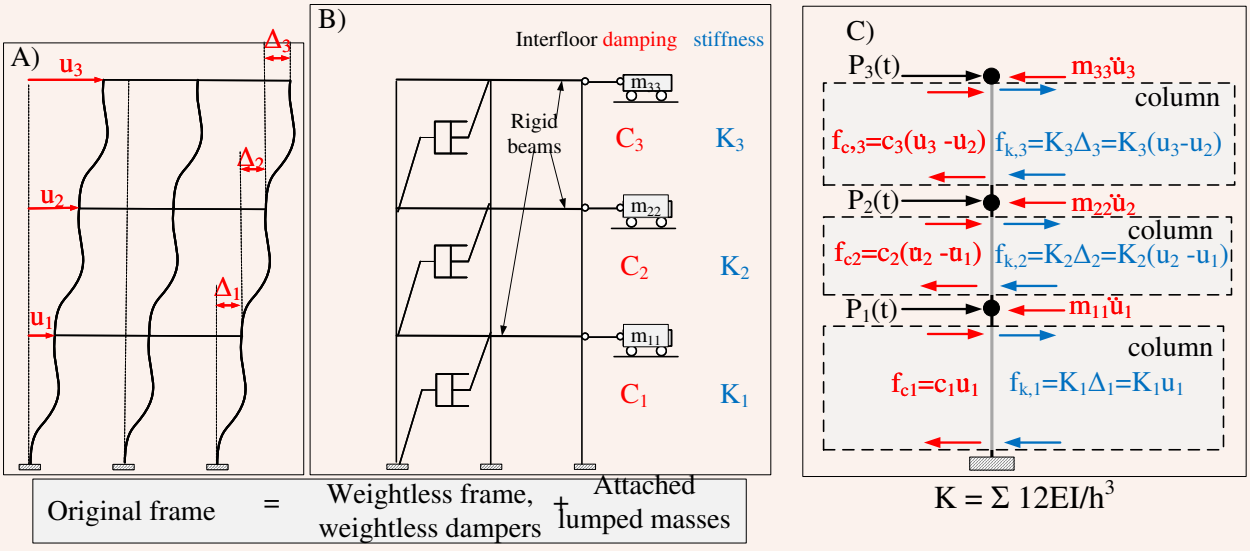


Figura 53.3: Modelo de construção para carga sísmica

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

15 As forças rigidez e amortecimento são dadas por (notando que $\Delta_i = u_i - u_{i-1}$, Fig. 53.3-A)

$$\begin{aligned}
F_{K,1} &= f_{k,1} - f_{k,2} = K_1 u_1 - K_2(u_2 - u_1) \\
F_{K,2} &= f_{k,2} - f_{k,3} = K_2(u_2 - u_1) - K_3(u_3 - u_2) \\
F_{K,3} &= f_{k,3} \qquad\quad = K_3(u_3 - u_2) \\
\hline
F_{C,1} &= f_{c,1} - f_{c,2} = c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\
F_{C,2} &= f_{c,2} - f_{c,3} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\
F_{C,3} &= f_{c,3} \qquad\quad = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2)
\end{aligned} \tag{53.1}$$

Onde $F_{K,i}$ e.. $F_{C,i}$ são a rede esforços internos devido a rigidez e amortecimento aplicada em nós. Exceto no último andar, há Duas contribuições, um acima e outro abaixo do nó, Fig. 53.3-C)).

16 A história é a soma das rigidezes laterais de todos pilares na história $K_i = \sum_{columns} \frac{12EI_c}{h^3}$.

17 Rigidez forças: $F_{K,i} = f_{k,i} - f_{k,i+1}$.

18 Força cortante (no final do membro) $\mathbf{f}_i$ está relacionado com piso relativo deslocamentos $\mathbf{f}_i = K_i \Delta_i = K_i(u_i - u_{i-1})$.

19 Aplicando a segunda lei de movimento de Newton em cada um dos três nós, Fig. 53.4Podemos reescrever o Eq. 53.1 Como

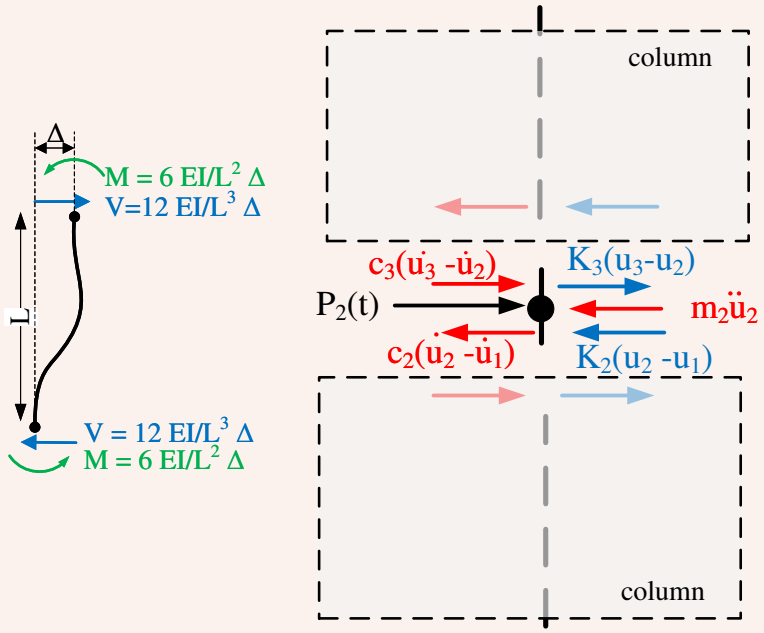


Figura 53.4: Diagrama de corpo livre de um nó

$$\begin{array}{llll}
P_3(t) & -m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) & -K_3(u_3 - u_2) & = 0 \\
P_2(t) & -m_{22}\ddot{u}_2 & +c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) & +K_3(u_3 - u_2) - K_2(u_2 - u_1) & = 0 \\
P_1(t) & -m_{11}\ddot{u}_1 & +c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_1\dot{u}_1 & +K_2(u_2 - u_1) - K_1 u_1 & = 0
\end{array}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Reorganizando os termos:

$$\begin{array}{llll} m_{11}\ddot{u}_1 & +(c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 & +(k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 & = P_1(t) \\ m_{22}\ddot{u}_2 & -c_2\dot{u}_1 + (c_2+c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 & -k_2u_1 + (k_2+k_3)u_2 - k_3u_3 & = P_2(t) \\ m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 & -K_3u_2 + K_3u_3 & = P_3(t) \end{array}$$

ou

$$\mathbf{M}\{\ddot{u}\} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t)$$

Onde

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

53.2.2.1 Ex 53.1: Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral

Adaptado de (Bucher, 2009).

Nós reexaminamos o prédio em Fig. 53.3, mas estenda-o para quatro andares. Ele é submetido a quatro cargas estáticas F_i, $i = 1, 2, 3, 4$.. O chão lajes é assumido como rígido e o pilares têm idêntico comprimento $H = 4$ M e diferentes rigidezes de flexão EI_k, $k = 1...8$.. Cargas e rigidezes são *variáveis aleatórias*.. As cargas são normalmente distribuídas com um valor médio de 20 kN e um COV de 0,4, as rigidezes são normalmente distribuídos com um nível médio de 10 MNm^2 e um COV de 0,2. Todas as variáveis são independentes em pares. Queremos computar

- o valor médio e desvio padrão, bem como o coeficiente de variação da horizontal deslocamento u da primeira história,
- A probabilidade p_F Isso u excede um valor de 0,1 m.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A análise deve ser baseada no comportamento elástico linear da estrutura excluindo efeitos da gravidade. A deflexão da história superior pode ser calculada adicionando o parente interstory deslocamentos 53.3

$$u_4 = \frac{F_4 H^3}{12\left(EI_7 + EI_8\right)}$$
$$u_3 = \frac{\left(F_3 + F_4\right) H^3}{12\left(EI_5 + EI_6\right)}$$
$$u_2 = \frac{\left(F_2 + F_3 + F_4\right) H^3}{12\left(EI_3 + EI_4\right)}$$
$$u_1 = \frac{\left(F_1 + F_2 + F_3 + F_4\right) H^3}{12\left(EI_1 + EI_2\right)}$$
$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

A MATLAB®código para este exemplo está listado em §I.2.15 Que se entrega $\mu_u = 0.0545$, $\sigma_u = 0.0128$, $COV = 0.2353$, e a probabilidade de fracasso é ${}_PF == 7.6100e - 04$

53.3 Formulação de problemas

53.3.1 Formulação variada

20 Em um contínuo tridimensional geral, o equação de movimento de um volume elementar Ω Sem amortecimento é

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \tag{53.2}$$

Onde $\mathbf{m}$ é a matriz de densidade de massa igual a $\rho\mathbf{I}$, e $\mathbf{b}$ é o vetor de forças do corpo.

21 O operador diferencial $\mathbf{L}$ (Eq. O.7) é

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

22 Para material elástico linear

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}$$

e para material não linear, as equações constitutivas podem ser escritas como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $\mathbf{D}_i$ é a matriz rigidez tangente .

23 Considerando que Equação 53.2 descreve o movimento corporal em um sentido forte, uma formulação fraca é obtida pelo princípio do mínimo complementar trabalho virtual (ou Residual Peso / Galerkin)

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T[\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}]\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{53.3}$$

24 Aplicando o teorema da divergência de Gauss, Equação R.4:

$$\int\int_A \phi \mathrm{div}\ \mathbf{q}\mathrm{d}A = \oint_s \phi\mathbf{q}^T\mathbf{n}\mathrm{d}s - \int\int_A (\nabla\phi)^T\mathbf{q}\mathrm{d}A$$

e lembrando que $\mathbf{Lu} = \boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma$$

25 Assim, Equação 53.3 Transforma-se em

$$\int_\Omega [\delta\mathbf{u}^T(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}]\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{53.4}$$

Até agora, nenhuma suposição foi feita em relação ao comportamento material.

26 Em seguida, procuraremos a discretização espacial da equação trabalho virtual (Equação) 53.4). De fundamentos de elementos finitos, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} \\
\delta\mathbf{u}^T &= \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{N}^T \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\ddot{\overline{\mathbf{u}}} \\
\mathbf{B} &= \mathbf{L}\mathbf{N} \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T &= \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T \\
\dot{\varepsilon} &= \mathbf{B}\dot{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}$$

27 Por problemas lineares $\boldsymbol{\sigma}_{t,n} = \mathbf{D}_e\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_{t,n}$, e com a substituição adequada, isso renderia

$$\underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\,\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\mathbf{M}_{tt}}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega\,\overline{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{K}}}_{\mathbf{P}^{int}_{t,n}} - \underbrace{\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{P}^{ext}_{t,n}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}_{t,n}\mathrm{d}\Gamma\right)}_{\mathbf{P}^{ext}_{t,n}} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou $\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{t,n} + \mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ Que representa o semi-discreto linear equação de movimento na integração de tempo implícita.

28 Observe a semelhança entre o matriz de massa e o geométrico (Eq. 60.5)

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega$$
$$\mathbf{k}_g^{(e)} = P^{(e)} \int_L \mathbf{N}_{,x} \mathbf{N}_{,x} dx$$

29 Note também a ausência do coeficiente amortecimento (que é um não-racional numérico "'trick").

30 Se assumirmos viscosa amortecimento (veja abaixo) e substituir $\overline{\mathbf{u}}$ por $\mathbf{u}$ Nós conseguimos

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{P}_t^{int} = \mathbf{P}_t^{ext} \tag{53.5}$$

Onde $\mathbf{M}_{tt}$ e.. $\mathbf{C}_{tt}$ são a massa e viscosa matrizes de amortecimento para a idealização da estrutura; $\ddot{\mathbf{u}}_t$ é o vetor de aceleração nodal, $\dot{\mathbf{u}}_t$ é o vetor de velocidade nodal, $\mathbf{P}_t^{int}$ é o vetor de força nodal interno ou restaurador estático resultante do vetor nodal deslocamento $\mathbf{u}_t$, e $\mathbf{P}_t^{ext}$ é o vetor das forças nodais aplicadas devido a uma carga sísmica.

53.3.2 Representação em massa

31 Há duas possíveis representações do matriz de massa: Embalado e consistente.

Massa amassada: Supõe-se que todas as massas estão concentradas nos nós finais. Embora não exatamente correto, a vantagem deste modelo é que teremos uma matriz diagonal que pode ser facilmente invertida. Se o movimento axial do elemento viga estiver incluído, o vetor matriz de massa, com o correspondente deslocamento, então

$$\mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que temos zero termos ao longo da diagonal correspondente a DOF rotacional. Para incluir o DOF rotacional, consideramos um disco de comprimento dx, na coordenada x do primeiro nó. A rotação momento de inércia deste "disk" sobre o nó o primeiro nó é

$$dm_r = \rho \left(\frac{I}{A} + x^2 \right) dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde ρ é a densidade de massa (massa por unidade de comprimento) do elemento, e A é a área da seção transversal viga. Porque a inércia rotativa de metade de um elemento é colocada em cada nó, teremos assim

$$m_{ri} = m_{rj} = \int_0^{L/2} dm_r = \frac{\rho L}{2}\left(\frac{I}{A} + \frac{L^2}{12}\right) = \frac{\rho L}{2}\left(r_y^2 + \frac{L^2}{12}\right)$$

E o seguinte rotacional matriz de massa deve ser adicionado ao translacional

$$m_r = \mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{rj} \end{bmatrix} = \frac{\rho L}{2}\left(r_y^2 + \frac{L^2}{12}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Massa consistente: usa um equivalente cinematicamente matriz de massa onde as forças de inércia estão associadas com todas graus de liberdade. Dado

$$\mathbf{m}_e = \int_0^{L_e} \rho \cdot A(x) \cdot \mathbf{N}_d(x)^T \cdot \mathbf{N}_d(x) \mathrm{d}x$$

Substituindo o funções de forma pelo viga comn (Eq. 49.11- Nós conseguimos

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho \cdot A \cdot L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 \cdot L_e & 0 & 54 & -13 \cdot L_e \\ 0 & 22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 & 0 & 13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 \cdot L_e & 0 & 156 & -22 \cdot L_e \\ 0 & -13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 & 0 & -22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 \end{bmatrix}$$

O matriz de massa é então transformado em referência global $\mathbf{M}_e = \mathbf{\Gamma}_e^T \cdot \mathbf{m}_e \cdot \mathbf{\Gamma}_e$

53.3.3 Amortecimento

32 Todas as estruturas estão amortecidas, ($2nd$ Lei da termodinâmica) caso contrário suas oscilações nunca irão parar. Amortecimento pode ser visto como uma força de fricção que dissipa energia, e pode tomar forma diferente.

33 A forma mais usada de amortecimento é a chamada viscosa ou Rayleigh amortecimento, que, quando inserida no equação de movimento, tem a seguinte forma

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}_{t,n}^{int} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

onde, $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ e.. $\mathbf{u}_{t,n}$ são os vetores de aceleração nodal, velocidade e deslocamento na etapa atual do tempo, respectivamente; $\mathbf{P}_{t,n}^{int}$ é a restauração estática ou o vetor interno de força nodal na etapa atual.

34 Amortecimento é suposto modelar a dissipação de energia. Em uma análise não linear, isso é explicado por alguns modelos constitutivos que incluem histerisis amortecimento, como o modelo Modified Kent e Park para concreto. Portanto, grande cuidado deve ser exercido em adicionar amortecimento a uma análise não linear.

35 Na análise linear elástica, a forma mais comum de amortecimento é o chamado Viscoso amortecimento (mais conhecido como Rayleigh amortecimento). Nesta simplificação, assumimos a presença de um amortecedor viscoso (que por definição é sensível à velocidade) entre a estrutura e um ponto fixo externo (mass proporcional), e outro conjunto de amortecedores dentro da estrutura que conecta todos os graus de liberdade (rigidez amortecedor proporcional), Fig. 53.5. Viscoso amortecimento: $\mathbf{C}_{tt} = a_m \cdot \mathbf{M}_{tt} + b_k \cdot \mathbf{K}_{tt}$ onde,

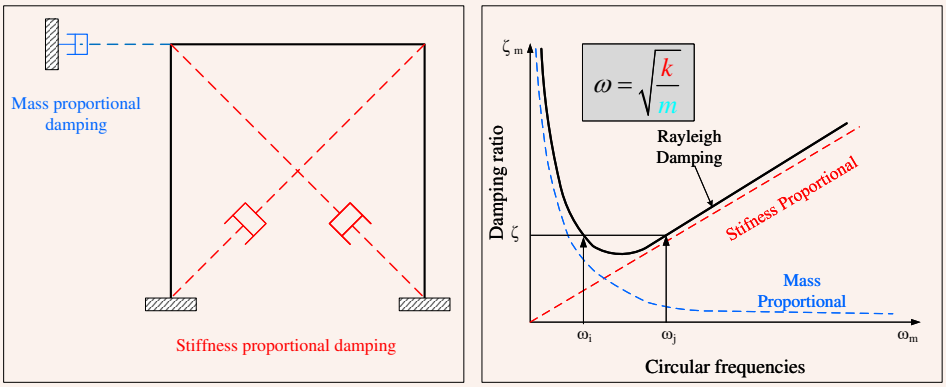


Figura 53.5: Massa e rigidez proporcional amortecimento

a_m e.. b_k são coeficientes que pré-multiplicam a massa e rigidez termos, respectivamente. Coeficientes a_m e.. b_k são calculadas com base em duas frequências circulares (ω_1 e.. ω_2, radianos / sec.) para ser amortecido em ξ_1 e.. ξ_2 respectivamente. Onde ω_m e.. ξ_m são a frequência circular e a relação amortecimento do m^{th} Modo. Pode ser facilmente mostrado que

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

36 Se alguém assume a mesma proporção ζ para ambos os modos (suposição prática razoável), então

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_i \cdot \omega_j}{\omega_i + \omega_j}; \quad b_k = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

37 Novamente, deve-se enfatizar que diferentes coeficientes amortecimento devem ser usados em análises lineares e não lineares (especialmente se o modelo constitutivo não

CÓPIA PARA REVISÃO

linear é responsável por histeris amortecimento. Além disso, se Rayleigh amortecimento é usado em uma análise não linear, então os coeficientes a_m e.. b_k pode ter que ser atualizado em cada incremento de tempo para refletir a mudança na tangencial matriz de rigidez $\mathbf{K}_t$.

[38] Na prática, podemos obter amortecimento coeficientes por excitar uma estrutura com shakers embora para apenas a faixa elástica.

53.3.3.1 Ex 53.2: Calibrando os coeficientes de Rayleigh amortecimento para um edifício cisalhamento

✳ Um prédio de três andares foi analisado e o Os dois primeiros foram identificados como $f_1 = 1.20$ Hz e.. $f_2 = 3.60$ Hz (i.e. $\omega_1 = 7.540$ rad/s e.. $\omega_2 = 22.619$ rad/s). Um alvo amortecimento proporção de $\zeta = 5\%$ deve ser atribuído a ambos os modos usando Rayleigh amortecimento $\mathbf{C} = a_m\mathbf{M} + b_k\mathbf{K}$. Determine: (a) os coeficientes a_m e.. b_k; (b) o implícito amortecimento proporção no terceiro modo ($f_3 = 6.00$ Hz, $\omega_3 = 37.699$ rad/s); (c) A interpretação da engenharia.

Solução.

(a) Coeficientes de Rayleigh.

Com igual amortecimento em ambos os modos de alvo, as fórmulas simplificadas dão:

$$a_m = \zeta\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} = 0.05\times\frac{2\times 7.540\times 22.619}{7.540+22.619} = 0.05\times\frac{341.1}{30.159} = 0.565\ \text{s}^{-1}$$

$$b_k = \zeta\frac{2}{\omega_1+\omega_2} = 0.05\times\frac{2}{30.159} = 3.32\times 10^{-3}\ \text{s}$$

b) Aplicado amortecimento no modo 3.

Para qualquer modo n com frequência ω_n, o modelo Rayleigh atribui um amortecimento relação:

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_m}{\omega_n} + b_k\omega_n\right)$$

Para o modo 3:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.565}{37.699} + 3.32\times 10^{-3}\times 37.699\right) = \frac{1}{2}(0.01499 + 0.12516) = 7.0\%$$

(c) Interpretação da engenharia.

Três observações valem a pena notar.

1. Modos 1 e 2 estão amortecidos exatamente no alvo 5% pela construção.
2. Modo 3, mentindo *Em cima* A banda de calibração, está sobrecarregada com 7%:. o termo rigidez-proporcional $b_k\omega_n$ cresce linearmente com frequência e domina para os modos altos. Em um elemento finito modelo com muitos modos, a maior frequência (comprimento de onda mais curto) Modos podem ser atribuídos artificialmente grandes amortecimento proporções — e O recurso intencional usado para suprimir a resposta espúria de alta frequência, mas uma fonte potencial de erro se esses modos carregam energia real.
3. O termo proporcional em massa a_m/ω_n Decaimentos com frequência e Seria modos de som exagerados *Para baixo* a banda de calibração (por exemplo, Muito Modos de balanço ou deslizamento de baixa frequência em estruturas isoladas de base), que deve ser manuseada com cuidado.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Estas características explicam porque a escolha das frequências de calibração (ω_i, ω_j) é uma decisão de modelagem, não puramente numérica. Eles devem fazer o intervalo de frequência onde a estrutura é dinâmica Espera-se que a resposta seja significativa.

53.3.3.2 Ex 53.3: Base analítica: Vibração livre das condições iniciais gerais

✳ Antes de se voltar para o tempo numérico, é instrutivo ter um exato Resultado em forma fechada contra o qual os integradores podem ser verificados. Considere um sistema SDOF amortecido com:

$$m = 2\,000 \text{ kg}, \quad k = 800\,000 \text{ N/m}, \quad \zeta = 2\%$$

Livre das condições iniciais $u_0 = 25$ mm e.. $v_0 = 80$ mm/s. Determine: (a) as propriedades do sistema; (b) A exata vibração livre Resposta $u(t)$; (c) A amplitude e a fase; (d) A resposta em $t = 0.20$ s e o tempo da primeira travessia zero.

Solução.

(a) Propriedades do sistema.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,000}{2\,000}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{20} = 0.3142 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20\sqrt{1-0.0004} = 19.996 \text{ rad/s}, \qquad T_d = 0.3143 \text{ s}$$

Por.. $\zeta = 2\%$ A diferença entre ω_d e.. ω_n É apenas 0,02%, confirmando que estruturas levemente amortecidas oscilam em essencialmente o não-ampado frequência natural.

(b) Resposta exata.

A maldita solução de vibração livre com $u(0) = u_0$ e.. $\dot{u}(0) = v_0$ é:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

Substituindo números ($\zeta\omega_n = 0.02 \times 20 = 0.40 \text{ s}^{-1}$, $\omega_d \approx 19.996$):

$$\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} = \frac{80 + 0.40 \times 25}{19.996} = \frac{90}{19.996} = 4.501 \text{ mm}$$

$$u(t) = e^{-0.40t}\,[25\cos(19.996\,t) + 4.501\sin(19.996\,t)] \quad \text{[mm]}$$

(c) Amplitude e fase.

Em forma de fase de amplitude $u(t) = \rho\, e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{25^2 + 4.501^2} = \sqrt{625 + 20.26} = 25.40 \text{ mm}$$

$$\tan\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} = \frac{4.501}{25} = 0.1800 \quad \Rightarrow \quad \phi = 10.2^\circ$$

(d) Resposta em $t = 0.20$ s e primeira passagem zero.

$$u(0.20) = e^{-0.40\times0.20}\,[25\cos(19.996 \times 0.20) + 4.501\sin(19.996 \times 0.20)]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

$$= e^{-0.08}\,[25\cos(3.9992) + 4.501\sin(3.9992)]$$

$\cos(3.9992\text{ rad}) = -0.6542$, $\sin(3.9992\text{ rad}) = -0.7563$:

$$u(0.20) = 0.9231\,[25\times(-0.6542) + 4.501\times(-0.7563)] = 0.9231\,[-16.35 - 3.404] = -18.24\text{ mm}$$

A primeira passagem zero depois $t = 0$ Ocorre quando $25\cos(\omega_d t) + 4.501\sin(\omega_d t) = 0$, i.e $\tan(\omega_d t) = -25/4.501 = -5.554$, dando $\omega_d t = \pi - \arctan(5.554) = \pi - 1.391 = 1.749$ rad:

$$t_0 = \frac{1.749}{19.996} = 0.0875\text{ s}$$

Comentário. Este resultado de forma fechada serve como o *Referência de verificação* para qualquer um Integrador numérico aplicado ao mesmo problema: com $\Delta t \to 0$, o Euler, diferença central e soluções Newmark devem convergir para $u(0.20) = -18.24$ mm. Comparando resultados numéricos com este valor em um único ponto de controle é uma simples, mas poderosa verificação da exatidão de implementação.

53.3.4 Técnica numérica: Métodos Euler

39 O método de Euler é um método numérico de primeira ordem para resolver problemas de valor iniciais (ou seja, Dinâmica). Ele usa a inclinação da linha tangente no ponto atual para estimar o valor da solução no próximo ponto. Este método usa um tamanho de passo fixo e requer apenas o valor inicial da solução e do próprio equação diferencial para calcular a solução em cada ponto. A principal vantagem do método de Euler é sua simplicidade e facilidade de implementação, mas ele pode sofrer de problemas de baixa precisão e estabilidade para alguns tipos de equações diferenciais.

40 Como consideramos derivadas cada vez maiores como velocidade, então aceleração, nós nos movemos para o que é conhecido como *Runge-Kutta*, onde a versão mais baixa do Runge-Kutta é o Método de Euler.

41 Em §59.1.1 usaremos outra técnica numérica, o método de Newton para encontrar uma solução para um equação diferencial.

42 No nosso problema, no final das contas, procuramos resolver o Eq. 53.5Mas antes de abordar o problema dinâmico§53.4Uma breve revisão do método de Euler é justificada.

43 O método Euler é um procedimento numérico para resolver valores iniciais equações diferenciais ordinárias (como em dinâmica estrutural). Em outras palavras, dada uma solução no momento t_n, como podemos obter a solução no momento t_{n+1}, Fig. 53.6 Will ilustra os dois métodos.

44 Note que nos referimos a *O método de Newton para análise não linear, e Euler para dinâmica*.

45 No nosso caso, discretizamos o espaço pelo elemento finito, e discorremos o tempo pelo diferença finita.

46 Como com o método de Newton (Eq. 59.1Começamos com a série Taylor.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Avante Euler/Explicit

$$y(t_n + h) \equiv y_{n+1} = y(t_n) + h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n} + O(h^2) \Rightarrow y^?_{n+1} \simeq y^{\checkmark}_n + h f(y^{\checkmark}_n, t_n) \tag{53.6}$$

Onde $h = \Delta t$, e $f(y_n, t_n) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n}$ Isso também é referido como explícito Desde então y_{n+1} é dado explicitamente em termos de quantidades conhecidas como y_n e.. $f(y_n, t_n)$ e não há equação para resolver. Métodos explícitos são fáceis de implementar, mas são zibelina condicional. h deve ser menor que um valor crítico). Isso é semelhante ao método aproximado passo a passo usado mais cedo para problemas geométricos não lineares.

Para trás Euler/Implícito Começa com a seguinte expansão da série Taylor

$$y(t_n) \equiv y_n = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} + O(h^2) \Rightarrow y^?_{n+1} \simeq y^{\checkmark}_n + h f(y^?_{n+1}, t_{n+1})$$

É um método implícito desde então $f(y_{n+1}, t_{n+1})$ não é conhecido e uma equação (geralmente) não linear deve ser resolvida a cada passo (possivelmente pelo método de Newton-Raphson). Evidentemente, isso é mais computacionalmente caro do que o método explícito, no entanto, o método é incondicionalmente estável.

[47] Notamos que o método implícito (ao custo de uma solução Newton-Raphson) sempre fornece uma solução "exata". No contexto da dinâmica estrutural, podemos dizer que o equilíbrio está satisfeito. Não é o caso no método explícito.

53.3.4.1 Ex 53.4: Método Euler

Procuramos resolver a seguinte ordem linear comum de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (t - y(t))^2; \qquad 2 \le t \le 3; \qquad y(0) = 1; n = 0$$

- Avante Euler com $h = 0.1$

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1 \left[1 + (2. - 1.)^2\right] = 1.2$$

- O Euler de trás para frente dará

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f(y_{n+1}, t_{n+1}) \\ \Rightarrow y_1 &= 1 + 0.1 \left[1 + (2.1 - y_1)^2\right] \\ \Rightarrow 0 &= 0.1 y_1^2 - 1.42 y_1 + 1.541 \\ \Rightarrow y_1 &= 1.1839 \end{aligned}$$

Neste caso, tivemos um Equação quadrática para resolverNo entanto, em geral temos que usar o método de Newton para resolver y_n.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- No contexto de não linear análise estrutural, isso implicaria que estamos verificando o equilíbrio em $n = 1$, o que não é o caso no método explícito.

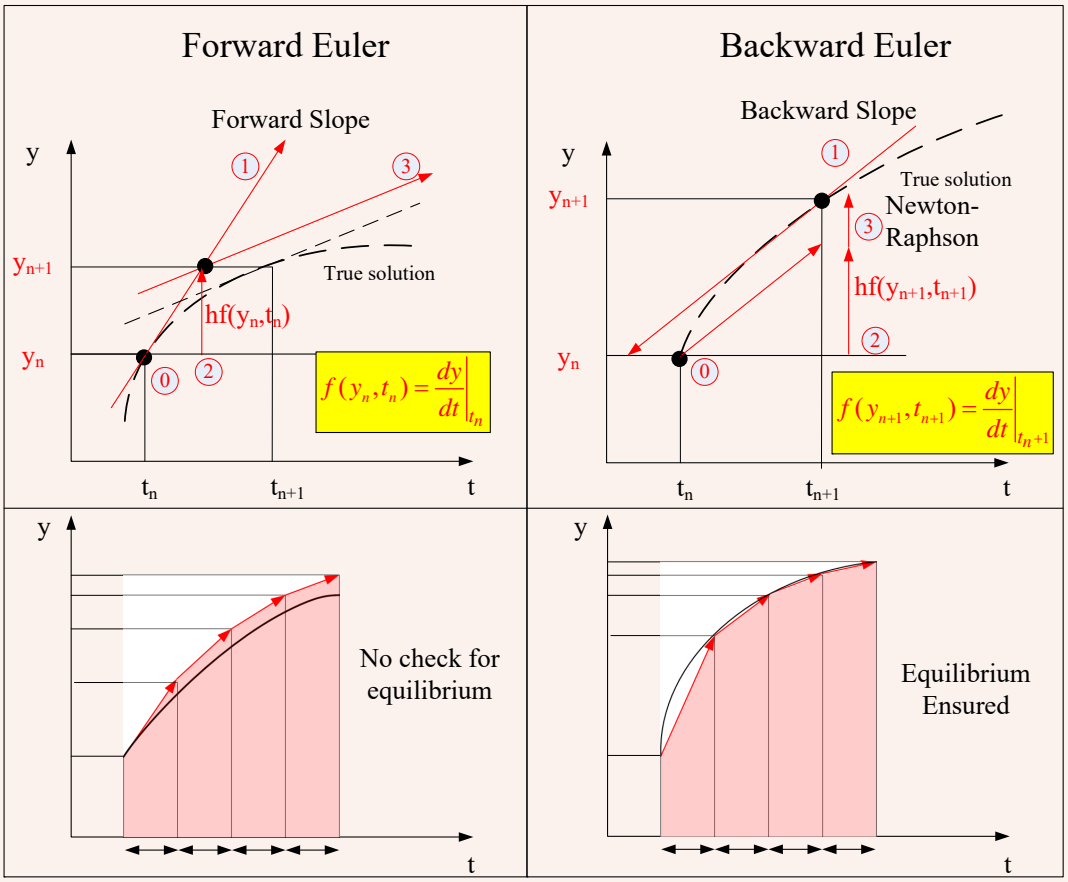


Figura 53.6: Euler para a frente vs Euler métodos atrasados

53.4 Discretização do tempo

48 Matematicamente, Equação 53.5 representa um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem, e em princípio, a solução das equações pode ser obtida por procedimentos padrão para a solução de equações diferencial com coeficientes constantes.

49 No entanto, os procedimentos propostos para a solução de sistemas gerais de equações diferenciais podem tornar-se muito caros se a ordem das matrizes é grande - a menos

CÓPIA PARA REVISÃO

que uma vantagem específica seja tomada das características especiais das matrizes do coeficiente **M**, **C**, e **K**.

50 Na análise prática elemento finito, estamos, portanto, principalmente interessados em alguns métodos eficazes, nomeadamente integração direta e superposição de modo. Estas duas técnicas estão intimamente relacionadas, e a escolha por um método ou outro é determinada apenas pela sua eficácia numérica. Na atual implementação, o método de integração direta é empregado.

51 No método de integração direta, Equação 53.5 é integrado usando um procedimento numérico passo a passo; o termo "direto"significa que antes da integração numérica, nenhuma transformação das equações em uma forma diferente é realizada.

53.4.1 Implícito

53.4.1.1 O método de Newmark

53.4.1.1.1 Derivação 52 O método de Newmark é uma generalização do método de Euler para equações diferenciais de segunda ordem (equação de movimento)

53 Começando com uma série da Taylor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} \quad \text{Forward Euler}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} \quad \text{Backward Euler}$$

54 O método de Newmark difere do método de Euler Substituindo derivados de ordem superior com expressões mais simples (e, portanto, menor precisão) para o bem da eficiência.

55 Novamente, nós primeiro consideramos as expansões da série Taylor do nodal deslocamento e termos vetoriais de velocidade sobre os valores na época anterior $n-1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t,n} &\approx \mathbf{u}_{t,n-1} + \frac{\partial \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &\approx \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\Delta t + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

Essas duas equações representam os vetores aproximados deslocamento e de velocidade

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

($\mathbf{u}_{t,n}$ e.. $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$) exceto por termos de alta ordem da série Taylor. Nós representamos o os últimos termos das duas equações acima como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{3!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t^2}{3!} \\
&\approx \beta(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t^2 \\
\frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t}{2!} \\
&\approx \gamma(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t
\end{aligned}$$

Onde β e.. γ são parâmetros que retratam aproximações numéricas.

56 Substituindo

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}) \\
\dot{\mathbf{u}}_{t,n} &= \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \gamma \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})
\end{aligned}$$

57 Assim, nós obtemos o Newmark β método, que consiste nas seguintes equações (diferença para frente):

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.7}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + 2\beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.8}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.9}$$

onde a primeira equação é a equação do equilíbrio expressa no tempo n, e as outras duas são fórmulas descrevendo a evolução da solução de aproximação (note que temos três equações e três desconhecidas: $\mathbf{u}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ e.. $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$.

58 β e.. γ são parâmetros que determinam as características de estabilidade e precisão. Condições de estabilidade para o Newmark β O método segue, tabela 53.1:

- incondicionalmente estável se $\gamma \geq \frac{1}{2}$ e.. $\beta \geq \frac{\gamma}{2}$
- Condicionalmente estável se $\gamma \geq \frac{1}{2}$ e.. $\beta < \frac{\gamma}{2}$ com o seguinte limite de estabilidade: $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} = 0.551$

53.4.1.1.2 Newmark β Método implícito 59 O método implícito do Newmark começa com Eqs. 53.7, 53.8 e.. 53.9 pode ser reescrito como:

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.10}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.11}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \Delta t \cdot \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.12}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Tabela 53.1: Condição de estabilidade para diferentes métodos

Método	Tipo	β	γ	Condição de estabilidade	Ordem de preci
Aceleração constante	Implícito	$1/4$	$1/2$	Incondicional	2
Aceleração linear	Implícito	$1/3!=1/6$	$1/2!=1/2$	$\Delta t \leq 2\sqrt{3}/\omega$	2
Diferença central	Explícito	0	$1/2$	$\Delta t \leq 2/\omega$	2

onde as quantidades conhecidas no passo do tempo $n-1$ ter um $\tilde{(.)}$ com

$$\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$

60 Eq. 53.11 dá $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} = \frac{\mathbf{u}_{t,n}-\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$;

61 Substituindo em Eq. 53.12 Podemos resolver para $\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(\mathbf{u}_{t,n} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n})$. Finalmente substituindo em Eq. 53.10 Nós obtemos:

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$
$$= \underbrace{\mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

62 Se as soluções de teste em dado passo iteração k são $\mathbf{u}^k_{t,n}$, e $\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$, então Não satisfaz o equações de movimento.. Assim, podemos escrever para este passo em particular com Vetor de força residual $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}\right) - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$$

onde, $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t \cdot \gamma \cdot \mathbf{C}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$

63 Usando o método iterativo inicial rigidez, podemos resolver para $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ De.. $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{K}_{eff} \cdot \Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$onde, $\mathbf{K}_{eff}$ é o efetivo matriz de rigidez, e $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}$.

64 Na seção elástica, $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n}$; Substituindo podemos resolver para $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff} \cdot \mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

onde, $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + \mathbf{K}_{tt}$ (desembaraçado ou consistente matriz de massa).

65 Finalmente, nós resolvemos para $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ e o vetor atualizado deslocamento $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ No próximo passo de iteração $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^k_{T,n} = [\mathbf{K}_{EF}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{T,n}; \quad \mathbf{u}^{k+1}_{T,n} = \mathbf{u}^k_{T,n} + \delta\mathbf{u}^k_{T,n}$$

Note que precisa inverter o matriz de massa apenas para uma matriz consistente.

66 Analogia de nota com análise não linear onde $\delta\mathbf{u}$ é igual à matriz rigidez tangente vezes a força residual.

53.4.1.2 Método Hilber-hughes-taylor

67 Uma grande desvantagem de Newmark β método é a tendência para ruído de alta frequência persistir na solução. Por outro lado, quando linear amortecimento ou viscosidade artificial é adicionado através do parâmetro γ, a precisão é marcadamente degradada.

68 Isto é abordado pelo Método Hilber-Hughes-Taylor (HHT) (também conhecido como α método), que vai melhorar a dissipação numérica para alta frequência sem degradar a precisão tanto

69 Equação de movimento no método HHT está escrito em Passo atual da hora n (diferença para a frente) como:

$$\underbrace{\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

Buscando uma solução aproximada desta equação por diferença de um passo, escrevemos

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

Notamos que o método HHT Apresentações $\alpha(\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \mathbf{P}^{int}_{t,n-1})$ Que é semelhante a rigidez proporcional amortecimento (de fato, é comum dizer que o α método fornece numérico amortecimento). Se a equação acima for expandida, o efeito de amortecimento introduzido, e possível não linearidade material introduzida, nós obtemos:

$$(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

If $-1/3 \leq \alpha \leq 0$, $\beta = (1-\alpha)^2/4$, e $\gamma = (1-2\alpha)/2$, em seguida, o α O método é incondicionalmente estável e tem uma precisão de segunda ordem.

70 Assumindo que obtivemos a resposta no passo anterior $n-1$, i.e. $\mathbf{u}_{t,n-1}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ e.. $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ que satisfazem o equação de movimento, nós agora Procure determinar a solução no passo atual n por iteração.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

71 Primeiro de tudo, precisamos determinar a força externa eficaz e efetiva rigidez.

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$
$$= \underbrace{(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\checkmark}$$
$$\underbrace{-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{\checkmark}$$

72 O soluções de teste Passo de iteração k são $\mathbf{u}^k_{t,n}$, e $\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$, Não necessariamente satisfaz o equações de movimento.. Assim, podemos escrever para este passo em particular:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}\right) - (1+\alpha)\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$- (1+\alpha)\mathbf{P}^{int,k}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

onde, $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t \cdot \gamma(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$ e.. $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ é o vetor de força residual.

73 Usando o método iterativo da rigidez inicial, podemos determinar $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ a partir de $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{K}_{eff} \cdot \Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$, onde $\mathbf{K}_{eff}$ é a matriz de rigidez efetiva e $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}$

74 Na seção elástica, podemos expressar $\mathbf{P}^{int}_{t,n}$ para calcular o efetivo matriz de rigidez com inicial matriz de rigidez $\mathbf{K}_{tt}$ como: $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n}$.

75 Substituindo nós resolvemos para $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff} \cdot \mathbf{u}_{t,n} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha \cdot \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \overline{\mathbf{M}}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - (1+\alpha) \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha \cdot \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \alpha \cdot \mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

onde, $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + (1+\alpha)\mathbf{K}_{tt}$

76 Finalmente, nós resolvemos para $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ e o vetor atualizado deslocamento $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ No próximo passo de iteração $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n};\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

77 Considerações finais:

- α introduz um amortecimento que cresce com a razão de incremento de tempo para o período de vibração de um nó.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- Valores negativos de α amortecimento
- If $\alpha = 0$, nós não temos artificial amortecimento (constituição de energia) e é exatamente a aceleração constante (regra trapezoidal) β método se $\beta = 1/4$ e.. $\gamma = 1/2$.
- O valor mínimo é $\alpha = -1/3$ que fornece o máximo artificial amortecimento. Isso resulta em uma proporção de cerca de 6% Quando o incremento de tempo é 40% do período de oscilação do modo sendo estudado e menor se o período de flutuação aumenta.
- Este artificial amortecimento não é muito substancial para incremento de tempo realístico e baixas frequências, mas não é negligível para altas frequências.
- Um valor padrão de -0,05 é recomendado.

53.4.2 Integração de tempo explícita

78 Para a integração explícita do tempo, adotamos no ponto de partida uma pequena variação da equação diferencial anteriormente derivada, que inclui os efeitos de amortecimento.

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_I(t)} + \underbrace{\mathbf{C}\dot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_D(t)} + \underbrace{\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}}_{\mathbf{F}_i(t)} = \underbrace{\mathbf{f}_e}_{\mathbf{f}_e(t)}$$

Onde $\mathbf{M}, \mathbf{C}$, e $\mathbf{K}$ são a massa, amortecimento, e matrizes de rigidez; $\mathbf{f}_e$ é o vetor de carga externa; e.. $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}$, e $\mathbf{u}$ são a aceleração, velocidade e vetores deslocamento da assembleia.

79 Uma forma alternativa de considerar esta equação é examinar a equação da estática no tempo t, onde $\mathbf{F}_I(t), \mathbf{F}_D(t), \mathbf{F}_i(t), \mathbf{F}_e(t)$ são a inércia, amortecimento, forças elásticas internas e externas, respectivamente.

53.4.2.1 Sistemas lineares

80 Para os semi-discretizados equação de movimento, adotamos o *Método de diferença central*.. Este método é baseado em uma aproximação diferença finita dos derivados de tempo de deslocamento (velocidade e aceleração). Assumindo uma mudança linear em deslocamento sobre cada passo de tempo, a velocidade ea aceleração no tempo t são:

$$\dot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t}$$
$$\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}}{\Delta t^2}$$

Onde Δt É o passo do tempo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

81 Substituindo pela Equação 53.5Nós obtemos

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M}+\underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)}_{\hat{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}=\underbrace{\mathbf{f}_e^t-\left(\mathbf{K}-\underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t-\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M}-\underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}_{\hat{\mathbf{f}}_e^t} \tag{53.13}$$

De onde podemos resolver para $\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$.

82 Deve-se notar que:

- A solução é baseada na condição de equilíbrio no momento, t.
- Sem fatoração do matriz de rigidez, $\mathbf{K}$, é necessário (ou seja, Não $\mathbf{K}^{-1}$ O termo aparece na equação).
- Para iniciar o método, devemos determinar a deslocamento, velocidade e aceleração no momento $-\Delta t$.

83 Algoritmo:

1. Formem o matriz de rigidez $\mathbf{K}$, matriz de massa $\mathbf{M}$, e matriz de amortecimento $\mathbf{C}$.
2. Inicializar $\overline{\mathbf{u}}^0, \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0, \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$ no momento $t = 0$.
3. Selecione o passo do tempo $\Delta t \le \Delta t_{cr}$.
4. Determine as constantes $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$, $a_2 = 2a_0$, $a_3 = \frac{1}{a_2}$.
5. Computar
$$\overline{\mathbf{u}}^{-\Delta t} = \overline{\mathbf{u}}^0 - \Delta t\dot{\overline{\mathbf{u}}}^0 + a_3\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$$
6. Compute o efetivo matriz de massa , $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
7. Triangularizar $\hat{\mathbf{M}}$ (não é necessário se grudado matriz de massa é usado):
$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$
8. Para cada passo:
   (a) Determine as cargas efetivas no momento t:
   $$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M})\overline{\mathbf{u}}^t - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C})\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}$$
   (b) Resolva o deslocamentos no momento $t + \Delta t$
   $$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(c) Se necessário, resolva para velocidades e acelerações, deformações e tensões no momento t

$$\begin{aligned}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_0(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t})\\ \dot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_1(-\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t})\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}\\ \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t}\end{aligned}$$

(d) Atualize da próxima vez $t = t + \Delta t$ e voltar para (a).

84 Uma integração de tempo explícita tem muitas vantagens; O principal é que não requer fatorização do matriz de rigidez.

85 Se adotarmos um gruped (em vez de consistente) matriz de massa, e não há nenhum amortecimento, então nenhuma fatorização é necessária, e Equação 53.13 Reduz para:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

Onde

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} \tag{53.14}$$

86 Portanto, se a massa é diagonal, não há necessidade de fatorar. Além disso, se a estrutura matriz de rigidez não precisa ser triangularizada, então não é necessário montar o global matriz de rigidez. Pode-se mostrar que

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum_i^n \mathbf{K}_{(e)}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum \mathbf{F}_{(e)}^t$$

O que significa que $\mathbf{K}_{(i)}\overline{\mathbf{u}}^t$ necessário na Equação 53.14 pode ser avaliado no nível do elemento somando as contribuições de cada elemento para o vetor de carga eficaz. Assim

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^t - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t)$$

87 Já que nenhum matriz de rigidez estrutural precisa ser montado, problemas muito grandes podem ser efetivamente resolvidos. Isso inclui problemas quase-estáticos (lineares e não-lineares) onde a carga é aplicada incrementalmente no tempo.

88 Uma grande desvantagem do método explícito é que ele só converge se

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde ω_{max} é o mais alto frequência natural (ou menor comprimento de onda) da estrutura (Courant, Friedrichs e Lewy, 1967). Lembre-se disso $\omega = \frac{2\pi}{T}$.. Se essa condição for violada, a instabilidade numérica ocorre. Portanto, uma análise de autovalor do sistema completo deve ser feita primeiro. Mas uma vez que a estrutura global matriz de rigidez não é necessariamente montado, uma estimativa de limite superior de ω_{max} é obtido de

$$\omega_{max} < \omega_{max}^{(e)}$$

Onde $\omega_{max}^{(e)}$ é a frequência máxima de um único elemento finito (geralmente o menor). Por sua vez, pode ser determinado a partir

$$\det(\mathbf{K}^{(e)} - (\omega_{max}^{e})^2\mathbf{M}^{e}) = 0$$

89 Em problemas não lineares, $\mathbf{K}$ é o rigidez tangente.

90 Note que a determinação do - Os autovalores correspondem a.. ω^2) do simples problema sem amortecimento ($\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$) pode ser resolvido quer expandindo o determinante da matriz resultante, ou simplesmente determinando os autovalores de $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

91 Alternativamente,

$$\omega_{max}^{e} = \frac{2c}{L}$$

Onde c é a velocidade da onda acústica, $c = \sqrt{E/\rho}$, e L é um comprimento representativo do elemento (e).

92 Essencialmente, isso significa que Δt deve ser pequeno o suficiente para que a informação não se propague por mais de um elemento por passo temporal.

53.4.2.2 Sistemas não lineares

93 Nos sistemas não lineares o incremental deslocamentos $\Delta\overline{\mathbf{u}}$, o incremental deformações e tensões, eo matriz de rigidez são atualizados de acordo com

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t} \\
\Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\Delta\overline{\mathbf{u}} \\
\Delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_i^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{t} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{K}_i^{t+\Delta t} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_i^{t+\Delta t}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

No algoritmo mostrado acima, devemos avaliar $\mathbf{K}_i$ a cada passo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

53.5 Métodos numéricos para análise dinâmica

94 As soluções analíticas para o equações de movimento são limitadas a sistemas simples e cargas idealizadas. Para estruturas realistas e excitações, métodos numéricos de passos no tempo são essenciais. Estes métodos aproximam a resposta contínua, calculando valores discretos no tempo passos Δt Separados.

53.5.1 Método de Diferença Central

95 O método da diferença central Velocidade aproximada e aceleração usando diferenças finitas:

$$\dot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \tag{53.15}$$

$$\ddot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{53.16}$$

Substituindo o equação de movimento no momento t_n:

$$m\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} + ku_n = F_n$$

Solucionando u_{n+1}:

$$u_{n+1} = \frac{F_n - (k - 2m/(\Delta t)^2)u_n - (m/(\Delta t)^2 - c/(2\Delta t))u_{n-1}}{m/(\Delta t)^2 + c/(2\Delta t)}$$

96 O método da diferença central é *explícito*: u_{n+1} é calculado diretamente a partir de valores conhecidos em t_n e.. t_{n-1}.. No entanto, é apenas condicionalmente estável; O passo do tempo deve satisfazer:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \tag{53.17}$$

53.5.2 Ex 53.5: Passo de estabilidade da diferença central

Método de Diferença Central Se o período dominante de um sistema é $T_n = 0.50$ sQual seria o limite central de estabilidade?

Da Eq. (53.17) é:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{0.50}{3.1416} = 0.159 \text{ s}$$

Uma escolha prática comum é dar um passo menor (por exemplo, $\Delta t = 0.05$ s) para melhorar a precisão, além da estabilidade satisfatória.

Para sistemas com modos de alta frequência (como em modelos elemento finito), este limite pode ser muito restritivo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

53.5.3 Método Newmark-Beta

97 Nathan Newmark (1910-1981) desenvolveu uma família de métodos baseado na variação presumida da aceleração dentro de cada passo temporal. O Newmark..β método Assumindo:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1}\right](\Delta t)^2 \dot{u}_{n+1} \qquad = \dot{u}_n + [(1-\gamma)\ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1}]\,\Delta t$$

Os parâmetros β e.. γ Controle a variação de aceleração presumida:

- $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$:. Aceleração linear (condicionalmente estável)
- $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$:. Aceleração média (incondicionalmente estável)
- $\gamma = 1/2$, $\beta = 0$:. Diferença central (explicável, condicionalmente estável)

98 O método de aceleração médio ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$É particularmente popular porque é incondicionalmente estável – qualquer passo temporal dá resposta limitada, embora a precisão degrada para grande Δt.. Também está implícito, significando que $\ddot{u}_{n+1}$ aparece em ambos os lados, requerendo solução de um sistema de equações a cada passo.

99 Para a equação MDOF (35.15), o método Newmark leva a:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}}_{n+1}$$

onde o efetivo rigidez $\hat{\mathbf{K}}$ e força eficaz $\hat{\mathbf{F}}_{n+1}$ Incorpore contribuições de massa e amortecimento. Este sistema deve ser resolvido a cada passo, tornando os métodos implícitos computacionalmente mais caros por passo do que os métodos explícitos, mas a capacidade de usar passos maiores compensa.

53.5.4 Superposição Modal vs. Integração Direta

100 Duas estratégias gerais existem para análise dinâmica de sistemas MDOF:

101 **Superposição modal** transforma as equações acopladas em equações modais desacopladas, resolve cada equação modal SDOF e reconstrói a resposta física. Vantagens: Perspicácia física, habilidade de truncar modos altos, eficiência para sistemas lineares com poucos modos participantes. Desvantagens: requer solução autovalor, limitada a sistemas lineares, matriz de amortecimento deve ser diagonalizável.

102 **Integração direta** Aplica métodos de passo no tempo diretamente para as equações MDOF acoplados sem transformação modal. Vantagens: Lida com sistemas não lineares, arbitrários amortecimento, nenhuma solução de autovalor necessário. Desvantagens: computacionalmente caro para grandes sistemas, menos visão física.

103 Para sistemas lineares submetidos a carregamento de terremotos, sobreposição modal é tipicamente preferida. Para análise não linear (rendimento, contato, grandes deformações), integração direta é necessária.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Verificação versus validação

Na dinâmica computacional é essencial distinguir entre verificação e validação. *Verificação* pergunta se o algoritmo numérico e sua implementação resolvem as equações indicadas corretamente (passo de tempo, verificação de convergência e benchmarks de código). *Validação* pergunta-se se as equações indicadas representam o sistema físico com fidelidade suficiente (forma modelo, condições de contorno, amortecimento, e suposições constitutivas). Uma simulação pode ser verificada ainda inválida, e confusão entre os dois é uma fonte frequente de confiança extraviada em resultados numéricos.

53.6 Sistemas contínuos

104 Estruturas com massa distribuída e rigidez–vigas, placas, cascas- são governadas por equações diferenciais parciais. Embora os métodos numéricos discordem esses sistemas, entender as soluções analíticas fornece insight sobre formas modais e frequências naturais.

53.6.1 Vibração Axial de Barras

105 Considere uma barra uniforme de comprimento LÁrea transversal A, módulo E, e densidade ρ.. O axial deslocamento $u(x,t)$ Satisfaz:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou, definindo a velocidade da onda $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Esta é a equação de onda unidimensional.

106 Pela vibração livre, buscamos soluções da forma $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$.. A substituição dá:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

com solução $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$.. Condições de contorno determinar as frequências permitidas e formas modais. Para um bar fixo em ambas as extremidades:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

53.6.1.1 Ex 53.6: Velocidade de onda e axial frequências naturais de uma haste de aço

✳ Uma haste de aço circular sólida tem diâmetro $d = 50$ mm e comprimento $L = 3.0$ m.. Ambas as extremidades são fixas (soldadas a placas rígidas). Propriedades de aço: $E = 210$ GPa, $\rho = 7\,850$ kg/m^3. Determine: (a) a velocidade da onda longitudinal; (b) Os três primeiros axiais naturais Frequências; (c) Como estes se comparam com a típica frequência sísmica e de vento conteúdo, e o que isso implica para modelagem estrutural.

Solução.

(a) Velocidade da onda longitudinal.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{7\,850}} = \sqrt{2.675 \times 10^7} = 5\,172 \text{ m/s}$$

Esta é a velocidade em que uma onda longitudinal tensão viaja ao longo da haste 15 vezes a velocidade do som no ar.

(b) Axial frequências naturais (fixo-fixado barra).

Para um bar fixo em ambas as extremidades, $\phi(0) = \phi(L) = 0$ requer $\phi(x) = B\sin(\omega x/c)$ com $\sin(\omega L/c) = 0$, dando $\omega_n L/c = n\pi$, e portanto:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f_1 = \frac{1 \times 5\,172}{2 \times 3.0} = 862 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 1\,724 \text{ Hz}, \qquad f_3 = 3f_1 = 2\,586 \text{ Hz}$$

Os períodos naturais correspondentes são $T_1 = 1/862 = 1.16$ ms, Muito mais curto do que qualquer passo de tempo em sísmico ou vento engenharia (Δt Normalmente 0,005-0,02 s).

(c) Comparação com o conteúdo sísmico e de frequência do vento.

Fonte	Frequência dominante	Relação com os modos da haste axial
Terremoto movimento do solo	0.1–10 Hz	$< f_1/86$
Espectro de rajadas de vento	0.01–2 Hz	$< f_1/430$
Vibração de máquinas	1–100 Hz	$< f_1/8.6$
Modo de haste axial 1	862 Hz	—

Comentário. Várias consequências importantes vêm desta comparação.

1. *Os modos axiais nunca são animados por cargas sísmicas ou de vento.* A separação de frequência é de três ordens de magnitude. Isso é.. A justificação matemática para a suposição comum de modelagem que deformações axiais podem ser *ignorada* (Axial infinito rigidez) em análise de carga lateral de estruturas enquadradas (§53.2.1).
2. *Modos axiais governam o passo crítico do tempo na integração explícita.* O limite de estabilidade $\Delta t < 2/\omega_{\max}$ para um elemento de barra de comprimento ℓ É $\Delta t < \ell/c$.. Por um 3 Elemento m:

$$\Delta t < \frac{3.0}{5\,172} = 5.8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Este é 10-30 vezes menor do que o passo de tempo necessário para a precisão em resposta sísmica, tornando os métodos explícitos caros para modelos que Incluindo DOFs axiais. Métodos implícitos (Newmark, HHT) contornam isso sendo incondicionalmente estável.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

3. *A propagação da onda importa em problemas de impacto.* Se a haste for submetida a um impacto final, a resposta é governada por tensão-Onda de propagação em 5 172 M/s, e a duração da análise é O tempo de viagem da onda $L/c = 0.58$ ms.. Este é o regime de Códigos dinâmicos explícitos (DYNA, ABAQUS/Explicit) e requer passos de tempo Um mundo computacional completamente diferente da análise sísmica.

53.6.2 Vibração transversal de Vigas

107 A equação de Euler-Bernoulli viga para vibração transversal é:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

Onde $v(x,t)$ é o transverso deslocamento, EI é a rigidez da flexão, e $q(x,t)$ é o carga distribuída.

108 Para uma vibração livre$q = 0$), procurando $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

A solução geral é:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

Condições de contorno em ambas as extremidades fornecer quatro equações para as quatro constantes, produzindo um problema de autovalor para β.

109 Por um biapoiado viga de comprimento L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

O aumento frequências naturais como n^2, separando rapidamente os modos mais altos dos mais baixos. A frequência fundamental ($n = 1$) é:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

110 Para outras condições de contorno (fixed-fixed, cantilever, etc), a equação de frequência transcendental deve ser resolvido numericamente. Tabelas de coeficientes de frequência estão disponíveis em referências padrão.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

53.7 Dinâmica não linear

111 As seções anteriores assumiram comportamento linear: forças proporcionais a deslocamento e velocidade. Estruturas reais, especialmente sob forte tremor de terra ou carregamento extremo, exibem resposta não linear. A não linearidade surge da produção do material, efeitos geométricos (grandes deslocamentos, comportamento de contato/gap e atrito.

53.7.1 Fontes de não linearidade

112 **Não linearidade material** ocorre quando a relação tensão-deformação é não linear. Para o aço, o comportamento elástico inicial dá lugar a ceder quando tensão excede a resistência ao rendimento. Para concreto, rachar introduz não linearidade mesmo em cargas de serviço. A relação constitutiva deve ser modelada apropriadamente (elastoplastic, danos, etc.).

113 **Não linearidade geométrica** surge quando deslocamentos são suficientemente grandes que as equações de equilíbrio devem ser escritas na configuração deformada. O P-Δ Efeito em pilares—aumento de momento devido a força axial agindo através lateral deslocamento- – é um exemplo comum.

114 **Não linearidade do contato** ocorre em interfaces onde componentes podem se separar ou entrar em contato. Rolamentos de isolamento base, juntas de expansão e seções rachadas exibem esse comportamento.

53.7.2 Dutilidade e Design de Capacidade

115 O *deslocamento dutilidade* μ é definida como a proporção de máximo deslocamento para rendimento deslocamento:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

Estruturas projetadas para render e deformar inelásticamente podem sobreviver a terremotos muito mais fortes do que sua capacidade elástica sugere. Este é o princípio fundamental de *Desenho de capacidade*:. Aceitar render-se em regiões cuidadosamente detalhadas enquanto protege elementos frágeis.

116 A relação entre a redução da força e a demanda de ductilidade é capturada pela R-μ-T Relacionamento. Para estruturas com períodos na faixa sensível à velocidade:

$$R \approx \mu$$

Esta regra de "igual"afirma que o máximo deslocamento da estrutura de produção é igual ao de uma estrutura elástica com o mesmo período – render reduz a demanda de força sem aumentar deslocamento.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 53.2: Representativo amortecimento rácios para diferentes classes de estruturas

Tipo de estrutura	Amortecimento relação ζ
Aço, soldado, pré-rendimento	0.01–0.02
Aço, aparafusado, pré-rendimento	0.02–0.03
Concreto armado, desfeito	0.01–0.02
Concreto armado, rachado	0.03–0.05
Concreto protendido	0.01–0.02
Alvenaria, não quebrada	0.02–0.03
Estruturas de madeira	0.05–0.10

53.8 Considerações Práticas

53.8.1 Amortecimento em Estruturas Real

117 Razões medidas amortecimento para estruturas dependem do material, amplitude da vibração e tipo de construção. Os valores típicos incluem, Tabela 53.2

Estes são valores de ordem de grandeza; O atual amortecimento depende de detalhes e deve ser medido quando possível.

53.8.2 Interação estrutura-solo

118 A resposta dinâmica de uma estrutura depende não só da própria estrutura, mas também do solo de apoio. *Interação solo-estrutura* (SSI) pode afetar significativamente tanto o movimento de entrada e as frequências do sistema. Solos flexíveis aumentam o período efetivo do sistema e introduzem mais amortecimento através da radiação de energia no solo. Para estruturas rígidas em solo macio, os efeitos do SSI podem ser substanciais; Para estruturas flexíveis em rocha, elas são insignificantes.

53.8.3 Ajustados Dampers de Massa

119 Um amortecedor de massa sintonizado (TMD) é um sistema secundário de massa mola-damper ligado à estrutura primária e sintonizado a uma frequência específica. Quando a estrutura primária vibra em sua frequência natural, a DTM oscila em oposição, reduzindo a resposta primária. DTMs são usadas em edifícios altos (por exemplo, Taipei 101) e pontes de longo alcance para reduzir vibrações induzidas pelo vento e sísmicas.

120 O ajuste ideal de uma DTM para uma estrutura primária não alterada é:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $\mu_m = m_d/m$ é a razão de massa (tipicamente 0,01 a 0,05), ω_d é a frequência de DTM, e ζ_d é a proporção de DTM amortecimento.

53.8.4 Isolamento Base

121 Isolação da base introduz uma camada flexível (tipicamente rolamentos elastómeros ou sistemas deslizantes) entre a estrutura e a fundação. A estrutura isolada tem um período muito mais longo, afastando-a do conteúdo de alta energia dos típicos movimentos terra terremoto. A camada de isolamento também fornece mais amortecimento. O isolamento da base é particularmente eficaz para estruturas rígidas de curto período e é amplamente utilizado em hospitais, instalações de emergência e edifícios históricos.

53.9 Resumo

122 Este capítulo introduziu os princípios fundamentais da dinâmica estrutural, progredindo do oscilador de grau único de liberdade para sistemas multi-grau de liberdade, da vibração livre à resposta forçada, das soluções analíticas aos métodos numéricos. Os conceitos-chave incluem:

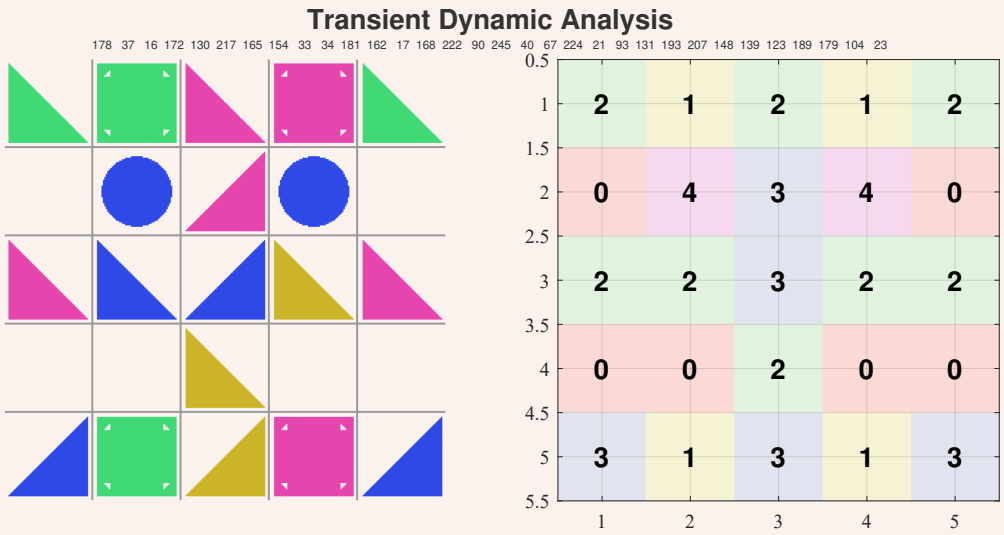
1. O equação de movimento, expressando equilíbrio dinâmico de forças inerciais, amortecimento, elásticas e aplicadas.
2. Frequência natural e amortecimento proporção como propriedades intrínsecas do sistema governando a resposta dinâmica.
3. Vibrações livres revelando os modos naturais de oscilação.
4. Resposta harmônica e o fenômeno da ressonância.
5. A integral de Duhamel para resposta a cargas arbitrárias.
6. Espectros de resposta como ferramentas práticas para engenharia sísmica.
7. Análise modal transformando equações MDOF em equações SDOF independentes.
8. Métodos numéricos de passo no tempo para a resposta computacional a excitações complexas.
9. Dinâmica não linear, histerese e o papel da ductilidade no projeto sísmico.

123 Dinâmica estrutural estende a análise estática desenvolvida em capítulos anteriores para abranger fenômenos variáveis no tempo. Os mesmos princípios... equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas... se aplicam, mas agora em um contexto dependente do tempo onde a inércia e a dissipação de energia desempenham papéis centrais. O domínio desses conceitos é essencial para o projeto de estruturas submetidas ao vento, terremotos, vibração de máquinas e outras cargas dinâmicas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Referência inicial. As quantidades de resposta determinística calculadas aqui (histórias de tempo, pico de exigências e medidas derivadas) são usadas no Capítulo 72 como insumos para engenharia sísmica baseada em desempenho.



Idêntico específico de capítulo, chapter H

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Parte IV

Avançado; Não Linear & Outros Tópicos

CÓPIA PARA REVISÃO

Este volume, o terceiro de uma série abrangente em análise estrutural, desenvolve conceitos avançados com foco no comportamento não linear e plasticidade, essencial para avaliar o verdadeiro desempenho da infraestrutura civil. Está dividido nos seguintes grupos:

Eu Plasticidade modelando no material, seção e níveis estruturais.

II Análise não linear Material e geométrico.

III Fibra Baseada Formulação de elementos 1D (rigidez e flexibilidade baseada), e modelos constitutivos adequados.

IV PBEE Cobertura exaustiva do Engenharia sísmica baseada em desempenho. Começando com a introdução do conceito de perigo, risco e incertezas, cobrimos as três análises associadas ao PBEE: Perigo, estrutural e perda. Finalmente, o livro culmina com uma cobertura exaustiva da estrutura PBEE, integrando conceitos probabilísticos com predição de resposta não linear para apoiar a avaliação racional do desempenho e design.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

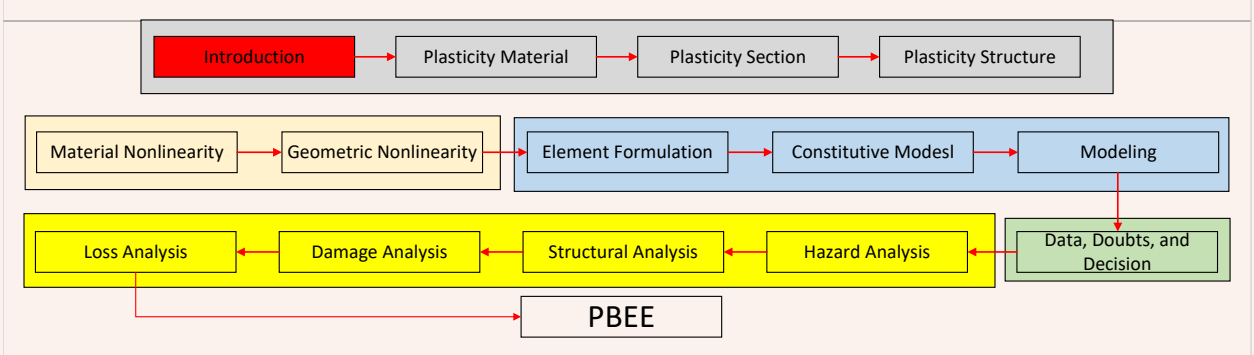
Capítulo 54

Introdução

Abstract

Este capítulo introdutório do quarto livro, que cobre a análise não linear, começa por discutir as causas profundas das respostas não lineares e como elas impactam o matriz de rigidez através **B** *ou* **D** *(para não linearidades geométricas e materiais, respectivamente). Isso leva a uma exploração de vários tipos de análise, incluindo de primeira ordem, segunda ordem, linear, não linear e cargas limite que podem causar instabilidade. Em seguida, discutimos o conceito de segurança, que se transforma no papel e evolução dos códigos de design. Estes códigos são destinados a garantir segurança suficiente, historicamente baseado em regras de polegar, e mais recentemente, em considerações modernas que respondem por probabilidades de fracasso. O capítulo aponta que determinar o verdadeiro fator de segurança (ou seja, não baseado em códigos de projeto) ou identificar falha gradual requer análise não linear, que é o foco principal deste quarto livro.*

54.1 Introdução 1873
54.1.1 Fontes de não linearidades . 1873
54.1.2 Por que uma análise não linear 1875
54.2 Tipos de análises estruturais não lineares 1875
54.3 Carga incremental/deslocamento . 1878
54.4 Segurança 1878
54.4.1 Terminologia 1878
54.4.2 Segurança & Cargas 1879
54.5 Códigos de design 1880
54.5.1 Introdução 1880
54.5.2 Evolução: Antiguidade . . . 1882
54.5.3 Tempos modernos 1883
54.5.4 Resumo 1887



CÓPIA PARA REVISÃO

54.1 Introdução

54.1.1 Fontes de não linearidades

1 Até agora, nos limitamos a problemas elásticos lineares com pequena deformação (com exceção do Capítulo) 29). Isto implica também que nós implicitamente assumimos que o material tem uma força infinita (mas nunca realmente teve que confiar nesta suposição).

2 Claro que nenhum material tem uma força infinita, e em algum momento todos começam a se comportar in-elasticamente e eventualmente quebram.

3 Este quarto livro abordará, assim, essas duas formas de não linearidade: a) geométrico, e material.

4 Na verdade, nós brevemente consideramos exemplos de grande deformação (ou não linearidade geométrica) no Capítulo 29, e examinou um problema mostrado na figura. 54.1 De.. §29.2.3.. Desta vez, formalizaremos o problema no contexto da discretização.

5 Quanto à não linearidade material, eles vêm de:

Aço que tem uma curva linear tensão deformação até o ponto de rendimento. Nesse ponto temos endurecimento de manchas, e deformação excessiva.

Concreto tem uma curva não linear começando em torno de $0.6 f_c'$, até a resistência à compressão (em um deformação em torno de 0,003), e depois suavizando. Note que a força aumentará com o confinamento (fornecido por cisalhamento reforço). Quanto à resistência à tração, é notoriamente baixa (cerca de 0,1 f_c').

6 Considerando que usaremos as relações não lineares inerentes ao material tensão-deformação, podemos também nos referir à seção resposta não linear em termos de $M - \Phi$ ou $M - \theta$ (curvatura ou rotação).

7 Como veremos mais tarde, temos essencialmente dois tipos de modelo para capturar a resposta não linear dos elementos 1D.

Plasticidade Distribuída onde a plastificação ocorre ao longo de todo o elemento.

Plasticidade lumpida onde a resposta plástica é limitada ao fim do elemento, e uma resposta elástica linear está no meio.

8 A resposta não linear do aço e concreto é mostrada na figura. 54.2.. Considerando que essas curvas serão rotineiramente usadas em *contínuo* elementos finitos, no contexto deste livro (foco em 1D) elementos que serão usados em fibra (flexão biaxial) ou camadas (flexões uniaxiais) *Plasticidade distribuída* Modelos.

9 Fig. 54.3 ilustra os modelos constitutivos para a plasticidade. A resposta (em flexão) é capturada mais frequentemente por um diagrama de momento-curvatura, e ocasionalmente por uma rotação de momento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

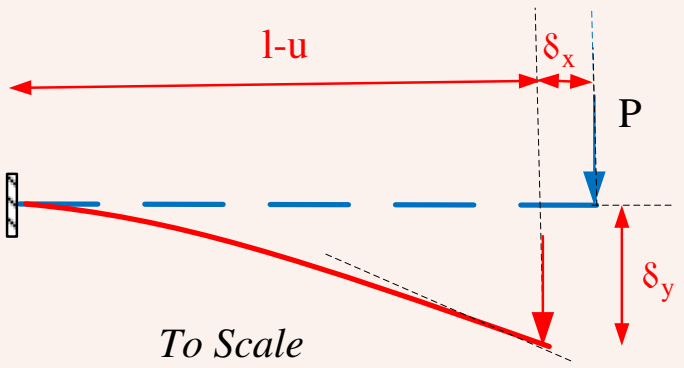


Figura 54.1: Não linearidade geométrica, grande deflexão exemplo**B**), 29.2.3

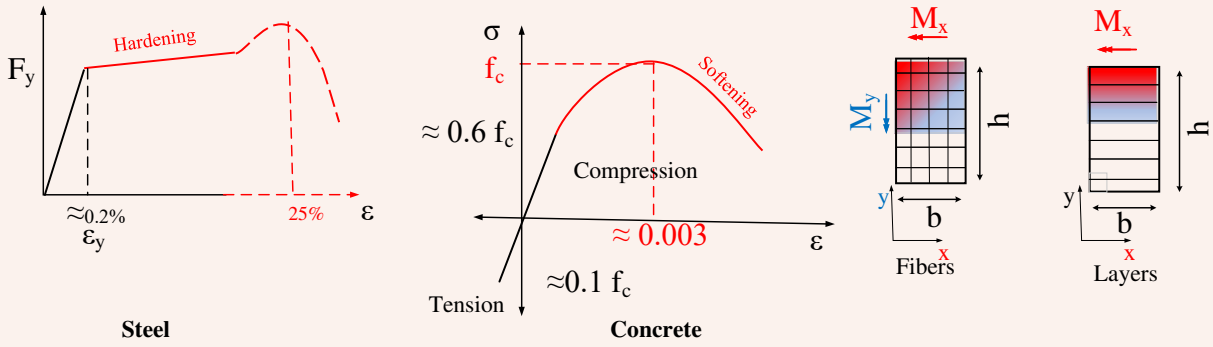


Figura 54.2: Não linearidade material, fibras**D**)

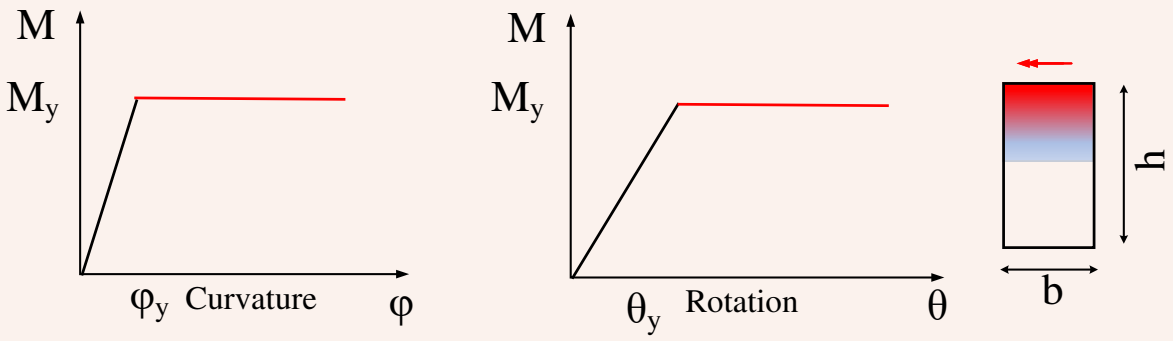


Figura 54.3: Não linearidade material, seção (**D**)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

54.1.2 Por que uma análise não linear

10 Considerando que análises elásticas lineares são justificadas para o projeto ou avaliação preliminar de segurança, não-lineares devem ser realizadas quando a resposta estrutural completa é desejada, a carga de falha deve ser determinada com a máxima precisão possível, ou a ''verdadeira" fator de segurança deve ser encontrado.

11 Como deve ser evidente na seção anterior, não podemos confiar no (predominante) LRFD para avaliar o verdadeiro fator de segurança, ou para realizar uma análise que explique danos parciais. Isso exigirá uma análise não linear.

12 Nesses casos, uma análise elástica linear simplista superestimará o pico de carga ou subestimará o deslocamentos. No primeiro caso, a solução pode levar a um ajuste desnecessário; no segundo para situações potencialmente perigosas decorrentes de grandes imprevistos deslocamentos, Figura 54.4.. Em ambos os casos, a redistribuição tensão não é capturada, e será impossível distinguir localizado do fracasso global.

13 Numa análise linear elástica, estaremos superestimando a capacidade e subestimando o deslocamento.

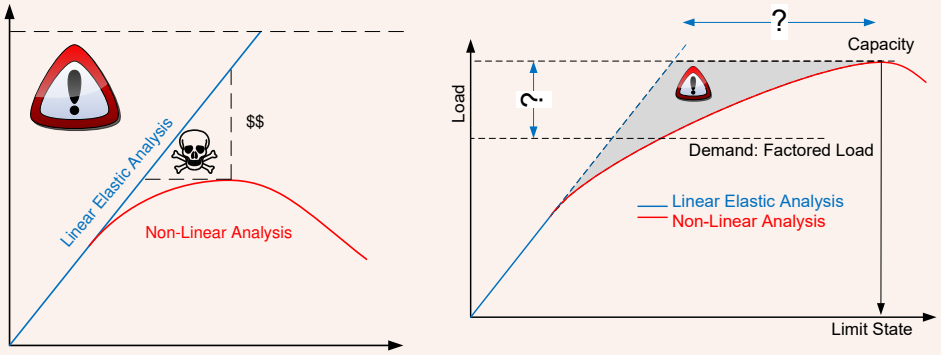


Figura 54.4: Linear *vs.* Análises não lineares

14 Deve-se sempre ter em mente que a análise não linear não substitui o bom senso de engenharia. Deve ser apenas o último recurso depois que o senso comum, análise linear e métodos simplificados foram esgotados. Idealmente, deve ser feito para validar/quantificar uma suposição sólida.

54.2 Tipos de análises estruturais não lineares

15 Como mencionado anteriormente, há duas fontes de não linearidades. O primeiro é causado pela resposta não linear do material, e o segundo por grande deslocamentos.

CÓPIA PARA REVISÃO

16 Na formulação do elemento matriz de rigidez, eles se manifestam através (Eq. 50.12)

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

B para o primeiro, e **D** pelo segundo.

17 No contexto da análise não linear, isso pode ser reescrito como

$$\mathbf{K}^i_{tan} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^i_{tan} \mathbf{B} d\Omega$$

18 Aqueles por sua vez vão dar origem a diferentes tipos de análises, Tabela 54.1 dependendo de qual é não linear. Nesta tabela também incluímos análises críticas (bifurcação) (i.e. flambagem).

Tabela 54.1: Tabulação de níveis de análise estrutural

		D			
	Diagrama de corpo livre baseado em	Forma indeformada		Forma Deformada	
		Elastic (Linear)	Inelástico (Não Linear)	Elastic (Linear)	Inelástico (Não Linear)
B	1^{st} Ordem (Linear)	1 (**D**:L-**B**:L)	2 (**D**:NL-**B**:L)	Carga crítica (Flambagem)	
				5 Elastic	6 Inelástico
	2^{nd} Ordem (Não Linear)	Forma Deformada			
		3 (**D**:L-**B**:NL)	4 (**D**:NL-**B**:NL)	-	-

B Não linearidade geométrica; **D** Não linearidade material.

19 As curvas de carga correspondentes deslocamento são mostradas na figura. 54.5.. Também mostrou os valores assintomáticos do

20 Formulação baseada no não-formado diagrama de corpo livre são fererred como *Lagrangian*, enquanto aqueles que devem prestar contas para a desqualificação são referidos como *Eulerian*.

Análises Incrementais: (incrementos de cargas, deslocamentos, ou ambos] através do método de Newton (tipicamente), §59.3.1.1.

1 (D:L-B:L); Forma indeformada Este é o caso mais comum, elástico linear. Normalmente é aceitável para cargas de serviço. Para casos dependentes do tempo, devemos considerar modelos visco-elásticos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

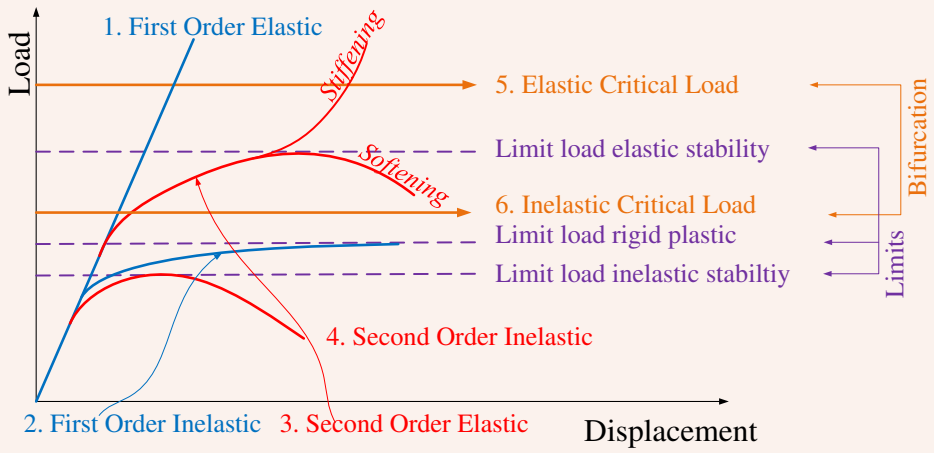


Figura 54.5: Tipos de..

2 (D:NL-B:L); Forma indeformada Segunda forma mais comum de análise, tipicamente conduzida para procurar cargas finais/incomum. Necessário para PBEE (veja abaixo).

3 (D:L-B:NL); Elastic E os efeitos de Deformação finita e deslocamentos, as equações de equilíbrio são escritas em termos da geometria da forma deformada (Eulerian), não é responsável pelas não-linearidades materiais, pode ser capaz de detectar Bifurcação e ou aumentado rigidez (quando um membro é submetido a uma carga de tração axial). Análise de cabos, redes, estruturas de catenárias.

4 (D:NL-B:NL); Inelástico equações de equilíbrio escritas em termos da geometria da forma deformada, podem ser responsáveis por não linearidades geométricas e materiais. Mais adequado para determinar falhas ou cargas finais. De longe, a forma mais complexa de análise, usada na simulação Metal Forming, fragmentação das estruturas (impacto do míssil).

II Análises de Bifurcação: Análises de autovalor que levariam à Carga Crítica Elastic (flambagem). Note que não temos uma curva de carga correspondente, mas sim "flambagem modos".

5 Bifurcação; Elastic

6 Bifurcação; Inelástico

21 Mesa 54.2 resume os pressupostos das análises para diferentes análises não lineares.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 54.2: Intercorrelação de diferentes níveis de análise

	1	2	3	4	5	6
D	L	NL	L	NL	L	NL
B	L	L	NL	NL	NL	NL
FBD	Indefender.	Indefender	Def.	Def.	Def.	Def.
Análise	Incr.	Incr.	Incr.	Incr.	Bif.	Bif.

54.3 Carga incremental/deslocamento

22 Na análise não linear das estruturas, a carga é aplicada incrementalmente, e uma solução é buscada no final de cada incremento:

1. "Quebre a carga externa para dentro"n Incrementos (eles não precisam ser iguais; Como nos aproximamos do pico de carga prevista, é aconselhável reduzir o incremental).
2. A cada passo, aplique o vetor de carga incremental $\Delta\mathbf{P}_i$.
3. Resolva o correspondente deslocamento, $\mathbf{u}_i$, que quase satisfaz o equilíbrio (na classe implícita de análise, mas não a explícita).
4. Atualize a carga e os vetores

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta\mathbf{P}_i$$
$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta\mathbf{u}_i$$

23 Um laço iterativo adicional é necessário na solução implícita para garantir que o equilíbrio seja (quase) satisfeito.

24 Enquanto na maioria das análises a carga é aplicada incrementalmente, tal estratégia de solução pode falhar em prever a resposta pós-pico. Se isto é desejado, então o vetor deslocamento (em vez do vetor de carga) deve ser aplicado incrementalmente.

54.4 Segurança

54.4.1 Terminologia

25 Em última análise, uma análise não linear é apenas um veículo para lidar com a verdadeira segurança de uma estrutura. Associados a estes termos, há vários conceitos que serão abordados neste livro.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

26 *Segurança* refere-se à condição de uma estrutura quando é capaz de resistir às cargas e condições ambientais que pode encontrar durante sua vida útil esperada sem experimentar falha ou colapso. A segurança é tipicamente avaliada comparando as cargas reais e tensões que uma estrutura é submetida com sua capacidade de resistir a essas cargas e tensões, que são determinadas através de análise e teste.

27 *Margem de segurança* , por outro lado, refere-se à quantidade pela qual as cargas reais e tensões que uma estrutura experimenta estão abaixo de sua capacidade de resistir a essas cargas e tensões. A margem de segurança é calculada como a diferença entre as cargas reais e tensões e a capacidade da estrutura para resistir a essas cargas e tensões, dividido pela capacidade.

28 *Fator de Segurança* é um critério de projeto que responde por incertezas na carga e resistência do material. É a relação da carga máxima que uma estrutura pode suportar com a carga pretendida. Ele fornece um tampão para garantir segurança e confiabilidade.

29 *Avaliação de Risco* é o processo de identificar, analisar e avaliar riscos associados a um projeto ou sistema para mitigar potenciais perigos.

30 *Análise de Riscos* é uma técnica usada para identificar possíveis perigos e avaliar sua gravidade e probabilidade. Ajuda a projetar medidas de segurança para evitar acidentes.

31 *Modo de falha* é uma abordagem sistemática para identificar possíveis modos de falha em um sistema e seus efeitos no desempenho do sistema. Ajuda a priorizar riscos e implementar ações corretivas.

32 *Avaliação de Risco Probabilístico* é uma análise quantitativa que usa probabilidade para avaliar os riscos de diferentes cenários de falha e seus potenciais impactos.

33 *Redundância* é a inclusão de componentes extras ou sistemas que podem assumir em caso de falha, aumentando a confiabilidade e segurança.

34 *Índice de confiabilidade* é uma medida para quantificar a segurança ou confiabilidade de um sistema ou componente, §N.

35 *Tolerância por culpa* é a capacidade de um sistema continuar funcionando corretamente, mesmo na presença de falhas ou erros.

36 *Sistema Crítico de Segurança* é um sistema cuja falha pode resultar em danos significativos para as pessoas, propriedade ou o meio ambiente. Estes sistemas requerem medidas de segurança rigorosas.

54.4.2 Segurança & Cargas

37 Partindo das curvas não lineares do material tensão-deformação, passamos para a resposta estrutural não linear prevista sob várias suposições, e agora procuramos caber nessas curvas a carga.

38 As cargas foram discutidas em chapter 18, mas no contexto de análise não linear, onde

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

uma determinada carga se encaixa na curva global de carga-deslocamento? Como é garantida a segurança de cada um deles, e onde está que precisamos da maior margem de segurança.

39 Isso está ilustrado na figura. 54.6, onde

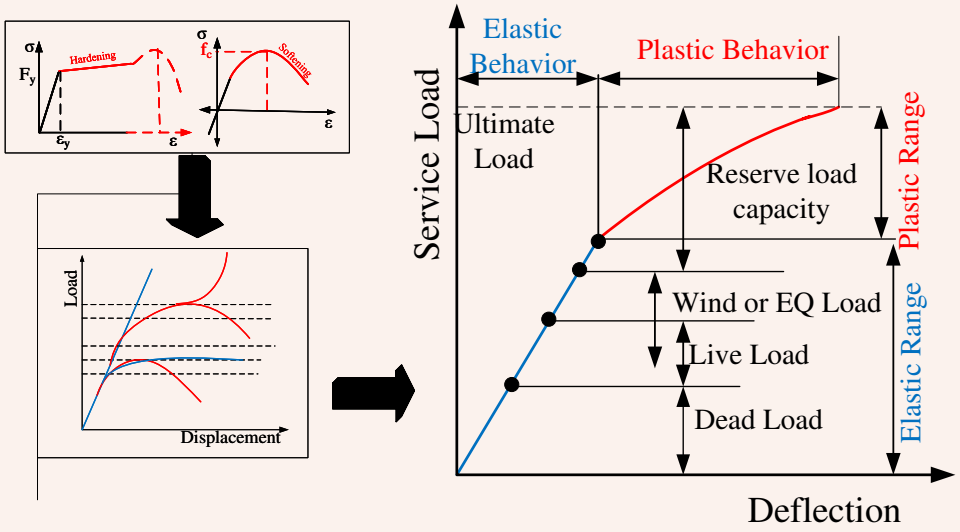


Figura 54.6: Curva de deflexão de carga e varia gama de resposta

40 Por razões óbvias, não queremos que cargas de serviço acionem a resposta inelástica da estrutura. Isso é assegurado através da aplicação de um número suficientemente grande *fator de segurança*.. No entanto, na presença de cargas raras mas de alta intensidade, podemos reduzir com segurança (mas cuidadosamente) a margem de segurança (este é o lugar onde um bom engenheiro pode se distinguir). Em todos os casos, não queremos exceder a faixa elástica (embora possa ser excedida para uma excitação sísmica extrema como veremos no Capítulo 72) flertando com a carga final / colapso. Para evitar tal ocorrência teria resultado em um overdesign excessivamente caro.

54.5 Códigos de design

54.5.1 Introdução

41 Os requisitos de segurança estão hoje em dia consagrados nos códigos do Design.

42 Os códigos de projeto desempenham um papel fundamental em garantir a segurança das estruturas, fornecendo diretrizes e requisitos padronizados para o projeto, construção e manutenção de edifícios e Infraestrutura.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Normalização: Códigos de design oferecem um conjunto consistente de regras e procedimentos que engenheiros e arquitetos devem seguir. Essa padronização garante que as estruturas sejam projetadas usando princípios e práticas aceitas, reduzindo o risco de erros e omissões.

Margens de Segurança: Os códigos de projeto incorporam fatores de segurança e margens que respondem por incertezas nas propriedades do material, condições de carga e influências ambientais. Estas margens de segurança ajudam a garantir que as estruturas possam suportar inesperadas tensões e cargas sem falhas.

Especificações materiais: Códigos especificam os tipos e graus de materiais que podem ser usados na construção. Ao padronizar as propriedades do material, como resistência e durabilidade, os códigos de projeto garantem que apenas materiais adequados sejam usados, aumentando a segurança geral da estrutura.

-Considerações de carga: Os códigos de projeto fornecem diretrizes para calcular as cargas que uma estrutura deve suportar, incluindo cargas mortas (forças estáticas permanentes), cargas vivas (força temporária ou móvel), cargas ambientais (vento, terremoto, neve) e cargas acidentais (impactos, Explosões. Cálculos precisos de carga são cruciais para garantir que as estruturas possam suportar essas forças.

Análise estrutural Códigos de projeto descrevem métodos para analisar o comportamento estrutural sob várias condições de carga. Isso inclui diretrizes para a realização de análises tensão, análise de estabilidade e análise dinâmica, ajudando engenheiros a prever como as estruturas responderão a diferentes cenários.

Design Sésmico: Em regiões propensas a terremotos, os códigos de projeto incluem provisões específicas para design sísmico. Essas provisões garantem que as estruturas sejam projetadas para resistir às forças sísmicas, reduzindo o risco de falha catastrófica durante um terremoto.

Controle de Qualidade e Inspeções: Códigos de projeto exigem procedimentos de controle de qualidade e inspeções regulares durante todo o processo de construção. Isso ajuda a verificar que o trabalho de construção adere às especificações do projeto e que quaisquer desvios ou deficiências são resolvidas prontamente.

Atualizações e Revisões: Os códigos de projeto são regularmente atualizados para refletir novas descobertas de pesquisa, avanços tecnológicos e lições aprendidas com falhas estruturais passadas. Este processo de melhoria contínua garante que os códigos de projeto permaneçam relevantes e eficazes na promoção da segurança estrutural.

Conformidade legal e regulatória: O cumprimento dos códigos de projeto é uma exigência legal. Códigos de construção, baseados em códigos de projeto, são aplicados pelas autoridades locais para garantir que todos os projetos de construção cumpram padrões mínimos de segurança. O não cumprimento pode resultar em consequências legais, incluindo multas, penalidades e a exigência de fazer modificações caras.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Responsabilidade Profissional: Aderir aos códigos de design é um aspecto fundamental da responsabilidade profissional dos engenheiros e arquitetos. Demonstra um compromisso com a segurança pública e ajuda a manter a confiança de clientes, órgãos reguladores e o público em geral.

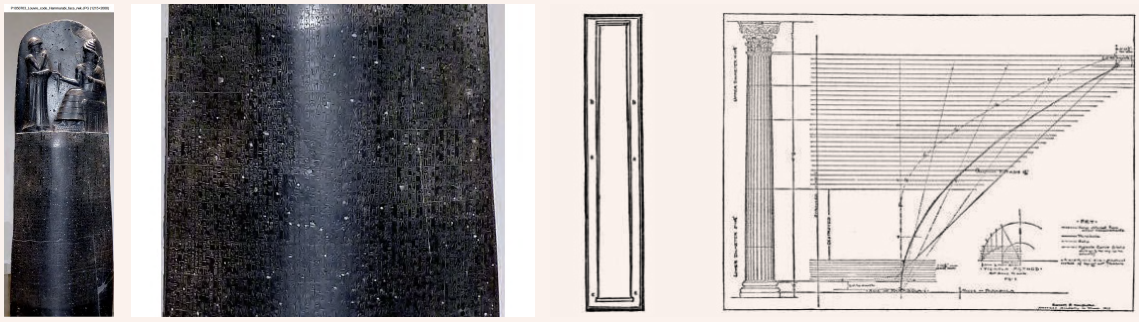
54.5.2 Evolução: Antiguidade

54.5.2.1 Mesopotâmia; hamurabi

43 O código de Hamurabi (1780 a.C.) incluía provisões relacionadas à construção civil. Nesta imponente estela de pedra esculpida a partir de uma única, de quatro toneladas laje de diorito (preto), 282 éditos são escritos em se-então forma (que nos referimos a eles hoje em dia como Tabelas Lógicas da Decisão), Fig. 54.7a.. De especial relevância para os modernos engenheiros estruturais:

> *228. Se um construtor construir uma casa para alguém e a completar, ele lhe dará uma taxa de dois siclos em dinheiro por cada sar da superfície.*
> *229 Se um construtor construir uma casa para alguém, e não construí-la corretamente, e a casa que ele construiu cair e matar seu dono, então esse construtor será morto.*
> *230. Se matar o filho do dono, o filho daquele construtor será morto.*
> *231. Se matar um escravo do dono, ele pagará o escravo ao dono da casa.*
> *232. Se arruinar os bens, ele fará uma compensação por tudo o que foi arruinado, e na medida em que ele não construiu corretamente esta casa que ele construiu e caiu, ele re-ergerá a casa de seus próprios meios.*
> *233. Se um construtor construir uma casa para alguém, mesmo que ele ainda não a tenha concluído; Se então as paredes parecem cair, o construtor deve fazer as paredes sólidas de seus próprios meios.*
>
> Código Hammurabi (1780 a.C.)

44 A dureza do código é, no entanto, equilibrada (pela primeira vez na história) com o conceito de inocência até que se prove o contrário.



(a) Código de Hamurabi (Mus)éE du Louvre) (b) Vitruvius, Livro IV

Figura 54.7: Códigos de design na antiguidade

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

54.5.2.2 Roman; Vitruvius

45 Vitruvius (Vitruvius, 1960)(discutindo em mais detalhes em §6.3.1 e.. 15.2.1) Dez *Livros sobre Arquitetura* pode realmente ser considerado como um dos primeiros códigos de design.

46 Por exemplo, Capítulo IV do Livro III (Fundações e Subestruturas dos Templos) Fig. 54.7b Começa com..

> As fundações dessas obras devem ser escavadas do solo sólido, se puder ser encontrada, e levadas para o solo sólido até que a magnitude da obra pareça exigir, e toda a subestrutura deve ser tão sólida quanto possível. Acima do solo, que as paredes sejam colocadas sob o pilares, mais espessas por metade do que o pilares devem ser, de modo que a mais baixa possa ser mais forte do que a maior. Por isso, eles são chamados de "stereobates"; para eles levarem a carga. E as projeções das bases não devem se estender além desta sólida fundação. A espessura da parede é semelhante para ser preservada acima do solo também, e os intervalos entre essas paredes devem ser abobadados sobre, ou preenchidos com terra batida duramente, para manter as paredes bem separadas.
>
> Vitruvius, Capítulo IV, Livro III

54.5.3 Tempos modernos

47 Obviamente os antigos códigos eram baseados em regras de polegares transmitidas de gerações para outras. Esses foram usados no projeto de catedrais góticas (§4), arcos (§31) e outros. Não foi até Galileu (§6.6.2) pela primeira vez introduziram mecânica experimental, e a noção de que tensões não pode ser ignorada que "códigos" evoluíram (muito mais tarde) em documentos enraizados na ciência (mecânica aplicada para a maior parte).

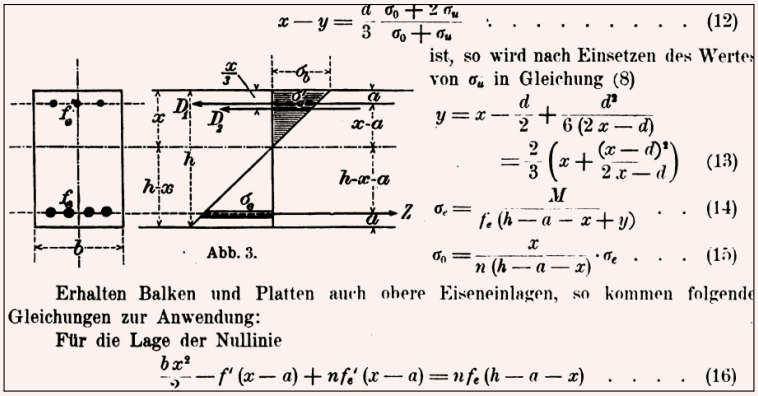
48 O mais antigo código de design para concreto armado é o *Beton-Reglement f uEisenbetonbau* (Regras de concreto para Concreto armado Construção), que foi desenvolvido na Alemanha em 1904, Fig. 54.8.. O código foi baseado no trabalho do engenheiro francês FrançOis Hennebique, que desenvolveu um sistema de reforço do concreto no final do século 19. Estabeleceu regras e diretrizes para o projeto e construção de estruturas concreto armado, incluindo especificações para as propriedades do concreto e aço reforçado, bem como cálculos de projeto e requisitos de detalhamento. Foi amplamente adotado na Alemanha e em outros países europeus, e serviu como modelo para códigos subsequentes concreto armado desenvolvidos ao redor do mundo.

49 Desde o desenvolvimento do *Beton-Reglement*, muitos outros códigos e padrões foram desenvolvidos para concreto armado projeto, refletindo avanços na tecnologia e mudanças nos códigos de construção e regulamentos. No entanto, os princípios básicos do projeto concreto armado, incluindo o uso de aço reforçado para fornecer resistência à tração e a importância de práticas adequadas de detalhamento e construção, permaneceram praticamente inalterados.

50 Da mesma forma, nos Estados Unidos, os códigos de construção surgiram no início do

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



$$x - y = \frac{a}{3}\,\frac{\sigma_0 + 2\sigma_u}{\sigma_0 + \sigma_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ist, so wird nach Einsetzen des Wertes von σ_u in Gleichung (8)

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^3}{6\,(2\,x - d)}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x + \frac{(x-d)^2}{2\,x - d}\right) \quad (13)$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e\,(h - a - x + y)} \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \frac{x}{n\,(h - a - x)} \cdot \sigma_e \quad \ldots \quad (15)$$

Abb. 3.

Erhalten Balken und Platten auch obere Eiseneinlagen, so kommen folgende Gleichungen zur Anwendung:

Für die Lage der Nullinie

$$\frac{b\,x^2}{2} - f'\,(x - a) + n f_e'\,(x - a) = n f_e\,(h - a - x) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Figura 54.8: *Beton-reglement f uEisenbetonbau*

século XX, à medida que as cidades começaram a implementar regulamentos para lidar com preocupações de segurança associadas à construção de edifícios. O Conselho Nacional de Subscritores de Fogo desenvolveu o primeiro código de construção modelo em 1915, que foi focado principalmente na segurança contra incêndio.

51 Em 1927, a Building Officials and Code Administrators International (BOCA) foi formada para promover o desenvolvimento de códigos de construção modelo, e em 1940, a primeira edição do Código Nacional de Construção BOCA foi publicada. A Conferência Internacional de Funcionários da Construção (ICBO) também foi formada na década de 1920, e desenvolveu seu próprio código de construção modelo em 1940, que ficou conhecido como o Código de Construção Uniforme.

52 Nos Estados Unidos, o American Concrete Institute (ACI) foi fundado em 1904, mas o primeiro código ACI especificamente dedicado a concreto armado não foi publicado até 1915. Este código, intitulado "Requisitos de Código Construtivo para Concreto armado", estabeleceu diretrizes para o projeto e construção de estruturas concreto armado nos Estados Unidos.

53 O mais antigo código de design de aço é a Especificação para o Design, Fabricação e Ereção de Aço Estrutural para Edifícios, que foi publicado pela primeira vez em 1923 pelo American Institute of Steel Construction (AISC). A organização foi fundada em 1921 para promover o uso de aço estrutural na construção civil, e a primeira edição da especificação forneceu diretrizes para o uso do aço em aplicações estruturais, incluindo design, fabricação e ereção.

54 Considerando que os detalhes do projeto permaneceram essencialmente os mesmos (como manter o equilíbrio entre forças internas e externas, ou limitar a deflexão), a filosofia abrangente evoluiu para todos os códigos (concreto, aço, madeira e outros). Esses, Fig. 54.9, pode ser categorizado como

Design permitido Tensão A abordagem mais antiga e simples para introduzir o conceito de segurança.

CÓPIA PARA REVISÃO

Projeto do Fator de Resistência à Carga introduzido no código ACI em 1977, AISC em 1986. Referência chave Ellingwood.

Engenharia Baseada em Desempenho 1 & 2 desenvolvido principalmente para design sísmico.

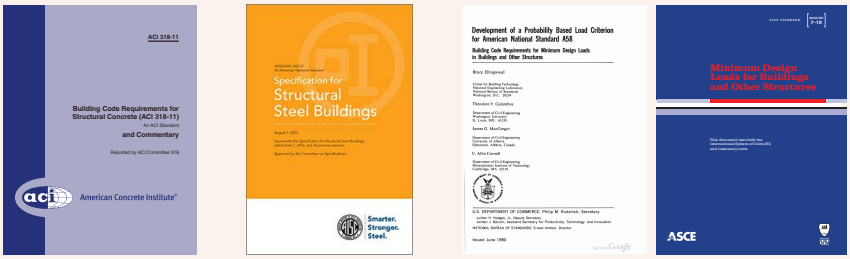


Figura 54.9: Exemplos de códigos modernos de design

54.5.3.1 Design permitido, ASD

55 ASD é a abordagem mais intuitiva e simples. A força real é reduzida por um fator (tipicamente 60)%) e é considerado o máximo permitido tensão (tenso, compressivo ou flexural).

56 A principal limitação do método, é que o fator de segurança só é impactado pelo Região de Confiança na força (capacidade) e não na carga (exigência).

54.5.3.2 Resistência à carga e projeto de fatores, LRFD

Conceitos-chave

57 Carga e resistência não são quantidades determinísticas (como no projeto permitido tensão, ASD), mas são variáveis aleatórias com suas próprias funções distribuição de probabilidade. Por isso podemos nos referir a um *Probabilidade de falha*.

58 Dado que temos capacidade e Deman, cada um deles será multiplicado por um fator apropriado. A carga será multiplicada por um fator α, (ASCE/SEI 7-16, 2017) E a capacidade (última resistência) será reduzida por Φ.

59 α e.. Φ será determinado de tal forma que a probabilidade de falha não exceda um certo valor. Assim, LRFD é geralmente expressa como

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i \tag{54.1}$$

Onde C_n e.. D são a capacidade nominal e as demandas (ou resistência nominal e carga). Estado limite é geralmente determinado de Capacidade plástica sem uma análise não linear. LRFD procura ter um Índice de confiabilidade (Chap. N) tal que $\beta >\sim 3.5$ (Tabela N.1). O Índice de confiabilidade é um indicador 'universal' sobre a adequação de uma estrutura, e pode ser usado como métrica para 1) avaliar a saúde de uma estruturas, e 2) comparar diferentes estruturas direcionadas para possível remediação.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

60 O índice de confiabilidade está definido no apêndice N.

Limitações de LRFD

61 Há três grandes limitações da LRFD,

1. É inconsistente. Análise linear, mas design plástico.
2. Ignora a redistribuição de carga perto da falha (embora o ACI implicitamente explique alguns deles através da redução de momentos negativos).
3. Endereços apenas um nível de perigo: falha de um componente estrutural (e não de todo o sistema)

62 Considerando que essas limitações são inconsequentes para análises estáticas, elas são problemáticas se: a) procura-se determinar a verdadeira segurança de uma estrutura; e b) sob carga dinâmica onde danos parciais são aceitáveis (economicamente). Essas limitações são abordadas pelo próximo método.

54.5.3.3 Engenharia sísmica baseada em desempenho

63 Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) é uma abordagem para engenharia sísmica que se concentra em alcançar objetivos de desempenho específicos para estruturas sob carga sísmica. Em PBEE, os objetivos de desempenho são tipicamente definidos em termos do nível de dano que uma estrutura pode suportar durante um terremoto, bem como sua funcionalidade após o terremoto.

64 PBEE avalia explicitamente como um edifício é capaz de executar, dado o risco potencial que ele provavelmente experimentará, considerando incertezas inerentes à quantificação do perigo potencial e incertezas na avaliação da resposta real ao edifício.

65 Contrariamente à LRFD, não se limita a um nível de perigo, mas múltiplos. O desempenho é medido em termos da probabilidade de incorrer em baixas, custos de reparo e substituição, tempo de reparação e placas inseguras.

66 O desempenho pode ser avaliado para um determinado cenário ou intensidade do terremoto, ou considerando todos os terremotos que possam ocorrer, e a probabilidade de cada um, durante um período específico de tempo. Desempenho expresso em termos de uma série de níveis discretos de desempenho identificados como, fig. 1. 54.10:

1. Operação
2. Ocupação imediata
3. Segurança de vida
4. Prevenção de colapso

67 Algumas limitações:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

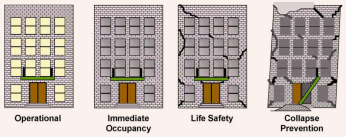


Figura 54.10: Níveis de desempenho

- Estados limites são Com base em componentes não realmente de todo o sistemaE se um componente falhar, ele causa colapso progressivo
- Trata apenas o evento MCE (2%- 50 anos.
- Tratamento limitado de Região de Confiança e probabilidade.
- Informação limitada para projetar o código acima.

68 A PBEE constitui o estado da prática e é usada apenas por empresas de alto nível.

69 A cobertura mais detalhada para PBEE é dada no Capítulo 72.

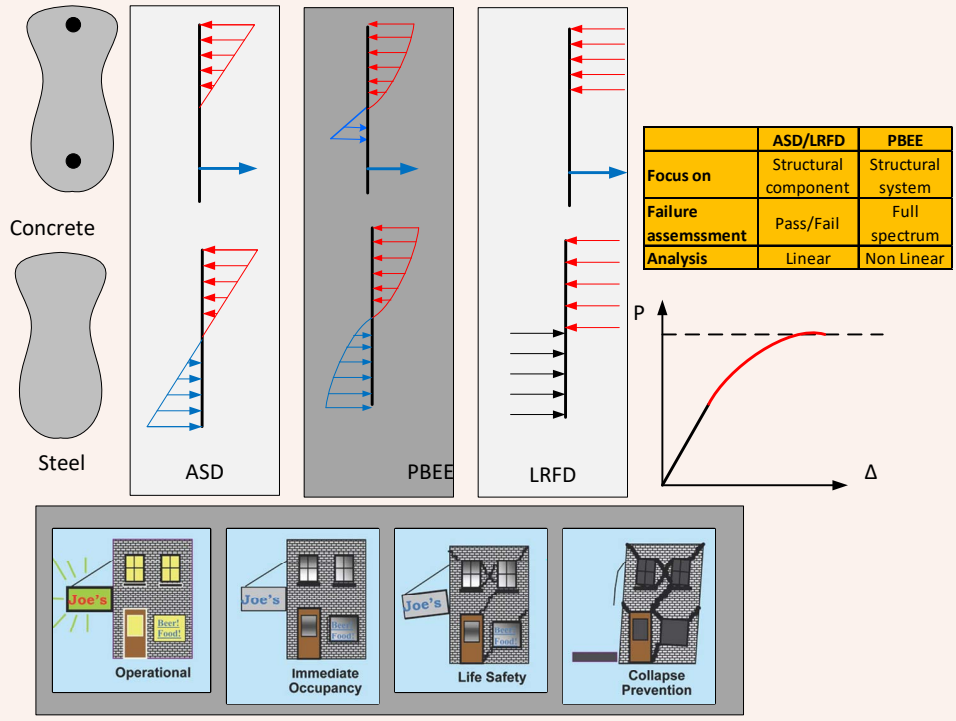
54.5.4 Resumo

70 Os paradigmas de design anteriormente discutidos estão resumidos na figura. 54.11



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



	ASD/LRFD	PBEE
Focus on	Structural component	Structural system
Failure assemssment	Pass/Fail	Full spectrum
Analysis	Linear	Non Linear

Figura 54.11: Comparação de várias estruturas de design

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 55

Plasticidade I; Fibras & Continuum (Para Elemento finito Análise)

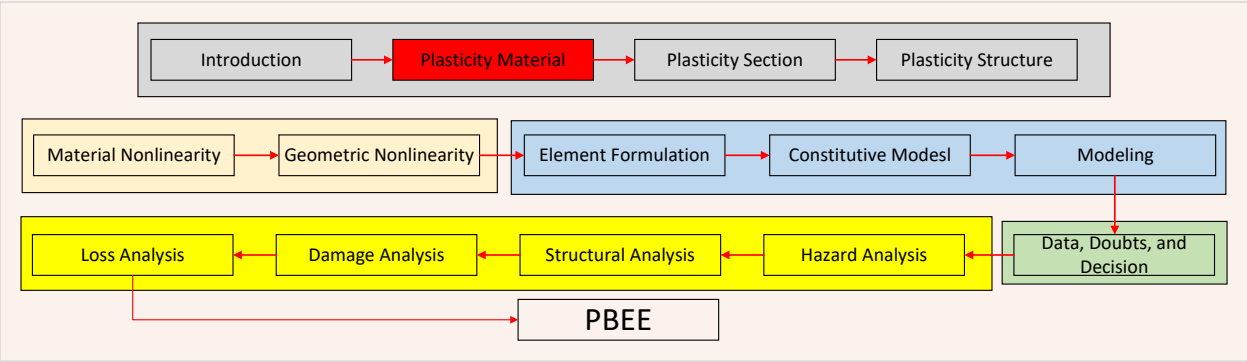
Abstract

Este é o primeiro de três capítulos cobrindo a plasticidade. Neste aqui[1] focamos em um "Gauss-Point" no espírito do contínuo elemento finito, ou numa fibra/camada em elementos de plasticidade distribuídos. Esta é essencialmente uma revisão básica dos fundamentos da plasticidade como encontrado em incontáveis livros didáticos. Começamos com os critérios de produção de plástico para metais e materiais cimentícios. Seguindo uma breve visão geral das observações laboratoriais, e falhas microscópicas, os fundamentos da teoria da plasticidade são abordados com ênfase na derivação do módulo elástico tangente. Duas abordagens são abordadas, a primeira derivação generalizada introduz conceitos de função de rendimento, regra de fluxo (e condição Kuhn-Tucker), condições de consistência. O segundo, muito mais simples é limitado a 1D e baseia-se em considerações de engenharia mais simples. O próximo capítulo cobrirá a plasticidade seccional, e a subsequente plastificação estrutural.

55.1 Introdução 1890
55.2 Condições de produção plástica . . 1890
55.2.1 Modelos independentes de pressão hidrostática 1891
55.2.2 Modelos dependentes de pressão hidrostática 1893
55.3 Observações do laboratório 1895
55.3.1 Metais 1895
55.3.2 Concreto 1896
55.4 Falhas microscópicas 1896
55.4.1 Ligações químicas 1896
55.4.2 Fracassados e frágeis 1897
55.4.3 Deslocamento 1898
55.5 Fundamentos da plasticidade 1899
55.5.1 Introdução 1899
55.5.2 Módulo elástico Tangent . . 1900

[1] O leitor é encorajado a rever o Apêndice O Antes de embarcar neste capítulo

CÓPIA PARA REVISÃO



55.1 Introdução

1 Há três tipos principais de fracasso: Cracking/fracture, flambagem/instabilidade, e render/plasticidade. Este capítulo abordará a plasticidade.

2 Para o concreto, a falha plástica tende a ser associada com ‘’’ esmagamento’ de concreto (ver §55.2.1), ou entrega do reforço (§55.2.2).

3 Este capítulo fornecerá uma breve introdução aos critérios de falha baseados na plasticidade que são quase universalmente usados em análises não lineares elemento finito.

55.2 Condições de produção plástica

4 Rendendo-se em um elemento estrutural uniaxial pode ser facilmente determinado a partir $|\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}| \overset{?}{\geq} 1.$. Mas e quanto a um estado tridimensional geral?

5 Isso é feito introduzindo um *função de rendimento* F em função do principal tensões e da produtividade uniaxial tensão

$$F(\sigma_{(1)},\sigma_{(2)},\sigma_{(3)};\sigma_y)\begin{cases} <0 & \text{Elastic} \\ =0 & \text{Plastic} \\ >0 & \text{Impossible} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t} \geq 0$$

Note que F não pode ser maior que zero, pela mesma razão que um uniaxial tensão não pode exceder o rendimento tensão. Em termos de dois principais tensões $\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}$, F é mostrado na Figura 55.1.. A área definida por F Constituem o *superfície de escoamento*.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

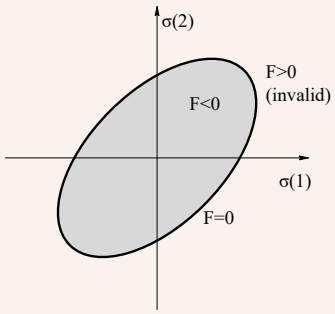
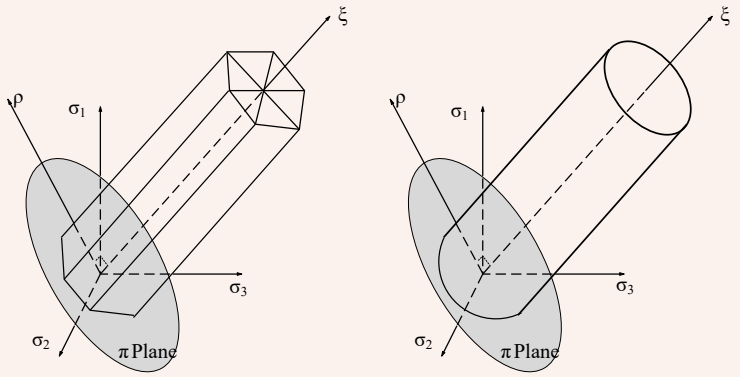


Figura 55.1: Superfície de escoamento; Definição

6 Há duas classes de superfícies de escoamento: Aqueles que são independentes da hidrostática tensão (Equação O.2.2.1) e aqueles que são dependentes (Chen e Zhang, 1990).

55.2.1 Modelos independentes de pressão hidrostática

7 Para a pressão hidrostática independente superfícies de escoamento (como para o aço), seus meridianos são linhas retas paralelas ao eixo hidrostático. Portanto, o cisalhamento tensão deve ser a principal causa de rendimento para este tipo de material. Como é a magnitude do cisalhamento tensão que é importante, e não sua direção, segue-se que o comportamento elástico-plástico na tensão e na compressão deve ser equivalente para materiais independentes de pressão hidrostática (como aço).



(a) Tresca (b) von Mises

Figura 55.2: Modelos independentes de pressão hidrostática

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tresca: O critério postula que a produção ocorre quando o máximo cisalhamento tensão atinge um valor limitante k, Figura 55.2a.

$$F\left(\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|,\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|,\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|\right)-k\right)=0$$

De um teste de tensão uniaxial, determinamos que $k=\sigma_y/2$, e de um teste puro cisalhamento, $k=\tau_y$.. Assim, em Tresca, a resistência à tração e cisalhamento força estão relacionadas por

$$\sigma_y=2\tau_y$$

O critério de Tresca também pode ser representado como

$$2\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma_y=0 \text{ for } 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

O critério Tresca é o primeiro proposto, usado principalmente para problemas elástico-plásticos. No entanto, devido aos cantos singulares, causa inúmeros problemas na análise numérica.

Von Mises: Existem múltiplas interpretações físicas para o postulado dos critérios de von Mises (todos equivalentes), Figura 55.2b:

1. O material vai render quando o segundo deviatório invariante atingir um valor crítico

$$F(J_2)=J_2-k^2=0 \tag{55.1}$$

2. O material vai render quando a energia distorcional máxima (cisalhamento) atingir o mesmo valor crítico que para o rendimento da tensão uniaxial.
3. Quando a distância (ρ) entre o ponto tensão P e o eixo hidrostática ξ é igual a

$$\rho_0=\tau_y\sqrt{2}$$

Usando a Equação 55.1 e do teste uniaxial, k é igual a $k=\sigma_y/\sqrt{3}$, e do teste puro cisalhamento, $k=\tau_y$.. Assim, em von Mises, a resistência à tração e cisalhamento força estão relacionados por

$$\sigma_y=\sqrt{3}\tau_y$$

Assim, podemos reescrever a Equação 55.1 Como

$$f(J_2)=J_2-\frac{\sigma_y^2}{3}=0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

55.2.2 Modelos dependentes de pressão hidrostática

8 Materiais friccionais sensíveis à pressão (como solo, rocha, concreto) precisam considerar os efeitos tanto do primeiro quanto do segundo invariantes tensão, melhor explicados em termos de superfície de escoamento.

9 As seções transversais de um superfície de escoamento são as curvas de intersecção entre o superfície de escoamento e o plano desviatório (ρ, θ) que é perpendicular ao eixo hidrostático, ξ, e com ξ = Constante. As formas transversais desta superfície de escoamento terão simetria tripla.

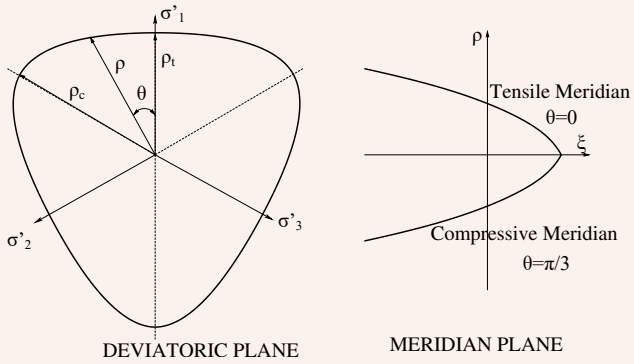


Figura 55.3: Pressão dependente superfícies de escoamento

10 Os meridianos de um superfície de escoamento são as curvas de intersecção entre a superfície e um plano meridiano (ξ, ρ) que contém o eixo hidrostático. O avião meridiano com $\theta = 0$ é o meridiano de tração e passa pelo ponto de escoamento uniaxial. O avião meridiano com $\theta = \pi/3$ é o meridiano compressivo e passa pelo ponto de escoamento de compressão uniaxial, Figura 55.3. O raio de um superfície de escoamento no meridiano de tração é ρ_t E no meridiano compressivo está ρ_c.

Rankine: O critério postula que a produção ocorre quando o principal máximo tensão atinge a resistência à tração, Figura 55.4a.

$$\sigma_1 = \sigma_y; \quad \sigma_2 = \sigma_y; \quad \sigma_3 = \sigma_y;$$

Mohr-Coulomb: Critérios podem ser considerados como uma extensão do critério Tresca. O máximo cisalhamento tensão é uma constante mais uma função do normal tensão atuando no mesmo plano, Figura 55.4b.

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi$$

Onde c é a coesão e ϕ O ângulo de fricção interna. Ambos c e.. ϕ são propriedades do material que podem ser calibradas a partir de ensaios uniaxiais de tração e compressão uniaxial.

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi} \\ \sigma_c &= \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi} \end{cases}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Em termos de invariantes, os critérios de Mohr-Coulomb podem ser expressos como:

$$\frac{1}{3}I_1 \sin\phi + \sqrt{J_2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\phi - c\cos\phi = 0$$
$$\text{for } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Drucker-Prager: postulado é uma simples extensão do critério de von Mises para incluir o efeito da pressão hidrostática sobre a produção dos materiais através I_1, Figura 55.4c:

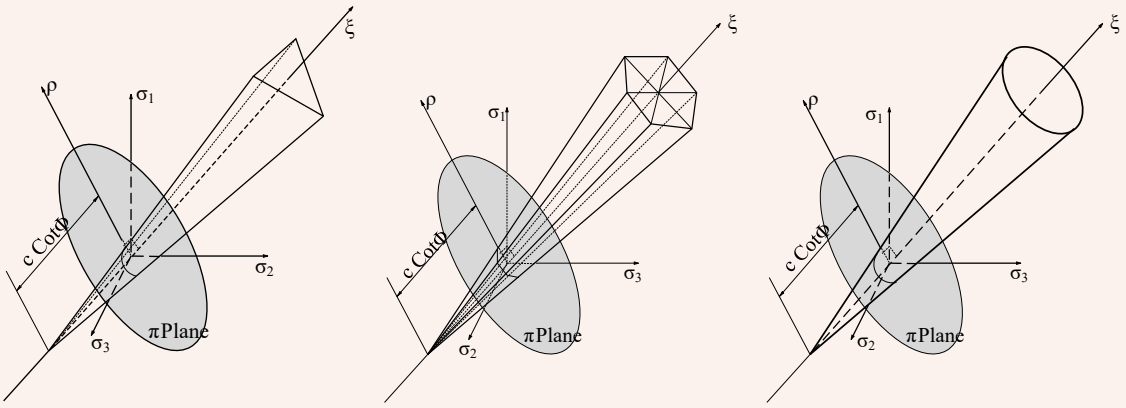
$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + J_2 - k$$

Os parâmetros de força α e.. k pode ser determinado a partir dos testes de tensão e compressão uniaxiais:

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{\sqrt{3}k}{1+\sqrt{3}\alpha} \\ \sigma_c &= \frac{\sqrt{3}k}{1-\sqrt{3}\alpha} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{m-1}{\sqrt{3}(m+1)} \\ k &= \frac{2\sigma_c}{\sqrt{3}(m+1)} \end{cases}$$



(a) Rankine (b) Mohr-Coulomb (c) Drucker-Prager

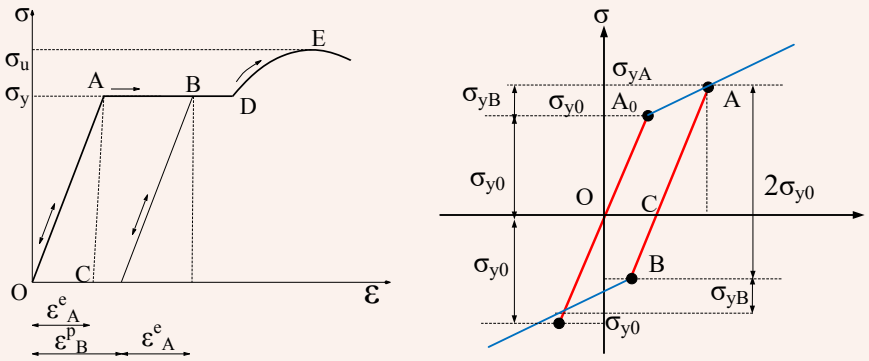
Figura 55.4: Modelos dependentes de pressão hidrostática

CÓPIA PARA REVISÃO

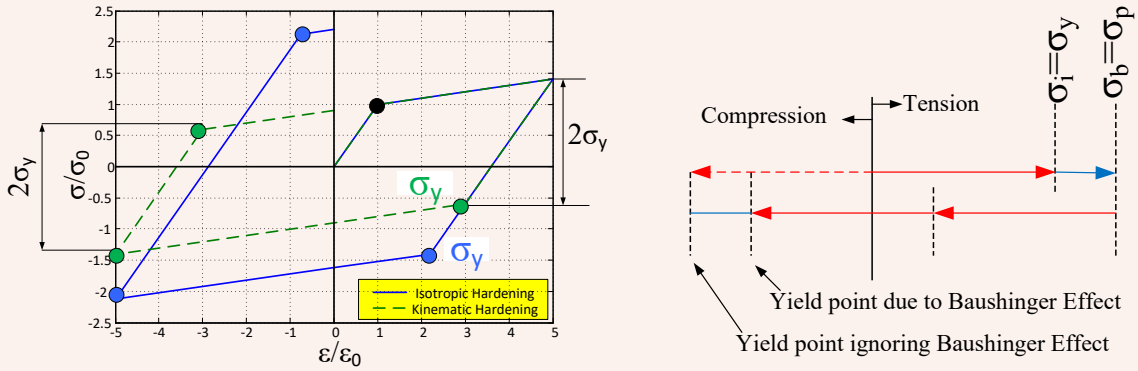
55.3 Observações do laboratório

55.3.1 Metais

11 Carregando e descarregando um cupom de aço em várias etapas, Figura 55.5aObservamos que até A, haveria uma descarga linearmente elástica seguindo o caminho inicial de carregamento. Comportamento O-A é independente do caminho de carga. Em A, chegamos ao limite elástico. Então, o material torna-se plástico e se comporta irreversivelmente: Primeiro, a rendição ocorre (A-D) e depois o endurecimento. Após a descarga, o material experimenta permanente deformação ou plástico deformação ε^p.. Assim, apenas parte do total deformação ε_B Em.. B é recuperado após a descarga, ou seja, o elástico deformação ε^e_A.



(a) Endurecimento isotrópico



(b) Endurecimento cinemático; Efeito Bauschinger

Figura 55.5: Tensão-deformação de metais; Efeito baushinger

12 Encruamento em uma direção seguida de carga reversa na outra leva a uma curva diferente tensão-deformação do que a obtida por pura tensão ou compressão. O novo

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

ponto de escoamento em compressão em B corresponde a um tensão σ_y^B menor do que.. σ_y^0, e muito menor do que o rendimento anterior tensão em A.. Este fenômeno é chamado de efeito Bauschinger, ou endurecimento cinemático (em oposição ao endurecimento isotrópico), Figura 55.5b.

13 O comportamento tensão-deformação na faixa de plástico é dependente do caminho, ou seja. deformação não dependerá do estado atual tensão. Também depende de toda a história do carregamento, ou seja. História e história de deformação.

55.3.2 Concreto

14 Concreto contém microcracks devido ao encolhimento e é originalmente isotrópico. Sob compressão como o tensão atinge $\simeq 0.5 f_c'$, as fendas de interface ao redor dos agregados se propagam e tendem a alinhar-se com a compressão tensão. No pico tensão, um mecanismo é formado (coalescência dos micro-cracks) (Hsu et al., 1963) (Slate e Olsefski, 1963), Figura 55.6.

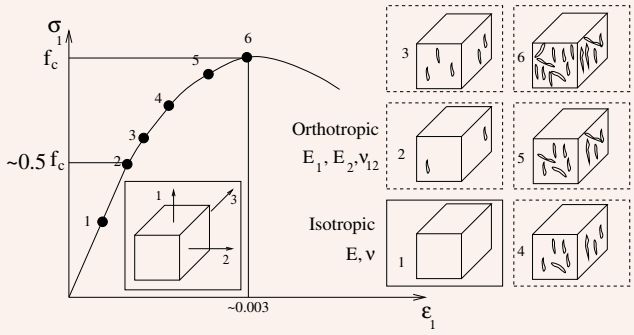


Figura 55.6: Micro-cracks de concreto

15 Se uma carga é aplicada, falha súbita no pico ocorre, e se deslocamento é imposta, o amolecimento pós-pico ocorre.

55.4 Falhas microscópicas

55.4.1 Ligações químicas

16 Compreender ligações químicas é importante para explicar a falha dúctil e deslocamento, Figura 55.7.. Os átomos de ligação iônica são mantidos juntos por atração eletrostática, enquanto os elétrons são transferidos de um átomo para outro vizinho. O átomo que entrega o elétron torna-se carregado positivamente, e o átomo que recebe ele se torna negativamente carregado. Uma ligação covalente ocorre quando os elétrons são compartilhados mais ou

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

menos igualmente entre átomos vizinhos. Embora a força eletrostática de atração entre átomos adjacentes seja menor do que em ligações iônicas, as ligações covalentes tendem a ser altamente direcionais, o que significa que elas resistem ao movimento dos átomos passados um pelo outro. Diamond tem laços covalentes. Em uma ligação metálica, os elétrons são deslocalizados ou distribuídos igualmente através de um cristal metálico, e a ligação não está localizada entre dois átomos. Estes são descritos como íons positivos em um mar de elétrons.

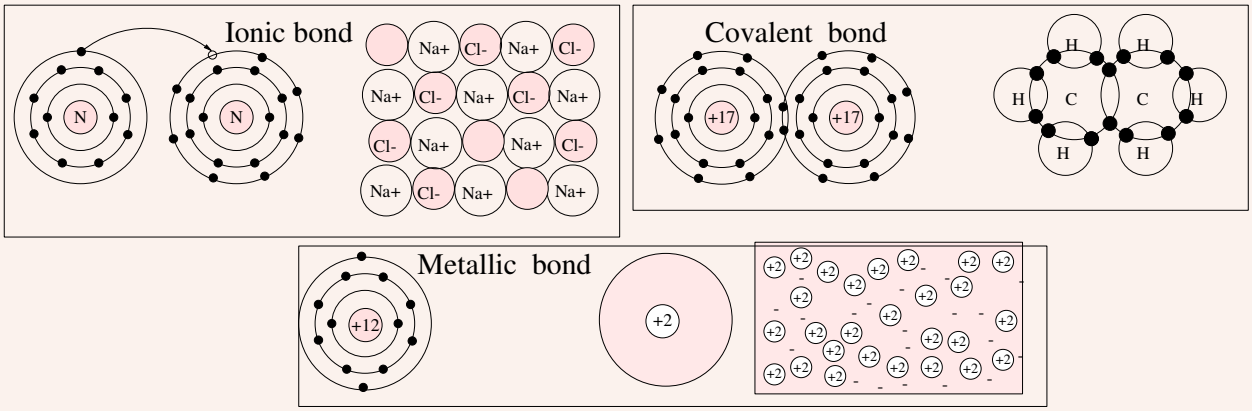


Figura 55.7: Ligações químicas

55.4.2 Fracassados e frágeis

17 Em um sólido iônico, cada íon é cercado por íons opostos carregados, assim escorregando é muito mais difícil de alcançar, e o material responde quebrando em um comportamento frágil, Figura 55.8.. Quando uma força de magnitude suficiente desloca átomos de uma posição de equilíbrio para outra, temos uma deformação plástica ao longo do plano deslizante sem considerar a restrição elétrica de carga, e assim dá origem a uma resposta dúctil.

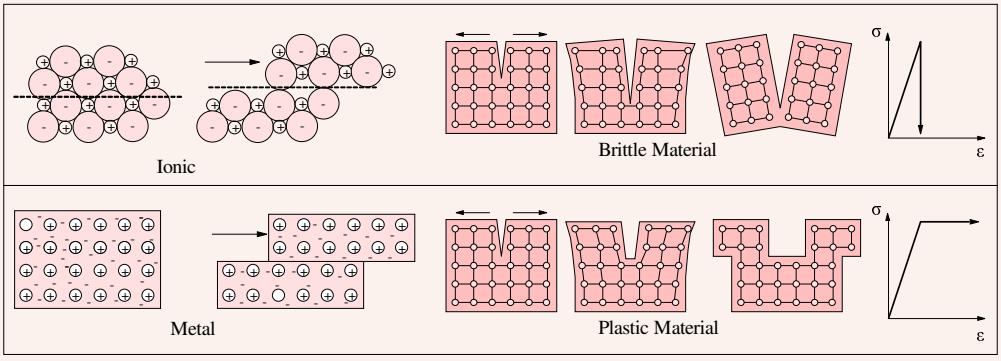


Figura 55.8: Títulos delicados e frágeis

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

55.4.3 Deslocamento

18 A força teórica dos cristais perfeitos (tensão é necessária para separar dois átomos adjacentes) $E/10$, mas isso nunca é alcançado devido à presença de imperfeições aleatórias. Deslocamento de borda é causado por falhas internas no plano atômico. Devido a.. τ, há uma força motriz para quebrar ligações atômicas entre átomos A e.. C até que a luxação passe completamente do cristal. Isso é chamado de deslocamento planar, Figura 55.9.

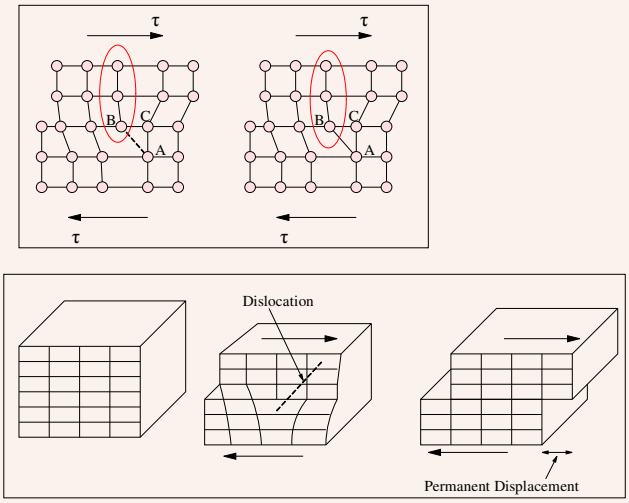


Figura 55.9: Deslocamento

19 Quando a luxação deixar o cristal, haverá um deslocamento permanente.

20 O *tensão* é alcançado uma vez que o aplicado cisalhamento tensão igual ao cisalhamento tensão necessário para fornecer as deslocações com energia suficiente para superar as forças de curto alcance exercidas pelos obstáculos.

21 *Trabalho-Difíceis* por sua vez, pode ser explicado quando deformações plásticas se multiplicam, e maiores tensões são necessárias para superar esta resistência e encruamento ocorre.

22 O *Efeito Bauschinger* ocorre quando deformações ou deslocamentos se acumulam causando luxações. Como encruamento está relacionado com o aumento da densidade de deslocamento, reduzir o número de deslocamentos (através da reversão tensão) reduz a força.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

55.5 Fundamentos da plasticidade

55.5.1 Introdução

23 Existem duas teorias principais para a elastoplasticidade:

Teoria da Deformação (ou Total) assume que a deformação plástica pode ser caracterizada pelo total deformação, sem necessariamente considerar o caminho ou sequência pelo qual esse deformação foi alcançado. $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ leva a uma formulação do tipo secante de plasticidade que é baseada na decomposição aditiva do total deformação em componentes elásticos e plásticos.

Teoria da Taxa (Prandtl-Reuss), também chamada de teoria incremental ou teoria do fluxo, descreve a deformação plástica como um processo dependente da taxa, onde a velocidade em que o carregamento é aplicado afeta a resposta plástica do material. É definido por

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

A teoria da taxa é inerentemente dependente do caminho, o que significa que a resposta plástica depende não só do estado atual, mas também da história e taxa de carregamento. Isso o torna mais adequado para cargas não proporcionais e casos em que o carregamento muda de direção ou intensidade ao longo do tempo.

A teoria da taxa é a mais utilizada.

24 Com referência à Figura 55.10, o incremento total deformação pode ser decomposto em um elástico e um plástico:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

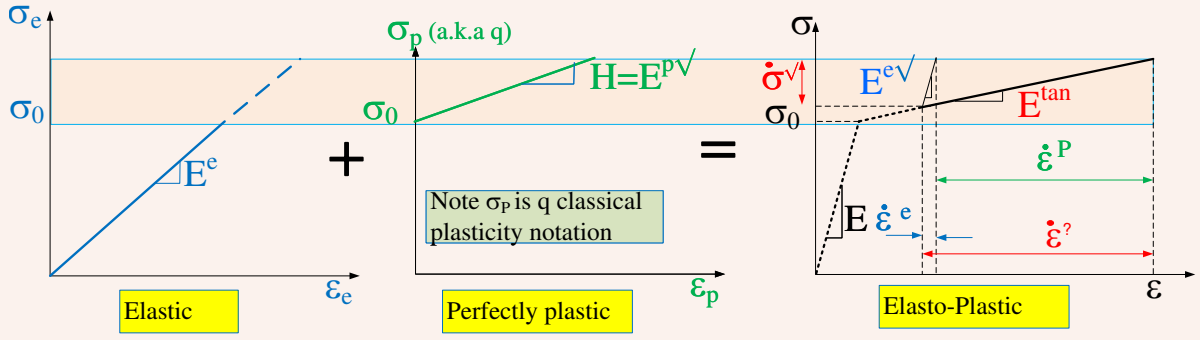


Figura 55.10: Resposta elastoplástica

25 No entanto, só conhecemos a parte elástica da lei constitutiva:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \tag{55.2}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

26 O plástico deformação e o correspondente incremento de plástico (tensão são:

$$\dot{\sigma_p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \tag{55.3}$$

Onde H é o módulo de endurecimento ou .

55.5.2 Módulo elástico Tangent

27 Com referência à Figura 55.10, dado o aumento total deformação é $\dot{\varepsilon}$Agora, procuramos determinar o plástico incremental correspondente tensão, $\dot{\sigma}$, tal que

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon} \tag{55.4}$$

Isso exigiria o chamado módulo elástico tangente E^{tan} (Não se confunda com H).

28 Duas abordagens são possíveis:

1. Mecânica 3D generalizada; Isso vai exigir
   (a) Rendimento da função
   (b) Regra de fluxo
   (c) Condição de consistência
2. Engenharia 1D

Cada um será abordado separadamente.

55.5.2.1 Derivação generalizada

55.5.2.1.1 Rende-te. Modelo de endurecimento isotrópico

29 O Denota o nível atual de tensão menos o rendimento inicial tensão ao qual se pode adicionar uma função de α que descreve o tipo de endurecimento. Em 1D, pode ser definido como

$$h(\sigma, q) = |\sigma| - q \leq 0 \tag{55.5}$$

q determina o movimento e a deformação do superfície de escoamento (Hardning ou Suavização). Sim $h < 0$, então o tensão está dentro do domínio elástico, e se $h = 0$, o tensão atingiu seu limite de plástico.

30 Primeiro o deformação chega a render-se ($\sigma_0 = \sigma_y$). Nesse ponto, mais um aumento em deformação resulta em uma expansão de q que, por sua vez, expandirá o domínio elástico.

55.5.2.1.2 Regra de fluxo

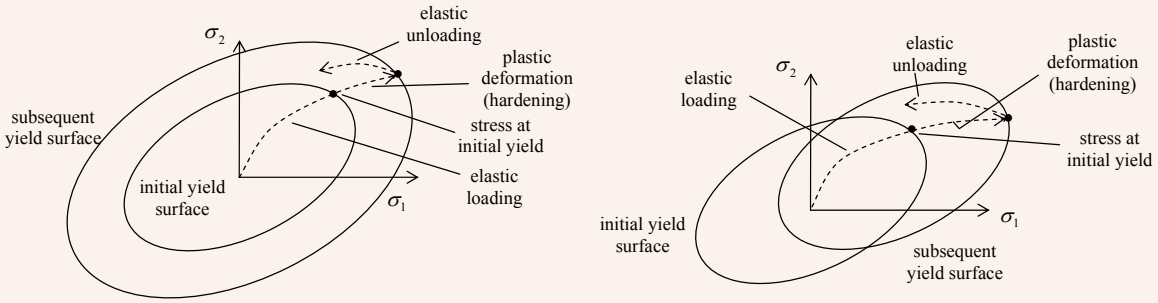
31 Quando o tensão está dentro do superfície de escoamento, é elástico, a lei de Hooke é aplicável, deformações são recuperáveis, e não há dissipação de energia . Assim, quando a carga na estrutura empurra o tensor tensão para estar além do superfície de escoamento, o tensor tensão trava sobre o superfície de escoamento, e a estrutura se deforma plasticamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

32 Se o material exibe endurecimento em oposição à resposta elástica perfeita de plástico, então o superfície de escoamento se expande ou move com o ponto tensão ainda no superfície de escoamento.

33 A questão crucial é qual será a direção do fluxo plástico (que é a magnitude relativa dos componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}^P$). Essa pergunta é abordada pela regra de fluxo, ou regra da normalidade.



(a) Isotrópico (b) Kinematic

Figura 55.11: Modelos endurecidos

34 A regra do fluxo assume que o incremento de plástico deformação e tensor desviatório tensão têm as mesmas direções principais, e define a evolução do plástico deformação como:

$$\dot{\varepsilon}^p := \lambda \cdot \frac{\partial g(\sigma, \varepsilon^p, q)}{\partial \sigma} = \lambda \cdot h(\sigma,\ q) \tag{55.6}$$

Onde $g(\sigma, \varepsilon^p, q)$ é o potencial plástico e.. λ é um multiplicador de plástico que mede a magnitude da deformação plástica (como veremos mais tarde, este termo cairá e conduzirá ao E^{tan} que é o que estamos procurando.

35 If $g \equiv h$, temos uma regra de fluxo associada (geralmente em metais). Sim $g \neq h$ Temos uma regra de fluxo não associada (concreto e geomateriais exibindo dilatação).

36 Para modelos isotrópicos de endurecimento e uma regra de fluxo associada,

$$g(\sigma, \varepsilon^p, q) = h(\sigma, q) = |\sigma| - q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$$

Onde sign(σ) É 1 if $\sigma \geq 0$ ou -1 if $\sigma < 0$. Então da Equação 55.6,

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)$$

ou

$$\lambda = |\dot{\varepsilon}^p| \geq 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

37 Por simplicidade e sob a suposição de um material de endurecimento elasto-plástico com uma curva bilinear,

$$h(\sigma,\ q) = -\frac{\partial g}{\partial q} = 1$$

Portanto, podemos expressar a equação 55.2) como

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}) = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)) \tag{55.7}$$

e da Equação 55.3

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \Rightarrow \dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = H \cdot \lambda \tag{55.8}$$

55.5.2.1.2.1 Kuhn-Tucker condições

38 No regime elástico, a função de rendimento f Deve permanecer negativo, e o multiplicador de plástico é zero. Durante o fluxo plástico, a função de rendimento f Deve ser zero enquanto o multiplicador de plástico é positivo.

39 Essas restrições podem ser expressas sucintamente pela chamada condição de Kuhn-Tucker,

$$\begin{aligned} \text{Carregamento e descarregamento elásticos} : f < 0, \quad \dot{\gamma} = 0 \\ \text{Plastic loading} : f = 0, \quad \dot{\gamma} > 0 \end{aligned} \tag{55.9}$$

Ou combinados para o caso geral de $f \leq 0$ e.. $\dot{\gamma} \geq 0$:

$$f \cdot \dot{\gamma} = 0 \tag{55.10}$$

55.5.2.1.3 Condição de consistência

40 Durante o carregamento de plástico, o caminho tensão é limitado a mover-se ao longo do superfície de escoamento, assim esta condição de consistência impede-nos de ir além do superfície de escoamento e é matematicamente expressa como $\dot{f}(\sigma, q) = 0$, ou

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma,\ q) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \end{aligned} \tag{55.11}$$

55.5.2.1.4 Módulo Tangent

41 Agora, podemos finalmente resolver a Equação 55.4

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon}$$

onde o módulo tangente é a inclinação da curva tensão-deformação em qualquer especificado tensão ou deformação. Abaixo do limite proporcional, o módulo tangente é equivalente a Módulo de Young, não deve ser confundido com $\dot{\sigma^p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p}$.. Substituindo

Flow Rule Equation 55.7	$\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma})$
Equation 55.8	$\dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q)$
Consistency Equation 55.11	$\dot{f}(\sigma,\ q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = 0$$

42 Portanto,

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot h(\sigma,\ q)}$$

Substituindo de volta para

$$\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} \cdot \text{sign}(\sigma))$$

Obtemos uma expressão explícita para o incremental tensão,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \\ &= \underbrace{\left(E - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E^2 \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot h(\sigma,\ q)} \right)}_{(\textit{by definition})\ E^{tan}} \cdot \dot{\varepsilon} \end{aligned}$$

43 Para um material de endurecimento elastoplástico com uma curva bilinear em uma dimensão,

$$\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{E + H}$$

e o módulo tangente reduz-se a

$$\begin{aligned} E^{tan} &= E - \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E^2 \cdot \text{sign}(\sigma)}{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \text{sign}(\sigma) - (-1) \cdot H \cdot (1)} \\ &= E - \frac{E^2}{E + H} = \frac{E \cdot H}{E + H} \end{aligned} \tag{55.12}$$

Note que se $H = E/9$, então $E^{tan} = E/10$.

55.5.2.2 Módulo Tangent; Engenharia

44 Uma derivação mais simples (e intuitiva) do módulo tangente é derivada a seguir.

45 Teoria da taxa é definida por

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

If $\sigma \leq \sigma_y$ (elasticidade), então

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

E se.. $\sigma > \sigma_y$ (plasticidade), então

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon^e} + \dot{\varepsilon^p}$$
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H} = \frac{\dot{\sigma}}{E^{tan}}$$

Onde

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

46 Nós notamos que

$$E^{tan} = \begin{cases} > 0, & \text{Hardening} \\ = 0, & \text{Perfectly-Plastic} \\ < 0, & \text{Softening} \end{cases}$$

47 E_t é independente do tipo de endurecimento (isotrópico ou cinemático).

48 Nota: Há uma contrapartida em não linear análise estrutural onde procuramos determinar a matriz rigidez tangente de um elemento em um dado passo temporal. O procedimento é conceitualmente idêntico ao que foi feito analiticamente na primeira parte.

49 Observe a analogia com um resistor equivalente quando múltiplos estão em paralelo.

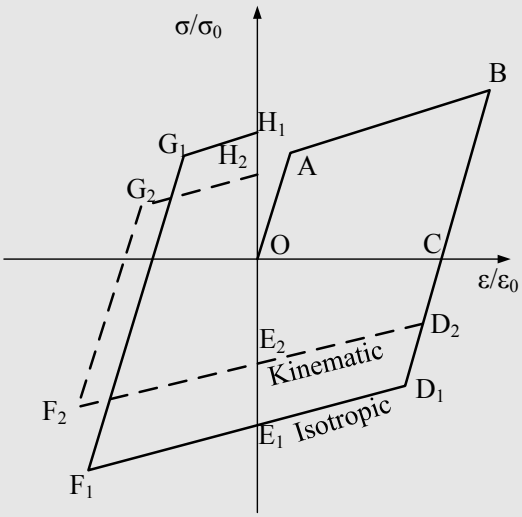
$$R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$$

55.5.2.3 Ex 55.1: Módulo Tangent

O $\sigma - \varepsilon$ A resposta na tensão simples é aproximada pelo seguinte modelo linear de endurecimento:

$$\begin{array}{lllll} \sigma & = & E\varepsilon; & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0; & \\ \sigma & = & \sigma_0 + m\varepsilon^p; & \varepsilon_0 \leq \varepsilon; & \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \end{array}$$

Onde $m = E/9..$ Um elemento material sofre a seguinte história uniaxial: $\varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon_1$ (B) $\rightarrow 0$ (E) $\rightarrow -\varepsilon_1$ (F) $\rightarrow 0$ (H) e o carregamento inicial termina em B onde $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\sigma = (1.0 + \alpha)\sigma_0$ com $0 \leq \alpha \leq 1..$ Nós procuramos tabelar os resultados para A, B, C, D, E, F e G (tensão e deformação) em termos de α, e plotar resultados para $\alpha = 0.4$. Usando a forma incremental (onde sabemos que a resposta tensão-deformação é linear dependendo se é elástica ou plástica), procuramos resolver para incremento do total deformação: Se elástico $d\varepsilon = d\sigma/E$ Ou se for plástico $d\varepsilon/dE^P$.



CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Endurecimento isotrópico

Observação preliminar: Não devemos confundir o módulo tangente e o módulo de plástico. O módulo de plástico: $d\varepsilon_p = d\sigma/E_p$ E o módulo tangente é $d\varepsilon = d\sigma/E_t$ Wheere $E^t = \frac{E.E_p}{E+E_p}$ Onde $E_p = m = E/9$.. Assim, $E_t = E/10$.

A Este é um ponto intermediário como o deformação está aumentando de zero para $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$E corresponde a.. $\sigma_A = \sigma_0$ e.. $\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B O tensão é dado por $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$.. Para o correspondente deformação, há duas maneiras de proceder

1. Usando E_t: $\varepsilon_B = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{(1+\alpha)\sigma_0 - \sigma_0}{E/10} = (1+10\alpha)\varepsilon_0$
2. Usando m $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_0)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C Nós temos agora $\sigma_C = 0$, e o material está descarregando elásticamente com

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D É um ponto intermediário para nossa excursão de $\varepsilon = \varepsilon_1$ para $\varepsilon = 0$.. Neste momento, temos **Endurecimento isotrópico**, assim $\sigma_D = -\sigma_B = -(1+\alpha)\sigma_0$, e nós determinamos o correspondente deformação do ponto B

$$\varepsilon_D = \varepsilon_B - 2\sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - 2\frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = (8\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E Aqui $\varepsilon_E = 0$, o material está passando por carregamento de plástico e

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = -(1+\alpha)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -(0.9+1.8\alpha)\sigma_0$$

F Ao longo da EF, o material ainda está no estado de carga plástica, e $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$, o correspondente σ_F pode ser obtido a partir das seguintes relações: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$, substituindo e indo para trás, nós obtemos $\Delta\varepsilon = -18\alpha\varepsilon_0$; $\Delta\sigma = -1.8\alpha E\varepsilon_0$, e $\sigma_F = -(1+2.8\alpha)\sigma_0$

G O material está em primeiro lugar no estado de descarga e, em seguida, em um carregamento elástico invertido, e carga plástica começará no ponto G. Por causa da suposição de endurecimento isotrópico $\sigma_G = -\sigma_F = (1+2.8\alpha)\sigma_0$, e $\varepsilon_G = \varepsilon_F + 2\sigma_F/E$ que corresponde à descarga elástica.

$$\varepsilon_G = -(1+10\alpha)\varepsilon_0 + 2(1+2.8\alpha) = (1-4.4\alpha)\varepsilon_0$$

H O material agora está recarregando plasticamente com $\varepsilon_H = 0$ e.. $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1+2.8\alpha)\sigma_0 + E_t(4.4\alpha - 1)\varepsilon_0$ ou $\sigma_H = (0.9+3.24\alpha)\sigma_0$

Notamos como a determinação de cada estado n simplesmente depende de estados em $n-1$.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Endurecimento cinemático

Nota: Os três primeiros pontos são idênticos ao modelo isotrópico de endurecimento

A Este é um ponto intermediário como o deformação está aumentando de zero para $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$E corresponde a.. $\sigma_A = \sigma_0$ e.. $\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B O tensão é dado por $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$.. Para o correspondente deformação, $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_e)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C Nós temos agora $\sigma_C = 0$, e o material está descarregando elásticamente com

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D É um ponto intermediário para nossa excursão de $\varepsilon = \varepsilon_1$ para $\varepsilon = 0$.. Neste momento, temos **Endurecimento cinemático**, assim $\sigma_D = \sigma_B - 2\sigma_0 = (\alpha - 1)\sigma_0$, e nós determinamos o correspondente deformação do ponto C

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C + \sigma_D/E = 9\alpha\varepsilon_0 + \frac{(\alpha-1)\sigma_0}{E} = (10\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E Aqui $\varepsilon_E = 0$, o material está passando por carregamento de plástico e

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = (\alpha-1)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -0.9\sigma_0$$

F Ao longo da EF, o material ainda está no estado de carga plástica, e $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$, o correspondente σ_F pode ser obtido a partir das seguintes relações: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$, substituindo, nós conseguimos $\sigma_F = -(1+\alpha)\sigma_0$

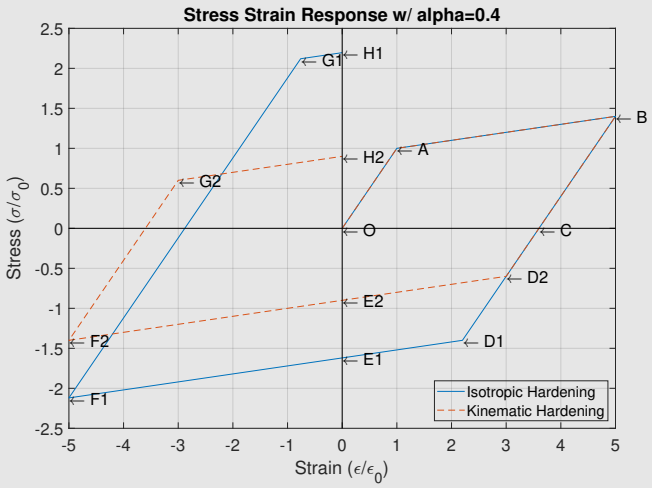
G O material está em primeiro lugar no estado de descarga e, em seguida, em um carregamento elástico invertido, e carga plástica começará no ponto G. Por causa da suposição de **Endurecimento cinemático** $\sigma_G - \sigma_F = -(\sigma_D - \sigma_B)$ ou $\sigma_G = -\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 + \alpha\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 = (1-\alpha)\sigma_0$

$$\varepsilon_G = \varepsilon_F + \frac{\sigma_G - \sigma_F}{E} = -\varepsilon_0 - 10\alpha\varepsilon_0 + (1-\alpha)\varepsilon_0 + (1+\alpha)\varepsilon_0 = (1-10\alpha)\varepsilon_0$$

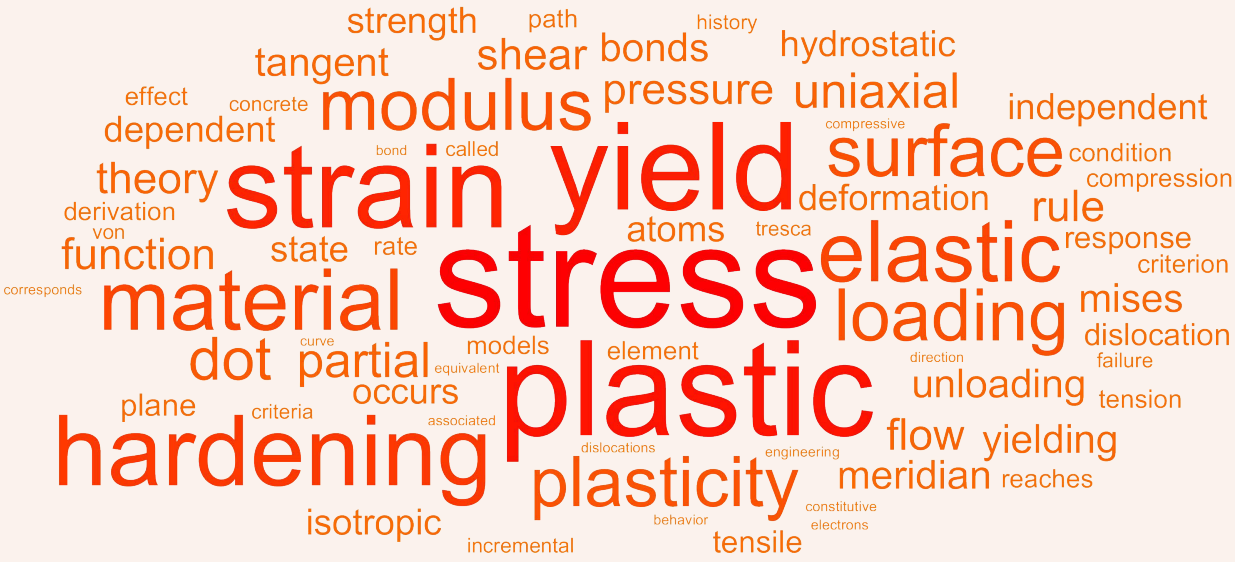
H O material agora está recarregando plasticamente com $\varepsilon_H = 0$ e.. $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1-\alpha)\sigma_0 - \frac{1}{10}(1-10\alpha)\sigma_0 or \sigma_H = 0.9\sigma_0$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A MATLAB®A solução baseada para este problema é dada no Apêndice I.3.1.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

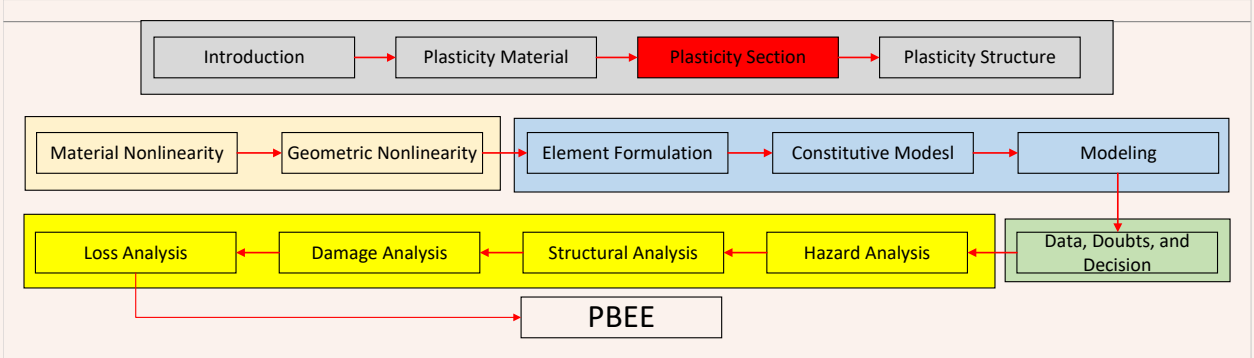
Capítulo 56

Plasticidade II; Seções:

Abstract

Seguindo o ponto de plasticidade, este capítulo foca na plastificação seccional. Vamos primeiro rever a relação curvatura momento, e depois aplicá-lo para a análise não linear de um aço pilar. Então, vamos dividir a seção em camadas, e ao invés de recorrer a um $M - \phi$ relação, vamos derivar se da aplicação de um $\sigma - \varepsilon$ Um aplicado nas camadas de secion. Isso será aplicado à mesma força previamente analisada, e então aplicaremos para verificar a precisão da suposição do bloco Whitney tensão em concreto armado vigas. Finalmente, a abordagem em camadas será generalizada para seções arbitrárias usando uma abordagem analítica ou numérica.

56.1 Introdução 1909
56.2 Framework teórico: Suposições e resultados-chave 1909
56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$ . . . 1910
56.3.1 A partir do momento relação curvatura 1912
56.3.2 Da relação entre o Tensão e o Deformação 1915
56.4 Curvação do momento, generalização 1923
56.4.1 Abordagem analítica 1923
56.4.2 Aproximação numérica . . . 1930



CÓPIA PARA REVISÃO

56.1 Introdução

1 No capítulo anterior, nossa análise se concentrou no tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$) resposta em um ponto Gauss específico. Com base neste entendimento fundamental, o presente capítulo muda de foco para explorar a curva do momento ($M - \Phi$) relação na seção transversal de um elemento viga-pilar. Esta relação é um descritor crítico do comportamento estrutural sob flexão e pode ser determinada através da observação experimental ou por decompor computacionalmente a seção transversal em fibras discretas, cada uma governada por suas respectivas tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$) lei constitutiva.

56.2 Framework teórico: Suposições e resultados-chave

2 Para entender adequadamente as derivações que se seguem, é essencial delinear várias considerações críticas que sustentam o referencial teórico.

Suposições

Forças: Nós consideramos ambos força axial, N, e momento fletor, M, como as cargas primárias agindo na seção.

Seções do avião permanecem no avião (Hipótese de Bernoulli): A suposição de que as seções planas permanecem planas sob deformação é fundamental, garantindo distribuição linear deformação através da profundidade da seção.

Perfeito Bond (para Concreto armado): No caso dos membros concreto armado (R/C], assumimos que existe uma ligação perfeita entre armadura de aço e concreto, permitindo compatibilidade deformação entre os materiais.

Equações Governantes

Equilíbrio de Forças e Momentos: As condições de equilíbrio na seção transversal garantem que esforços internos e momentos contrabalançam as condições externas de carga.

Compatibilidade de Deformação e Curvature: Deformação distribuição através da seção é assumido para correlacionar com curvatura, $\varepsilon = \Phi \cdot y = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y$, ligando o momento aplicado à curvatura resultante através de propriedades materiais e geométricas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Leis Constitutivas

Relacionamento momento-curvatura ($M - \Phi$): Esta relação caracteriza a flexão rigidez e a resposta da seção, refletindo a capacidade do material de resistir à flexão.

Tensão-Deformação Relacionamento ($\sigma - \varepsilon$): Governando cada fibra de material, esta lei define como cada segmento responde a tensão, fundamental para seções compostas onde múltiplos materiais interagem.

Curvatura Definido como a rotação por unidade de comprimento da viga (§22.3), curvatura Φ em qualquer seção transversal é expressa como:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Onde ρ representa o raio da curvatura, θ a rotação angular, e y A deflexão.

Resultado

Momento-Curvatura ($M - \Phi$): Uma relação chave para avaliar o desempenho da flexão.

Resposta de Deflexão de Carga (Pushover, $P - \Delta$): Avalia a deflexão progressiva da estrutura sob carga crescente, indicativo do comportamento dúctil.

Diagrama de Interação ($M - N$): Descreve a interação entre o momento e força axial, essencial para o projeto sob carga combinada.

Razão de Dutilidade[1]**:**

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

Onde Φ_u é a curvatura final na falha (definida por uma compressão de concreto limitante deformação), e Φ_y é a curvatura no rendimento, marcando o escoamento inicial da armadura de tração.

[3] É importante notar que, para simplicidade e eficiência, uma abordagem não-camada é normalmente empregada quando se analisa $M - \Phi$ para os membros de aço, enquanto uma abordagem em camadas é preferida para o concreto para explicar por seu comportamento mais complexo, não linear. Esta escolha reflete as características de ductilidade e ligação inerentes a cada material.

56.3 Momento-curvatura; $M - \Phi$

[4] O *Momento-curvatura* ($M - \Phi$A relação é uma ferramenta fundamental na engenharia estrutural usada para entender e prever o comportamento flexural de vigas e pilares sob cargas fletoras.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5 Ele define a conexão entre o aplicado momento fletor (M) e a curvatura resultante (Φ), que é a taxa de variação da rotação angular por unidade de comprimento ao longo da viga. Esta relação é crucial para analisar elementos estruturais porque fornece insights sobre como uma seção transversal irá se deformar e carregar cargas, ajudando engenheiros a garantir a estabilidade e segurança das estruturas.

6 Análise de momento-curvatura é essencial por várias razões:

- **Prevendo Flexural Rigidez:** Permite aos engenheiros avaliar o rigidez de uma seção, que é a resistência da seção à flexão. Uma seção mais rígida terá curvatura inferior por um determinado momento.
- **Entendendo a Dutilidade:** Dutilidade, ou a habilidade de uma seção para se deformar sem falhar, é fundamental para estruturas em regiões sísmicas. Relações de momento-curvatura ajudam a quantificar ductilidade mostrando quanta curvatura uma seção pode sofrer antes de atingir sua força final.
- **Avaliando a Capacidade Ultimate:** A capacidade de momento final (quando a seção falha em dobrar) é um parâmetro essencial de projeto, particularmente para concreto armado ou seções compostas, onde o comportamento é muitas vezes não linear e complexo.

7 Ao lidar com o comportamento não linear em vigas ou pilares, a análise pode prosseguir de duas maneiras principais:

1. Usando diretamente um **Relacionamento não linear momento-curvatura**.
2. A partir de um **Relacionamento não linear tensão-deformação** e derivando a resposta momento-curvatura.

8 A computação de momento-curvatura envolve propriedades geométricas e materiais da seção:

1. **Suposições e Geometria:** Normalmente, nós presumimos que *Seções planas permanecem planas* sob dobra (hipótese de Bernouli), significando que a distribuição deformação através da profundidade da seção permanece linear. Esta suposição simplifica a relação entre deformação e curvatura ao longo da seção.
2. **Seção/Leis Constitutivas de Materiais:** Temos uma possível caracterização:

   Momento-Curvatura é dado como $M - \Phi$.. Este é o caso mais simples, e este seria *Seção* característica.

   Tensão-Deformação é o caso mais geral. Isso seria um.. *camada ou fibra* Caracterização.

   Note que no primeiro caso, toda a seção sofre plastificação simultaneamente, enquanto no segundo, plastificação ocorre progressivamente através da seção.
3. **Camada ou Descomposição de Fibras:** (Apenas quando a relação de curvatura

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

é dada). A seção transversal é dividida em pequenos elementos ou fibras, cada uma com sua própria resposta tensão-deformação. Para uma dada curvatura, o deformação em cada fibra é calculado com base em sua distância do linha neutra, e correspondente tensões são obtidos a partir das leis materiais. Note que isso pode ser realizado analiticamente (n necessidade de camada explícita / fibra como é substituído por dy) ou numericamente. Note que isso vai levar, intermediáriamente a uma relação de curvatura momento.

4. **Integração de Esforços internos:** O esforços internos (tensões) em cada seção/fibra são integrados através da seção para determinar o resultado momento fletor (M). Este processo é repetido para aumentar os valores de curvatura, criando um $M - \Phi$ curva que mostra como a seção se comporta à medida que sofre uma flexão progressiva.
5. **Análise não linear:** À medida que a curvatura aumenta, o $M - \Phi$ A relação normalmente se torna não linear, especialmente em seções concreto armado onde o concreto começa a rachar e o aço produz. Essa resposta não linear é crucial para entender a capacidade de flexão total e o comportamento pós-rendimento da seção.

9 A análise da curva do momento é amplamente aplicada em:

- **Viga e Pilar Design:** Determinando o comportamento da seção sob cargas de flexão, que informa decisões sobre dimensões, reforço e seleção de materiais.
- **Design Sésmico:** Garantir que os elementos estruturais tenham ductilidade suficiente e capacidade dissipadora de energia.
- **Não-linear Elemento finito Modelação:** Fornecendo entrada para simulações detalhadas de sistemas estruturais complexos sob várias condições de carga.

10 No geral, o $M - \Phi$ A relação oferece uma compreensão detalhada do desempenho da flexão, permitindo que os engenheiros projetem estruturas mais seguras e resilientes prevendo com precisão como os elementos se comportarão sob condições reais de carga.

56.3.1 A partir do momento relação curvatura

11 O procedimento é muito simples e é ilustrado pelo próximo exemplo.

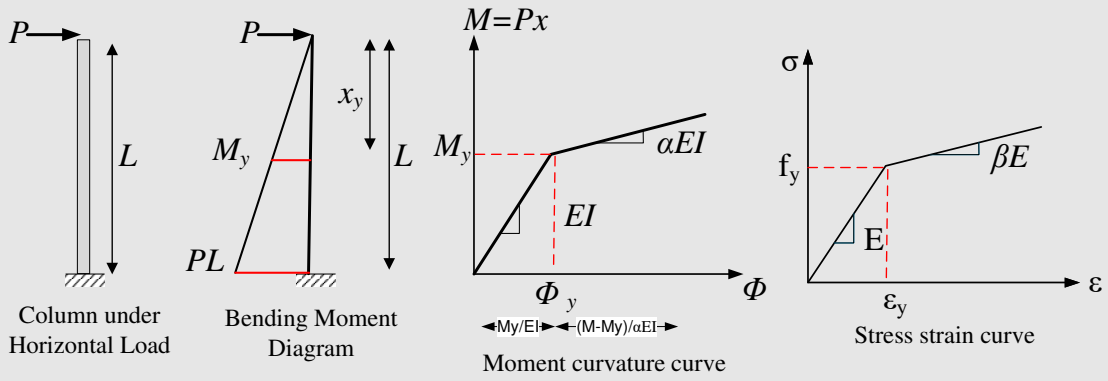
56.3.1.1 Ex 56.1: Análise seccional não linear. analítico

Parte I: Seção

Procuramos determinar e traçar a relação de curvatura do momento para o seguinte problema.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Rendendo Ocorre em.. x_y De tal forma que..

$$x_y = \frac{M_y}{P} \leq L$$

Curvaturas são dados por

$$\Phi = \begin{cases} \frac{P.x}{E.I} & \text{if } x < x_y \\ \frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I} & \text{if } x > x_y \end{cases}$$

Deslocamento é obtido a partir do princípio da complementar trabalho virtual (força virtual)

$$\begin{aligned} \delta\overline{M} &= x \\ \delta\overline{P}\Delta &= \int_0^L \delta\overline{M}.\Phi dx = \int_0^L x\ .\Phi.dx \\ &= \int_0^{x_y} x\frac{P.x}{E.I}dx + \int_{x_y}^L x\left(\frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I}\right)\cdot dx \\ &= \frac{P.{x_y}^3}{3.E.I} + \frac{3\left(-1+\alpha\right)M_y\left(L^2 - {x_y}^2\right) + 2.P\left(L^3 - {x_y}^3\right)}{6E.I.\alpha} \end{aligned}$$

Substituição de $x_y = M_y/P$ dá Força-deslocamento ou Pushover

$$\Delta = \frac{2L^3P^3 - (\alpha - 1)M_y\left(M_y^2 - 3L^2P^2\right)}{6\alpha EIP^2}$$

O que é claramente uma relação não linear.

```
clear all;clc;close all
% Initialization for figures
fs = 24;scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
% units: kips in; Rectangular section (to make it simpler)
E=29000;fy=36;h=10;h2=h/2;b=10;beta=0.01;I=b*h^3/12;
L=6*12;alpha=0.01;S=I/h2;%7 ft long column; 10x10 inch
EI=E*I; My=S*fy; Phiy=My/EI;A=b*h;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

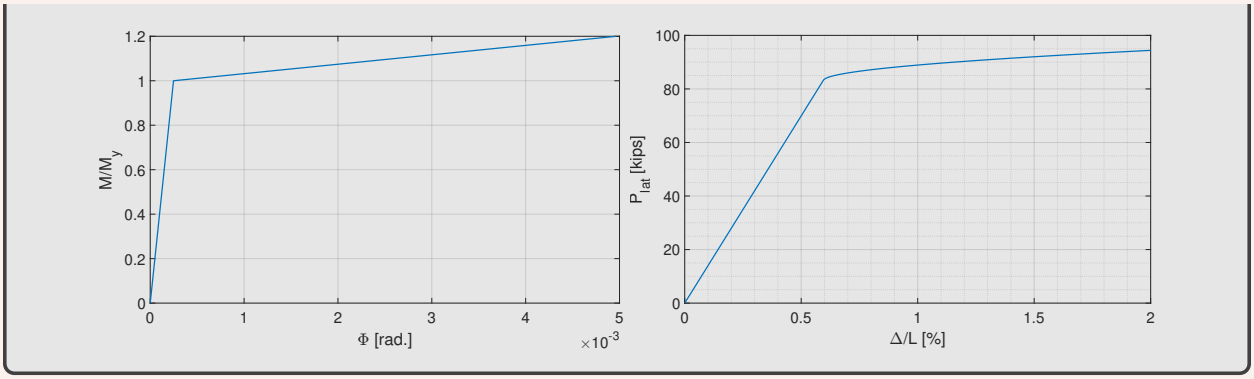
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% P A R T  I;
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

%=======================
% MOMENT CURVATURE PLOT
%=======================
M(1) = 0; Phi(1) = 0.;M(2) = My; Phi(2) = Phiy;
M(3) = 1.2*M(2); Phi(3) = (M(3)-My)/(alpha*EI);
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(Phi,M/My,'LineWidth',2)
xlabel('\Phi [rad.]'); ylabel('M/M_y');
grid ; set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredMomentCurvature.pdf','BackgroundColor','
    none')
%=========================
% LOAD DISPLACEMENT PLOT
%=========================
DeltaP=0.5;P(1)=0.0; Delta(1)=0;
for i=2:1000
P(i) = P(i-1)+DeltaP;
xy = My/P(i);
if xy>L
Delta(i) = P(i)*L^3/(3*E*I);
else
Delta(i) = (2*L^3*P(i)^3 - My*(My^2 - 3*L^2*P(i)^2)*(-1 + alpha))/...
(6.*EI*P(i)^2*alpha);
end
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*Delta/L,P,'LineWidth',2)
xlabel('\Delta/L [%]'); ylabel('P_l_a_t [kips]');xlim([0,2])
grid;grid minor;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredLoadDisplacement.pdf','BackgroundColor','
    none')
Delta0=Delta;P0=P; % Store results for Part II
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



56.3.2 Da relação entre o Tensão e o Deformação

12 Na seção anterior, consideramos toda a seção de potencial plastificação, na realidade é um progresso progressivo que começa nas fibras extremas e uma que gradualmente se move em direção ao linha neutra.

13 Assim, uma abordagem controlada pode ser justificada. Isso será feito considerando *Camadas* do seção transversal que pode agir independentemente dos adjacentes. Em outras palavras, examinaremos a progressiva plastificação das camadas exteriores até que o linha neutra seja alcançado.

14 Assim, precisamos caracterizar cada camada por sua própria equação constitutiva em termos de $\sigma - \varepsilon$, e então derivar o

1. Relação não linear de curvatura do momento (para ser contrastada com a bilinear anteriormente assumida.
2. Relação da força correspondente deslocamento

15 Quando se começa a partir de uma relação não linear tensão-deformação, a curvatura é derivada da integração do comportamento não linear do material através da seção transversal.

16 Neste caso, tensão σ é uma função não linear de deformação ϵ:

$$\sigma = g(\epsilon)$$

Onde $g(\epsilon)$ representa a resposta não linear do material, como o endurecimento em metais ou compressão não linear no concreto.

17 Análise:

1. **Distribuição em dobra**:. Quando uma seção viga se dobra, a deformação $\epsilon(y)$ à distância y do linha neutra é proporcional à curvatura:

$$\epsilon(y) = -\kappa y$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. **Não linear Tensão de Não linear (Deformação**:. Aplicando a relação não linear tensão-deformação $\sigma = g(\epsilon)$, o tensão em qualquer fibra y é:

$$\sigma(y) = g(-\kappa y)$$

3. **Integrando para Momento fletor**:. O momento fletor M é obtido integrando a distribuição tensão sobre a área transversal A:

$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \, dA = \int_A g(-\kappa y) \cdot y \, dA$$

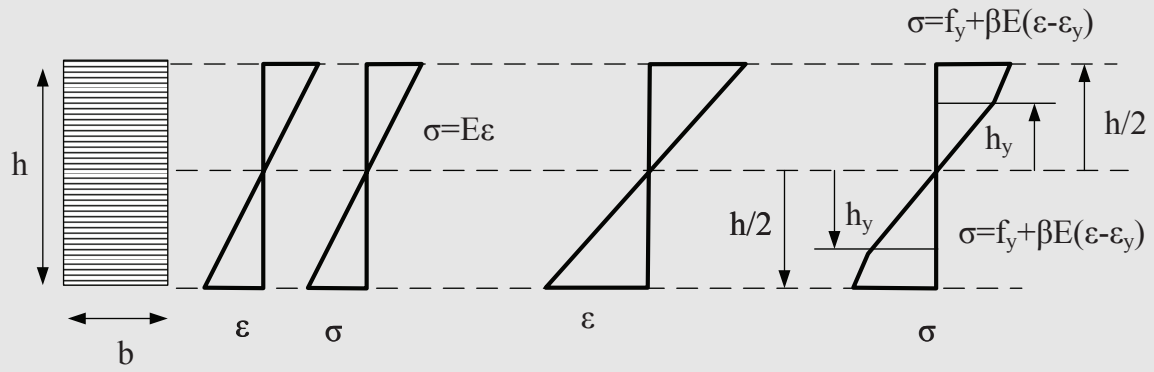
Esta integral é tipicamente resolvida numericamente devido à não linearidade de $g(\epsilon)$.

4. **Análises por partes ou Incrementais**:. Para uma relação de partes, como:

$$g(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon, & \epsilon \leq \epsilon_y \\ E'(\epsilon - \epsilon_y) + \sigma_y, & \epsilon > \epsilon_y \end{cases}$$

Onde $E' < E$ representa o pós-coeficiente rigidez, a relação momento-curvatura também se torna por partes, e integração é realizada em seções.

56.3.2.1 Ex 56.2: Deitou-se. Aço



Vamos considerar a mesma seção retangular como no exemplo anterior

Parte I Derivação do Momento Curvatura Equação

- O rendimento ocorre primeiro nas fibras exteriores em x_y Assim que (e lembrando que $\Phi = \varepsilon/y$, Eq. 22.15):

$$P.x_y = E.I.\Phi_y = E.I\frac{\varepsilon_y}{h/2} \Rightarrow x_y = \frac{2.f_y.I}{P.h} \leq L$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- A curvatura máxima abaixo da qual todos os tensões são elásticos é dada por

$$\Phi_y = \frac{2.f_y}{E.h}$$

- If $h \le h_y$, então temos uma distribuição linear elástica tensão e

$$\Phi = \frac{M}{E.I} = \frac{P.x}{E.I}$$

- If $h > h_y$, então à distância h_y do endurecimento linha neutra começa e

$$h_y = \frac{f_y}{E.\Phi} \le \frac{h}{2}$$

- O tensões são dados por

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} E.\varepsilon & \text{if } h < h_y \\ f_y + \beta E.(\varepsilon - \varepsilon_y) & \text{if } h_y < h \end{cases}$$

- Lembrando que $\varepsilon = \Phi y$, o momento de resistência interna será assim dado por

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} b.\sigma_{xx}.y.dy \\ &= 2.b.\int_0^{h_y} E.(\Phi.y).y dy + 2b\int_{h_y}^{h/2} [f_y + \beta.E.(\Phi y - \varepsilon_y)].y.dy \\ &= 2E.b.\Phi\int_0^{h_y} y^2.dy + 2b\int_{h_y}^{h} \left[f_y.y + \beta.E.\Phi.y^2 - \beta f_y.y\right] dy \\ &= \frac{-\left(b\left(3.f_y\left(h^2 - 4.{h_y}^2\right)(-1+\beta) + E\Phi\left(8{h_y}^3(-1+\beta) - h^3\beta\right)\right)\right)}{12} \end{aligned}$$

Substituindo (usando Mathematica) o valor de h_y, isso reduz-se a Momento relação Curvature

$$M = \frac{b\left(4{f_y}^3(-1+\beta) - 3E^2 f_y h^2\Phi^2(-1+\beta) + E^3h^3\Phi^3\beta\right)}{12E^2\Phi^2}$$

que é essencialmente uma expressão para o momento em termos de curvatura $\Phi > \Phi_y$.

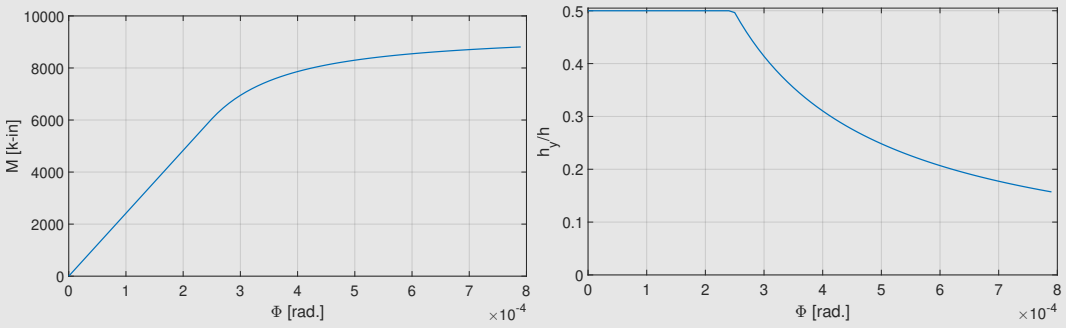
- Armados com essa relação, podemos repetir o procedimento usado no exemplo anterior e aplicar o princípio da força virtual para determinar o deslocamento.
- Solução numérica:

```
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% Note this is appended to the previoous Metlab code
% P A R T   II  L A Y E R E D   S E C T I O N
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Plot M-phi and h-phi for the section based on layers
% this is a section property, nothing to do with the actual column
%=====================================================================
clear P Delta phi M
epsiy=E/fy; phi_y=fy/(E*h2);delta=10^-5;phi(1)=0.;
M(1)=0.;hy(1)=h2;k=0;
for i=2:80
phi(i)=phi(i-1)+delta; hy(i)=fy/(E*phi(i));
if hy(i)>h2
M(i)=phi(i)*E*I; hy(i)=h2;
else
M(i)=(b*(4*fy^3*(-1 + beta) - 3*E^2*fy*h^2*phi(i)^2*(-1 + beta)...
+ E^3*h^3*phi(i)^3*beta))/(12.*E^2*phi(i)^2);
k=k+1;
nlphi(k)=phi(i); nlM(k)=M(i);
end
fprintf("i %6.0f hy %10.4e phi %10.4e phi_y %10.4e\n",i,hy(i),phi(i),
    phi_y);
end
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,M,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel("M [k-in]");grid;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'M-phi.pdf','BackgroundColor','none')
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,hy/h,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel('h_y/h');grid;
ylim([0.,0.505]);set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'h-phi.pdf','BackgroundColor','none')
```



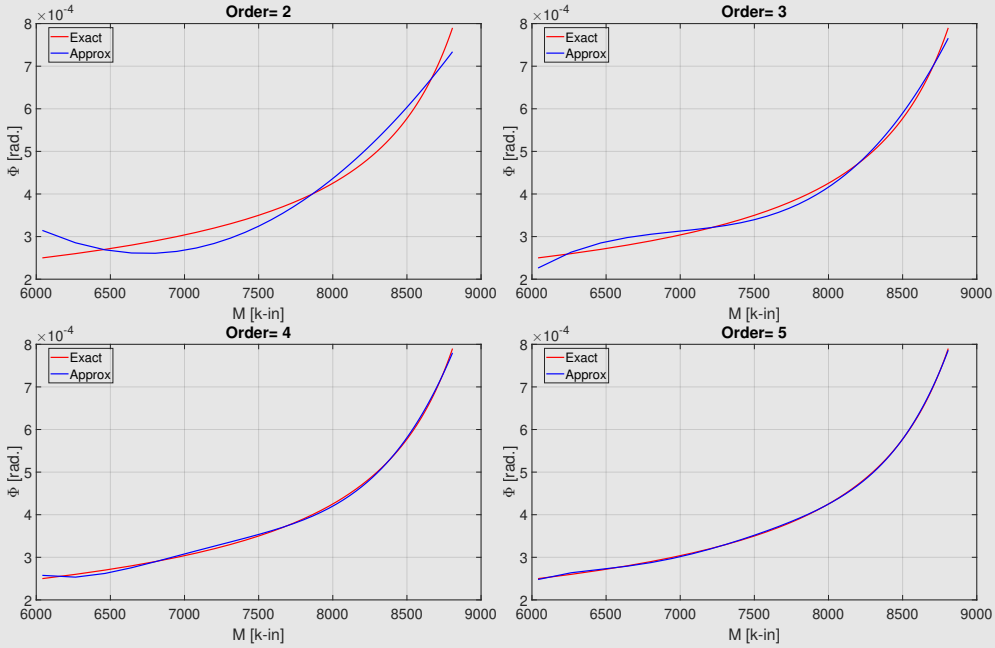

```
%=====================================================
% Fit polynomial in nonlinear portion of the curve
% =====================================================
for i=2:5
clear p
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
[p]=polyfit(nlM,nlphi,i); f=polyval(p,nlM);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
plot(nlM,nlphi,'r',nlM,f,'b','linewidth',2);
asc=num2str(i);
lgnd=legend('Exact','Approx','Location','Best');
ylabel('\Phi [rad.]');
xlabel('M [k-in]');grid;title(['Order= ', asc])
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
exportgraphics(gca,fn,'BackgroundColor','none')
end
```

- Já que precisaremos da relação curvatura-momento$\Phi = \Phi(M)$), um polinômio é então ajustado para a parte não linear da curvatura do momento.



- Optando pelo da ordem 5, os coeficientes são:

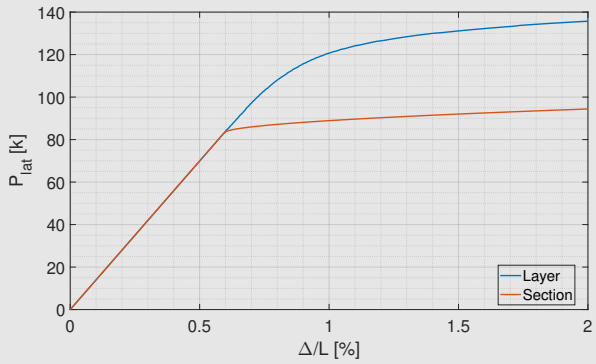
$$\Phi = 2.12\times10^{-20}M^5 - 7.58\times10^{-16}M^4 + 1.08\times10^{-11}M^3 - 7.71\times10^{-8}M^2 + 2.74\times10^{-4}M^2 - 3.88\times10^{-1}M$$

```
%=========================================================================
% Compute the deflection as in Part I but with the new M-phi relations
%=========================================================================
P_y=2*fy*I/(h*L);
P_max=2*P_y;
np=400;
delta_P=P_max/np;
EI=E*I;delta_L=0.001*L;
%
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
P(1)=0.;delta(1)=0;
for i=2:np
P(i)=P(i-1)+delta_P; x_y(i)=2*fy*I/(h*P(i));
if x_y(i)>L
delta_1=P(i)*L^3/(3*EI);
% Entire Beam is in the linear range
delta_2=0.;
else
delta_1=P(i)*x_y(i)^3/(3*EI);
delta_2=0.;
for x=x_y(i):delta_L:L
M=P(i)*x; phi=polyval(p,M); delta_2=delta_2+phi*x*delta_L;
end
end
delta(i)=delta_1+delta_2;
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*delta/L,P,100*Delta0/L,P0,'linewidth',2);grid;
xlabel("\Delta/L [%]");ylabel("P_l_a_t [k]");grid minor;
xlim([0,2]);lgd=legend('Layer','Section','location','best')
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');set(lgd,'color','none');
exportgraphics(gca,'Pushover-Final.pdf','BackgroundColor','none')
```



Uma implementação de uma camada elemento finito será dada tarde em §61.4.

56.3.2.2 Ex 56.3: Deitou-se. Concreto/ACI

Procuramos avaliar a adequação da equação do ACI para a capacidade de flexão final (Bloqueio Whitney tensão, fig. 1. 36.7), considerando a seguinte curva para o concreto (Desayi, 1964) (outras equações foram propostas por (Saenz, 1964), (Kent e Park, 1971) (Mander, Priestley e Park, 1988)).

$$\sigma = \frac{2\frac{f_c'}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde f_c' corresponde a.. ε_{max}. Vamos determinar a razão exata de aço balanceado para um R/C viga com $b = 10$ in, $d = 23$ in, $f_c' = 4,000$ Psi, $f_y = 60$ KSI, $\varepsilon_{max} = 0.003$.

Momento Final M_u

Tensão-Deformação

$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667 \times 10^6 \varepsilon}{1 + 1.11 \times 10^5 \varepsilon^2}$$

Compatibilidade Assumir o esmagamento na falha, portanto deformação distribuição será dada por

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c} y$$

Combine essas duas equações:

$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1 + \left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

A força total de compressão é dada por

$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1 + \left(\frac{y}{c}\right)^2} dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1 + \left(\frac{y}{c}\right)^2} dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2} \ln\left[1 + \left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2} \ln\left[1 + \left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4,000bc \ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$

Equilíbrio Exige que $C = T$

$$2,773bc = A_s f_y$$

Do diagrama deformação:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003} \tag{56.1}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29,000} + .003} = 13.6\text{in.} \tag{56.2}$$

Combinando EQ. 56.3.2.2 com Eq. 56.2

$$A_s = \frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000} = 6.28\text{in.}^2$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Para determinar o momento, devemos primeiro determinar o centroide da força de compressão medido a partir do linha neutra

$$\begin{aligned}
\overline{y} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y \overbrace{\sigma dy}^{dC}}{C} = \frac{b\int_0^c y\frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}}{2,773bc}dy = \frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy \\
&= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right] \\
&= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c \\
&= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43\text{in.}
\end{aligned}$$

A seguir, resolvemos por enquanto

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6,713 \text{ k.in}$$

Usando o código ACI

Com referência a §36.4.1

$$\begin{aligned}
\rho_b &= .85\beta_1\frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285 \\
A_s &= \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55\text{in.}^2 \\
a &= \frac{A_s f_y}{.85f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57\text{in.} \\
M &= A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765\text{k.in} \\
c &= \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61\text{in.}
\end{aligned}$$

Resumo

		Exatamente	ACI
A_s	Em^2	6.28	6.55
c	Kip	13.6	13.6
$\overline{y}'$	Entre.	5.18	5.78
M	K-in	6,713	6,765

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

56.4 Curvação do momento, generalização

19 Nesta seção generalizaremos o procedimento para determinar o $M-\Phi$ Relação considerando uma arbitrária seção transversal, Fig. 56.1.

Primeiro consideraremos uma abordagem analítica, e depois uma numérica.

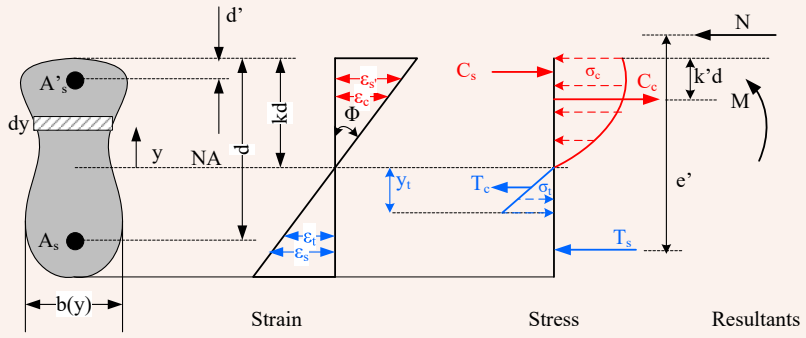


Figura 56.1: Arbitrário seção transversal considerado para a determinação de $M-\Phi$

20 Nós assumimos o exterior força axial N_{ext}, aplicado com uma excentricidade e', para ser naturalmente constante.

21 Equilíbrio interno de forças requer

$$N_{ext} = N_{int}; \quad M_{int} = N_{int}.e';$$

E nós procuramos determinar o $M-\Phi$ Relacionamento.

$$N_{int} = \underbrace{\int_0^{k.d} \sigma_c b_c dy}_{C_c} + \underbrace{A'_s f'_s}_{C_s} - \underbrace{\int_0^{y_t} \sigma_t b_t dy}_{T_c} - \underbrace{A_s f_s}_{Ts} \tag{56.3}$$

$$N_{int}e' + M = C_c(d-k'd) + C_s(d-d') - T_c(d-kd-\frac{2}{3}y_t) \tag{56.4}$$

onde: $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c)$, $b_c = b_c(y_c)$, $\sigma_t = \sigma_t(\varepsilon_t)$, $b_t = b_t(y_t)$.

56.4.1 Abordagem analítica

22 Para o dado (e fixo) N_{ext}, vamos gradualmente aumentar ε_c^{top} (i.e. Φ Indirectamente), e resolver para k e o correspondente M_{int}, Fig. 56.2.

23 O problema é não linear, pois só há um valor de k que garantirá o equilíbrio de forças axiais.

CÓPIA PARA REVISÃO

[24] Cuidado. Sim $N_{ext} \neq 0$, então deve adicionar a inicial deformação devido à força constante.

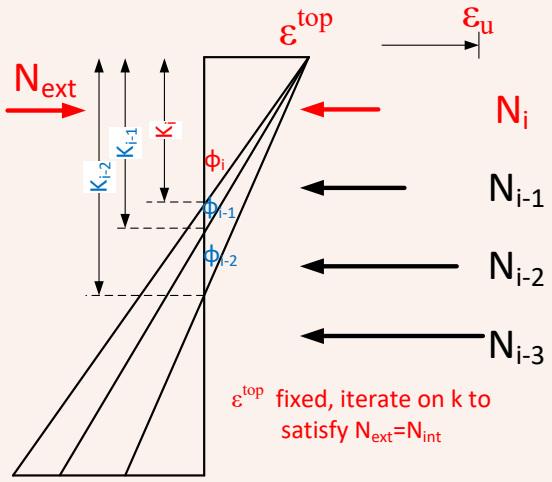


Figura 56.2: Procedimento incremental para determinar $M - \Phi$ analiticamente

1. Incremento superior deformação

$$\varepsilon_{n+1}^{top} = \varepsilon_n^{top} + \Delta\varepsilon^{top} < \varepsilon_u$$

2. Assuma k, Determinar forças

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon_c^{top}}{k.d} = \frac{\varepsilon_s'}{k.d - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd}\\ \varepsilon_s &= \Phi(d - k.d)\\ f_s &= E_s\varepsilon_s\end{aligned}$$

3. Computar N_{int} De Eq. 56.3 If

$$|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$$

corrigir k e iterar; caso contrário, encerrar.

4. Resolva para o correspondente M De Eq. 56.4
5. Determine o correspondente curvatura De..

$$\Phi_{i+1} = -\frac{\varepsilon_{i+1}^{top}}{k_{i+1}d}$$

e.. rigidez

$$EI_{i+1} = \frac{dM}{d\Phi}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

25 Uma vez concluído, enredo $M - \Phi$, e identificar Φ_{cr}, Φ_y e.. Φ_u,

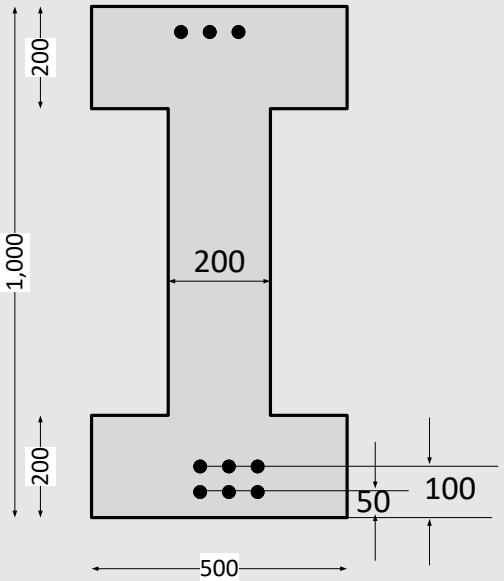
26 Determine o

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

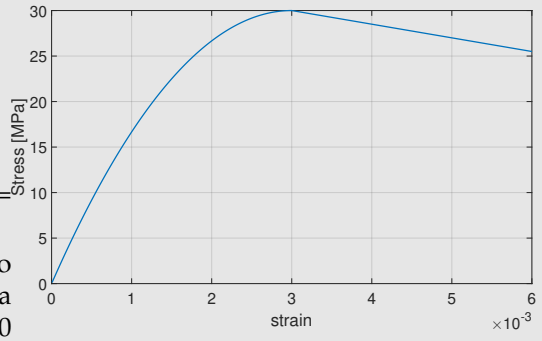
27 Note que se repetirmos a análise para diferentes N, nós poderíamos então gerar a viga-pilar *diagrama de interação* (correspondente a M_u).

56.4.1.1 Ex 56.4: Curvação do momento de uma seção I R/C

Procuramos desenvolver um programa em Matlab para calcular e traçar a resposta momento-curvatura para a seção transversal concreto armado e calcular a ductilidade curvatura.
Vamos assumir que o concreto não suporta qualquer tração tensão quando a tração deformação é maior do que rachadura deformação, ε_{cr}.. O enredo deve incluir apenas a resposta à flexão positiva (tensão na face inferior).
Assumiremos que a carga axial seja de aproximadamente 10% da capacidade de compressão axial desta seção transversal (isto é, $N \simeq 0.1 A_g f_c'$).
Vamos usar as seguintes relações constitutivas:
Concreto em compressão (Simples parabólico) $f_c' = 30$ MPa com



$$f_c = \begin{cases} f_c' \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \text{for} \varepsilon_c < \varepsilon_0 \\ f_c' \left[1 - 0.15 \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \text{for} \varepsilon_c > \varepsilon_0 \end{cases}$$



Onde ε_0= 0,003 e $\varepsilon_u = 2\varepsilon_0$.
Concreto em tensão: $f_{cr} = 0.6\sqrt{f_c'}$ (MPa), $E_c = 5,500\sqrt{f_c'}$ (MPa) e $f_c = E_c \varepsilon_c \leq f_{cr}$.
O reforço é elástico linear/plástico perfeito com $E_s = 200,000$ MPA e $f_y = 400$ MPA.Cada bar é EUA#8 (metric #25) e tem um A_s=510 mm^2

```
%%  Jordan Brennise & Dean Van
clear;clc,close
scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
h=1000;bw=200;bf=500;hf=200;
%
y_As=75; % distance from origin to bottom steel
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
    As=6*510; % tension steel
    y_Aps=950; % distance from origin to top steel
    Aps=3*510; % compression steel
    %
    Es=200000; % MPa
    fy=400;
    %
    fp_c=30; % MPa
    Ec=5500*sqrt(fp_c); % MPa
    epsip_c=0.003;
    epsi_u=2*epsip_c;
    f_cr=0.6*sqrt(fp_c); % MPa
    %============================================================
    Ac=bf*bw*2+bw*(h-2*hf); % mm^2
    Nappl=0.1*fp_c*Ac; % Applied normal force
    nl=100; % number of layers in tension or compression
    epsilon=0.000001;
    Bmin=1.0-epsilon;Bmax=1.0+epsilon;Nmax=Bmax*Nappl;Nmin=Bmin*Nappl;
    % We bound phi, the angle between the vertical and the strain on a
   linear stress-strain relationship. This is done by limiting the
   failure strain epsip_c=0.003. Use plane sections and an estimate of c
    to find the failure phi associated with this failure strain.
    c=0.1*h; % Estimate of c
    phi_fail=epsip_c/c;
    delta_phi=phi_fail/100; % estimate of upper limit of phi
    % Start the loop to determine the curvature, phi, and N. Initialize
   phi. Assign an initial internal moment and force of zero (KN-m and KN
   , respectively). Limit neutral axis location  yn(iphi) to bounds
   within the column depth, h. Begin the internal forces loop by
   specifying that the neutral axis only be varied while internal force
   N is outside established Nmin and Nmax bounds.
    iphi=1;
    phiM(1)=0;M(1)=0; % initialization of data to be plotted
    EndRun=0; % flag to interupt iterations later
    for phi=delta_phi:delta_phi:phi_fail % loop on phi
    % initialization
    iphi=iphi+1; % counter
    phiM(iphi)=phi; % store for plotting
    ymin=0; % initial values
    ymax=h;
    yn(iphi)=(ymin+ymax)/2; %start with neutral axis in the middle
    %Iterate until convergence
    iter=0; %counter
    N=0;
    while N < Nmin ||  N > Nmax %loop while B outside acceptable range
    iter=iter+1;
    % Use a while loop. If the previous internal force is outside of the
   set force bounds, recalculate the internal stresses with the next phi
    until the internal force converge with the limits. These internal
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    force calculations begin with the steel, both in tension and
    compression (and the top and bottom of the section, respectively).
    These internal stresses are calculated for a single layer of steel in
     both compression and tension. It is important to note to ensure that
     the steel stress is bounded by the yield stress of steel when in
    tension.
46   %Steel forces
47   fs= phiM(iphi)*(yn(iphi)-y_As)*Es; %stress in tension steel
48   if fs > fy
49   fs=fy; %check if steel is yielding
50   end
51   F_TR=As*fs; %tensile force in bottom steel
52   MF_TR=F_TR*y_As; %Moment caused by tension reinforcement
53   fps=phiM(iphi)*(y_Aps-yn(iphi))*Es; %stress in compression steel
54   if fps > fy
55   fps=fy; % check if steel is yielding
56   end
57   F_CR=-fps*Aps;  % Compressive force in top steel
58   MF_CR=F_CR*y_Aps; % Moment caused by compression reinforcement
59   % Next compute the internal forces for the concrete, both in tension
    and compression (and the top and bottom of the section, respectively)
    . Unlike the steel, which had its internal stresses calculated for a
    single layer of steel in both compression and tension, the concrete
    internal stresses are computed for a series of layers throughout the
    section. This began at the bottom (yc=0) and continued for a number
    of layers (nl) with height delta_yc. Included is an if statement to
    ensure that the change in width of the section from web to flange are
     captured depending on the location of yc(ic). In order to compute
    the internal stresses in compression, an external script was used,
    stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c).  This script used the
    relationship for compressive stress in concrete as a function of
    strain, but accounting for failure. Tension in concrete is done
    similarly, but the stress for this was calculated using a simple
    relationship.
60   % Loop over the layers:
61   % Compression in concrete
62   yc=0;
63   ic=0;
64   delta_yc=(h-yn(iphi))/nl;
65   for ic=1:nl % loop over the layers
66   yc(ic)=yn(iphi)+(ic-0.5)*delta_yc; % store in array for possible
    plotting
67   b=bw; % check width
68   if yc(ic) > h-hf
69   b=bf;
70   end
71   epsi_c=phi*yc(ic); % strain at layer location
72   F_CC(ic)=-b*delta_yc*stress_strain(fp_c,epsip_c,epsi_u,epsi_c); %
    concrete compression at that layer
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

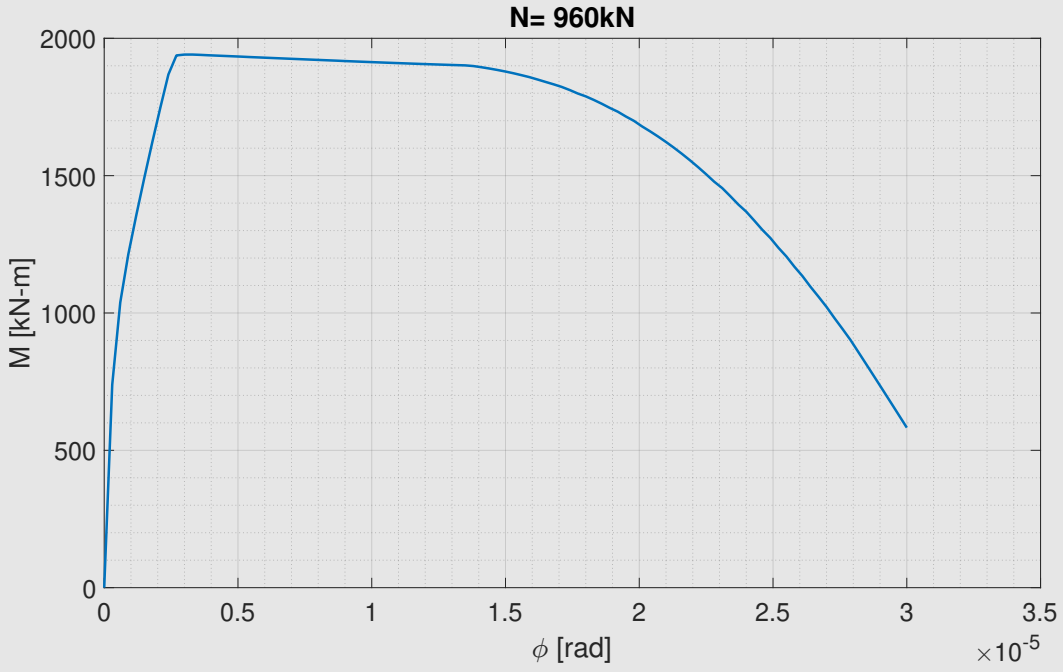
```
    MF_CC(ic)=F_CC(ic)*yc(ic); % Moment contribution from layer force
    end
    % Tension in concrete
    it=0;
    yt=0;
    delta_yt=(yn(iphi))/nl;
    for it=1:nl
    yt(it)=(it-0.5)*delta_yt;
    b=bf; % Check for width
    if yt(it) > hf
    b=bw;
    end
    epsi_t=phi*(yn(iphi)-yt(it));
    ft=Ec*epsi_t;
    if ft > f_cr
    ft=0;
    end
    F_TC(it)=b*delta_yt*ft;
    MF_TC(it)=F_TC(it)*yt(it);
    end
    % Using the internal forces for steel and concrete (both in
   compression and tension), compute the total force through equilibrium
   . Assume compression to be negative and tension to be positive. The N
    value for internal force is compared to the bounds set earlier, and
   is recomputed with an increased phi if it is outside those bounds. If
    this is the case, then the neutral axis is shifted accordingly, phi
   will be increased, and N recomputed through the steps above. When the
    internal force are within the bounds set, then we will compute total
    moment for that phi and plot the moment curvature at equilibrium.
    % Compute total force should be -ve
    N=F_CR+sum(F_CC)+sum(F_TC)+F_TR;
    N=-N; % make it positive
    %%%
    % make adjustments
    if N < Nmin
    ymax=yn(iphi);
    yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymin);
    end
    if  N > Nmax
    ymin=yn(iphi);
    yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymax);
    end
    % sanity check in case yn(iphi) is getting to close to the top
    if yn(iphi)<0.01*h
    EndRun=1;
    break
    end
    end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    M(iphi)=-(MF_CR+sum(MF_CC)+sum(MF_TC)+MF_TR)/1000000; % convert N-mm
   to kN-m
    if EndRun == 1
    break
    end
    end
    figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
    plot(phiM,M,'linewidth',2);grid minor; grid
    xlabel('\Phi [rad]');ylabel('M [kN-m]');titre=['N= ' num2str(Nappl
   /1000 ) 'kN'];
    title(titre);
    set(gca,'fontsize',20);set(gca, 'color', 'none');
    exportgraphics(gca,'Concrete-M-Phi.pdf','BackgroundColor','none')
    %
   ========================================================================
    function fc= stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c)
    if epsi_c < epsip_c
    fc=fp_c*(2*epsi_c/epsip_c -(epsi_c/epsip_c)^2);
    else
    fc=fp_c*(1-0.15*((epsi_c-epsip_c)/(epsi_u-epsip_c)));
    end
    end

```



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

56.4.1.2 Diagrama de interação $M - N$

28 Repetindo o procedimento anterior para vários N_{ext} Nós podemos derivar a viga pilar *diagrama de interação*, Fig. 56.3 que é um gráfico de carga axial P_n que um pilar poderia

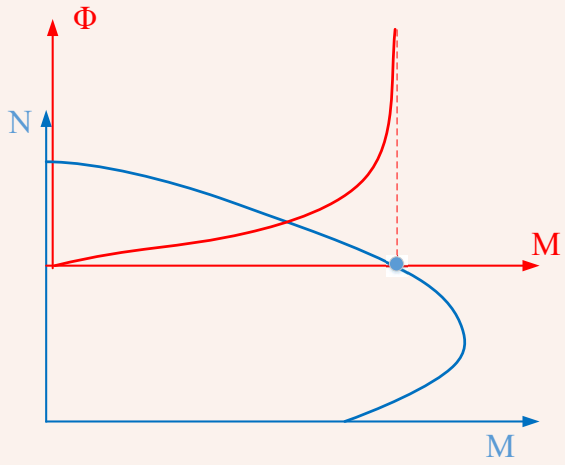


Figura 56.3: Momento curvatura e momento diagramas força axial (interação)

carregar versus sua capacidade de momento, M_n[2].

56.4.2 Aproximação numérica

29 A abordagem analítica descrita anteriormente pode ser implementada numericamente. Primeiro, teremos que.. *Discretizar* a seção transversal em camadas[3], Fig. 56.4.

Assim, quebramos a seção de concreto em n_c camadas (índice i), e aço em n_s camadas (índice j)[4]. A_{ci} e.. $A_{sj} = A_s$ corresponde às áreas de cada concreto e camada de aço, y_i É a distância da fibra i De NA.

30 Por um dado (e fixo) N_{ext}, vamos gradualmente aumentar Φ por $\Delta\Phi$ [5]E resolver para N_{int}.. Por isso, procuramos determinar M_{ext} por um dado Φ.. Em qualquer seção $\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y\Phi$ Onde ε_0 é o Axial deformação Causada por N_{ext}.

[2]Subscrito n refere-se ao nominal.
[3]Ou fibras se tivermos momento bia-axial ou torção.
[4]Mais tarde, vamos diferenciar entre confinados (dentro da gaiola de aço) e não confinados como eles têm propriedades diferentes.
[5]Note que na abordagem analítica nós aumentamos ε_c^{top}E resolvido para.. k.

CÓPIA PARA REVISÃO

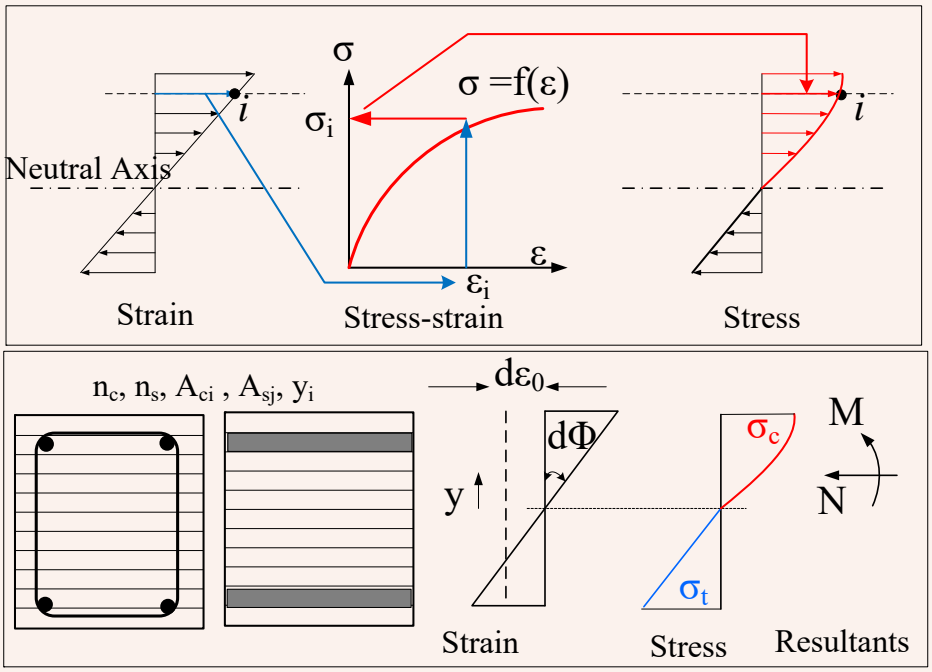


Figura 56.4: Discretização de um seção transversal em camadas

30 Para um dado deformação, resultando esforço interno:

$$N_{int} = \int Ed\varepsilon dA = \int EdAd\varepsilon_0 + \int EdAyd\Phi$$
$$= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}\right]}_{\text{Initial strain}} \varepsilon_0 + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}y_i\right]}_{\text{curvature } \Phi} \Phi \tag{56.5}$$

$$M = \int Ed\varepsilon ydA \tag{56.6}$$

31 Algoritmicamente, Fig. 56.5:

1. Curvação do incremento $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi$ (N_{ext} Consertado).
2. Assumir linha neutra localização (k) e atualizar o perfil deformação $\varepsilon(y_i) = d\varepsilon_0 + y_i d\Phi$ Onde $d\varepsilon_0 = (\Delta N - E_x\Delta\Phi)/E_a$.
3. If $\varepsilon \geq \varepsilon_u$ (geralmente 0,003 para concreto), saída.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. Determine N_{int} De Eq. 56.5

$$\begin{aligned} N_{comp} &= \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj} A_{sj} \\ \sigma_{ci} &= \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} A_{ci} (\varepsilon_0 + y_i \Phi) \\ \sigma_{sj} &= \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj} A_{sj} (\varepsilon_0 + y_j \Phi) \end{aligned}$$

5. If $|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$ Ajustar k E iterar, caso contrário sair.
6. Computar

$$M_{int} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci} A_{ci} y_i + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj} A_{sj} y_i$$

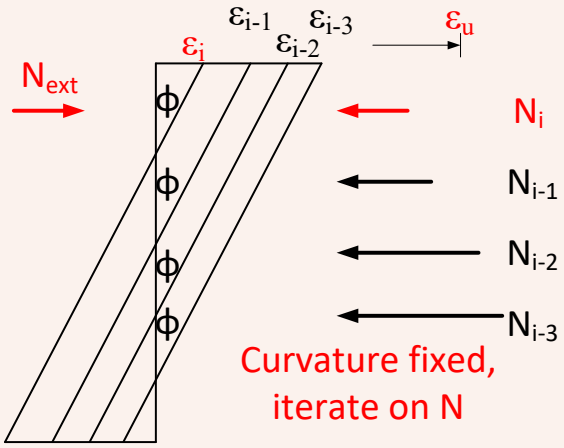


Figura 56.5: Abordagem incremental para determinar $M - \Phi$ numericamente

[32] Garantir a convergência pode ser complicado, portanto, primeiro definirá uma grande caixa para ambos y_{min} e.. y_{max}Em cada iteração, atualizaremos qualquer um deles até que as duas caixas sejam relativamente pequenas. Assim,

Passo 1 Comece com uma curvatura inicial e linha neutra ou seja. Assumir: Φ, $y_n(1), y_{min}(1), y_{max}(1)$

A seção de compressão e tração deve ser dividida em profundidades iguais com comprimento L_e.. Cuidado para não acabar atribuindo poucas camadas em flanges ao invés da web.

Nomes de variáveis sugeridos:

CÓPIA PARA REVISÃO

- Força de compressão do concreto F_{CC}
- Força de tração do concreto F_{CT}
- Força de tração de aço F_{ST}
- Força de compressão de aço F_{SC}
- F_{CT} :. Só se a camada não for quebrada.

Passo 2 Determine a força normal

$$N_i = F_{cr} + F_{cc} - F_{ct} - F_{tr}$$

E especificar limites B para y_{min} e.. y_{max} que será atualizado no final de cada iteração

$$\underbrace{N_{min}}_{B_{min}N_{appl}} < N < \underbrace{N_{max}}_{B_{max}N_{appl}}$$

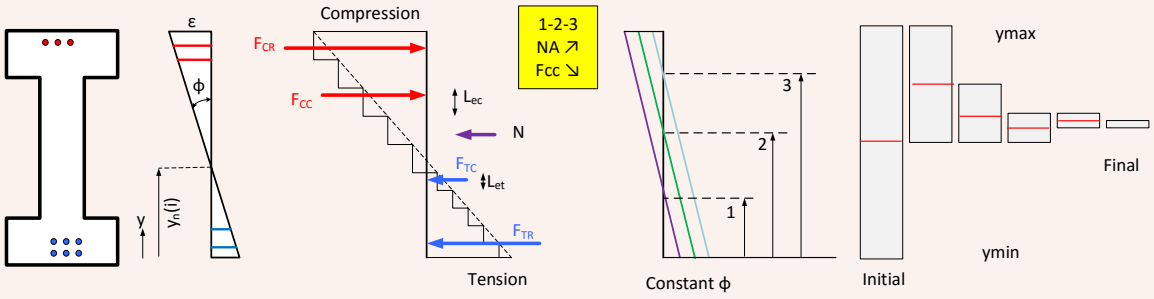
Possivelmente $[B_{min}, B_{max}] = [0.95, 1.05]$ Que correspondem a.. ±5% Desvio

Passo 3 Iniciar a iteração

`Enquanto` $N < N_{min} || N > N_{max}$

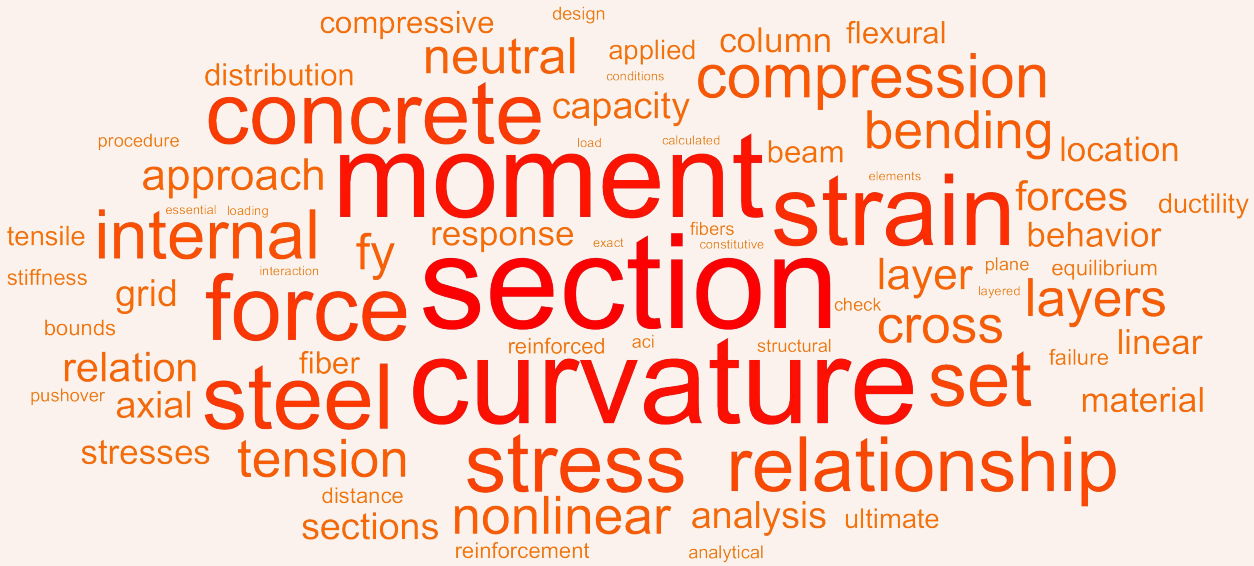
$$\text{if} \begin{cases} \text{if } N < N_{min} \implies y_{max} \downarrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{min} \\ y_{max} = y_n(i) \end{cases} \\ \text{if } N > N_{max} \implies y_{min} \uparrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{max} \\ y_{min} = y_n(i) \end{cases} \end{cases} \tag{56.7}$$

`atualização` N_i
`if` $N_{min} < N_{appl} < N_{max}$ `Condition satisfied saída loop, computar momento`



[33] Esta abordagem será revisita mais tarde na formulação de Elemsnt rigidez em §61.4.

CÓPIA PARA REVISÃO



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 57

Plasticidade III; Estrutura: Rendem-se Linhas

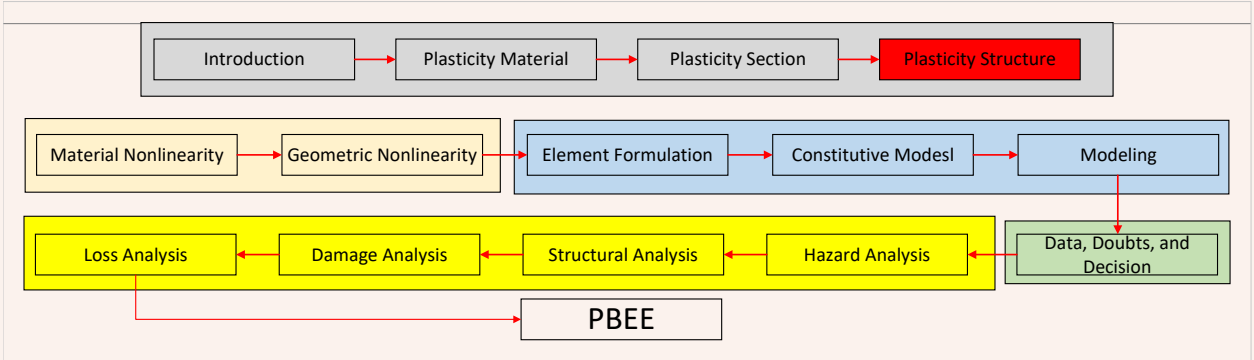
Abstract

Neste capítulo final de nossa série sobre plasticidade, expandimos o foco do comportamento plástico localizado em elementos estruturais para o comportamento de sistemas estruturais inteiros sob condições de carga máxima. O capítulo começa com uma análise do colapso viga, focando na formação de rótulas plásticas que permitem vigas transformar-se em mecanismos ao atingir a capacidade de carga. Isto é seguido por uma exploração da teoria da linha de rendimento para lajes, onde padrões de falha se desenvolvem em linhas distintas sob carga. A teoria da linha de rendimento oferece uma maneira eficiente de prever mecanismos de colapso, mesmo com a natureza complexa e distribuída do carregamento laje. Finalmente, discutimos analogias entre teoria da linha de produção, modelos de plasticidade grupados e análise de pushover. Essas analogias ilustram os princípios compartilhados subjacentes a esses métodos, todos eles aproximados do comportamento de colapso por focalizar respostas inelásticas em regiões específicas, fornecendo assim ferramentas práticas para avaliar a segurança estrutural no estado limite.

57.1 Introdução 1936
57.2 Elementos lineares (vigas, pórticos) 1938
57.2.1 Kinematic; Limite superior . 1938
57.2.2 Estáticos; Encaixe mais baixo 1944
57.3 Elementos planos (lajes) 1954
57.3.1 Estáticos: Encaixe mais baixo 1955
57.3.2 Cinemática: Limite superior 1956
57.4 Análise do Pushover 1959
57.5 Analogias entre a análise dos limites inferiores e 1960
57.5.1 Análise do Pushover 1960
57.5.2 Plasticidade amassada 1963
58.1 PROPOSTA DE ESCRITÓRIO POR ChatGPT 1967
58.1.1 Motivação e fundamentos físicos (~1.5 páginas) 1967
58.2 Framework termodinâmico (~2 páginas) 1967
58.3 Dano isotrópico escalar: O modelo Mazars~4 páginas) 1968
58.4 Tensão, assimetria de compressão e o efeito unilateral~2 páginas) 1968
58.5 Dano... acoplamento de plasticidade (~2 páginas) 1968
58.6 Regularização e objetividade de malha (~3 páginas) 1968
58.7 Aplicação para elementos viga e pilar (~3 páginas) 1969

CÓPIA PARA REVISÃO

58.8 Identificação do parâmetro e guia prático (~1.5 páginas) 1969
58.9 Notas bibliográficas e leitura adicional (~0,5 páginas) 1969



57.1 Introdução

1 Depois de examinar o papel da plasticidade em um nível localizado - primeiro em um ponto e depois em uma seção - agora estendemos esta análise para estruturas inteiras. Este capítulo explora o papel da plasticidade em análise estrutural, particularmente focando em como as estruturas atingem sua capacidade máxima de carga.

2 Até este ponto, nossa análise estrutural foi conduzida usando uma abordagem elástica linear, que nos permitiu determinar as relações de carga-deslocamento. Tal análise é muitas vezes suficiente quando o objetivo é entender o comportamento geral de uma estrutura sob cargas de serviço, onde as deflexões estão dentro dos limites aceitáveis. No entanto, uma abordagem puramente elástica não capta totalmente o comportamento da estrutura ao se aproximar de falhas, particularmente em sistemas dúcteis onde a plasticidade desempenha um papel significativo.

3 Neste capítulo, nosso foco muda para determinar a carga de colapso de uma estrutura, ao invés de sua relação carga-deslocamento até o fracasso. Semelhante a pilar flambagem, nosso objetivo aqui é avaliar a força ou mecanismo de falha final da estrutura, sem derivar a resposta incremental de carga-deslocamento até este ponto. Esta análise corresponde ao tipo 6 na figura. 54.5.

4 As diferenças entre as soluções elásticas e plásticas são significativas e estão descritas abaixo:

Solução elástica Cumpre os seguintes critérios:

1. **Equilíbrio**:. A estrutura está em equilíbrio sob cargas aplicadas.

CÓPIA PARA REVISÃO

2. **Condição elástica**:. Todos os momentos internos estão dentro do alcance elástico, $|M| < M_{\text{yld}}$.
3. **Compatibilidade (Continuidade)**:. A compatibilidade da deformação é mantida em toda a estrutura, garantindo campos contínuos deslocamento.

Solução plástica Cumpre esses critérios:

1. **Equilíbrio**:. A estrutura mantém o equilíbrio sob cargas aplicadas.
2. **Rendendo-se Condição**:. Momentos alcançam a capacidade de momento plástico, $|M| \leq M_{\text{pl}}$, indicando o início do comportamento plástico.
3. **Mecanismo**:. Deformações adicionais podem ocorrer sem um aumento na carga, significando que a estrutura se tornou um mecanismo.
4. **Princípio da Energia no Trabalho**:

   Trabalho externo (W_e) = Energia de dissipação ($D \geq 0$)+Energia de deformação ($U = 0$).

Suposições para análise plástica

1. Todas as cargas externas aumentam proporcionalmente.
2. O comportamento do material é elástico-plástico, permitindo o desenvolvimento de rótulas plásticas.
3. Deformações são pequenas, então não é considerada a não linearidade geométrica.

[5] Em vigas e pórticos, a falha geralmente ocorre após um número suficiente de *rótulas plásticas* Forma, convertendo a estrutura em um *mecanismo*, O que leva ao colapso parcial ou total. Para fins de análise, geralmente assumimos uma resposta elástica material perfeitamente plástico, onde o momento interno atinge M_p em um rótula plástica, sem mais resistência à rotação adicional.

[6] O derradeiro *limite*) cargas de uma estrutura podem ser determinadas usando duas abordagens distintas, como resumido na tabela 57.1:

Alto Limite; Abordagem cinemática: Esta abordagem é baseada em assumir um possível mecanismo de colapso e calcular a carga correspondente. A carga derivada sempre será maior ou igual à verdadeira carga final. Nós assumimos a formação simultânea de todos rótulas plásticas necessários para formar um mecanismo, sem considerar a sequência real de formação da dobradiça. Esta abordagem garante equilíbrio e satisfaz condições de plasticidade, mas pode não prever precisamente o mecanismo real do colapso.

Mais baixo, preso. Aproximação estática: Aqui, assumimos uma distribuição de momento em equilíbrio com as cargas aplicadas, garantindo que nenhum momento interno exceda M_p.. Essa estimativa de carga sempre será menor ou igual à verdadeira

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

carga final. O método tenta simular a sequência na qual dobradiças se formam e fornece uma estimativa conservadora de carga, garantindo que a plasticidade não seja excedida, embora ela possa não satisfazer totalmente a condição do mecanismo.

Tabela 57.1: Comparação de abordagens cinemáticas e estáticas para análise de carga limite

Método	Preso	Assume	Cumprimentos	Pode Violar
Kinematic	Superior	Mecanismo	Plasticidade	Formação do Mecanismo
Estáticas	Mais baixo	Equilíbrio	Mecanismo	Plasticidade

Examinaremos cada abordagem detalhadamente, analisando seus respectivos méritos e limitações.

57.2 Elementos lineares (vigas, pórticos)

57.2.1 Kinematic; Limite superior

Definition 57.1: Teoria do Limite Superior

Uma estrutura irá se desmoronar se existir um campo de deformação cinematicamente admissível para o qual a taxa de trabalho feito pelas forças externas excede a taxa da dissipação de energia interna.

7 O Teorema Superior, às vezes referido como o *Teorema de carga inseguro*, fornece um método para estimar a carga de colapso de uma estrutura analisando mecanismos de deformação potenciais. Este teorema afirma que qualquer carga que possa induzir o colapso baseado em um mecanismo de deformação hipotético e cinematicamente admissível servirá como um limite superior à verdadeira carga de colapso. A implicação é que, se esta carga exceder a capacidade da estrutura, o colapso é inevitável.

8 Este teorema está intimamente relacionado com o *Princípio de Trabalho virtual* §48.3.3, também conhecido como o princípio do virtual deslocamentos. Em ambos os princípios, as condições de equilíbrio e colapso são avaliadas comparando taxas de trabalho externas e internas sob um suposto mecanismo de deformação ou colapso.

9 O princípio trabalho virtual afirma que, para o equilíbrio, o externo trabalho virtual feito por cargas durante um virtual deslocamento deve igualar o interno trabalho virtual feito pelas forças resistindo da estrutura. Aqui, uma carga de colapso pode ser identificada quando este equilíbrio é interrompido de uma forma que induz um mecanismo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definição de um campo cinematicamente admissível

10 A *Campo cinematicamente admissível* representa um estado hipotético de deformação que é consistente com as restrições da estrutura e o mecanismo assumido de colapso. Para que um campo de deformação seja considerado cinematicamente admissível:

- O trabalho externo, W_e, feito pelas forças aplicadas $\mathbf{F}$ Agindo sobre a deformação $\mathbf{\Delta}_F$ Deve ser positivo, significando que a estrutura é deformada na direção das cargas aplicadas.
- O trabalho interno, W_i, feito pelos momentos de plástico $\mathbf{M}_p$ Atuando nas rotações $\boldsymbol{\theta}$ em rótula plástica, também é positivo, significando que as resistências internas estão fazendo trabalho em resposta à carga externa.

Determinando colapso usando Equivalência de Trabalho

11 Para avaliar se uma determinada carga causará colapso, equiparamos o trabalho externo feito pela carga aplicada com o trabalho interno dissipado no rótulas plásticas. Essa abordagem depende de hipotese de um mecanismo específico de colapso e cálculo do trabalho associado a ele. Para um mecanismo em potencial i, o equilíbrio do trabalho externo e interno no ponto de colapso requer:

$$U_i = \lambda_i W_i$$

onde: W_i é o trabalho externo feito pela carga aplicada durante um virtual deslocamento no mecanismo assumido; λ_i é um *Multiplicador cinemático* que escala as cargas aplicadas para chegar ao estado de colapso por mecanismo i; U_i é a energia interna total dissipada pelo rótulas plásticas no mecanismo.

12 Esta energia interna pode ser expressa como:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} M_{p_j} \theta_{ij}$$

onde:M_{p_j} é a capacidade de momento plástico no j^{th} rótula plástica localização; θ_{ij} é a rotação da dobradiça no j^{th} Localização do mecanismo i; n representa o número total de potenciais rótulas plásticas ou seções críticas na estrutura.

Explicação do Processo de Equivalência do Trabalho

Cálculo de trabalho externo: O trabalho externo W_i depende do deslocamento causado pelas cargas aplicadas. Cada carga F_k aplicado à estrutura contribui para o trabalho feito com base em seu deslocamento Δ_{F_k} na direção da carga. Somar as contribuições de trabalho de todas as cargas aplicadas produz o trabalho externo total:

$$W_i = \sum_k F_k \Delta_{F_k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde F_k é o k^{th} carga aplicada, e Δ_{F_k} é o correspondente deslocamento no mecanismo de colapso assumido.

Cálculo Interno de Energia Dissipada: O trabalho interno U_i é a energia dissipada pelo rótulas plásticas enquanto giram. Cada rotação de dobradiças θ_{ij} sob o momento plástico M_{p_j} contribui para esta energia interna. A soma dessas contribuições energéticas de cada dobradiça define a energia dissipada total para o mecanismo assumido, como mostrado na equação acima.

13 Equacionando U_i com $\lambda_i W_i$Nós resolvemos para λ_i, o multiplicador de carga necessário para trazer a estrutura ao colapso para o mecanismo assumido. Se múltiplos mecanismos são considerados, o mais baixo λ_i Dá o limite superior mais crítico na carga de colapso.

Suposições para o método cinemático

14 O método de limite superior depende de várias suposições simplificadoras para tornar a análise do colapso tratável:

- **Comportamento plástico elástico-perfectamente**:. Os membros estruturais são assumidos para se comportar de uma forma elástica-perfeitamente plástica. Isso implica que uma vez iniciada a produção, os membros podem suportar deformações plásticas sem qualquer resistência adicional, o que significa que não há encruamento além do ponto de rendimento.
- **Plástica Localizada em Hinges**:. A deformação plástica só deve ocorrer em locais específicos conhecidos como rótulas plásticas. Estas dobradiças formam-se onde o momento atinge a capacidade de momento plástico M_p.. Entre dobradiças, os membros são assumidos para permanecer elásticos, o que simplifica a análise focando em zonas plásticas discretas.
- **Momento de Plástico Governantes Colapso**:. O momento de plástico M_p em cada seção transversal representa o momento máximo que a seção pode resistir. Uma vez que este momento é alcançado, a seção é considerada totalmente rendida, e nenhuma resistência de momento adicional é possível. A carga de colapso da estrutura é, portanto, governada por essas capacidades de momento plástico.

Número de mecanismos independentes

15 O número de possíveis mecanismos de colapso independentes n em uma estrutura é influenciada pelo potencial da estrutura rótula plástica locais e sua redundância. Em geral, n é determinado pela seguinte relação:

$$n = h - r$$

onde: h é o número de possíveis localizações rótula plástica na estrutura; r é o grau de redundância, representando o número de restrições excessivas além da determinação estática.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

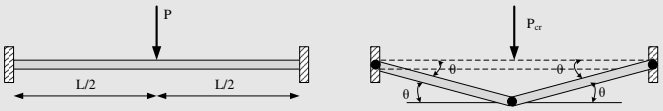
16 Essa relação ajuda a entender os possíveis modos de colapso. Estruturas com maior redundância r) podem desenvolver mecanismos de colapso mais independentes, pois têm maior capacidade de redistribuição de carga.

17 Calculando nPodemos identificar o número total de configurações viáveis de colapso, cada uma correspondendo a um mecanismo potencial diferente. Examinar esses mecanismos fornece uma visão de como e onde o colapso provavelmente ocorrerá sob carga aplicada, permitindo assim uma avaliação completa da segurança estrutural.

57.2.1.1 Ex 57.1: Fixo viga; Carga central

- $n = 3 - 2 = 1$
- Trabalho interno feito

$$M_p\theta + M_p\theta + 2M_p\theta = 4M_p\theta$$



- Trabalho externo feito pelo carga concentrada

$$P_{cr}\theta L/2$$

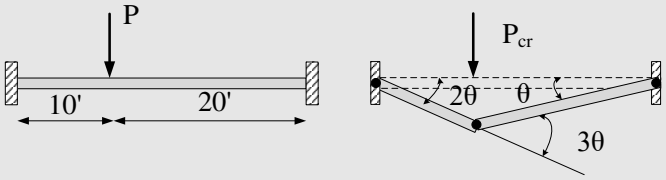
- Equacionando os dois, nós obtemos

$$P_{cr} = 8M_p/L.$$

57.2.1.2 Ex 57.2: Fixo viga; carga offset

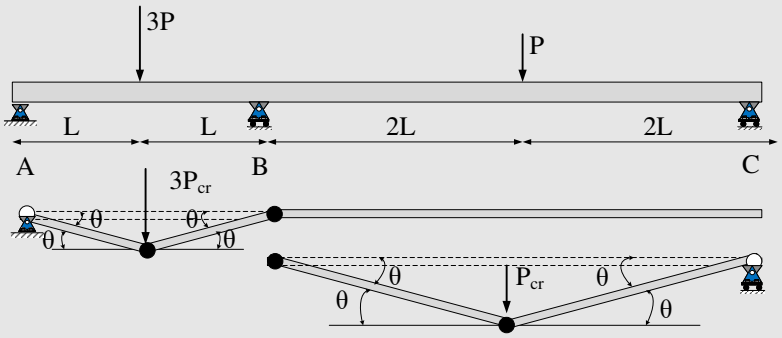
$$\begin{aligned} W_{int} &= W_{ext} \\ M_p(\theta + 2\theta + 3\theta) &= P_{cr}\Delta \\ 6M_p\theta &= P_{cr}\theta(20) \\ \Rightarrow P_{cr} &= 6\frac{M_P}{20} \end{aligned}$$

$$P_{cr}=0.3M_p$$



57.2.1.3 Ex 57.3: Continuando viga

CÓPIA PARA REVISÃO

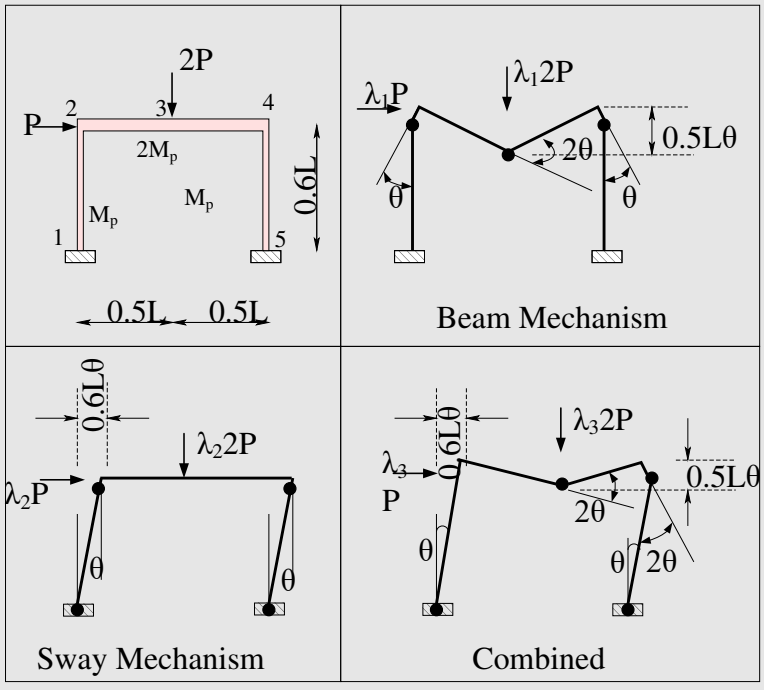


Equacionando o trabalho externo feito pelas forças verticais ao trabalho interno:

- Span AB: $3P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ ou $P_{cr} = \frac{M_p}{L}$.
- Span BC: $2P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ ou $P_{cr} = \frac{3}{2}\frac{M_p}{L}$

57.2.1.4 Ex 57.4: Ortogonal pórtico

- $n = 5 - 3 = 2$ Modos independentes.
- O número total de possíveis mecanismos é três (um depende dos outros dois).
- Para verificar isso λ é realmente o limite mais baixo, podemos desenhar o diagrama de momento correspondente, e verificar que em nenhuma seção é o momento maior do que M_p.



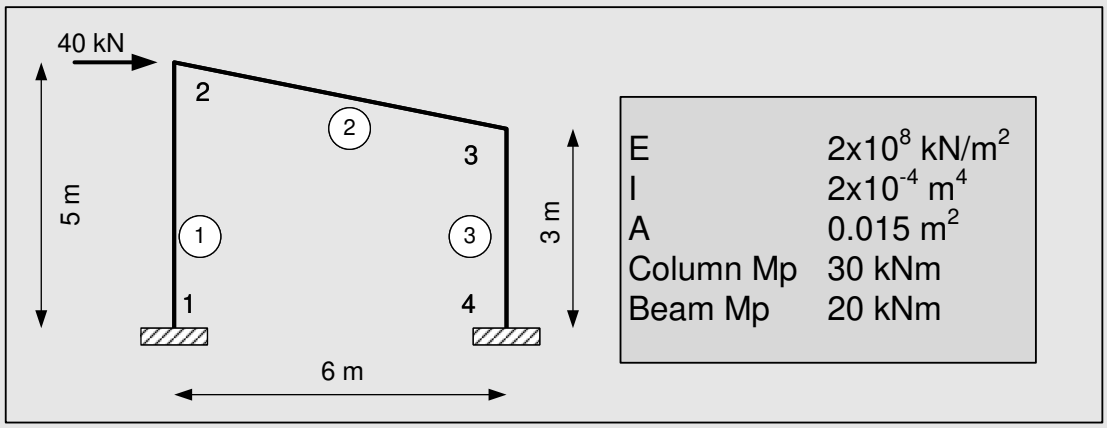
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

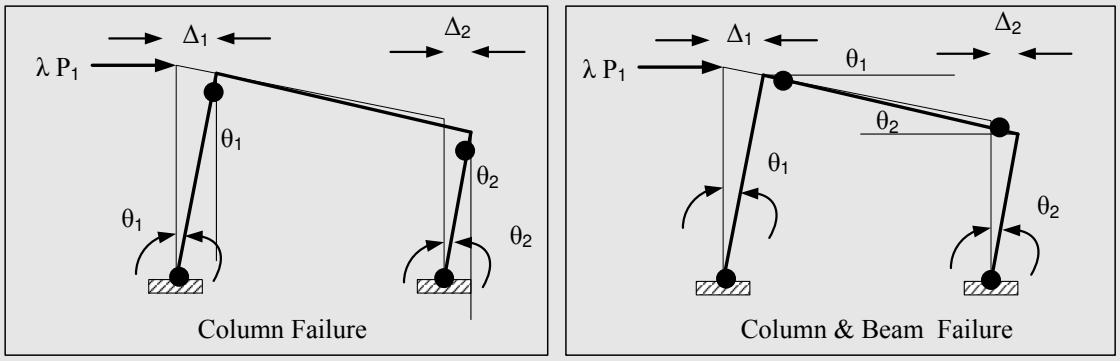
$$\begin{aligned}
\text{Beam Mechanism} \quad & M_p(\theta+\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_1(2P)(0.5L\theta) && \Rightarrow \lambda_1 = 6\frac{M_p}{PL}\\
\text{Sway Mechanism} \quad & M_p(\theta+\theta+\theta+\theta)=\lambda_2(P)(0.6L\theta) && \Rightarrow \lambda_2 = 6.67\frac{M_p}{PL}\\
\text{Combined Mechanism} \quad & M_p(\theta+\theta+2\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_3\left(P(0.6L\theta)+2P(0.5L\theta)\right) && \Rightarrow \lambda_3 = 5\frac{M_p}{PL}
\end{aligned}$$

57.2.1.5 Ex 57.5: Inclinado pórtico

Procuramos determinar a carga de colapso para o seguinte pórtico usando a abordagem cinemática do limite superior.



Primeiro localizamos o potencial rótulas plásticas



e então considere cada modo de falha separadamente:

Fracasso no pilares

CÓPIA PARA REVISÃO

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_1 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_2) \\
\lambda_1 &= \frac{16}{15}\frac{M_p^c}{P} = \frac{16}{15}\frac{30}{40} = 0.8
\end{aligned}$$

Falha combinada

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_2 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1 + \theta_2) + M_p^b(\theta_1 + \theta_2) \\
&= \frac{8}{3}M_p^c\theta_1 + \frac{8}{3}M_p^b\theta_1 \\
\lambda_2(40)(5) &= \frac{8}{3}(30) + \frac{8}{3}(20) \\
\lambda_2 &= \frac{2}{3} = 0.67
\end{aligned}$$

Assim, o segundo caso governa e $P_{crit} = (0.67)(40) = 26.8\text{kN}$

57.2.2 Estáticos; Encaixe mais baixo

Definition 57.2: Teorema inferior

Uma estrutura não vai cair, ou será no ponto de colapso, se uma distribuição de equilíbrio de esforços internos pode ser estabelecida que equilibra as cargas aplicadas e permanece em ou abaixo do limite de rendimento por toda a estrutura.

18 O Teorema Inferior, também conhecido como *Teorema Estático ou Seguro de Carga*, fornece um método para estimar a carga de colapso de uma estrutura garantindo que o esforços internos e momentos estão em equilíbrio com as cargas externas sem exceder a capacidade de rendimento.

19 Este teorema garante uma estimativa segura e conservadora da capacidade de carga, pois considera apenas distribuições que permanecem dentro do intervalo elástico-plástico e não assume a formação de mecanismos adicionais além do estritamente necessário.

20 Este teorema é análogo ao *Princípio do Complementar Trabalho virtual*, §48.3.1, onde o equilíbrio é estabelecido com base no esforços internos que contrabalança as cargas externas,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

respeitando as condições de rendimento. Na abordagem estática, focamos em encontrar uma distribuição de força viável que esteja em equilíbrio e evite qualquer estresse excessivo do material, proporcionando assim um limite inferior na carga de colapso.

Suposições para a abordagem inferior

21 Ao aplicar o método de limites inferiores, as seguintes suposições são essenciais:

- **Equilíbrio das Forças Internas e Externas**:. As cargas aplicadas devem estar em equilíbrio com o esforços internos e momentos em todos os pontos da estrutura. Isso requer que as forças e momentos se equilibrem sem qualquer força ou momento desequilibrado em qualquer parte da estrutura.
- **Formação de Suficientes Rótulas plásticas**:. O esforços internos e os momentos devem permitir a formação de um número suficiente de rótulas plásticas, permitindo que um mecanismo de colapso se forme. Um mecanismo de colapso ocorre quando a estrutura atinge uma configuração onde não pode mais resistir à carga adicional, muitas vezes marcada pelo desenvolvimento de dobradiças em locais específicos.

22 A carga computada nesta abordagem é baseada em uma suposta distribuição de momentos que:

- Mantém o equilíbrio com a carga aplicada.
- Garante que nenhum momento interno exceda a capacidade do momento plástico, M_p.

23 Este método fornece uma estimativa conservadora, pois se concentra apenas em distribuições de momento que impedem a produção além do limite de rendimento especificado, gerando assim uma carga menor ou igual à carga real de colapso.

Método Estático de Solução

24 O método de estática (ou limite inferior) para determinar a carga final consiste nos seguintes passos detalhados:

1. **Selecione momentos redundantes:** Identificar os momentos redundantes dentro da estrutura que contribuem para o equilíbrio geral. Em uma estrutura estaticamente indeterminada, esses momentos são os momentos internos adicionais que devem ser resolvidos para manter o equilíbrio devido aos excessos de restrições além da determinação estática. Este processo de seleção envolve identificar locais onde os momentos podem variar sem interromper o equilíbrio geral.
2. **Construir o Diagrama de Momento Determinado Staticamente:** Inicialmente, simplifique a estrutura para uma configuração estaticamente determinada removendo conceitualmente seus despedimentos. Desenhe o diagrama de momento para esta

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

versão determinada da estrutura sob a carga aplicada. Este diagrama de base representa a distribuição do momento que existiria se a estrutura não tivesse restrições adicionais ou despedimentos.

3. **Superposição de momentos redundantes no Diagrama do Momento Determinado:** Depois de estabelecer o diagrama do momento determinado, o próximo passo é sobrepor os momentos redundantes nele. Estes momentos redundantes são adicionados à distribuição de momento basal para alcançar a distribuição do momento real na estrutura totalmente restrita (indeterminada). Através desta superposição, você pode obter a distribuição combinada ou total do momento, que representa os verdadeiros momentos internos sob a carga aplicada.
4. **Ajuste os momentos de pico para a capacidade do momento plástico M_p:** Ajuste os momentos redundantes para garantir que os momentos de pico no diagrama do momento total não excedam a capacidade do momento plástico M_p em qualquer seção da estrutura. Este passo é crítico porque respeita a condição de rendimento, garantindo que nenhuma seção seja estressada. Definindo momentos de pico iguais a M_p serve como um limite que marca a transição entre o comportamento elástico e plástico, identificando seções que atingiram sua capacidade de carga total.
5. **Verifique a formação de um mecanismo:** Confirmar que o número de rótulas plásticas formado em locais onde os momentos chegam M_p é suficiente para produzir um mecanismo. Um mecanismo ocorre quando a estrutura pode sofrer deformações adicionais sem um aumento na carga, tornando-a efetivamente instável. A formação de um mecanismo indica que a estrutura está à beira do colapso, já que qualquer aumento na carga levaria a deformações descontroladas.
6. **Calcular a carga máxima usando condições de equilíbrio:** Com a distribuição do momento final no lugar, aplicar equações de equilíbrio para calcular a carga final que a estrutura pode suportar sem violar as condições de rendimento. Esta carga final corresponde à magnitude da carga aplicada na qual a estrutura atinge um estado de colapso de acordo com o método do limite inferior. Esta carga é uma estimativa conservadora da verdadeira capacidade da estrutura, garantindo que nenhuma parte da estrutura exceda seu limite plástico.

Resumo da abordagem inferior

25 A abordagem do limite inferior fornece uma forma sistemática de avaliar a capacidade de carga de uma estrutura por:

- Garantir o equilíbrio das forças internas e externas.
- Respeitando as condições de rendimento através da distribuição cuidadosa do momento.
- Evitando suposições sobre sequências de formação de dobradiças, dando assim uma estimativa segura que pode subestimar a carga real do colapso.

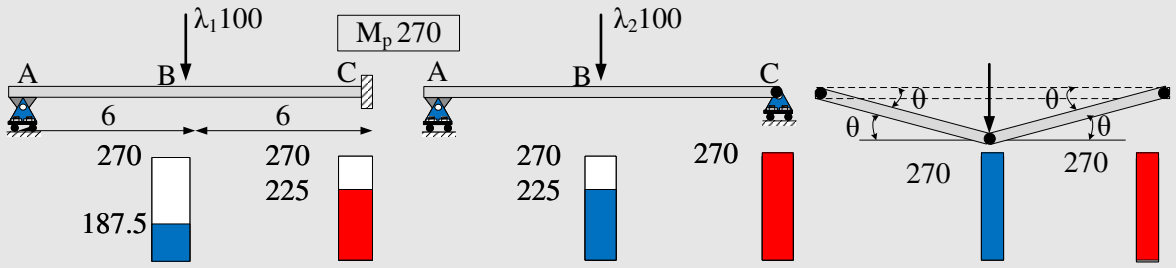
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

26 Esta abordagem é particularmente útil na engenharia estrutural porque garante segurança ao render uma carga de colapso que é, no pior dos casos, igual ou inferior à verdadeira carga final.

27 Usando somente restrições de equilíbrio e rendimento, o método do limite inferior evita suposições sobre mecanismos específicos de colapso e fornece uma maneira robusta de avaliar a segurança estrutural.

57.2.2.1 Ex 57.6: Cantiliver I Proped

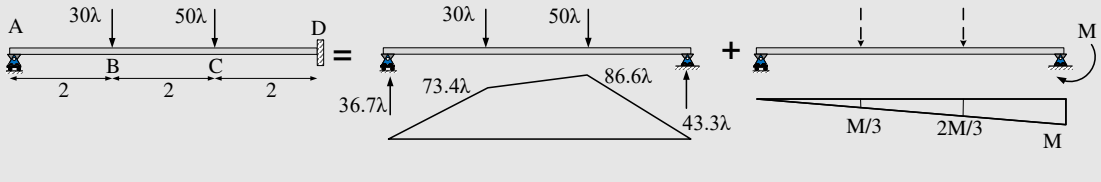


- Faça uma apresentação Incremento Análise.
- Estágio 1: Nós temos um Estaticamente indeterminado estrutura submetida a P=100 (magnitude é irrelevante, poderia ter sido 1, 10, etc.), após análise, nós obtemos;

$$\begin{aligned} M_C &= \tfrac{3}{16}PL = 225 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^C = \tfrac{270}{225} = 1.2 \\ M_B &= \tfrac{5}{32}PL = 187.5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^B = \tfrac{270}{187.5} = 1.44 \end{aligned}$$

  Assim, o Primeira dobradiça em C, e $P = 1.2(100) = 120$, $M_C^{total} = 1.2(225) = 270$, e $M_B^{total} = 1.2(187.5) = 225$
- Estágio 2: Uma dobradiça se formou em C$M_C = 0$), temos agora um Estaticamente determinado viga com um ponto de carga média novamente P=100 e $M_B = PL/4$=300. O restante Capacidade de momento plástico Em.. B é 270-225=45, $\Rightarrow \lambda_2 = 45/300$=0.15
- Adicionando as duas cargas (por agora M_C^{total}=270, e M_B^{total}=225+0,15(300)=270), e o total $\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.2 + 0.15 = 1.35$, assim o carga de colapso é 1.35(100) = 135

57.2.2.2 Ex 57.7: Cantiliver II Propped



CÓPIA PARA REVISÃO

- Estrutura estaticamente indeterminada. Em vez de fazer uma análise para determinar onde ocorre a primeira dobradiça, fazemos duas suposições
- Primeiro considere a formação de dobradiças em C e D

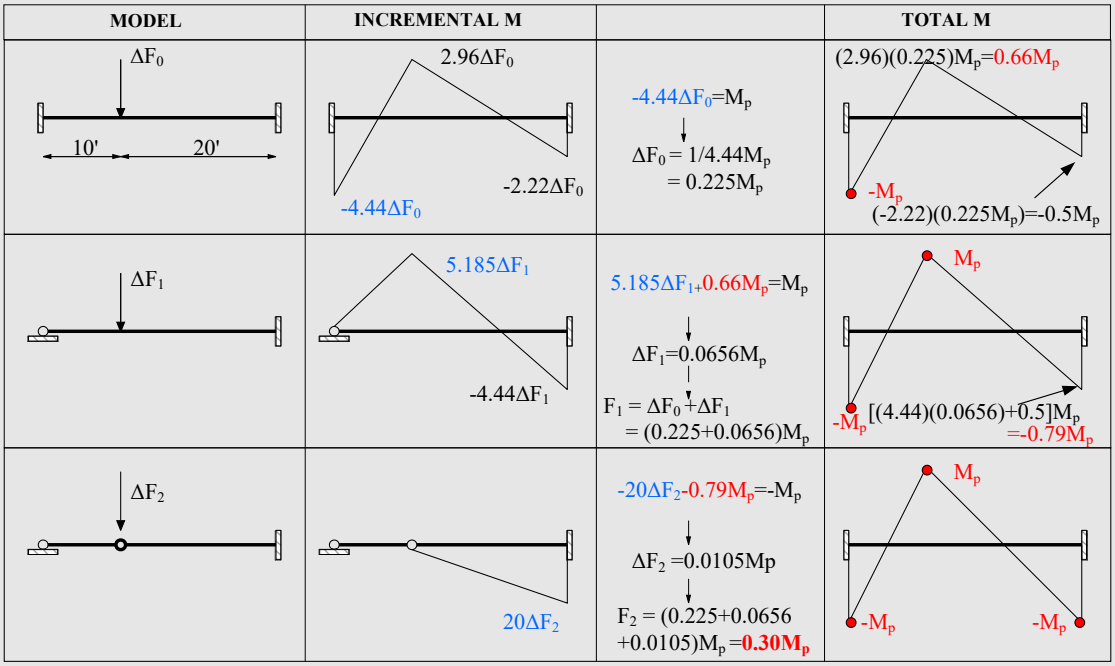
$$\begin{cases} M^D & & = & M_p \\ M^C & = 86.6\lambda - \frac{2}{3}M^D & = & M_p \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{52}$$

- A outra possibilidade dobradiças em B e D

$$\begin{cases} M^D & & = & M_p \\ M^B & = 73.4\lambda - \frac{1}{3}M^D & = & M_p \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{55}$$

- Assim, o Segundo caso governa.

57.2.2.3 Ex 57.8: Fixado viga



1. Primeiro nós consideramos o Estrutura original
   (a) Aplique uma carga F_0., determine o diagrama correspondente.
   (b) Identifique o maior momento (-4,44F_0) e.. Defina-o igual a M_P.. Este é o primeiro ponto onde um rótula plástica se formará.
   (c) Nós redesenhamos o diagrama do momento em termos de M_P.
2. Em seguida, consideramos a estrutura com um rótula plástica no apoio esquerdo.

CÓPIA PARA REVISÃO

(a) Aplique um Incremento Carregar ΔF_1.
(b) Desenhe o diagrama correspondente em termos de ΔF_1.
(c) Identifique o ponto máximo **Total** momento como o ponto sob a carga $5.185\Delta F_1 + 0.666 M_P$ E colocá-lo igual a M_P.
(d) Resolva ΔF_1, e determinar a carga total aplicada externamente.
(e) Desenhe o diagrama de momento total atualizado. Agora temos dois rótulas plásticas, ainda precisamos de um terceiro para ter um mecanismo que leve ao colapso.

3. Finalmente, analisamos a estrutura revista com os dois rótulas plásticas.

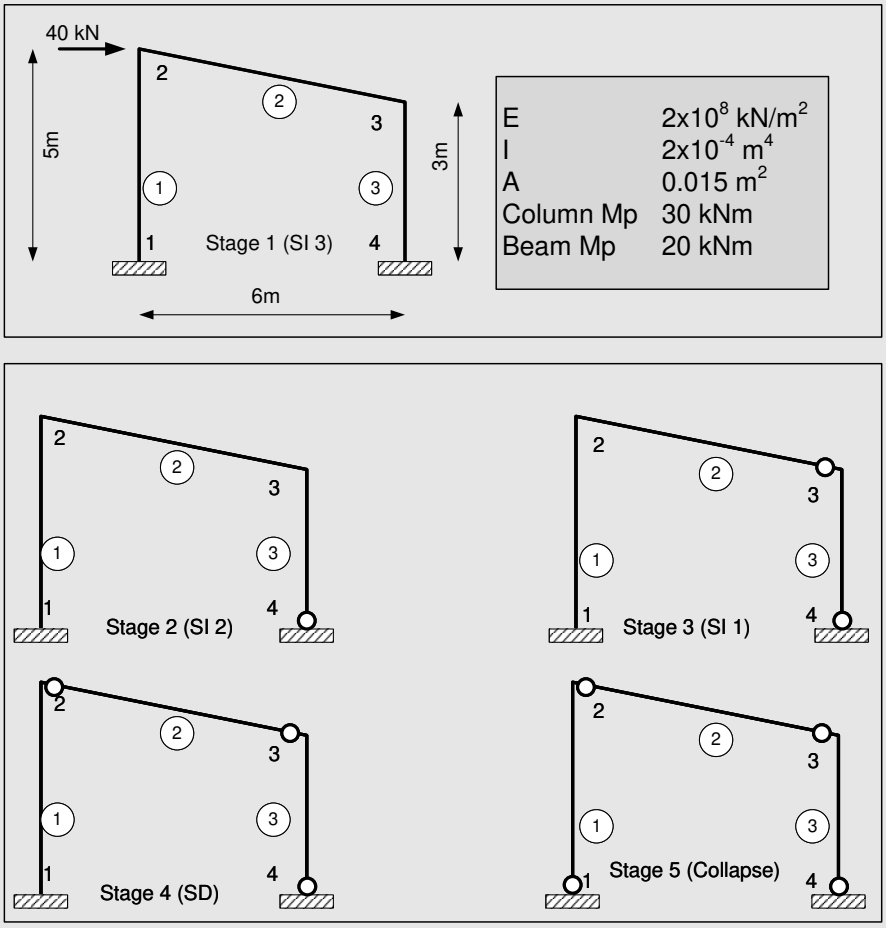
(a) Aplique uma carga incremental ΔF_2.
(b) Desenhe o diagrama correspondente em termos de ΔF_2.
(c) Defina o nó do momento total à direita igual a M_P.
(d) Resolva ΔF_2E determinar a carga externa total. Esta carga corresponderá à carga de falha da estrutura.

57.2.2.4 Ex 57.9: Inclinado pórtico

Agora procuramos reanalisar o anterior inclinado pórtico pela aproximação estática do limite inferior.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Teremos que considerar várias etapas, começando do estágio 1 ao 4 (colapso); 1-2-3 são estaticamente indeterminados para o terceiro, segundo e primeiro grau, respectivamente, estágio 4 é estaticamente determinado; E finalmente o estágio 5 é o mecanismo de colapso. Assim, nós realizaríamos a primeira análise 3 usando um programa de computador simples, o quarto à mão. M_p é o momento plástico, M_i é o momento em cada articulação (o valor inicial é igual a um), M_0 é o momento obtido da análise estrutural no final de cada estágio.

Fase 1 Faça uma análise, e determine o α coeficientes:

Membro 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 27.21 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30}{27.21} = 1.103$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30}{-21.75} = 1.379$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Membro 2:

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-20}{-21.75} = 0.916$$

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{20}{31} = 0.645$$

Membro 3:

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30}{31} = 0.968$$

$$\text{J4} \qquad M_0 = -59.62 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_4}{M_0} = \frac{-30}{-59.62} = 0.503$$

Observamos que o fundo direito do pilar tem o menor αEntão a primeira dobradiça deve se formar no fundo direito. Atualize os momentos:

Membro 1:

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 0.503 \times 27.21 = 13.69$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$

Membro 2:

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$

Membro 3:

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$
$$M_4 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-59.62) = -30$$

Fase 2 Faça outra análise, e determine o α coeficientes:

Membro 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 65.09 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30 - 13.69}{65.09} = 0.251$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30 + 10.94}{-47.24} = 0.403$$

Membro 2

$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad M_2 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_2}{M_0} = \frac{-20 + 10.94}{47.24} = 0.192$$

$$\text{J3} \qquad M_0 = 52.61 \qquad M_3 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_3}{M_0} = \frac{20 - 15.59}{52.61} = 0.083$$

Membro 3

$$\text{J3} \qquad M_0 = 52.61 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30 - 15.59}{52.61} = 0.273$$

$$\text{J4} \qquad M_4 = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Desta vez, o menor α corresponde à extremidade direita da viga. Este será o local da segunda formação de dobradiças. Atualize os momentos: Atualize os momentos.

Membro 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 13.69 + 0.083 \times 65.09 = 19.09$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$

Membro 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.08 \times 52.61 = 20$$

Membro 3

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.083 \times 52.61 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

Fase 3 Faça uma análise, e determine o α coeficientes:

Membro 1

J1 $\quad M_0 = 129.70 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 19.09}{129.70} = 0.084$

J2 $\quad M_0 = -70.31 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-30 + 14.86}{-70.31} = 0.215$

Membro 2

J 2 $\quad M_0 = -70.31; M_2 = -70.31 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-20 + 14.86}{-70.31} = 0.073$

Atualize os momentos

Membro 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 19.09 + 0.073 \times 129.70 = 28.56$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$

Membro 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$
$$M_3 = M_3 = 20$$

Membro 3

$$M_3 = M_3 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

Estágio 4 A dobradiça deve se formar no fundo esquerdo pilar

Membro 1

J1$M_0 = 40 \times 5 = 200 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 28.56}{200} = 0.007$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Finalmente

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ &= 0.503 + 0.083 + 0.073 + 0.007 = 0.666\end{aligned}$$

A carga de colapso será assim

$$F_{cr} = \alpha F = 0.666 \times 40 = 26.64\text{KN}$$

O resultado dessas análises é melhor mostrado através da tabela seguinte.

Member	Joint	Moment M_0 (kNm)	Moment M_i (kNm)	Residual Plastic Moment M_p-M_i (kNm)	Load Factor $\alpha=(M_p-M_i)/M_0$	Critical Load Factor α_{cr}	Cumulative Load Factor α_{cum}	Cumulative Moment $M_{j+1}=M_j+\alpha_{cr}M_0$ $=\alpha_{cum}M_0$ (kNm)	Plastic Moment M_p (kNm)	Critical Load $P_{cr}=P*\alpha_{cr}$ (kN)
Stage 1										
1	1	27.21	0.00	30.00	1.10	0.50	0.50	13.69	30	20.13
	2	-21.75	0.00	-30.00	1.38			-10.94	-30	
2	2	-21.75	0.00	-20.00	0.92			-10.94	-20	
	3	31.00	0.00	20.00	0.65			15.60	20	
3	3	31.00	0.00	30.00	0.97			15.60	30	
	4	-59.62	0.00	-30.00	0.50			-30.00	-30	
Stage 2										
1	1	65.09	13.69	16.31	0.25	0.08	0.59	19.14	30	23.47
	2	-47.24	-10.94	-19.06	0.40			-14.90	-30	
2	2	-47.24	-10.94	-9.06	0.19			-14.90	-20	
	3	52.61	15.60	4.40	0.08			20.00	20	
3	3	52.61	15.60	14.40	0.27			20.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 3										
1	1	129.70	19.14	10.86	0.08	0.07	0.66	28.55	30	26.38
	2	-70.31	-14.90	-15.10	0.21			-20.00	-30	
2	2	-70.31	-14.90	-5.10	0.07			-20.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 4										
1	1	200.00	28.55	1.45	0.01	0.01	0.67	30.00	30	**26.67**
	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
2	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	

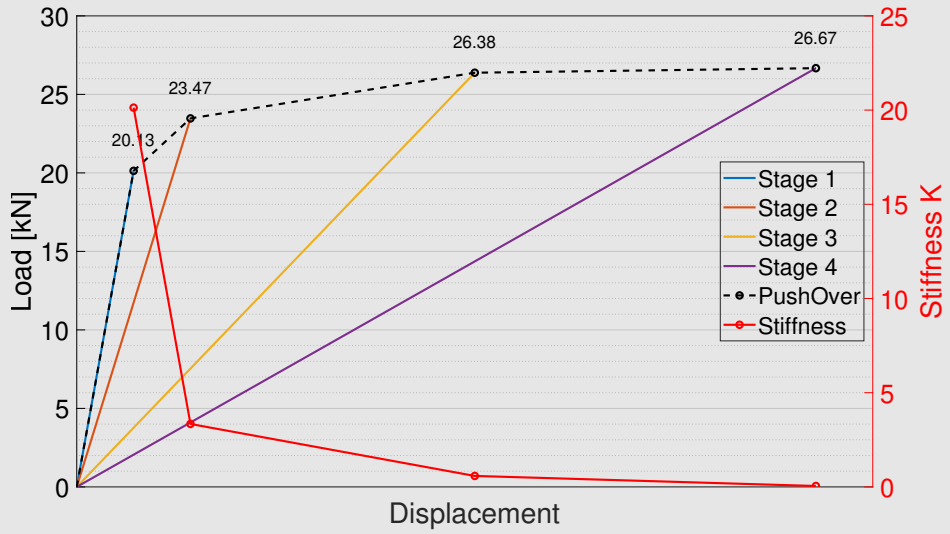
Por isso, $P_{crit} = 26.67$ kN M_p é o momento plástico, M_i é o momento em cada nó, M_0 é o momento em cada nó de cada elemento durante cada estágio.

Nota

Embora o deslocamentos em cada estágio pudesse ter sido determinado, eles não são relatados. No entanto, se os tivéssemos relatado, teríamos um gráfico semelhante ao

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



Observamos que à medida que a carga aumenta, temos mais rótulas plásticas, daí o rigidez diminui para zero na falha.

57.3 Elementos planos (lajes)

28 ACI Código: O projeto do laje pode ser alcançado através do uso combinado de soluções clássicas baseadas em um contínuo linearmente elástico, soluções numéricas com base em elementos discretos, ou Análises da linha de produção.

29 *Teoria da linha de rendimento* (YLT) investiga mecanismos de falha no final estado limite. É simples, mas exige familiaridade com os padrões de falha (ou seja, conhecimento de como lajes pode falhar).

30 Quando um laje está à beira do colapso (número suficiente de reais ou rótulas plásticas para formar um mecanismo) Eixos de rotação será localizado ao longo de linhas de apoio ou sobre suportes ponto, como pilares. Os segmentos laje podem ser considerados girando como Corpos rígidos no espaço sobre estes eixos de rotação.

31 Dois tipos de YL: positivo (crack abaixo) e negativo (crash em cima).

32 Diretrizes para estabelecer padrões YL:

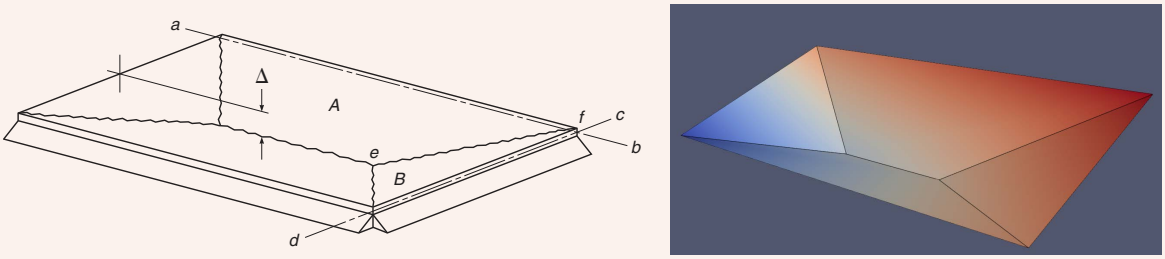
1. YL são linhas retas (interseções de dois aviões).
2. YL são eixos de rotação.
3. As bordas suportadas de um laje também estabelecerão eixos de rotação. Se for fixo: -Vê YL; Se livre: Sem restrições.
4. Suportes contínuos repelem e suportes simples atraem YL positivo ou fraco.

CÓPIA PARA REVISÃO

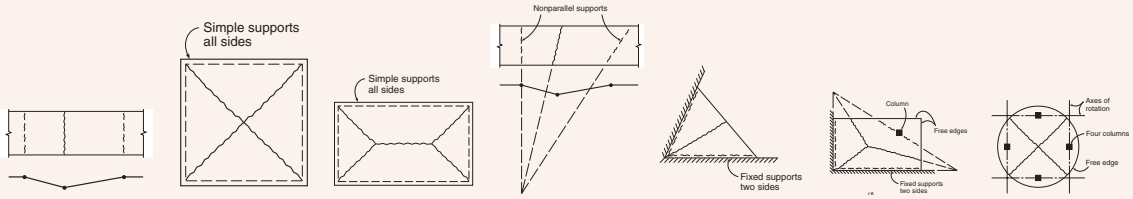
5. Eixo de rotação passa sobre qualquer suporte pilar Orientação depende de outras considerações.
6. Forma YL sob cargas concentradas irradiando para fora.
7. YL entre dois segmentos laje devem passar pelo ponto de intersecção dos eixos de rotação dos segmentos adjacentes laje.

33 Por exemplo, em um retangular laje biapoiado em quatro lados, Fig. 57.1a, terá seus segmentos A e.. B Rodar sobre ab e.. cd.

34 O objetivo de investigar padrões YL é encontrar o único padrão que dá a menor capacidade de carga).



(a) Rectangular



(b) Outros

Figura 57.1: Rende as linhas em lajes

57.3.1 Estáticos: Encaixe mais baixo

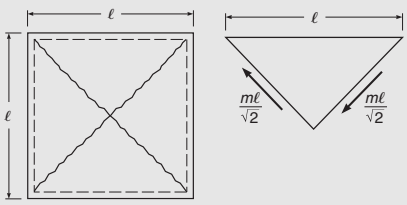
35 A abordagem inferior é complicada, mas não impossível de usar para lajes. Seguir é um exemplo simples.

57.3.1.1 Ex 57.10: Quadrado laje

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Um quadrado laje é biapoiado ao longo de quatro lados e é isotropicamente reforçado. Dado o momento plástico por pé linear m_P, determinar o uniforme w_{ult}. Nota, este método raramente é usado para análise laje. Devido à simetria, o padrão YL é como mostrado. Considerando o equilíbrio do momento de qualquer um dos quatro segmentos laje sobre seu apoio:



$$M_{ext} = w \underbrace{\frac{l^2}{4}}_{\text{area}} \underbrace{\frac{L}{6}}_{\text{moment arm}}$$

$$M_{int} = 2 \underbrace{\frac{m_p l}{\sqrt{2}}}_{\text{moment}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{Hor. component}}$$

$$M_{ext} = M_{int} \Rightarrow w_{ult} = \frac{24 m_p}{l^2}$$

57.3.2 Cinemática: Limite superior

36 Primeiro defina o trabalho no contexto das linhas de rendimento em lajes:

Trabalho externo

$$W_{ext} = \sigma(N_i \delta_i)$$

Onde N é a força resultante, δ correspondente vertical deslocamento. Para facilitar a determinação do trabalho externo, pode ser desejável quebrar o laje em vários elementos, Fig. 57.2 e determinar o deslocamentos correspondente a uma unidade $\delta = 1$ no centro.

Trabalho interno:

$$W_{int} = \sum ml\theta$$

onde m é o momento interno por metro de laje, l é o comprimento da linha de escoamento (LE), ou seu comprimento projetado sobre o eixo de rotação da região correspondente, e θ é a rotação da região em torno desse eixo.

37 Quanto ao procedimento, é idêntico ao usado para vigas: conservação de energia.

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

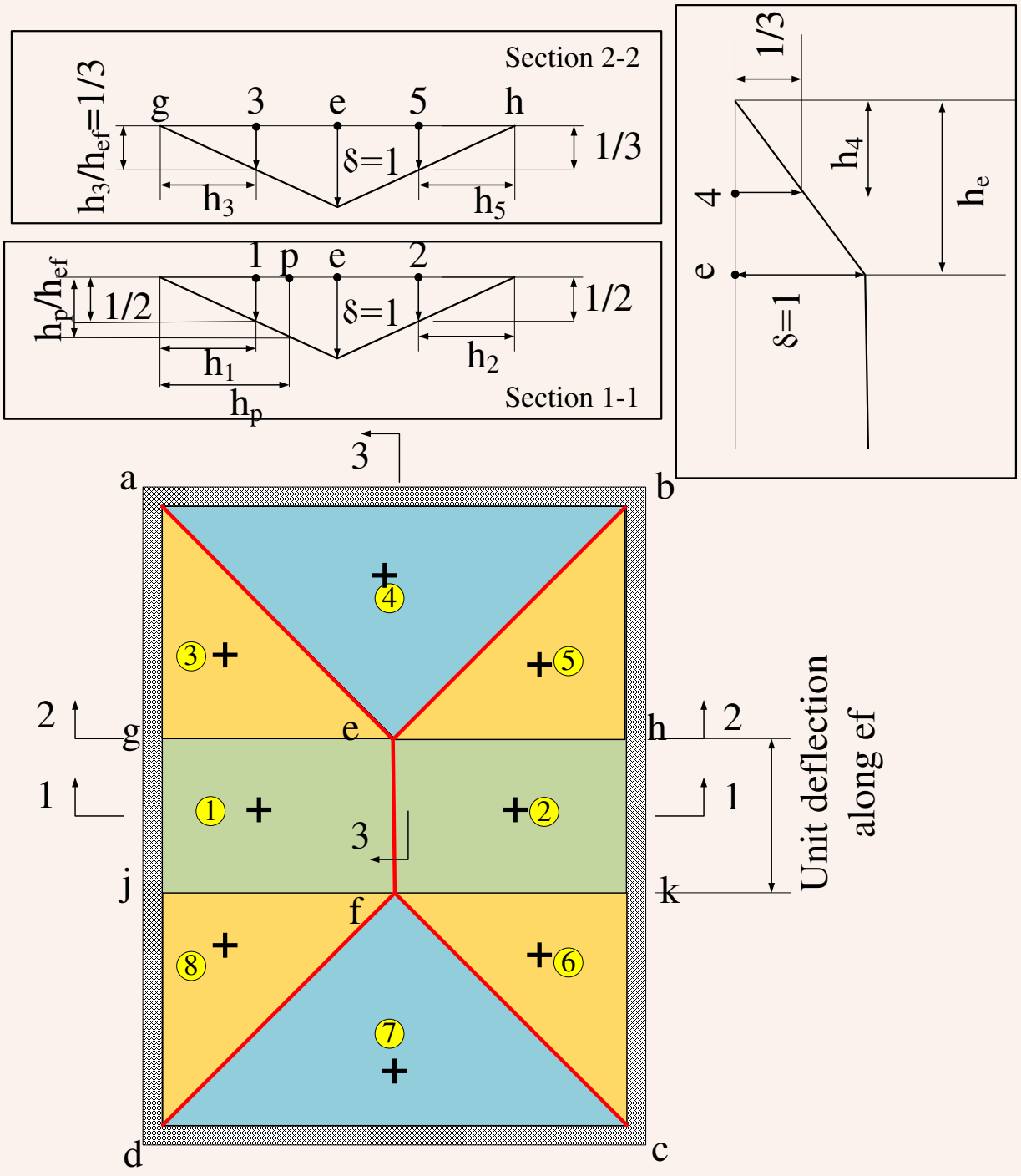


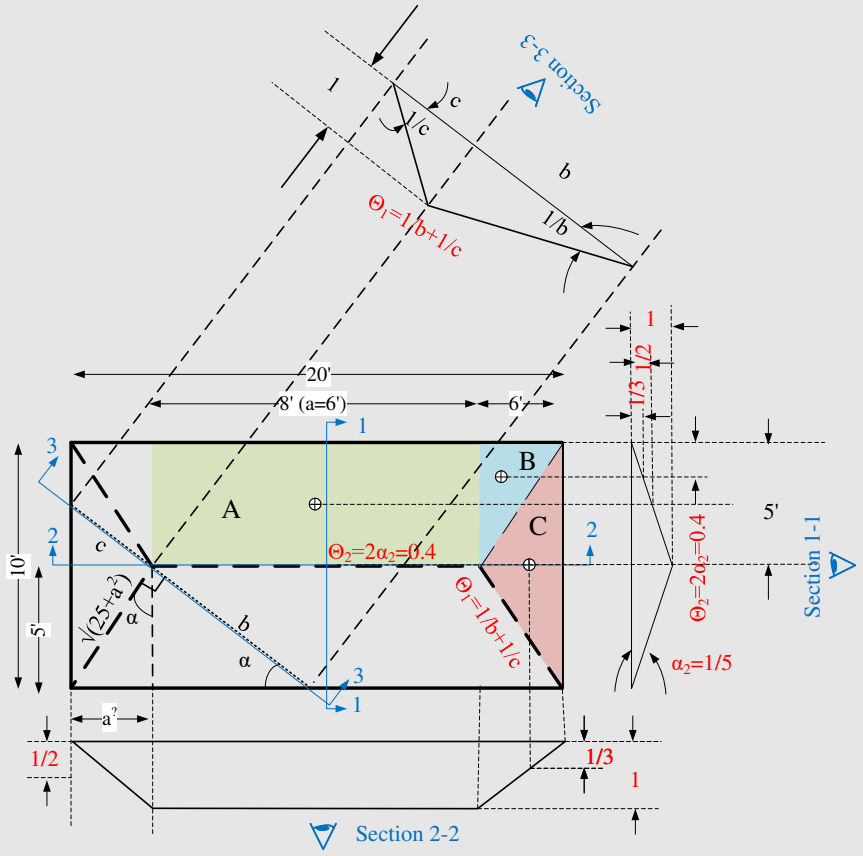
Figura 57.2: Determinação das linhas de rendimento em retangular lajes

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

57.3.2.1 Ex 57.11: Rectangular laje

O seguinte dois caminho é biapoiado nos quatro lados e suporta uma carga uniforme w.. Procuramos determinar a resistência necessária para o laje.



- +ve YL forma como mostrado, dimensão a é desconhecido.
- Da geometria: comprimento da diagonal $=\sqrt{25+a^2}$, e formam triângulos semelhantes

$$\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{a} \Rightarrow b=5\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}$$
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{5} \Rightarrow c=a\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}$$

- Correspondendo a uma deflexão da unidade, a rotação do rótula plástica na diagonal YL é

$$\theta_1=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{5\sqrt{25+a^2}}+\frac{5}{a\sqrt{25+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{25+a^2}}\left(\frac{a}{5}+\frac{5}{a}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- A rotação da linha de rendimento paralela às bordas longas do laje

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

- Assuma $a = 6$ Então o comprimento da diagonal YL é $\sqrt{25+36} = 7.81$ ft.
- A rotação correspondente da diagonal YL é:

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = 0.261$$

- Ângulo de rotação no YL central: $\theta_2 = 0.4$.
- O trabalho interno é..

$$W_{int} = 4(m_p \times 7.81 \times 0.261) + (m_p \times (20 - 6 - 6) \times 0.4) = 11.36 m_p$$

- O trabalho externo

$$W_{ext} = \underbrace{2\left(10 \times 6 \times \frac{1}{2} w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{A}} + + \underbrace{4\left(6 \times 5 \times \frac{1}{2} w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{B}} + \underbrace{2\left(8 \times 5w \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{C}} = 80w$$

- Equacionando $W_{int} = W_{ext}$ dá $w_{ult} = \frac{11.36 M_P}{80} = 0.14 m_P$

Testes sucessivos

a	W_{int}	W_{ext}	w_{ult}
6.0	11.36 m_P	80.0 w	0.142 m_P
6.5	11.08 m_P	78.4 w	0.141 m_P Controles
7.0	10.87 m_P	76.6 w	0.142 m_P
7.5	10.69 m_P	75.0 w	0.143 m_P

- Note que se uma faixa de largura da unidade fosse considerada, então

$$m_p = \frac{w_{ult} L^2}{8} \Rightarrow w_{ult} = \frac{8 m_p}{L^2} = \frac{8 m_p}{10^2} = 0.08 m_p$$

Em vez de $0{,}141 m_p$.

57.4 Análise do Pushover

38 A análise de Pushover é um procedimento estático não linear, comumente usado em projeto sísmico.

39 Ele é introduzido aqui brevemente (com uma discussão mais detalhada no capítulo

CÓPIA PARA REVISÃO

69.4.1) para destacar sua semelhança com a análise do limite inferior, que será discutido na próxima seção.

40 A análise de Pushover aplica-se incrementalmente aumentando as cargas laterais para simular a resposta da estrutura sob condições semelhantes ao terremoto:

- **Carregamento Incremental**:. Na análise de pushover, cargas são aplicadas incrementalmente até que a estrutura desenvolva um mecanismo de falha, atingindo sua capacidade máxima. A distribuição de carga normalmente representa forças laterais como esperado em um terremoto.
- **Comportamento Inelástico Progressivo**:. À medida que a carga aumenta, a estrutura começa a se render em pontos críticos (rótulas plásticas, capturada através de uma curva de carga-deslocamento, representando a resposta estrutural até e além do limite elástico.
- **Formação de Mecanismos**:. A análise de Pushover identifica mecanismos de colapso, fornecendo informações sobre como a estrutura se deforma sob carga severa e revelando pontos fracos e ductilidade geral.
- **Comportamento material não linear**:. A análise captura deformações inelásticas não lineares, críticas no projeto sísmico, pois reflete comportamento pós-elástico e padrões de falha.

57.5 Analogias entre a análise dos limites inferiores e

57.5.1 Análise do Pushover

41 Há analogias fortes entre a análise de baixo limite e análise pushover na engenharia estrutural, Fig. 57.3.

42 Enquanto ambos os métodos visam determinar a capacidade de carga da estrutura, eles diferem em termos de metodologia e contexto de aplicação.

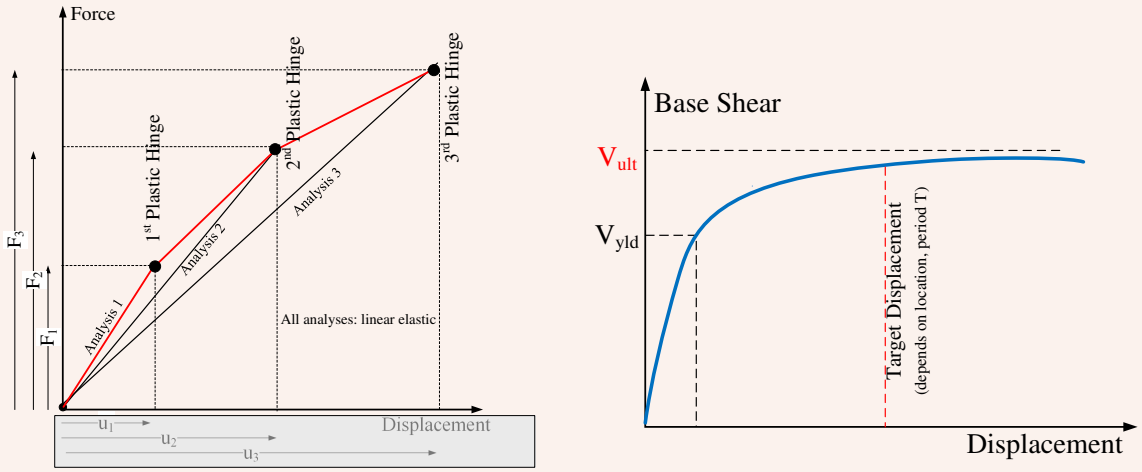
Semelhanças-chave entre análise de baixo limite e análise de pushover

43 Embora aplicadas de forma diferente, ambas as análises compartilham semelhanças fundamentais:

- **Determinação da capacidade de carga final**:. Ambos têm o objetivo de determinar a capacidade máxima de carga, embora análises com limites inferiores forneçam uma estimativa conservadora, enquanto que as análises "pushover"dão uma estimativa realista.
- **Foco na segurança estrutural sob carga extrema**:. Ambos os métodos avaliam a

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Análise de Limites Mais Baixo

(b) Empurra Over

Figura 57.3: Solução estática de ligação inferior *V.S* Análise do Pushover

capacidade de carga em condições extremas, embora com diferentes tipos de carga. Análise de limite inferior é adequada para cargas estáticas, enquanto análise de flexão é comumente usada para cargas laterais sísmicas.

- **Comportamento material inelástico**:. Ambos os métodos incorporam a teoria da plasticidade, com análise de limite inferior focada no equilíbrio e na produtividade, enquanto que a análise de pushover observa formação progressiva rótula plástica.

Principais diferenças entre análise de baixo limite e análise de pushover

44 As diferenças entre os dois métodos são significativas:

- **Aproxime-se do Equilíbrio e Mecanismos**:. Análise de baixo limite garante equilíbrio através de uma distribuição segura de força sem precisar de um mecanismo de colapso. A análise de Pushover envolve carga progressiva para observar a formação do mecanismo conforme as cargas aumentam.
- **Contexto da Aplicação**:. Análise de ligação inferior é geralmente usada para cargas estáticas em design plástico, enquanto análise de flexão é utilizada no projeto sísmico, simulando cargas laterais.
- **Consideração de Deformação Não-linear**:. A análise do Pushover explica explicitamente deformações inelásticas e produz uma curva de carga-deslocamento, enquanto a análise dos limites inferiores só garante rendimento e equilíbrio sem modelar deformação.
- **Mecanismo de colapso Visualização**:. A análise de Pushover permite visualizar mecanismos de colapso e pontos fracos, o que é essencial para a avaliação do

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

desempenho sísmico, ao contrário da análise com limite inferior, que não modela o colapso.

- **Carregando Natureza e Aplicação**:. Análise de limite inferior aplica uma carga estática sem progressão incremental. Em contraste, a análise do pushover aumenta incrementalmente a carga lateral até o colapso, tornando-a adequada para os contextos dinâmicos de carregamento.

45 Em resumo:

- **Análise de Limites Mais Baixo**:. Fornece uma estimativa conservadora da capacidade de carga ao encontrar uma distribuição de força que satisfaça as condições de equilíbrio e rendimento. Não requer um mecanismo de colapso ou uma análise não linear da deformação, focando somente na distribuição segura da carga.
- **Análise de Pushover**:. Fornece uma estimativa realista da carga final através de carregamento lateral incremental até que um mecanismo de colapso se forma. Captura deformações inelásticas não lineares e visualiza padrões de falha estrutural, tornando-o particularmente útil no projeto sísmico.

46 Em essência, ambas as análises, tabela 57.2 usar princípios da teoria da plasticidade para avaliar a capacidade de carga, mas suas diferenças refletem metodologias e aplicações distintas: A análise do limite inferior é centrada no equilíbrio e conservadora, enquanto a análise de pushover é focada na deformação e realista, enfatizando mecanismos de colapso sob carga progressiva.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 57.2: Comparação entre análise de limites inferiores e análise Pushover

Aspecto	Análise pelo limite inferior	Análise pushover
Objetivo	Fornece uma estimativa conservadora da capacidade de carga final garantindo equilíbrio e satisfação do rendimento.	Fornece uma estimativa realista da carga final aplicando cargas laterais incrementalmente até que um mecanismo de falha se forme.
Requisito de equilíbrio	Foca em encontrar uma distribuição de forças que satisfaça as condições de equilíbrio e escoamento sem exigir um mecanismo de colapso.	Observa a formação progressiva de rótulas plásticas até que surja um mecanismo de colapso.
Contexto da Aplicação	Normalmente aplicado em plástico para cargas estáticas, especialmente para estruturas de aço e concreto.	Usado principalmente em projeto sísmico, aplicando cargas laterais para simular efeitos de terremoto.
Comportamento Material	Considera o comportamento inelástico do material através de condições de rendimento, mas não modela explicitamente a deformação não linear.	Captura deformação inelástica não linear, produzindo uma curva de carga para avaliar o comportamento pós-elástico.
Visualização do mecanismo	Não visualiza mecanismos de colapso ou padrões deslocamento, focando apenas em alcançar o equilíbrio.	Permite visualizar mecanismos de colapso, ajudando a identificar pontos fracos e ductilidade global sob cargas crescentes.
Natureza do carregamento	Aplicação de carga estática sem progressão incremental; define um único nível de carga segura.	Aplicação incremental de carga lateral para representar forças sísmicas, progredindo até a ocorrência do colapso.
Saída	Nível de carga seguro que satisfaça as condições de equilíbrio e rendimento, sem detalhar o comportamento de deformação.	Curva de carga mostrando a resposta progressiva da estrutura, incluindo formação e capacidade máxima.

57.5.2 Plasticidade amassada

47 Finalmente a analogia com plasticidade grudada (§62.3) é impressionante. De fato, o modelo de plasticidade grupada pode ser visto como uma representação simplificada do teorema dos limites inferiores. No modelo de plasticidade grupada, a deformação plástica se concentra em zonas plásticas discretas ou dobradiças, que podem ser consideradas como mecanismos de deformação de plástico. Assumindo uma perfeita plasticidade dentro dessas zonas, o modelo foca em capturar a carga associada à formação de mecanismos plásticos.

48 O modelo de plasticidade grudada (§62.3) e teoria da linha de rendimento inferior, embora desenvolvida para diferentes aspectos de análise estrutural, compartilham uma profunda analogia conceitual na forma como tratam a plastificação e o rendimento.

49 Em ambos os modelos, o pressuposto é que a produção ou plastificação é altamente localizada, focando deformação e dissipação de energia em regiões específicas e restritas da estrutura. Esta abordagem é particularmente útil em modelos simplificados, mas eficazes, para avaliar o comportamento estrutural final.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Modelo de plasticidade: Concentração de Formação Rótula plástica

50 No modelo de plasticidade grudada, toda a plastificação deve ocorrer em locais discretos conhecidos como rótulas plásticas, tipicamente em pontos máximos momentos fletores.

51 Esta abordagem pressupõe que o comportamento elástico persiste no resto da estrutura, o que permite uma análise simplificada do comportamento pós-rendimento.

52 A formação de um rótula plástica indica que o membro atingiu sua capacidade de momento naquele local, localizando assim deformações inelásticas para estas dobradiças. À medida que a carga aumenta, a estrutura forma mais rótulas plásticas até que um mecanismo seja criado, permitindo uma previsão de cargas de colapso.

53 Esta localização da plastificação reduz a complexidade computacional e foca análise em seções críticas, tornando-se uma abordagem valiosa na avaliação da capacidade de carga final da estrutura sem exigir uma análise detalhada não linear sobre o Toda a estrutura.

Teoria da Linha de Rendimento Inferior: Localização das Linhas de Rendimento

54 Teoria da linha de rendimento com limite inferior, similarmente focalizada produzindo em linhas ou zonas discretas - linhas de rendimento - onde o laje é assumido para sofrer deformações plásticas.

55 Esta teoria opera sob a premissa de que as linhas se formam ao longo dos caminhos do trabalho mínimo para permitir o colapso, criando um mecanismo.

56 A teoria da linha de rendimento usa o princípio de trabalho virtual para estimar a carga de colapso, assumindo que as deformações plásticas estão confinadas a estas linhas enquanto o resto do laje permanece rígido.

57 Como o modelo de plasticidade, a teoria da linha de produção se beneficia da complexidade reduzida pela localização da plastificação. Isso permite que os engenheiros se aproximem da carga final de lajes e placas com cálculos relativamente simples, comparados à análise detalhada de plasticidade sobre toda a superfície.

A Analogia Conceitual: Localização do Comportamento Inelástico

58 Ambos os modelos aproveitam a ideia de que o comportamento inelástico pode ser confinado a regiões específicas, reduzindo assim a necessidade de análise de plasticidade em larga escala e simplificando a previsão de mecanismos de colapso.

59 O modelo de plasticidade grupada localiza a plastificação em rótulas plásticas, enquanto a teoria da linha de produção localiza-se produzindo ao longo das linhas. Concentrando a deformação nesses pontos localizados ou linhas, ambas as abordagens permitem uma estimativa menor da capacidade da estrutura, facilitando uma análise mais gerenciável de sistemas estruturais complexos.

60 Mesa 57.3 ilustra as analogias entre as duas abordagens.

CÓPIA PARA REVISÃO

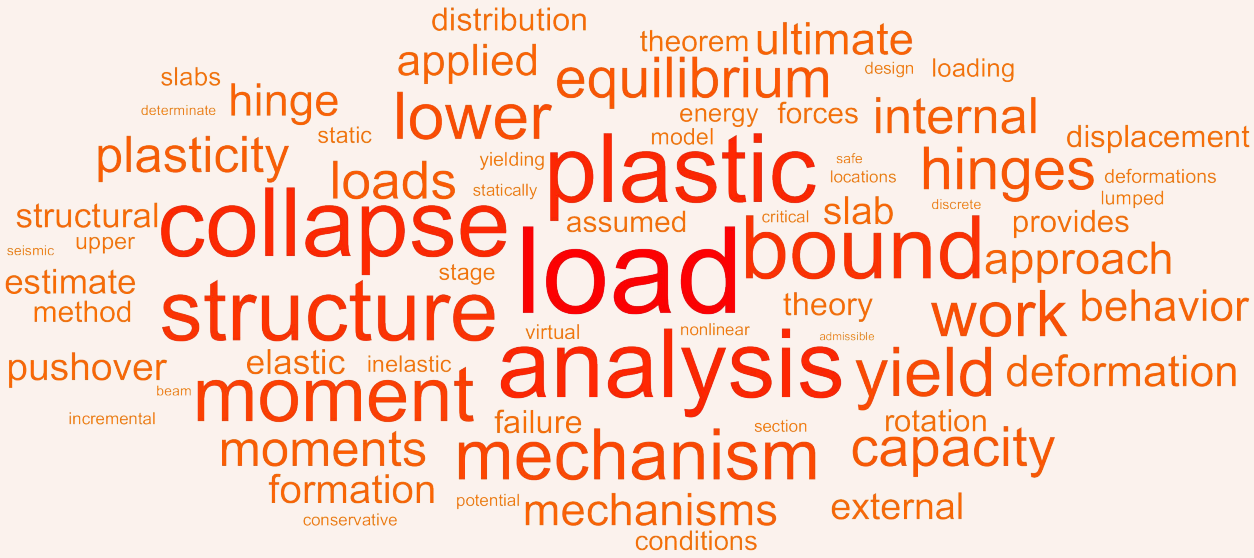
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 57.3: Plasticidade e análise do limite inferior

Aspect	**Modelo de plasticidade**	**Teoria da Linha de Rendimento inferior**
Tipo de Estrutura	Pórticos, vigas, e elementos lineares semelhantes	Placas e lajes
Localização do Comportamento Inelástico	Em rótulas plásticas (pontos discretos)	Ao longo das linhas de rendimento (linhas discretas)
Comportamento Fora da Zona Localizada	Suposta a permanecer elástica	Suposta a permanecer rígida
Mecanismo de colapso	Formação de múltiplos rótulas plásticas até que um mecanismo seja criado	Formação de linhas de rendimento que criam um mecanismo de colapso
Abordagem de Análise	Simplificado por focar em seções críticas onde rótulas plásticas forma	Simplificados assumindo que o rendimento ocorre ao longo das linhas de rendimento
Previsão de carga final	Através localizado rótulas plásticas em momentos máximos	Através de linhas de rendimento representando caminhos de trabalho mínimo
Uso de princípios inferiores	Fornece uma estimativa menor de carga de colapso	Fornece uma estimativa menor de carga de colapso
Aplicação primária	Análise da capacidade máxima de carga para pórticos	Análise da capacidade de carga máxima para lajes e placas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 58

Mecânica do dano

Este capítulo será mais tarde escrito por um eminente especialista em mecânica do dano.

58.1 PROPOSTA DE ESCRITÓRIO POR ChatGPT

58.1.1 Motivação e fundamentos físicos (~1.5 páginas)

Comece a partir da foto experimental: microcracking como o mecanismo de degradação dominante em materiais quase-fragiláveis, ea necessidade de distinguir danos da plasticidade. Uma ou duas curvas experimentais emblemáticas (tensão uniaxial e compressão do concreto) ancorarão imediatamente a teoria em observação.

58.2 Framework termodinâmico (~2 páginas)

O Clausius– A desigualdade Duhem, a variável de dano D (Scalar no início), o eficaz tensão $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - D)$, e a energia elástica deformação do material danificado. Este quadro estabelece que mecânica do dano não é uma construção ad hoc, mas pertence ao mesmo formalismo termodinâmico como a plasticidade - o que é essencial para os leitores já familiarizados com este último.

CÓPIA PARA REVISÃO

58.3 Dano isotrópico escalar: O modelo Mazars~4 páginas)

Este é o núcleo do capítulo. O equivalente deformação $\tilde{\varepsilon}$, o critério de dano $f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \leq 0$, a lei da evolução de dois ramos (D_t, D_c, combinados através α_t e.. α_c). Identificação do parâmetro dos testes padrão. Um exemplo numérico traçado passo a passo ao longo do caminho de carregamento uniaxial seria particularmente valioso para os alunos.

58.4 Tensão, assimetria de compressão e o efeito unilateral~2 páginas)

Fechamento de fissura sob compressão e restauração parcial de uma das mais importantes sutilezas para modelar estruturas sob carga cíclica ou dobra combinada. A condição unilateral e seu tratamento no modelo.

58.5 Dano... acoplamento de plasticidade (~2 páginas)

Uma apresentação concisa de modelos acoplados... irreversíveis deformações e rigidez degradação que são indispensáveis para o concreto sob compressão e para aço. Lemaitre é um conceito eficaz tensão e seu papel em formulações modernas combinadas (Grassl-Jirásek, Desmorat).

58.6 Regularização e objetividade de malha (~3 páginas)

Esta é a seção mais importante para um público elemento finito. A suavização local leva à dependência patológica da malha. O modelo de banda de crack (Bažant) como um remédio prático - ajustar o ramo suavizante pelo tamanho do elemento h Para preservar a energia da fratura G_f.. Dano integral não local e a formulação implícita de gradiente como alternativas mais rigorosas. Uma ilustração numérica do problema e sua resolução seria altamente instrutiva.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

58.7 Aplicação para elementos viga e pilar (~3 páginas)

Esta é a seção que liga o capítulo ao resto do livro. A introdução da variável de dano na seção rigidez - redução de EI e.. EA como uma função do campo de danos integrado sobre a seção transversal. A noção de comprimento característico em um elemento viga. Se o espaço permitir, um exemplo de uma degradação progressiva e suas consequências estruturais seria a ilustração ideal.

58.8 Identificação do parâmetro e guia prático (~1.5 páginas)

Uma tabela de parâmetros do modelo Mazars com faixas típicas para concreto comum e de alto desempenho. O procedimento de identificação dos testes padrão (teste brasileiro, compressão uniaxial, flexão em três pontos).

58.9 Notas bibliográficas e leitura adicional (~0,5 páginas)

As referências fundadoras: Mazars 1984/1986, Lemaitre 1985, Pijaudier-Cabot & Bažant 1987, Bažant & 1983 e alguns artigos de revisão recentes para leitores que desejam explorar mais.

—

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

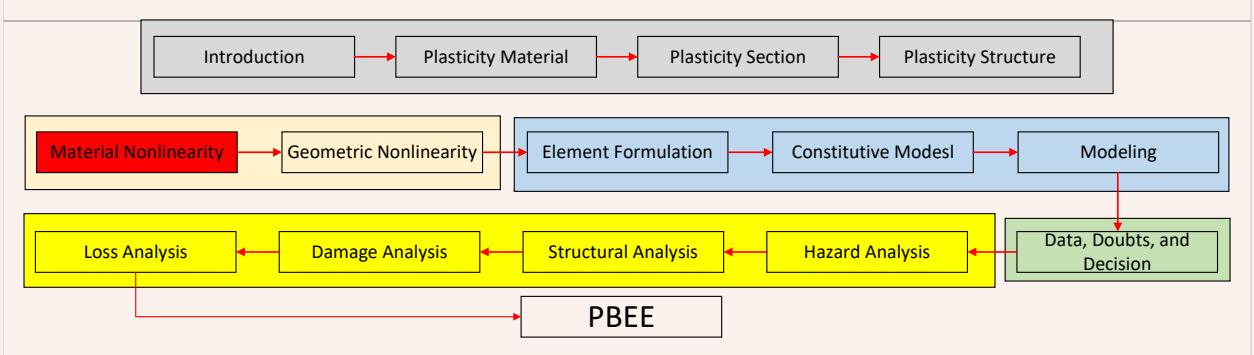
Capítulo 59

Análise não linear. Material

Abstract

Após a breve introdução à análise não linear em §54.1, este capítulo investiga a análise não linear do comportamento do material na engenharia estrutural, com foco em técnicas de modelagem numérica e suas aplicações. Começando com uma visão geral dos métodos de busca de raízes para equações não lineares, incluindo o método de Newton, o método secante e esquemas explícitos, este capítulo destaca as forças e limitações de cada abordagem na resolução de equações estruturais complexas. Depois disso, métodos incrementais de controle de carga baseados no método de Newton são introduzidos para analisar a resposta estrutural sob forças aplicadas. Finalmente, o capítulo explora técnicas de controle deslocamento, que fornecem uma abordagem estável e precisa para capturar respostas pós-pico e suavizante, cruciais para analisar materiais quebradiços e deformação suavizantes. Através destes métodos, o capítulo oferece um kit de ferramentas abrangente para lidar com problemas não lineares em análise estrutural, enfatizando a importância de soluções iterativas no avanço das aplicações de engenharia.

59.1 Raízes numéricas achadas 1971
59.1.1 Métodos Newton 1971
59.1.2 Método Secante 1978
59.1.3 Explícito 1979
59.2 Relação com mecânica estrutural; implícita 1980
59.3 Métodos de integração 1981
59.3.1 Controle de carga 1983
59.3.2 Deslocamento controle . . . 1991



CÓPIA PARA REVISÃO

59.1 Raízes numéricas achadas

1 Na análise não-linear, métodos de encontrar raízes são essenciais para resolver equações onde soluções analíticas tradicionais podem não existir.

2 Técnicas numéricas fornecem abordagens iterativas para aproximar essas soluções, que são críticas em não lineares análise estrutural.

3 Esta seção introduz vários métodos-chave para encontrar raízes, focando no método de Newton, o método secante, e técnicas explícitas de pesquisa de raízes.

4 Cada método oferece vantagens únicas e é aplicável a diferentes cenários. O método de Newton, por exemplo, aproveita derivativos para alcançar uma rápida convergência, tornando-o adequado para problemas com funções bem comportadas e derivados disponíveis. Em contraste, o método secante aproxima os derivados numericamente, o que pode ser útil quando os derivados analíticos são difíceis ou impossíveis de obter.

5 Vamos explorar a aplicação desses métodos de pesquisa raiz para não linearidades materiais e examinar como eles se encaixam no contexto mais amplo da engenharia estrutural.

59.1.1 Métodos Newton

59.1.1.1 Introdução

6 O método de Newton é uma técnica iterativa de alta ordem amplamente utilizada para encontrar raízes de equações não lineares, alavancando a derivada da função para aproximar sucessivamente a solução.

7 Este método refine sua aproximação com cada iteração, visando uma rápida convergência quando o palpite inicial está próximo da raiz real. Ao contrário de métodos mais simples, a abordagem de Newton é particularmente eficaz para funções suaves e bem comportadas devido à sua taxa de convergência quadrática, o que significa que o erro diminui significativamente com cada passo em condições favoráveis.

8 Em aplicações de engenharia estrutural, o método de Newton é especialmente útil em análises não lineares, onde pode ajudar a resolver equações de equilíbrio que surgem sob condições de carga. Para problemas lineares, o método de Newton convergirá rapidamente para a solução única.

9 Para equações não lineares, a convergência pode ser mais desafiadora, pois uma solução pode nem sempre existir, ou pode haver várias raízes possíveis. Nesses casos, o método de Newton fornece um caminho eficiente para uma solução aproximada se existir, tornando-o inestimável em problemas práticos de engenharia onde soluções exatas são muitas vezes evasivas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

10 O método de Newton para encontrar raízes, deve ser contrastado com o método de Euler (§53.3.4) usado para prever com base no valor inicial e governando equação diferencial.

11 Para problemas lineares, sempre haverá uma solução única; porém, para os não lineares, não podemos garantir a existência de uma solução, nem sua singularidade (e.e. Uma parábola não pode intersectar o x eixo, enquanto que um polinômio cúbico sempre serve.

12 Quando uma solução existe, na melhor das hipóteses podemos obter uma solução numérica aproximada.

13 A classe mais utilizada de solução numérica: "Newton Methods"ou "Quasi Newton". Outros métodos podem incluir o método da bisseção (apenas linearmente convergente).

59.1.1.2 Série Taylor e linearização

14 A expansão da série Taylor é uma ferramenta matemática fundamental usada para aproximar funções não lineares, expressando-as como uma série infinita em torno de um ponto escolhido.

15 Ao truncar esta série para incluir apenas os primeiros termos, podemos obter uma forma linearizada da função. Esta aproximação linear torna-se especialmente útil em métodos iterativos, como o método de Newton, onde cada passo sucessivo depende da solução de uma equação simplificada e linear.

16 Em aplicações de busca por raiz, a linearização fornece uma maneira gerenciável de aproximar o comportamento de funções complexas e não lineares perto de um palpite inicial, permitindo uma convergência eficiente para uma solução.

17 Na essência do método procura resolver $f(x) = 0$ por linearizar a equação sobre a aproximação atual x_n e resolver para a equação linear resultante para a próxima aproximação x_{n+1}.

18 Como com o método de Euler (Eq. 53.6O método de Newton começa com a série de Taylor, onde expressamos uma função como uma série infinita em relação ao ponto $\overline{x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2!}f''(\overline{x}) + \dots \\ &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + O(\underbrace{|x-\overline{x}|^2}_{\xi^2}|) \end{aligned}$$

Ignorando termos de ordem superior, dá uma função linear

$$L(x) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x})$$

19 If **f**(**x**) é uma função de duas variáveis, então $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e.. $\mathbf{x} = \lfloor\ x_1 \quad x_2\ \rfloor^T$.. A expansão da série Taylor sobre o ponto fixo $(\overline{x}_1, \overline{x}_2$"será"

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \tag{59.1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Ignorando os termos de ordem superior, nós novamente linearizamos a equação.

20 Se nós definirmos $f(x) = 0 \Rightarrow x \simeq \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$ Esta é uma solução aproximada, em $\overline{x}$, que presume que também temos $f'(x)$, Fig. 59.1.

21 Em um procedimento iterativo, esta equação pode ser reescrita como

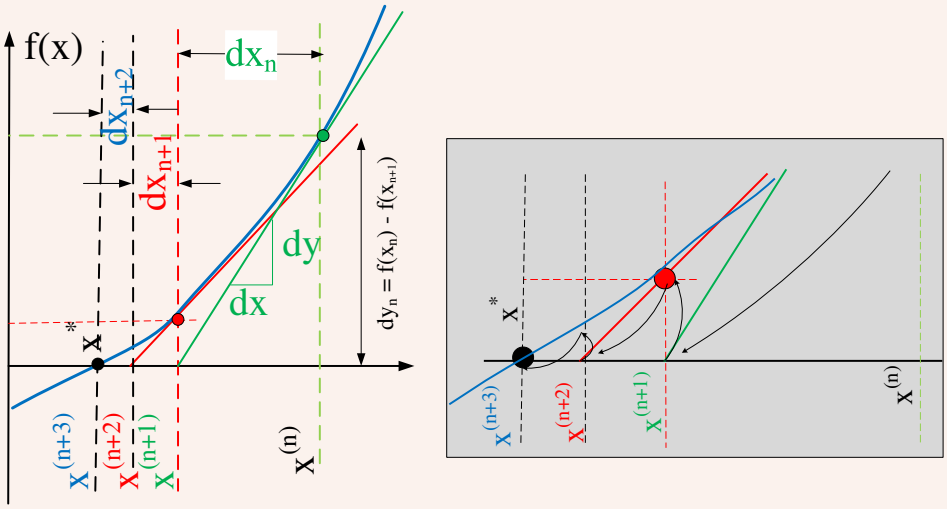


Figura 59.1: Método Newton

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x_n) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{f'(x_n)} = \frac{\overbrace{f(x_{n+1})}^{0} - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n}$$

Convergência será garantida quando

$$|\delta x_n| \leq \varepsilon_\delta \text{ or } |f(x_{n+1})| \leq \varepsilon_f$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
1: procedure NEWTON(f(x), f'(x), x_0, tol)
2:     x ← x_0
3:     while abs(f(x)) > tol do
4:         x ← x − f(x)/f'(x)
5:     end while
6: end procedure
```

59.1.1.2.1 Ex 59.1: Método de Newton, escalar

Resolva $f(x) = Tan(x) - x = 0$ que corresponde à equação de governo flambagem de um dobradiça-dilacerada pilar (§29.3.2.1.3, Eq. 29.23).

```
clear
xn = 4.3;n = 0;epsi=1e-4;maxiter = 20;
disp("           ");disp("    n          xn                    norm")
xn_m1=0.;
for i = 1:maxiter
    f_x=tan(xn)-xn;df_dx=sec(xn)^2-1;
    xn = xn - f_x/df_dx;
    my_norm = abs(xn-xn_m1);
    disp(sprintf( "%5i  %16.15e  %16.15e",i, xn,my_norm"))
    if my_norm <epsi
      break
  end
  xn_m1=xn;
end

```

Note que este é um problema particularmente sensível, porque tan x é descontínuo, uma pequena mudança no palpite inicial pode resultar em divergência da solução.

22 para uma única variável

$$x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n} \Rightarrow f(x) + f'(x)(x_2 - x_1) \simeq 0$$

23 O método pode obviamente ser estendido a duas funções $f_1(\mathbf{x})$ e.. $f_2(\mathbf{x})$ Em termos de duas desconhecidas

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

ou

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \\ f_2(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Onde $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})$ é a matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{59.2}$$

e.. $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ é um produto vetor de matriz;

24 Observe que o i^{th} A linha corresponde ao gradiente do i^{th} função do componente f_i (∇f_i.), e a derivada escalar foi substituída pelo 2×2 Matriz Jacobiana de derivados parciais.

25 Podemos generalizar ainda mais o problema para um dos m Equações não lineares com m desconhecidos

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}$$

A matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ para esta matriz será um $m \times m$ Matriz com (i, j) entradas correspondentes à derivada parcial da função i com respeito à variável j ou $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$

26 Em cada passo do método Newton, temos um valor aproximado de $\mathbf{x}_n$ para a solução exata $\mathbf{x}^*$ das equações não lineares $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.. Assim, determinamos $\mathbf{x}_{n+1}$ resolvendo o sistema linearizado de equações

$$\begin{aligned} L^{(n)}(\mathbf{x}_{n+1}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

Observe a semelhança com $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = f'(x)$ para $m = 1$.

27 A cada passo devemos avaliar a matriz Jacobiana em um novo ponto, e então resolver um sistema linear de equações usando esta nova matriz atualizada.

28 Convergência será garantida quando

$$\| \delta\mathbf{x}_n \| \leq \varepsilon_\delta \text{ or } \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) \| \leq \varepsilon_f$$

Onde $\| \mathbf{v} \|$ é o *Euclidian Norm* de $\mathbf{v}$ (stritamente falando, deve ser escrito como $\| \mathbf{v} \|_2$) calculado como a raiz quadrada da soma dos componentes do vetor quadrado,

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

em uma N Espaço dimensional.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
1: procedure NEWTON(f, J, x0, tol, max_Iter)
2:     x ← x_0
3:     i ← 0
4:     while i < max_iter|norm(f(x) < tol do
5:         fx ← f(x)                          ▷ Avalie a função no ponto atual
6:         Jx ← J(x)                          ▷ Avalie Jacobian no momento atual
7:         p = solve(Jx, −fx)                 ▷ Compute a direção de busca usando o Jacobian
8:         x = x + p                          ▷ Atualizar ponto atual
9:         i ← i + 1                          ▷ Contador de iterações incrementais
10:    end while
11:    Retorne x                              ▷ Último iterate
12: end procedure
```

59.1.1.3 Convergência e estimativa de erro

29 Devemos garantir a convergência do método, e da ordem do erro

30 Dado $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ Defina um fator de convergência $\rho^{(n)}$ como a proporção do erro em x_{n+1} Para o erro em x_n.. Perto da solução exata (x^*, onde $g(x^*) = x^*$) $\rho^{(n)} \simeq g'(x^*)$ e é chamado de fator de convergência assintótico.

31 Determinando $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

if $f'(x^*) \neq 0$ e.. $f''(x^*)$ é finito, então $g'(x^*)$=0 e concluímos que o fator de convergência tende a zero quando e se $x_n \to x^*$.

32 Para determinar o erro $x^* - x_n$,

$$x^* - x_{n+1} = x^* - x_n - \frac{f(x^*) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

Assim, se a iteração convergir para x^*, segue-se

$$\underbrace{x^* - x_{n+1}}_{\text{error at } n+1} \simeq -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \underbrace{(x^* - x_n)^2}_{\text{error at } n} \text{ as } n \to \infty$$

Desde que.. $f'(x^*)$ e.. $f''(x^*)$ são ambos finitos e não-zero.

33 O erro tende a ser proporcional ao quadrado do erro em x_n Como n tende ao infinito.

34 Outros métodos (como a bissecção) terão uma convergência linear.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59.1.1.4 Considerações finais

O método Newton:

1. Exige um expressão analítica da derivada
2. Se o valor inicial está muito longe do valor correto, A convergência pode não ser assegurada (e é por isso que se deve colocar um limite superior no número de iterações).
3. Não, não A inclinação está perto de zero (como em torno do pico de carga).
4. Funciona melhor com curvas com curvaturas baixas.
5. Convergência é quadrática.

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leq c \| x_n - x^* \|^2$$

No entanto, em Praticar Não sabemos o que é c É

59.1.1.4.1 Ex 59.2: O método de Newton. vetor

Solve $f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \\ x_3 - x_2 \sin(x_1) \\ 3x_2 + 4x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ -x_2 \cos(x_1) & -\sin(x_1) & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
f = @(x) [x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-9
x(3)-x(2)*sin(x(1))
3*x(2)+4*x(3)] ;
% The Jacobian mat r i x :
J = @(x) [2*x(1) 2*x(2) 2*x(3)
-x(2)*cos(x(1)) -sin(x(1)) 1
0 3 4] ;
% i n i t i a l guess :
x = [-1;-2;1] ;
maxiter = 10;
tol = 1e-12;
disp(' ')
disp('iteration x(1) x(2) x(3) norm(delta) ')
for n=1:maxiter
delta = -J(x)\f(x);
x = x + delta ;
disp(sprintf( '%5i %10.5e %10.5e %10.5e %8.3e',...
n, x(1), x(2) , x(3) ,norm(delta, inf))) ;
if norm(delta, inf) < tol
break
end
end
if n==maxiter
disp("Warning: may not have converged  tolerance not satisfied")
end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59.1.2 Método Secante

35 O método secante é um algoritmo que aproxima iterativamente a raiz de uma equação não linear para aproximar melhor uma raiz de um função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Construindo sucessivas linhas secantes entre dois palpites iniciais.

36 Ao contrário do método de Newton, que requer a derivada da função, o método secante usa uma aproximação diferença finita, tornando-a especialmente valiosa quando os derivados são desafiadores ou impossíveis de calcular.

37 Em cada iteração, o método secante aproxima a raiz extrapolando da inclinação da linha secante formada entre as duas últimas aproximações. Esta inclinação fornece uma estimativa da derivada, permitindo que o método convergir na raiz com apenas avaliações de função, em vez de cálculos derivados explícitos.

38 Enquanto o método secante normalmente converge mais lentamente do que o método de Newton, sua falta de dependência em derivativos pode torná-lo uma escolha preferencial em aplicações complexas, incluindo análise estrutural e modelagem de materiais, onde os derivados exatos podem estar Indisponível.

39 O método secante pode ser pensado como uma aproximação de diferença finita do método de Newton. No entanto, o método secante precede o de Newton.

40 Quando é quase impossível calcular $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, como $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (que pode não ser analíticamente definido), vamos determinar numericamente o Jacobiano com base na aproximação simples

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}$$

Substituindo por.. $\mathbf{J}\mathbf{x}_n)^{-1}$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \underbrace{\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}}_{\simeq J^{-1}(\mathbf{x}_n)} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

41 Contrariamente ao método de Newton, precisaremos de dois palpites iniciais $\mathbf{x}_0$ e.. $\mathbf{x}_1$ para iniciar o método.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
1: procedure SECANT_MÉTODO(f, x_0, x1, tol, max_Iter)
2:     fx0 ← f(x0)
3:     Inicializar valores
4:     fx1 = (x1)
5:     i ← 0
6:     Iterar até a convergência ou o número máximo de iterações alcançadas
7:     while abs(fx1) > tol  &  i < max_iter do
8:         Compute uma nova aproximação com a raiz
9:         x2 ← x1 − fx1 ∗ (x1 − x0)/(fx1 − fx0)
10:        fx2 ← f(x2)
11:        Atualizar valores para a próxima iteração
12:        x0 ← x1
13:        fx0 ← fx1
14:        x1 ← x2
15:        fx1 ← fx2
16:        i ← i + 1
17:    end while
18:    Devolva a raiz e o número de iterações usadas
19:    Retorne x1, i                                   ▷ Último iterate
20: end procedure
```

59.1.3 Explícito

42 Em um Integração explícita Esquema (também conhecido como "passo a passo"'), carga é aplicada incrementalmente e no final de cada incremento, fig. 1. 59.2:

1. Computar o rigidez tangente com base na corrente deslocamentos, esta é a inclinação da curva de carga deslocamento;
2. Inverter o matriz de rigidez e multiplicá-lo pela carga incremental para obter o correspondente incremental deslocamento;
3. Adicione o incremental deslocamento à soma dos anteriores para obter o real deslocamento correspondente à carga real (soma de todas as cargas incrementais anteriores).

43 Uma grande vantagem, uma solução sempre será encontrada

44 Grande desvantagem: no final de cada incremento não verificamos que o equilíbrio entre forças internas e externas está satisfeito. Isso pode resultar em uma solução diferente à medida que a carga aumenta. No entanto, alguns programas avançados verificam o equilíbrio de energia em vez do equilíbrio.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

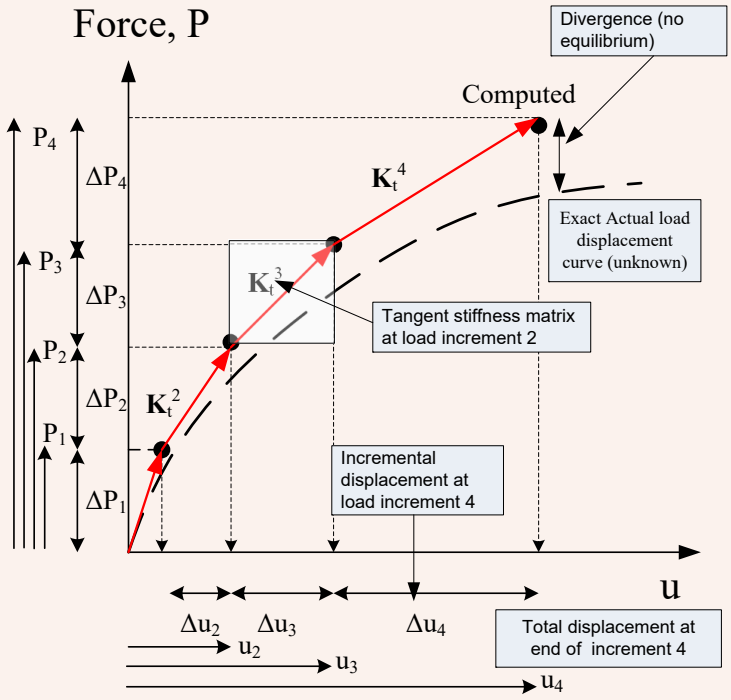


Figura 59.2: Esquema de integração explícito

45 Um paliativo parcial para este problema, é a adoção de pequenos incrementos de carga para minimizar erros.

46 Este método deve ser usado com muito cuidado, pois uma solução sempre será obtida não importa o quão bom ou ruim seja o modelo e seus parâmetros.

47 Infelizmente, existem alguns modelos constitutivos que são muito frágeis quando executados dentro de um esquema implícito de integração, e como resultado eles são usados (ou mal-utilizados) em uma explícita.

59.2 Relação com mecânica estrutural; implícita

48 Métodos implícitos são uma pedra angular de mecânica estrutural, particularmente quando se analisa problemas não lineares onde o equilíbrio precisa ser mantido sob carga.

49 Em análise estrutural, alcançar equilíbrio significa equilibrar forças internas e externas através dos nós de uma estrutura. Este equilíbrio é expresso como uma equação não linear onde o vetor esforço interno depende do deslocamentos, tornando o problema inerentemente não linear.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

50 Nesta seção, exploramos o uso de métodos implícitos, especialmente o método de Newton, para resolver o equilíbrio em análises incrementais de carga. A cada passo, a força residual (a diferença entre externo e esforços internos]) deve se aproximar de zero, significando um estado de equilíbrio.

51 Ao atualizar iterativamente o deslocamentos, os métodos implícitos fornecem uma abordagem sistemática para alcançar esse equilíbrio, garantindo que a solução permaneça estável e precisa durante todo o processo de carregamento.

52 Esta abordagem é essencial para sistemas conservadores, onde as forças são assumidas independentemente de deslocamentos, permitindo-nos simplificar comportamentos estruturais complexos mantendo a precisão confiável.

53 Novamente, nós procuramos resolver a Equação 50.11 Como

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\mathbf{\Delta}} - \overline{\mathbf{F}}^{o}}_{\mathbf{P}^{int}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^{e}}_{\mathbf{P}^{ext}} = 0$$

Ambos $\mathbf{P}_n^{ext}$ e.. $\mathbf{P}_n^{int}$ são determinados a partir do princípio de virtual deslocamento. Desde o vetor interno de força nodal $\mathbf{P}_n^{int}$ é uma função do nodal deslocamentos $\mathbf{u}_n$O problema não é linear.

54 Para uma análise incremental de carga em que o equilíbrio foi (quase) satisfeito no final do incremento nNós temos

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n^{ext} - \mathbf{P}_n^{int} = 0$$

que é a força residual (deve estar se aproximando de zero com o número crescente de iterações, n).

55 Assim usaremos o método de Newton para resolver

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{u}) = 0$$

56 Note que assumimos que as forças são independentes do deslocamentos *Sistema conservador* e ignorando $P - \Delta$ Efeitos.

57 Paralelismo entre algoritmos de controle de carga e análises não lineares é mostrado na tabela 59.1.

59.3 Métodos de integração

58 Dependendo se estamos aplicando uma carga incremental ou incremental deslocamento, o algoritmo vai variar ligeiramente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 59.1: Paralelismo entre o método de quasi-newton em matemática e análise implícita em mecânica estrutural

Aspect	**Método Quasi-Newton (Matemática)**	**Mecânica estrutural (Análise implícita)**
Objetivo	Encontre a raiz da função não linear $f(x) = 0$	Conseguir equilíbrio em sistemas estruturais não lineares
Equação	$f(x) = 0$	$\mathbf{P}^{ext} - \mathbf{P}^{int} = 0$ (Equilíbrio da força)
Adivinho inicial	Valor inicial da raiz x_0	Adivinho inicial $\mathbf{u}_0$
Linearização	Linearizar $f(x)$ perto x_n usando $f'(x)$	Linearize o equilíbrio ao redor $\mathbf{u}_n$ com rigidez tangente $\mathbf{K}_T$
Atualizar regra	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_n)$
Critério de Iteração	Redução de erros, por exemplo, $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq \epsilon$	Redução da força residual, por exemplo, $\lVert \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) \rVert \leq \epsilon$
Convergência Requerimento	Derivado $f'(x)$ Não deveria ser zero	Rigidez tangente $\mathbf{K}_T$ Não deve ser singular
Demanda Computacional	Calcule a função e sua derivada em cada passo	Calcular esforços internos e rigidez tangente matriz em cada etapa
Taxa de Convergência	Convergência quadrática (condições ideais)	Convergência quadrática em condições ideais de equilíbrio
Resultado	Raíz aproximada de $f(x) = 0$	Configuração aproximada de equilíbrio sob cargas aplicadas

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

59.3.1 Controle de carga

59.3.1.1 Método Newton-raphson/rigidez tangente

59 Antes de entrarmos nos detalhes, os dois passos podem ser explicados através da Fig. 59.3.

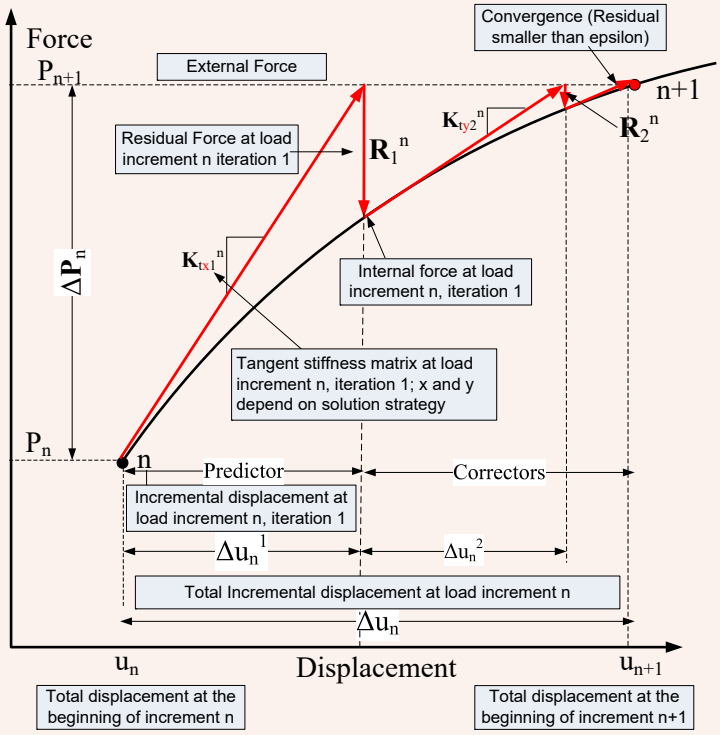


Figura 59.3: O método de Newton explicou (para controle de carga)

Predictor (associado com um incremento de carga) para determinar o incremental deslocamento como no método explícito, que é baseado na matriz inicial rigidez tangente.

Corretor fase em que verificamos o equilíbrio iterativo.

1. Com base no previsto deslocamentos, computar o correspondente esforços internos (não avaliado no método explícito).
2. Calcular a força residual que é a diferença entre o externo e esforços internos (deve ser zero se equilíbrio for alcançado).
3. Se o resíduo é maior do que um usuário especificado critérios de convergência, então atualizar o deslocamento multiplicando o inverso da matriz rigidez tangente (mais sobre isso mais tarde) pela força residual.

CÓPIA PARA REVISÃO

4. Atualize o vetor total. Portanto, para cada incremento de carga, teríamos múltiplas iterações até que o equilíbrio seja satisfeito dentro de uma tolerância numérica.

60 No final de cada incremento de carga, esforços internos deve estar em equilíbrio com os externos. Por isso, o vetor de forças residuais $\mathbf{R}_n^k$ É

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{P}}^{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{P}}^{ext} = 0 \tag{59.3}$$

Onde $\overline{\mathbf{P}}^{int}$ é o vetor de esforços internos, também comumente conhecido como vetor de reação .

61 No início de cada passo $n+1$, começamos do deslocamentos $\overline{\mathbf{u}}_n$ que foram computados na etapa anterior através do equilíbrio, $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ ou $\overline{\mathbf{P}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_n^{ext}$.

62 As forças externas estão agora aumentadas

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{ext} \longrightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{P}}^{ext}$$

e nós procuramos determinar o correspondente deslocamentos $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}$ De tal forma que o equilíbrio será satisfeito

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

63 Dentro do passo atual (identificado através do subscrito) nNós vamos ser iterantes (através do super-escritório k) para alcançar o equilíbrio.

64 Como um palpite inicial para $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0$ Tomamos para ser $\overline{\mathbf{u}}_n$, e baseado na linearização em torno deste estado inicial, temos

$$\overline{\mathbf{P}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

Onde $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1$ é a primeira aproximação para o incremento desconhecido deslocamento, $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1} - \overline{\mathbf{u}}_n$.

65 Alternativamente, começamos de uma linearização da Equação 59.3, Fig. 59.4,

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i}) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^{i} \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = 0 \tag{59.4}$$

Onde i é um contador começando de $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_n$. Observamos isso

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{P}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_T$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

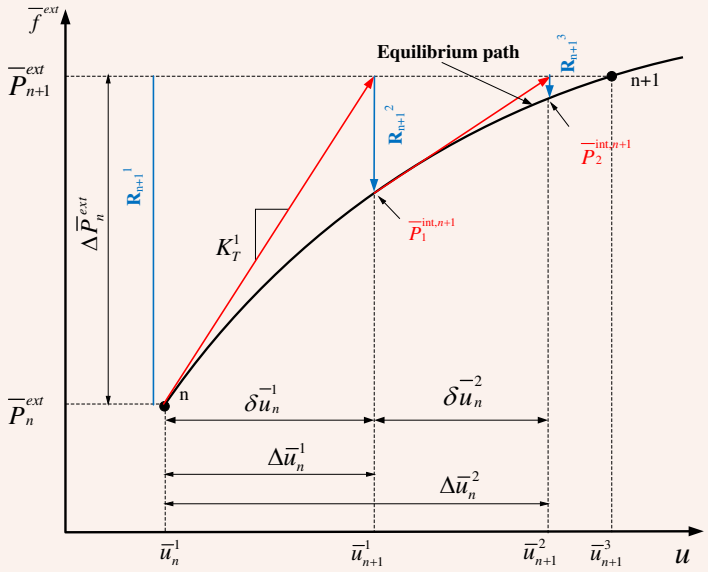


Figura 59.4: Método Newton-Raphson para controle de carga

66 Assumindo que $\overline{\mathbf{P}}^{ext}$ é constante e $\mathbf{K}_T$ é a matriz rigidez tangente, e Equação 59.4 Rende-se

$$\mathbf{K}_T^i \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -\mathbf{R}_{n+1}^i$$

ou

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i \tag{59.5}$$

67 Uma série de aproximações sucessivas produz

$$\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{u}}_n + \Delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i$$

com

$$\Delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = \sum_{k\le i} \delta\overline{\mathbf{u}}_n^k$$

68 Deve-se notar que cada iteração envolve três passos computacionalmente caros:

1. Avaliação de esforços internos (ou reações), $\overline{\mathbf{P}}^{int}$
2. Avaliação da matriz global rigidez tangente, $\mathbf{K}_T$
3. Solução de um sistema de equações lineares

69 Embora este método use o menor número de iterações para convergir, ele pode ser computacionalmente caro (devido à decomposição da matriz necessária em cada incremento). Por isso, pode ser modificado, Table 59.2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 59.2: Variações do método de Newton-Raphson

Método	Rigidez tangente matriz computada em			
	Predictor (x Em K^n_{txi})		Corretor (y Em K^n_{tyi})	
	Incremento	Iteração	Incremento	Iteração
Newton-Raphson	n	1	n	i
Newton-Raphson modificado	n	1	n	1
Inicial Rigidez	1	1	1	1

70 Note que é quase impossível determinar *A priori* Qual desses métodos é mais adequado para um problema particular. Pode-se ter que tentar muitos (e alguns podem ter problemas convergindo).

59.3.1.2 Modificado Newton-Raphson

71 Este método é essencialmente o mesmo que Newton-Raphson; mas na Equação 59.5, ($\mathbf{K}^i_T$) é substituído por $\overline{\mathbf{K}}_T$ Que é A matriz rigidez tangente da primeira iteração de qualquer um:

- Primeiro incremento $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}^1_{T,0}$, Figura 59.5a
- Incremento atual $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}^1_n$, Fig. 59.5b.

e..

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$

72 Em geral, o tempo de CPU necessário para as iterações extras necessárias por este método é menos do que o tempo salvo pela montagem e decomposição do matriz de rigidez para cada iteração. Deve-se mencionar que a matriz rigidez tangente não necessariamente tem que ser a verdadeira matriz rigidez tangente; uma aproximação da matriz verdadeira rigidez tangente ou mesmo a inicial matriz de rigidez geralmente produzirá resultados satisfatórios, embora ao custo de adicional iterações.

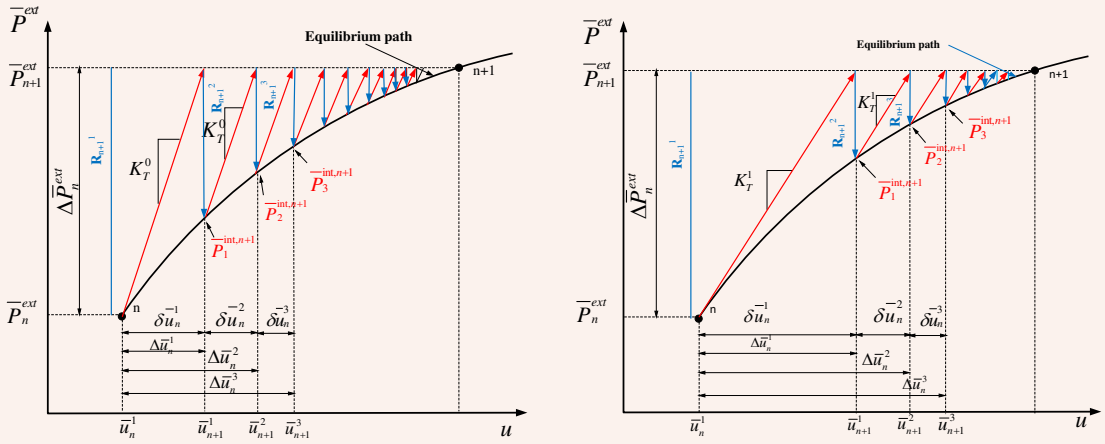
59.3.1.3 Secant Newton

73 Este método é um compromisso entre os dois primeiros. Primeiro buscamos dois deslocamentos por dois ciclos de Newton-Raphson modificado; então um secante para a curva é estabelecido entre esses dois pontos, e um passo é dado ao longo dela, Figura 59.6.

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Na análise (b) No incremento

Figura 59.5: Método de Newton-Raphson modificado, tangente inicial

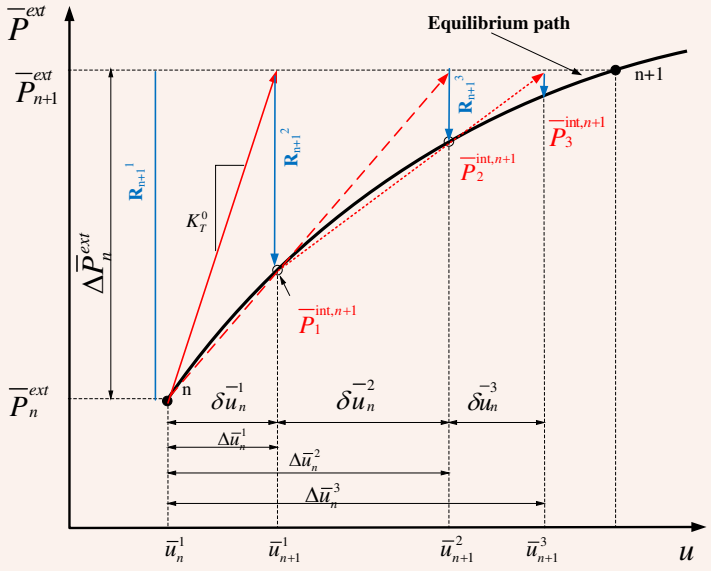


Figura 59.6: Incremental secante, método quase-newton

74 Posteriormente, cada passo será dado ao longo de um secante conectando os dois pontos anteriores.

75 Começando com

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1 = -\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^1$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A inclinação secante pode ser determinada

$$(\mathbf{K}_S^2)^{-1} = -\frac{\delta \overline{\mathbf{u}}_n^1}{(\mathbf{R}_{n+1}^1 - \mathbf{R}_{n+1}^2)}$$

E então..

$$\delta \overline{\mathbf{u}}_n^2 = -(\mathbf{K}_S^2)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^2$$

Este processo pode ser generalizado para

$$\delta \overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_S^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$
$$(\mathbf{K}_S^i)^{-1} = -\frac{\delta \overline{\mathbf{u}}_n^i}{(\mathbf{R}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{R}_{n+1}^i)}$$

59.3.1.4 Critérios de convergência

76 Em todos os métodos anteriores, as iterações são realizadas até que um ou todos de uma variedade de critérios de convergência sejam cumpridos. Os critérios de convergência relativa são opcionalmente aplicados no deslocamentos, cargas e/ou energia incremental para definir as condições de terminação.

77 É muito importante notar que a falta de convergência significa um fracasso local ou global da estrutura. Em outras palavras, o pico de carga corresponde à carga associada com o último incremento.

78 O relativo deslocamento critérios é definido em termos de correções deslocamento, $\delta \overline{\mathbf{u}}^j$, e o incremental atualizado deslocamentos, $\delta \overline{\mathbf{u}}^{j+1}$, Como

$$\varepsilon_u = \frac{\| \delta \overline{\mathbf{u}}^j \|_2}{\| \Delta \overline{\mathbf{u}}^{j+1} \|_2}$$

Onde $\| \ldots \|_2$ é a norma euclidiana.

79 A norma euclidiana, que também é conhecida como L_2 Norma, de um vetor $\mathbf{v}$ é definido como

$$\| \mathbf{v} \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right]^{1/2}$$

Onde N é do tamanho de $\mathbf{v}$.

80 O critério relativo de carga é definido em termos das cargas residuais atualizadas, $\mathbf{R}^{j+1}$, e as reações, $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$, como qualquer um dos dois

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_2}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_\infty}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_\infty}$$

Onde $\| \ldots \|_\infty$ é a norma infinita de $\mathbf{v}$ definido como

$$\| \mathbf{v} \|_\infty = \max \left(\sum_{i=1}^{N} |v_i| \right)$$

Onde N é do tamanho de $\mathbf{v}$.

81 Os critérios de energia incremental relativos são definidos em termos de correções deslocamento $\delta \overline{\mathbf{u}}^j$, as cargas residuais atualizadas $\mathbf{R}^{j+1}$, o incremental atualizado deslocamentos $\Delta \overline{\mathbf{u}}^{j+1}$E as reações atualizadas $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ Como

$$\varepsilon_W = \frac{\delta \overline{\mathbf{u}}^j \cdot \mathbf{R}^{j+1}}{\Delta \overline{\mathbf{u}}^{j+1} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}}$$

onde o numerador é a mudança na energia incremental para iteração jE o denominador é a energia incremental.

59.3.1.5 Tabela sumária

82 Mesa 59.3 compara os vários algoritmos de controle de carga em análise não linear.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 59.3: Comparação de algoritmos de controle de carga em análise não linear

Aspect	Newton-Raphson	Newton-Raphson modificado	Método Secante	Método explícito
Objetivo	Encontrar raiz de função não linear usando matriz rigidez tangente; alcançar o equilíbrio	Similar a Newton-Raphson, mas simplifica ao reutilizar matriz de rigidez	Encontrar raiz sem derivada explícita, usando linhas secantes entre pontos	Aplique cargas de forma crescente com simplificação rigidez tangente
Dependência em Derivado	Requer derivada (rigidez tangente matriz)	Requer inicial rigidez tangente mas não atualiza cada iteração	Aproxima-se derivada usando diferenças finitas	Não é necessário derivar
Precisão	Alta (convergência quadrática)	Moderado (inferior a Newton-Raphson, mas muitas vezes suficiente)	Moderado (mais lento que Newton-Raphson mas evita derivação explícita)	Baixa precisão. A solução pode divergir
Eficiência computacional	Computacionalmente caro devido ao novo cálculo de matriz de rigidez cada iteração	Moderado, reutiliza inicial matriz de rigidez	Moderado. Evita recalculações, menos iterações do que Explicit	Eficiente, mas requer pequenos incrementos de carga para precisão
Processo de Iteração	Ciclo Previsor-Corretor com equilíbrio verifique cada incremento	Usa inicial matriz de rigidez, menos cálculos	Dois palpites iniciais e sucessivas aproximações secantes	Cálculo passo-a-passo sem iteração por passo de carga
Critérios de Convergência	Convergência quadrática perto do palpite inicial correto; requer inclinação não perto de zero	Convergência mais lenta, mas adequada para problemas onde os cálculos são caros	Convergência linear, boa para casos sem derivadas explícitas	Convergência não aplicada; Pode divergir
Aplicações comuns	Problemas estruturais não lineares com derivados disponíveis	Adequado para problemas não lineares com custo de recalculamento moderado	Situações com derivados desconhecidos ou difíceis de calcular	Situações em que a integração explícita do tempo é preferida
Vantagens	Convergência rápida com menos iterações	Reduz a carga computacional com convergência moderada	Evita cálculos derivativos	Sempre produz uma solução
Desvantagens	Alto custo computacional por iteração	Mais iterações necessárias em comparação com Newton-Raphson	Convergência mais lenta, precisa de bons palpites iniciais	Pode produzir soluções imprecisas devido à falta de equilíbrio

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59.3.2 Deslocamento controle

83 O método de controle de carga descrito anteriormente é realmente muito poderoso, e facilmente visualizado. No entanto, às vezes, a solução oscila ou diverge sinais claros de que o equilíbrio não foi restaurado, Figura 59.7.. Na maioria dos casos isso é sinônimo de "falha"em uma carga máxima. Falha pode ser estrutural ou apenas localizada em uma sub-região.

84 Em não linear análise estrutural, métodos de controle de carga são frequentemente empregados para aplicar cargas incrementais e rastrear a resposta das estruturas. No entanto, em casos envolvendo materiais amaciantes[1] ou comportamento pós-pico, técnicas tradicionais de controle de carga podem se tornar problemáticas. Como uma estrutura se aproxima de sua capacidade máxima de carga, a resposta da carga – deslocamento pode exibir características como instabilidades de snap-through ou snaps-back, que tornam a convergência baseada em carga desafiadora ou até mesmo impossível.

85 Para resolver essas questões, métodos de controle deslocamento fornecem uma alternativa valiosa. Em vez de aplicar cargas incrementalmente e buscar as técnicas de controle resultantes deslocamento, deslocamento impor progressivamente deslocamentos e calcular o correspondente esforços internos. Esta abordagem garante estabilidade no processo de análise mantendo o controle sobre deslocamentos mesmo através de regiões onde a curva carga-deslocamento mostra comportamento complexo, não monotônico.

86 Deslocamento controle é particularmente vantajoso na captura de respostas pós-pico e suavizante, que são muitas vezes críticos para entender a ductilidade total ou modos de falha das estruturas, especialmente aqueles com materiais quebradiços ou deformação concreto. Forçando o equilíbrio através do controle deslocamentos, este método aumenta a capacidade de rastrear resposta estrutural além da carga máxima, fornecendo insights essenciais sobre resiliência estrutural, capacidade residual e ductilidade.

87 Sob o controle deslocamento (como explicado mais abaixo), a força de restauração pode sempre ser determinada (a menos que haja um retorno).

88 Para o controle deslocamento, definimos o vetor residual deslocamentos $\mathbf{R}_n^k$ Como

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{u}}^{int}(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{u}}^{ext} = 0 \tag{59.6}$$

Observe a diferença com a Equação 59.3.

89 Por isso, para capturar a resposta pós-pico precisamos adotar numericamente um algoritmo de controle.

90 No início de cada passo $n+1$, começamos das forças $\overline{\mathbf{P}}_n$ que foram computados na etapa anterior através do equilíbrio, $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ ou $\overline{\mathbf{u}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$, Figura 59.8.

[1] Observe a analogia com a figura O.11, como a determinação do resíduo torna-se impossível perto de um pico.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

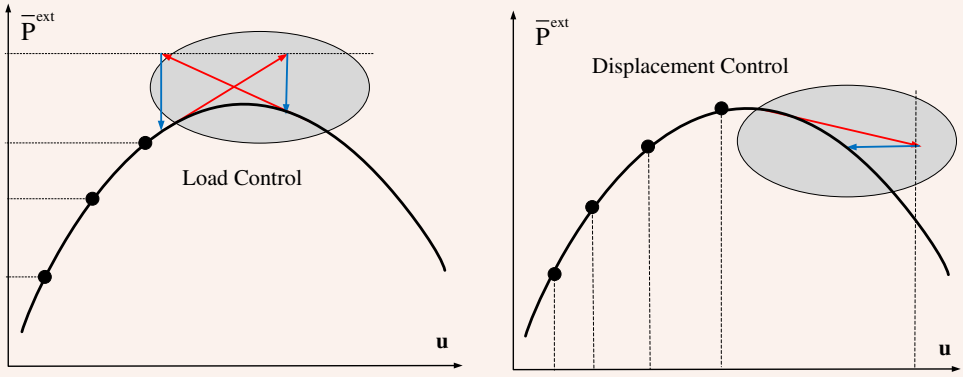


Figura 59.7: O método de Newton. carga versus controle deslocamento

91 O externo deslocamentos agora estão aumentados de $\overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$ para $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{u}}^{ext}$E nós procuramos determinar as forças correspondentes $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}$ através do equilíbrio, $\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0$ ou $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$. Dentro do passo atual (identificado através do subscrito) nNós vamos ser iterantes (através do super-escritório k) a fim de alcançar o equilíbrio, Fig. 59.8

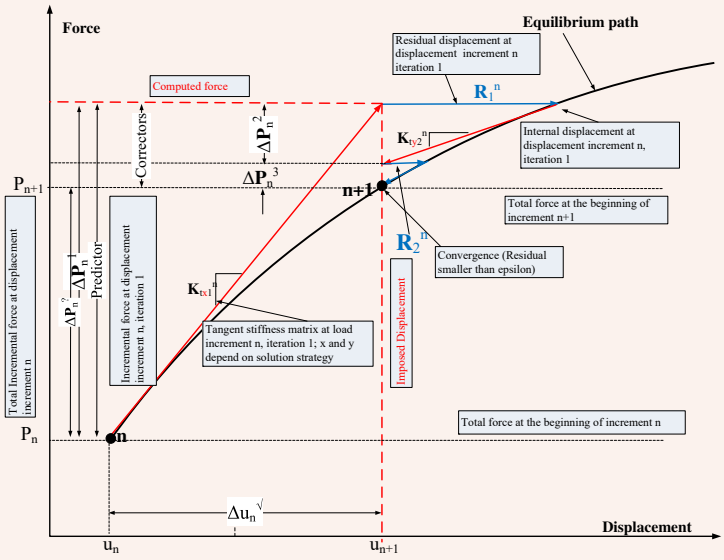


Figura 59.8: O método de Newton. deslocamento controle (compare com a figura 59.3)

92 Como um palpite inicial para $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0$ Tomamos para ser $\overline{\mathbf{P}}_n$, e baseado na linearização em torno deste estado inicial, temos

$$\overline{\mathbf{u}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Onde $\Delta\overline{\mathbf{P}}^1_{n+1}$ é a primeira aproximação para o incremento desconhecido deslocamento, $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1} - \overline{\mathbf{P}}_n$.

93 Alternativamente, começamos de uma linearização da Equação 59.6, Fig. 59.9

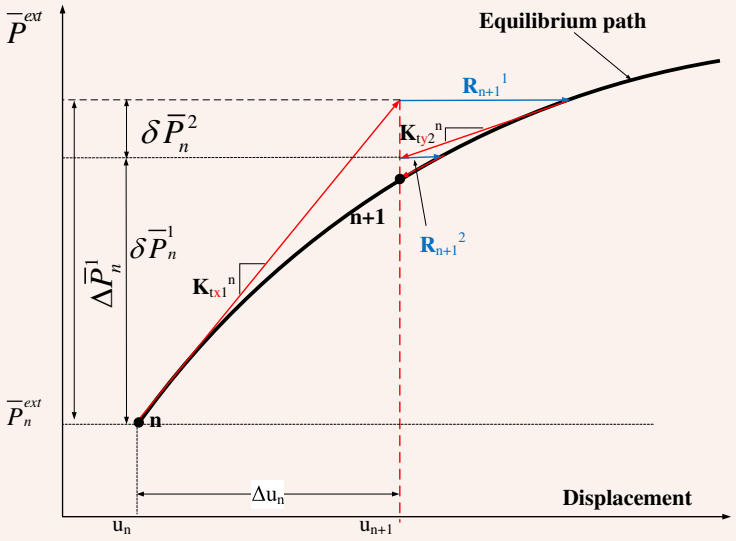


Figura 59.9: Método Newton-Raphson; deslocamento controle

$$\mathbf{R}^k_n(\overline{\mathbf{P}}^{i+1}_{n+1}) \approx \mathbf{R}^k_n(\overline{\mathbf{P}}^i_{n+1}) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}^k_n}{\partial \overline{\mathbf{P}}}\right)^i_{n+1} \delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = 0 \tag{59.7}$$

Onde i é um contador começando de $\overline{\mathbf{P}}^1_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_n$. Observamos isso

$$\frac{\partial \mathbf{R}^k_n}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{K}_T$$

94 Assumindo que $\overline{\mathbf{u}}^{ext}$ é constante e $\mathbf{K}_T$ é a matriz rigidez tangente, Equação 59.7 Rende-se

$$\mathbf{K}^i_T \delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = -\mathbf{R}^i_{n+1}$$

ou

$$\delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = -(\mathbf{K}^i_T)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$

95 Assim, uma série de aproximações sucessivas produz

$$\overline{\mathbf{P}}^{i+1}_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_n + \Delta\overline{\mathbf{P}}^i_n = \overline{\mathbf{P}}^i_{n+1} + \delta\overline{\mathbf{P}}^i_n$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

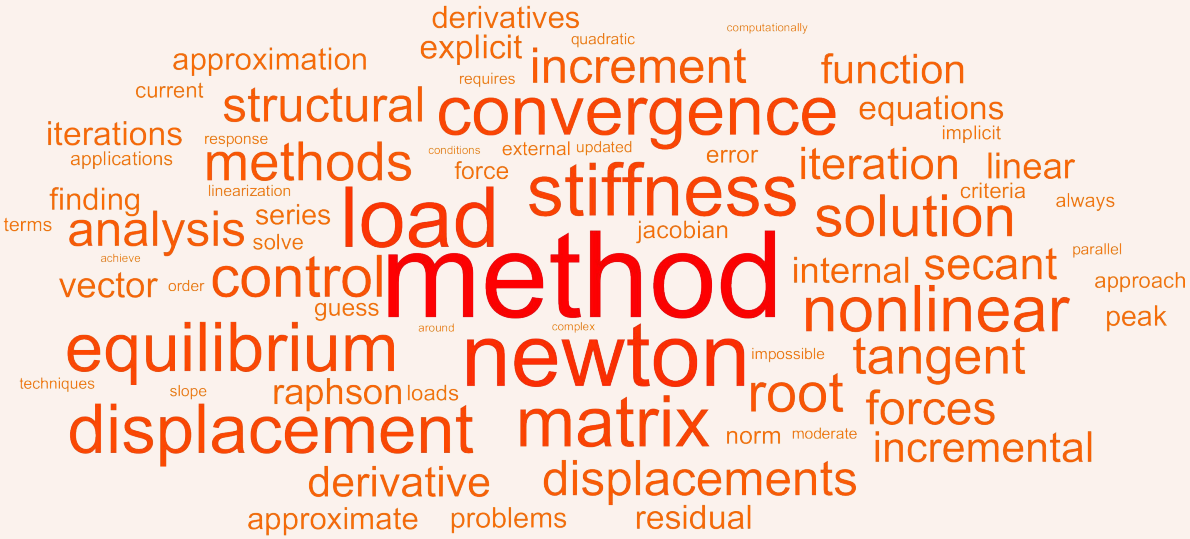
com

$$\Delta \overline{\mathbf{P}}_n^i = \sum_{k \le i} \delta \overline{\mathbf{P}}_n^k$$

Muito rápido.

96 Deve-se notar que cada iteração envolve três passos computacionalmente caros:

1. Avaliação do interno deslocamentos $\overline{\mathbf{u}}^{int}$
2. Avaliação da matriz global rigidez tangente, $\mathbf{K}_T$
3. Solução de um sistema de equações lineares



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 60

Análise não linear; Geométrico

Abstract

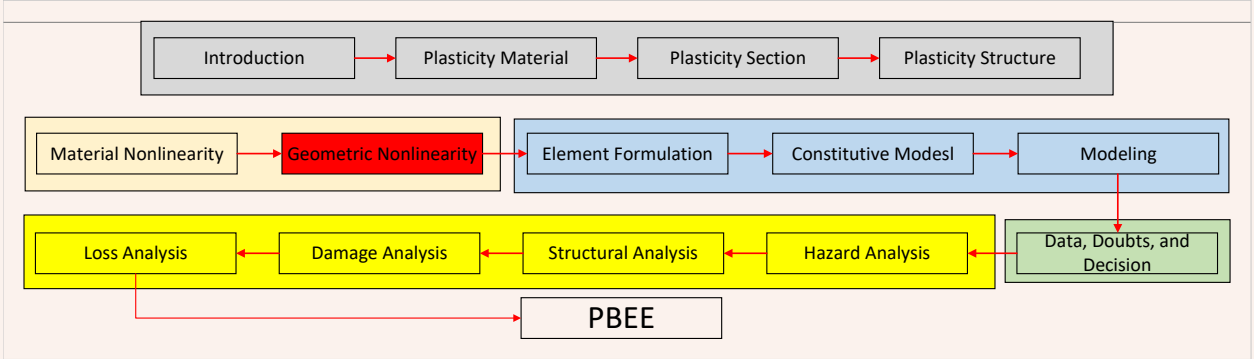
A não linearidade geométrica, uma consideração fundamental em análise estrutural, surge em situações que envolvem grandes deformações e/ou grandes deslocamentos, cada uma requer abordagens analíticas únicas. Grande deformações demanda ajustes no elástico matriz de rigidez, levando a um $P-\delta$ análise, enquanto grande deslocamentos envolvem deformações secundárias que requerem uma $P-\Delta$ Análise. Juntos, esses efeitos não lineares impactam a capacidade de carga da estrutura, estabilidade e rigidez, colocando desafios adicionais em modelos estruturais precisos.

Este capítulo começa com uma derivação abrangente da geometria matriz de rigidez $\mathbf{k}_g$, que complementa o elástico matriz de rigidez para explicar as não-linearidades geométricas induzidas por grandes deformações e deslocamentos. Esta matriz é essencial para prever com precisão as cargas flambagem de elementos estruturais e para avaliar o impacto das cargas laterais em rigidez e esforços internos. As seções subsequentes exploram os efeitos de suavização ou endurecimento que cargas laterais podem impor sobre as estruturas, influenciando características de estabilidade e deformação sob diferentes cenários de carga.

Um algoritmo incremental é introduzido para abordar a natureza iterativa do comportamento estrutural não linear. Esta abordagem passo a passo recalcula estruturalmente rigidez em cada estágio, capturando a resposta dinâmica das estruturas à medida que sofrem deformação. Aplicação prática é enfatizada através de numerosos códigos MATLAB incorporados no capítulo, com scripts alternativos Mathematica fornecidos para aqueles que preferem programação compacta. Estes exemplos permitem aos leitores aplicar os princípios teóricos em casos do mundo real, abrangendo tópicos como a análise flambagem de pilares e pórticos e grandes deflexões em cantilever (vigas, onde não linearidade geométrica desempenha um papel crítico. Através desses exemplos, os leitores obtêm uma compreensão prática de como a não linearidade geométrica afeta o desempenho estrutural, equipando-os para resolver desafios complexos e reais de engenharia efetivamente.

60.1 Geométrico matriz de rigidez 1996
60.1.1 Derivação 1996
60.1.2 Instabilidade elástica; Análise de bifurcação 1999
60.2 Análise explícita incremental 2008
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflexão do cantilever viga 2010
60.3 $P-\Delta$ revisitado 2014
60.3.1 Ex 60.6: Flambagem carga sem $\mathbf{K}_{geom}$ 2014

CÓPIA PARA REVISÃO



60.1 Geométrico matriz de rigidez

1 O geométrico matriz de rigidez é um ingrediente essencial para a análise de estruturas submetidas a grandes deformação (implicação: Grande deslocamentos).

2 Primeiro vamos deduzi-lo, e depois aplicá-lo para calcular numericamente a carga flambagem de estruturas, e então avaliar o seu impacto na rigidez de um elemento (ou seja, amolecer ou endurecer).

60.1.1 Derivação

3 Nesta primeira seção, começamos por derivar o chamado *geométrico matriz de rigidez* que é um ”adicionar” ao elástico derivado matriz de rigidez (§50.2.4) e que conta exclusivamente para o grande deformações (antes ignorado).

60.1.1.1 Forma fraca

4 A formulação original do elemento finito (com a suposição de pequeno deformações) coberto em §50.2 agora deve ser revisitado para prestar contas para o grande deformações.

5 Como antes, para discretizar o problema (através de elemento finito, precisamos primeiro obter a forma fraca do governo equação diferencial, e então aplicar o princípio da energia virtual deformação. De novo, ao contrário de antes, a expressão do deformação será enriquecida por termos adicionais de ordem superior (inicialmente negligenciados).

60.1.1.2 Deformação

6 O deformação em uma viga-pilar pode ser decomposto em duas partes:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Axial: Contando com grandes deslocamentos (de Eq. O.6)

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{u_{,x}}_{\text{First Order}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)}_{\text{Second Order}}$$

Onde u e.. v são o axial e transversal deslocamentos, respectivamente. O termo de segunda ordem é a "contraparte"de escrever a equação do equilíbrio na forma deformada na solução analítica (ou simplesmente contabilizando grande deformações).

Fexural: Da suposição Euler Bernoulli (§22.2)

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d^2v}{dx^2} &=& \frac{M}{EI} \\ \sigma_{xx} &=& -\frac{My}{I} \end{array}\right\} \varepsilon_{xx} = -y\frac{d^2v}{dx^2}$$

7 Reorganizando, o total deformação torna-se

$$\varepsilon_{xx}(x,y) = \underbrace{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{Axial}} \underbrace{- y\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)}_{\text{Flexure}}}_{\text{Small Deformation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}_{\text{Large Deformation}} \tag{60.1}$$

8 Note que o segundo termo é negativo, já que para positivo y (topo) temos compressão tensões, e o primeiro e segundo termos são os componentes familiares de axial e flexão deformações, respectivamente, e o terceiro (que é não linear) é obtido da grande-deflexão deformação-deslocamento.

60.1.1.3 Energia interna deformação

9 A energia virtual (elástica) do elemento (eq original). 50.4"Agora se torna"

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega$$

10 Substituindo o Eq. 60.1 em $U_i^{(e)}$ Nós conseguimos

$$\begin{aligned}\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_L\int_A \Bigg[&\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + y^2\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 \\ &- 2y\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} - y\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\Bigg] E\,dA\,dx\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

11 Lembrando que $\int_A dA = A$, e $\int_A y dA \overset{\text{def}}{=} 0$ e.. $\int_A y^2 dA \overset{\text{def}}{=} I$Descartando o termo de maior ordem e sob a suposição de uma análise independente pré-buckling para carga axial onde

$$P^{(e)} = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow A\frac{du}{dx} = \frac{P^{(e)}}{E}$$

Nós conseguimos

$$\delta U_i^{(e)} = \delta U_i^{(e,a)} + \delta U_i^{(e,f)} \tag{60.2}$$

$$\delta U_i^{(e,a)} = \frac{1}{2}\int_L EA\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{60.3}$$

$$\delta U_i^{(e,f)} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right]dx \tag{60.4}$$

60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$

12 De novo, seguimos o mesmo procedimento que aquele coberto §50.2.4 para derivar o matriz de rigidez de uma viga-pilar submetido a grande deformações. Assumindo uma representação funcional do transverso deslocamentos em termos de quatro juntas deslocamentos

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} \\ \frac{dv}{dx} &= \mathbf{N}_{,x}\overline{\mathbf{u}} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \mathbf{N}_{,xx}\overline{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

onde o funções de forma são dados pelo Eq. 49.3.

13 A energia virtual interna deformação deve ser igual à externa trabalho virtual

$$\begin{aligned} \delta U_i^{(e,f)} &= \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right]dx \\ \delta W_e &= P^{(e)}\int_0^L \left[\left(\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx}\right)\right]dx \\ \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]\mathbf{u}_e &= \mathbf{P} \\ \left[\mathbf{k}_e^{(e)}\right] &= \left[\int_L EI\underbrace{\{\mathbf{N}_{,xx}\}}_{\mathbf{B}^T}\underbrace{\lfloor\mathbf{N}_{,xx}\rfloor}_{\mathbf{B}}dx\right] \\ \left[\mathbf{k}_g^{(e)}\right] &= \left[P^{(e)}\int_L \{\mathbf{N}_{,x}\}\lfloor\mathbf{N}_{,x}\rfloor dx\right] \quad \text{Geometric Stiffness Matrix} \end{aligned} \tag{60.5}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Note que os termos geométricos matriz de rigidez dependem apenas de parâmetros geométricos (comprimento).

14 Substituindo o funções de forma:

$$\mathbf{k}_g^{(e)} = \frac{P}{L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{60.6}$$

15 A relação de equilíbrio sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{P}} \\ \mathbf{k}^{(e)} &= \mathbf{k}_e^{(e)} + \mathbf{k}_g^{(e)} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \end{aligned}$$

Notamos que a estrutura se torna mais rígida para a carga de tração P Aplicado através $\mathbf{K}_g$, e mais fraco em compressão.

60.1.2 Instabilidade elástica; Análise de bifurcação

16 Tendo derivado geométrico matriz de rigidez, vejamos como pode ser usado para determinar a carga flambagem de uma estrutura. Assim, vamos procurar determinar o multiplicador λ de um vetor inicial de carga $\overline{\mathbf{P}}^*$ (que pode ser unidade) obtida a partir de uma análise elástica linear de primeira ordem que causará flambagem,

$$\overline{\mathbf{P}}_{cr} = \lambda\overline{\mathbf{P}}^*$$

17 Como o geométrico matriz de rigidez é proporcional ao esforços internos,

$$\mathbf{K}_g = \lambda\mathbf{K}_g^*$$

Onde $\mathbf{K}_g^*$ corresponde ao geométrico matriz de rigidez para a carga de referência $\overline{\mathbf{P}}^*$ (geralmente definido para unidade).

18 Desde o elástico matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$ permanece uma constante, podemos escrever

$$(\mathbf{K}_e + \lambda\mathbf{K}_g^*)\overline{\mathbf{u}} - \underbrace{\lambda\overline{\mathbf{P}}^*}_{\overline{\mathbf{P}}_{cr}} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 O deslocamentos são dados por sua vez

$$\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)^{-1} \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

e para que o deslocamentos tendesse ao infinito (i.e. flambagem/bifurcação/instabilidade), então

$$|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0 \Rightarrow |\mathbf{K}_g^{*-1} \mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Que é um problema de autovalor, do qual podemos resolver os autovalores $\boldsymbol{\lambda}$.

20 No entanto, desde que $\mathbf{K}_g^*$ tem alguns termos zero ao longo da diagonal (Eq. 60.6), usamos uma formulação alternativa

$$|\mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_g^* + \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}| = 0$$

No entanto, $\mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_g^*$ Pode não ser simétrico.

21 O valor mais baixo de λ, λ_{crit} dará a carga flambagem para a estrutura e as cargas flambagem serão dadas por

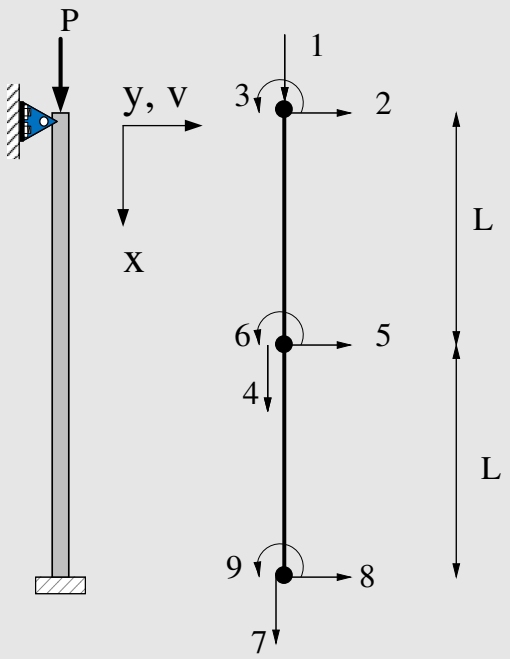
$$\overline{\mathbf{P}}_{CRIT} = \lambda_{CRIT} \overline{\mathbf{P}}^*$$

60.1.2.1 Ex 60.1: Pilar flambagem

Procuramos numericamente determinar a carga flambagem de um eixo fixo pilar, e comparar os resultados com a solução analítica de §29.3.2.1.3. O elástico e geométrico matrizes de rigidez são dados por

$$\mathbf{k}_e^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_g^1 = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A estrutura é matrizes de rigidez $\mathbf{K}_e$ e.. $\mathbf{K}_g$ Agora pode ser montado a partir das rigidezes dos elementos. Eliminando linhas e pilares 2, 7, 8, 9 correspondendo a zero deslocamentos no pilar, nós obtemos

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -6L & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{-P}{L}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15}L^2 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{4}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Notando que neste caso $\mathbf{K}_g^* = \mathbf{K}_g$ para $P = 1$, o determinante $|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0$ leva a

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4L^2 - \frac{2}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} \\ 5 & 0 & 0 & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 24 - \frac{12}{5}\frac{\lambda L^2}{EI} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} & 0 & 8L^2 - \frac{4}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} \end{array} = 0$$

Em seu ponto, podemos resolver numericamente ou algebricamente. Vamos ser corajosos o suficiente e seguir com o segundo: Apresentando $\phi = \frac{AL^2}{I}$ e.. $\mu = \frac{\lambda L^2}{EI}$, o determinante torna-se

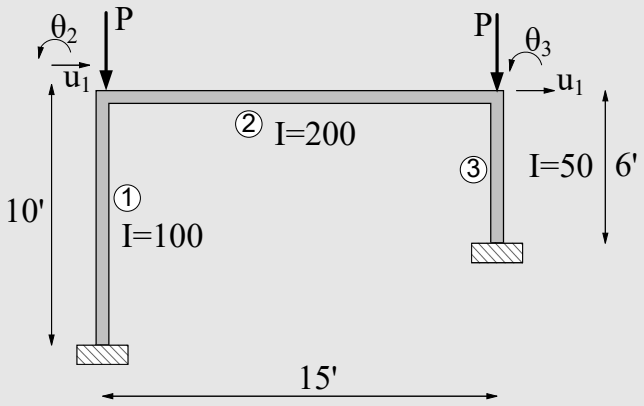
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2\left(2 - \frac{\mu}{15}\right) & -6L + \frac{\mu}{10} & 2 + \frac{\mu}{30} \\ 5 & 0 & 0 & -6L + \frac{\mu}{10} & 12\left(2 - \frac{\mu}{5}\right) & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 + \frac{\mu}{30} & 0 & 4\left(2 - \frac{\mu}{15}\right) \end{array} = 0$$

Expandindo o determinante, obtemos a equação cúbica em μ $3\mu^3 - 220\mu^2 + 3,840\mu - 14,400 = 0$ E a raiz mais baixa desta equação é $\mu = 5.1772..$ Daí a carga flambagem do pilar de comprimento $2L$ É $P_{cr} = \lambda = \frac{5.1772EI}{L^2}$ A solução exata para um pilar de comprimento L É $P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2}EI = \frac{(4.4934)^2}{(2L)^2}EI = 5.0477\frac{EI}{L^2}$ Assim, o valor numérico é cerca de 2,6 por cento maior do que o exato.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

60.1.2.2 Ex 60.2: Pórtico flambagem; Solução Matlab



O menor fator de amplificação de carga flambagem λ é igual a 2, 017 Kips.

Solução Matlab

```
% Main Function
% zero the matrices
k=zeros(6,6,3) ; K=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Structural properties units : in^2 , in^4 , and ksi
A=[24.5 34.6 18]; II=[100 200 50];EE=29000;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [k(:,:,1),K(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff(EE, II(1)
   ,A(1),i, j ) ;
% Element 2
i =j ;     j =[180,120]; [k(:,:,2),K(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff(EE, II(2)
   ,A(2),i ,j ) ;
% Element 3
i =j;      j =[180, 48]; [k(:,:,3),K(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=stiff(EE, II(3)
   ,A(3),i ,j ) ;
% Define ID matrix % Note that this is the transpose of what we use
ID=[-4 5 -6; 1 -7 2;1 -8 3; -9 -10 -11] ;
% Determine the LM matrix
LM=[-4 -5 -6 1 -7 2; 1 -7 2 1 -8 3; 1 -8 3 -9 -10 -11];
% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
      for r=1:6
            lr=abs(LM(elem,r)) ;
            for c=1:6
                  lc=abs(LM(elem,c)) ;
                  Kaug(lr , lc )=Kaug(lr ,lc)+K(r,c ,elem ) ;
            end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
      end
end
Ktt=Kaug (1:3 ,1:3 );
P=[1 0 1];
% zero the matrices
g=zeros(6,6,3) ; G=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [g(:,:,1),G(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=gstiff(P(1),i,
   j ) ;
% Element 2
i =[0,120]; j =[180,120]; [g(:,:,2),G(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=gstiff(P(2),i
   ,j ) ;
% Element 3
i =j;      j =[180, 48]; [g(:,:,3),G(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=gstiff(P(3),i,
   j ) ;
% Assemble augmented geometric stiffness matrix
Gaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r)) ;
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c)) ;
         Gaug(lr,lc)=Gaug(lr,lc)+G(r,c,elem) ;
      end
   end
end
Gtt=Gaug (1:3,1:3);
I=eye(3);
M=inv(Gtt).*Ktt          % try this first if not workable go to  M=inv(
   Ktt).*Gtt
[V,pcrit]=eig(M,-I)
%Stiffness Function
function [k ,K,Gamma]= stiff(EE, II ,A, i , j )
% Determine the length
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)   0           0          0  0 ;
      -sin(alpha)  cos(alpha)   0           0          0  0 ;
                0           0   1           0          0  0 ;
                0           0   0  cos(alpha) sin(alpha)  0 ;
                0           0   0 -sin(alpha) cos(alpha)  0 ;
                0           0   0           0          0  1 ] ;
% form element stiffness matrix in local coordinate system
EI=EE*II ; EA=EE*A;
k= [EA/L,         0,         0 , EA/L,          0,        0 ;
      0 , 12*EI/L^3,   6*EI/L^2,    0, -12*EI/L^3,  *EI/L^2 ;
       0,  6*EI/L^2,     4*EI/L,    0,  -6*EI/L^2,   2*EI /L;
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
   -EA/L,         0,          0, EA/L,          0,         0;
       0, 12*EI/L^3, -6*EI /L^2,    0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
       0,  6*EI/L^2,     2*EI/L,    0, -6*EI /L^2,     4*EI/L ] ;
% Element stiffness matrix in global coordinate system
K=Gamma'* k*Gamma;
end
% Geometric Stiffness Function
function [ g,G,Gamma ]= gstiff(P,i,j)
% Determine the l ength
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Element  geometric stiffness matrix in local  coordinate  system
g=-P/L*[0     0         0    0      0       0  ;
        0   6/5      L/10    0   -6/5      L/10;
        0  L/10  2*L^2/15    0  -L/10   -L^2/30;
        0     0         0    0      0       0   ;
        0  -6/5     -L/10    0    6/5     -L/10;
        0  L/10   -L^2/30    0  -L/10   2*L^2/15 ];
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)  0           0           0  0 ;
       -sin(alpha)  cos(alpha)  0           0           0  0 ;
                 0           0  1           0           0  0 ;
                 0           0  0   cos(alpha)   sin(alpha)  0 ;
                 0           0  0  -sin(alpha)   cos(alpha)  0 ;
                 0           0  0           0           0  1 ] ;
%Element  geometric stiffness matrix in global  coordinate  system
G=Gamma'* g*Gamma;
end
```

60.1.2.3 Ex 60.3: Pórtico flambagem; Solução matemática

Solução Matemática

```
(* Initialize constants *)
a1=0 a2=0 a3=0 i1=100 i2=200 i3=50 l1=10 12 l2=15 12 l3=6 12 e1=29000 e2=
   e1 e3=e1
(* Define elastic stiffness matrices *)
ke[e_,a_,l_,i_]:={
{e a/l  , 0          , 0         , -e a/l , 0          , 0         },
{0      , 12 e i/l^3 , 6 e i/l^2 , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2 },
{0      , 6 e i/l^2  , 4 e i/l   , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l   },
{-e a/l , 0          , 0         , e a/l  , 0          , 0         },
{ 0     , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
{ 0     , 6e i/l^2   , 2 e i/l   , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l   }
   }
```

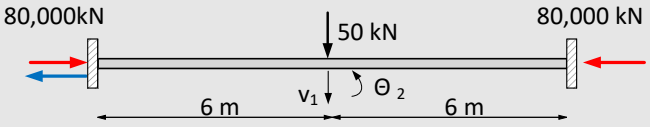
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
ke1=ke[e1,a1,l1,i1]; ke2=ke[e2,a2,l2,i2]; ke3=ke[e3,a3,l3,i3]
(* Define geometric stiffness matrices *)
kg[l_,p_]:=p/l{
{0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10    , 0
   , - 6/5  , l/10     },
{0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0        , 0
   , 0      , 0        },
{0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0
   , - l/10 , 2 l^2/15 } }
kg1=kg[l1,1]
kg3=kg[l3,1]
(* Assemble structure elastic and geometric stiffness matrices *)
ke={
{ ke1[[2,2]]+ke3[[2,2]] , ke1[[2,3]]            , ke3[[2,3]]
   },
{ ke1[[3,2]]            , ke1[[3,3]]+ke2[[3,3]] , ke2[[3,6]]
   },
{ ke3[[3,2]]            , ke2[[6,3]]            , ke2[[6,6]]+ke3[[3,3]]
   } }
kg={
{ kg1[[2,2]]+kg3[[2,2]] , kg1[[2,3]] , kg3[[2,3]]  },
{ kg1[[3,2]]            , kg1[[3,3]] , 0           },
{ kg3[[3,2]]            , 0          , kg3[[3,3]]  } }
(* Determine critical loads in terms of p (note p=1) *)
p=1
keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen]]; modshap=N[
   Eigensystems[keigen]]
```

60.1.2.4 Ex 60.4: Impacto da carga axial na deformação flexural

Neste exemplo, procuramos avaliar o impacto da compressão ou tração forças axiais na rigidez de uma viga pilar. Este problema foi resolvido analiticamente em §29.2.2.



Usando dois elementos para a viga pilar, os únicos graus de liberdade são a deflexão e rotação no meio do espaço (descuidamos da deformação axial).

Matlab

```
clear; close all;clc;
%% Initialization for a 2 element structure
% zero the matrices
k=zeros(6,6,2);K=zeros(6,6,2);kg=zeros(6,6,2);Kg=zeros(6,6,2);Gamma=zeros
   (6,6,2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% Structural properties m^2, m^4, and Pa
A=1;II=2e-3;EE=2e9;
% Elements' axial loads
Fax=-8e4*[1,1];
%% Call the function stiff to compute the element stiffness matrices and
   the rotation ones
% Element 1
i=[0,0];j=[6,0];
[k(:,:,1),K(:,:,1),kg(:,:,1),Kg(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,
   Fax(1));
% Element 2
i=j;j=[12,0];
[k(:,:,2),K(:,:,2),kg(:,:,2),Kg(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,
   Fax(2));
%% Determine the LM matrix
LM=[
4 5 6 1 2 3;
1 2 3 7 8 9];
%% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(9);Kgaug=zeros(9);
for elem=1:2
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r));
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c));
                  Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
                  Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
            end
   end
end
%% Extract the structures Stiffness Matrix
Ktt=Kaug(1:3,1:3);Kgtt=Kgaug(1:3,1:3);
%% Find buckling load multiplier
B=inv(Ktt)*Kgtt;lambda=-1*eye(3,1)./eig(B);
%% Assemble the load vector for the unrestrained node
P=[0,-50,0];
%% Solve for the Displacements in meters
Displacements=inv(Ktt+Kgtt)*P'
%% Solve for the internal forces and do not forget to include the fixed
   end actions
dis_global(:,:,1)=[0,0,0,Displacements(1:3)'];dis_global(:,:,2)=[
   Displacements(1:3)',0,0,0];
for elem=1:2
  dis_local=Gamma(:,:,elem)*dis_global(:,:,elem)';
  int_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local
end
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
\red{from above exampes}
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Matemática

```
(* Initialize constants *)
OpenWrite["mat.out"]; a1=1; a2=1; i1=1 l^3/12;i2=i1; l1=12;l2=12; e1=200000;e2=e1;e3=e1;
theta1=N[Pi/8];theta2=Pi-theta1; load i1=i i2=i1 l=6 l1=l l2=6 p=-80000 load={-50,0}
(* Define elastic stiffness matrices *)
ke[e_,a_,l_,i_]:={
  {e a/l  , 0           , 0          , -e a/l , 0           , 0
   },
  {0      , 12 e i/l^3  , 6 e i/l^2  , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2
   },
  {0      , 6 e i/l^2   , 4 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l
   },
  {-e a/l , 0           , 0          , e a/l  , 0           , 0
   },
  { 0     , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
  { 0     , 6e i/l^2    , 2 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l
   } }
ke1=N[ke[e,a1,l1,i1]]; ke2=N[ke[e,a2,l2,i2]]
(* Assemble structure elastic stiffness matrices *)
ke=N[{
  { ke1[[5,5]]+ke2[[2,2]], ke1[[5,6]]+ke2[[2,3]]},
  { ke1[[6,5]]+ke2[[3,2]], ke1[[6,6]]+ke2[[3,3]]} }]
WriteString["mat.out",MatrixForm[ke1]]; WriteString["mat.out", MatrixForm[ke2]];
WriteString["mat.out",MatrixForm[ke]]
(* Define geometric stiffness matrices *)
kg[p_,l_]:=p/l {
  {0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10 , 0 , - 6/5  , l/10     },
  {0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0  , 0 , 0      , 0        },
  {0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0 , - l/10 , 2 l^2/15 } }
kg1=N[kg[p,l1]]; kg2=N[kg[p,l2]]
(* Assemble structure geometric stiffness matrices *)
kg=N[{
  { kg1[[5,5]]+kg2[[2,2]], kg1[[5,6]]+kg2[[2,3]]},
  { kg1[[6,5]]+kg2[[3,2]], kg1[[6,6]]+kg2[[3,3]]} }]
(* Determine critical loads and normalize wrt p  *)
keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen] p]
(* Note that this gives lowest pcrit=1.11  10^6, exact value is 1.095  10^6 *)
(* Add elastic to geometric structure stiffness matrices *)
k=ke+kg
(* Invert stiffness matrix and solve for displacements *)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
km1=Inverse[k] dis=N[km1 . load]
(* Displacements of element 1*)
dis1={0, 0, 0, 0, dis[[1]], dis[[2]]}
k1=ke1+kg1
(* Member end forces for element 1 with axial forces  *)
endfrc1=N[k1 . dis1]
(* Member end forces for element 1 without axial forces  *)
knopm1=Inverse[ke]; disnop=N[knopm1 . load]; disnop1={0, 0, 0, 0,
 disnop[[1]], disnop[[2]]}
(* Displacements of element 1*)
endfrcnop1=N[ke1 . disnop1]
```

Invertendo as matrizes geométricas montadas.

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.00012123 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.0001125 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.000104944 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

O membro termina as forças para o elemento 1

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{lft} \\ V_{lft} \\ M_{lft} \\ P_{rgt} \\ V_{rgt} \\ M_{rgt} \end{array} \right\} = \left[[\mathbf{k}_e^1] + [\mathbf{k}_g^1] \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{lft} \\ v_{lft} \\ \theta_{lft} \\ u_{rgt} \\ v_{rgt} \\ \theta_{rgt} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 79.8491 \\ 0. \\ -25. \\ 79.8491 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 75. \\ 0. \\ -25. \\ 75. \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 70.8022 \\ 0. \\ -25. \\ 70.8022 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

A força de compressão aumentou o deslocamentos e os momentos finais, ao passo que a tração endurece a estrutura reduzindo-os.

60.2 Análise explícita incremental

22 Com referência aos diferentes tipos de análise não linear, Fig. 54.5 Agora focamos na análise incremental (tipo 3).

23 Começando com

$$\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \right] \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$

Um procedimento simples para resolver essa equação não linear é usar um procedimento passo a passo ou incremental. A formulação incremental linearizada correspondente pode ser obtida aplicando um operador incremental Δ

$$\{\Delta \overline{\mathbf{u}}\}_i = \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \right]_i^{-1} \left\{ \Delta \overline{\mathbf{P}} \right\}_i$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

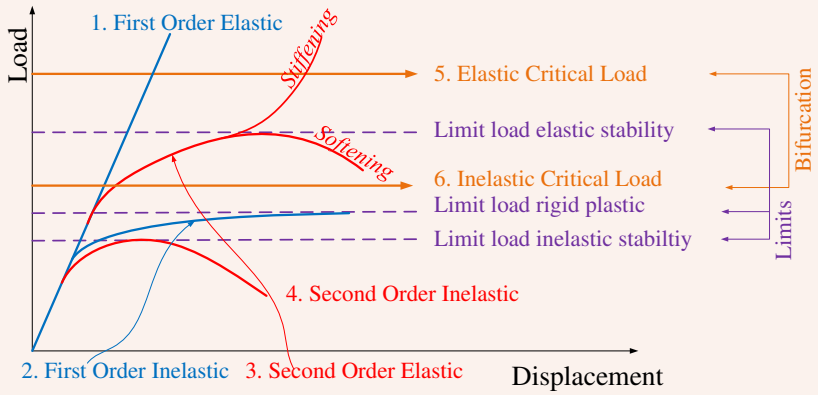


Figura 60.1: Níveis de análise estrutural

24 O método está ilustrado na figura. 60.2 (que é uma versão simplificada do correspondente em Fig. 59.2).

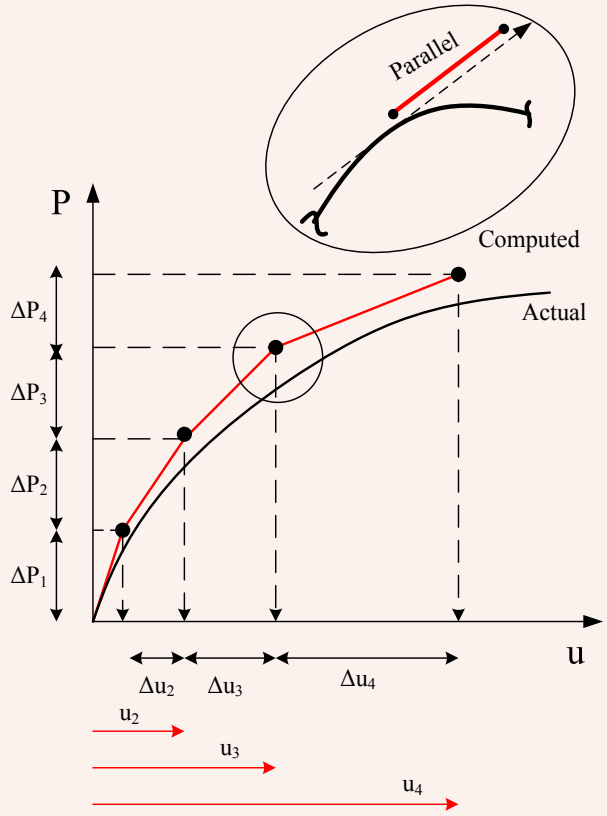


Figura 60.2: Explícita abordagem incremental à não linearidade geométrica

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

25 O procedimento é muito simples, e pode ser facilmente programado:

1. Aplique uma carga incremental ΔP_i em cada incremento i.
2. No final de cada incremento:
   (a) Atualize o total deslocamento $u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$.
   (b) Atualize a geometria $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$, obter novos comprimentos.
   (c) Atualize a matriz de transformação.
   (d) Atualize o elástico e geométrico matriz de rigidez
3. Note que não estamos verificando o equilíbrio no final de cada incremento (mais sobre isso mais tarde), e se tomarmos passos suficientemente pequenos, a solução não deve divergir muito.
4. A atualização da geometria também deve cuidar $P - \Delta$ Efeitos.

26 Tenha em mente que esta é uma análise incremental, cada análise é associada com um incremento da carga. Em cada um de cada incremento:

$$\begin{array}{rll} \text{Displacements} & \Delta\mathbf{u}^i; & \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i \\ \text{Nodal coordinates} & & \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i \\ \text{Forças internas} & \Delta\mathbf{F}^i; & \mathbf{F}^i = \mathbf{F}^{i-1} + \Delta\mathbf{F}^i \\ \text{Total Reactions} & \Delta\mathbf{R}^i; & \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-1} + \Delta\mathbf{R}^i \end{array}$$

E no início de cada incremento precisamos recomputar:

- Comprimentos, cossenos de direção, matriz de transformação.
- Elemento baseado em coordenadas nodais atualizadas e matriz de transformação.
- Geométrico matriz de rigidez baseado no total atualizado força axial (do elemento esforços internos) para cada elemento.

Use $\mathbf{k}$ e.. $\mathbf{k}_g$ para calcular o esforços internos.

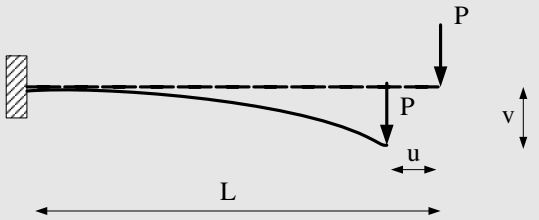
60.2.1 Ex 60.5: Grande deflexão do cantilever viga

A solução para uma grande deflexão de um cantilever viga1 não pode ser obtida a partir da teoria elementar viga, já que os pressupostos básicos não são mais válidos. Especificamente, a teoria elementar negligencia o quadrado da primeira derivada na fórmula de curvatura e não fornece nenhuma correção para o encurtamento do braço momento como extremidade carregada dos desvios viga. Para grandes cargas finitas, ele dá deflexões maiores do comprimento da viga! O quadrado da primeira derivada e fatores de correção o encurtamento do braço momento tornar-se a principal contribuição para a solução de grandes problemas de deflexão. Considerando que a solução analítica é dada em §29.2.3, nós buscamos uma solução numérica. Nós presumimos $E = 800\ kN/mm^2$, $L = 4{,}000$ mm, $I_z = 1e7\ mm^4$, A=50 mm^2, P= 5.000 kN. Vamos discretizar a barra em 5 membros de comprimento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

igual e usando incremento de -10kN e x O eixo vai da extremidade livre (esquerda). Vamos supor que a flexão não irá alterar o comprimento da viga (inextensível). Nós procuramos traçar o fim livre normalizado nodal deslocamentos (u e.. v) em termos de carga sem dimensão.




```
% Load increment
dP=10000;
stepNo=5000000/dP;
% zero the matrices
nodeCoord=zeros(6,2);
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);kg=zeros(6,6,5);Kg=zeros(6,6,5);Gamma=zeros
    (6,6,5);
P=zeros(1,stepNo);dis_global=zeros(15,stepNo);deltaDis_global=zeros(5,6);
int_forces=zeros(6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
A=50e-6;II=1e7*1e-12;EE=800e9; % convert to meters
% Determine the LM matrix
LM=[
16 17 18 13 14 15;
13 14 15 10 11 12;
10 11 12  7  8  9;
 7  8  9  4  5  6;
 4  5  6  1  2  3];
% Assemble the load vector for the unrestrained node
deltaP=[0 (-1*dP) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Initial elements axial forces
axF=zeros(5,1);
% Initial node coordinates
for node=1:6
  nodeCoord(node,:)=[(node-1)*0.8,0];
end
%% Incremental analysis
for step=1:stepNo
   P(step)=step*dP;
% Call the function stiff_1 to compute the element stiffness matrices and
     the rotation ones.
   for elem=1:5
      i=nodeCoord(elem,:);
      j=nodeCoord(elem+1,:);
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),kg(:,:,elem),Kg(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)
    ]=stiff_1(EE,II,A,i,j,axF(elem));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
   end
% Assemble augmented stiffness matrix
   Kaug=zeros(18);Kgaug=zeros(18);
%
   for elem=1:5
      for r=1:6
         lr=abs(LM(elem,r));
         for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
            Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
         end
      end
   end
% Extract the structures Stiffness Matrix
   Ktt=Kaug(1:15,1:15);Kgtt=Kgaug(1:15,1:15);
% Solve for the Displacements in meters
   deltaDis=inv(Ktt+Kgtt)*deltaP';
% Update nodal displacements
   if step==1
      dis_global(:,step)=deltaDis;
   else
      dis_global(:,step)=dis_global(:,step-1)+deltaDis;
   end
% Solve for the internal forces
   deltaDis_global(1,:)=[0,0,0,deltaDis(13:15)'];
   for elem=2:5
      deltaDis_global(elem,:)=[deltaDis((15-(elem-1)*3+1):(15-(elem-2)*3)
   )',deltaDis((15-elem*3+1):(15-(elem-1)*3))'];
   end
%
   for elem=1:5
      dis_local=Gamma(:,:,elem)*deltaDis_global(elem,:)';
      deltaInt_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local;
      int_forces(:,elem)=int_forces(:,elem)+deltaInt_forces;
   end
% Update axial forces
   for elem=1:5
      axF(elem)=int_forces(4,elem);
   end
% Update node coordinates
   for node=2:6
      nodeCoord(node,:)=nodeCoord(node,:)+deltaDis((15-3*(node-1)+1)
   :(15-3*(node-1)+2))';
   end
end
%
plot(P*4^2/(EE*II),(4+dis_global(1,:))/4);
hold on
```

CÓPIA PARA REVISÃO

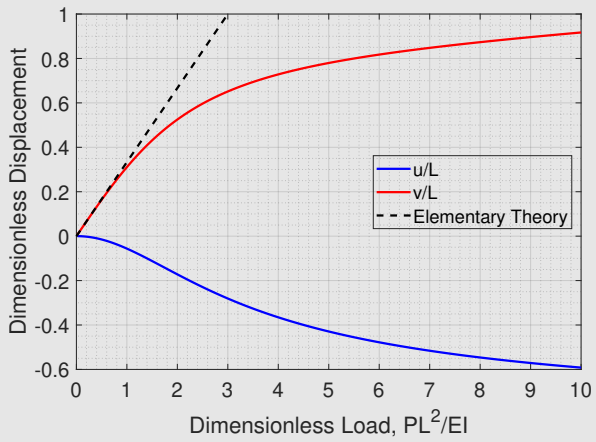
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
plot(P*4^2/(EE*II),(-dis_global(2,:))/4,'r--');
xlabel('Dimensionless Load, PL^2/EI');
ylabel('Dimensionless Displacement');
legend('u/L','v/L');
%
    ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
% Determine the length
L=sqrt((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2);
% Compute the angle theta
alpha=atan2(j(2)-i(2),j(1)-i(1));
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[cos(alpha) sin(alpha) 0 0 0 0;
-sin(alpha) cos(alpha)  0 0 0 0;
0 0 1 0 0 0;
0 0 0 cos(alpha) sin(alpha) 0;
0 0 0 -sin(alpha) cos(alpha) 0;
0 0 0 0 0 1];
%form stiffness matrix
EI=EE*II;EA=EE*A;
k=[EA/L,         0,         0, -EA/L,          0,         0;
0,    12*EI/L^3,  6*EI/L^2,     0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2;
0,     6*EI/L^2,    4*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L;
-EA/L,          0,         0,  EA/L,          0,         0;
0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,     0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L];
% Stiffness matrix global
K=Gamma'*k*Gamma;
% Form geometric stiffness matrix
kg=(P/(30*L))*[0, 0,   0,      0, 0,    0;
0, 36,  3*L,    0, -36,  3*L;
0, 3*L, 4*L^2,  0, -3*L, -1*L^2;
0, 0,   0,      0, 0,    0;
0, -36, -3*L,   0, 36,   -3*L;
0, 3*L, -1*L^2, 0, -3*L, 4*L^2];
% Geometric stiffness matrix global
Kg=Gamma'*kg*Gamma;
end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



60.3 $P-\Delta$ revisitado

27 Devemos diferenciar entre:

$P-\Delta$ refere-se ao efeito de segunda ordem causado pelas cargas axiais e deformações em uma estrutura. Este efeito ocorre porque as deflexões da estrutura sob cargas criam momentos adicionais, que por sua vez causam deformações adicionais. Este efeito pode ser significativo em estruturas altas ou finas, onde as deflexões são relativamente grandes.

$P-\delta$ refere-se à não linearidade geométrica da estrutura causada pelo deslocamento da própria estrutura. Este efeito está relacionado ao fato de que o rigidez de uma estrutura muda à medida que a estrutura se deforma, que por sua vez afeta a distribuição de esforços internos e tensões. Neste caso, devemos usar o geométrico matriz de rigidez.

28 Se muitos (finitos) elementos modelar um pilar, no limite pode-se ignorar $\mathbf{K}_g$E eventualmente, e executar um $P-\Delta$ Analisar e capturar a carga correspondente que teria sido necessária $P-\delta$ (e assim $\mathbf{K}_g$) análise, Fig. 60.3.

60.3.1 Ex 60.6: Flambagem carga sem $\mathbf{K}_{geom}$

Nós procuramos estimar a carga de carregamento P_{cr}^{est} de um pilar fixado em uma extremidade, livre na outra por executar 10 *Seqüência secante de primeira ordem* Análise (i.e. sem usar $\mathbf{k}_g$, só $\mathbf{k}_e$). No final de cada análise, ajustaremos as coordenadas nodais para refletir a mudança na geometria. Daí a carga de análise i Will $P = i.\Delta P$.. Nós deveríamos levar $\Delta P = P_{cr}^{exact}/20$.. Para cada análise i Note que instabilidade/flambagem ocorre de repente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

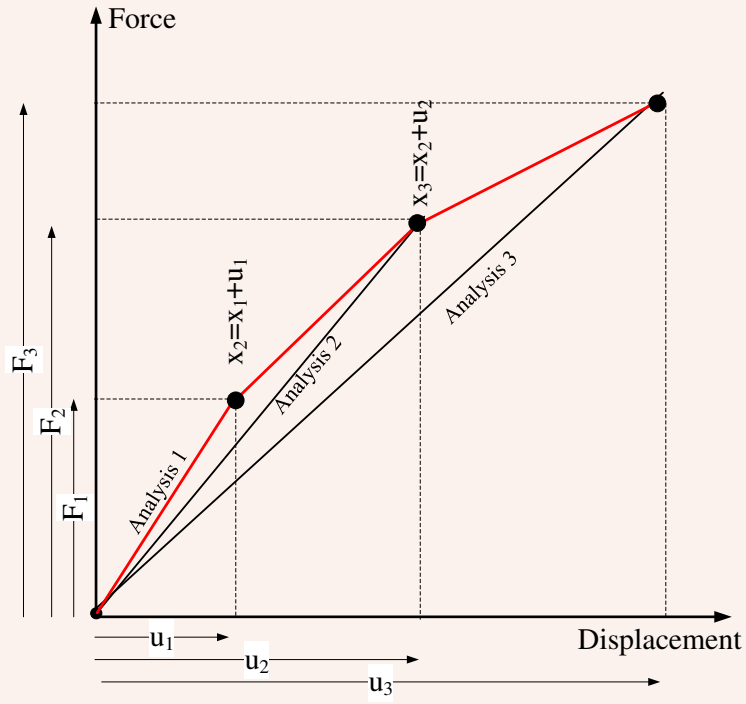


Figura 60.3: Determinação da carga flambagem sem geometria matriz de rigidez

```
%% Initialization for a 5 element strcture
% zero the matrices
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);Gamma=zeros(6,6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
EE = 800;LL = 4000;II = 1e7;A=50;a=50;
% Number of iternations
nincr = 12;
%% Determine the buckling load analytically
initialdispl = LL/a;
Pcrit = EE*II*pi^2/(2*LL)^2;
  ID = [16 17 18;
        1  2  3;
        4  5  6;
        7  8  9;
        10 11 12;
        13 14 15];
  % elements going from left to right 1 2 3 are at the free end far right
  LM=[16 17 18  1  2  3;
      1  2  3  4  5  6;
      4  5  6  7  8  9;
      7  8  9 10 11 12;
      10 11 12 13 14 15];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

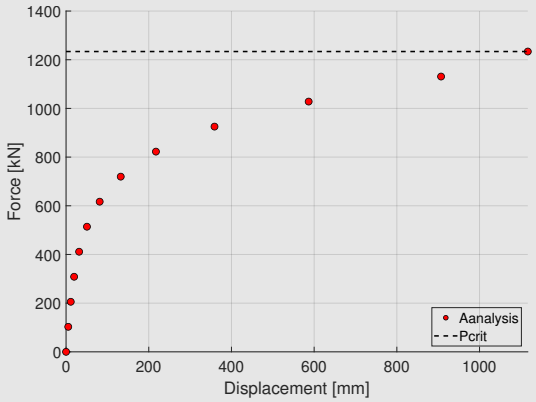
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
  % Initialize matrices for storage
  u = zeros(6,2);
  %% Begin Iteration Analysis
  y=initialdispl;% itintial displacement at fee end
  theta = atan(y/LL);
  %% Goemetry and coordinates
  % Initialize global coordinates in meters
  coord = [0        0;
  LL/5    LL/5*tan(theta);
  2*LL/5  2*LL/5*tan(theta);
  3*LL/5  3*LL/5*tan(theta);
  4*LL/5  4*LL/5*tan(theta);
  LL      LL*tan(theta)];
  deltaP = Pcrit/nincr ;
  Pt(1)=0;delta(1)=0;
for iter=1:nincr
   for elem=1:5
      i=[coord(elem,1),coord(elem,2)];j=[coord(elem+1,1),coord(elem+1,2)
    ];
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)]=stiff(EE,II,A,i,j);
    end
   Kaug=zeros(18);
    for elem=1:5
       for r=1:6
          lr=abs(LM(elem,r));
          for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem); % NO kg here +Kg(r,c,
    elem);
         end
      end
    end
   Ktt = Kaug(1:15,1:15); Pt(iter+1)=iter*deltaP;
   P=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -Pt(iter+1) 0 0 ];
   Displacements = inv(Ktt)*P';
   delta(iter+1)=Displacements(14,1);
   for inode=2:6 % loop from the second node (first is fixed) to the end
      for dof=1:2 % loop for x and y
          coord(inode, dof)=coord(inode,dof)+Displacements(ID(inode,dof)
    ,1);
      end
    end
end
%
xx(1)=0;xx(2)=max(delta);yy(1)=Pcrit;yy(2)=yy(1);
scatter(delta,Pt,60,'o','MarkerFaceColor','r','MarkerEdgeColor','k','
    LineWidth',1);
hold on
plot(xx,yy,'k--','LineWidth',2);grid
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
68 legend('Aanalysis','Pcrit','Location','SouthEast');
69 xlabel('Displacement [mm]');ylabel('Force [kN]');
70 xlim([0 inf]);
```



Vemos que a carga deslocamento curva assintoticamente se aproxima P_cr.. Isso foi conseguido sem ressonar para $\mathbf{K}_g$



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 61

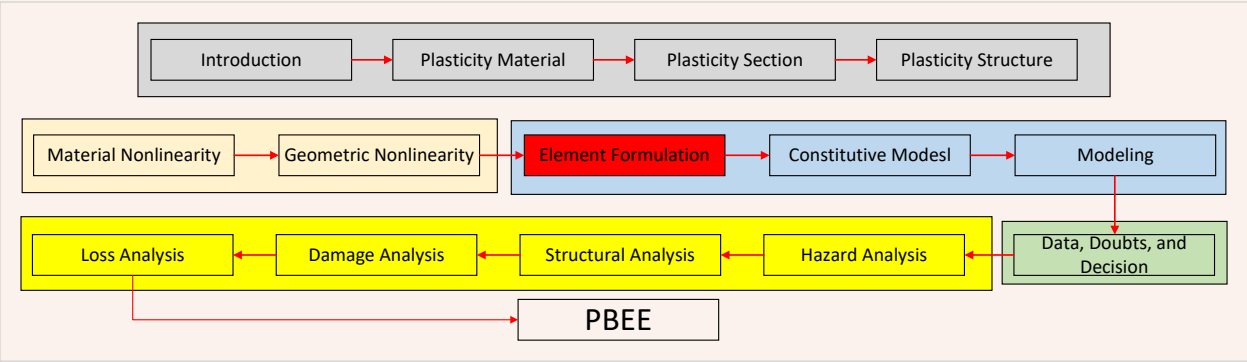
Não linear. Formulação do elemento

Abstract

Considerando que o capítulo 50 Cobriu a derivação do elemento elástico 1D viga viga dentro do contexto de uma análise elástica linear simplificada, este irá generalizar a derivativa para análise não linear do material. Vamos começar com os elementos simples treliça, e então prosseguir para viga pilar. Duas formulações distintas serão derivadas de uma baseada no método tradicional rigidez, e a outra baseada na flexibilidade uma para abordar algumas limitações da primeira. Seções de camadas ou fibras (analógicas para §56.3.2...serão abordados como aqueles que permitem a plastificação gradual do seção transversal. Finalmente o elemento de comprimento zero e elementos de seção serão cobertos. Cada derivação de elementos prosseguirá através dos três fundamentais: compatibilidade, lei constitutiva e equilíbrio culminando em um elemento. Finalmente, dada a multidão de símbolos, o capítulo terminará com uma seção detalhando a notação.

61.1 Introdução 2019
61.2 Treliça elemento 2019
61.2.1 Sistema de coordenadas para o elemento 2D treliça 2021
61.2.2 Determinação do Estado . . 2022
61.3 Viga-pilar formulações de elementos 2022
61.3.1 Rigidez-baseado em 2D viga-pilar elemento 2023
61.4 Seção de camada/fibra 2034
61.4.1 Flexibilidade método 2D viga-pilar elemento 2037
61.4.2 Rigidez *vs.* flexibilidade elementos baseados 2058
61.5 Formulação de elementos 2D de comprimento zero 2062
61.5.1 Sistema de coordenadas em elemento 2D de comprimento zero 2063
61.5.2 Determinação do estado do elemento 2064
61.6 Elemento de seção de comprimento zero 2066
61.6.1 Matriz de rigidez 2067
61.6.2 Sistema de coordenadas . . . 2068
61.6.3 Determinação do estado do elemento 2068
61.7 Integração numérica 2070
61.8 Força do elemento 2070

CÓPIA PARA REVISÃO



Da tese de doutorado "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" por Kang, 2010.

61.1 Introdução

1 Capítulo 50 derivado do elemento matrizes de rigidez de elementos 1D no contexto de uma análise linear elástica. Infelizmente, a notação adotada (principalmente subscritos) não se emprestou à generalização para análise não linear e para seções de fibra que são o assunto deste capítulo.

2 Por isso, começaremos re derivando o matrizes de rigidez do elemento mais simples: treliça.

61.2 Treliça elemento

3 Começamos com a simples consideração de um elemento treliça.

Matriz de rigidez

4 No contexto do método clássico rigidez, derivação do treliça matriz de rigidez é simples. Nós o re-derivamos como um meio de "gentilmente"introduzir uma nova notação que você deve se familiarizar.

5 Como com todos elementos finitos, derivação depende de três requisitos.

Um. Compatibilidade de deformações e deslocamentos.

Deslocamentos relação generalizada entre vetor de seção deslocamento $\mathbf{d}_s(x)$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e vetor elemento nodal deslocamento $\overline{\mathbf{d}}_e$ é expresso através das funções de interpolação deslocamento (funções de forma, $\mathbf{N}_d(x)$ Como

$$\mathbf{d}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{x}{L}+1 & \frac{x}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{N}_d(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_{x1} \\ \overline{u}_{x2} \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{d}}_e} \tag{61.1}$$

Deformação de deslocamentos: Supondo que deslocamentos são pequenos, o vetor de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ é relacionado com o elemento nodal deslocamento vetor por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_d(x)} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$$

Onde $\mathbf{B}_d(x)$ é a matriz que se relaciona deslocamento com deformação através dos derivados de $\mathbf{N}_d(x)$.

2. **Lei constitutiva** é expresso como

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ é o Seção[1] Vetor de força, e $\mathbf{k}_s(x)$ é o *Seção matriz de rigidez*. Para análise elástica linear $\mathbf{k}_s(x)$ é simplesmente um escalar igual a $\mathbf{k}_s(x) = \left[\begin{array}{c} E(x) \cdot A(x) \end{array} \right]$ onde, $E(x)$ e.. $A(x)$ São módulo elástico e área transversal.

3. **Equilíbrio** (em sua forma fraca) através do princípio de trabalho virtual (deslocamento). Assumindo uma distribuição de força que está em equilíbrio, a relação entre o elemento vetor de força nodal na referência local $\overline{\mathbf{f}}_e$ E o vetor de deformação da seção é derivado do princípio de virtual deslocamento:

$$\underbrace{\delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e}_{\text{Externo}} = \underbrace{\int_0^{L_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T . \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x}_{\text{Interno}}$$

A substituição leva a

$$\begin{aligned} \delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e} \delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \overline{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{k}}_e} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e \end{aligned}$$

[1] A noção de seção não é essencial para entender a formulação do elemento treliça matriz de rigidez. No entanto, é introduzido para ser consistente com a formulação subsequente de viga-pilar.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou $\overline{\mathbf{f}}_e = \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$ O elemento matriz de rigidez na referência local é assim dado por

$$\overline{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x$$

61.2.1 Sistema de coordenadas para o elemento 2D treliça

6 Elemento forças nodais e deslocamentos são expressas com respeito à referência global, Fig. 61.1 $\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ N_{X2},\ V_{Y2} \rfloor^T$;
$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ u_{X2},\ v_{Y2} \rfloor^T$

7 Elemento forças nodais e deslocamentos também pode ser expressa com respeito à referência local,

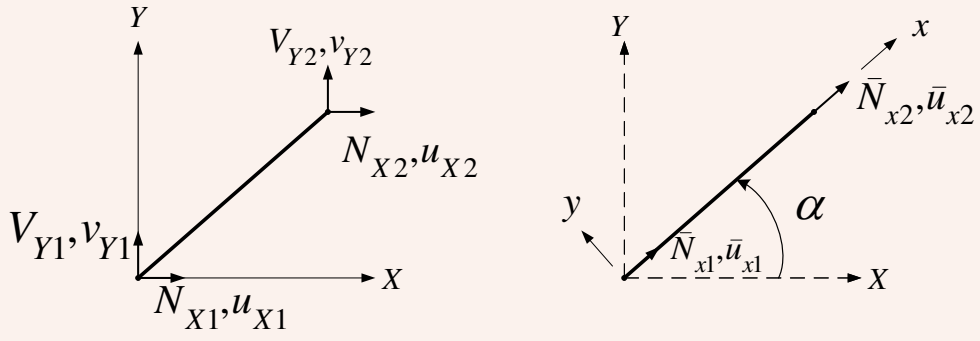
$$\overline{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{N}_{x2} \rfloor^T; \qquad \overline{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{u}_{x2} \rfloor^T$$

8 Matriz de rotação que transforma referência global à referência local, é dada por $\boldsymbol{\Gamma}_e$ De tal forma que..

$$\overline{\mathbf{f}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e; \qquad \overline{\mathbf{d}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e; \qquad \mathbf{K}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

onde, $\mathbf{K}_e$ é o elemento matriz de rigidez em referência global e a matriz de rotação é

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{N}_{x2} \end{array} \overset{\begin{array}{cccc} N_{X1} & V_{Y1} & N_{X2} & V_{Y2} \end{array}}{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}}$$



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

Figura 61.1: Sistema de coordenadas para 2D treliça

CÓPIA PARA REVISÃO

61.2.2 Determinação do Estado

9 Em termodinâmica, o estado atual do material pode ser caracterizado por um conjunto de *Variáveis de estado*, i.e. O que precisamos para prever os futuros estados do sistema.

10 No contexto de análise estrutural, a determinação do estado é o processo de determinar para um conjunto de elementos nodais deslocamentos:

Rigidez tangente matriz (§59.3.1.1), a fim de aplicar o método de Newton para resolver o sistema não linear onde a matriz rigidez tangente corresponde à Jacobian (Eq. 59.2).

Esforços internos para então determinar as forças residuais que devem ser quase iguais a zero.

Necessito fazer previsões para o estado $n+1$ Do estado n.. Será discutido em.. §61.3.1.2 e.. §61.3.1.4.

61.3 Viga-pilar formulações de elementos

11 A formulação de estrutura não linear pórtico usando elementos de fibra pode ser alcançada usando o método baseado em rigidez (deslocamento-baseado) ou o método baseada em flexibilidade- baseando-se em força. Em nossa cobertura, ambos os métodos assumirão que as deformações são pequenas e as seções planas permanecem planas durante o histórico de carga.

12 O método baseado em rigidez assume funções de interpolação ao longo do elemento. Esta suposição exigirá um número suficiente de elementos para obter uma resposta precisa. Por outro lado, o método baseado em flexibilidade terá funções de interpolação de força ao longo do elemento e um número menor de elementos do que para o método com base em rigidez será necessário para alcançar o mesmo nível de precisão.

13 No entanto, a formulação do elemento no método baseado em flexibilidade (capítulo 25) é mais complexo do que o método baseado em rigidez por causa da solicitação do método de iteração para obter ε a partir de modelos constitutivos materiais geralmente dados como função $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, que é apropriado para o método baseado em rigidez (Lee e Mosalam, 2004).

14 Além disso, a formulação de elementos no método baseado em rigidez é mais simples e amplamente utilizada no convencional método dos elementos finitos. Neste estudo, tanto os métodos baseados em rigidez e flexibilidade serão usados para formular o modelo não linear distribuído com a teoria de Bernoulli.

15 Elementos serão caracterizados por várias seções transversais localizadas nos pontos de integração numérica, especialmente, pontos de inserção pela regra da quadratura Gauss-Legendre para o método baseado em rigidez ou regra de quadratura de Gaus-Lobatto para

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

o Método baseado em (flexibilidade). Além disso, cada seção terá um número adequado de camadas/fibras onde cada uma está sob estado uniaxial de tensão.

61.3.1 Rigidez-baseado em 2D viga-pilar elemento

16 O método baseado em rigidez assume que o axial deslocamento é descrito por uma função de interpolação polinomial linear enquanto o transverso deslocamentos é modelado por funções de interpolação polinomiais cúbicas. A formulação 2D baseada em viga-pilar consiste de três requisitos principais:

Compatibilidade

Deslocamento Seção deslocamentos são determinados a partir do elemento nodal deslocamentos através do funções de forma. A relação generalizada entre o vetor de seção deslocamento $\mathbf{d}_s(x)$ e vetor elemento nodal deslocamento $\overline{\mathbf{d}}_e$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(x) &= \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{N}_d(x) \cdot \underbrace{\lfloor\, u_{x1}^{(e)},\ v_{y1}^{(e)},\ \theta_{z1}^{(e)},\ u_{x2}^{(e)},\ v_{y2}^{(e)},\ \theta_{z2}^{(e)} \,\rfloor^T}_{\overline{\mathbf{d}}_e}\end{aligned}$$

Onde $\mathbf{N}_d(x)$ é a matriz das funções de interpolação deslocamento.

$\mathbf{N}_d(x)$ é uma matriz de funções de interpolação linear para funções axiais deslocamentos e cúbicas de interpolação para funções transversais deslocamentos:

$$\mathbf{N}_d(x) = \left[\begin{array}{cccccc} \psi_1(x) & 0 & 0 & \psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \phi_2(x) & 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{array} \right]$$

com

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -\tfrac{x}{L_e} + 1 & \qquad \psi_2(x) &= \tfrac{x}{L_e} \\ \phi_1(x) &= 2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} - 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} + 1 & \qquad \phi_2(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - 2\tfrac{x^2}{L_e} + x \\ \phi_3(x) &= -2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} + 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - \tfrac{x^2}{L_e} \end{aligned}$$

Deformação Sob os pressupostos de que deslocamentos são pequenas e as seções planas permanecem planas, o vetor de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ é relacionado com o elemento nodal deslocamento vetor por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{B}_d(x) \cdot \overline{\mathbf{d}}_e\end{aligned} \tag{61.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Onde $\mathbf{B}_d(x)$ é a matriz derivada dos derivados das funções de interpolação deslocamento.

$$\mathbf{B}_d(x) = \begin{bmatrix} \psi_1'(x) & 0 & 0 & \psi_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & 0 & \phi_3''(x) & \phi_4''(x) \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= -\frac{1}{L_e} & \psi_2'(x) &= \frac{1}{L_e} \\ \phi_1''(x) &= \frac{12x}{{L_e}^3} - \frac{6}{{L_e}^2} & \phi_2''(x) &= \frac{6x}{{L_e}^2} - \frac{4}{L_e} \\ \phi_3''(x) &= -\frac{12x}{{L_e}^3} + \frac{6}{{L_e}^2} & \phi_4''(x) &= \frac{6x}{{L_e}^2} - \frac{2}{L_e} \end{aligned}$$

Lei constitutiva

A lei constitutiva da seção é expressa como

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\, \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \tag{61.3}$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ é o vetor de força da seção, e $\mathbf{k}_s(x)$ é a seção matriz de rigidez.

If $\mathbf{k}_s(x)$ não é derivada da discretização camada/fibra do seção transversal, então para análise elástica linear $\mathbf{k}_s(x)$ é simplesmente igual a

$$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x) \cdot A(x) & 0 \\ 0 & E(x) \cdot I_z(x) \end{bmatrix} \tag{61.4}$$

onde, $E(x)$, $A(x)$, e $I_z(x)$ são módulo elástico, área de seção, e momento de inércia na área de seção.

Equilíbrio

Assumindo uma distribuição de força que está em equilíbrio, a relação entre o elemento vetor de força nodal na referência local $\bar{\mathbf{f}}_e$ E o vetor de deformação da seção é derivado do princípio de virtual deslocamento:

$$\underbrace{\delta \bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{Externo}} = \underbrace{\int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x}_{\text{Interno}} \tag{61.5}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

que é uma forma fraca de equilíbrio. Substituição da Eq. 61.2 e Eq. 61.3 Em Eq. 61.5 E já que este último deve ser usado para qualquer arbitrário $\delta\overline{\mathbf{d}}_e$ Levar para

$$\begin{aligned}\delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e &= \int_0^L \delta\overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \varepsilon_s(x) \underset{\cdot}{\mathrm{x}} \\ \overline{\mathbf{f}}_e &= \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \overline{\mathbf{d}}_e \qquad (61.6)\\ \overline{\mathbf{k}}_e &= \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \qquad (61.7)\end{aligned}$$

Onde $\overline{\mathbf{k}}_e$ é o elemento matriz de rigidez em referência local.

61.3.1.1 Sistema de coordenadas na teoria 2D baseada em viga com Bernoulli

17 O elemento forças nodais e deslocamentos são expressos com respeito à referência global, Fig. 61.2(a) como: Elemento vetor de força nodal em referência global

$$\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$$

Elemento nodal deslocamento vetor em referência global

$$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$$

18 Além disso, o elemento forças nodais e deslocamentos do elemento pode ser expresso com relação à referência local como mostrado na figura. 61.2(b): Elemento vetor de força nodal em referência l

$$\overline{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$$

Elemento nodal deslocamento vetor em referência local

$$\overline{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{x2},\ \overline{v}_{y2},\ \overline{\theta}_{z2} \rfloor^T$$

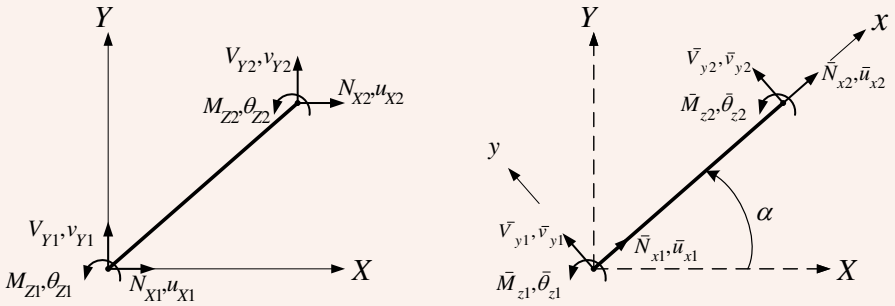
19 A matriz de rotação que transforma a referência global Fig. 61.2(a) à referência local Fig. 61.2(b) é dado por $\boldsymbol{\Gamma}_e$.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{f}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e \\ \overline{\mathbf{d}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e \qquad (61.8)\\ \mathbf{K}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e\end{aligned}$$

onde, $\mathbf{K}_e$ é o elemento matriz de rigidez em referência global.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

Figura 61.2: Esforços internos e correspondente deslocamentos no sistema de coordenadas global e local para o elemento 2D baseado em viga-pilar

20 A matriz de rotação é definida.

$$\mathbf{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

61.3.1.2 Determinação do Estado

21 Em um vetor de força nodal não linear análise estrutural, em cada passo corresponde a um vetor externo incremental da força nodal à estrutura. O vetor incremental correspondente de estrutura nodal deslocamento é determinado a partir de um vetor de força nodal externo incremental e os vetores de elemento nodal (deslocamento são extraídos para cada elemento. Os vetores de elementos nodais são usados para determinar vetores de força internos.

22 O processo de determinação do vetor interno da força nodal que corresponde ao elemento nodal deslocamento vetores é conhecido como determinação do estado. O processo de determinação do estado é composto por três fases, como mostrado na figura. 61.3a:

Seção de determinação do estado Vetores de força internos são calculados a partir de vetores de deformação de seção determinados por cada elemento nodal deslocamento vetor, fig. 1. 61.3a(c)

Determinação do estado do elemento As matrizes do elemento rigidez tangente e os vetores de força nodal internos de cada elemento são determinados a partir dos

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

vetores de forças de seção interna para cada elemento que são, por sua vez, calculados a partir de vetores de deformação de seção de elementos, fig. 1. 61.3a(b).

Determinação do estado da estrutura As matrizes do elemento rigidez tangente e vetores internos de força de cada elemento são montados para formar a matriz aumentada rigidez tangente $\mathbf{K}_S^{tan}$ e vetor interno de força nodal $\mathbf{P}_S^{int}$ ($\mathbf{P}_S^{int} = \mathbf{P}_t^{int} + \mathbf{P}_u^{int}$) da estrutura, Fig. 61.3a(a). Onde, subscrito t significa onde as forças são conhecidas e subscritas u onde deslocamentos são conhecidos ou zero. Subscrito t e.. u são descritos em Sec. 59.

23 Uma vez que a determinação do estado da estrutura está completa, o vetor interno de força nodal ($\mathbf{P}_{t,n}^{int}$) é Comparado com o total aplicado vetor de força nodal externo ($\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$)e o diferença ($\mathbf{P}_{t,n}^{R}$), é o vetor de força nodal residual que é então reaplicado à estrutura em um processo de solução iterativa até que a convergência (equilíbrio) seja satisfeita, Tabela 61.1.

Tabela 61.1: Determinações de estado multinível

Nível	Esforço interno	Rigidez tangente matriz	"Deslocamento'
Seção	$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)A(x) & 0 \\ 0 & E(x)I_z(x) \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_d(x)\overline{\mathbf{d}}_e$
Elemento Local	$\overline{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{d,e}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{s,e}^{int}(x)\mathrm{d}x$	$\overline{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \mathbf{k}_s(x)\mathbf{B}_d(x)\mathrm{d}x$	$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^t \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$
Elemento Global	$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \overline{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \boldsymbol{\Gamma}_e$	$\boldsymbol{\delta}_e$
Estrutura	$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \mathcal{A}_{b,e}$	$\boldsymbol{\delta}_e$

$\mathcal{A}_{b,e}^T$ é um operador de montagem de força, e $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ engloba as quatro submatrizes, $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$, e $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$

24 O procedimento de determinação do estado é simples para um elemento 2D baseado em viga-pilar. Os vetores de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ são determinados a partir do elemento nodal deslocamento vetor $\overline{\mathbf{d}}_e$ Como mostrado no Eq. 61.3.. A seção correspondente rigidez tangente matrizes $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ e a seção interna força vetores $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ são determinados pela lei constitutiva da seção. O elemento rigidez tangente matrizes $\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$ são obtidos do Eq. 61.7, enquanto o elemento interno nodal força vetores $\overline{\mathbf{f}}_e^{int}$ são determinados a partir do princípio de virtual deslocamento:

$$\overline{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)\mathrm{d}x \tag{61.9}$$

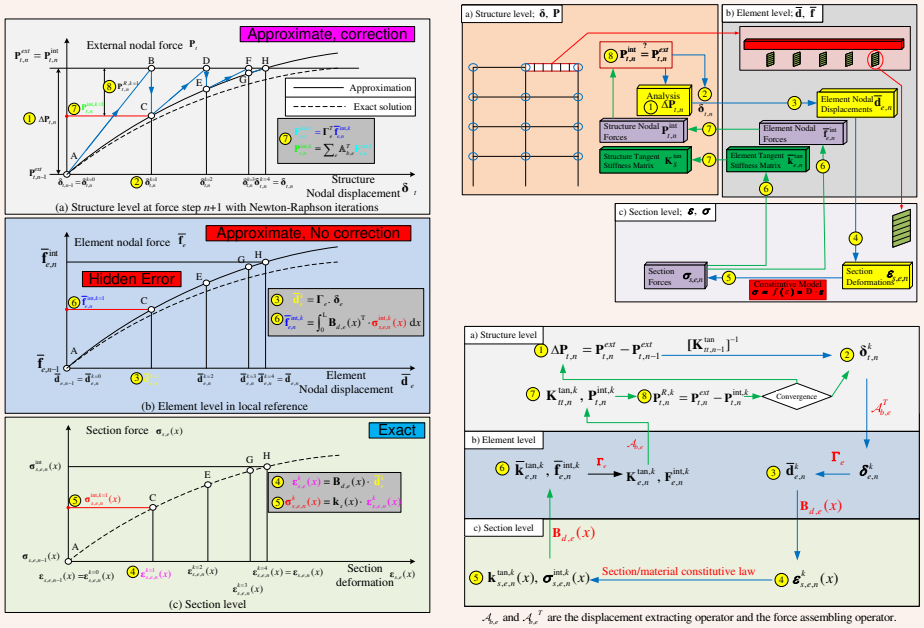
25 É importante notar que este método leva a uma resposta errônea do elemento no caso não linear. Este problema é ilustrado pela Fig. 61.3a que mostra a evolução da estrutura, elemento e seção estados durante um vetor de força externa incremental em livre graus de liberdade $\Delta\mathbf{P}_{t,n}$ que requer várias iterações k (Spacone, Ciampi e Filippou, 1992). Onde,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

subscrito n ou $n-1$ é atual ou anterior passo de força externa, sobrescrito k É k^{th} iteração, e subscrito t significa onde as forças são conhecidas.

26 O método de iteração Newton-Raphson é usado no global graus de liberdade. Em cada iteração Newton-Raphson, o vetor incremental nodal deslocamento ao nível da estrutura é determinado e os vetores nodal elemento deslocamento para cada elemento são extraídos.



(a) (b)

Figura 61.3: Determinação do estado para o método baseado em rigidez

27 No.. k^{th} Newton-Raphson iteração, o elemento nodal deslocamento vetores em referência local $\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$ do vetor nodal deslocamento $\mathbf{u}^k_{S,n}$ ($\mathbf{u}^k_{S,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathbf{u}^k_{u,n}$) de graus de liberdade no nível da estrutura são determinados para cada elemento. Onde, subscrito u significa onde deslocamentos são conhecidos ou zero.

28 Usando EQ. 61.3 os vetores de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,n}(x)$ para cada elemento são computados. Esta é a primeira aproximação do elemento determinação do estado, desde $\mathbf{B}_d(x)$ é exato apenas no caso linear elástico de um membro prismático.

29 Assumindo que a lei constitutiva da seção é explicitamente conhecida, a seção rigidez tangente matrizes $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,n}(x)$ e a seção interna força vetores $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,n}(x)$ são facilmente computados de $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,n}(x)$.. E então, usando Eq. 61.7 e Eq. 61.9 O elemento matrizes de rigidez em referência local $\overline{\mathbf{k}}^k_{e,n}$ e o elemento interno nodal força vetores em referência local $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ são determinados.

30 Desde então $\mathbf{B}_d(x)$ é apenas aproximado, tanto as duas integrais para o elemento rigidez

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

tangente matriz em referência local eo elemento interno nodal vetor de força na referência local rendimento aproximado resultados. A aproximação de $\mathbf{B}_d(x)$ leva a uma solução mais rígida como mostrado na figura. 61.3b (a) e (b). Note que a curva marcada como "solução exata"só é exata dentro dos pressupostos da lei constitutiva de seção e as aproximações cinemáticas do problema, tais como supor que deformações são pequenas e seções planas permanecem planas durante o Carregando histórico.

31 Para superar os erros numéricos que surgem da aproximação de $\mathbf{B}_d(x)$, analistas recorrem à discretização fina da estrutura, especialmente, em regiões pórtico que sofrem comportamentos altamente não lineares, como os fins dos membros. Mesmo assim, problemas de convergência numérica persistem. É por isso que o elemento baseado em flexibilidade dará melhores resultados.

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

61.3.1.3 "Escondido" erro

32 Um "erro escondido"se esconde em nossa solução. Observando que o método de iteração Newton-Raphson opera no Coordenação global (nível estrutural) Sistema, Fig. 61.3a, o erro é explicado através do seguinte:

- No.. k^{th} Iteração: $\overline{\mathbf{d}}_{e,n} \rightarrow \mathbf{d}_{s,n}(x)$ (Seção deslocamentos do elemento nodal deslocamentos em referência local, Eq. 61.1) (③).
- Para cada seção: $\mathbf{d}_{s,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$ (Deformação da seção do elemento deslocamentos Eq, 61.2) (④), desde $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ é exato apenas no caso elástico linear.
- Assumindo que a lei constitutiva da seção é explicitamente conhecida, $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}(x)$ Eq. 61.4 (rigidez tangente matriz de deformação da seção); $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ (seção interna força vetores de deformação da seção, Eq. 61.3 (⑤).
- Elemento matrizes de rigidez $\overline{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ em referência local (Eq. 61.7) e o elemento interno nodal força vetores em referência local $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (Eq. 61.6) são determinados em seguida (⑥).
- Durante a montagem do global matriz de rigidez, a estrutura da matriz e vetor de nodal esforços internos são determinadas (⑦), Antes que o resíduo seja computado (⑧) para convergência.
- Desde então $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ é apenas aproximado, então Elemento matrizes de rigidez $\overline{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ (Eq. 61.7) e elementos internos nodal força vetores $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (Eq. 61.6) também são aproximados.

33 A aproximação de $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ leva a uma solução mais rígida. Note-se que a curva marcada como "solução exata"só está dentro dos pressupostos da lei constitutiva e das aproximações cinemáticas de que as deformações são pequenas e seções planas permanecem planas.

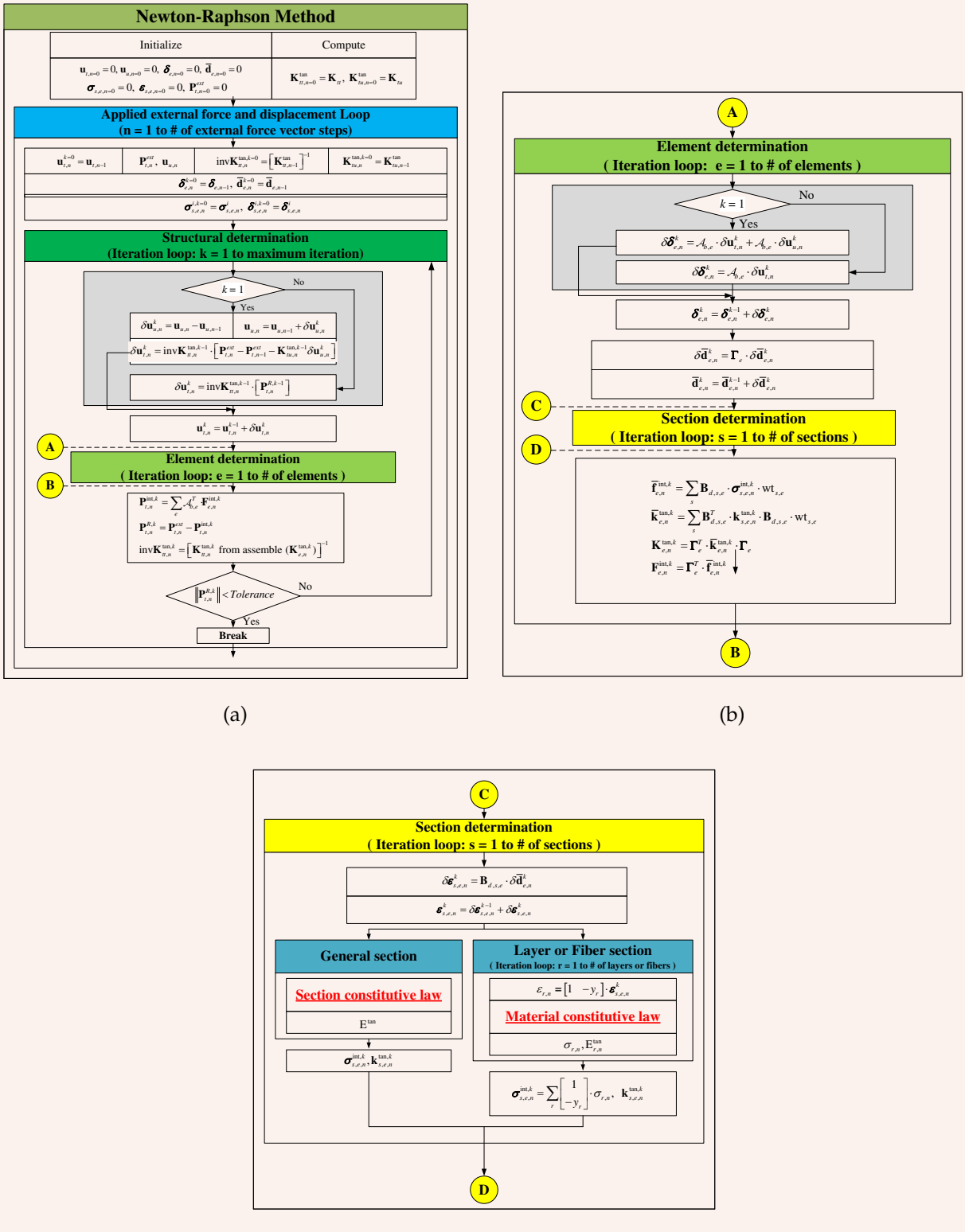
34 Para resolver este problema, podemos tanto a) Use uma discretização de malha mais fina da estrutura, especialmente, em regiões pórtico que sofrem comportamentos altamente não lineares, como o membro termina; ou b) usar flexibilidade elementos baseados endereçado abaixo.

61.3.1.4 Análise não linear usando método baseado em rigidez

35 Com referência à Fig. 61.4a, Fig. 61.4b, e Fig. 61.4cExaminaremos um único passo do mehthod Newton-Raphson para análise não linear usando o método baseado em rigidez com a lei constitutiva de seção devido à força e controle. Força e controle são discutidos em Sec. 59.. Procedimento de fibra ou seção de camada na Fig. 61.4c será descrito em Sec. 61.4.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) (b)

(c)

Figura 61.4: Fluxograma de análise não linear usando o método baseado em rigidez

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Passo 1: Compute o nodal incremental deslocamento $\delta \mathbf{u}_{t,n}$ e nodal total deslocamento $\mathbf{u}_{t,n}$ em nível de estrutura. Inicialmente, a iteração começou pela Eq. 61.10 e.. $k = 1$.

If $k = 1$,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^k_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\ \mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}^k_{u,n} \\ \delta \mathbf{u}^k_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n} \delta \mathbf{u}^k_{u,n}] \\ \mathbf{u}^k_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^k_{t,n} \end{aligned} \tag{61.10}$$

Caso contrário, para a iteração usamos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\ \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} \end{aligned} \tag{61.11}$$

Onde, sobrescrito k é o contador de iteração, $\mathbf{P}^R_t$ o vetor de força nodal residual em nível estrutural, $\Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ o vetor total incremental deslocamento da última etapa convergente, e $\delta \mathbf{u}^{k+1}_n$ o último vetor incremental deslocamento.

Em Eq. 61.10, é necessário descrever explicar força / deslocamento controle e o aumentado matriz de rigidez $\mathbf{K}_S$ com $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$, e $\mathbf{K}_{uu}$ em detalhes. É mostrado em Sec. 44.2. onde, o aumento matriz de rigidez é dividido em dois grupos com respectivo subscrito 'uOnde os deslocamentos são conhecidos ou zero, e 't' onde as forças são conhecidas.

Passo 2: Passe por todos os elementos e determine o estado deles.

Passo 3: Determine o elemento vetor nodal.

If $k = 1$,

$$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{u,n}$$

Caso contrário, para a iteração usamos

$$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n}$$

onde, $\mathbf{A}_{b,e}$ é o operador de extração.

$$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

onde, $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

$$\begin{aligned} \delta \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} \\ \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} \end{aligned}$$

onde, $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Passo 4: Comece a determinação do estado da seção, passando as seções do elemento. O número total de seção pode variar de elemento para elemento. Portanto, o número total de seções em um elemento é nIp_e.. Depende do número de pontos de integração por Gauss Legendre regra da quadratura.

Passo 5: Determine o vetor de deformação da seção. Para a determinação do estado da seção, primeiro precisamos dividir seção em seção geral e seção de fibra como descrito na Sec. 61.4.. Aqui consideramos apenas a seção geral. A determinação do estado de cada seção é realizada em loop i. i Quer dizer i^{th} Seção.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

onde, $\mathbf{B}^{i}_{d,e}$ é a matriz derivada das funções de interpolação deslocamento i^{th} Seção em e^{th} Elemento.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$$

onde, $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,0}_{s,e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{s,e,n-1}$.

Passo 6: Determine a seção rigidez tangente matriz e o vetor de força da seção interna. Se assumirmos que a lei constitutiva é explicitamente conhecida, $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ e.. $\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}$ são determinados a partir $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$.. No entanto, na seção elástica, não precisamos calcular $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ novamente como é idêntico à seção inicial $\mathbf{k}^{i}_{s,e}$.

Se tivermos uma seção elástica,

$$\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{i}_{s,e} \tag{61.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} \tag{61.13}$$

onde, $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ é a seção rigidez tangente matriz em k^{th} iteração.

Passo 7: Determine o elemento interno vetor de força nodal e a matriz do elemento rigidez tangente. Da Eq. 61.9 e Eq. 61.7Nós determinamos $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ e.. $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}\, \mathrm{wt}^{i}_{e}$$

onde, wt^{i}_{e} é o coeficiente de peso associado com o Jacobian em i^{th} Seção de e^{th} Elemento.

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \mathrm{wt}^{i}_{e} \tag{61.14}$$

onde, $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ é o elemento rigidez tangente matriz em referência local.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Da Eq. 61.8Nós determinamos $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ e.. $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \mathbf{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \mathbf{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{\Gamma}_e$$

Passo 8: Determine o vetor interno de força nodal e a matriz aumentada.

$$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{A}_{b,e}$$

onde, $\mathbf{A}_{b,e}{}^T$ é o operador de montagem de força, e $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ é composto por $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$, e $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

Passo 9: Calcular o vetor de força nodal residual a nível estrutural da Eq. 61.11.. Satisfazemos a convergência com o vetor de força nodal residual.

Verifique a convergência:

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ está dentro da tolerância especificada, vá para o próximo incremento de força.
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ não está dentro da tolerância especificada, k é atualizado para $k+1$ e a próxima iteração Newton-Raphson inicia. Eq. 61.11 Em **Passo 1** através **Passo 9** são repetidos até que a convergência ocorra no nível da estrutura.

61.4 Seção de camada/fibra

36 Até agora, assumimos que uma seção é caracterizada por um momento de relação curvatura, ou seja, quando o momento atinge o momento plástico/irrendimento, Toda a seção plastifica. No entanto, isso é apenas um Aproximação, como na realidade há um plastificação gradual começando pelas fibras externas, e esta zona de plastificação gradualmente se espalha para dentro até que toda a seção se torne plástico.

37 Assim, o melhor modelo para a análise baseada em plasticidade (de aço ou elementos concreto armado) são aqueles baseados em seções de camada / fibra (§56.3.2) como ele pode capturar a plastificação gradual do seção transversal. Na seção camada/fibra, a seção é subdividida em camadas/fibas longitudinais, como mostra a figura. 61.5.

38 As características geométricas das camadas/fibras são sua localização no local y, z Sistema de referência e área camada/fibra $A_{ir}(x)$, onde subscrito ir É ir^{th} camada/fibra.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

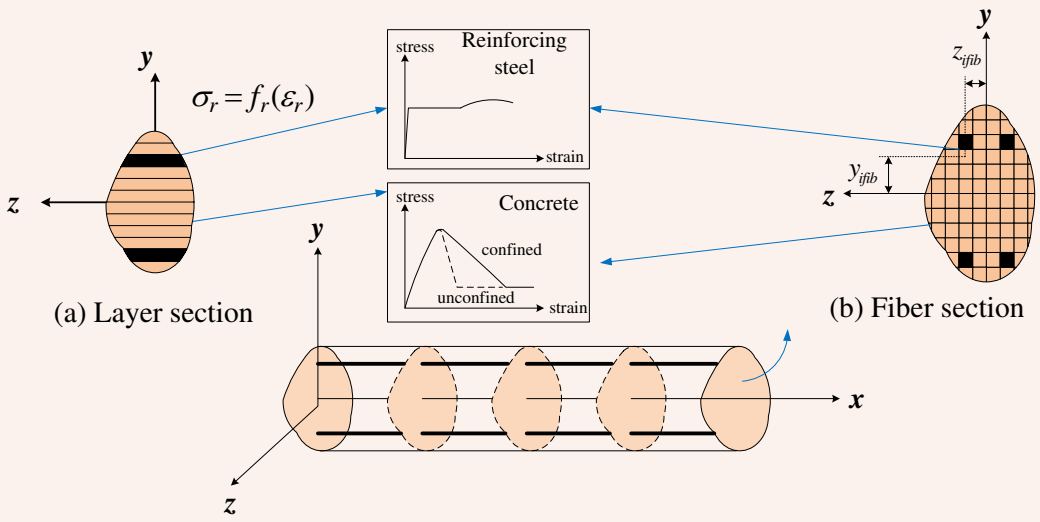


Figura 61.5: Seções de fibra - distribuição de seções de controle e subdivisão de seção em fibras

A relação constitutiva da seção não é explicitamente especificada, mas é derivada pela integração da resposta das camadas/fibras, baseada na relação uniaxial tensão-deformação do material particular, Fig.61.5.

39 A camada/fibra tensões não pode ser determinada a partir do força axial e momento fletor na seção, uma vez que há apenas duas equações de equilíbrio no caso de flexão uniaxial para três ou mais desconhecidos tensões. Uma possível solução é assumir uma distribuição tensão dentro da seção, mas o problema é que, em seguida, adiado para a fase de determinação do estado de camada/fibra do algoritmo, já que as relações camada/ fibra tensão-deformação são tipicamente expressas como explícitas funções de deformação.

40 Camada/fibra tensões e rigidez são assim determinadas a partir da camada/fibrilhação tensão-deformação relações. A seção interna força vetores $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ são calculadas a partir da distribuição de camada/fibra tensão e seção rigidez tangente matrizes $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ são montados da camada/fibra tangente rigidezes.

41 Em última análise, nosso objetivo permanece a derivação de $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ De tal forma que..

$$\left\{ \begin{array}{c} N(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\}$$

42 Ignorando a deformação transversal cisalhamento e assim Supondo uma distribuição linear deformação (Euler-Bernouilli viga), mas um *comportamento não linear tensão-marca*, a distribuição tensão é

$$\sigma_t(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)} \pm \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

43 Neste ponto, Fig. 61.6, a partir do nodal deslocamento, podemos determinar as deformações da seção (axial deformação, $\varepsilon(x)$ e curvatura, $\phi(x)$(e assim a distribuição linear deformação), e como temos um material não linear, *A localização exata do linha neutra ainda não é conhecida*, e em Cada elevação de fibra nós temos um diferente $E_r^{tan}(x)$. r é o subscrito de fibra.

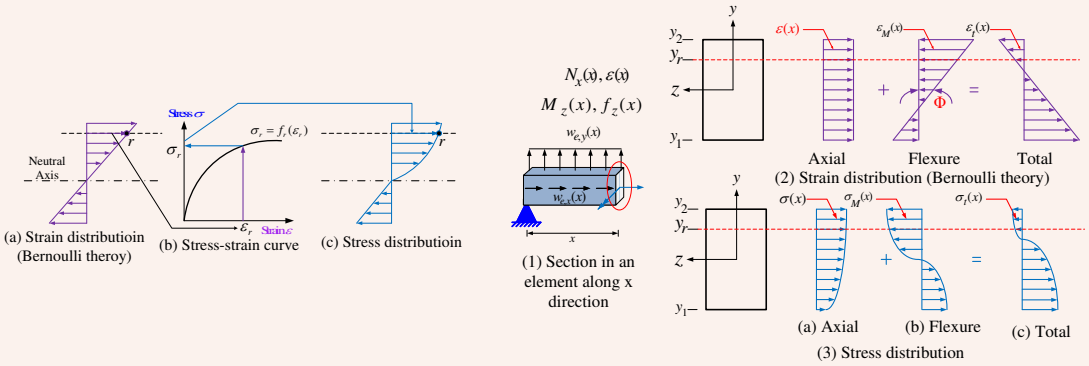


Figura 61.6: Distribuição transversal não linear tensão

44 Nós sabemos ε e.. Φ, deve determinar N e.. MHaverá dois termos: Primário e secundário:

Termos primários são aqueles devidos à pura axial e flexão:

Axial devido a $\sigma(x)$ é simplesmente determinado a partir

$$N_x(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma(x) dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x)}_{\sigma(x)} dA \simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot \varepsilon(x)$$

Flexural devido a $\sigma_M(x)$ é considerado o próximo, e novamente nós semana uma expressão de $(M(x))$ em termos de curvatura e $E_r^{tan}(x)$, e lembrando que $I = \int y^2 dA$ e.. $\sigma_M(x)_{@y_r} = E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y_r$

$$M_z(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma_M(x) \cdot y dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \underbrace{\phi_z(x) \cdot y}_{\varepsilon} \cdot y}_{\sigma} dA$$

$$= \phi_z(x) \int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot y^2 dA$$

$$\simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r^2 \cdot \phi_z(x)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Termos secundários são devidos a *Acoplamento* e vai resultar em Não-zero fora diagonal termos no matriz de rigidez. Note que isso cancela em análise elástica linear.

Força axial devido à curvatura como não há razão para que a distribuição de flexão não linear tensão necessariamente produza uma soma de forças iguais a zero.

$$\begin{aligned} dN_x(x) &= -E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon_M(x)dA = -E_r^{tan}(x)\cdot\phi_z(x)\cdot y dA \\ N_x(x) &= -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x)\cdot\phi_z(x)\cdot y dA \\ &\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x)\cdot A_r(x)\cdot y_r\cdot\phi_z(x) \end{aligned}$$

onde o deformação ($\varepsilon_M(x)$) é obtido a partir da curvatura ($\phi_z(x)$).

Momento devido ao axial deformação como não há nenhuma razão pela qual a localização do linha neutra é realmente correta resultando em uma soma de momento igual a zero.

$$dM_z(x) = -E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot y\cdot dA \tag{61.15}$$

$$M_z(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot y dA \tag{61.16}$$

$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x)\cdot A_r(x)\cdot y_r\cdot\varepsilon(x) \tag{61.17}$$

45 Resumindo dentro de uma matriz, $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ toma a forma:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}}_{\sigma_S} = \underbrace{\sum_{ir} \begin{matrix} \varepsilon(x) \\ \kappa(x) \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{N_x(x)}{E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)} & \overset{M_z(x)}{-E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir}} \\ -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir} & E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s^{tan,n}} \begin{Bmatrix} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} \tag{61.18}$$

61.4.1 Flexibilidade método 2D viga-pilar elemento

46 Flexibilidade-baseado em 2D viga-pilar elementos são "não conformista" elementos finitos, uma vez que eles produzem o elemento matriz de flexibilidade ao invés do clássico matriz de rigidez, e são baseados nas equações de equilíbrio, em vez de no campo assumido deslocamento. No entanto, eles oferecem algumas vantagens importantes.

47 Nós derivamos o elemento $\tilde{\mathbf{c}}_e$ Sem os modos rígidos do corpo e então invertê-lo para obter o elemento correspondente matriz de rigidez $\tilde{\mathbf{k}}_e$ Sem modos rígidos do corpo (§46.4.2). Isto é particularmente interessante naqueles casos em que as formulações de métodos baseados em rigidez são aproximadas e formulações de métodos baseadas em flexibilidade são

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

exatas, como uma seção variando ao longo do elemento e elementos com não linearidade material.

48 Vamos usar o princípio da complementar trabalho virtual através dos três passos principais habituais.

Equilíbrio Começamos com a forma forte da equação de equilíbrio, Fig. 61.7:

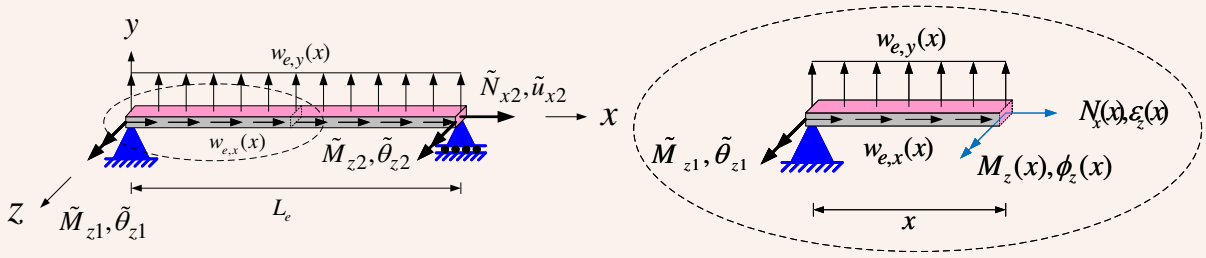


Figura 61.7: Elemento 2D sem modos rígidos de corpo

$$\underbrace{\mathbf{w}_e(x)}_{\text{Externo}} + \underbrace{\mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\sigma}_s(x)}_{\text{Interno}} = \mathbf{0}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} w_x^{(e)}(x) \\ w_y^{(e)}(x) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{61.19}$$

onde, $\mathbf{w}_e(x)$ é o vetor de força do elemento externo e $\mathbf{L}_f$ é o operador diferencial de força.

Primeiro assumimos que não há o vetor de força do elemento externo, ou seja, $\mathbf{w}_e(x) = \mathbf{0}$.. A seleção de funções de interpolação de força, $\mathbf{N}_f(x)$ resultado da exigência de equilíbrio, como expresso em Eq. 61.19, deve ser satisfeito na forma forte. Assim, para o Euler-Bernoulli viga:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

Que se entrega

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} N_x(x) &= c_3 \\ M_z(x) &= c_1 x + c_2 \end{aligned} \tag{61.20}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

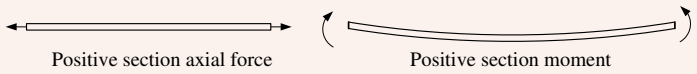


Figura 61.8: Assinar convenção na seção de força

Aplicando o condição de contorno da Fig. 61.7 com convenção de sinais na seção de força, Fig. 61.8,

$$\begin{aligned} N_x(L) &= N_{x2} \\ M_z(0) &= -M_{z1} \\ M_z(L) &= M_{z2} \end{aligned}$$

Nós obtemos:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{M_{z1} + M_{z2}}{L_e} \\ c_2 &= -M_{z1} \\ c_3 &= N_{x2} \end{aligned} \tag{61.21}$$

Substituindo o Eq. 61.21 Eq. 61.20,

$$\begin{aligned} N_x(x) &= N_{x2} \\ M_z(x) &= \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) M_{z1} + \frac{x}{L_e} M_{z2} \end{aligned}$$

ou

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_f(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e} \tag{61.22}$$

onde, $\tilde{\mathbf{f}}_e$ é o elemento vetor de força nodal sem modos rígidos do corpo.

Finalmente, da Eq. 61.22, extraímos a matriz de funções de interpolação de força.

$$\mathbf{N}_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}$$

Lei constitutiva O inverso da relação constitutiva clássica usada no método baseado em rigidez mostrado em Eq. 61.5 Agora é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x) \tag{61.23}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

onde, $\mathbf{c}_s(x)$ é a seção matriz de flexibilidade. Sim $\mathbf{c}_s(x)$ Não é derivado de seção de fibra que é discutida em Sec. 61.4, em seguida, para análise linear elástica $\mathbf{c}_s(x)$ é simplesmente.

$$\mathbf{c}_s(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E(x)\cdot A(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E(x)\cdot I_z(x)} \end{bmatrix}$$

Compatibilidade Obtemos a equação da compatibilidade na forma fraca através do princípio de complementar trabalho virtual (ao contrário de trabalho virtual para o método baseado em rigidez).

$$\underbrace{\delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\tilde{\mathbf{d}}_e}_{\text{Externo}} = \underbrace{\int_0^L \delta\boldsymbol{\sigma}_s(x)^T\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\mathrm{d}x}_{\text{Interno}} \tag{61.24}$$

onde, e $\tilde{\mathbf{d}}_e$ é o elemento nodal deslocamento vetor sem modos rígidos do corpo.

Substituindo o Eq. 61.22 e Eq. 61.23 Eq. 61.24 E já que este último deve esperar por qualquer arbitário $\delta\tilde{\mathbf{f}}_e$Nós obtemos

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\cdot\mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}_s(x)\,\mathrm{d}x \\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}_s(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\mathbf{N}_f(x)\,\mathrm{d}x}_{\tilde{\mathbf{c}}_e}\cdot\tilde{\mathbf{f}}_e \\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{c}}_e\cdot\tilde{\mathbf{f}}_e
\end{aligned} \tag{61.25}$$

O elemento matriz de flexibilidade sem modos rígidos de corpo em referência local é assim dado por:

$$\tilde{\mathbf{c}}_e = \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\mathbf{N}_f(x)\,\mathrm{d}x \tag{61.26}$$

e o elemento correspondente matriz de rigidez sem modos rígidos de corpo em referência local é

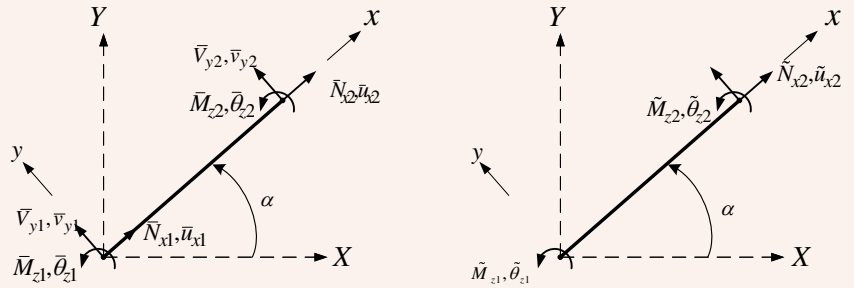
$$\tilde{\mathbf{k}}_e = [\tilde{\mathbf{c}}_e]^{-1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

61.4.1.1 Sistema de coordenadas no elemento 2D baseado em viga-pilar com teoria de Bernoulli

49 Contrariamente ao sistema de referência do método baseado em rigidez na figura. 61.2, precisamos considerar forças e deslocamentos em referência local com e sem modos rígidos do corpo na figura. 61.9.



(a) Local reference in an element

(b) Local reference in an element without rigid body modes

Figura 61.9: Esforços internos e correspondente deslocamentos no sistema de coordenadas local com ou sem corpo rígido para o elemento 2D viga-pilar

50 Elemento vetor de força nodal sem modos rígidos do corpo em referência local são

$$\tilde{\mathbf{f}}_e = \lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$$

e o vetor nodal do elemento deslocamento sem modos rígidos de corpo em referência local são dados por

$$\tilde{\mathbf{d}}_e = \lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$$

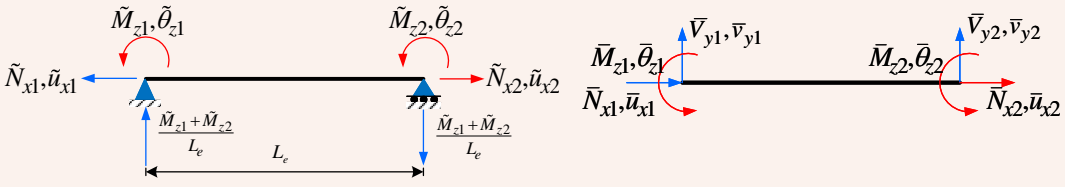


Figura 61.10: A relação entre os modos rígidos do corpo e nenhum modo rígido do corpo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

51 A relação entre os modos rígidos do corpo e nenhum modo rígido do corpo é obtida através do equilíbrio na figura. 61.10.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_e &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{d}}_e \\ \mathbf{K}_e &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \end{aligned} \tag{61.27}$$

52 Finalmente, o elemento matriz de rigidez pode ser recuperado da Eq. 46.22

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

Onde $\mathcal{B}$ É a Matriz Estática§46.2.1.2)

61.4.1.2 Determinação do Estado

53 Os estudos focando nas vantagens do método baseado em flexibilidade Zeris e Mahin, 1988 não forneceram um método claro e consistente para calcular os vetores de força internos dos elementos das deformações. A razão é que o elemento baseado em flexibilidade (derivado do princípio complementar de trabalho virtual) não tem funções de forma que relacionam campo de deformação dentro do elemento com vetor nodal de elemento, mas *funções de forma que relacionam forças de seção com forças nodais*.

54 O Global A formulação é baseada no rigidez (deslocamento) formulação, o elemento é baseado em uma flexibilidade (força) formulação; Os dois terão que ser reconciliados (na determinação dos vetores internos de força do elemento).

55 No nível do elemento, o elemento baseado flexibilidade fornecerá *Nodal deslocamentos que não são necessariamente compatíveis com os que vêm de elementos adjacentes* Assim como na formulação baseada em rigidez, forças não eram compatíveis no nível de elemento.

56 Devemos *Garanta a compatibilidade de Nodal deslocamento* (da mesma forma que garantimos equilíbrio nodal na formulação baseada em rigidez. Isso pode ser feito iterativamente.

57 Note que no método baseado em rigidez, houve uma descontinuidade nas forças nodais.

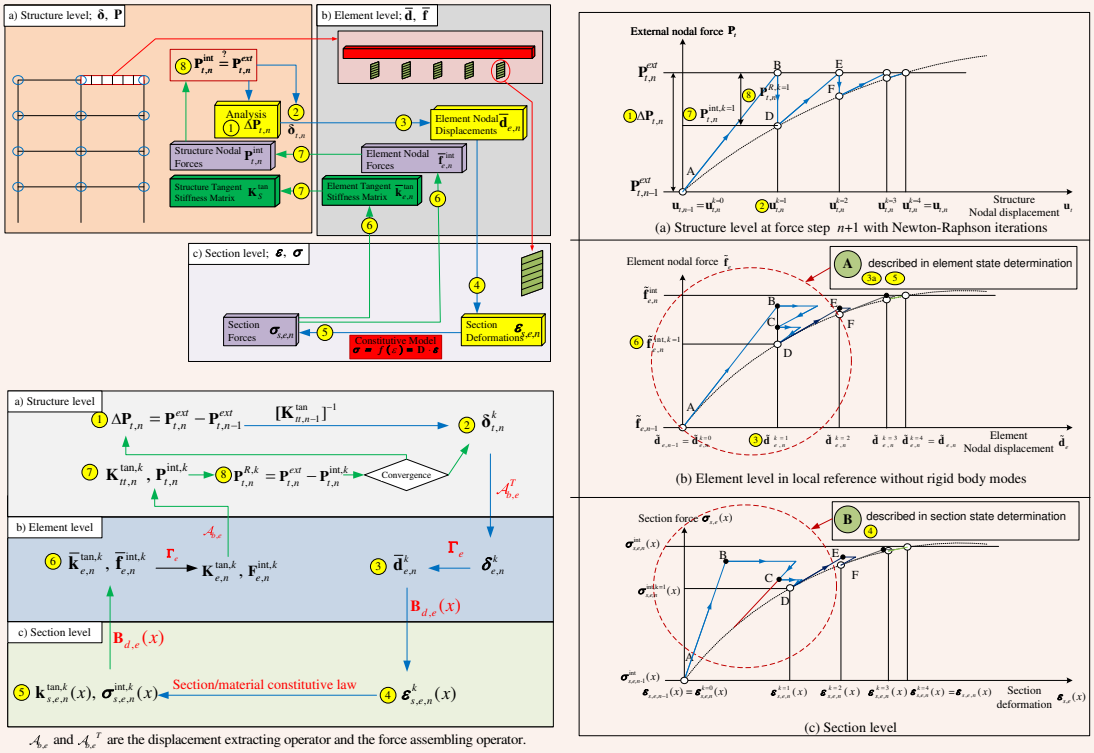
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

58 Há dois algoritmos para o rigidez-baseada e flexibilidade- baseada métodos: (a) com Newton-Raphson iteração no nível de elemento para determinar o estado do elemento (Spacone, Ciampi e Filippou, 1992), (b) sem iteração no nível do elemento para determinar o estado do elemento (Carol e Murcia, 1989).

61.4.1.2.1 Sem iteração em nível de elemento

59 Assim como a determinação do estado de 2D baseado em viga-pilar, em um não linear análise estrutural, o processo de determinação do estado para o método baseado em rigidez e flexibilidade-baseado sem iteração no nível de elementos é composto por três fases, como mostrado na figura. 61.11 para a seção, elemento e estrutura.



$\mathcal{A}_{se}$ and $\mathcal{A}_{se}^{T}$ are the displacement extracting operator and the force assembling operator.

Figura 61.11: Determinação do estado para o método baseado em flexibilidade sem iteração de elementos

60 Uma vez que a determinação do estado da estrutura está completa, o vetor interno de força nodal em k^{th} iteração $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$ é comparado com o vetor de força nodal externo aplicado total $\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ E a diferença, se houver, produz o vetor de força nodal residual $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ que é então reaplicado à estrutura em um processo de solução iterativa até a diferença do vetor total de força externa aplicada e vetor interno de força nodal satisfaz dentro de uma tolerância especificada.

61 O procedimento de determinação do estado é simples para um elemento 2D baseado em viga-pilar sem iteração de elementos como 2D baseada em rigidez. O elemento nodal

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

deslocamento vetor $\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}$ Sem modos rígidos de corpo em k^{th} A iteração é determinada pelo Eq. 61.27E o elemento vetor de força nodal $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$ Sem modos rígidos do corpo é determinado a partir de Eq. 61.25

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_e \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}\\ \tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}\\ \tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}\end{aligned} \tag{61.28}$$

62 A seção força vetores em k^{th} iteração $\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)$ são determinados a partir do elemento vetor de força nodal $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$, e então a seção deforma os vetores em k^{th} iteração $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$ são determinados a partir dos vetores de força da seção $\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)$ Como mostrado no Eq. 61.29.

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}\\ \boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k-1}_{s,e,n}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)\end{aligned} \tag{61.29}$$

63 Assumindo que a lei constitutiva da seção é explicitamente conhecida, a tangente da seção matrizes de flexibilidade $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$ e a seção interna força vetores $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ são facilmente computados de $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$.

64 Nesta abordagem, os vetores de força e deformação residuais são determinados pela primeira vez com a tangente da seção matrizes de flexibilidade $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x)\end{aligned}$$

65 Os vetores de deformação da seção residual são integrados ao longo do elemento usando por princípio a força virtual para obter o elemento residual vetor nodal deslocamento.

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x)$$

66 O elemento sem modos rígidos de corpo $\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}$ é determinado a partir de Eq. 61.26, e então o elemento residual vetor de força nodal é determinado formar o elemento resíduo vetor nodal deslocamento.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} \tag{61.30}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

67 O elemento interno vetor de força nodal sem modos rígidos do corpo é determinado a partir de Eq. 61.28 e Eq. 61.30.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} - \tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n}$$

68 Lá, o elemento interno vetor de força nodal é obtido do Eq. 61.27.

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{\Gamma}}_e]^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

69 O elemento 2D baseado em viga-pilar sem iteração no nível do elemento para determinar o estado do elemento é um método simples para o procedimento de determinação do estado diferente do elemento 2 D baseado viga-pilar com iteração Newton-Raphson Nível de elemento a ser feito.

70 Esta formulação de elementos usa as funções de interpolação de força sem qualquer suposição diferente do elemento baseado em rigidez com funções de interligação.

71 Devido ao caráter exato das funções de interpolação de força, não existem erros intrínsecos na formulação 2D baseada em viga-pilar sem iteração no nível do elemento para fazer. Além disso, há *Sem limitações* para o tamanho dos elementos, se o elemento tem seção consistente ao longo do eixo longitudinal, por esta razão (Carol e Murcia, 1989)

61.4.1.2.2 Com Newton-Raphson iterações em nível de elemento

72 Assim como a determinação do estado de 2D baseado em viga-pilar, em um processo não linear, o processo de determinação do Estado para o método misturado baseado em (rigidez e flexibilidade baseado com Newton-Raphson iteração loop no nível de elemento é composto de três fases como mostrado na figura. 61.12 para a seção, elemento e estrutura onde, sobrescrito j Na Fig. 61.12(b) denota o esquema de iteração no nível do elemento no processo de determinação do estado. Este laço de iteração é necessário para a determinação do elemento interno vetor de força nodal $\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e}$ que correspondem ao vetor nodal do elemento deslocamento $\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$ durante o k^{th} Iteração Newton-Raphson.

73 Para explicar este método, o Newton-Raphson é usado para o processo de iteração em nível estrutural. O processo de iteração em nível estrutural não afeta a estratégia para o processo de iteração em nível de elemento, que determina o vetor interno de força nodal do elemento $\tilde{\mathbf{f}}^{int}_{e}$ para o elemento dado vetor nodal deslocamento $\tilde{\mathbf{d}}_e$.

74 Em um elemento 2D baseado em flexibilidade-pilar, o primeiro passo é a determinação do vetor de força nodal $\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$ a partir do elemento atual vetor nodal deslocamento usando a matriz de elemento rigidez tangente $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j-1}_{e,n}$ no final da última iteração, e as funções de interpolação de força $\mathbf{N}_{f,e}(x)$ Então, renderá os vetores de força da seção $\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x)$ ao longo do elemento.

75 O primeiro problema é a determinação dos vetores de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}(x)$ da seção dada, vetores de força, já que a relação não linear entre força e deformação é comumente expressa como uma função explícita do vetor de deformação da seção. O

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

segundo problema surge do fato de que mudanças na seção rigidez tangente matrizes $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan}(x)$ produzir uma nova matriz de elemento rigidez tangente que, por sua vez, altera o vetor de força nodal do elemento dado vetor nodal deslocamento.

76 Esses problemas são resolvidos por um método especial de solução não linear. Neste método elemento residual nodal deslocamento vetor $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ é determinado em cada iteração. A compatibilidade no nível estrutural requer que este elemento residual nodal seja corrigido. Isso é feito no nível do elemento, aplicando elemento corretivo vetor de força nodal baseado na matriz atual do elemento rigidez tangente.

77 Os vetores de força correspondentes são determinados a partir das funções de interpolação de força para que o equilíbrio seja sempre satisfeito ao longo do elemento. Estes vetores de força de seção não podem mudar durante a determinação do estado da seção para manter o equilíbrio ao longo do elemento.

78 Finalmente, a aproximação linear da relação força-deformação seção sobre o estado atual resulta em vetores de deformação seção residual $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j}(x)$.. Estes são então integrados ao longo do elemento para obter novo elemento residual nodal deslocamento vetor e todo o processo é repetido até que a convergência ocorra.

79 É importante para tensão que a compatibilidade do elemento nodal deslocamento vetor e equilíbrio ao longo do elemento são sempre satisfeitos neste processo.

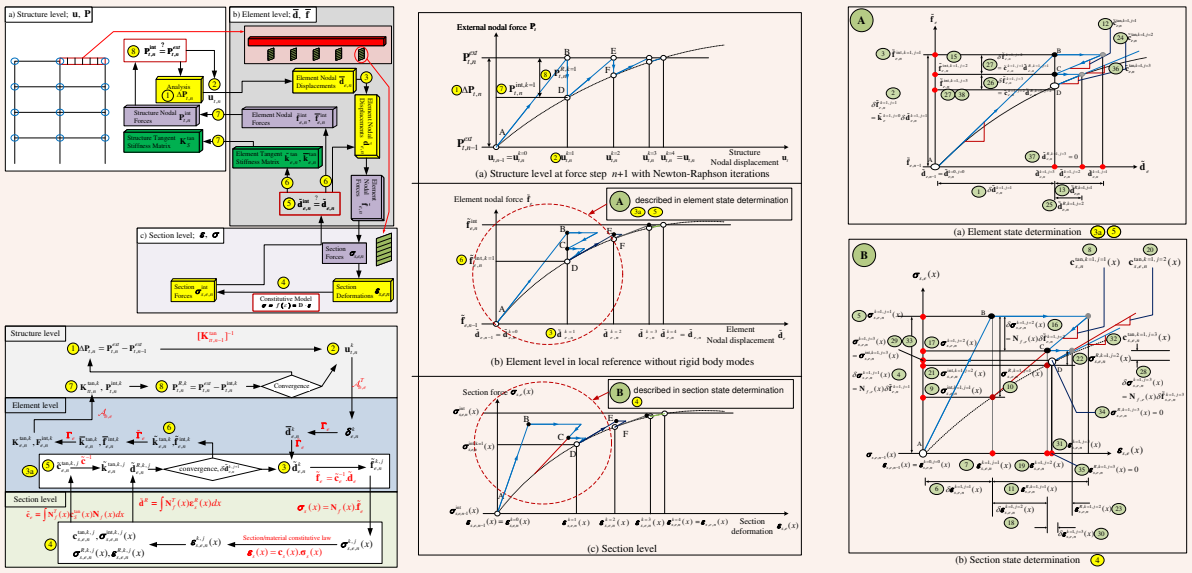
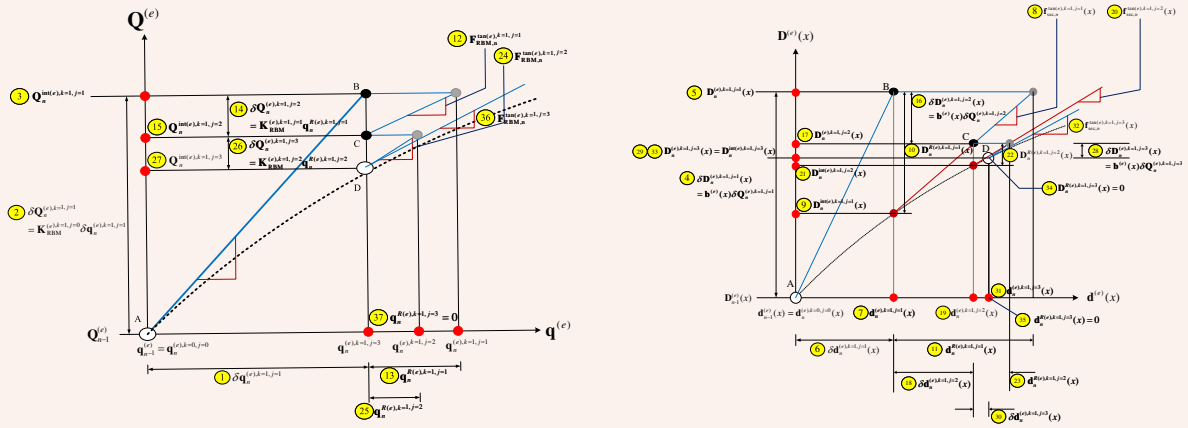


Figura 61.12: Determinação do estado para o elemento 2D baseado em viga (Taucer, Spacone e Filippou, 1991a)

80 O procedimento de solução não linear para a determinação do estado do elemento e seção são ilustrados na figura. 61.13a e.. 61.13b para uma iteração Newton-Raphson k.. Convergência em loop j é alcançado em três iterações.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Nível do elemento

(b) Nível da seção

Figura 61.13: Determinação do estado de elemento e seção para o elemento 2D baseado em viga-pilar com ciclo de iteração Newton-Raphson no nível de elemento

81 O objetivo do ciclo de iteração Newton-Raphson em nível de elemento é determinar o vetor interno de força nodal para o vetor atual nodal deslocamento k^{th} Iteração Newton-Raphson.

$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

82 Um processo iterativo na alavanca de elementos denotado através do superscrito j introduzido no interior da k^{th} Iteração Newton-Raphson.

83 A primeira iteração corresponde a $j = 1$.. O estado inicial do elemento, representado pelo ponto **A**, e $j = 0$ e.. $k = 0$ Na Fig. 61.13a, corresponde ao estado no final da última convergência em nível estrutural. Com o elemento inicial rigidez tangente matriz dada por:

$$\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k=1,j=0}_{e,n} = \tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{e,n-1}$$

e o elemento incremental dado vetor nodal deslocamento

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k=1,j=1}_{e,n} = \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k=1}_{e,n}$$

Portanto, o elemento incremental correspondente vetor de força nodal é

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k=1,j=1}_{e,n} = \left[\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k=1,j=0}_{e,n}\right]^{-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k=1,j=1}_{e,n}$$

84 Os vetores de força incrementais agora podem ser determinados a partir das funções de interpolação de força

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k=1,j=1}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k=1,j=1}_{e,n}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Com a seção tangente matrizes de flexibilidade no final da última convergência em nível estrutural

$$\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n-1}^{tan}(x)$$

A linearização da relação força-deformação de seção produz os vetores de deformação incremental.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

85 Os vetores de deformação da seção são atualizados para o estado que corresponde ao ponto **B** Na Fig. 61.13b.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=0}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

Assumindo que a relação força-deformação da seção é explicitamente conhecida por causa da simplicidade, então os vetores de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$ corresponderá aos vetores de força internos $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$ e uma nova seção tangente $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)$ Na Fig. 61.13b pode ser definido. Nesta abordagem, os vetores de força residuais são determinados pela primeira vez

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$$

e então são transformados em vetores residuais de deformação da seção $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$$

86 Os vetores de deformação da seção residual são, assim, a aproximação linear ao erro de deformações feito na linearização da relação força-deformação da seção (Fig. 61.13b). Enquanto qualquer seção adequada matrizes de flexibilidade pode ser usada no cálculo dos vetores de deformação da seção residual, a seção tangente matrizes de flexibilidade oferece a taxa de convergência mais rápida.

87 Os vetores de deformação da seção residual são integrados ao longo do elemento usando o princípio da força virtual para obter o elemento residual vetor nodal deslocamento.

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)\mathrm{d}x$$

88 Nesta fase, a primeira iteração $j = 1$ O ciclo de iteração correspondente está completo. O elemento final e a seção declaram para $j = 1$ corresponde ao ponto **B** Na Fig. 61.13a E Fig. 61.13b.. Os vetores de deformação da seção residual $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$ e o elemento residual nodal deslocamento vetor $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ são determinados na primeira iteração, mas o elemento correspondente vetor nodal deslocamento não é atualizado. Em vez disso, eles constituem o ponto de partida dos passos restantes dentro do ciclo de iteração j.. A presença de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

elemento residual nodal deslocamento vetor $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ viola a compatibilidade, uma vez que os elementos que compartilham um nó comum agora teriam vetor nodal deslocamento diferente.

89 Para restaurar a compatibilidade entre elementos, vetor de força corretiva $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ deve ser aplicado nas extremidades do elemento de acordo com Eq. 61.31.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1}\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}\\ \tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1} &= \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T\cdot\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)\cdot\mathbf{N}_{f,e}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{61.31}$$

Assim, na segunda iteração $j=2$, o elemento nodal vetor de força é atualizado para

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$$

e a seção força e deformação vetores são atualizados para

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}\\ \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) + \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\end{aligned}$$

90 O estado do elemento e as seções dentro do elemento no final da segunda iteração $j=2$ corresponde ao ponto **C** Na Fig. 61.13a E Fig. 61.13b.. A nova tangente $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ e os novos vetores de deformação da seção residual $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=2}(x)$ são computados para todas as seções.

91 Os vetores de deformação da seção residual são então integrados para obter o elemento residual vetor de deformações nodais $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=2}$ e o novo elemento tangente matriz de flexibilidade $\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ é determinado pela integração da seção matrizes de flexibilidade $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ De acordo com Eq. 61.31.. Isso completa a segunda iteração dentro do ciclo j.

92 A terceira e subseqüente iterações seguem exatamente o mesmo esquema. Convergência é alcançada quando o critério de convergência selecionado é satisfeito. Com a conclusão do ciclo de iteração j o vetor de força nodal do elemento interno para o vetor nodal dado $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$ são estabelecidos, como representado pelo ponto **D** Na Fig. 61.12, Fig. 61.13a, e Fig. 61.13b.. O processo de iteração Newton-Raphson pode agora prosseguir com o passo $k+1$.

93 Quando o elemento incremental nodal deslocamento vetor $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j=1} = \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ é adicionado ao elemento nodal deslocamento vetor $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1}$ No final da anterior iteração Newton-Raphson, é importante descobrir que o elemento nodal deslocamento vetor $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ Não mude, exceto na primeira iteração $j=1$ durante o ciclo de iteração j

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

94 Equilíbrio ao longo do elemento é sempre estritamente satisfeito, uma vez que vectores de força de seção são derivados do vetor de força nodal elemento pela interpolação de força funções de acordo com

$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} \quad \text{e} \quad \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

95 A compatibilidade também está satisfeita, não só nas extremidades do elemento, mas também ao longo do elemento.

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}^{k,j-1}_{e,n}\right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j-1}_{e,n} \\
\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x) + \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j-1}_{s,e,n}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x)
\end{aligned}$$

O segundo mandato de Eq. 61.32 expressam a relação entre vetores de deformação da seção e vetor nodal do elemento deslocamento. Os vetores de deformação da seção residual $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ Não satisfizer estritamente esta condição de compatibilidade. É possível satisfazer esta exigência pela integração dos vetores de deformação da seção residual $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ Para obter $\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j-1}_{e,n}$.. Uma vez que isso é, no entanto, bastante ineficiente do ponto de vista computacional, o pequeno erro de compatibilidade no cálculo dos vetores de deformação de seção residual $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ é negligenciado.

96 Enquanto equilíbrio e compatibilidade são satisfeitos ao longo do elemento durante cada iteração de loop j, a relação força-deformação seção e a relação elemento força- deformação só é satisfeito dentro de uma tolerância especificada quando a convergência é alcançada no ponto em Fig. 61.13a E Fig. 61.13b.

61.4.1.3 Análise não linear usando método baseado em flexibilidade

97 Com referência à Fig. 61.15a à Fig. 61.15c para o método com Newton-Raphson iteração loop em nível de elemento e Fig. 61.14a à Fig. 61.14c para o método sem iteração em nível de elemento, examinaremos um único passo do método Newton-Raphson no nível estrutural para análise não linear usando o método baseado em flexibilidade com a lei constitutiva da seção devido à força e controle deslocamento. Força e controle são discutidos em Sec. 59.. Procedimento de seção de camada/fibra na Fig. 61.4c será descrito em Sec. 61.4.

61.4.1.3.1 Sem iteração em nível de elemento

98 Com referência à Fig. 61.14.

Passo 1 Compute o vetor de força nodal $\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$.

$$\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Passo 2 Compute o vetor incremental nodal deslocamento $\delta \mathbf{u}_{t,n}$ e vetor total nodal deslocamento $\mathbf{u}_{t,n}$ em nível de estrutura. Inicialmente, a iteração começou pela Eq. 61.32 e.. $k = 1$.

If $k = 1$,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^k_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\ \mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}^k_{u,n} \\ \delta \mathbf{u}^k_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n} \delta \mathbf{u}^k_{u,n}] \\ \mathbf{u}^k_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^k_{t,n} \end{aligned} \tag{61.32}$$

If $k \neq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\ \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} \end{aligned} \tag{61.33}$$

Onde, sobrescrito k é o contador de iteração, $\mathbf{P}^R_t$ o vetor de força nodal residual em nível estrutural, $\Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ o vetor total incremental deslocamento da última etapa convergente, e $\delta \mathbf{u}^{k+1}_n$ o último vetor incremental deslocamento.

Passo 3 Passe por todos os elementos e determine o estado deles.

- Determine o vetor de elementos nodal deslocamento em referência global.

  If $k = 1$,

  $$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{u,n}$$

  If $k \neq 1$,

  $$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n}$$

  onde, $\mathcal{A}_{b,e}$ é o operador de extração.

  $$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

  e.. $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.
- Determine o elemento vetor nodal deslocamento em referência local.

  $$\begin{aligned} \delta \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} \\ \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} \end{aligned}$$

  e.. $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- Determine o elemento vetor nodal sem modos rígidos de corpo em referência local.

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

E, $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ e.. $\tilde{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ corresponde a.. $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ e.. $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

Passo 4 Determine o elemento vetor de força nodal sem modos rígidos do corpo

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

E, $\tilde{\mathbf{f}}^{k=0}_{e,n}$ e.. $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k=0}_{e,n}$ corresponde a.. $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n-1}$, e $\tilde{\mathbf{k}}^{tan}_{e,n-1}$.

Passo 5 Comece a determinação do estado da seção, passando as seções do elemento. O número total de seção pode variar de elemento para elemento. Portanto, o número total de seções em um elemento é nIp_{e} E depende do número de pontos de integração na regra da quadratura Gauss Lobatto.

- Determine o vetor de força da seção.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$

onde, $\mathbf{N}_{f,s,e}$ é a matriz derivada das funções de interpolação da força na s^{th} Seção do.. e^{th} Elemento, e $\boldsymbol{\sigma}^{k=0}_{s,e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n-1}$.

Passo 6 Determine o vetor de deformação da seção. Nós assumimos novamente uma seção geral. A determinação do estado de cada seção é realizada em loop s.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$$

E, $\mathbf{c}^{tan,k=0}_{s,e,n}$ e.. $\boldsymbol{\varepsilon}^{k=0}_{s,e,n}$ corresponde a.. $\tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{s,e,n-1}$ e.. $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n-1}$.

Passo 7 Determine a seção tangente matriz de flexibilidade e o vetor de força interno da seção. Se assumirmos que a lei constitutiva é explicitamente conhecida, $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ e.. $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ são ambos determinados a partir de $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$.. No entanto, na seção elástica, não precisamos calcular $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ novamente como é idêntico à seção inicial $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.

- Determine o vetor de força residual.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Passo 8 Determine o vetor de deformação residual.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}$$

Passo 9 Determine o elemento atualizado matriz de flexibilidade e o elemento residual nodal deslocamento vetor.

Os vetores de deformação da seção residual e a tangente da seção matrizes de flexibilidade são integrados ao longo do elemento usando o princípio complementar de trabalho virtual para obter o elemento residual vetor nodal deslocamento e o elemento tangente matriz de flexibilidade.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} &= \sum_{s} \mathbf{N}^{T}_{f,s,e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\
\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k}_{e,n} &= \sum_{s} \mathbf{N}^{T}_{f,s,e} \cdot \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\
\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} &= [\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k}_{e,n}]^{-1}
\end{aligned}$$

onde, $\mathrm{wt}_{s,e}$ é o coeficiente de peso associado com o Jacobian no s^{th} Seção do.. e^{th} Elemento.

Passo 10 Determine o elemento interno vetor de força nodal e a matriz do elemento rigidez tangente.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} \\
\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} - \tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n} \\
\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{T}_{e} \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} \\
\mathbf{F}^{int,k}_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e}{}^{T} \cdot \bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} \\
\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{T}_{e} \cdot \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \\
\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}^{T}_{e} \cdot \bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{e}
\end{aligned}$$

Passo 11 Determine o vetor interno de força nodal e a matriz aumentada.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{int,k}_{t,n} &= \sum_{e} \mathcal{A}^{T}_{b,e} \cdot \mathbf{F}^{int,k}_{e,n} \\
\mathbf{K}^{tan,k}_{S,n} &= \sum_{e} \mathcal{A}^{T}_{b,e} \cdot \mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} \, \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}$$

onde, $\mathcal{A}^{T}_{b,e}$ É o operador de montagem de força.

Passo 12 Calcular o vetor de força nodal residual a nível estrutural da Eq. 61.35.. Satisfazemos a convergência com o vetor de força nodal residual.

Verifique a convergência

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ está dentro da tolerância especificada, vá para o próximo incremento de força.
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ não está dentro da tolerância especificada, k é atualizado para $k+1$ e a próxima iteração Newton-Raphson inicia. Eq. 61.33 Em **Passo 2** através **Passo 12** são repetidos até que a convergência ocorra no nível da estrutura.

61.4.1.3.2 Com iterações de Newton-Raphson em nível de elemento

99 Com referência à Fig. 61.15.

Passo 1 Compute o vetor de força nodal incremental $\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$.

$$\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext}$$

Passo 2: Compute o nodal incremental deslocamento $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ e nodal total deslocamento $\mathbf{u}_{t,n}$ em nível de estrutura. Inicialmente, a iteração começou pela Eq. 61.34 e.. $k=1$.

If $k=1$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}_{u,n}^{k} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}_{u,n}^{k} \\
\delta\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k-1}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} - \mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k-1}\delta\mathbf{u}_{u,n}^{k}] \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= \mathbf{u}_{t,n}^{k-1} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k}
\end{aligned} \tag{61.34}$$

If $k \neq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} &= \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k} \\
\delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}]^{-1} \cdot \mathbf{P}_{t,n}^{R,k} \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^{k} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}
\end{aligned} \tag{61.35}$$

Onde, sobrescrito k é o contador de iteração, $\mathbf{P}_{t}^{R}$ o vetor de força nodal residual em nível estrutural, $\Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ o vetor total incremental deslocamento da última etapa convergente, e $\delta\mathbf{u}_{n}^{k+1}$ o último vetor incremental deslocamento.

Em Eq. 61.34, é necessário descrever explicar força / deslocamento controle e o aumentado matriz de rigidez $\mathbf{K}_S$ com $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$, e $\mathbf{K}_{uu}$ em detalhes. É mostrado em Sec. 59. onde, o aumento matriz de rigidez é dividido em dois grupos com respectivo subscrito 'uOnde os deslocamentos são conhecidos ou zero, e 't' onde as forças são conhecidas.

Passo 3: Passe por todos os elementos e determine o estado deles.

- Determinar o elemento nodal deslocamento vetor em referência global If $k=1$ If $k=1$,

$$\delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{u,n}^{k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

If $k \neq 1$

$$\delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

onde, $\mathbf{A}_{b,e}$ é o operador de extração.

$$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

e.. $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

- Determine o vetor nodal do elemento deslocamento em referência local

$$\delta\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta\boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$
$$\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} = \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$$

onde, $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

- Determine o vetor nodal do elemento sem modos rígidos de corpo em referência local

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}$$

onde, $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ e.. $\tilde{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ corresponde a.. $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ e.. $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

Passo 3a: Comece a determinação do estado do elemento. Passe por cima de todos os elementos da estrutura. A determinação do estado de cada elemento é realizada em loop j.

- Determine o elemento vetor de força nodal sem modos rígidos do corpo

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k,j-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$

onde, $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j=1}_{e,n}$, $\tilde{\mathbf{f}}^{k,j=0}_{e,n}$, e $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j=0}_{e,n}$ corresponde a.. $\delta\tilde{\mathbf{d}}^k_e$, $\tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n}$, e $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n}$.

Passo 4 Comece a determinação do estado da seção, passando as seções do elemento. O número total de seção pode variar de elemento para elemento. Portanto, o número total de seções em um elemento é nIp_e E depende do número de pontos de integração na regra da quadratura Gauss Lobatto.

- Determine o vetor de força da seção.

  Para a determinação do estado da seção, primeiro precisamos diferenciar entre seção geral e seção camada/fibra como descrito em Sec. 61.4.. Para o bem desta

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

descrição, consideramos apenas a seção geral. A determinação do estado de cada seção é realizada dentro da alça s onde o subscrito corresponde ao s^{th} Seção.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$

onde, $\mathbf{N}_{f,s,e}$ é a matriz derivada das funções de interpolação de força em s^{th} Seção de e^{th} Elemento, e $\boldsymbol{\sigma}^{k,j=0}_{s,e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}$.

- Determine o vetor de deformação da seção.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n} + \mathbf{c}^{tan,k,j-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$$

E, $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j=0}_{s,e,n}$ e.. $\mathbf{c}^{tan,k,j=0}_{s,e,n}$ corresponde a.. $\boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}$ e.. $\mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n}$, e $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j=0}_{s,e,n} = 0$.

- Determine a seção tangente matriz de flexibilidade e o vetor de força interno da seção. Se assumirmos que a lei constitutiva é explicitamente conhecida, $\mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n}$ e.. $\boldsymbol{\sigma}^{int,k,j}_{s,e,n}$ são ambos determinados a partir de $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$.. No entanto, na seção elástica, não precisamos calcular $\mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n}$ novamente como é idêntico à seção inicial $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.
- Determine a força residual e vetor de deformação.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n}$$

Passo 5 Determine o elemento atualizado matriz de flexibilidade e o elemento residual nodal deslocamento vetor.

Os vetores de deformação da seção residual e a tangente da seção matrizes de flexibilidade são integrados ao longo do elemento usando o princípio complementar de trabalho virtual para obter o elemento residual vetor nodal deslocamento e o elemento tangente matriz de flexibilidade.

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j}_{e,n} = \sum_s \mathbf{N}^T_{f,s,e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j}_{s,e,n} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j}_{e,n} = \sum_s \mathbf{N}^T_{f,s,e} \cdot \mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j}_{e,n}]^{-1}$$

onde, $\mathrm{wt}_{s,e}$ é o coeficiente de peso associado com o Jacobian no s^{th} Seção do.. e^{th} Elemento.

Convergência ao nível do elemento deve ser satisfeita com o elemento residual nodal deslocamento vetor.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- If $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ está dentro da tolerância especificada, vá para **Passo 6**.
- If $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ não está dentro da tolerância especificada, j e.. $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j+1}$ são atualizados para $j+1$ e.. $-\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$, e a próxima iteração Newton-Raphson inicia. Nós então repetimos **Passo 3a** através **Passo 5** até que a convergência ocorra no nível do elemento.

Passo 6 Determine o elemento interno vetor de força nodal e a matriz do elemento rigidez tangente.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k,j} \\
\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e}^{T} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \mathbf{\Gamma}_{e}^{T} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} &= \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \\
\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} \\
\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e}^{T} \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e} \\
\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \mathbf{\Gamma}_{e}^{T} \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{\Gamma}_{e}
\end{aligned}$$

Passo 7 Determine o vetor interno de força nodal e a matriz aumentada.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_{e} \mathcal{A}_{b,e}^{T} \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_{e} \mathcal{A}_{b,e}^{T} \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}$$

onde, $\mathcal{A}_{b,e}^{T}$ é o operador de montagem de força, e $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ é composto por $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$, e $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

Passo 8 Calcular o vetor de força nodal residual a nível estrutural da Eq. 61.35.. Satisfazemos a convergência com o vetor de força nodal residual.

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ está dentro da tolerância especificada, vá para o próximo incremento de força.
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ não está dentro da tolerância especificada, k é atualizado para $k+1$ e a próxima iteração Newton-Raphson inicia. Eq. 61.35 Em **Passo 2** através **Passo 8** são repetidos até que a convergência ocorra no nível da estrutura.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

61.4.2 Rigidez *vs.* flexibilidade elementos baseados

100 Mesa 61.2 E Fig. 61.16 destacar as diferenças entre os elementos baseados em rigidez e flexibilidade

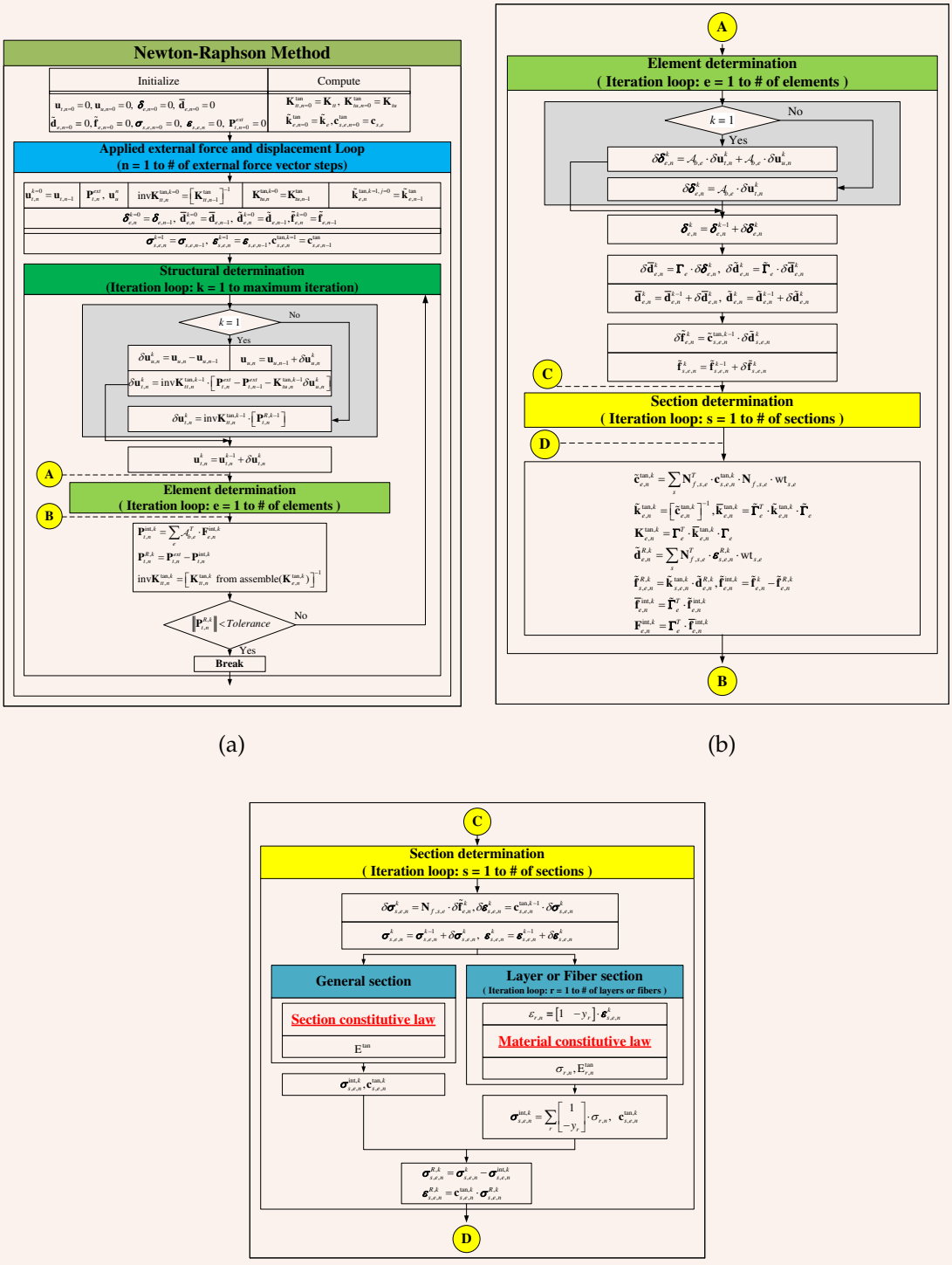
Tabela 61.2: Comparação de flexibilidade com elementos baseados em rigidez

	Flexibilidade	**Rigidez**
Princípio	Complementar trabalho virtual	Trabalho virtual
Indeterminação	Estático	Kinematic
Forma forte	Kinematic	Equilíbrio
Forma Fraca	Equilíbrio	Kinematic
Função de Interpolação	Campo de força (Exacto)	Deslocamento campo(Suposição)
Lei Constitutiva	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{d}(x)$	$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{D}(x)$
Desconhecidos Primários	Elemento forças finais	Fim do elemento deslocamentos
Discretização	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q}$	$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{q}}$
Matriz	$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}(x)\mathbf{b}(x)\mathrm{d}x$	$\mathbf{k}_{(ele)} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{k}(x)\mathbf{B}(x)\mathrm{d}x$

Please note that this section contains floating elements (figures and/or tables) that need to be printed before the next one. As a result, you may encounter blank spaces or gaps in here.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) (b)

(c)

Figura 61.14: Fluxograma de análise não linear usando método baseado em flexibilidade sem iteração no nível de elemento

CÓPIA PARA REVISÃO

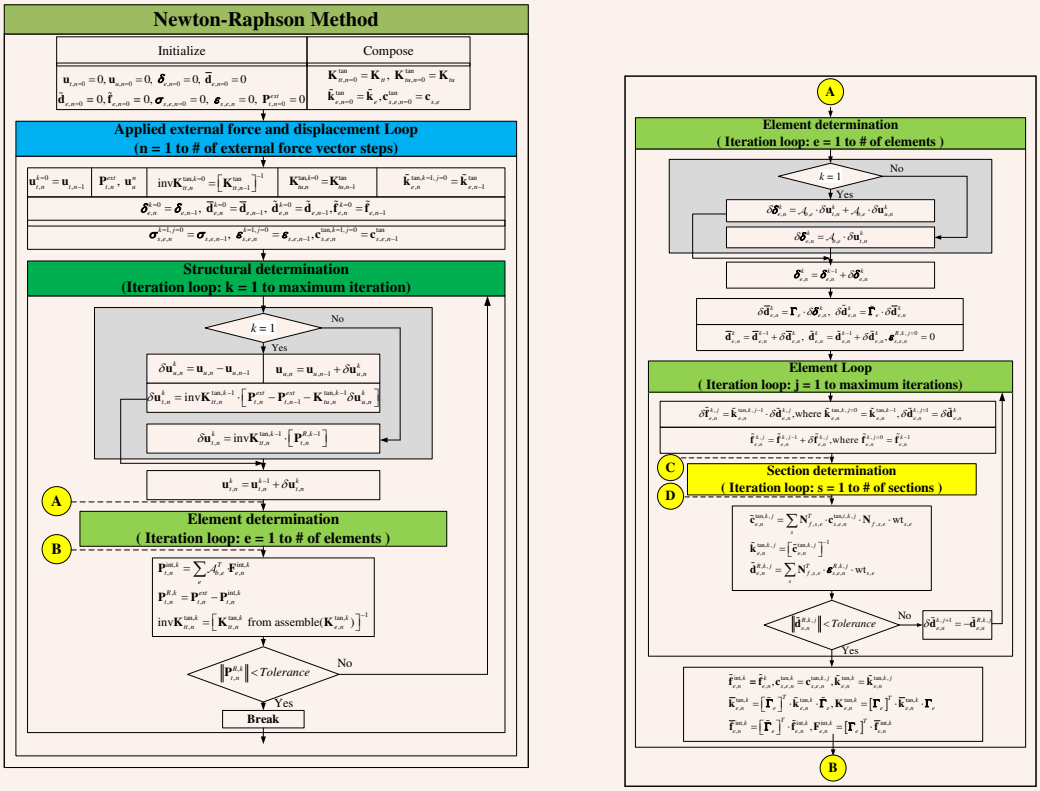


Figura 61.15: Fluxograma de análise não linear usando método baseado em flexibilidade com iteração Newton-Raphson no nível de elemento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

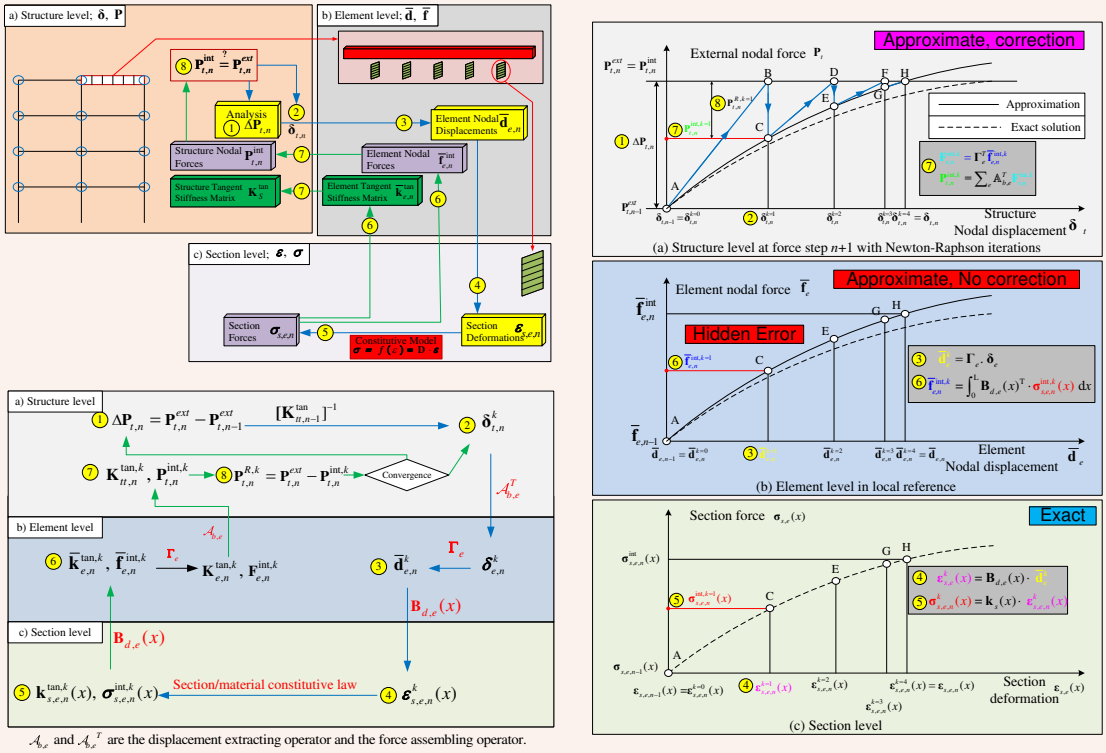


Figura 61.16: Comparação de rigidez baseado *vs.* flexibilidade formulação baseada

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

61.5 Formulação de elementos 2D de comprimento zero

101 Juntas de elementos estruturais ou elementos com força concentrada podem ter rótulas plásticas ou não linearidades. Nestes casos, os nós finais ou nós com força concentrada precisam de vários modelos constitutivos de plasticidade§62.3).

102 Geralmente, o elemento de comprimento zero é usado no final de viga ou viga-pilar elementos para reproduzir a rotação adicional ou falha cisalhamento, como barra-derrapante Fig. 61.17a.

103 A formulação do elemento é baseada na figura. 61.17.. O efeito acoplado das forças de seção neste elemento é ignorado.

Lei constitutiva A lei constitutiva da seção é expressa como

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ V_y \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EIz^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{sec}^{tan}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{x2} - u_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \end{Bmatrix}}_{.\mathbf{d}} \tag{61.36}$$

onde, EA^{tan}, GA^{tan} e.. EIz^{tan} são rigidez tangente relacionada com axial, cisalhamento e momento.

Equilíbrio A relação entre a força nodal do elemento e o vetor deslocamento,

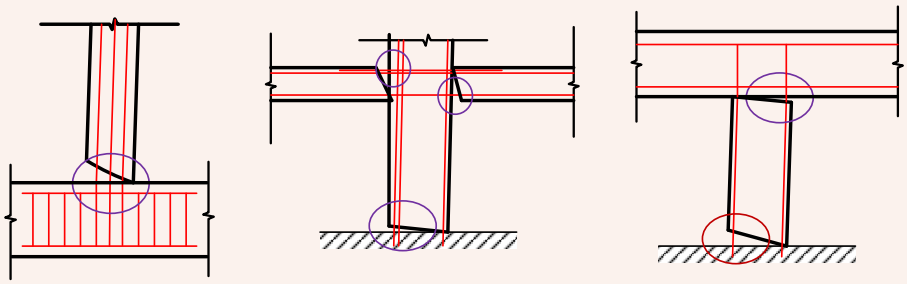
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \bar{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ \overline{v}_{y1} \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ \overline{v}_{y2} \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

onde, $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ é o elemento matriz de rigidez em referência local.

$$\bar{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 & -EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 & 0 & -GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EI_z^{tan} & 0 & 0 & -EI_z^{tan} \\ -EA^{tan} & 0 & 0 & EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan} & 0 & 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_z^{tan} & 0 & 0 & EI_z^{tan} \end{bmatrix} \tag{61.37}$$

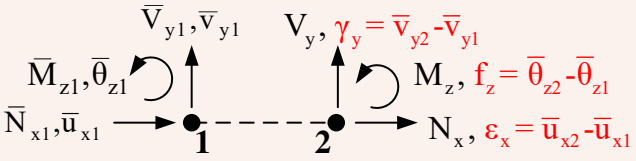
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

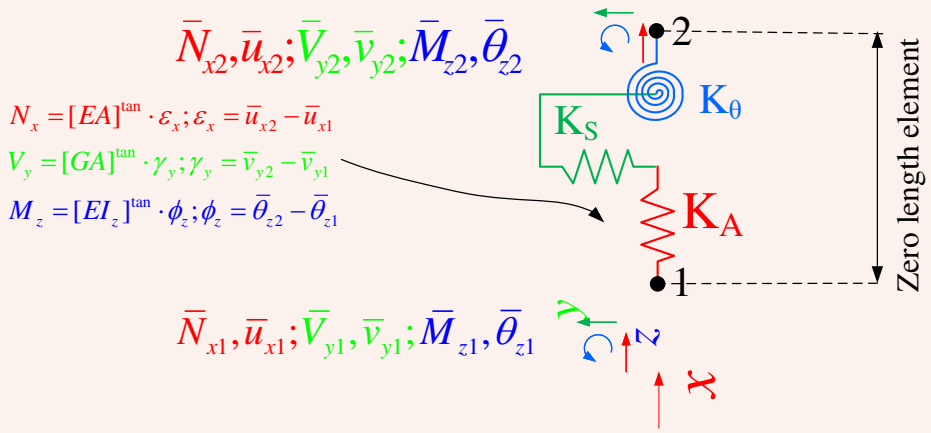


(1) Wall (2) Frame (3) Bridge

(a) Aplicação



(b) Conectividade



(c) Equilíbrio

Figura 61.17: Elemento 2D de comprimento zero

61.5.1 Sistema de coordenadas em elemento 2D de comprimento zero

104 Sistema de coordenadas em elemento 2D de comprimento zero é o mesmo que Sec. 61.3.1.1.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

61.5.2 Determinação do estado do elemento com 2 Dimensões e 3 graus de liberdade por nó

105 Com referência à Fig. 61.18Examinaremos um único passo de elemento 2D de comprimento zero para análise não linear.

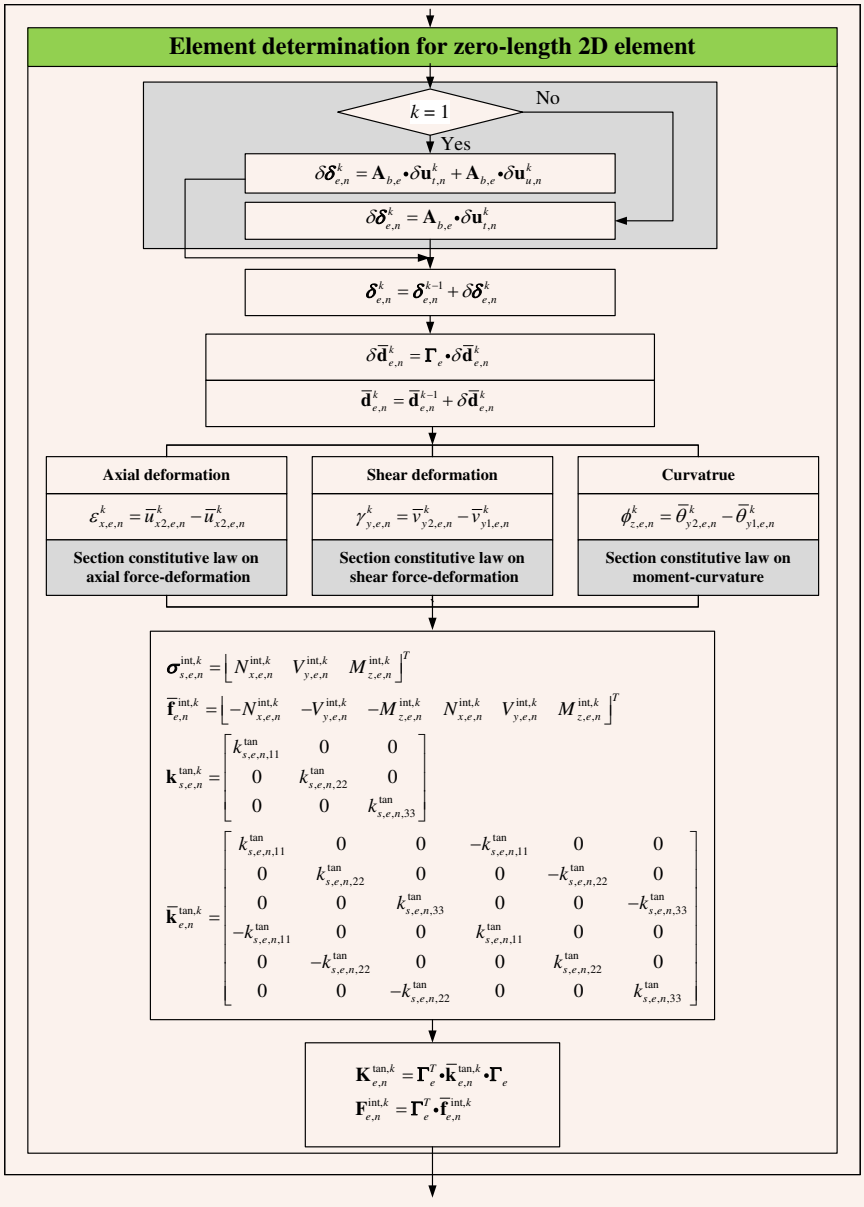


Figura 61.18: Gráfico de fluxo do elemento 2D de comprimento zero para determinação do estado do elemento

CÓPIA PARA REVISÃO

Passo 1: Determine o vetor de deformação da seção, deformação axial, deformações e curvaturas.

Para cada deformação, extraímos os componentes associados de $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,n},\ \gamma^k_{y,n},\ \kappa^k_{z,n} \rfloor^T \\ \varepsilon^k_{x,n} &= \overline{u}^k_{x2,n} - \overline{u}^k_{x2,n} \\ \gamma^k_{y,n} &= \overline{v}^k_{y2,n} - \overline{v}^k_{y2,n} \\ \kappa^k_{z,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,n} - \overline{\theta}^k_{z2,n}\end{aligned}$$

A segunda, terceira e quarta equações correspondem à deformação da seção axial, deformação cisalhamento e curvatura.

Passo 2: Determine a seção rigidez tangente associada à deformação-força axial, força cortante-deformação, e momento-curvatura na seção leis constitutivas, para fazer isso, podemos usar as leis contitutivas da seção modificadas com várias variáveis em função de Lei constitutiva material associada à relação uniaxial tensão-deformação (Ch. 62). E então determine o vetor de força interno. Se assumirmos que a lei constitutiva é explicitamente conhecida, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ e.. $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ são determinados a partir $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$.. No entanto, na seção elástica, não precisamos calcular $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ novamente como é idêntico à seção inicial $\mathbf{k}_{s,e}$.

Se tivermos uma seção elástica,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\ \underbrace{\begin{Bmatrix} N^k_x \\ V^k_y \\ M^k_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^k_{x,n} \\ \gamma^k_{y,n} \\ \kappa^k_{z,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}}\end{aligned}$$

onde, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ é a seção rigidez tangente matriz em k^{th} iteração.

Passo 3: Determinar o elemento interno vetor de força nodal e a matriz do elemento rigidez tangente da Eq. 61.37.

$$\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \lfloor N^k_x, V^k_y, M^k_z, -N^k_x, -V^k_y, -M^k_z \rfloor^T$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan,k} = \begin{bmatrix} EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 \\ 0 & GA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -GA_{e,n}^{tan,k} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{z,e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -EI_{z,e,n}^{tan,k} \\ -EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 \\ 0 & -GA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & GA_{e,n}^{tan,k} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_{z,e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & EI_{z,e,n}^{tan,k} \end{bmatrix}$$

onde, $\overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ é o elemento rigidez tangente matriz em referência local.

Nós determinamos $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ e.. $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \mathbf{\Gamma}_e{}^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \mathbf{\Gamma}_e{}^T \cdot \overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{\Gamma}_e$$

61.6 Elemento de seção de comprimento zero

106 Elemento de seção com comprimento zero é análogo ao elemento de comprimento zero, no entanto, ele usa camada/fibra. Este elemento nos permite *modelar a mudança no centro de rotação da seção que pode ocorrer* (em bar-derrapante, por exemplo). O elemento é formulado com base em Acoplado força axial e momento, Fig. 61.19.

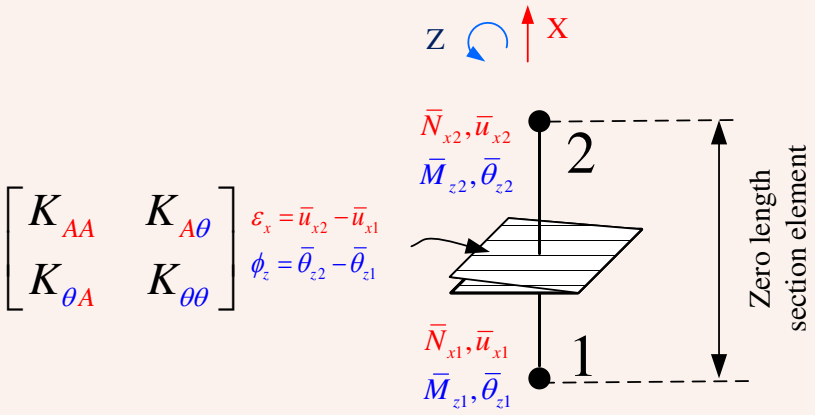


Figura 61.19: Elemento de seção de comprimento zero, equilíbrio

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

61.6.1 Matriz de rigidez

Lei constitutiva A lei constitutiva da seção é expressa como

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} N_x \\ M_z \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{array}\right]}_{\mathbf{k}_s^{tan}} \cdot \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1} \\ \overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_s}$$

onde, $\mathbf{k}_s^{tan}$ é a seção rigidez tangente de matriz obtida da determinação do estado de camada/fibra.

Equilíbrio Elemento de seção zero é baseado na teoria de Bernoulli viga. Considerando.. Equações de equilíbrio entre os pontos A e B.

$$\begin{aligned} \overline{N}_{x1} &= k_{s,11}^{tan} \cdot (\overline{u}_{x1} - \overline{u}_{x2}) + k_{s,12}^{tan} \cdot (\overline{\theta}_{z1} - \overline{\theta}_{z2}) \\ \overline{M}_{z1} &= k_{s,21}^{tan} \cdot (\overline{u}_{x1} - \overline{u}_{x2}) + k_{s,22}^{tan} \cdot (\overline{\theta}_{z1} - \overline{\theta}_{z2}) \end{aligned}$$

Da mesma forma entre o ponto B e o ponto C,

$$\begin{aligned} \overline{N}_{x2} &= k_{s,11}^{tan} \cdot (\overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1}) + k_{s,12}^{tan} \cdot (\overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1}) \\ \overline{M}_{z2} &= k_{s,21}^{tan} \cdot (\overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1}) + k_{s,22}^{tan} \cdot (\overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1}) \end{aligned}$$

107 Reescrevendo esses dois conjuntos de equações em forma de matriz, a relação entre a força nodal do elemento e o vetor deslocamento é dada por

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{N}_{x1} \\ 0 \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ 0 \\ \overline{M}_{z2} \end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{f}}_e} = \overline{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_{x1} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z2} \end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{d}}_e}$$

onde, $\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$ é o elemento matriz de rigidez em referência local.

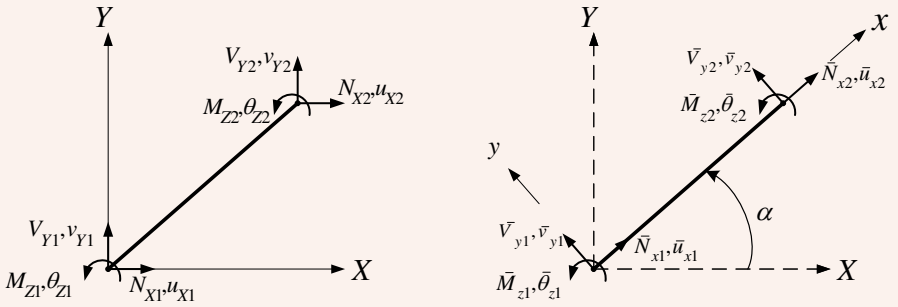
$$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan} = \left[\begin{array}{cccccc} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} & -\mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} & -\mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,22}^{tan} \\ -\mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12}^{tan} & \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,22}^{tan} & \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{array}\right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

61.6.2 Sistema de coordenadas

107 Sistema de coordenadas em elemento 2D de comprimento zero é o mesmo que em elemento rigidez, Fig. 61.20



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

Figura 61.20: Sistema de coordenadas para o elemento de seção de comprimento zero

$$\mathbf{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

61.6.3 Determinação do estado do elemento

108 Determinação do estado para o elemento de seção zero, Fig. 61.21 é o seguinte:

Passo 1: Determine o vetor de deformação da seção, deformação axial e curvatura. Para cada deformação, extraímos os componentes associados de $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \lfloor \overline{u}^k_{x1,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z1,e,n}\ \overline{u}^k_{x2,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \rfloor^T \\
\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,e,n},\ \phi^k_{z,e,n} \rfloor^T \\
\varepsilon^k_{x,e,n} &= \overline{u}^k_{x2,e,n} - \overline{u}^k_{x2,e,n} \\
\phi^k_{z,e,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,e,n} - \overline{\theta}^k_{z2,e,n}
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

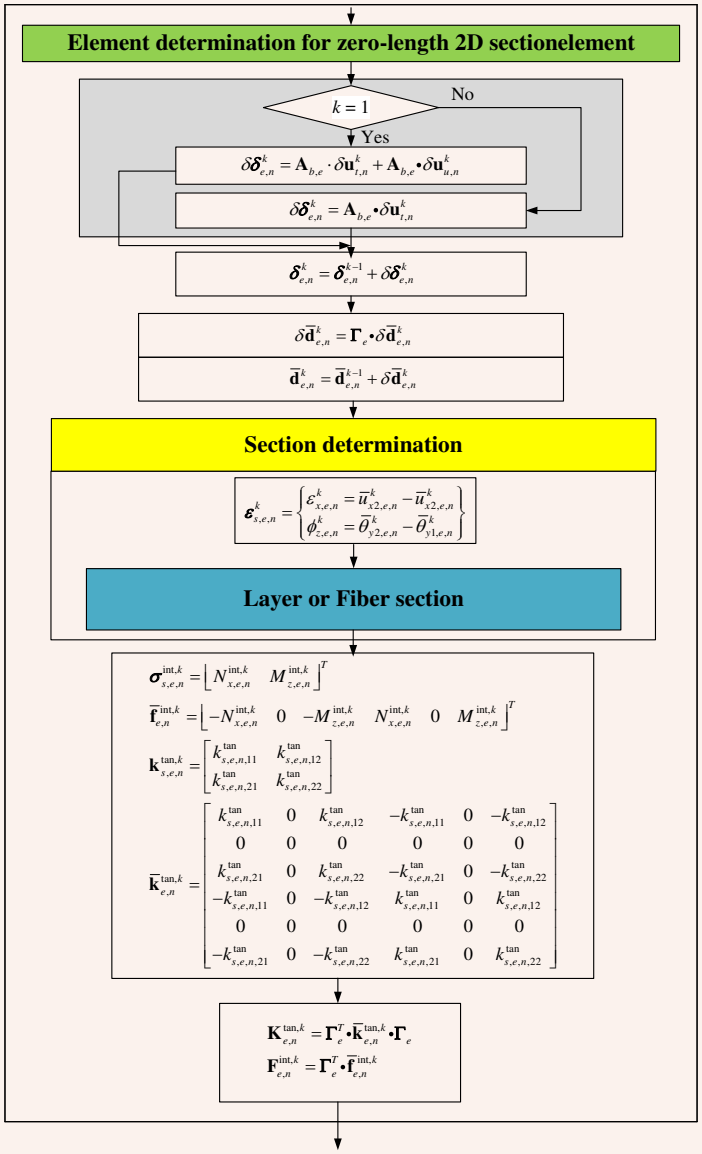


Figura 61.21: Fluxograma para elemento de seção zero

Passo 2: Determine a seção rigidez tangente associada com deformação e curvação do momento usando determinação da camada/estado de fibra como para Camada/fibra. Determine o próximo vetor de força interno. Se assumirmos que a lei constitutiva material é explicitamente conhecida, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ e.. $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ são determinados a partir $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$.. No entanto, na seção com material elástico, não precisamos calcular $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ novamente

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

como é idêntico à seção inicial $\mathbf{k}_{s,e}$. Se tivermos uma seção com material elástico, então

$$\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} = \mathbf{k}_{s,e}$$
$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N^{int,k}_{x,e,n} \\ M^{int,k}_{z,e,n} \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} = \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^{k}_{x,e,n} \\ \phi^{k}_{z,e,n} \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}}$$

onde, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ é a seção rigidez tangente matriz em k^{th} iteração.

Passo 3: Determine o Elemento interno vetor de força nodal e a matriz do elemento rigidez tangente

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \lfloor N^{int,k}_{x,e,n}, 0, M^{int,k}_{z,e,n}, -N^{int,k}_{x,e,n}, 0, -M^{int,k}_{z,e,n} \rfloor^T$$
$$\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,12} & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} \\ -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,12e,n,} & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} \end{bmatrix}$$

onde, $\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ é o elemento rigidez tangente matriz em referência local.

109 Nós determinamos $\mathbf{F}^{int,k}_{e,n}$ e.. $\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\mathbf{F}^{int,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$
$$\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

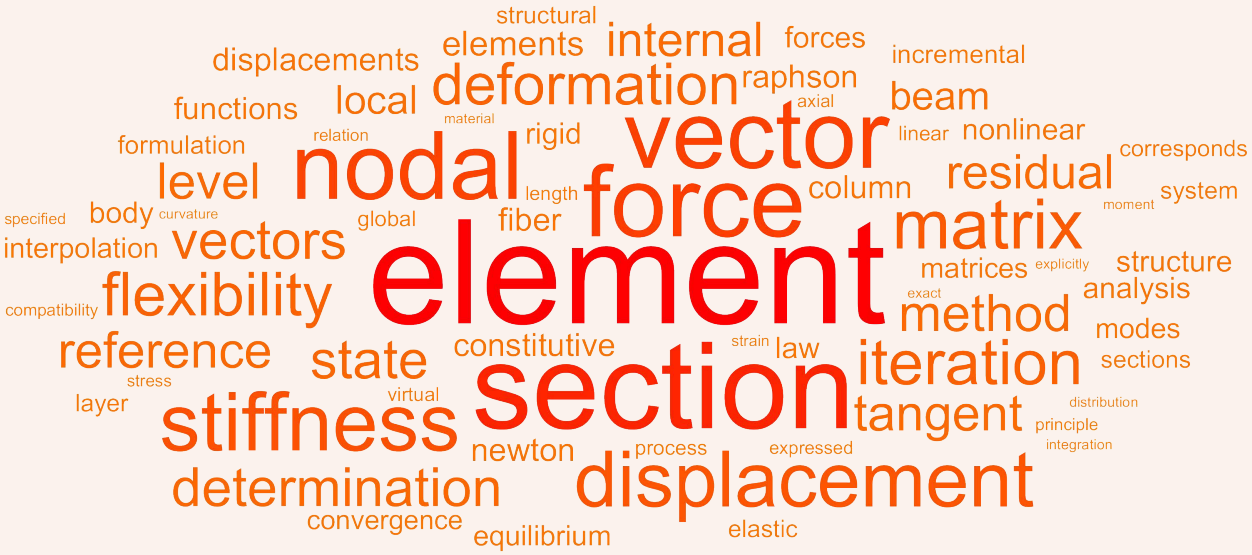
61.7 Integração numérica

110 Pontos de integração: Normalmente 3 (Gauss) para rigidez baseado, e 5 (Gauss-Lobatto) para (flexibilidade baseado (§51.3).

61.8 Força do elemento

111 Forças nodais do elemento são determinadas como §51.4.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 62

Modelos constitutivos para a plasticidade distribuída e lumpida

Abstract

Este capítulo investiga o desenvolvimento e aplicação de modelos avançados de análise não linear cruciais para engenharia sísmica baseada em desempenho (capítulo 72). Estes modelos visam simular o comportamento das estruturas desde o início do dano até o colapso completo, fornecendo parâmetros de demanda da engenharia que se correlacionam com medidas de danos. Força de modelagem adequada e deterioração rigidez, bem como $P - \Delta$ efeitos, é fundamental para representar respostas dinâmicas.

O capítulo fornece uma exploração detalhada das abordagens de plasticidade distribuídas e grupadas. Para plasticidade distribuída, fibras ou elementos em camadas são examinados para desenvolver relações não lineares tensão-deformação, enquanto a plastificação grudada é caracterizada através de relações não-lineares momento-curvatura. A discussão se estende a modelos constitutivos de aço e concreto, destacando aspectos fundamentais como carregamento cíclico, degradação rigidez, enrijecimento da tensão, e o impacto do confinamento nas propriedades do concreto. Modelos de materiais notáveis, incluindo o modelo Kent e Park modificado e o modelo de aço Menegotto-Pinto, são analisados por sua capacidade de capturar respostas complexas não lineares.

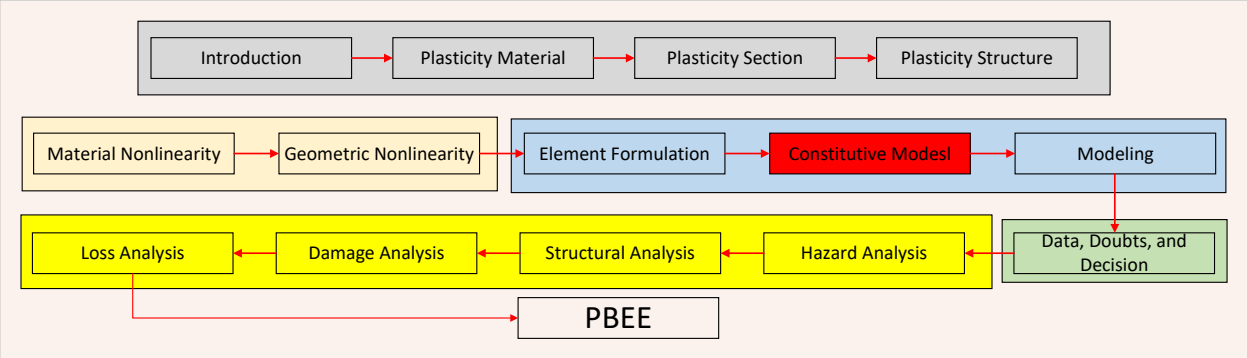
Embora os modelos heurísticos e fenomenológicos dominem, o capítulo reconhece suas limitações e introduz abordagens refinadas para cenários específicos, incluindo modelos de danos anisotrópicos. Este quadro abrangente fornece as ferramentas teóricas e práticas necessárias para prever e avaliar o desempenho estrutural em condições extremas, tais como eventos sísmicos, garantindo simulações confiáveis e realistas críticas para a estrutura moderna Aplicações de engenharia

---

62.1 Introdução 2073
62.1.1 Termoelasticidade linear . . 2074
62.1.2 Modelos heurísticos 2075
62.2 Plasticidade distribuída 2076
62.2.1 Modelos de aço 2076
62.2.2 Modelos de concreto 2087
62.2.3 Modelo de dano anisotrópico com danos efetivos e recuperação 2100
62.2.4 Bond-slip 2114
62.2.5 Elemento de seção de comprimento zero 2117
62.3 Plasticidade amassada 2119
62.3.1 Comprimento de plástico . . 2120

CÓPIA PARA REVISÃO

62.3.2 Cisalhamento modelo de falha (estado limite material) . 2129
62.3.3 Modelos histeréticos de Ibarra incorporando dissipação de energia 2134
62.3.4 Modelo de Ghannoum . . . 2155



62.1 Introdução

1 Modelos constitutivos estão no coração da análise não linear elemento finito (material). Em elemento finito de sólidos como eles dependem da avaliação de $\mathbf{K}^{(e)}$ (Eq. 50.12). No entanto, no contexto da nossa análise não linear de elementos viga-pilar, precisamos $\overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ (Eq. 61.14) ou mais especificamente E^{tan} (Eq. 61.18).

2 Modelos "clássicos" unidimensionais baseados na plasticidade do aço foram abordados na primeira apresentação sobre plastificação; todos os outros modelos são desenvolvidos heuristicamente para representar da melhor forma a resposta cíclica não linear de interesse. Duas partes, Fig. 62.1:

- Foco principal em elementos de fibra/camadas (assim Plasticidade distribuída), onde buscamos o Não-linear tensão-deformação Relacionamento[1].
- Plasticidade amassada para ser caracterizado por relações não lineares momento-curvatura.

[1] Elementos de comprimento zero também podem ser caracterizados por relações não lineares.

CÓPIA PARA REVISÃO

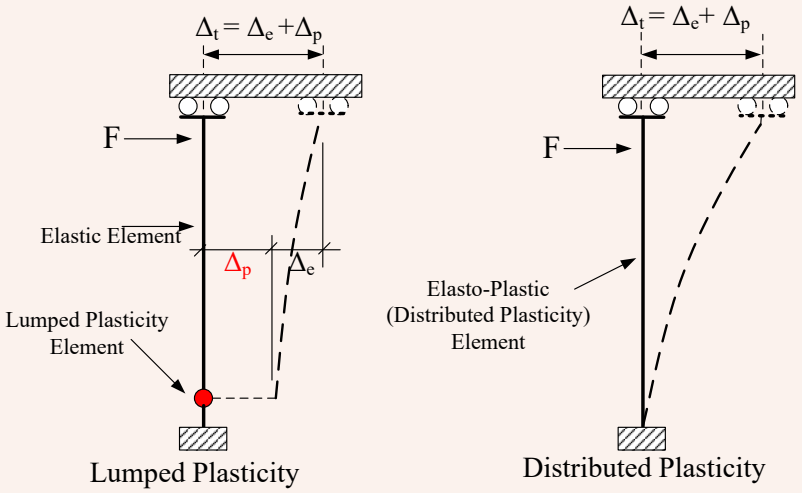


Figura 62.1: Modelos de plasticidade misturados e distribuídos

62.1.1 Termoelasticidade linear

3 É assim que deve ser. De.. *mecânica do contínuo*Nós escolhemos para um convexo *potencial termodinâmico* uma função quadrática definitiva positiva nos componentes do tensor deformação.

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}\mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$$

e por definição $\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$ Que é a lei de Hooke.

4 Isotropia e linearidade exigem que o potencial Ψ ser um invariante quadrático do tensor deformação, ou seja, uma combinação linear do quadrado da primeira invariante $\varepsilon_I^2 = [\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$E o segundo invariante $\varepsilon_{II}^2 = \frac{1}{2}\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\varepsilon_I^2 + 4\mu\varepsilon_{II}\right) - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\varepsilon_I\right] - \frac{C_\varepsilon}{2T_0}\theta^2$$

Onde λ e.. μ são Os parâmetros de merda.

5 Diferenciando

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &\quad \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\mathbf{I}\\ \sigma_{ij} = &\quad \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\delta_{ij}\end{aligned}$$

6 Em última análise, buscamos capturar a complexa resposta não linear de estruturas de aço e concreto armado submetidas ao carregamento cíclico reverso (terremotos).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

7 Há muito poucos modelos termodinamicamente enraizados que podem conseguir isso (exceto aqueles baseados em mecânica do dano).

8 Por isso, contaremos com *Modelos heurísticos*

62.1.2 Modelos heurísticos

9 Modelos heurísticos são baseados em observações laboratoriais resultando em relações empíricas.

10 Todos os modelos apresentados posteriormente 62.2) vai cair nessa categoria e são assim *fenomenológico* Modelos.

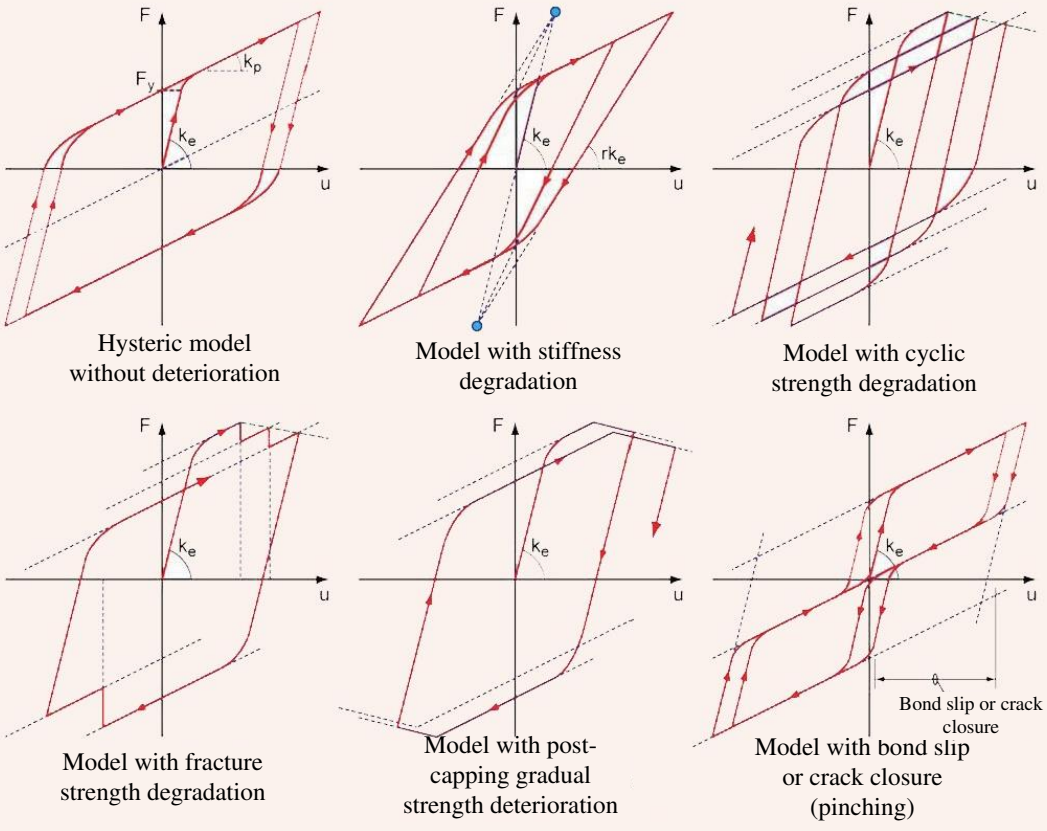


Figura 62.2: Modelos histeréticos

11 Nós procuramos capturar

Degradação do concreto

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Força de concreto ou aço

- Tensão
- Tensão e Compressão

Rigidez Que diminuirá com danos

Fechamento do crack como resultado da inversão de carga.

12 Vamos abordar separadamente modelos de aço e concreto (assim como fizemos em §55.2).

62.2 Plasticidade distribuída

62.2.1 Modelos de aço

Da tese de doutorado de "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" por Kang, 2010.

62.2.1.1 Introdução

13 Modelo de aço para excitação cíclica aleatória apresentam apenas pequenas dificuldades. A maioria dos modelos é heurística, analíticamente definida, e os mais bem sucedidos são aqueles com parâmetros variáveis.

14 Dentro deste grupo, distinguemos três formulações diferentes:

Algébrico explícito equação da tensão: $\sigma = f(\varepsilon)$.

Álgebra implícita equação da tensão: $f(\sigma, \varepsilon) = 0$.

Equação diferencial (Primeira ordem): $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = E^p = f(\sigma)$

15 Um modelo explícito comumente usado é:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = b\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{(1-b)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^R\right] 1/R}$$

Onde σ_0, ε_0, b, e R são o rendimento tensão e deformação, parâmetro encruamento, e um coeficiente que explica o efeito Baushinger (Fig. 55.5b) e varia dependendo da magnitude da excursão ε_{max} para o alcance inelástico.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.2.1.2 Modelo bilinear com endurecimento isotrópico

16 Enquanto o modelo anterior está enraizado na teoria da plasticidade, sua implementação pode ser problemática. Alternativamente, um modelo fenomenologicamente semelhante pode ser derivado baseado em (Filippou, Popov e Bertero, 1983) e como implementado em (Mazzoni et al., 2006).

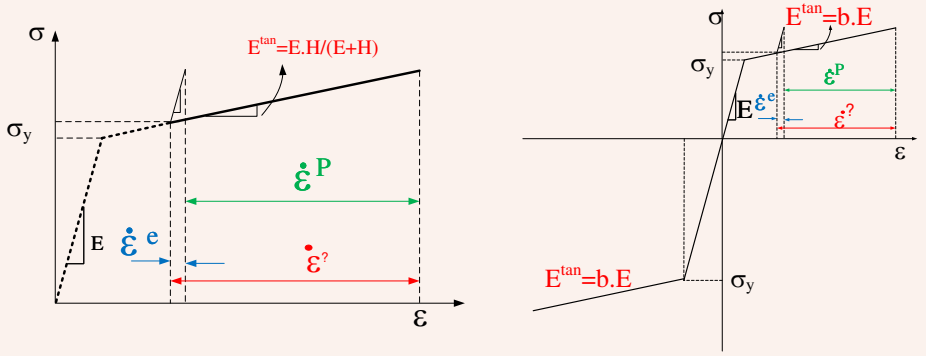
62.2.1.2.1 Tensão-deformação relação

17 Em vez de determinar o E^{tan} com H De Eq. 55.12, Fig. 62.3a

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

este modelo simplificado calcula-o através de um coeficiente deformação-endurecimento b que é a proporção do módulo tangente pós-rendimento E^{tan} E o módulo elástico inicial E, e considera apenas o endurecimento isotrópico, Fig. 62.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$



(a) Modelo de plasticidade

(b) Bilinear & Modelo Menegotto-Pinto

Figura 62.3: Comparação de módulo Tangent; plasticidade vs. Menegotto-Pinto

18 Para explicar a evolução do domínio elástico no endurecimento isotrópico, um deslocamento tensão σ_Δ é determinado como segue:

- Se o incremental deformação $\Delta\varepsilon$ muda um valor positivo em negativo:

$$\begin{aligned} \Delta^N &= 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8} \\ \sigma_\Delta &= \Delta^N \cdot \sigma_y \cdot (1-b) \end{aligned} \tag{62.1}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- Se o incremental deformação $\Delta\varepsilon$ muda um valor negativo em positivo:

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\sigma_\Delta = \Delta^P \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \tag{62.2}$$

onde,

- a_1 e.. a_3 são parâmetros de endurecimento isotrópicos que refletem um aumento do envelope de escoamento de compressão através de uma fração da resistência ao rendimento após um plástico deformação $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$, e o envelope de rendimento de tensão como uma fração da resistência ao rendimento após um plástico deformação de $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$.
- a_2 e.. a_4 são parâmetros isotrópicos de endurecimento com respeito a a_1 e.. a_3, e ε_{max} e.. ε_{min} são o deformação no ponto de inversão máximo e mínimo deformação. O fator limitante deste modelo é que a_1, a_2, a_3 e.. a_4 deve ser determinado através de ajuste da curva do modelo com resultados experimentais. Os valores padrão são $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$, e $a_4 = 55$ Em (Mazzoni et al., 2006).

62.2.1.2.2 Determinação para o modelo bilinear

Fig. 62.4 mostra o procedimento para obter uniaxial tensão

19 σ e módulo tangente E^{tan} de uniaxial deformação ε.

62.2.1.3 Modelo Menegotto-pinto

20 Este modelo é essencialmente uma extensão do anterior. Introduz uma curva suave, pois capta melhor o comportamento dos dados experimentais. Além disso, descontinuidades podem causar problemas de convergência em uma análise não linear. Por isso, foi refinado por Menegotto e Pinto, 1973 para ter uma curva suave, e modificada por Filippou, Popov e Bertero, 1983 para incluir isotrópico encruamento e encruamento, Fig. 62.5b.

21 O modelo é computacionalmente eficiente e concorda muito bem com resultados experimentais de testes cíclicos em barras de aço reforçadas (Taucer, Spacone e Filippou, 1991b).

22 Novamente, como no modelo bilinear, em vez de determinar E^{tan} De Eq. 55.12, Fig. 62.3a Este também o calcula através de um coeficiente deformação-endurecimento b que é a proporção do módulo tangente pós-rendimento E^{tan} E o módulo elástico inicial E, e considera apenas o endurecimento isotrópico, Fig. 62.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

23 Vamos caminhar através da derivação:

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

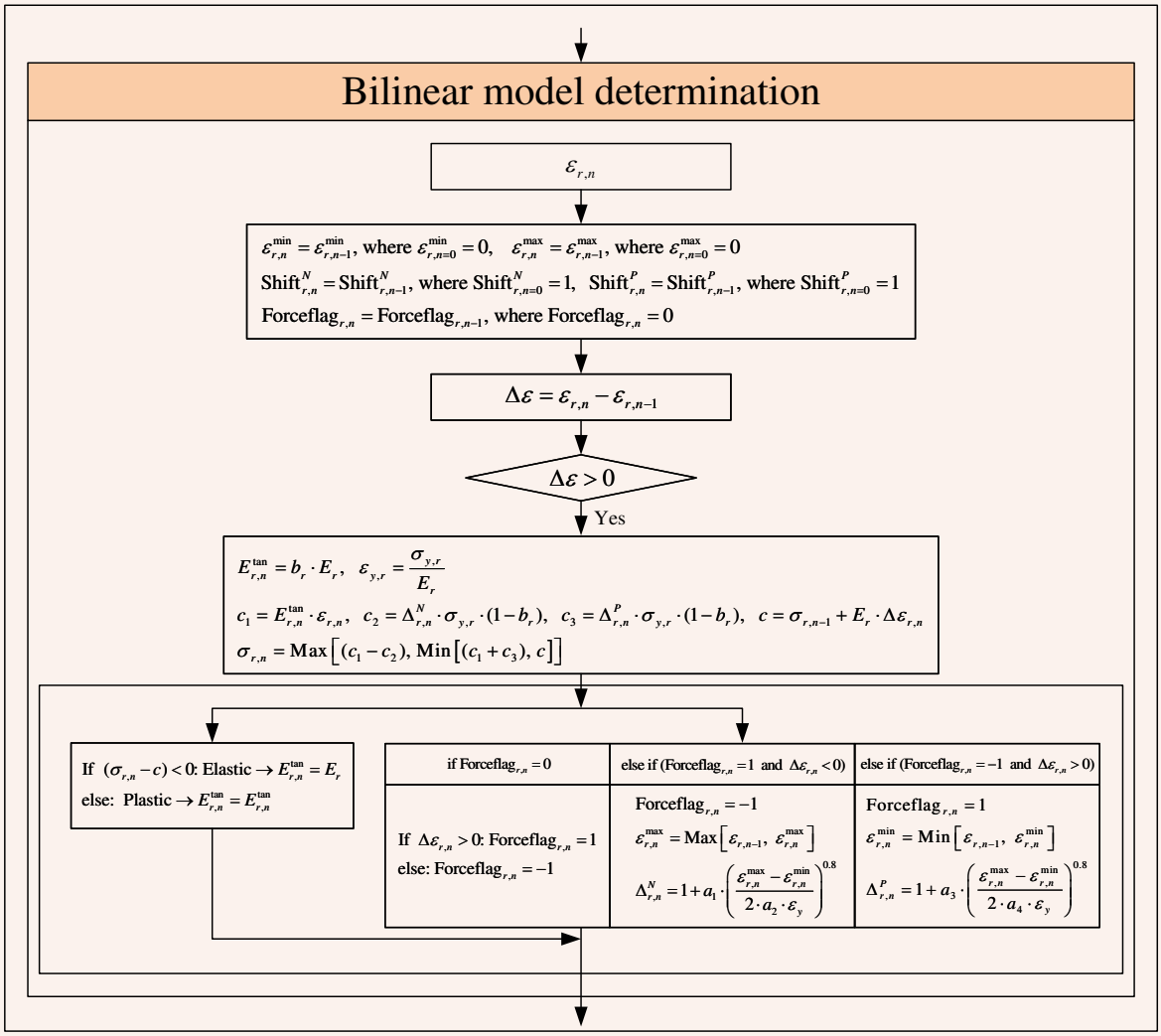
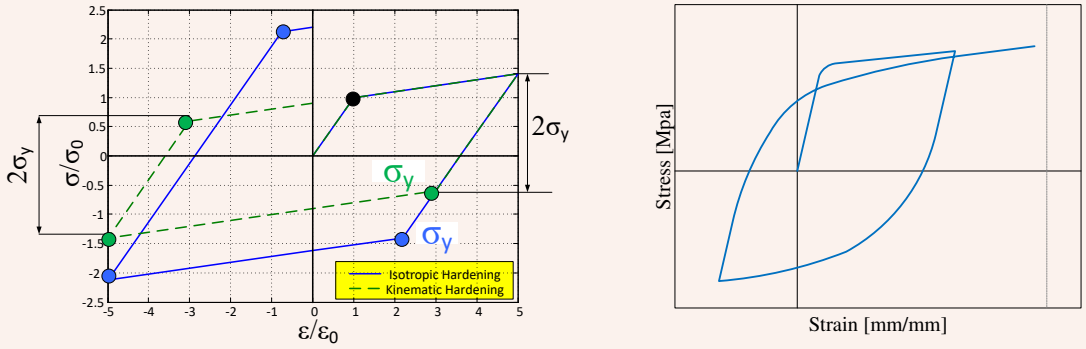


Figura 62.4: Determinação para o modelo bilinear

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Modelo de plasticidade (b) Modelo de Aço Menegotto Pinto

Figura 62.5: Comparação dos modelos de carga cíclica reversa: plasticidade *vs.* Menegotto-Pinto

1. Começa com tensão-deformação Relacionamento

$$\sigma^* = b \cdot \varepsilon^* + \frac{(1-b)\cdot\varepsilon^*}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}} \tag{62.3}$$

onde,

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{rev}}{\sigma_0 - \sigma_{rev}}$$

2. σ_0 e.. ε_0 são os tensão e deformação no ponto em que os dois assíntotos da filial sob consideração se encontram (B); σ_{rev} e.. ε_{rev} são os tensão e deformação no ponto em que o Última reversão deformação aconteceu (A), Fig. 62.6.

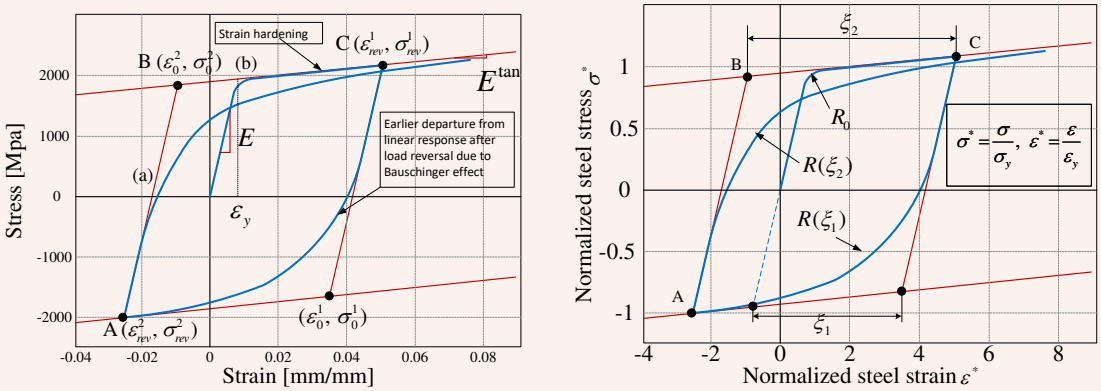


Figura 62.6: Menegotto pinto (Menegotto e Pinto, 1973) Modelos de aço

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

3. O módulo tangente E^{tan} é obtido pela diferenciação

$$E^{tan} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sigma_0 - \sigma_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*}; \quad \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*} = b + \left[\frac{1-b}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}}\right] \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^{*R}}{1+\varepsilon^{*R}}\right]$$

4. Há uma transição curva de uma linha reta assintota com inclinação E (a) para outra assintota com inclinação E^{tan} (b).
5. σ_{rev}, ε_{rev} são os tensão e deformação no ponto de deformação inversão (ponto A), que também forma a origem da assíntota com inclinação E (a).
6. σ_0 e.. ε_0 são os tensão e deformação no ponto de intersecção dos dois assíntotos (ponto B).
7. b é o encruamento relação entre a inclinação E^{tan} e.. E, e R é um parâmetro que influencia a curvatura da curva de transição entre os dois assíntotos e permite uma boa representação do efeito Bauschinger.
8. σ_0, ε_0, σ_{rev} e.. ε_{rev} são atualizados após cada reversão.
9. R depende da diferença absoluta deformação entre o ponto de interseção atual (ponto B) e o ponto máximo ou mínimo anterior deformação de reversão (ponto C), dependendo se a corrente deformação está aumentando ou diminuindo, respectivamente.
10. Há duas expressões relatadas para $R(\xi)$:

    - Menegotto-Pinto modelo original $R(\xi) = R_0 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
    - O que foi relatado em OpenSees: $R(\xi) = R_0 \left(1 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}\right)$

    onde, R_0 é o valor do parâmetro R durante o primeiro carregamento, e cR_1 e.. cR_2 são parâmetros experimentalmente determinados a serem definidos juntamente com R_0. ξ pode ser expressa como

$$\xi = \left|\frac{\varepsilon^m - \varepsilon_0}{\varepsilon_y}\right|$$

    onde, ε^m é o deformação no ponto de reversão máximo ou mínimo anterior, dependendo se a corrente deformação está aumentando ou diminuindo, respectivamente. ε_0 é o deformação no ponto de interseção atual dos dois assíntotos.
11. Os dois ε^m e.. ε_0 Deite-se ao longo da mesma assíntota e ε_y é o rendimento inicial deformação.
12. Até agora, modelo não explica o endurecimento isotrópico na carga cíclica reversa.. Filippou propôs uma Deslocamento de.. σ_0 e.. ε_0 no rendimento linear assintota como se segue:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Se o incremental deformação $\Delta\varepsilon$ muda um valor positivo para um valor negativo:

$$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{-\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^N - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = -\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o + \varepsilon_y \cdot \Delta^N)$$

- Se o incremental deformação $\Delta\varepsilon$ muda um valor negativo para um valor positivo,

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y \cdot \Delta^P - E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^P - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = \sigma_y \cdot \Delta^P + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o - \varepsilon_y \cdot \Delta^P)$$

onde, a_1 e.. a_3 são parâmetro de endurecimento isotrópico que refletem um aumento do envelope de compressão através de uma fração da resistência ao escoamento após um plástico deformação $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$, e o envelope de rendimento de tensão como uma fração da resistência ao rendimento após um plástico deformação de $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$. a_2 e.. a_4 são parâmetros isotrópicos de endurecimento com respeito a a_1 e.. a_3, e ε_{max} e.. ε_{min} são o deformação no ponto de inversão máximo e mínimo deformação.

13. O problema é que.. a_1, a_2, a_3 e.. a_4 deve ser determinado através de ajuste da curva do modelo com resultados experimentais.. Os valores padrão são $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$, e $a_4 = 55$.. Nota Similaridade com modelo anterior; Fig. 62.7,62.8, 62.9 e.. 62.10.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

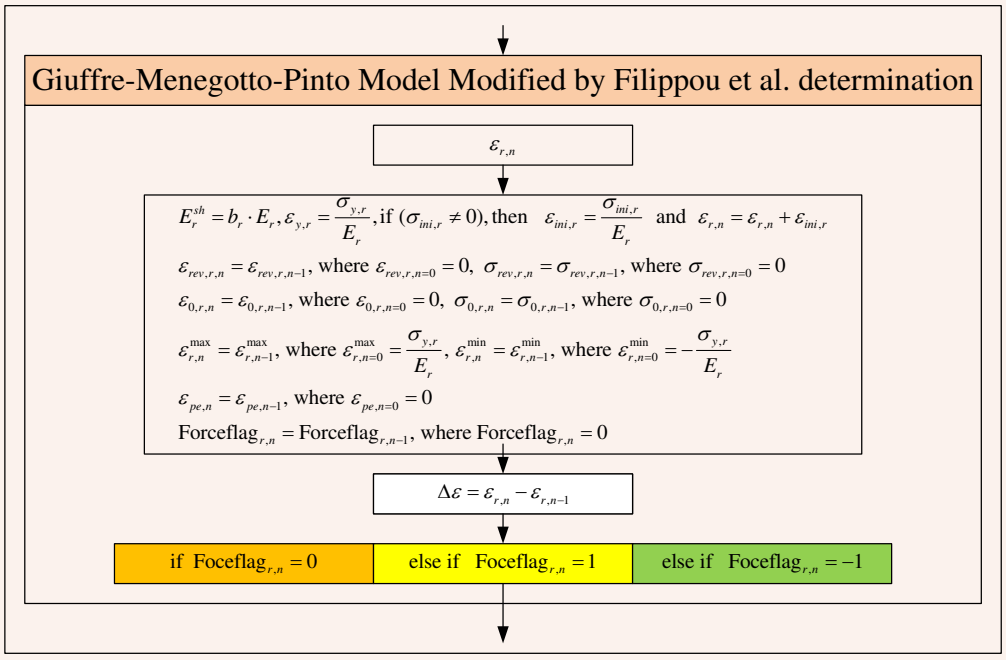


Figura 62.7: Determinação (1) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

if $\text{Foceflag}_{r,n} = 0$

if $\Delta\varepsilon = 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$
$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$
$\varepsilon_{0,r,n} = 0$	$\varepsilon_{0,r,n} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\sigma_{0,r,n} = 0$	$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r}$	$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 0$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{ini,r}$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$E_{r,n}^{\tan} = E_r$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
	$\mathrm{c}_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$	$\mathrm{c}_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$
	$\mathrm{c}_2 = \mathrm{c}_1^{1/R}$	$\mathrm{c}_2 = \mathrm{c}_1^{1/R}$
	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\mathrm{c}_2}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\mathrm{c}_2}$
	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\mathrm{c}_1 \cdot \mathrm{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\mathrm{c}_1 \cdot \mathrm{c}_2}$
	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$

Figura 62.8: Determinação (2) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = 1$

if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}, \quad \varepsilon_{0,r,n}, \quad \sigma_{0,r,n}$
$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{-\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} + \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

Figura 62.9: Determinação (3) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = -1$

if $\Delta\varepsilon > 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}, \quad \sigma_{rev,r,n}, \quad \varepsilon_{0,r,n}, \quad \sigma_{0,r,n}$
$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{\sigma_{y,r} \cdot \Delta^P - E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r} \cdot \Delta^P + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

Figura 62.10: Determinação (4) para o modelo giuffre-menegotto-pinto modificado por filippou et al.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.2.2 Modelos de concreto

Da tese de doutorado de "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" por Kang, 2010.

62.2.2.1 Efeito do confinamento

24 Antes de prosseguirmos com modelos constitutivos concretos, é importante notar o papel do confinamento na curva tensão-deformação.

25 Richart, Brandtzæg e Brown, 1928 realizou um dos primeiros e mais abrangentes estudos em que núcleos de concreto dentro de uma célula de Hooke pressurizada a óleo foram testados, fig. 1. 62.11.. e descobriu que a pressão confinante realmente aumentará a força[2]

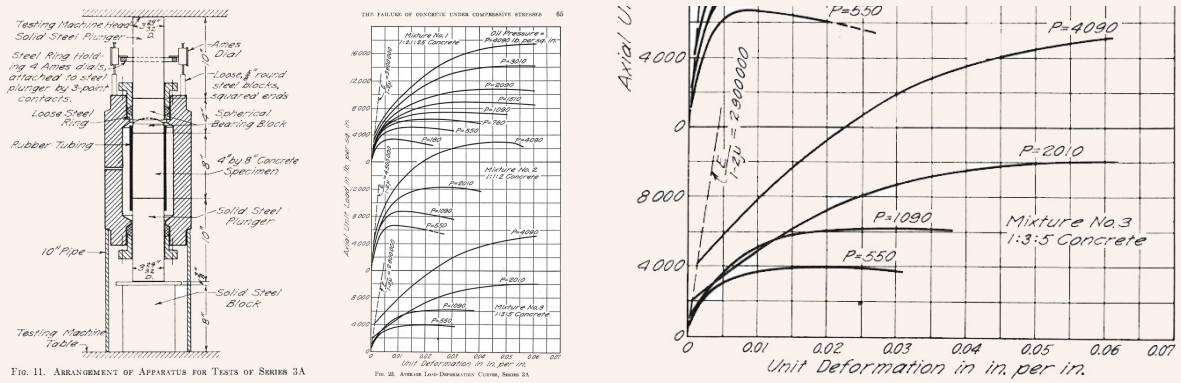


Figura 62.11: Efeito de confinamento na resistência do concreto (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928)

26 Desde então, muitos modelos têm sido propostos para o impacto do confinamento na resistência ao concreto, e mais notavelmente por Mander, Priestley e Park, 1988 que publicou o estudo sumário mais autoritário sobre o impacto do confinamento.

27 Estes resultados são muito relevantes para o nosso estudo, como em nosso caso confinamento será fornecido por laços / stirrups. Assim, teremos que atribuir força diferente ao concreto confinado e não confinado.

28 O (Mander, Priestley e Park, 1988) Modelo, Fig. 62.12 define os seguintes valores:

ε_0 Concreto deformação no máximo não confinado tensão
ε_{0c} $K\varepsilon_0$
ε_{20c} Concreto deformação em 20% de máximo tensão
ε_{50U} $\frac{3+0.002f'_c}{f'_c-1000}$

[2]Isso pode ser facilmente verificado pela construção do círculo de Mohr assumindo um modo de falha deslizante.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

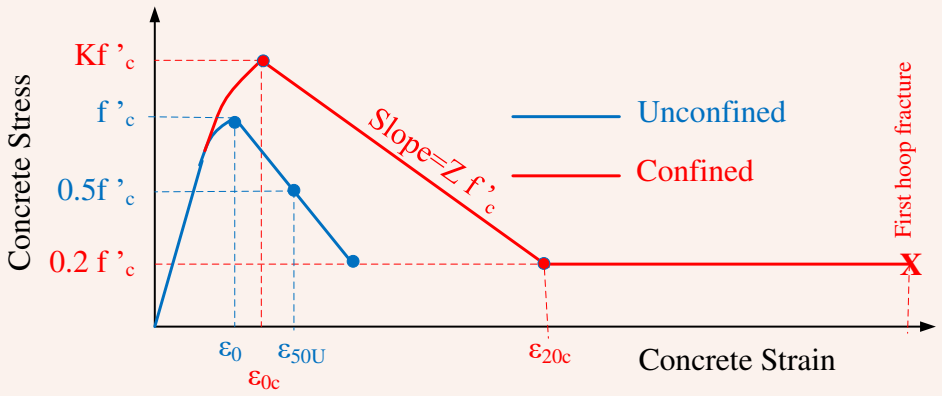


Figura 62.12: Confinada *vs.* Resistência ao concreto compressivo não confinada (Mander, Priestley e Park, 1988)

.

$K \quad 1 + \rho_s \frac{f_y}{f_c'}$

$Z_c f_c' \quad \frac{\Delta f_c}{\Delta \varepsilon_c}$

29 O impacto do confinamento na força é mostrado na figura. 62.13

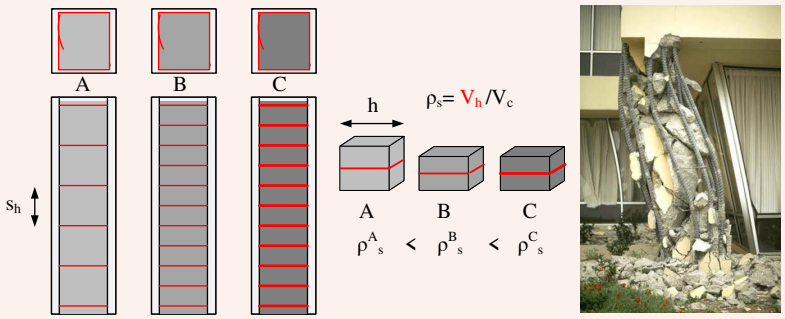


Figura 62.13: Papel dos estribos no fornecimento de confinamento de concreto

62.2.2.2 Modelo Kent e Park modificado

62.2.2.2.1 Tensão-deformação relação

30 O modelo concreto descreve a relação concreta tensão-deformação sob uma história cíclica arbitrária deformação. Em particular, o modelo implementado leva em conta quatro fatores importantes:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Efeito do confinamento de concreto na curva monotônica em compressão, fig. 1. 62.12 (Mander, Priestley e Park, 1988) (Richart, Brandtzæg e Brown, 1928)
2. Sucessiva degradação de rigidez das curvas de descarga e recarga, para aumentar os valores de compressão deformação
3. Efeito da tensão endurecendo
4. Resposta histerética sob carga cíclica em compressão

31 A curva monotônica do envelope de concreto em compressão segue o modelo original de Kent e Park, 1971 e estendida por Scott, Park e Priestley, 1982. Mesmo que modelos mais precisos e completos tenham sido publicados desde então, o chamado modelo Kent e Park modificado oferece um bom equilíbrio entre simplicidade e precisão.

32 Endurecimento da tensão é a habilidade do concreto entre as fissuras de resistir à tração tensão e contribuir para a flexão rigidez do membro. Devido à natureza discreta das rachaduras, o concreto entre as fendas permanece ligado à armadura e, assim, contribui para o rigidez do membro. No entanto, à medida que a magnitude da carga aumenta, trincas adicionais se formam em intervalos mais próximos, reduzindo assim a tração tensão que pode ser desenvolvida no concreto. Portanto, o enrijecimento da tensão é gradualmente reduzido à medida que a carga aumenta na fase pós-quebra.

33 Investigadores anteriores levaram em conta o enrijecimento da tensão modificando a relação do concreto tensão-deformação, de modo que, após atingir a resistência à tração (cracking), a tração tensão reduz gradualmente para zero à medida que a tração (deformação aumenta. A redução gradual da resistência à tração é frequentemente aproximada como linear, multilinear ou exponencial. Uma abordagem semelhante com uma taxa linear de redução é adotada.

34 No entanto, os resultados indicam que a aplicação de tensão endurecendo sobre todas as fibras de um membro pode levar a uma superestimação significativa da força final. Endurecimento de tensão é um fenômeno localizado que afeta o concreto nas proximidades da armadura. Em estudos analíticos, apenas as fibras de concreto dentro de uma área eficaz ao redor das armaduras são atribuídas a suavização da tensão. Claramente, o tamanho da área efetiva tem um efeito significativo no comportamento de rigidez da tensão do membro.

35 No modelo Kent and Park modificado 1971 mostrado em Fig. 62.14, a relação do concreto monotônico tensão-deformação na compressão é empiricamente definida por três regiões. Adotando a convenção de que compressão é positiva, as três regiões são

- Região OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot \left[2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

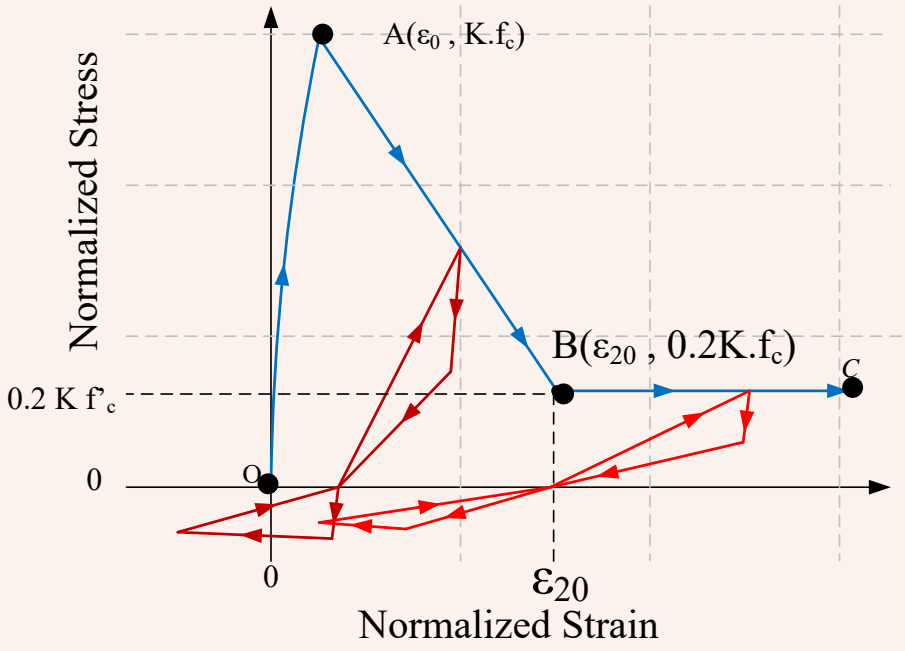


Figura 62.14: Modelo de material concreto em compressão (Yassin, 1994)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- Região AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)]$$

- Região BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = 0.2 \cdot K \cdot f_c$$

36 Os módulos tangentes correspondentes são dados pelas seguintes equações

- Região OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$E^{tan} = \frac{2 \cdot K \cdot f_c}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)$$

- Região AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = -Z \cdot K \cdot f_c$$

- Região BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = 0$$

onde,

$$\varepsilon_0 = 0.002 \cdot K$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s \cdot f_{ys}}{f_c}$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3+0.29 \cdot f_c}{145 \cdot f_c - 1000} + 0.75 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0.002 \cdot K}$$

Onde

ε_0	concreto deformação correspondente ao máximo tensão
ε_{20}	Concreto deformação a 20% do máximo tensão
K	fator que explica o aumento de força devido ao confinamento
Z	deformação abrandando inclinação
f_c	Resistência do cilindro de compressão em concreto em MPa (1 MPa = 145 psi)
f_{ys}	Rende força de estribos em MPa
ρ_s	relação entre o volume de armadura do aro e o volume do núcleo de concreto medido para fora de estribos
h	largura do núcleo de concreto medido para fora dos estribos
s_h	De centro a centro espaçamento de estribos ou conjuntos de aro.

37 O comportamento cíclico de descarga e recarga é representado por um conjunto de linhas retas. Fig. 62.14 mostra que o comportamento histerético ocorre sob, tanto, tração e compressão tensão.

38 Embora as alças de histerese da compressão e tração sejam contínuas, elas serão discutidas separadamente por uma questão de clareza.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

39 Mesa 62.1 Resumir as propriedades essenciais e de resistência do concreto confinado e não confinado. f_c em PSI para f_t; Uma alternativa para Kent e Park residual é usar $f_{c,res}^{conf} = 0.9 f_c$ e.. ε_{res}^{conf} é atribuído um valor "' grande" para garantir a descida gradual. Esta combinação garante uma análise estável (Ghannoum, 2010).

Tabela 62.1: Confinada *vs.* Propriedades elásticas e de resistência não confinadas do concreto

	ε_0	f_c	f_t	E_0	E_t	$f_{c,20}$	ε_{20}
Sem confinar	0.003	Teste	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{unc}}{\varepsilon_0^{unc}}$	$\frac{E_0^{unc}}{5}$	$f_c^{unc}/3$	$3\varepsilon_0^{unc}$
Confinada	$0.002K$	Kf_c^{unc}	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{conf}}{\varepsilon_0^{conf}}$	$\frac{E_0^{conf}}{5}$	$0.2 f_c^{conf}$	$\varepsilon_0^{conf} + \frac{Kf_c^{unc} - f_{c,20}^{confined}}{ZKf_c^{unc}}$

Compressão

40 No lado compressivo do modelo, há um *Degradação sucessiva* de rigidez das linhas de descarga e recarga para valores crescentes de máximo deformação, como mostrado na figura 1. 62.14.. A degradação de rigidez é tal que as projeções de todas as linhas de recarga se cruzam em um ponto comum R na figura. 62.15.. Ponto R é determinada pela intersecção da tangente com a curva de envelope monotônico na origem e pela projeção da linha de descarga do ponto B que corresponde à resistência do concreto $0.2 \cdot f_c$ (Fig. 62.15).

41 Os deformação e tensão no ponto de interseção são dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{0.2 \cdot K \cdot f_c - E_{20} \cdot \varepsilon_{20}}{E_c - E_{20}} \\ \sigma_R &= E_c \cdot \varepsilon_R \end{aligned} \tag{62.4}$$

Onde E_c é o módulo tangente da curva do envelope monotônico na origem, E_{20} é o módulo de descarga no ponto B da curva do envelope monotônico com uma força de $0.2 \cdot f_c$.. A magnitude de E_{20} Tem que ser determinado experimentalmente.

42 Depois de descarregar de um ponto no envelope monotônico compressivo (ponto D na Fig. 62.15), e antes de atingir o eixo zero tensão (ponto H na Fig. 62.15), a resposta do modelo segue dois envelopes menores que são definidos pelas seguintes equações

- Envelope máximo (linha HD)

$$\sigma_{max} = \sigma_m + E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_m) \tag{62.5}$$

- Envelope mínimo (linha HE)

$$\sigma_{min} = 0.5 \cdot E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \tag{62.6}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

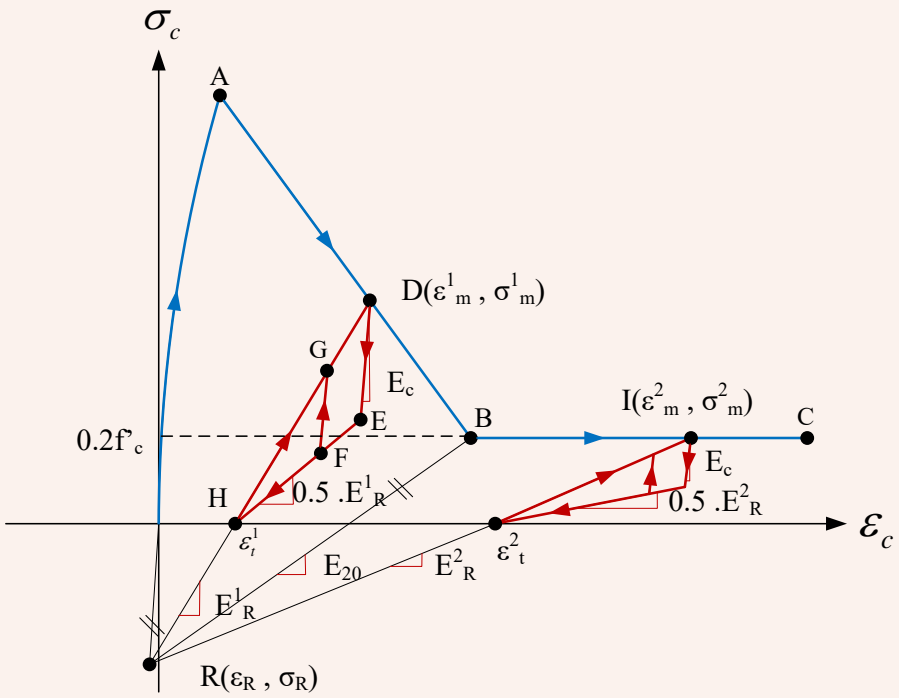


Figura 62.15: Modelo de material concreto sob carga cíclica em compressão (Yassin, 1994)

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

onde,

$$E_R = \frac{\sigma_m - \sigma_R}{\varepsilon_m - \varepsilon_R}$$
$$\varepsilon_t = \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E_R} \tag{62.7}$$

σ_m e.. ε_m são os tensão e deformação no ponto de descarga do envelope monotônico compressivo, respectivamente. Portanto, as posições dos dois envelopes menores dependem da posição do ponto de descarga.

43 Para os ciclos parciais de carga e descarga dentro dos envelopes menores o modelo segue linha reta com módulo E_c.

44 Na implementação numérica, um módulo de ensaio e tangente são assumidos com base no comportamento elástico linear com inclinação E_c,

$$\sigma_{c,n}^{tr} = \sigma_{c,n-1} + E_c \cdot \Delta\varepsilon_{c,n} \tag{62.8}$$

Onde $\sigma_{c,n}^{tr}$ é o julgamento atualizado tensão, $\sigma_{c,n-1}$ é o estado anterior tensão e $\Delta\varepsilon_{c,n}$ é o incremento deformação. As seguintes regras são então usadas para determinar o real tensão e módulo do modelo

$$\begin{aligned}
&\text{se} \quad \sigma_{min} \le \sigma_{c,n}^{tr} \le \sigma_{max} \ \text{ então } \ \sigma_{c,n} = \sigma_{c,n}^{tr} \ \text{ e } \ E^{tan} = E_c \\
&\text{se} \quad \sigma_{c,n}^{tr} < \sigma_{min} \ \text{ então } \ \sigma_{c,n} = \sigma_{min} \ \text{ e } \ E^{tan} = 0.5 \cdot E_r \\
&\text{se} \quad \sigma_{c,n}^{tr} > \sigma_{max} \ \text{ então } \ \sigma_{c,n} = \sigma_{max} \ \text{ e } \ E^{tan} = E_r
\end{aligned} \tag{62.9}$$

45 As regras que regem o comportamento histerético do modelo em compressão de acordo com Eq. 62.4 para 62.9 são ilustrados por uma amostra de história na Fig. 62.15.

46 Se a descarga ocorrer do ponto D ao ponto E, o recarregamento estará no mesmo caminho de volta para D. Se a descarga chegar ao ponto F, o ciclo de histerese DEFGD resultará após recarregar. Se a descarga completa ao ponto H ocorrer, recarregar resultará na histerese do circuito DEHD. É importante notar que a linha de recarga sempre voltará ao envelope monotônico no ponto de descarga inicial. Para o caso em que a descarga continua após o ponto H e o modelo começa a recarregar em tensão, um conjunto diferente de regras governam o comportamento histerético. No entanto, após recarregar em compressão, o modelo irá reentrar na região de compressão no ponto do eixo zero tensão na conclusão da descarga (ponto H) e o que quer que aconteça na região da tensão não afetará o comportamento do modelo, uma vez que ele Volta para a região de compressão.

Tensão

O comportamento de tração do modelo, como mostrado na figura. 62.16, leva em conta o enrijecimento da tensão e a degradação do descarregamento e recarregamento rigidez para aumentar os valores de tração máxima deformação após o craqueamento inicial. A resistência máxima à tração do concreto (módulo de ruptura) é assumida igual a,

$$f_t = 0.6228\sqrt{f_c} \tag{62.10}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde f_t e.. f_c são expressos em MPa.

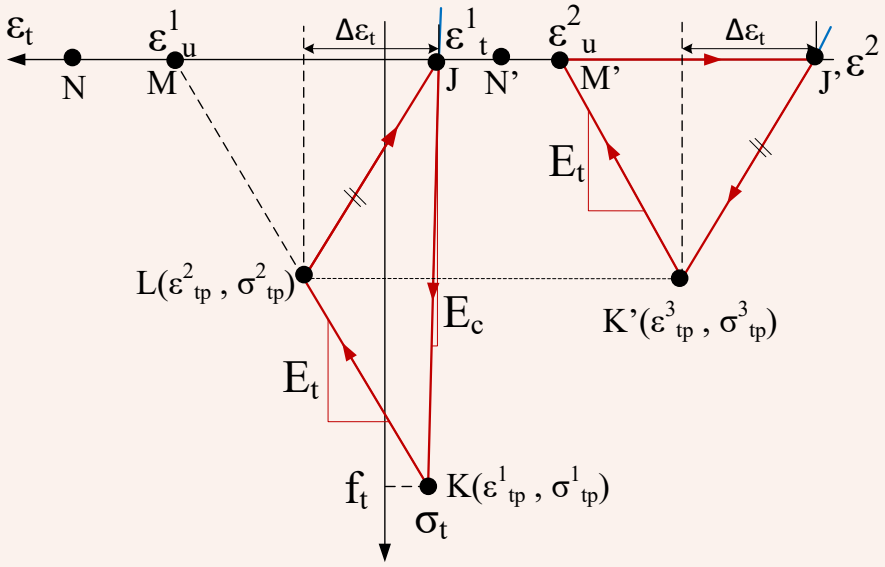


Figura 62.16: Modelo de material concreto sob carga cíclica em tensão (Yassin, 1994)

47 Fig. 62.16 mostra dois ciclos de histerese de tração consecutivos que fazem parte de uma amostra cíclica história que também incluem compressão tensões. O modelo assume que a tração tensão pode ocorrer em qualquer lugar ao longo do eixo deformação, seja como resultado da carga inicial de tração ou como resultado de descarga de um estado de compressão. Neste último caso, uma tração tensão ocorre sob uma compressão deformação. A relação de tração tensão-deformação é definida por três pontos com coordenadas $(\varepsilon_t, 0)$, $(\varepsilon_{tp}, \sigma_{tp})$ e.. $(\varepsilon_u, 0)$, representado pelos pontos J, K e M na figura. 62.16, respectivamente. ε_t é o deformação no ponto em que a linha de descarga da região de compressão tensão cruza o eixo deformação. ε_t é dado por Eq. 62.7 E mudanças com compressão máxima deformação. ε_{tp} e.. σ_{tp} são os deformação e tensão no pico da relação de tração tensão-deformação e são dadas pelas seguintes expressões,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tp} &= \varepsilon_t + \Delta\varepsilon_t \\ \sigma_{tp} &= f_t \cdot \left(1 + \frac{E_t}{E_c}\right) - E_t \cdot \Delta\varepsilon_t \end{aligned} \tag{62.11}$$

Onde $\Delta\varepsilon_t$ é o diferencial máximo anterior entre a tração deformação e ε_t como mostrado na figura. 62.16.

48 Antes de começar a rachar, $\Delta\varepsilon_t$ é igual a f_t/E_c. E_t é o módulo de enrijecimento da tensão

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

que depende dos parâmetros numéricos e físicos, ε_u é o deformação no ponto onde a tração tensão é reduzida para zero e é dada pela expressão,

$$\varepsilon_u = \varepsilon_t + f_t \cdot \left(\frac{1}{E_t} + \frac{1}{E_c} \right) \tag{62.12}$$

49 Dado estes três pontos de controle, a relação tração tensão-deformação e os módulos tangentes são definidos pelas seguintes equações (tensão é positiva),

- Região JK: $\varepsilon_t < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp}$

$$\sigma_c = E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t), \quad E^{tan} = \frac{\sigma_{tp}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_t} \tag{62.13}$$

- Região KM: $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u$

$$\sigma_c = \sigma_{tp} + E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}), \quad E^{tan} = -E_t \tag{62.14}$$

- Região MN: $\varepsilon_c > \varepsilon_u$

$$\sigma_c = 0, \quad E^{tan} = 0 \tag{62.15}$$

If $\varepsilon_{tp} \geq \varepsilon_u$ Então.. σ_{tp}, σ_c e.. E^{tan} Todos supõem ser zero. O módulo E_t Controla o grau de rigidez da tensão controlando a inclinação do Eq. 62.14.. Quanto mais íngreme for a inclinação, menor será o efeito da rigidez da tensão. A descarga e recarga de tensão são regidas pela Eq. 62.13 que também inclui rigidez degradação para aumentar os valores de diferencial deformação $\Delta\varepsilon_t$.. O valor de $\Delta\varepsilon_t$ muda sempre que $\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}$.

50 O comportamento de tração do modelo, caracterizado por Eq. 62.10 para 62.15, pode ser melhor compreendido seguindo os caminhos de carga exemplo em Fig. 62.16.. À medida que o modelo se descarrega da compressão, ele cruza o eixo deformação no ponto J. Ele então carrega em tensão até que a fissuração inicial ocorra no ponto K. Além do ponto K, a suavização começa até o ponto de reversão L. O caminho de descarga segue uma linha reta do ponto L ao ponto J onde o modelo recarrega em compressão. A segunda vez que o modelo entra em tensão é no ponto J'. O caminho de recarga J'K' é exatamente a duplicação do caminho de descarga anterior LJ que foi deslocado uma distância JJ' ao longo do eixo deformação. No ponto K' o modelo se junta ao ramo de suavização que continua até que a tração tensão é reduzida para zero no ponto M'. O tensão permanece zero através do ponto de reversão N' até que o modelo recarrega em compressão no ponto J'. A partir de agora, a capacidade de tração tensão do modelo é reduzida para zero.

51 O modelo de concreto atual é relativamente econômico em termos da quantidade de memória necessária da história passada tensão-deformação. Os parâmetros que são usados como memória podem ser listados da seguinte forma:

1. O tensão e deformação no ponto correspondente ao último estado modelo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

2. O deformação no último ponto de descarga no envelope monotônico compressivo, ε_m
3. O diferencial $\Delta\varepsilon_t$ entre a tração máxima anterior deformação e ε_t

52 O dano de concreto considerado no presente modelo está na forma de descarga e recarga rigidez degradação para aumentar os valores de máximo deformação. Mas o dano real ao concreto também inclui a redução dos envelopes monotônicos sob carga cíclica.

62.2.2.2.2 Determinação para modelos de kent e parque modificados

Fig. 62.17 e.. 62.18 Mostrar o procedimento para obter uniaxial tensão σ e módulo tangente E^{tan} de uniaxial deformação ε.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

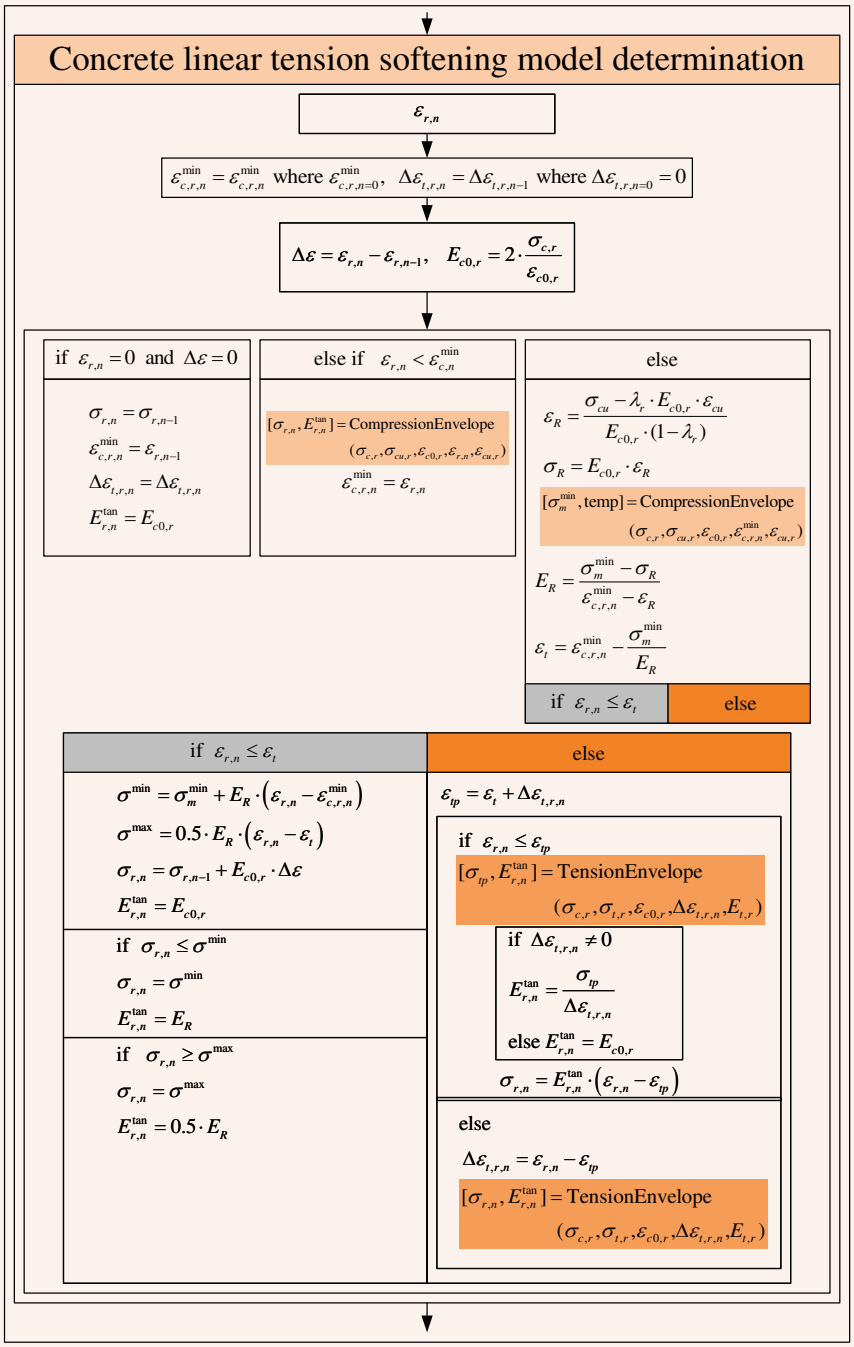


Figura 62.17: Determinação (1) para o modelo de kent e parque modificado

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

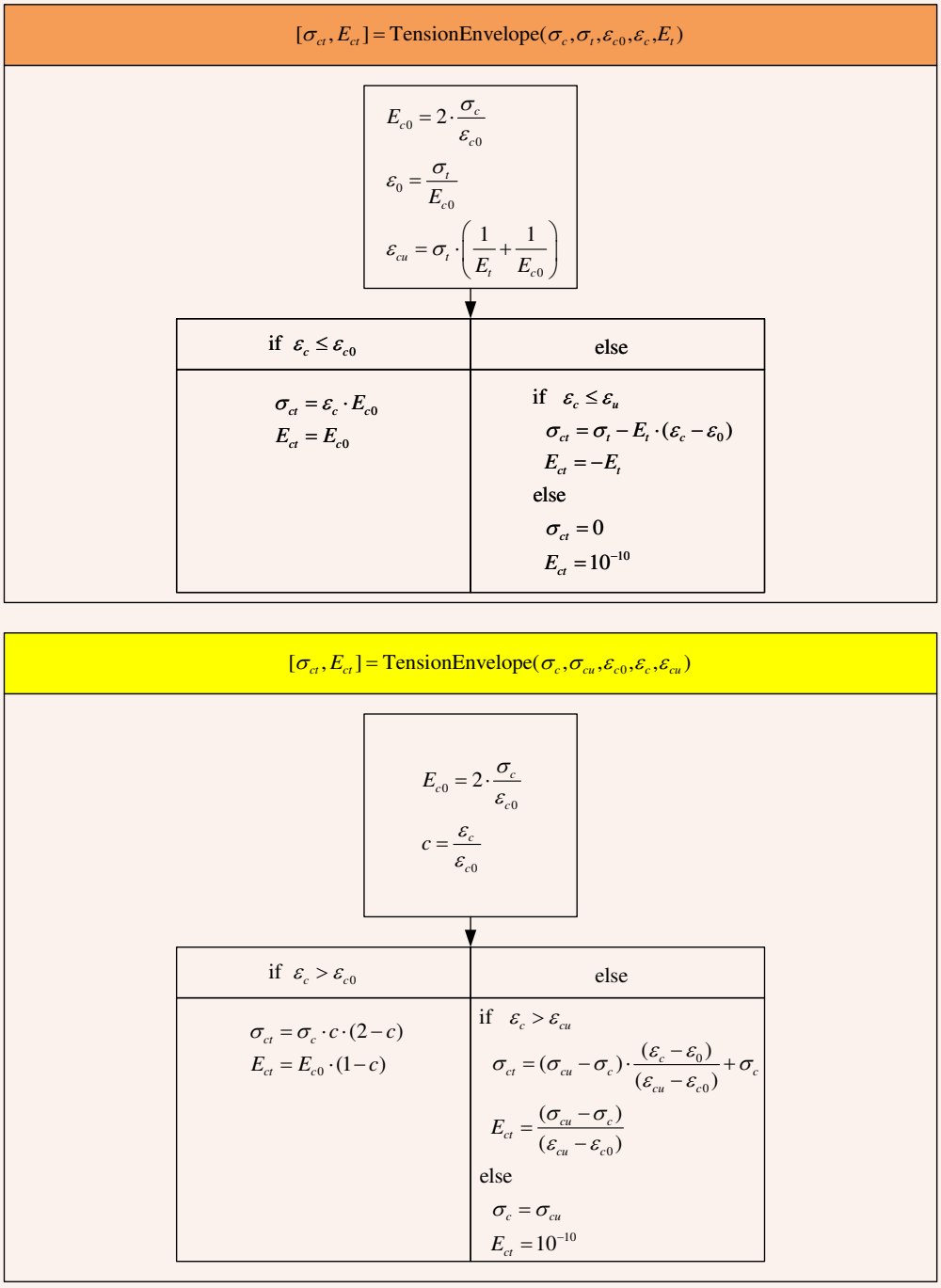


Figura 62.18: Determinação (2) para o modelo de kent e parque modificado

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.2.3 Modelo de dano anisotrópico com danos efetivos e recuperação

Da tese de doutorado de "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" por Kang, 2010 e o tipo de assistência do Prof. Ragueneau e o Sr. Lebon da ENS/Cachan.

53 Considerando que o modelo Kent-Park modificado foi usado com sucesso em aplicações de maio, continua sendo um modelo empírico heurístico cujo desempenho preciso pode não ser assegurado no contexto da simulação híbrida em tempo real com número limitado de iterações. Para lidar com essa possível desvantagem, *rigoroso e termodinamicamente correto modelo constitutivo* para o concreto é implementado.

62.2.3.1 Modelo constitutivo

Potencial termodinâmico

54 O potencial Gibbs (já discutido em§62.1.1) $\rho \cdot \phi^*$ é baseado na estrutura do Ladeveze (Ladeveze, 1983) para modelo de dano anisotrópico. A divisão do tensor tensão em componentes desviatórios e hidrostáticas permite considerar Separadamente o cisalhamento e as partes hidrostáticas. Mais longe, cada componente é novamente dividido em Dois outros: O positivo e o negativo para modelar o efeito unilateral, fig. 1. 62.19.. O dano influencia apenas a parte positiva através do tensor de danos $\mathbf{D}$.

$$\rho \cdot \phi^* = \frac{1+\nu}{2 \cdot E}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\right) + \mathrm{Tr}\left(\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\right)\right] + \frac{1-2\nu}{6\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_+^2}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_-^2\right] \tag{62.16}$$

Onde ρ, ν e.. E são respectivamente a densidade, o módulo Coeficiente de Poisson e Young. O tensor $\mathbf{H}$ é definido por

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1}-\mathbf{D})^{\frac{1}{2}}$$

Onde $(\cdot)^D$ é o desvio de $(\cdot)$,

$$(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\cdot)\cdot\mathbf{1}$$

$\langle\cdot\rangle_{+,-}$ é a parte positiva ou negativa de $(\cdot)$, e.. D_H é a parte hidrostática de $\mathbf{D}$,

$$D_H = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathbf{D}$$

Na estrutura de Ladeveze (Ladeveze, 1983), $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ é uma parte positiva incomum de $\boldsymbol{\sigma}^D$: if $\boldsymbol{\lambda}_I$ são os autovalores de $\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D$ e.. $\mathbf{T}^I$ o correspondente Eigenvectors, $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ É

$$\boldsymbol{\sigma}_+^D = \sum_I \langle\boldsymbol{\lambda}_I\rangle_+ \left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)\left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)^T$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

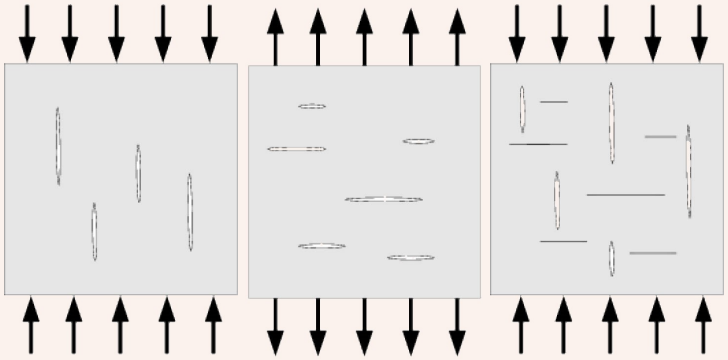


Figura 62.19: Cracks induzidos por compressão, tensão, tensão e compressão

Lei constitutiva

55 A lei constitutiva é derivada do potencial de Gibbs usando Eq. 62.16:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \rho \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \frac{1-2\nu}{3\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\cdot\mathrm{Tr}\,(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\mathbf{I}\end{aligned}$$

Onde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ é a efetiva tensão obtida reescrita da lei tensão deformação em termos de eficaz tensão:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I}$$

Danos à lei da evolução

56 A lei de evolução dos danos deve ser responsável pelo carregamento cíclico. Assim, o critério de dano f deve depender de um dano eficaz d_ε (Ragueneau et al., 2006) De tal forma que..

$$\begin{aligned} f &= \hat{\varepsilon} - \kappa\,(d_\varepsilon) \\ d_\varepsilon &= \frac{\mathbf{D} : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}{\max\,(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}\end{aligned}$$

Onde $\hat{\varepsilon}$ É Mazars deformação (Mazars, 1986) definido por

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}$$

e.. κ A função de consolidação,

$$\kappa\,(d_\varepsilon) = a\cdot\tan\left[\frac{d_\varepsilon}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde A e.. a são dois coeficientes de dano, e κ_0 é o limiar de elasticidade inicial.

57 Assim, se o critério de dano é negativo, o material está no intervalo elástico linear, e se for positivo, o dano aumenta ao longo do positivo deformação:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+$$

Onde o multiplicador de danos Lagrange $\dot{\lambda}$ é determinado a partir do *Kuhn-Tucker condição* ($f = 0$ e.. $f' = 0$).

62.2.3.2 Formulação uniaxial multifibras

58 Formulação multifibra baseada na teoria de Euler-Bernoulli é equivalente a um carregamento uniaxial. Assim, o tensor tensão e o tensor deformação são reduzidos a

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

59 O tensor de dano torna-se diagonal e a lei constitutiva pode ser reescrita como (Desmorat et al., 2008),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\left(D_1, D_2\right) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} \tag{62.17}$$

Onde $\mathbf{B}$ é um tensor diagonal que depende da variável de dano e carga, e D_1 e.. D_2 estão associados com danos de tensão e compressão, respectivamente.

60 Reescrevendo o QE. 62.17 com forma de matriz,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

so

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1\sigma}{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \sigma \qquad D_H = D_1 + 2D_2$$

$$\varepsilon_e = \frac{1+\nu}{E}\left(\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+^D\boldsymbol{H}\right)^D + \boldsymbol{\sigma}_-^D\right) + \frac{1-2\nu}{3E}\left[\frac{\langle\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_+}{1-D_H} + \langle\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_-\right]\boldsymbol{Id}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

61 Para a tensão$\sigma > 0$), nós assumimos que apenas D_1 Aumenta.

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^t} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^t & 0 \\ 0 & B_2^t \end{pmatrix}$$

$$B_1^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$
$$B_2^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$

62 Para compressão$\sigma < 0$), nós assumimos que apenas D_2 Aumenta.

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^c} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^c & 0 \\ 0 & B_2^c \end{pmatrix}$$

$$B_1^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_2^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$

62.2.3.3 Determinação para o modelo de danos anisotrópicos

62.2.3.3.1 Carga de tensão: $\varepsilon_{11} > 0$

Equações constitutivas

63 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e.. $\eta_t = 1$ Então:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{B_{11}^t}\varepsilon \\ \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(\frac{4}{1-D_1}+2\right) + \frac{1-2\nu}{3\left(1-\frac{D_1+2D_2}{3}\right)}}\cdot\varepsilon \\ D_1 &= a\cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \end{aligned} \tag{62.18}$$

onde, $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+} = \varepsilon_{11} \geq 0$,

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64 D_2 É constante e o módulo tangente é determinado com Eq. 62.18:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.19}$$

65 No entanto, se $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$, o módulo tangente é igual ao secante.

$$E^{tan} = \frac{E}{B^t_{11}}$$

Módulo Coerente rigidez tangente em implementação numérica

66 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e.. $\eta_t = 1$, módulo tangente é determinado com Eq. 62.18 e.. 62.19:

$$\begin{aligned}
E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\
B^t_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1 - D_{1,n}} + 2 \right) + \frac{1 - 2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3} \right)} \\
D_{1,n} &= a \cdot A \left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11,n}}{a} \right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right)
\end{aligned}$$

Onde n é o passo de excitação atual.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(\frac{E}{B^t_{11,n}} \cdot \varepsilon_n \right) = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} \cdot \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} \\
C_1 = \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \frac{4}{(1 - D_{1,n})^2} + \frac{1 - 2\nu}{9 \left(1 - \frac{D_{1,n} + 2 D_{2,n-1}}{3} \right)} \\
C_2 = \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(a \cdot A \left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \right) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right)^2}
\end{aligned}$$

67 Finalmente, nós obtemos módulo tangente:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

62.2.3.3.2 Carregamento de compressão: $\varepsilon_{11} < 0$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Equações constitutivas

68 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e.. $\eta_t = 1$ Então:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_2} + 4\right) + \frac{1-2\nu}{3}} \cdot \varepsilon \\ D_2 &= \frac{a \cdot A}{2}\left(\texttt{atan}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon_{22}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{B^c_{22}}{B^c_{11}} \cdot \varepsilon_{11} \end{aligned} \tag{62.20}$$

onde, $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_{22}^2} \geq 0$,

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

69 D_1 É constante e o módulo tangente é determinado com Eq. 62.20:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.21}$$

70 No entanto, se $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$, o módulo tangente é igual ao secante.

$$E^{tan} = \frac{E}{B^c_{11}}$$

Módulo Coerente rigidez tangente em implementação numérica

71 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ e.. $\eta_t = 1$, módulo tangente é determinado com Eq. 62.20 e.. 62.21:

$$\begin{aligned} E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\ B^c_{11,n-1} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{22,n-1} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{22,n} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \end{aligned}$$

Onde n é o passo de excitação atual.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\tilde{\nu}_{n-1} = -\frac{B^c_{22,n-1}}{B^c_{11,n-1}}, \quad \varepsilon^{tr}_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \varepsilon_{11,n}$$
$$\tilde{\nu}_{n} = -\frac{B^c_{22,n}}{B^c_{11,n}}, \quad \varepsilon_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n} \cdot \varepsilon_{11,n}$$

onde, $\varepsilon^{tr}_{22,n}$ É o julgamento deformação em ε_{22}.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(\frac{E}{B^c_{11,n}} \cdot \varepsilon_n\right) = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

onde,

$$\frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} \cdot \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n}$$
$$C_1 = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} = \frac{2(1+\nu)}{9(1-D_{2,n})^2}$$
$$C_2 = \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(a \cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)\right)$$
$$= -\tilde{\nu}_{n-1}\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right)^2}$$

Finalmente, nós obtemos módulo tangente:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

72 Fig. 62.20 descreve a relação entre deformação e tensão em modelo de dano anisotrópico sem permanente deformação.

73 Fig 62.21 para 62.23 Mostrar o procedimento para obter uniaxial tensão σ e módulo tangente E^{tan} de uniaxial deformação ε.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

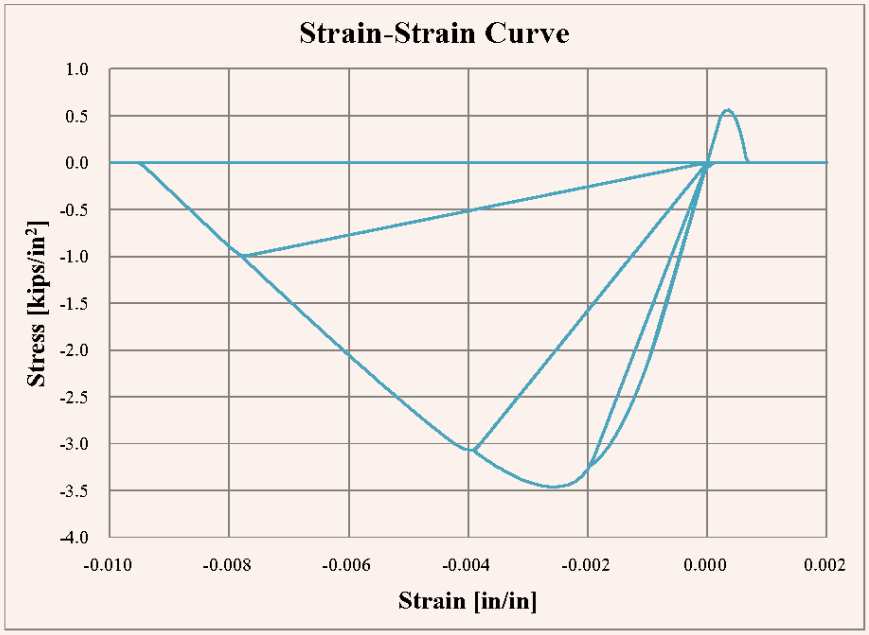


Figura 62.20: Deformação-tensão curva para modelo de dano anisotrópico sem permanente deformação

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

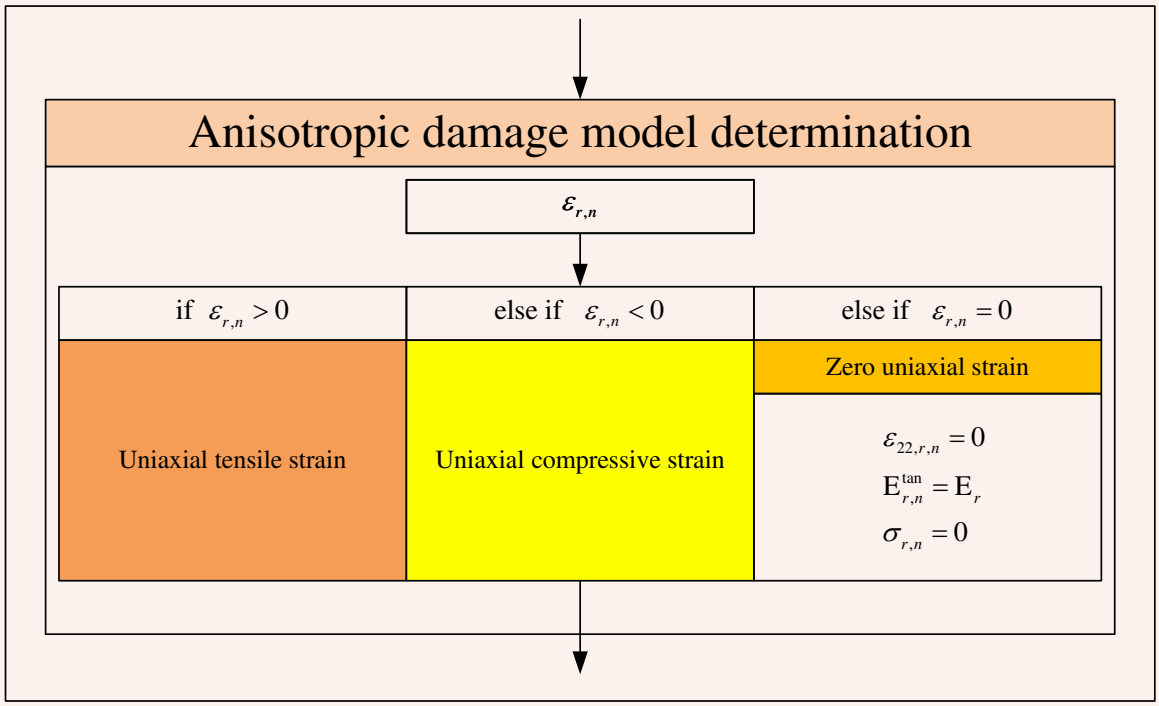


Figura 62.21: Determinação (1) para o modelo de dano anisotrópico

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

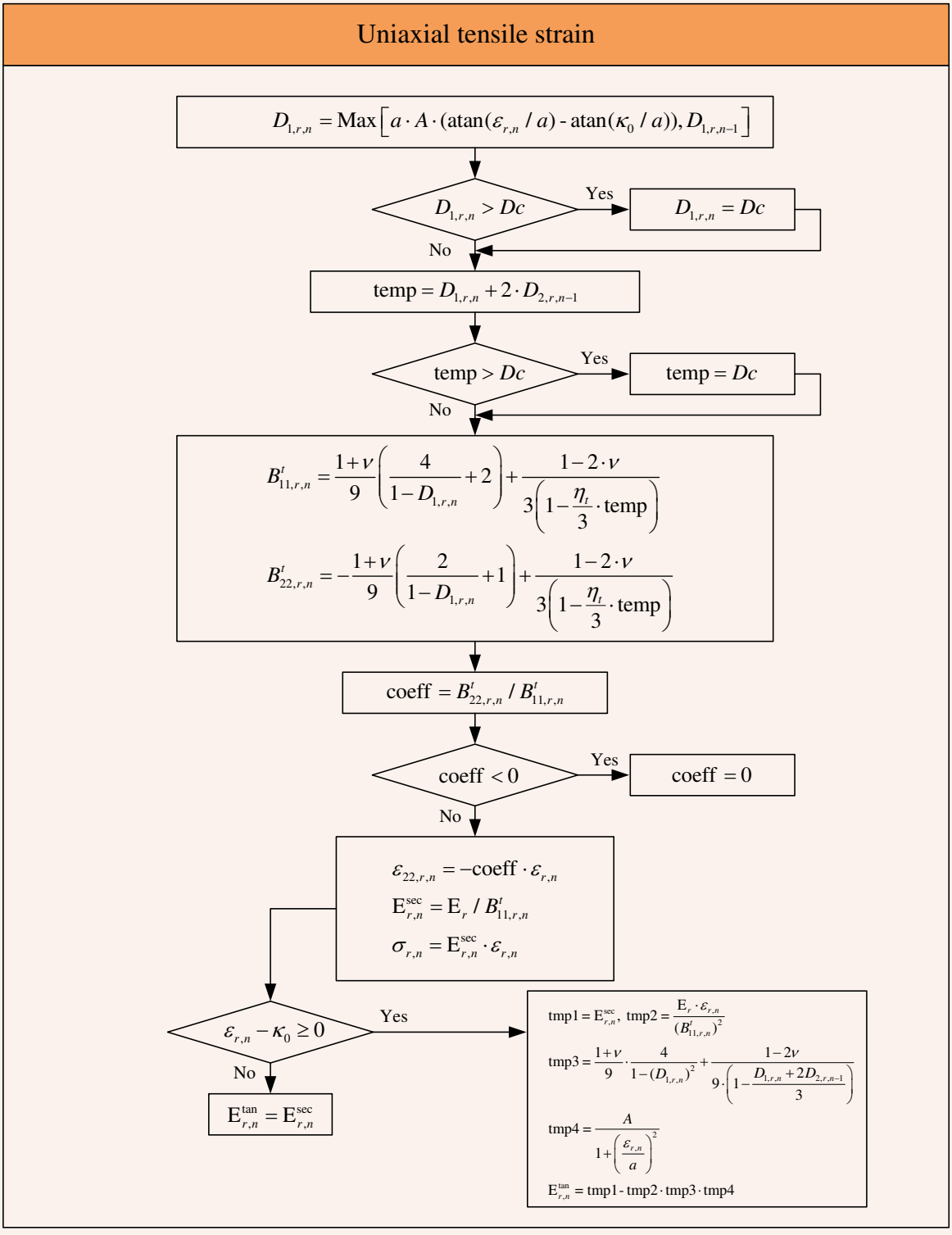


Figura 62.22: Determinação (2) para o modelo de danos anisotrópicos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

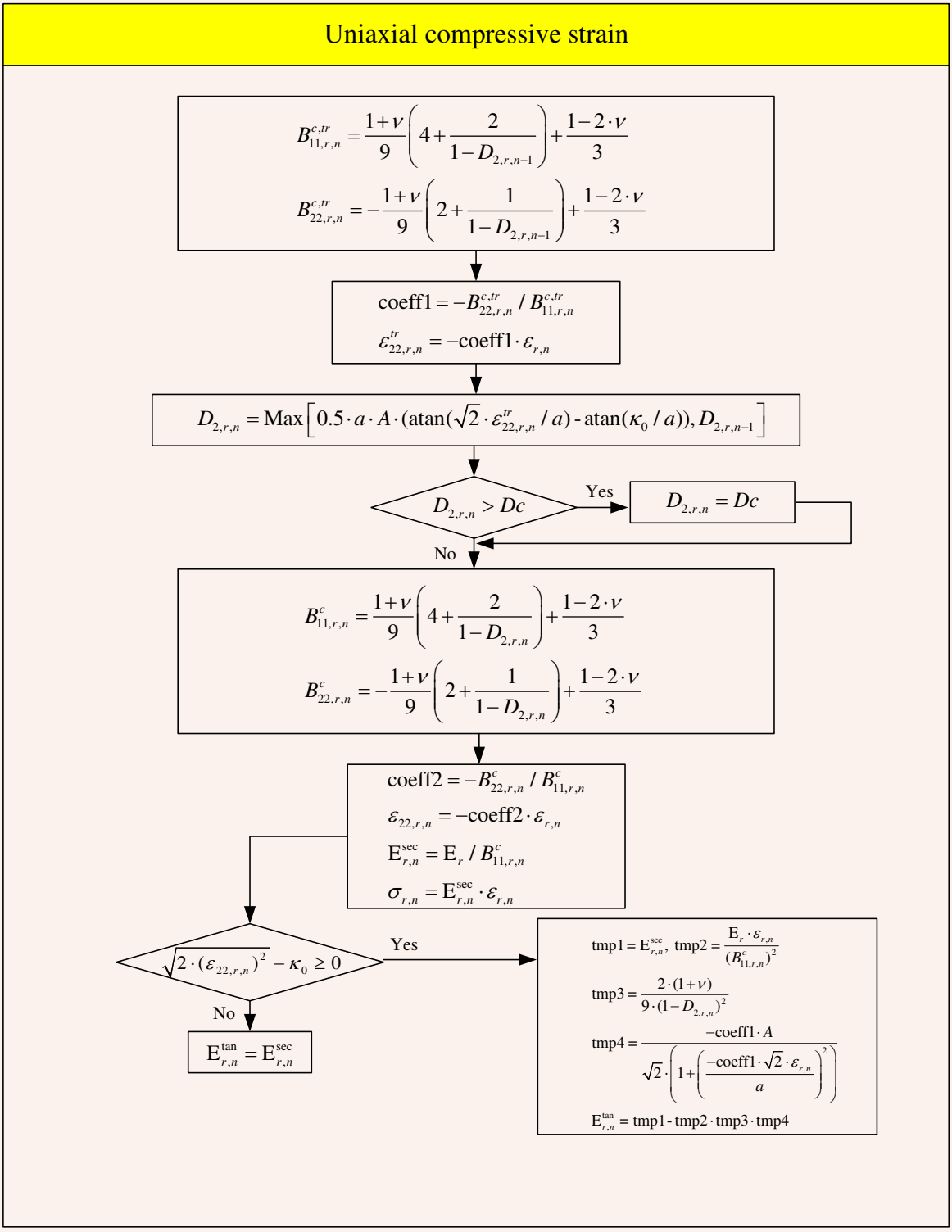


Figura 62.23: Determinação (3) para o modelo de dano anisotrópico

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.2.3.4 Modelo de dano anisotrópico com danos efetivos, recuperação e permanente ε_{an}

O modelo de dano anisotrópico anterior não explicava deformações permanentes. A seguinte extensão do modelo casca aborda esta limitação. Este modelo é baseado no modelo de danos anisotrópicos ψ_e^* anteriormente identificado como ψ^*.

$$\rho\psi^* = \rho\psi_e^* + \rho\psi_{an}^*$$

Para a parte danificada do modelo, a função de consolidação é alterada para levar em consideração o Retorno elástico na compressão:

$$\kappa\left(d_\varepsilon\right) = \frac{d_\varepsilon}{A} + \kappa_0$$

Onde A e.. κ_0 são dois parâmetros que dependem do material. O critério de dano dependerá do elástico deformações e não dos totais:

$$f = \hat{\varepsilon_{el}} - \kappa\left(d_\varepsilon\right)$$

A parte anelestic do modelo é:

$$\rho\psi_{an}^* = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

Isto corresponde à partição do total deformação em um componente elástico e permanente.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\rho\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\rho\psi_e^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\rho\psi_{an}^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

A evolução do permanente deformações são derivadas das seguintes equações:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{an} = g_D\left(d_\varepsilon\right)\ \dot{\boldsymbol{D}}^D + g_H\left(d_\varepsilon\right)\ \dot{d}_\varepsilon\ \boldsymbol{Id}$$

com $g_D\left(d_\varepsilon\right)$ $g_H\left(d_\varepsilon\right)$ Duas funções dependendo da ativação Danos para respeitar a dissimetria tensão/compressão. Duas funções bilineares contínuas são propostas aqui:

$$\begin{array}{lrcl|lrcl} \text{if } d_\varepsilon < 1 & g_D\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_D}{K_D} d_\varepsilon & \text{else} & g_D\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_D}{K_D} + k_D\left(d_\varepsilon - 1\right) \\ & g_H\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_H}{K_H} d_\varepsilon & & g_H\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_H}{K_H} + k_H\left(d_\varepsilon - 1\right) \end{array}$$

62.2.3.4.1 Esquema numérico uniaxial

74 O estado de carga é definido pelo sinal do elástico deformação. Assim, para determinar o estado de carga na etapa do tempo n, o incremento de deformação $\Delta\varepsilon$ é comparado com o elástico deformação na etapa de tempo $n-1$:

75 If $\varepsilon_{n-1}^e < 0$ e.. $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$, o estado de carga permanece em compressão, caso contrário Muda para tensão.

76 If $\varepsilon_{n-1}^e > 0$ e.. $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$, o estado de carga permanece em tensão, senão ele Muda para compressão.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tensão

- Previsão elástica: $\varepsilon^e_{1,n} = \varepsilon^e_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- Teste de critério de dano: f
  - if $f < 0$, comportamento elástico:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} \end{aligned}$$

  - Ou então, comportamento prejudicial:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= A\left(\varepsilon^e_{1,n} - \kappa_0\right) \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{-k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \end{aligned}$$

- Computação de σ e.. $\varepsilon^e_{2,n}$:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1-D_{1,n}} + 2\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n}+2\cdot D_{2,n-1})}{3}\right)} \\ B_{2,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_{1,n}} + 1\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left[1 - \frac{\eta_t}{3} \cdot (D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})\right]} \\ \sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}} \varepsilon^e_n \\ \varepsilon^e_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}} \varepsilon^e_{1,n} \end{aligned}$$

Compressão

- Previsão elástica: $\varepsilon^e_{1,n} = \varepsilon^e_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- Teste de critério de dano: f

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

– if $f < 0$, comportamento elástico:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} \end{aligned}$$

– Ou então, comportamento prejudicial:
A evolução do permanente deformação deve ser estimada:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n} &= \gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * d_{\varepsilon 2,n} \\ \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n} &= 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * \left(D_{2,n} - D_{2,n-1}\right) \end{aligned}$$

A evolução dos danos torna-se:

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{an}_{1,n-1} - \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n}\right) - \kappa_0\right)}{2}$$

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{an}_{1,n-1} + 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)D_{2,n-1} - \kappa_0\right)\right)}{2\left(\sqrt{2}A\tilde{n}u_{n-1}\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)\right)}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{e\ trial}_{2,n} &= \frac{B_{2,n-1}}{B_{1,n-1}}\varepsilon^{e}_{1,n} \\ D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{-2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n} \end{aligned}$$

- Computação de σ e.. $\varepsilon^{e}_{2,n}$:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9}\cdot\left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B_{2,n} &= -\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ \sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}}\varepsilon^{e}_{n} \\ \varepsilon^{e}_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}}\varepsilon^{e}_{1,n} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Fig. 62.24 descreve a relação entre deformação e tensão em modelo de dano anisotrópico com permanente deformação.

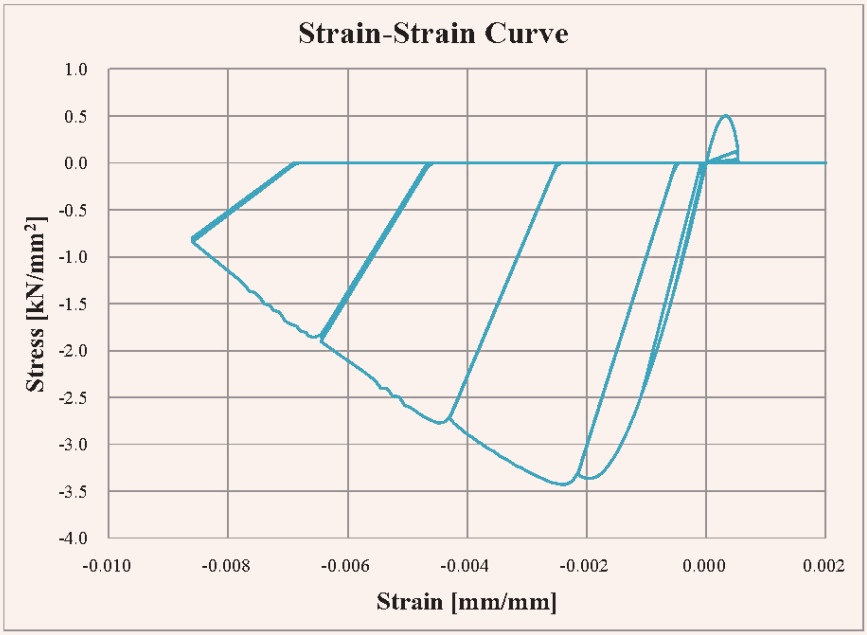


Figura 62.24: Deformação-tensão curva para modelo de dano anisotrópico com permanente deformação

62.2.4 Bond-slip

77 Quando o comprimento insuficiente do desenvolvimento da armadura for fornecido, então haverá uma falha de ligação (entre a barra e o concreto). Isso está ilustrado na figura. 62.25.

78 O deslizamento devido à barra de reforço longitudinal perto do pilar e da ancoragem pode ser facilmente determinado se assumirmos uma ligação uniforme tensão u_b ao longo das barras dentro do comprimento de desenvolvimento dentro da base ou da articulação viga-pilar.

79 Do equilíbrio

$$u_b(\pi d_b)l_d = \frac{\pi d_b^2}{4} f_s$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

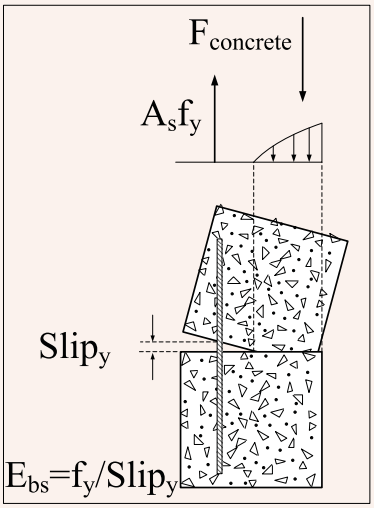


Figura 62.25: Modelo de escorregar

Onde d_b é o diâmetro da barra, l_d é o comprimento de desenvolvimento sobre o qual ocorre a escorregadura, resolvendo para l_d,

$$l_d = \frac{d_b f_s}{4u_b}$$

80 Assumindo que o máximo deformação ocorre no final do pilar, e um Variação linear de deformação ao longo do comprimento do desenvolvimento, a integral da curva deformação vai dar o deslizamento de barra total na base - interface pilar ou viga-pilar é o deslizamento dado por

$$S = \frac{\varepsilon_s l_d}{2} = \frac{f_s l_d}{2E_s}$$

Substituindo

$$S = \frac{\varepsilon_s d_b f_s}{8u_b}$$

81 Assumindo que o seção transversal gira sobre seu linha neutra quando ocorre deslize ($\phi_y = \varepsilon_y/(d-c)$), o deslocamento relacionado ao deslizamento do bar em um ponto à distância L da base pilar será

$$\Delta_{slip} = \frac{\phi_y d_b f_y L}{8u_b}$$

82 Um modelo simplificado para a ligação tensão em termos de aço real tensão assume uma

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ligação constante tensão $u_e = 12\sqrt{f_c'}$ Antes da produção de aço, e outra ligação constante tensão de $u_p = 6\sqrt{f_c'}$ Passado aço render

$$\begin{aligned} u_e &= 12\sqrt{f_c'} && \text{prior to steel yielding} \\ u_p &= 6\sqrt{f_c'} && \text{past steel yielding} \end{aligned}$$

83 Baseado nessa suposição, o total deslize do bar S na borda da ancoragem é obtida integrando o aço deformações sobre o comprimento embutido.

84 Este modelo foi usado para obter uma relação monotônica para deslizamento de barras versus barra tensão na base pilar.

85 Assumindo ancoragem suficiente:

$$S_1 = \frac{\varepsilon_s f_s}{8u_e} d_b;\ \varepsilon_s \le \varepsilon_y;\ S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;\ \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

Onde d_b é o diâmetro da barra, u_e é a ligação elástica tensão = $12\sqrt{f_c'}$ (psi), e u_p é a ligação de plástico tensão = $6\sqrt{f_c'}$. figura 62.27

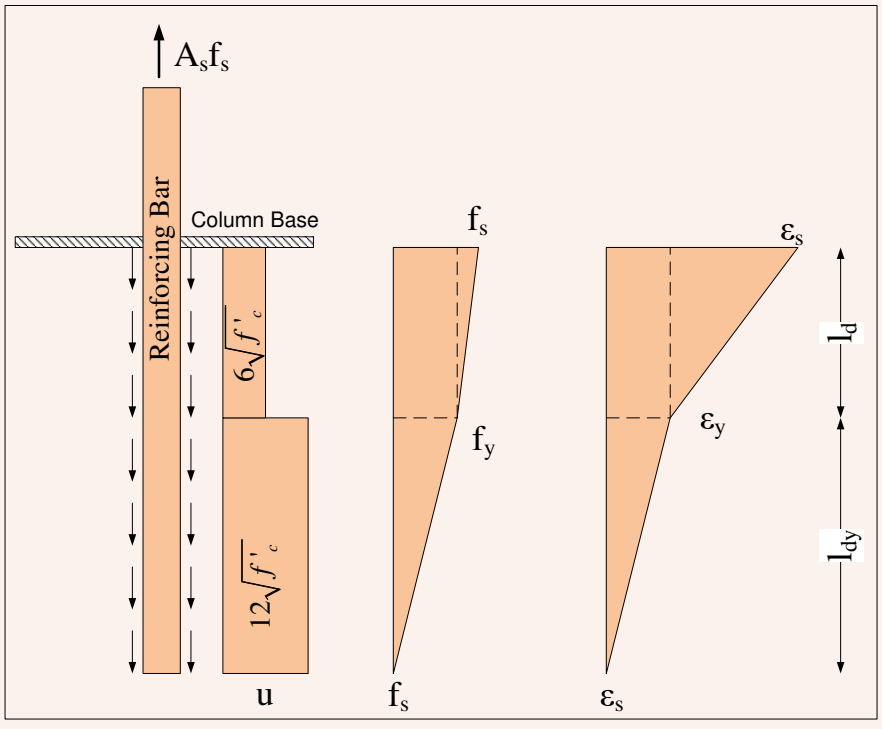


Figura 62.26: Modelo de ligação simplificado

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

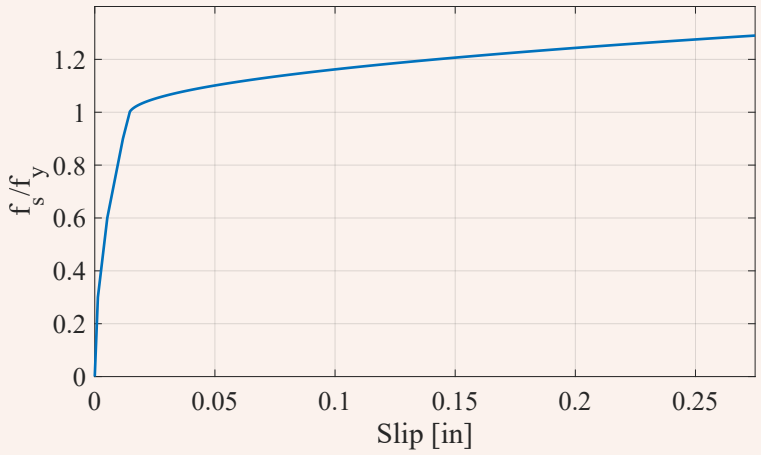


Figura 62.27: Curva de deslizamento da ligação

62.2.5 Elemento de seção de comprimento zero

`Esta seção é uma adaptação do modelo de Ghannoum`

86 O elemento de seção de comprimento zero só deve ser usado quando os elementos de fibra são usados se quisermos capturar o deslizamento de ligação entre concreto e barras.

87 Nós temos uma resposta não linear pós-pico de ligação tensão vs deslizamento de ligação, e nós precisamos linearizá-la, e então resolver para u_p (que será diferente do valor previamente dado de $6\sqrt{f_c'}$ Adequado para o segmento de endurecimento não linear.

88 Procuramos que o segmento linearizado intersecta o não-linear em $1.25 f_y$, daí

$$\varepsilon_u = \varepsilon_y + 0.25\frac{Fy}{Es/h} = \frac{Fy}{Es} + 0.25h\frac{Fy}{Es} = 0.26h\varepsilon_y$$

Onde h é o parâmetro de endurecimento definido para 100. Substituindo por

$$S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e}d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p}d_b;$$

Nós conseguimos

$$S_u = S_y + \frac{6.75\varepsilon_y f_y}{8u_p}d_b$$

89 Nós podemos razoavelmente supor que

$$Su = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y}SJ = 26SY$$

após a substituição, nós temos:

$$u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

u_p Pode ser usado em elementos chamados estado limite para avaliar a falha induzida pelo deslizamento de ligação.

90 Independentemente de qual modelo de aço é usado na viga-pilar, recomenda-se usar o bilinear para este elemento. Usando um modelo bilinear, com $h = 100$ será equivalente a ter uma curva de deslizamento de barras tal que o segundo segmento se cruza com o exato em $f_s = 1.25 f_y$ com $u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$

91 No modelo bilinear de aço, Módulo de Young deve ser ajustado para refletir o deslizamento da ligação, substituindo E_s por E_{bs};

$$E_{bs} = \frac{f_y}{S_y}$$

92 Deve-se notar que inerente a esta suposição é um Comprimento da unidade do elemento comprimento zero.

93 Finalmente, para manter a mesma relação de material rigidez entre o aço deslize da barra no elemento de seção de comprimento zero, e o do elemento pórtico (aço longitudinal), multiplicamos o material de concreto de deslizamento da barra por E_s/E_{bs}.

94 As propriedades do concreto para o elemento de seção de comprimento zero são tais que a localização do linha neutra no elemento viga-pilar e da seção de fibra de comprimento nulo é a mesma, fiviga. 62.28. Assim

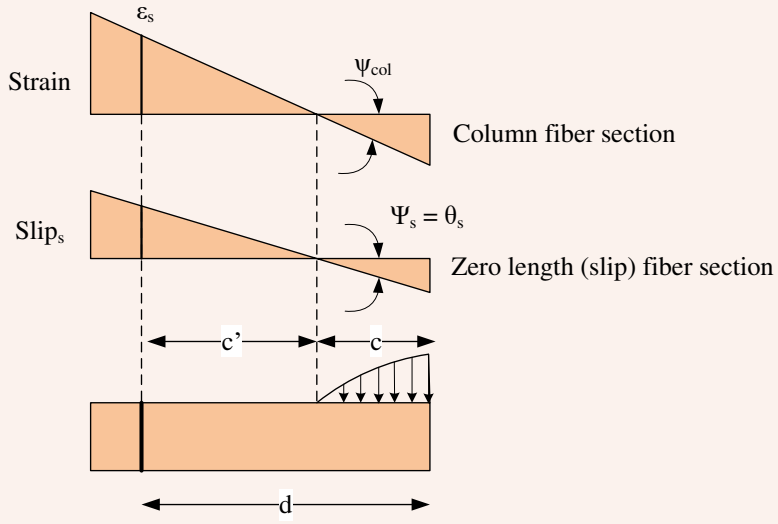


Figura 62.28: Localização de linha neutra

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta_s & = & \frac{S_s}{c'} \\ \Psi_{col} & = & \frac{\varepsilon_s}{c'} \end{array}\right\} \theta_s = \Psi_{col}\frac{S_s}{\varepsilon_s} \tag{62.22}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

95 Por isso tudo A fibra deformações (correspondente ao aço e concreto) na seção de comprimento zero deve ser escalonada por $\frac{S_s}{\varepsilon_s}$

96 Isso pode ser facilmente conseguido alterando os dados de entrada do material, de modo que

- Todos os valores tensão permanecem inalterados
- Deformações são escalados por $\frac{S_y}{\varepsilon_y}$

62.3 Plasticidade amassada

97 O modelo de plasticidade grupada aproxima-se do comportamento de um material, considerando que a deformação plástica ocorre em regiões distintas conhecidas como *rótulas plásticas* ou zonas plásticas[3].. Essas zonas plásticas estão concentradas em posições específicas na estrutura, comumente encontradas nos terminais de conexões ou suportes.

98 O modelo assume que o material sofre rotação plástica dentro destas zonas plásticas, enquanto o restante da estrutura mantém sua elasticidade.

99 Uma notável semelhança pode ser observada com as teorias da linha de rendimento 57) .. No entanto, é importante notar que os teoremas dos limites inferior e superior são princípios mais amplos que abrangem a análise plástica como um todo, enquanto o modelo de plasticidade grudada é uma técnica específica de aproximação dentro de um quadro maior. Os teoremas inferiores e superiores servem como fundamentos teóricos cruciais para a análise de plástico, enquanto o modelo de plasticidade grudada oferece uma ferramenta prática de engenharia para análise simplificada e design.

100 Na plasticidade grudada a resposta não linear é governada por

1. Segmento não linear de comprimento L_p Adjacen para o nó.
2. Molas não lineares colocadas na junta.

Vamos abordar cada uma dessas duas considerações individualmente.

101 Primeiro, é importante notar que a abordagem para derivar L_p Não é uma tarefa trivial. Uma completa e compreensível derivação de L_p requer revisitar conceitos que foram discutidos anteriormente, tais como a relação entre curvatura e deflexão (refer §22.3.4). Além disso, envolve considerar o efetivo momento de inércia de concreto armado vigas, que pode não ter sido coberto neste livro em particular, mas é normalmente abordado em livros básicos sobre concreto armado. Ao revisitar o conceito de deflexão da curvatura

[3] Anote analogia com a zona de plástico na ponta de uma rachadura em metais, ou a zona do processo de fratura ao redor de uma fenda em concreto

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e incorporar o efetivo momento de inércia de concreto armado, podemos chegar a uma derivação adequada e compreensível de L_p.

62.3.1 Comprimento de plástico

102 O comprimento do rótula plástica afetará muito o plástico deslocamento (§62.3.1.4.1), portanto precisamos determinar o mais confiável possível.

103 Para a determinação do comprimento de plástico, a sequência será a seguinte:

1. Locais de rótulas plásticas. Enquanto muitas referências abordam um cantilevered viga para explicação, mostraremos mais precisamente onde estão os comprimentos de plástico, e como nós considerá-los no quadro do mais simples possível diagrama de corpo livre.
2. Relação teórica entre curvatura e deformação.
3. concreto armado elementos momento de inércia e curvatura correspondente
4. Determinação de comprimentos plásticos

Seguindo esta sequência sistemática, podemos determinar de forma confiável os comprimentos plásticos, que por sua vez influenciam muito o plástico deslocamento da estrutura (referência a §62.3.1.4.1).

62.3.1.1 Potenciais localizações de rótulas plásticas

104 Para determinar o comprimento do plástico L_p e identificar o potencial rótulas plásticas, vamos começar desenhando um diagrama de corpo livre do *comprimento representativo* entre dois pontos: A, um ponto adjacente de contraflexura (sem momento ou fim livre), e B, a seção crítica. O diagrama está ilustrado na figura 62.29.

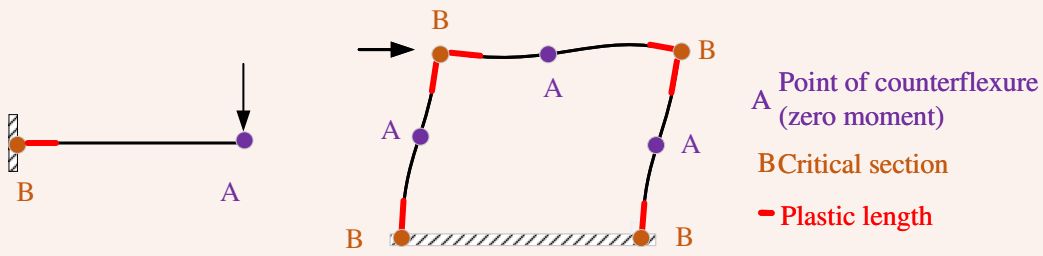


Figura 62.29: Identificação das zonas plásticas

CÓPIA PARA REVISÃO

62.3.1.2 Deformação da curvatura ($\Delta(\phi)$)

105 Para prever a ductilidade de uma estrutura, é essencial determinar a deformação que ocorreu quando o momento final é alcançado. Isso envolve entender a rotação e deflexão do membro na condição final. Esses valores podem ser obtidos analisando a distribuição real da curvatura dentro da estrutura.

106 A rotação e deflexão do membro podem ser determinadas integrando as curvaturas ao longo do comprimento do membro. Curvatura (§22.3, Eq. 22.7É definido como o *taxa de rotação entre dois pontos*,

$$\phi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

Considerando as curvaturas em diferentes locais e integrando-as, podemos quantificar a rotação e deflexão do membro, fornecendo informações valiosas sobre seu comportamento sob condições últimas.

$$\theta(x) = \int_A^B \phi(x)dx$$

Onde dx é um elemento de comprimento do membro. Fig. 62.30

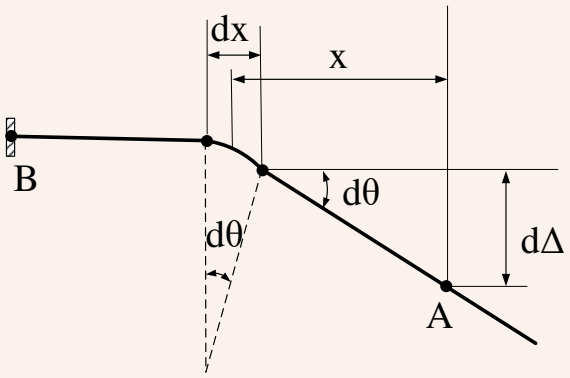


Figura 62.30: Deflexão da deformação flexural de um elemento

107 Fig. 62.30 mostra um cantilever com deformação devido à rotação $d\theta$ sobre o elemento de comprimento dx Apenas. A rotação $d\theta$ É

$$d\theta = \phi dx$$

Onde ϕ é a curvatura do elemento. A deflexão transversal $d\Delta$ no ponto A *Da tangente* para o eixo do membro na extremidade fixa B, devido à rotação $d\theta$ entre as extremidades do elemento, é

$$d\Delta = xd\theta = x\phi dx$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Daí a deflexão transversal do ponto A da tangente ao eixo do membro no ponto B devido à curvatura ao longo de todo o comprimento do membro entre esses pontos será

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x\phi dx$$

108 É importante notar que essas equações representam uma simples generalização dos teoremas da área de curvatura. Eles se aplicam tanto às curvaturas elásticas quanto plásticas, permitindo uma aplicação mais ampla do conceito. Considerando essas equações, podemos analisar o comportamento da estrutura em regimes elásticos e plásticos. .

109 No entanto, vale a pena mencionar que esta abordagem ignora a influência de *Endurecimento da tensão*.. Endurecimento de tensão refere-se ao aumento em rigidez dos membros devido à tensão do concreto entre as rachaduras. Este fenômeno não é contabilizado nas equações acima mencionadas. Endurecimento da tensão pode ter um impacto significativo no comportamento geral e resposta da estrutura, e é importante considerá-lo em análises mais avançadas e projetos.

62.3.1.3 Concreto armado eficaz e curvatura

110 Para compreender o modelo de plasticidade grupada, é crucial ter uma compreensão completa da curvatura em um concreto armado viga e a definição correspondente do eficaz momento de inércia.

111 No caso do uniformemente carregado, biapoiado concreto armado viga retratado na Figura 62.31, surge uma questão crítica: Qual é o real momento de inércia I Para calcular a deflexão? No entanto, neste contexto particular, nossa intenção é enfatizar a complexidade associada à determinação da distribuição da curvatura.

112 Determinar a distribuição da curvatura em uma viga envolve considerar vários fatores, como o comportamento do concreto e aço de reforço, a influência do cracking, e a interação entre as zonas de tensão e compressão. Esses fatores contribuem para a natureza complexa do cálculo da distribuição da curvatura, e uma compreensão abrangente dessa complexidade é crucial para analisar com precisão o comportamento da estrutura.

113 Antes de carregar, a viga tem uma constante momento de inércia correspondente ao bruto (baseado em uma seção não-cracked) I_g.. À medida que a carga é gradualmente aplicada, o diagrama (parabólico) do momento sobe até atingir o valor máximo de $wL^2/8$.

114 Em algum lugar ao longo da viga, o momento atinge e então excede o local rachado momento de inércia (linha neutra se move para cima à medida que o momento é aumentado). Em última análise, a viga terá muitas rachaduras. Nesses locais o momento de inércia será I_{cr}, e no meio simplesmente I_g.

115 A variação do momento de inércia irá transformar o diagrama de momento parabólico suave $M(x)$ em uma curvatura áspera ($\phi(x) = M(x)/EI(x)$).

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

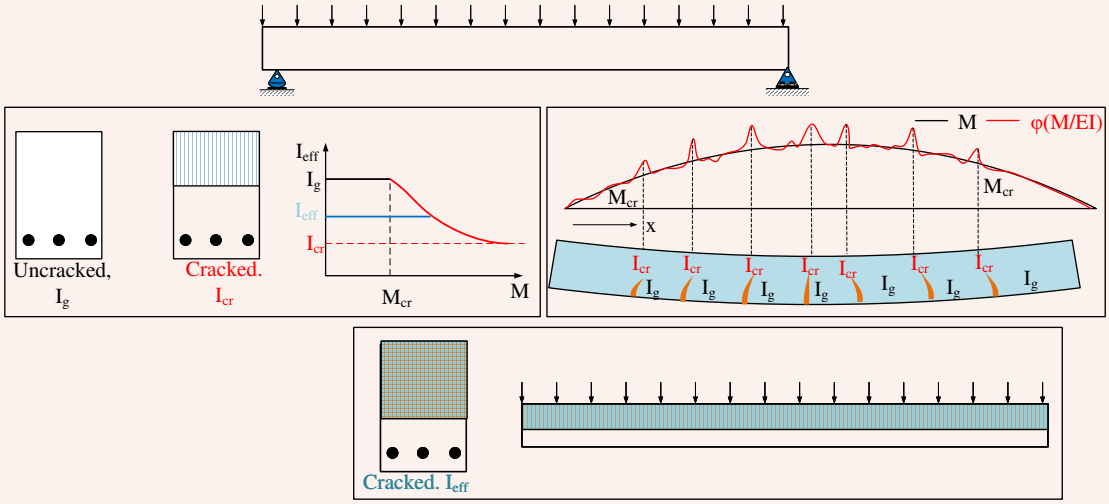


Figura 62.31: Efetivo momento de inércia em R/C

116 Para efeitos de desvio, é necessário um equivalente e ACI baseado na proposta original de Branson et al., 1963, recomenda usar uma expressão média ponderada[4] para $I \rightarrow I_{\text{eff}}$

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3\right] I_{\text{cr}} \quad \textbf{(ACI 9.5.2.3)}$$

Onde

$$I_{\text{eff}} \leq I_g$$
$$M_{\text{cr}} = f_r' \frac{I_g}{y_b}$$
$$f_r' = 7.5\sqrt{f_c'}$$

e.. M_a é o momento máximo (serviço) no estágio em que a deflexão é calculada

117 Avaliação de deflexão é um problema não linear, como $w \nearrow M \nearrow \frac{M_{\text{cr}}}{M_a} \searrow I_{\text{eff}} \searrow$ e para um contínuo viga

$$\Delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} \begin{cases} w \nearrow & \Delta \nearrow \\ I \searrow & \Delta \nearrow \end{cases}$$

No entanto, muitas vezes negligenciamos essa não linearidade.

62.3.1.4 Deformação em termos de comprimentos rótula plástica

62.3.1.4.1 Concreto armado

[4] A equação mencionada não será usada neste livro. Sua inclusão é destinada apenas a estabelecer uma conexão com o tema de concreto armado.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

118 Como mencionado anteriormente, elementos concreto armado são propensos a desenvolver múltiplas fissuras sob condições de carga. Esta ocorrência requer a introdução de um efetivo momento de inércia para explicar o reduzido rigidez da seção rachada.

119 Quando uma estrutura concreto armado experimenta deformações flexurais inelásticas devido a sobrecargas da gravidade ou forças laterais, essas deformagens normalmente se concentram dentro de um comprimento finito da dobradiça. Isto significa que a deformação plástica e redistribuição associada dos momentos estão localizados dentro desta região da dobradiça.

120 A inclusão de um rótula plástica em uma análise estrutural oferece uma vantagem significativa, permitindo *Redistribuições do momento*. Esta redistribuição de momentos pode aumentar muito a força da estrutura além do que é previsto pela teoria elástica.

121 Assim, procuramos determinar expressões para as deformações baseadas em L_p.

122 A contribuição elástica para rotação e deflexão pode ser facilmente calculada. Por outro lado, o rótula plástica irá explicar a presença das rachaduras, o aumento de rigidez dos membros devido à tensão transportada pelo concreto entre a fissura, bem como as deformações adicionais causadas pela aderência da armadura.

123 Dada a quase impossibilidade de determinar com precisão a curva de curvatura real na prática, é comum aproximá-la usando um modelo bilinear (elasto-plástico ou elasto-endurecimento). Esta idealização simplifica a análise, representando a distribuição da curvatura com duas regiões distintas.

124 Referindo-se à Figura 62.32, a aproximação bilinear é definida pelos pontos A (o ponto de inflexão) e B, onde a curvatura final (ou seção crítica) foi alcançada. Este modelo assume um aumento linear na curvatura até o ponto A, seguido por uma curvatura constante além do ponto A até chegar ao ponto B.

125 A distribuição da curvatura ao longo do membro é ilustrada na figura, e é importante notar que a variação do momento de inércia (como retratado na Figura 62.31) resultará em flutuações na curvatura. Cada pico de curvatura corresponde a uma fenda correspondente dentro do membro.

126 Enquanto o diagrama do momento (M) é linear, o diagrama de curvatura ($\phi = \frac{M}{EI}$Não é. Esta não linearidade surge devido à variação momento de inércia, que pode ser influenciada pela presença de fissuras na estrutura. O diagrama de curvatura exibirá um aumento na curvatura em locais de fissura devido à diminuição no momento de inércia associado com as rachaduras.

127 Na análise, vamos identificar dois pontos distintos correspondentes a ϕ_y e.. ϕ_u.. Entre estes dois pontos ($\phi_y < \phi < \phi_u$), haverá uma região localizada de rotação inelástica, induzindo a formação de *rótula plástica*.. Esta rotação inelástica contribui para o desenvolvimento de deformações plásticas dentro da estrutura.

128 Para simplificar a análise, nós definimos um *Equivalente rótula plástica* ao longo do qual

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

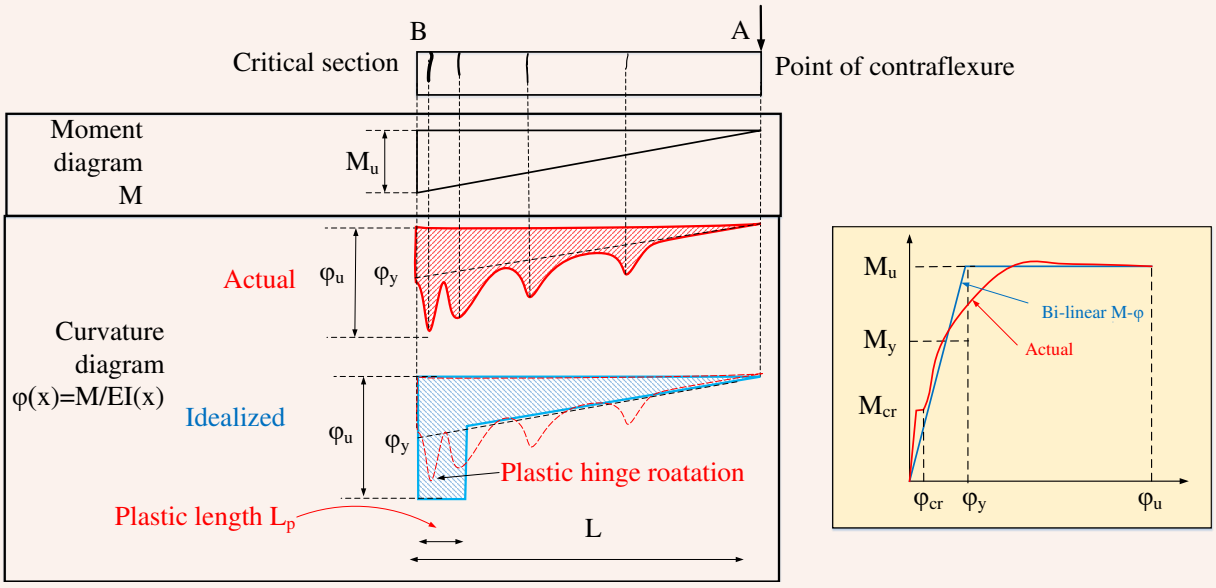


Figura 62.32: Localização de comprimentos de plástico (Park e Paulay, 1991)

a curvatura plástica é considerada constante. Esta simplificação nos permite capturar o comportamento essencial das deformações plásticas, minimizando a complexidade da análise.

129 A rotação θ é dado por

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \begin{cases} \theta_e = \int_A^B \dfrac{M}{EI} dx & \text{Elastic rotation} \\ \theta_p = (\phi_u - \phi_y) L_p & \text{Inelastic rotation} \end{cases} \tag{62.23}$$

130 Se a carga externa em A é um carga concentrada θ_{AB} é dada pelo teorema da curvatura do primeiro momento[5].

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \underbrace{\phi_y \frac{L}{2}}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p}_{\text{Plastic}}$$

131 O deslocamento entre A e.. B, Fig. 62.33 é dado pelo teorema da curvatura do segundo momento[6]

[5] A diferença na inclinação entre duas seções de um membro flexural carregado é igual à área do M/EI diagrama entre esses dois pontos, (Eq. 22.16)

[6] O desvio tangencial do ponto 2 em um membro flexural carregado, de uma tangente à curva de deflexão no ponto 1 (t_{21}) é igual ao momento da área do diagrama de curvatura entre 1 e 2 sobre 2, (Eq. 22.3.4.3).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

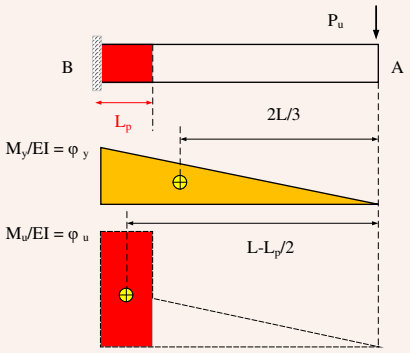


Figura 62.33: Dica deslocamento de um R / C cantilevered viga com a suposição de plasticidade grudada

$$\begin{aligned}\Delta^u_{AB} &= \int_A^B x\phi_{AB}dx \\ &= \underbrace{\left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y)L_p\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\end{aligned} \tag{62.24}$$

Onde x É a distância de dx De.. A.. Note que se substituirmos os termos no componente elástico, recuperaremos o familiar $PL^3/3EI$[7]. ou

$$\Delta^u_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{M_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(M_u - M_y)L_p\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.25}$$

132 Para determinar o comprimento plástico, testes em cantilevered vigas[8] Precisa ser executado. Estes testes envolvem medir força e relações momento-curvatura. Pelos resultados do teste, um modelo elástico bilinear perfeitamente plástico pode ser derivado. Este processo é referido como *Calibração*

133 O procedimento envolve construir uma curva bilinear equivalente baseada nos resultados dos testes. A área sob a curva original (força-deslocamento ou momento-curvatura) é calculada, e uma linha com a mesma inclinação inicial que a curva é desenhada através da origem. Uma linha horizontal é então desenhada para garantir que a área sob as duas linhas seja igual à área sob a curva original. O ponto de intersecção entre as duas linhas

[7] Substituir ϕ_y por ϕ, então, $\Delta^{el} = \left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{ML}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{PL^2}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$.

[8] Lembre-se que esta estrutura simplificada é simplesmente representativa de um segmento de elemento entre a seção crítica e o ponto de contraflexão.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

representa o rendimento deslocamento/curvatura, enquanto o valor máximo na faixa inelástica é considerado o valor final.

134 Usando a Equação 62.24, podemos resolver para o comprimento de plástico L_p com base no rendimento deslocamento/curvatura e na curva final deslocamento/obtida a partir dos resultados do teste.

135 Na ausência de uma calibração específica do problema L_p, contando com equações empíricas torna-se necessário. Estas equações empíricas fornecem estimativas para o comprimento do plástico baseado nas características da estrutura e as condições específicas de carga.

Concreto não confinado Uma dessas equações é o modelo comumente usado de (Baker, 1956) e mais tarde adotado pela Instituição de Engenheiros Civis (Bate et al., 1962)

$$L_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{Z}{d}\right)^{0.25} c$$

Onde

$$k_1 = \begin{cases} 0.7 & \text{for mild steel} \\ 0.9 & \text{for cold worked steel} \end{cases}$$

$$k2 = 1 + 0.5\frac{P}{P_u}$$

$$k_3 = 0.9 - \frac{0.3}{23.5}(f_c' - 11.7)$$

Supondo que.. $f'c$ = 0,85 x resistência cúbica do concreto) onde f_c' Está em MPa
z Distância da seção crítica até o ponto de contraflexão
P Carga axial no membro
P_u capacidade máxima do membro sob carga axial quando nenhum momento fletor atua.

Confinada baseado em (Baker e Amarakone, 1964)

$$L_p = 0.8 k_1 k_3 \frac{z}{d} c$$

Onde c é a profundidade linha neutra em colapso.

62.3.1.4.2 Aço

136 Para o aço, lembrando que temos $M_y = SF_y$, e $M_u = ZF_u$, Eq. 62.25 pode ser reescrito como

$$\Delta_{AB}^u = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.26}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

137 Ainda temos que determinar o comprimento do plástico L_p.. Para abordar isso, uma suposição é feita de que a propagação da plasticidade pode ser aproximada como linear, como retratado na Figura 62.34.. Para encontrar o comprimento equivalente de uma seção totalmente plastificada, consideramos a área sob as duas regiões triangulares que representam a propagação da plasticidade. Encontrando o comprimento equivalente com a mesma área, podemos estabelecer um comprimento de plástico eficaz.

138 Essa abordagem nos permite simplificar a análise considerando uma zona plástica concentrada com um comprimento equivalente. Embora seja uma aproximação, fornece um método prático e viável para estimar o comprimento do plástico na ausência de soluções analíticas detalhadas ou dados empíricos para uma estrutura específica.

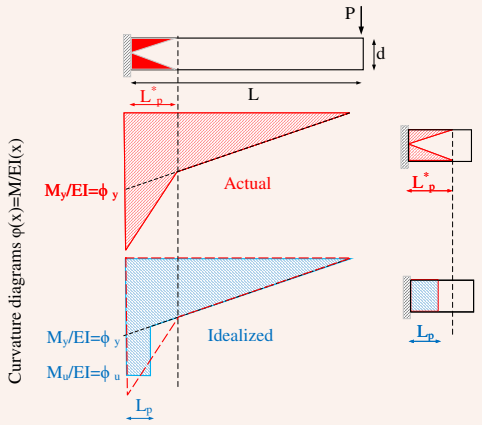


Figura 62.34: Dica deslocamento de um aço cantilevered viga com a suposição de plasticidade grudada

139 De triângulos semelhantes

$$L_p^* = L\left(\frac{M_p - M_y}{M_p}\right) = L\left(1 - \frac{M_y}{M_p}\right)$$

Mas..

$$\frac{M_y}{M_p} = \frac{S}{Z}$$

Por isso

$$L_p^* = L\left(1 - \frac{S}{Z}\right)$$

140 Nós assumimos uma variação linear da plastificação, para simplificar, nós procuramos determinar um comprimento de plástico equivalente L_p com uma área igual à anterior:

$$2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{2}L_p^*\right) = L_p d \Rightarrow L_p = \frac{L_p^*}{2} = \frac{S-Z}{2S}L$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

141 O verdadeiro comprimento do rótula plástica deve ser entre L_p e.. L_p^*.

142 Quanto ao deslocamento, revisitamos o Eq. 62.26

62.3.1.5 Ex 62.1: Rótula plástica em um aço pilar

Se considerarmos um cantilevered 144 pés em) pilar com um W14×Seção 90 com as seguintes propriedades da seção $S = 143$ Em^3, $Z = 157$ Em^3, e F_y36 KSI, $E = 29,000$ KSI, e $I = 999$ Em^{4}Então, o comprimento característico será

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{S-Z}{2S}L \\ &= \frac{157-143}{2\times 143}(144) = 0.049\times 12\times 7.0 \text{ inch} \end{aligned}$$

O deslocamento é obtido da Eq. 62.26

$$\Delta_{AB}^u = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \frac{36}{29,000\times 999}\left[\underbrace{\left(\frac{143}{2}(144)\right)\left(\frac{2\times 144}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(157-143)(7)\left(2\times 144-\frac{7}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \underbrace{1.23 \text{ in}}_{\text{Elastic}} + \underbrace{0.017 \text{ in}}_{\text{Plastic}}$$

Hum, não parece certo, equações de verificação tripla! Finalmente, a ductilidade será

$$\mu = \frac{\Delta^{(el)}+\Delta^{(pl)}}{\Delta^{(el)}} = \frac{1.23+0.017}{1.23} = 1.014$$

62.3.2 Cisalhamento modelo de falha (estado limite material)

Da E.M. Teses "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code" por Segura, 2011.

62.3.2.1 Introdução

143 O modelo de plasticidade grudada inclui apenas degradação da resistência à flexão, atribuindo propriedades elásticas lineares rígidas ao material cisalhamento e molas axiais.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Cisalhamento e os modos de falha axial, portanto, não são capturados no modelo, embora seus efeitos sejam críticos dada a gravidade da resposta estrutural sob tanto cisalhamento quanto perda de força axialmente. Na verdade, a falha pilar é o modo de falha mais grave, levando rapidamente à perda da capacidade de carga axial devido à resistência seccional reduzida.

144 Uma ferramenta computacional capaz de prever o início da falha estrutural é uma ferramenta crítica para engenheiros no campo de engenharia sísmica baseada em desempenho (Capítulo 72) (PBEE). Isto é especialmente verdade quando se considera a vulnerabilidade de estruturas mais antigas concreto armado ao colapso devido à falha axial e cisalhamento. Estas estruturas são particularmente vulneráveis ao colapso porque seu reforço transverso de luz não promove o comportamento dúctil sob carga transversal, um problema em estruturas mais antigas (pré 1970) concreto armado projetadas antes da sísmica atual Provisões de design.

145 Como uma ferramenta para prever o comportamento de tal estrutura, Elwood e Moehle, 2002 desenvolveu um modelo empírico para capturar o início da falha e a subsequente degradação de força levando ao colapso. Estado limite modelos para ambos cisalhamento e falha axial foram sugeridos com base na deriva interstory pilar em que é esperada falha para o modo de falha de interesse.

146 O modelo estado limite foi escolhido para implementação em Mercúrio (Saouma, Kang e Haussmann, 2012) como um para simular a falha de concreto armado pilares. O modelo tem aplicações tanto para a modelagem de plasticidade distribuída quanto em massa, embora sem dúvida seja mais benéfico como um componente complementar para um modelo de plasticação.

62.3.2.2 Cisalhamento estado limite modelo

147 O modelo material estado limite é adotado como um meio de fornecer outra ferramenta, além dos modelos de degradação da força, para investigar a perda estrutural de força. É importante ressaltar que o modelo é empírico e, portanto, limitado em suas aplicações. O modelo se aplica a pilares com baixas taxas de armadura transversal ($\rho'' \leq 0.002$Espera-se que falhe em cisalhamento após a flexão ter ocorrido.

148 Um elemento de comprimento zero é usado para definir um modelo constitutivo de resposta. Desenvolvendo Fig. 62.35 para incluir o modelo cisalhamento estado limite, um modelo de plasticidade grudada incluiria um elemento adicional de comprimento zero no topo do pilar (nó 3) com Mercúrio *Histerese* modelo atribuído à mola rotacional, um modelo elástico linear rígido atribuído à fonte axial, e o modelo estado limite atribuído à primavera cisalhamento Fig. 62.35.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

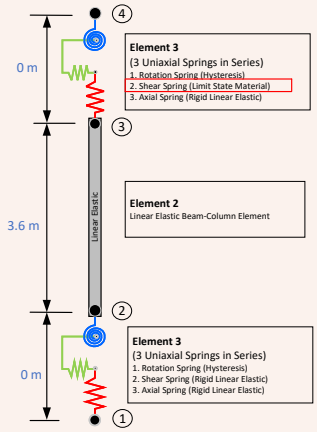


Figura 62.35: Modelo de plasticidade com falha cisalhamento

149 O modelo cisalhamento define a curva força-deformação como três linhas, Fig. 62.36:. um ramo elástico inicial (0-1), um degradante ramo de força (1-2) e um ramo residual de resistência (2-3).

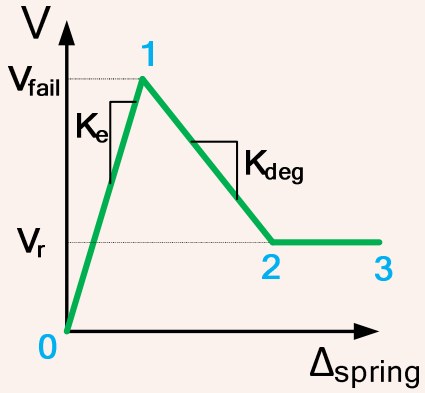


Figura 62.36: Estado limite cisalhamento falha

150 Uma falha cisalhamento (capacidade de deriva) superfície (Fig. 62.37) é definido pela Equação, sugerida por Elwood e Moehle, 2002. A superfície de falha define a deriva lateral ($\frac{\Delta}{L}$) em que o pilar é esperado para falhar em cisalhamento *Depois que a flexão ocorreu.*. É uma função da relação de reforço transversal (ρ''), cisalhamento força (ν), resistência à

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

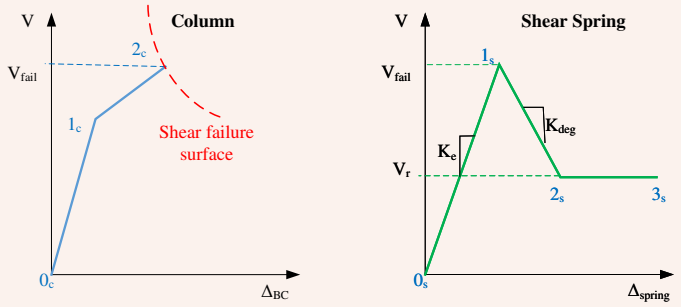


Figura 62.37: Cisalhamento resposta primavera

compressão do concreto (f_c), carga axial (P), e área seccional bruta (A_g). Porque o modelo é empírico, a superfície de falha é definida separadamente para S.I. e unidades inglesas

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{40}\frac{v}{f'_c} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f'_c} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{S.I. Units}$$

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{500}\frac{v}{f'_c} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f'_c} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{English Units Units}$$

Onde

Δ_s pilar interstory deslocamento em falha cisalhamento
L pilar altura
ρ'' Rácio de reforço transversal
A_g Área transversal mm^2 Ou em^2
v cisalhamento capacidade (V/A_g [MPA ou psi]
f'_c resistência à compressão de concreto MPa ou psi
P = pilar carga axial

151 O modelo opera comparando a resposta força cortante-deformação em o topo do pilar (Fig. 62.35 Nó 4) para a superfície da capacidade de deriva.

152 Fig. 62.37 separa as respostas de primavera pilar e cisalhamento. O pilar Deformação lateral (Δ_{BC}) é o deslocamento no nó 4 e a deformação da mola (Δ_{spring}) é a horizontal deslocamento do nó 3 para o nó 4. Até que o pilar atinja a superfície de falha (Fig. 62.37 Ponto 2_c), a resposta da mola cisalhamento é elástico linear ($0_s - 1_s$). Uma vez que a superfície de falha é alcançada, a mola cisalhamento rigidez está degradada ($1_s - 2_s$) do ponto de pico (V_{fail}) em que cisalhamento falha foi prevista pela superfície de falha.

153 Fig. 62.38 detalha a resposta pilar (Δ_{BC}), a primavera Resposta (Δ_{spring}), e a resposta total (Δ_{total}): a) antes da superfície de falha ser atingida, b) durante o passo em que a superfície de falhas é atingida, e c) quando o cisalhamento rigidez está degradado.

154 O elemento azul viga-pilar é composto pelo elemento 1, elemento 2, e as molas axiais e rotacionais do elemento 3 (Fig. 62.35). Se a inicial rigidez da mola cisalhamento for

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

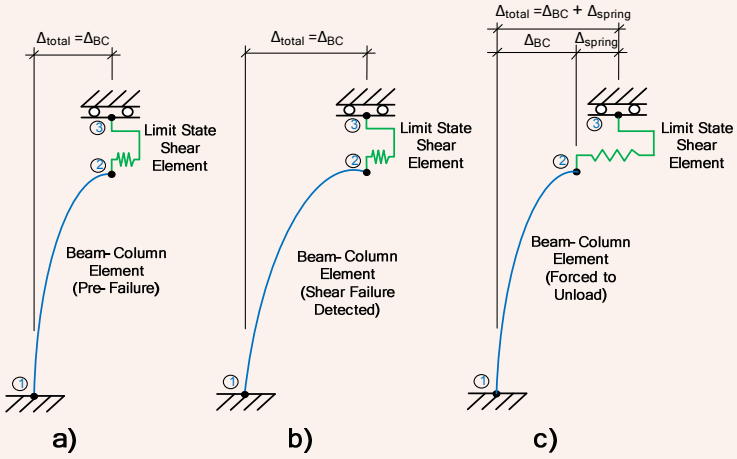


Figura 62.38: Estado limite pilar resposta

definida como um valor muito alto, a resposta total pré-fracasso é igual à pilar Resposta de flexão ($\Delta_{total} = \Delta_{BC}$). Durante o passo de tempo em que a falha é detectada pela superfície da falha cisalhamento, a mola cisalhamento torna-se negativa e a resposta total é uma combinação da resposta flexural pilar e a reação uniaxial cisalhamento como as deformações cisalhamento não são nenhumas mais desprezível no modelo. Quando a superfície de falha é atingida e a mola cisalhamento rigidez torna-se negativa, à medida que as deformações laterais aumentam devido ao degradante cisalhamento rigidez, o elemento pilar é autorizado a descarregar. Isso resulta em redução da deformação flexural à medida que a mola aumenta.

155 Determinação do estado da resposta pré-fracasso, e a resposta quando cisalhamento de degradação da mola rigidez é iniciada, usa o elemento combinado rigidez do elemento pilar e o elemento de mola cisalhamento

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{K_{spring}}$$

Se a mola é inicialmente muito rígida, o total rigidez é igual a K_{BC}.

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{K_{BC}}$$
$$K_t = K_{BC}$$

156 Uma vez que a falha é iniciada, a mola cisalhamento rigidez está degradada (K_{deg}E o pilar começa a descarregar ($K_{BC} = K_{unload}$). O total degradado rigidez torna-se então A combinação destes (Fig. 62.39).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

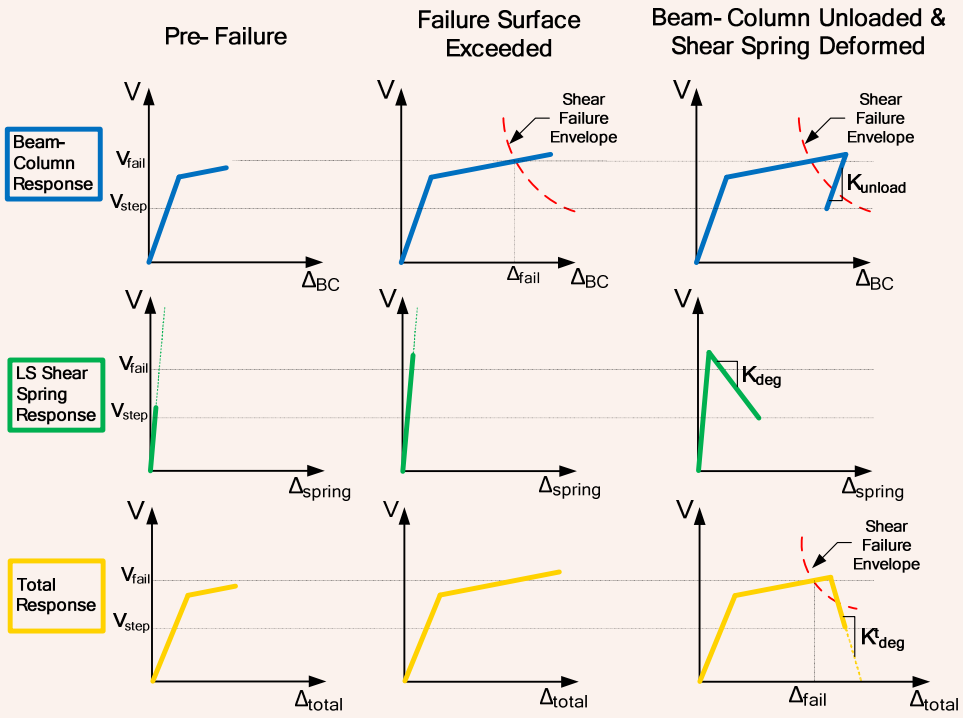


Figura 62.39: Respostas individuais

62.3.3 Modelos histeréticos de Ibarra incorporando dissipação de energia

157 O Ibar O modelo Ibarra-Krawinkler (IKM) é um modelo histerético amplamente utilizado para simular o comportamento de estruturas submetidas a carregamento cíclico, particularmente durante terremotos.

158 O IKM é notável por sua capacidade de capturar uma variedade de comportamentos inelásticos, tais como degradação da força, beliscão e deterioração rigidez, que são frequentemente observados em estruturas reais durante eventos sísmicos.

159 A seguir está uma cobertura detalhada deste modelo amplamente utilizado.

> Da E.M. Teses "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code" por Segura, 2011.

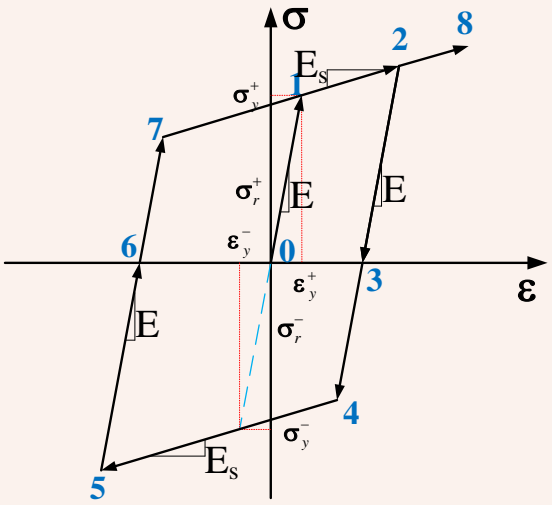
160 Um modelo constitutivo histerético é aquele que captura certo material. Algumas respostas histeréticas idealizadas são: Carregamento elástico, descarga elástica e recarga elástica. Um modelo constitutivo encruamento, por exemplo, captura cada uma dessas respostas idealizadas ao longo da duração de um único ciclo de carga.

161 Na figura 62.40, um ciclo de histerese é mostrado para um material encruamento. Carga elástica é mostrada entre os pontos 0 e 1, seguida de encruamento de 1-2, então descarga

CÓPIA PARA REVISÃO

elástica (2-3) em uma reversão deformação. Recarregamento elástico (3-4) é seguido por recarregamento encruamento (4-5), descarga elástica (5-6), recarga elástica (6-7) e recarga encruamento (7-8).

162 Observe a semelhança com o efeito Bauschinger na plasticidade §55.3.1E o exemplo em §55.5.2.3.


σ
ε
E
E
E

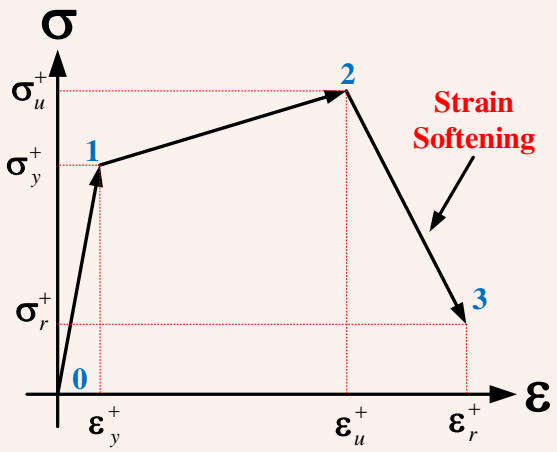


Figura 62.41: Perda de força suavizante

ao longo de uma história cíclica de carregamento, levando ao fracasso. Figura 62.42 detalha esse processo, indicando propriedades de força degradadas em um ponto X como X′ e X″. É importante ressaltar que os pontos de rendimento (3 e 6), pontos de força de pico (3 e 8) e pontos de resistência residuais (4 e 9) se traduzem em direção à origem causando o ponto de falha para ocorrer a um valor deformação menor do que o dos resíduos originais deformação.

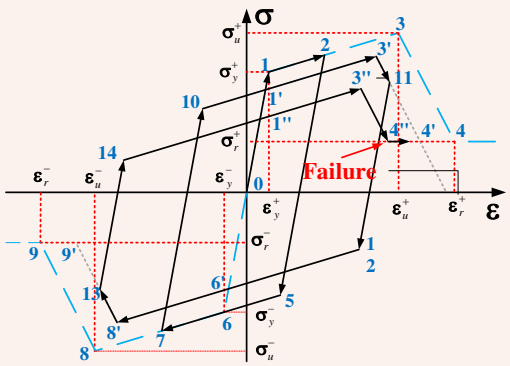


Figura 62.42: Degradação da força cíclica reversa

166 Vários modelos foram desenvolvidos para capturar perda de força histerética. Eles geralmente podem ser divididos em dois grupos: Modelos lineares em partes e modelos suaves com mudanças contínuas rigidez.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

167 Os modelos Bilinear e Modificado Kent e Park são modelos lineares em partes capazes de capturar algumas características comportamentais histeréticas. O modelo Bilinear, no entanto, não captura o comportamento pós-pico e nenhuma deterioração de força é considerada sob carga cíclica reversa. Enquanto o modelo Kent e Park modificado *Não é verdade* Captura comportamento pós-pico, deterioração da força não é explicada pelo modelo.

168 Os modelos propostos por Clough, 1966 e.. Takeda, Sozen e Nielsen, 1970 são modelos lineares que explicam Recarregando rigidez e descarregando rigidez, respectivamente, com base no Deformação máxima experimentada na direção de carregamento em anterior ciclos. O modelo Wen-Buoc (Wen, 1976) é um modelo suave capaz de capturando rigidez deterioração. Wang et al., 2001 propôs um modelo suave incorporando rigidez e degradação de resistência; No entanto, o modelo não inclui um ramo de amolecimento pós-pico. Cada modelo efetivamente captura características aparentes em testes estruturais, e uma combinação dessas características finalmente estabelece as bases para os modelos histeréticos implementados em Mercúrio. Para fornecer essas capacidades, dois modelos constitutivos são implementados, baseados na pesquisa de Ibarra, 2004, como ferramentas computacionais para prever a resposta da estrutura em função da energia histerética dissipada ao longo da duração dos ciclos de carga.

169 Três modelos histeréticos são apresentados por Ibarra. O primeiro é um modelo bilinear modificado, seguindo regras histeréticas semelhantes às do *Bilinear* Modelo. Os outros dois modelos são modificações do modelo de Clough, referido como o modelo orientado para o pico, diferenciados um do outro apenas pela inclusão de efeitos beliscantes no chamado modelo beliscador.

170 Ambos os modelos de pico e beliscão seguem uma espinha dorsal semelhante, Fig. 62.43 De onde a força se deteriorou. A espinha dorsal segue um ramo elástico inicial até o ponto de escoamento (0-1), um ramo encruamento até o pico (1-2), um ramo suavizante até a capacidade de deformação final (2-3) e um ramo residual de resistência além do ponto de capacidade de deformação (3-4).

171 A espinha dorsal representa o caminho de carga sob carregamento monotônico, quando nenhuma perda histerética de força ocorre (§62.3.4.1). Para fins de ilustração, as figuras a seguir expressam os modelos constitutivos em termos de tensão-deformação; No entanto, a descrição se aplica às relações força-deslocamento e momento-curvatura também. Os subscritos r, y, e u corresponde ao resíduo, rendimento e final Capacidades, respectivamente. O subscrito s corresponde ao encruamento ramo eo subscrito c corresponde ao ramo pós-aquecimento.

172 A relação tensão-deformação é separada em quatro regiões para ambos os caminhos de carga positivo e negativo: um ramo elástico, um ramo encruamento, um ramo suavizante e um ramo residual de resistência. Um resumo da espinha dorsal monotônica é apresentado na tabela 62.2, Incluindo a determinação do módulo tangente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

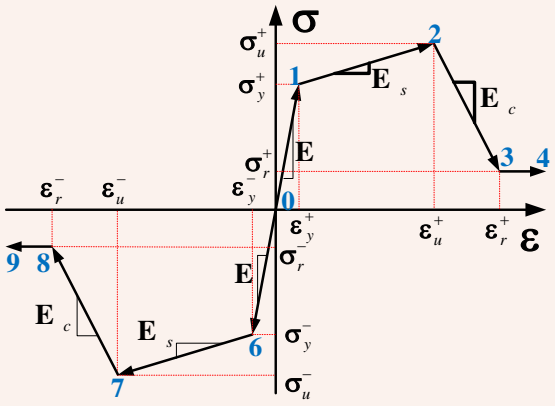


Figura 62.43: Histerese modelo espinha dorsal

Tabela 62.2: Módulo tangente

Trecho	Descrição	Carregamento positivo		Carregamento negativo	
		$E_{\tan}$	Deformação (ε)	$E_{\tan}$	Deformação (ε)
0 – 1&0 – 6	Carregamento elástico	$E^+ - \frac{\sigma_y^+}{\varepsilon_y^+}$	$0 \le \varepsilon < \varepsilon_y^+$	$E^- - \frac{\sigma_y^-}{s_y^-}$	$\varepsilon_y^+ < \varepsilon < 0$
1 – 2&6 – 7	Encruamento	$E_s^+ - \frac{\left(\sigma_u^+ - \sigma_y^+\right)}{\left(\varepsilon_u^+ - \varepsilon_y^+\right)}$	$\varepsilon_y^+ \le \varepsilon < \varepsilon_u^+$	$E_s^- - \frac{\left(\sigma_u^- - \sigma_y^-\right)}{\left(s_u^- - \varepsilon_y^-\right)}$	$\varepsilon_u^- < \varepsilon \le \varepsilon_y^-$
2 – 3&7 – 8	Amolecimento	$E_c^+ - \frac{\left(\sigma_r^+ - \sigma_u^+\right)}{\left(\varepsilon_r^+ - s_u^+\right)}$	$\varepsilon_u^+ \le \varepsilon < \varepsilon_r^+$	$E_c^- - \frac{\left(\sigma_r^- - \sigma_u^-\right)}{\left(s_r^- - \varepsilon_u^-\right)}$	$\varepsilon_r^- < \varepsilon \le \varepsilon_y^-$
3 – 4&8 – 9	Resistência residual	0	$\varepsilon \ge \varepsilon_r^+$	0	$\varepsilon \le \varepsilon_r^-$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

173 Note que a espinha dorsal mostrada na figura. 62.43 tem sua contrapartida para cisalhamento e flexão, Fig. 62.44.

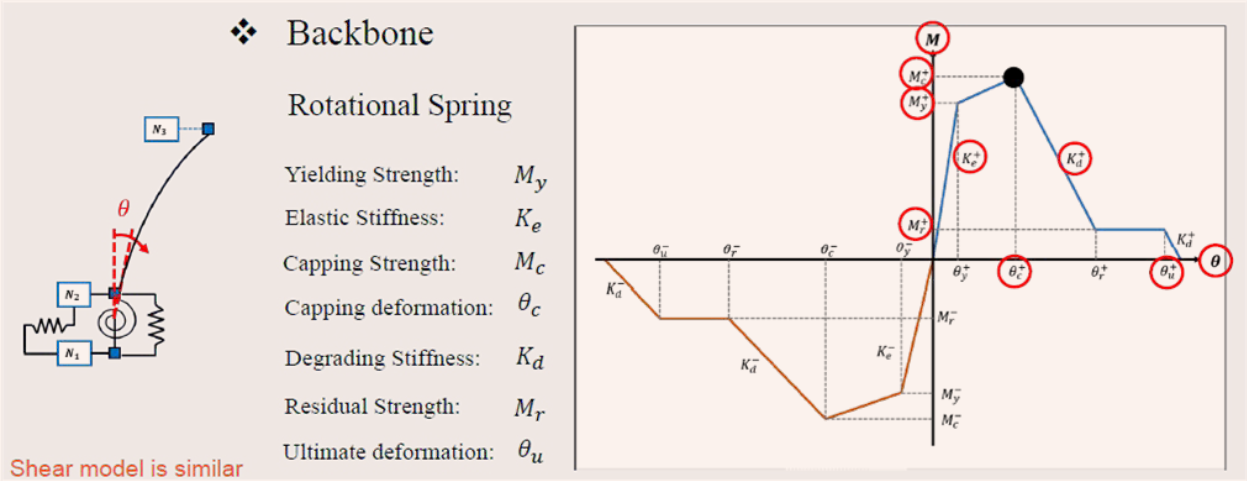


Figura 62.44: Curva de espinha dorsal para flexão (Ghannoum, 2020)

62.3.3.1 Modelos de histerese

174 Fig. 62.45 mostra o ciclo básico dos modelos de pico e beliscão adotados para implementação em Mercúrio. Semelhanças entre os modelos são marcadas como flechas pretas, e diferenças como setas azuis (orientadas para o pico) e vermelhas (que piscam). Os modelos são limitados pela espinha dorsal monotônica. O primeiro ciclo mostra carregamento elástico seguido de encruamento. Em uma reversão deformação, descarga elástica ocorre (2 a 3). Ambos os modelos operam sob recarga do alvo onde o caminho de recarregamento visa ao estado de deformação máxima em todos os ciclos anteriores. Como a deformação ainda não ocorreu na direção negativa tensão, o carregamento do alvo para o primeiro ciclo visa ao ponto de rendimento negativo (3-5). Para o modelo orientado ao pico, o caminho de recarga visa diretamente este estado máximo de deformação (3-5). Para o modelo de beliscão, um ponto de ruptura é o primeiro alvo. O ponto de ruptura representa o ponto em que rachaduras seccionais são preenchidas e alguma resistência ao atrito é restaurada. Além do ponto de ruptura, o caminho de recarga aponta para o estado alvo (4-5).

175 Continuando com o carregamento além do estado alvo, encruamento ocorre (5-6) e uma reversão deformação resulta em descarga elástica (6-7). Recarregando o alvo no lado positivo, então aponta para o ponto de deformação máxima em ciclos anteriores (2). Para o modelo orientado ao pico, o caminho de recarga visa diretamente o estado máximo de deformação (7-2). Para o modelo de pinçamento recarregar primeiro visa ao ponto de ruptura (7-8) e então direciona para o estado alvo (8-2). Determinação do ponto de ruptura é discutida em §62.3.3.1.2.

CÓPIA PARA REVISÃO

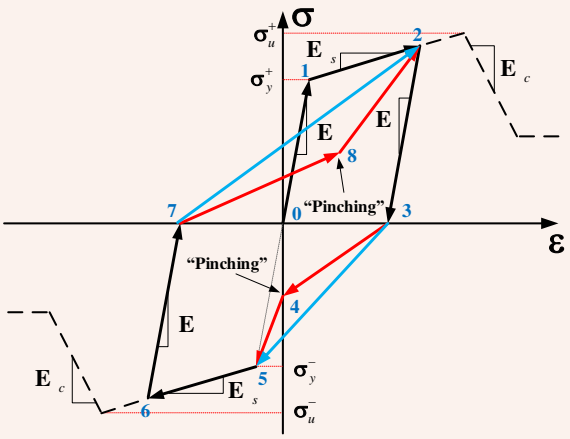


Figura 62.45: Modelos peak-orientados e beliscantes

62.3.3.1.1 Modelo de pico orientado

176 As regras básicas do caminho de carregamento cíclico para o modelo orientado ao pico são mostradas na figura. 62.46.. O termo "orientado para o pico"refere-se ao ponto de deformação máxima em ciclos de carga anteriores (pontos 2 e 6 na Figura) 62.45.. Recarregando, no modelo orientado ao pico, ocorre direto a este ponto. Referindo-se à Fig. 62.46, carga elástica ocorre de 0-1, seguido por carregamento ao longo do ramo encruamento de 1-11.

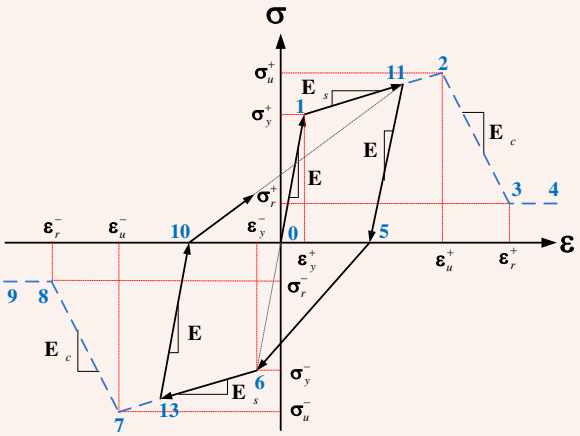
177 Uma reversão deformação resulta em descarga elástica entre 11 e 5. A carga cíclica é direcionada para um estado-alvo representativo do estado tensão-deformação na deformação máxima experimentada em todos os ciclos anteriores (ponto de deformação máximo orientado para o pico). Inicialmente, o estado-alvo é o ponto de rendimento. Porque o rendimento ocorreu na direção de carga positiva (ponto 1), em uma reversão deformação, o estado alvo é armazenado como o ponto no qual a reversão ocorreu (ponto 11) *Se este ponto exceder a deformação em todos os ciclos de carga anteriores*.. Recarregando, para a primeira excursão na direção de carga negativa, mira o ponto de rendimento (ponto 6). Recarregamento degradado ocorre entre 5 e 6, exibindo a degradação rigidez inerente ao modelo orientado para o pico. Carregando ao longo do ramo encruamento (6-13) é seguido por uma reversão deformação e descarga elástica (13-10).

178 O estado do alvo na direção de carga negativa está armazenado em 13. Carregar para o ciclo subsequente visa a este estado alvo. Recarregando ao longo do ramo positivo, assim, alvos ponto 11. O subscrito t corresponde ao estado-alvo. É importante salientar que o módulo de carga do alvo (E_tNão deve ser confundido com o módulo tangente$E_{\tan}$); embora, quando carregar diretamente para O estado-alvo é o mesmo.

179 Referindo-se à Figura 62.47, quando uma reversão deformação ocorre no ramo positivo (ponto 11'), o estado alvo positivo é atualizado se a deformação na reversão exceder o

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.


σ
ε
E
E
E

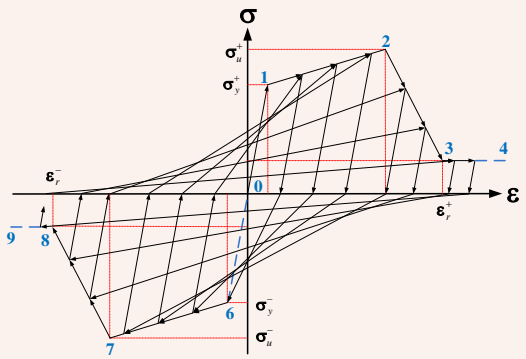


Figura 62.48: Aumentando a história de carga cíclica seguindo o modelo orientado para o pico

rachaduras são permitidas a encher, alguma resistência ao atrito é restaurada. Isso resulta em *força presa* Recarregando ramo resultante da resistência ao atrito reduzida.

182 O modelo de beliscão segue a mesma espinha dorsal monotônica do modelo orientado para o pico e o mesmo recarregamento, visando o ponto de deformação máxima em ciclos anteriores. Recarregar não atinge diretamente o estado máximo de deformação, no entanto. Em vez disso, como rachaduras seccionais preenchem, o módulo tangente visa um chamado "ponto de ruptura"(pontos 14 e 15 nas direções de carga negativa e positiva, respectivamente). O ponto de ruptura representa o ponto em que rachaduras seccionais são preenchidas e alguma resistência ao atrito é restaurada. Além do ponto de ruptura, o módulo tangente visa ao estado alvo. Similar ao modelo orientado para o pico, elástico (0-1) e carregamento (1-11) é seguido por uma reversão deformação e descarga elástica (11-5).

183 O estado positivo do alvo está armazenado no ponto 11. O recarregamento degradado primeiro visa o ponto de ruptura negativo (14) em que parte do original rigidez (módulo) é restaurado e recarregando aponta para o ponto-alvo (6), o local de rendimento durante a primeira excursão.

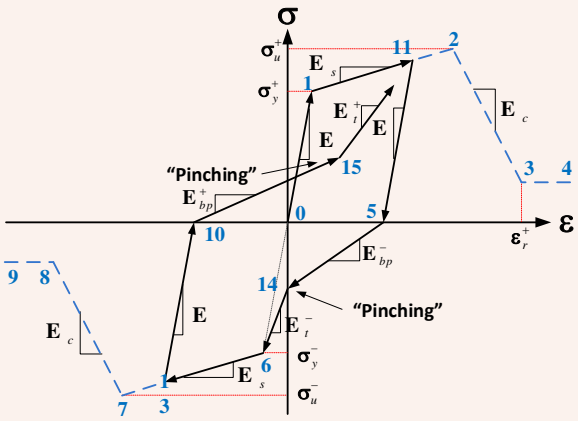
184 O carregamento segue ao longo do ramo encruamento (6-13) e quando ocorre uma reversão deformação, o estado-alvo negativo é atualizado (13) e descarga elástica ocorre entre 13 e 10. Recarregando na direção positiva, o ponto de ruptura positivo (10-15) primeiro, seguido pelo fortalecimento da recarga para o alvo (15-11).

185 O estado do ponto de ruptura é determinado usando os parâmetros κ_f e.. κ_d que fator o alvo tensão e o deformação no ponto de inflexão entre descarga e Recarregando na direção opostaε_5 e.. ε_{10}), respectivamente. O ponto de ruptura deformação é determinado diretamente do alvo deformação por

$$\varepsilon_{bp}^{+/-} = (1 - \kappa_d)\varepsilon_{5/10}^{+/-}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.


σ
ε
"Pinching"
"Pinching"
E
E
E

(ponto 15) é explicada primeiro. O ponto de ruptura positivo deformação e referência do ponto de quebra tensão são determinados por

$$\varepsilon^+_{bp} = (1-\kappa_d)\varepsilon^+_5$$
$$\sigma^+_{ref,bp} = \kappa_f \sigma^+_t$$

187 O módulo tangente ao ponto de ruptura positivoE^+_{bp}) é determinado por

$$E^+_{bp} = \frac{\sigma^+_{ref,bp}}{(\varepsilon^+_t - \varepsilon_{10})}$$

e usado para calcular o ponto de ruptura tensão (σ^+_{bp})

$$\sigma^+_{bp} = E^+_{bp}(\varepsilon^+_{bp} - \varepsilon_{10})$$

188 Então, o módulo tangente ao estado alvo é determinado usando o tensão-deformação estado no ponto de interrupção.

$$E^+_t = \frac{(\sigma^+_t - \sigma^+_{bp})}{(\varepsilon^+_t - \varepsilon^+_{bp})}$$

189 Determinação dos valores negativos do estado de ponto de ruptura segue o mesmo processo; no entanto, é importante novamente apontar que os valores de ponto de ruptura são uma função do estado alvo, dependente da deformação direcional máxima experimentada em ciclos anteriores. Como o carregamento inelástico foi atingido pela primeira vez no ramo positivo tensão (ponto 11), a deformação inelástica ainda não ocorreu no ramo negativo, assim, o estado-alvo é o estado de rendimento negativo (ponto 6) até que a deformação da produção tenha sido excedida em A direção negativa. Neste caso, o primeiro ponto de ruptura é determinado para a direção de carga negativa e o ponto de interrupção, portanto, cai no eixo vertical, correspondente a zero deformação.

190 Usando esta informação os primeiros valores de ponto de ruptura são Computado abaixo.

$$\varepsilon^-_{bp} = 0$$
$$\sigma^-_{ref,bp} = \kappa_f \sigma^-_t$$
$$E^-_{bp} = \frac{\sigma^-_{ref,bp}}{(\varepsilon^-_t \varepsilon_5)}$$
$$\sigma^-_{bp} = -E^-_{bp}\varepsilon_5$$

191 Durante o próximo ciclo, Fig. 62.52 quando a descarga ocorre no ramo positivo tensão (11'-5') e o recarregamento começa no ramo negativo (5'-14'), os valores de ponto de ruptura

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

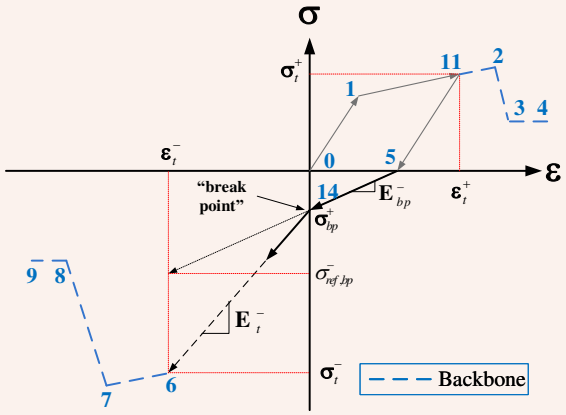


Figura 62.51: Determinação do primeiro ponto de ruptura

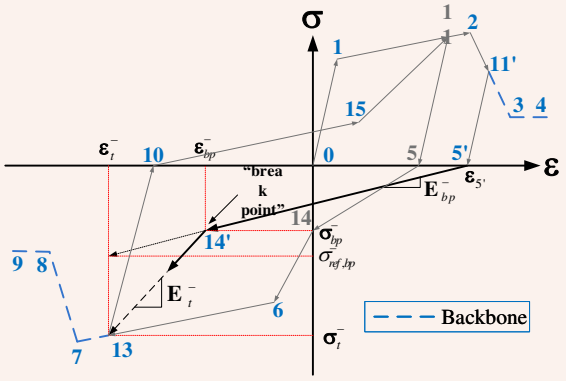


Figura 62.52: Atualização do ponto de interrupção

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

são determinados em função do estado-alvo negativo (ponto 13) após o processo descrito para determinação O ponto de ruptura positivo.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{bp}^{-} &= (1-\kappa_d)\,\varepsilon_{10}^{-} \\
\sigma_{ref,bp}^{-} &= \kappa_f \sigma_t^{-} \\
E_{bp}^{-} &= \frac{\sigma_{rf,,bp}^{-}}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_5\right)} \\
\sigma_{bp}^{-} &= E_{bp}^{-}\left(\varepsilon_{bp}^{-} - \varepsilon_{5'}\right) \\
E_t^{-} &= \frac{\left(\sigma_t^{-} - \sigma_{bp}^{-}\right)}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_{bp}^{-}\right)}
\end{aligned}$$

192 Quando uma reversão deformação ocorre ao longo do caminho de recarga fig. 1. 62.53 e descarga elástica (16-10′) leva a recarregar além do ponto de ruptura (15), recarga visa diretamente ao estado-alvo (11′).

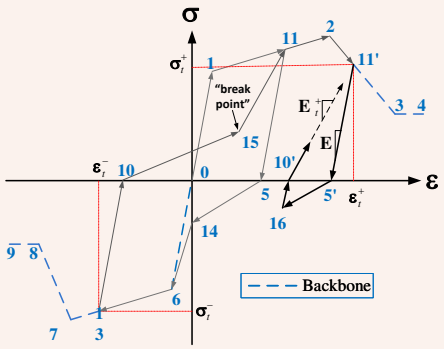


Figura 62.53: Recarregando além do ponto de ruptura

193 Sobre um histórico de carga cíclica aumentando em magnitude, o modelo de beliscão segue a espinha dorsal monotônica para o resíduo tensão através do caminho "força pitada"' mostrado na figura. 62.54.

62.3.3.2 Modos de degradação da força

194 Os modelos histeréticos introduzidos acima de modelos eficazes para simular comportamento pós-insurgência. Os resultados do laboratório indicam, no entanto, que como uma estrutura é submetida a cargas cíclicas reversas, a estrutura sofre perda de força e recarregamento tipicamente não ocorre totalmente à espinha dorsal monotônica.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

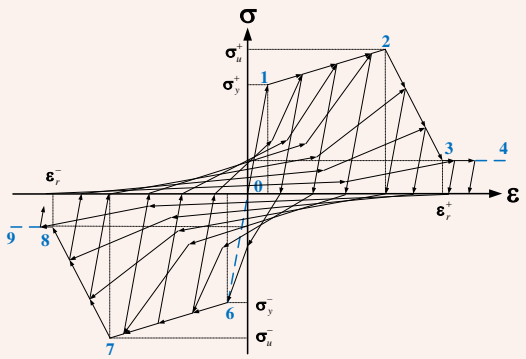


Figura 62.54: Aumentando o histórico de carga cíclica seguindo o modelo de beliscão

195 Para explicar esse comportamento, quatro forças Os modos de degradação são propostos por Ibarra, 2004. É importante ressaltar que os modos de degradação da força apresentados nesta seção são destinados a ser usados em conjunto com um modelo constitutivo histerético e não como modelos autônomos. Como tal, cada um de Estes quatro modos de degradação estão incluídos nos modelos de pico orientado e beliscar implementados em Mercúrio. Os modos de degradação da força são responsáveis pela perda de capacidade estrutural para:

1. Rende força (força básica) degradação
2. Degradação da força do pico (pós-capping)
3. Descarregando a degradação do módulo
4. Recarregando rigidez (módulo) degradação

196 Fig. 62.55 Fornece resultados de testes realizados na Universidade da Califórnia, San Diego (Ibarra, 2004). A linha azul apresenta resultados de um teste de carga monotônica, definindo a espinha dorsal monotônica. Os resultados dos testes cíclicos reversos são traçados em vermelho e os indicadores estão incluídos para descrever os efeitos de cada um dos quatro modos de degradação. O modo de degradação 1 mostra um ponto de rendimento decrescente enquanto a estrutura suporta excursões cíclicas. O modo 2 mostra uma tradução no ramo suavizante, afetando diretamente a força máxima. O modo 3 mostra a deterioração da descarga rigidez (módulo) e o modo 4 exibe um deslocamento deformação.

197 Cada um dos quatro modos de degradação foi implementado usando o parâmetro histerético dissipação β Apresentado por Rahnama e Krawinkler (Rahnama) & Krawinkler, 1993) para degradar um usuário definido capacidade de energia histerética (E_{hys}). A

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

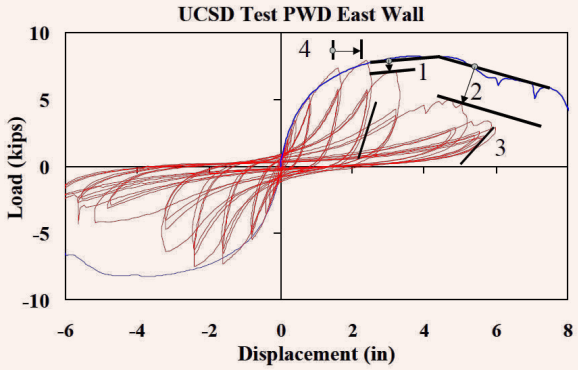


Figura 62.55: Resultados do laboratório estrutural da UCSD (Ibarra, 2004)

capacidade histerética é definido como um fator da energia necessária para alcançar a produção.

$$\beta_i = \left(\frac{E_i}{E_{hys} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

$$E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$$

Onde

E_i	Energia histerética dissipada sobre a excursão de carga i
$\sum E_j$	Energia histerética dissipada em todas as excursões de carga anteriores
c	parâmetro da taxa de degradação
γ	Fator de capacidade energética histerético

198 Uma excursão de carga começa quando o eixo horizontal é atingido e termina quando o eixos horizontais se cruzam novamente. Portanto, excursões de carga separadas ocorrem nos ramos positivo e negativo tensão e são usados para atualizar parâmetros de força no ramo oposto. O parâmetro dissipação é inicialmente um pequeno valor ($\beta_i \ll 1$), Aumentando à medida que a energia se dissipa ao longo de uma história de carga. À medida que a energia total se dissipa, aproxima-se da capacidade de referência, o parâmetro dissipação se aproxima do infinito indicando colapso estrutural. Ao longo da duração do histórico de carga, valores de β deve estar dentro do alcance de $0 \leq \beta_i \leq 1$ para fins computacionais. Valores abaixo de zero e maiores que um indicam que a capacidade energética histerética de referência foi esgotada e degradação da capacidade estrutural resultará em perda de carga estrutural Capacidade de transporte. Rahnama e Krawinkler sugerem uma faixa $1 \leq c \leq 2$ para o parâmetro da taxa de deterioração.

199 Os modos de degradação começam a deteriorar a capacidade estrutural uma vez que o rendimento foi alcançado em pelo menos uma direção. Atualizações são feitas para cada um dos modos, com exceção do modo de descarga rigidez, quando o eixo horizontal do

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

modelo é cruzado, correspondendo a uma mudança de positivo para negativo tensão ou vice-versa. Atualizações são Feito independentemente para cada estado tensão (positivo ou negativo) quando o carregamento cruza o eixo horizontal e prossegue nessa direção de carga. Por exemplo, quando a descarga ocorre no ramo positivo e o carregamento começa no ramo negativo, as atualizações são feitas para capacidade de força básica, capacidade pós-copiadora, e recarregamento rigidez (módulo) do lado negativo. Atualizações para o descarregamento rigidez (módulo), por outro lado, são feitas quando ocorre uma reversão deformação.

200 Figuras apresentadas para os modos de degradação destacam o modelo de beliscão, embora a ideia seja estendida ao modelo orientado ao pico eliminando os pontos de ruptura e recarregando diretamente para os pontos alvo.

62.3.3.2.1 Modo básico de degradação da força

201 O modo básico de degradação da resistência é responsável pela redução da força, à medida que o recarregamento ocorre em direção ao ramo encruamento, fisicamente representativo do modo 1 na figura 1. 62.55.. Ele muda o ramo encruamento, Fig. 62.56, em direção à origem, reduzindo o rendimento tensão (1 a 1') e o módulo de endurecimento ($E^{\mp}_{s,o}$ para $E^{\mp}_{s,1}$) usando o parâmetro dissipação β_s.

202 Atualizações são feitas para o rendimento tensão e módulo de endurecimento quando o eixo horizontal é cruzado (ponto 5 ou ponto 10) apenas para a direção de carga. Mais uma vez, as figuras apresentadas nesta seção detalham a incorporação dos modos de degradação no modelo beliscando, embora, eles sejam igualmente implementados no modelo orientado para o pico. A única diferença é o ramo de recarga adicional que visa os pontos de ruptura. Os valores degradados são determinados por

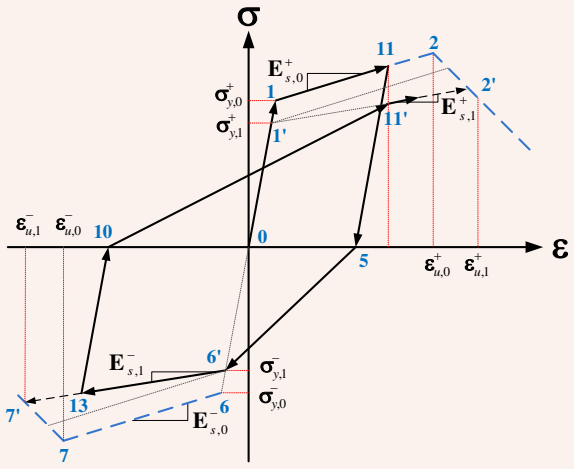


Figura 62.56: Modo básico de degradação da força

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\sigma_{y,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma_{y,i-1}^{+/-}$$
$$E_{s,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E_{s,i-1}^{+/-}$$

Onde

$\beta_{s,i}$	parâmetro básico de dissipação da força para o passo do tempo i
$\sigma_{y,i-1}^{+/-}$	Rendimento direcional tensão para o passo do tempo *i-1*
$\sigma_{y,i}^{+/-}$	Rendimento direcional tensão para o passo do tempo i
$E_{s,i-1}^{+/-}$	Módulo direcional encruamento para passo temporal *i-1*
$E_{s,i}^{+/-}$	Módulo direcional encruamento para passo temporal i

$$\sigma_{y,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma_{y,i-1}^{+/-}$$
$$E_{s,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E_{s,i-1}^{+/-}$$

203 Como já foi dito, atualizações independentes são feitas para valores positivos e negativos durante o passo quando o carregamento cruza o eixo horizontal e começa nessa direção. O parâmetro básico de dissipação da força ($\beta_{s,i}$) faz uso de uma capacidade histerética relacionada à força básica, determinada pelo fator de capacidade histerese γ_s.

$$E_{hys,s} = \gamma_s \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{s,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,s} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

204 Observe que com base na exigência $0 \leq \beta_{s,i} \leq 1$, os valores do rendimento tensão e da inclinação de endurecimento nunca se degradarão abaixo de zero. Como resultado da degradação do rendimento tensão e do módulo de endurecimento, o pico tensão (2 a 2′) e o alvo tensão (11 a 11′) são reduzidos e os ciclos de carga mais rapidamente em direção ao ramo residual.

62.3.3.2.2 Modo de degradação da força pós-copiação

205 O modo de degradação pós-capping é responsável pela redução da força, à medida que a recarga ocorre em direção ao ramo pós-coping (abrandamento), fisicamente representativo do modo 2 na figura 2. 62.55.. Este modo de degradação move o ramo suavizante em direção à origem, deslocando o ponto de força do pico (2 para 2′). Isso é feito degradando um valor de referência tensão que representa o valor do pico tensão extrapolado para trás para o eixo vertical (isto é, ponto de zero deformação) pelo módulo suavizante. As atualizações são feitas quando o eixo horizontal é cruzado para a direção de carregamento apenas. Fig. 62.57 mostra este modo de degradação da força para o código Mercúrio elemento finito escrito pelos autores (Saouma, Kang e Haussmann, 2012). A referência

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

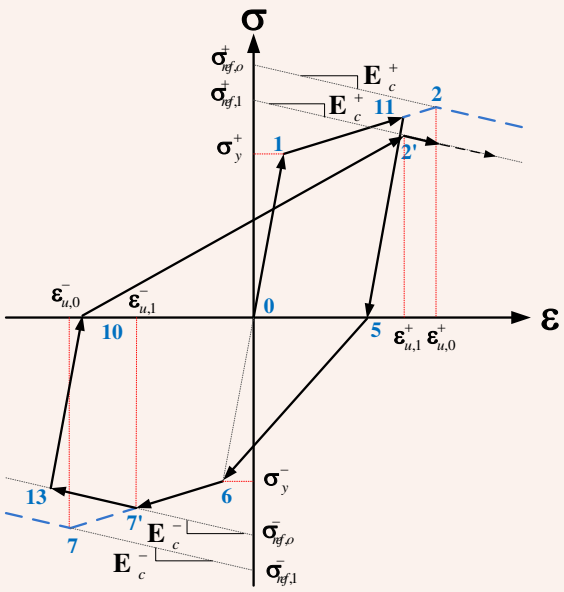


Figura 62.57: Modo de degradação da força pós-copiação

degradada tensão é determinada usando o parâmetro dissipação $\beta_{c,i}$ correspondente ao modo de degradação da força de capping.

$$\beta_{c,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,c} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\sigma^{+/-}_{ref,i} = \left(1 - \beta_{c,i}\right) \sigma^{+1-}_{ref,i-1}$$
$$E_{hys,c} = \gamma_c \sigma_y \varepsilon_y$$

Onde

γ_c fator de energia histerético associado à degradação da força de capping
$\beta_{c,i}$ parâmetro de dissipação da força para o passo do tempo i
$\sigma^{+/-}_{ref,i-1}$ Referência direcional tensão para passo temporal *i-1*
$\sigma^{+/-}_{ref,i}$ Referência direcional tensão para passo temporal i

206 É importante ressaltar que o módulo de suavização é mantido constante e o pico tensão só se degrada alterando a referência tensão. Uma vez que a referência tensão foi degradada, atualizações devem ser feitas para o pico tensão, o alvo tensão-deformação estado, eo residual deformação. Com o tempo, os valores reduzidos farão com que a carga subsequente atinja o ramo residual.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

62.3.3.2.3 Descarregando o modo de degradação

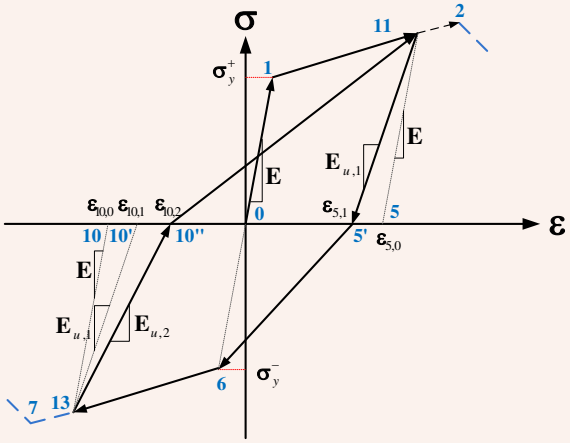
207 O modo de degradação do descarregamento rigidez é responsável pelo modo 3 de degradação na figura 3. 62.55.. É único em comparação com os outros modos de degradação. Primeiro, ele não se atualiza independentemente para os ramos positivos e negativos tensão. Em vez disso, são feitas atualizações para ambas as direções, o que significa que descarga rigidez degradação pode ocorrer mais rapidamente do que os outros modos.

208 Além disso, a degradação não ocorre quando o carregamento cruza o eixo horizontal. As atualizações são feitas para o descarregamento rigidez quando ocorre uma reversão deformação, no momento em que ocorre a primeira descarga, Fig. 62.58.. Este modo degrada o módulo de descarga usando o parâmetro de dissipação associado $\beta_{k,i}$.

$$E_{hys,k} = \gamma_k \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{k,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,k} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$E_{u,i} = \left(1 - \beta_{k,i}\right) E_{u,i-1}$$

Onde

γ_k fator de energia histerético associado à degradação do descarregamento rigidez
$\beta_{k,i}$ Desativando o parâmetro de dissipação do passo temporal i
$E_{u,i-1}$ módulo de descarga para passo de tempo i-1
$E_{u,i}$ módulo de descarga para passo de tempo i


σ
ε
σ+y
σ−y
1
2
11
E
E
E

acelerada. Porque este modo pode atualizar o dobro dos outros modos, um apropriado γ O valor associado a este modo deve ser até o dobro do dos outros modos se for esperada uma dissipação de energia comparável em ambas as direções (Ibarra, 2004). Se um adequado γ O valor não é escolhido, a exaustão da capacidade histerética ocorrerá prematuramente e o valor de $\beta_{k,i}$ se aproximará do infinito e cairá abaixo de zero bem antes que a exaustão da capacidade histerética ocorra para os outros modos.

210 Outra característica única do modo de degradação da descarga rigidez é que as atualizações só são feitas se a descarga ocorreu completamente em um ramo (positivo ou negativo) e o recarregamento começou no ramo oposto, Fig. 62.59.. Quando a descarga não é concluída e o recarregamento começa do mesmo lado, é considerado uma interrupção e o valor atualizado ($E_{u,2a}$ Na figura 3.19) é desconsiderado. Quando outra reversão ocorre, o valor degradado ignorado é substituído por um novo valor ($E_{u,2b}$ Na Fig. 62.59) baseado na nova energia dissipada.

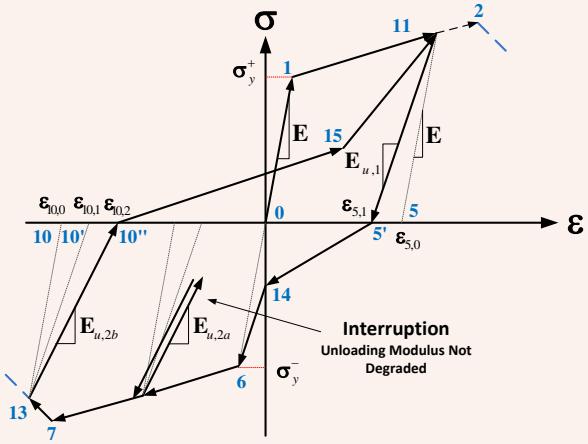


Figura 62.59: Desativando a interrupção

211 Uma vez que a descarga completa tenha ocorrido, o valor degradado atual é armazenado e degradada na próxima reversão deformação. Como o descarregamento rigidez está degradado, é evidente que a crescente dissipação de energia histerética ocorrerá, resultando em rápida degradação dos outros modos.

62.3.3.2.4 Recarregando aceleradamente o modo de degradação rigidez

212 O modo de degradação acelerado de recarga rigidez representa o modo 4 na figura. 62.55.. O modo de recarga acelerado aumenta o valor absoluto do valor do alvo direcional. Ao fazer isso, os pontos alvo (11-11') e pontos de interrupção (15-15' e 14-14') se afastam da origem, fazendo com que o módulo de recarga diminua. As atualizações são feitas quando o eixo horizontal é cruzado para a direção de carregamento apenas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

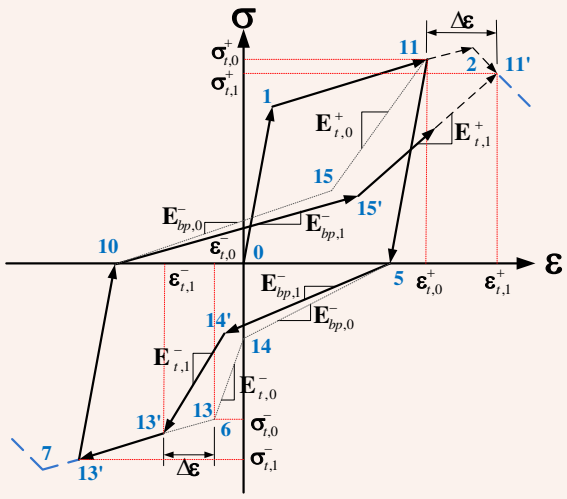


Figura 62.60: Recarregando aceleradamente o modo de degradação rigidez

213 O alvo deformação é deslocado, ajustando o valor usando o parâmetro de dissipação de recarregamento acelerado $\beta_{a,i}$.

$$E_{hys,a} = \gamma_a \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{a,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,a} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\varepsilon_{t,i}^{+/-} = \left(1 + \beta_{a,i}\right) \varepsilon_{t,j-1}^{+/-}$$

Onde

γ_a	Fator de energia histerético associado à degradação acelerada do recarregamento
$\beta_{a,i}$	Recarregar o parâmetro de dissipação acelerada para o passo do tempo i
$\varepsilon_{t,i-1}^{+/-}$	Alvo direcional deformação para passo temporal *i-1*
$\varepsilon_{t,i}^{+/-}$	Alvo direcional deformação para passo temporal i

214 Como resultado da mudança do alvo deformação, recarregar é acelerado e o caminho de carregamento atinge o ramo residual muito mais rapidamente, à medida que a dissipação de energia histerética aumenta.

62.3.3.3 Resumo

215 O pico orientado e beliscando modelos histeréticos constitutivos discutidos em §62.3.3.1.1 e.. 62.3.3.1.2 respectivamente, cada um foi escolhido para a implementação em Mercúrio. Ambos os modelos seguem a mesma espinha dorsal monotônica que inclui um ramo de carga elástica, um ramo encruamento, um ramo pós-copiadora e um ramo residual de força.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Cada modelo adere ao recarregamento orientado para o ponto de deformação máxima experimentado em ciclos de carga anteriores, a única diferença é que o modelo de beliscão inclui um segundo ramo de recarga que visa o ponto break-point de fixação antes alvejando o estado de deformação máxima. Para explicar a perda de força histerética, a força e os modos de degradação apresentados em seções 62.3.3.2.1-62.3.3.2.4 foram escolhidos para serem incluídos nos modelos de pico implementados e beliscadores.

62.3.4 Modelo de Ghannoum

216 A maioria dos trabalhos anteriores na quatificação do comportamento histerético cíclico de membros de concreto tem sido sufocado por dados limitados e dificuldades em representar com simples métricas a forma curvilínea das relações de carga-deformação lateral durante - Andar de bicicleta.

62.3.4.1 Curva de espinha dorsal

217 A resposta do envelope da espinha dorsal do modelo pode ser definida para comportamentos simétricos e assimétricos, fig. 1. 62.61.. Os primeiros quatro ramos em cada direção de carga representam os intervalos elásticos, endurecidos, degradantes e residuais comportamentais respectivamente. Para os dois ramos residuais, caminho de carga 4^+ Ou 4^-, uma leve inclinação negativa é introduzida para aliviar questões de convergência numérica. Os segundos ramos degradantes, carregar caminhos 5^+ ou 5^-, são introduzidos para atingir gradualmente a força zero e são atribuídos o mesmo declive que o primeiro ramo degradante em sua respectiva direção de carga (carregar caminhos 3^+ Ou 3^-).

218 Esta inclinação degradante foi escolhida para simplicidade, já que dados experimentais na faixa de resistência residual são esparsos. Quatorze parâmetros de entrada do usuário são necessários no total para definir as curvas da espinha dorsal (sete parâmetros para cada direção de carregamento). Estes parâmetros são o elástico rigidez (K_e", o momento de entrega"M_y- O que é issoM_c), capping rotação (θ_c), rigidez de ramo degradante (K_d), momento residual (M_r), e rotação final (θ_u).

219 Os parâmetros da coluna vertebral podem ser calibrados para representar uma resposta monotônica ou um envelope de comportamento cíclico, dependendo se o conjunto experimental de dados pilar inclui testes pilar com comportamento "pushover"ou completamente invertido.

62.3.4.2 Comportamento cíclico

220 O foco é definir o comportamento lateral de força-deformação do concreto pilares através de parâmetros globais, como dissipação de energia, resistência e relações rigidez (Suselo, 2021). As relações para os principais aspectos comportamentais cíclicos com relação às propriedades geométricas e detalhadas, bem como outras relevantes são definidas a partir

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

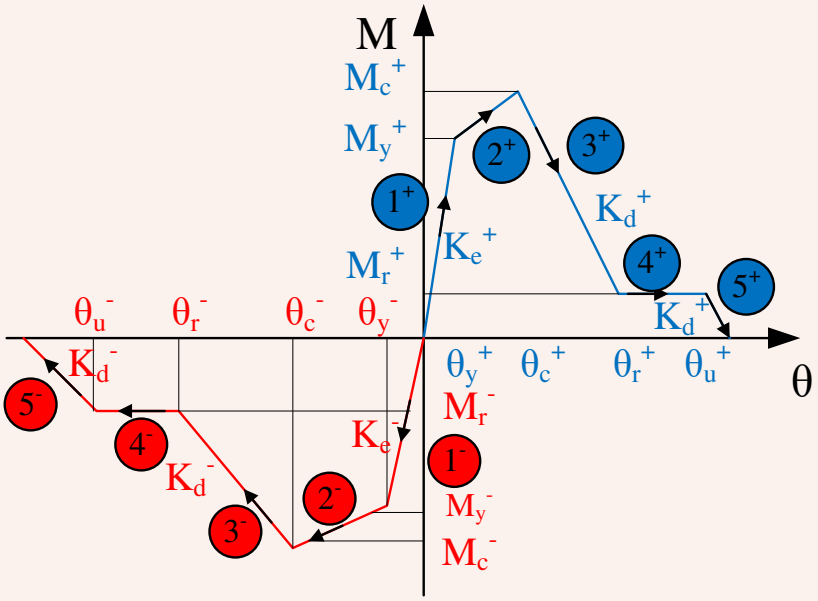


Figura 62.61: Curva de espinha dorsal (Ghorbani et al., 2022)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

de um banco de dados desenvolvido separadamente (§63.3.2.3) com cerca de 700 pilar testes.

221 Um objetivo primário do modelo era introduzir uma expressão matemática que pode replicar essas características ao longo de todo o caminho da carga descarregada para recarregar, enquanto ainda sendo definido por relativamente poucos parâmetros que podem ser extraídos objetivamente do teste Dados e ser facilmente relacionáveis com comportamentos físicos. Isso foi realizado por uma curva B-spline de terceiro grau com cinco pontos de controle introduzidos no modelo computacional.

222 As curvas de histerese só requerem três parâmetros fisicamente significativos para calibrar, fig. 1. 62.62.

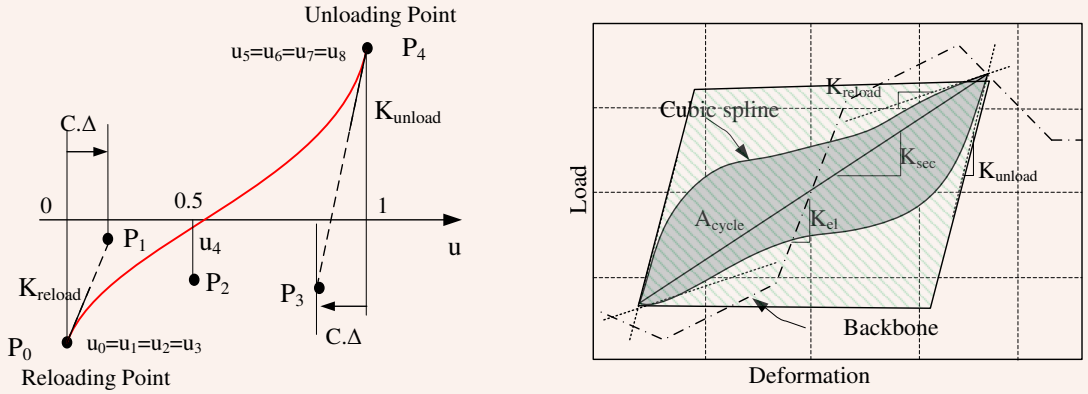


Figura 62.62: Modelo de histerese baseada em curvas cúbicas (Suselo, 2021)

223 Uma curva de 3o grau B-spline com 5 pontos de controle requer 9 nós. Ao definir uma inclinação de descarga e recarga no ponto final de uma curva B-spline, o primeiro $p+1 = 4$E o último.. $p+1 = 4$ Os nós devem ser idênticos, Fig. 62.62.. Os últimos e primeiros pontos de controle representam, o ponto em que a descarga começa (Ponto de Descarregamento), e o ponto alvo na direção de recarga do carregamento (Ponte de Recarregamento). Esses pontos são determinados com base nas regras da histerese. Pontos de controle P_1 e.. P_3 estão relacionados com as encostas do ponto final e um fator de forma através

$$P_1 = P_0 + K_{unload}(C.\Delta)$$
$$P_3 = P + 4 - K_{reload}(C.\Delta)$$

Onde Δ é definido por

$$\Delta = \frac{u_8 - u_0}{4}$$

e.. C é um fator de forma que controla a forma da curva e varia entre 0 a 1. Depois de avaliar muitas alternativas, uma constante $C = 0.1$ O fator foi adotado porque produziu

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

uma forma de curva em espiral representativa do comportamento cíclico do concreto pilares.

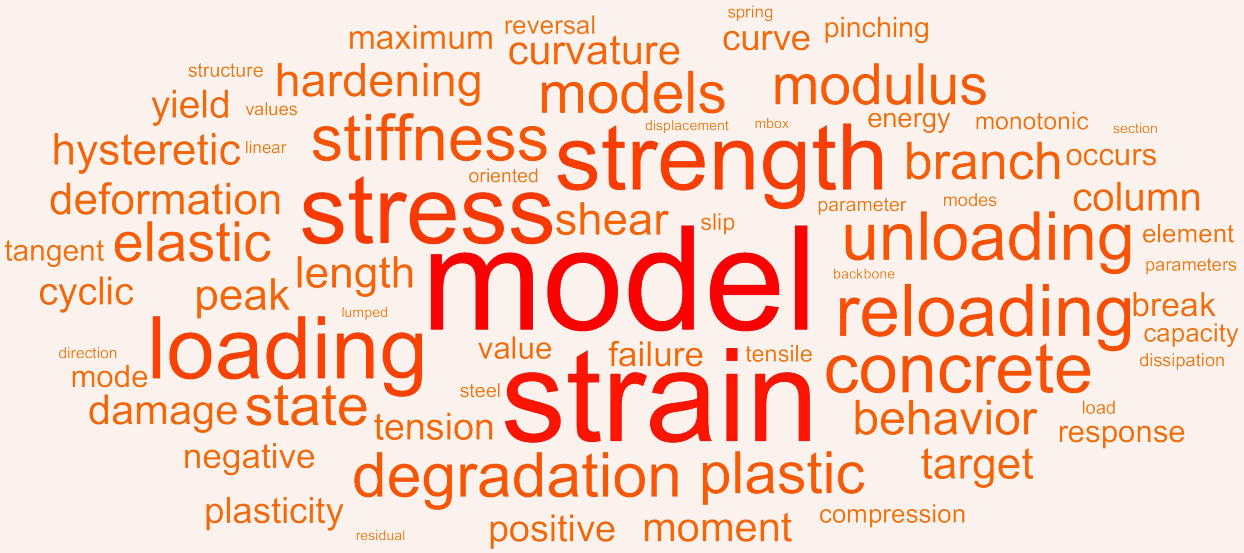
224 O ponto de controle P_2 está relacionado com a razão de energia (ER) através

$$P_2 = (C.\Delta)(K_{reload} - K_{reload}) - \frac{1}{2}\frac{ER}{\Delta} + \frac{1}{2}(P_0 + P_4)$$

225 O ER é definida como a energia dentro da curva histerética (área eclodida por traço cinza) na figura. 62.62b dividido pela energia dentro de uma curva de ciclo elástico-plástico começando e terminando nos mesmos pontos com a mesma descarga rigidez (área eclodida em sólido verde). Este parâmetro, em conjunto com as encostas do ponto final, determinar o nível de aperto ou alternativamente o nível da dissipação de energia Exposições de modelos durante o carregamento cíclico.

226 Reduzindo o valor de ER Aumenta o nível de comportamento beliscante neste modelo.

227 O número total de parâmetros necessários para definir o comportamento cíclico de uma mola com este modelo é, portanto, cinco: Descarregando ponto, descarregando declive, recarregando ponto... recarga de inclinação e taxa de energia.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 63

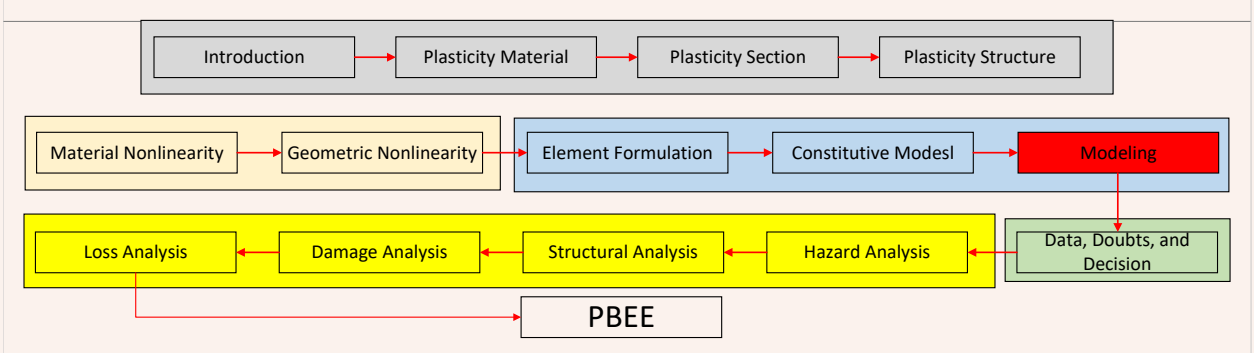
Ciência e Arte da Modelo

Abstract

Um fator chave na análise elemento finito é muitas vezes negligenciado: Modelo. Como este capítulo implica, esta é tanto uma arte e uma ciência cujo exercício pode impactar resultados.

Este capítulo fornece ao leitor recomendações básicas antes de Qualquer elemento finito estudo. Mais especificamente, como entender e articular e definir matematicamente o problema, como coletar os dados necessários de várias fontes e sintetizá-los, como definir o modelo matemático (elemento finito). Em particular, abordará a modelagem que (neste contexto) é a ciência e arte de abordar tudo o acima.

63.1 Introdução 2160
63.1.1 Elemento finito verificação de malha/análise 2163
63.1.2 Conceitos de verificação e validação do modelo 2163
63.2 Geração da malha 2165
63.2.1 Macroelementos 2166
63.2.2 Seção transversal 2171
63.2.3 "Pegue e cacete" 2172
63.2.4 Considerações finais 2172
63.3 Determinações dos parâmetros de deterioração 2173
63.3.1 Calibração 2173
63.3.2 Banco de dados dos parâmetros de modelagem 2174



CÓPIA PARA REVISÃO

63.1 Introdução

1 A modelagem adequada de uma estrutura é crucial para uma análise bem sucedida. Essa importância é aumentada quando se lida com análises não lineares.

2 Contra-intuitivamente, modelando uma estrutura com elementos 1D 61) não é tão simples como poderia parecer inicialmente. Este capítulo aborda essas complexidades.

3 A análise não linear das estruturas emolduradas é, finalmente, um equilíbrio entre:

- Necessidades e restrições de tempo computacional,
- Entendimento adequado do problema e princípios de análise não lineares
- As ferramentas computacionais e os conhecimentos disponíveis.
- Qualidade dos resultados esperados.

Processo de análise

4 Uma análise deve ser cuidadosamente planejada, executada e avaliada. Na abordagem mais rigorosa, consiste nas seguintes etapas (Fig. 63.1):

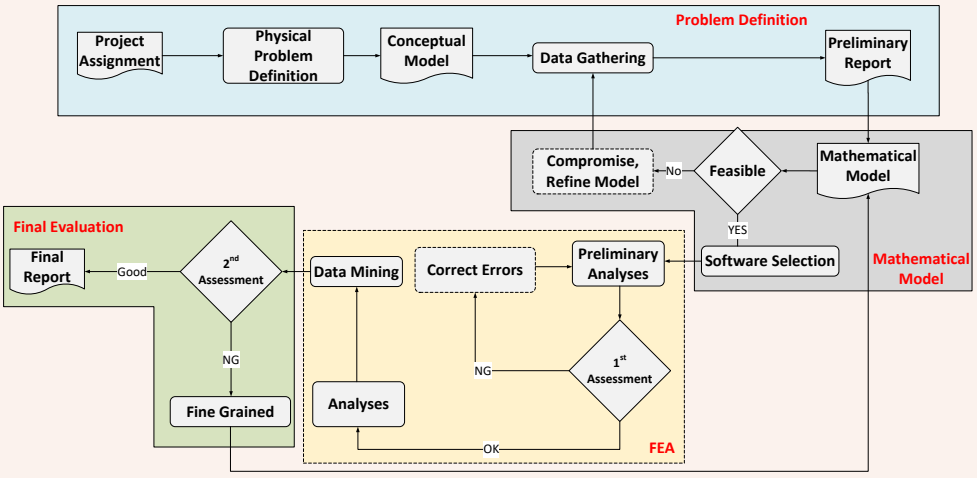


Figura 63.1: Elemento finito processo (inspirado por Bathe, 1996)

Análise preliminar: Normalmente elástico linear, este passo testa a definição de propriedades do material, condições de contorno, e cargas.

Avaliação preliminar: Faça uma "verificação de realidade"nos resultados. Eles estão dentro de limites razoáveis ou significativamente diferentes daqueles previstos no relatório preliminar? Verifique se há erros em dados, unidades mistas ou resultados inesperados. deslocamentos são consistentes com cargas e condições de contorno? O

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

caminho de carga é realista? Identificar zonas de malha que exigem refinamento, a necessidade de incrementos diferentes, ou esquemas de integração. Os critérios de convergência são muito rigorosos?

Erros corretos: Resolver questões que resultaram em resultados preliminares inaceitáveis.

Análise: Analisar incrivelmente a estrutura, começando dos modelos mais simples aos mais complexos.

Mineração de dados: Extrair resultados relevantes da saída. Alguns softwares permitem a exportação de dados específicos, enquanto outros não. Os resultados podem precisar ser recuperados de pós-processadores gráficos ou arquivos de saída ASCII e armazenados. É melhor consolidar todos os dados recuperados em uma folha do Excel e usar ferramentas como MATLAB ou Python para plotar dados conforme necessário.

5 Muitas vezes, falhas em grande escala resultam de pequenos detalhes negligenciados que, retrospecto, poderiam e deveriam ter sido contabilizados no modelo. Enquanto isso, esforços significativos podem ser gastos modelando outros detalhes irrelevantes. É necessária uma cuidadosa consideração para distinguir o essencial do que não é.

6 Assim, a atenção aos detalhes deve ser uniformemente aplicada durante todo o processo (Figura 63.2). Subestimar a importância de um aspecto específico da modelagem pode levar ao fracasso. Por exemplo, a falha de ligação, embora muitas vezes negligenciada, é crítica sob cargas sísmicas na base de pilares.

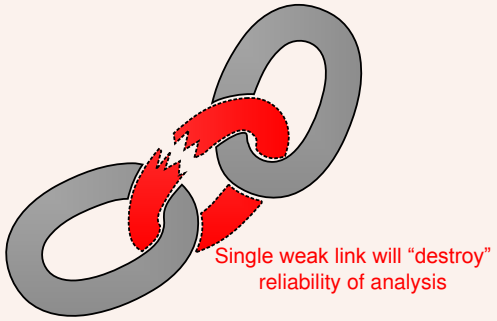


Figura 63.2: Complexidade de modelo uniformemente distribuída

Requisitos de análise não linear

7 Confiar apenas em análise linear elástica quando não é necessária análise linear pode ser caro e perigoso. Essa confiança muitas vezes depende de um julgamento altamente conservador, arbitrário (e decrescente) ”Engenharia”.

8 Não identificar com precisão a carga de falha pode levar à "superação", resultando em

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

quebradiços excessos de design. Análise linear também tende a subestimar deslocamentos, que pode representar perigos significativos (Fig. 63.3).

9 Problemas complexos podem, às vezes, exigir análises complexas.

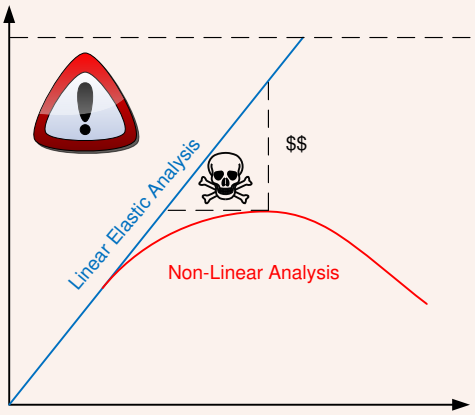


Figura 63.3: Pitfalls da análise linear comparada com a análise não linear

10 Ao contrário de soluções elásticas lineares, a análise não linear produz múltiplas soluções aceitáveis. Diferentes softwares, modelos e analistas podem produzir resultados diferentes, o que não significa necessariamente que todos estão "errados"(embora alguns possam estar), mas devem ser interpretados corretamente.

11 Cuidado, análise não linear não é um substituto para julgamento de engenharia sonora. Deve ser um último recurso, usado apenas após o bom senso, análise linear e métodos simplificados foram esgotados.

12 Idealmente, a análise não linear deve ser usada para validar ou quantificar uma suposição bem fundamentada *Antes* para a análise.

13 Fazer uma análise não linear requer muito cuidado na preparação de dados, e interpretação dos resultados.

14 Os resultados devem ser examinados qualitativamente. Deve-se evitar analisar a precisão ou focar em detalhes insignificantes como o "terceiro decimal".

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Definition 63.1: Papel dos estudos Elemento finito

A análise elemento finito é apenas uma ferramenta para confirmar ou quantificar uma resposta antecipada através de um julgamento adequado e sólido da engenharia.

Seleção de especialistas

15 Se uma análise não linear for feita, deve-se ter muito cuidado em selecionar "especialistas"que poderiam realizar tal análise. A maioria dos engenheiros em empresas de consultoria estão acostumados a realizar análises elásticas lineares e projeto regulado por código.

16 Por outro lado, há um punhado de pesquisadores na academia que são bem versados na condução da análise não linear de uma estrutura complexa; no entanto, muitas vezes tendem a simplificar os aspectos periféricos do modelo e focar em um aspecto estreito.

17 Deve-se ter em mente que problemas extraordinários exigirão técnicas extraordinárias para investigar por analistas muito qualificados.

63.1.1 Elemento finito verificação de malha/análise

Uma vez que uma malha elemento finito foi montada, é desejável verificar sua representatividade. Isto pode ser avaliado comparando os modelos modal elemento finito e experimental. O primeiro é determinado a partir de uma análise modal e da determinação do primeiro frequência natural do modelo elemento finito. Este último pode ser obtido através de uma vibração forçada da estrutura por um agitador com uma massa excentricamente colocada.

18 A mistura para uma análise não linear poderia ser verificada por uma análise de “’pushover”’ para identificar se é capaz de replicar um modo de falha antecipado (por exemplo, os elementos conjuntos são corretamente definidos para permitir a falha antecipada?). Finalmente, o modelo não linear deve ser validado independentemente com base em um componente estrutural representativo com uma resposta experimental conhecida (ver abaixo) §63.3.1 para calibração.

63.1.2 Conceitos de verificação e validação do modelo

19 Muitas vezes, códigos não lineares são presumidos como "validados"apenas capturando os dados observados experimentalmente (deslocamentos tipicamente). Muitas vezes, isso é acompanhado com figuras muito coloridas e justaposições. Deve-se ter em mente que modelos não lineares têm variáveis suficientes para ‘’tune” muitos deles e então obter o que é percebido como um modelo aceitável. Tal modelo deve ser analisado para garantir que todas as suposições sejam sólidas e razoáveis e que as propriedades materiais adotadas

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

sejam realistas. Em outras palavras, uma mera comparação pictórica superficial não é suficiente.

20 É comum dizer que um código elemento finito deve ser validado ou verificado. Algumas definições estão em ordem (Thacker et al., 2004) (Stewart, 2009).

Verificação Processo de determinar que uma implementação do modelo representa com precisão a descrição conceitual do desenvolvedor do modelo e a solução para o modelo. Está preocupado em identificar e remover erros no modelo comparando soluções numéricas com soluções analíticas ou de referência altamente precisas. Em suma, a verificação trata da matemática associada ao modelo.

Validação Processo de determinar o grau em que um modelo é uma representação precisa de o mundo real sob a perspectiva dos usos pretendidos do modelo. Está preocupado em quantificar a precisão do modelo comparando soluções numéricas com dados experimentais. Resumindo, a validação trata da física associada ao modelo.

Calibração Processo de ajuste dos parâmetros numéricos ou físicos no modelo computacional com o propósito de melhorar a concordância com dados experimentais.

Verificação de código Processo de determinar que o código do computador está correto e funcionando como pretendido.

Modelo de computador Implementação numérica do modelo matemático, geralmente sob a forma de discretização numérica, algoritmos de solução e critérios de convergência.

Modelo conceitual Coleta de suposições, algoritmos, relacionamentos e dados que descrevem a realidade de interesse da qual o modelo matemático e experiência de validação podem ser construídos.

Confiança Probabilidade de que uma estimativa numérica esteja dentro de um intervalo especificado.

Erro é uma deficiência reconhecível em qualquer fase ou atividade de modelagem e simulação que não seja devido à falta de conhecimento.

Fidelidade A diferença entre simulação e resultados experimentais.

Irredutível Região de Confiança Variação inerente associada ao sistema físico sendo modelado.

Modelo Matemático As equações matemáticas, valores de contorno, condições iniciais e dados de modelagem necessários para descrever o modelo conceitual.

Modelo Descrição conceitual/matemática/numérica de um cenário físico específico, incluindo dados geométricos, materiais, iniciais e limites.

Revisão do Modelo O processo de mudar os pressupostos básicos, estrutura, estima-

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

tivas de parâmetros, valores de fronteira ou condições iniciais de um modelo para melhorar a concordância com resultados experimentais.

Predição Uso de um modelo para predizer o estado de um sistema físico sob condições para as quais o modelo não foi validado.

Reducível Região de Confiança Potencial deficiência que é devido à falta de conhecimento, por exemplo. informações incompletas, má compreensão do processo físico, descrição imprecisa ou inespecífica de modos de falha, etc.

63.2 Geração da malha

21 Tendo coberto (não linear) formulação de elementos e modelos constitutivos não lineares, estamos agora prontos para colocar esses dois juntos e abordar como são pórticos realmente modelados, ou seja. *Mexigem*.. É principalmente ciência com uma pequena dose de arte.

22 Mesh influencia a precisão, convergência e velocidade de uma simulação.

23 A modelagem vai assim montar um *Modelo matemático*, i.e. Mesh, propriedades do material, carga para a análise subsequente. É importante apontar imediatamente que não há uma única e apropriada maneira de modelar uma estrutura como a modelagem é ambos ciência e arte.

24 Antes de começarmos, devemos nos perguntar: Algumas perguntas importantes

- 2D ou 3D?
- Seção de camadas ou forças seccionais?
- Estado limite?
- Amortecimento: Rayleigh e/ou histerética?
- Uma análise única e rigorosa ou aproximado Análise múltipla (Monte Carlo)?
- Plástica amassada ou distribuída?
- Escorrego de fiança?
- Análise de impulso ou transiente
- Quanta não linearidade esperar? Até o pico, pós-pico?

25 É sempre.. *Comprometimento* entre:

- Expectativas, e restrições de tempo/custo.
- Nosso entendimento do problema e da análise não linear.
- Software/especialistas disponíveis.
- Qualidade dos resultados esperados.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

63.2.1 Macroelementos

26 Contrariamente ao continuum baseado em elementos finitos, no contexto de uma análise não linear, os elementos têm que ser usados em par (ou mesmo trigêmeos) para simplesmente modelar uma conexão ou uma viga pilar. A combinação destes elementos individuais (formulada no Capítulo) 61É o que será chamado de "macroelementos"[1].

27 Os elementos básicos à nossa disposição são aqueles mostrados na figura. 63.4.. Eles são os "átomos"que podem ser combinados em "moléculas"que são componentes estruturais.

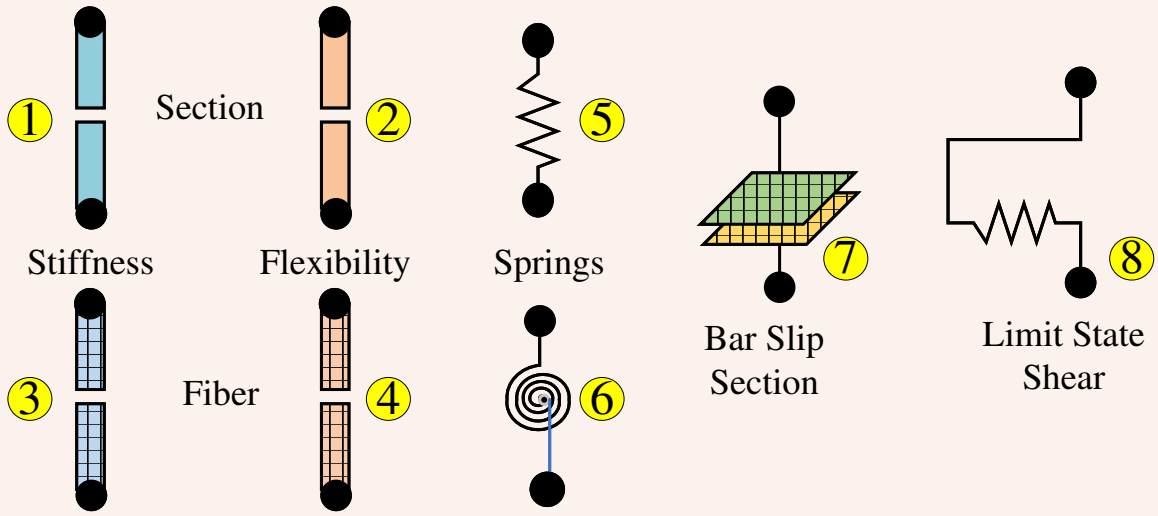


Figura 63.4: Elementos finitos para análise não linear de pórticos

28 Deve-se ter em mente que a principal preocupação com a segurança de vida é pilares.

29 De suma importância são as conexões finais. Essas são mostradas na figura. 63.5.. Eles variam do mais simples (ou seja, Nada), para os mais complexos (motores e subelementos estado limite).

30 No modelo de plasticidade grudada, o elemento multiaxial de comprimento zero engloba os modelos de material e permite o acoplamento do DOF, e só requer a entrada de materiais pilar e propriedades geométricas. Mesa 63.1 expandindo ainda mais a figura.

31 Viga-pilares por sua vez pode ser tão simples quanto um tipo de elemento individual, ou eles podem ser compostos por uma assembleia de elementos (tipicamente para lidar com a localização de danos plásticos, isto é, rótula plástica).

[1]No clássico elemento finito, um macroelemento é a combinação de múltiplos elementos em um e o interno graus de liberdade são reduzidos em poucos para se conectar com o resto da malha. Aqui, não haverá condensação de graus de liberdade, e consequentemente, pode haver múltiplos (internos) dof em um nó.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

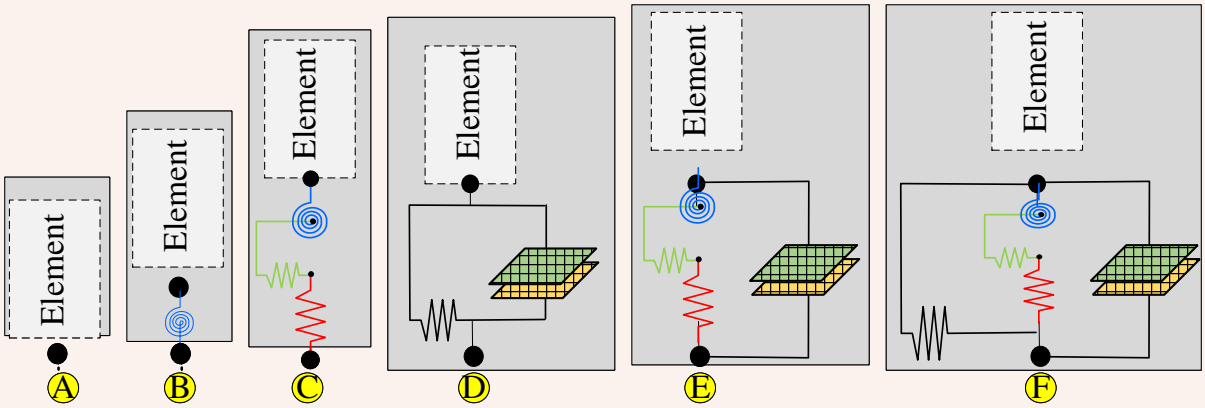


Figura 63.5: Pilar conexão final

Tabela 63.1: Pilar conexões

	A	B	C	D	E	F
Cângulo Simples	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Primavera rotacional		✓	✓		✓	✓
Rotacional & Fontes translacionais			✓		✓	✓
Estado limite Cisalhamento				✓		✓
Bond Slip					✓	✓

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

32 Possível acoplamento de conexões (Fig. 63.1) e elementos (Fig. 63.6) é mostrado na tabela 63.2.

Tabela 63.2: Compatibilidade entre conexões

Viga Pilar	A	B	C	D	E	F	G	H
Ligações	1	3|1	3	2	4|2	4	[2|4],[1|3]	[1|3],[2|4]

33 Para conexões, não podemos conectar elementos de comprimento zero entre si. Além disso, o elemento de conexão direta evita a articulação independente cisalhamento e a deformação rotacional (isto é, É uma conexão rígida). Possíveis arranjos são mostrados na figura. 63.7.

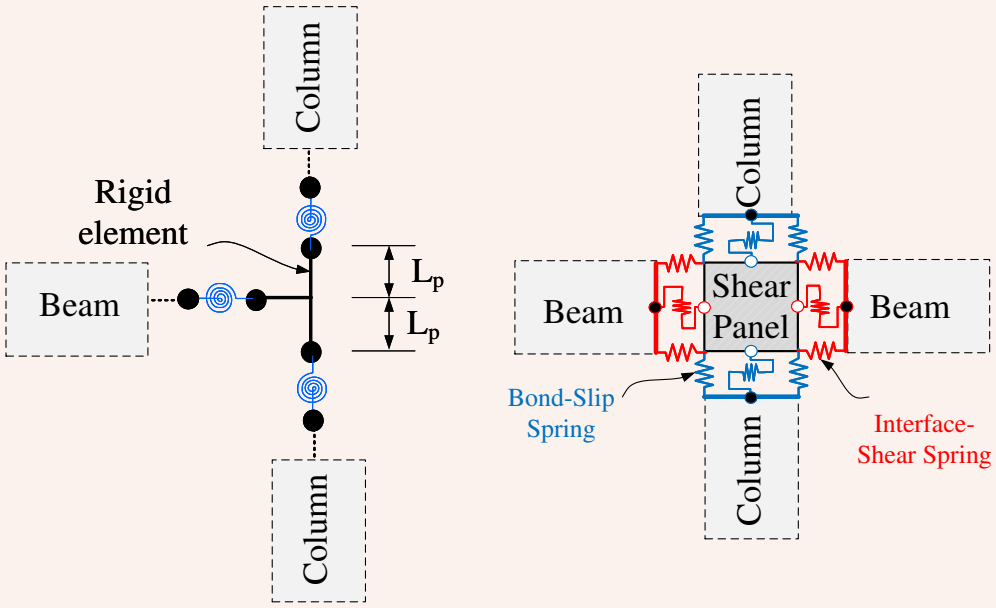


Figura 63.7: Pilar-viga conexões

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

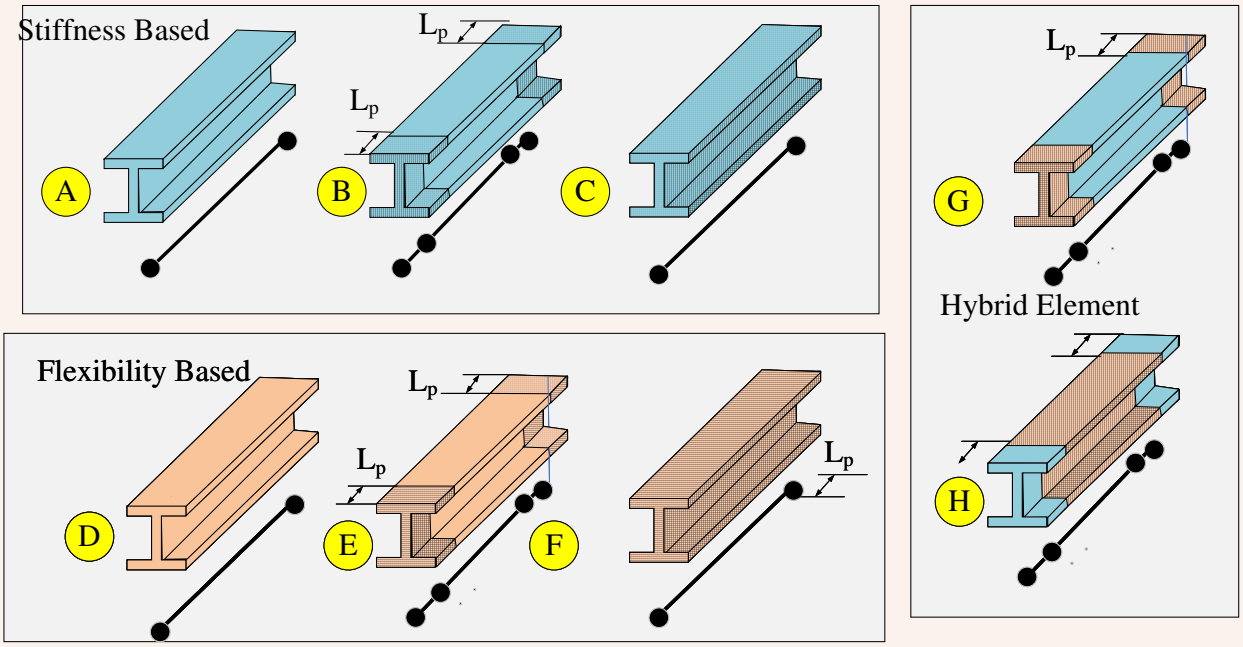
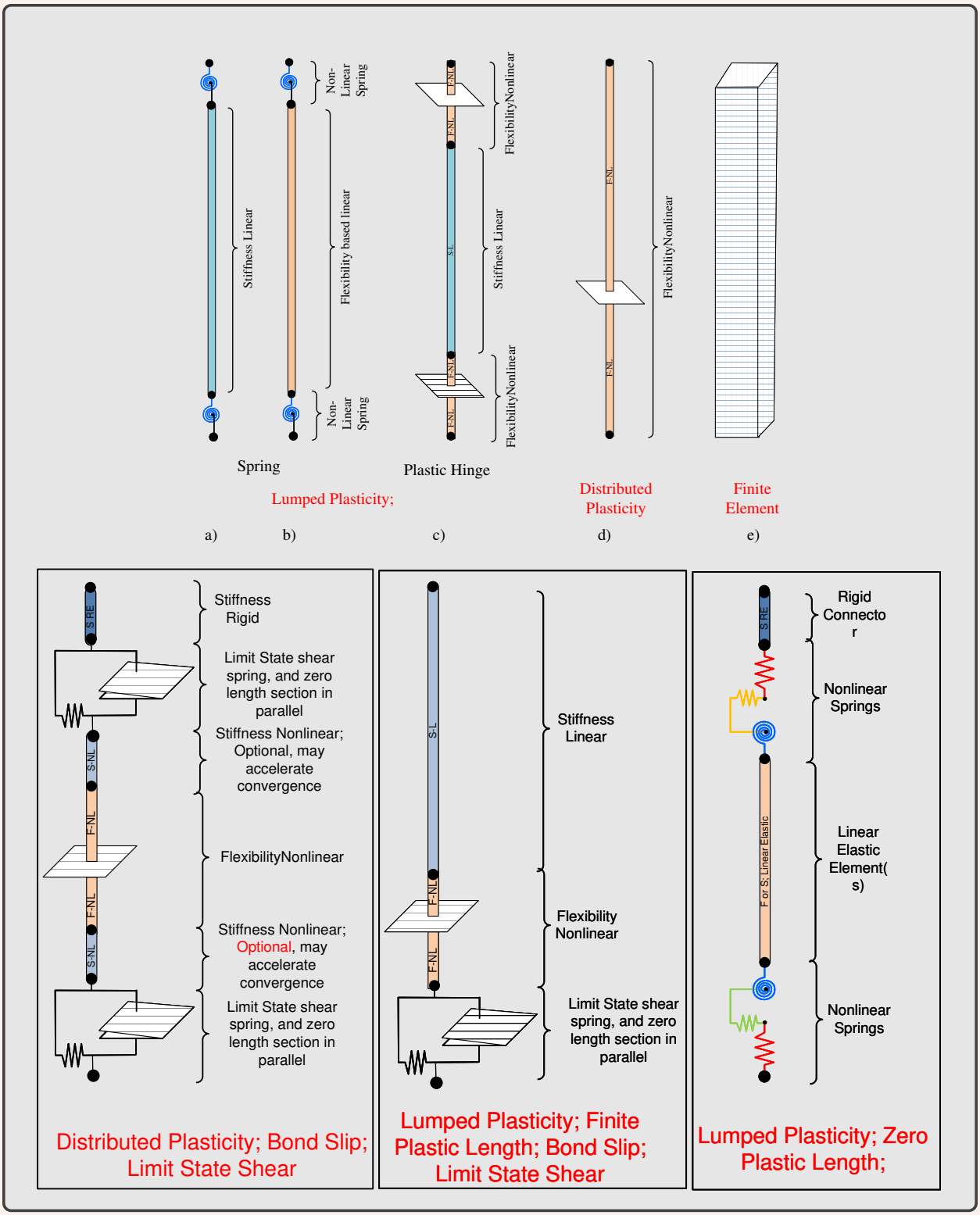


Figura 63.6: Viga ou pilar elementos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

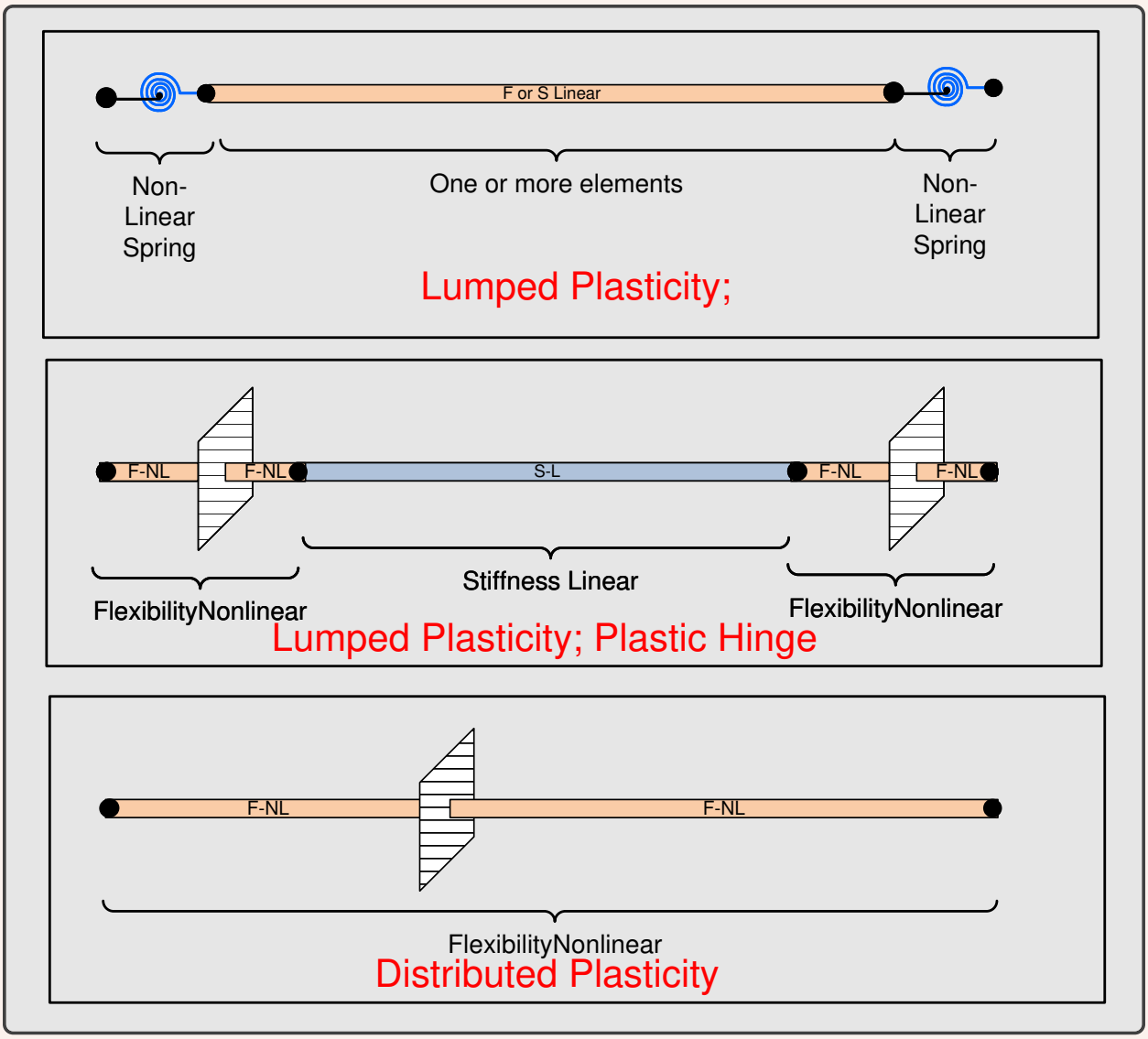
63.2.1.1 Ex 63.1: Pilar modelagem



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

63.2.1.2 Ex 63.2: Viga modelagem



63.2.2 Seção transversal

34 A modelagem seção transversal é de particular importância na plasticidade distribuída. Na análise 2D, nós nos referimos a camadas, e em 3D nos referemos a fibras.

35 Deve ser evidente que em 2D, o z A posição da camada é irrelevante (e não precisa ser especificada), Fig. 63.8.

36 Devemos distinguir entre

- Concreto não confinado
- Concreto confinado

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- Reforço

como cada um deles terá características diferentes tensão-deformação, Fig. 62.12.

37 Note que podemos ter várias camadas ao mesmo tempo y Elevações.

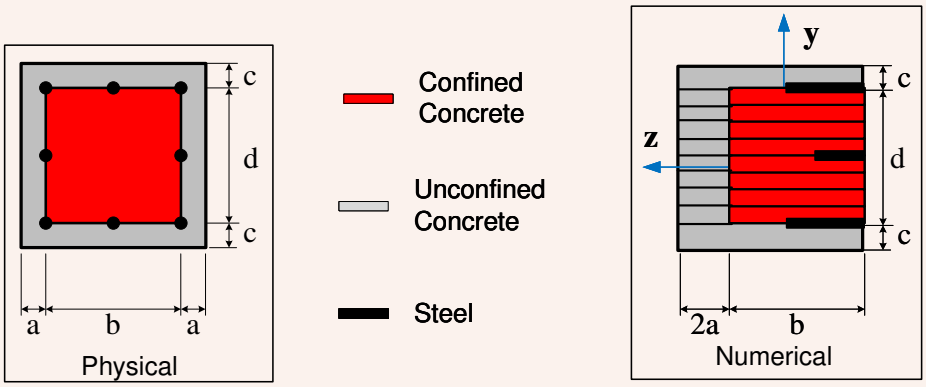


Figura 63.8: Seção transversal modelando em camadas

63.2.3 "Pegue e cacete"

38 No continuum baseado elemento finito, no máximo dois tipos de elemento coexistem: Continuum, e conjunto.

39 Na análise de pórticos, as coisas são muito mais complexas, pois podemos misturar diferentes tipos de elementos em um "macroelemento" para alcançar os modelos desejados.

40 Usando as bibliotecas de elementos e conexões anteriores, podemos ter várias permutações para um pórtico

41 Todos os modelos podem ser definidos na tabela 63.3.

Tabela 63.3: Modelando as opções de escolher e furar

Condição de contorno Fig. 63.7	Pilar Fig. 63.5		Ligação Fig. 63.7	Viga Fig. 63.6
	Fundo	Superior		

63.2.4 Considerações finais

42 Algumas observações

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Na plasticidade grudada, a mola rotacional pode ser não linear, ou elasto perfeitamente plástico (EPP)
2. Se se antecipa deformação não linear excessiva no modelo de plasticidade distribuída, elementos baseados em rigidez não lineares devem ser adicionados a cada fim.

   [43] O elemento base flexibilidade é quase invariavelmente usado com elementos em camadas (ele também pode ser definido em termos de forças de seção (N_x e.. M_z)).
3. Normalmente, não incluímos títulos para vigas.
4. Se o deslizamento de ligação for modelado, pode-se colocar um elemento de seção com comprimento zero em paralelo com o elemento de comprimento zero.
5. Em caso de leve não linearidade, um elemento flexibilidade deve ser suficiente, no entanto, pelo menos 3-4 rigidez elementos baseados seria necessário.
6. Para o elemento baseado em rigidez usar três pontos de integração (Gauss) no entanto para os elementos flexibilidade deve-se usar cinco pontos de inserção (Gauss-Lobatto que inclui pontos de inclusão em cada extremidade).
7. Escolha entre rigidez ou flexibilidade elemento baseado não é óbvio.

63.3 Determinações dos parâmetros de deterioração

[43] Os parâmetros de plasticidade distribuída (seções de fibra) são aqueles tipicamente associados à curva tensão-deformação. Em geral, parâmetros podem ser inferidos da resistência à compressão do concreto e módulo elástico.

[44] Um modelo de plasticidade Deve ser capaz de simular explicitamente efeitos de interação axial-flexural, comportamento de fissuração do concreto, tensionamento e outros efeitos de propagação da plasticidade. Estes efeitos podem, na maior parte das vezes, ser capturados pelo único $P-\Delta$ ou $M-\theta$ relações que constituem uma assinatura de um projeto específico pilar e assim capturar o elemento "' parâmetros de deterioração".

[45] Estas curvas são únicas para cada configuração de viga-pilar, sua assinatura deve ser identificada. Há duas possibilidades, Mesa 63.4:

1. Calibração
2. Banco de dados

[46] Como pilares são os elementos mais críticos com relação à estabilidade de edifícios durante terremotos, vigas geralmente não são calibrados.

63.3.1 Calibração

[47] Calibração implica

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 63.4: Quantificação da deterioração

Método	Parâmetro numérico	Travessas
Calibração	No	Sim
Banco de dados	Sim	No

1. Procure na literatura por uma viga-pilar análogo (dimensões, armaduras, propriedades de concreto) aos que estão sendo analisados e com resultados de testes laboratoriais relatados. Note que esses dados não incluem os valores correspondentes rigidez (estes seriam reportados separadamente em bancos de dados, §63.3.2).
2. Execute uma série de simulações numéricas e parâmetros de entrada ’’’ até que a curva preditiva esteja satisfatoriamente perto da experimental.

48 Então, os parâmetros do modelo são essencialmente ”tfraked”’ de tal forma que a resposta preditiva é o mais próxima possível do experimentalmente determinado.

49 Obviamente, essa determinação "manual"pode ser demorada e não resultar em parâmetros quase ótimos. O processo pode ser automatizado e melhorado através de uma abordagem de identificação de parâmetros descrita abaixo.

63.3.1.1 Identificações de parâmetros

50 Este método está descrito em detalhes no Capítulo 65, como é aplicável a outros tópicos discutidos neste livro.

63.3.2 Banco de dados dos parâmetros de modelagem

63.3.2.1 Peer/Berry

51 Uma alternativa para calibração é identificar bancos de dados que listariam pilar especificação e correspondentes parâmetros de deterioração. Alguns dos mais amplamente são (Berry, Parrish e Eberhard, 2004).

52 Uma base de dados amplamente utilizada para o edifício foi desenvolvida por Berry, Parrish e Eberhard, 2004 Contém resultados publicados de testes estáticos cíclicos e monotônicos de várias centenas de RC viga-pilares. Para cada teste, o banco de dados relata a geometria, reforço e propriedades materiais do pilar, força-deslocamento história, governo modo falha, e outras informações relevantes.

53 Todos os dados são relatados em termos de uma configuração equivalente, como mostrado na figura. 63.9.. Para pilares testado em curvatura dupla, a tradução para um equivalente pilar é feita por Berry, Parrish e Eberhard, 2004, assumindo um ponto de inflexão fixo, tipicamente na altura média.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

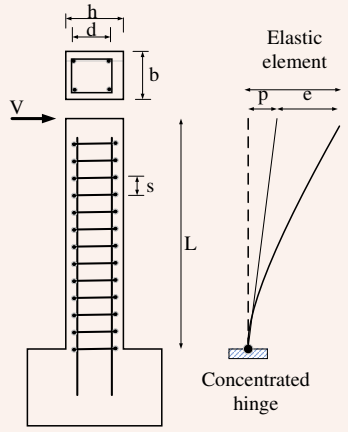


Figura 63.9: Modelo de cantilever idealizado de rc viga-pilar (Haselton et al., 2016)

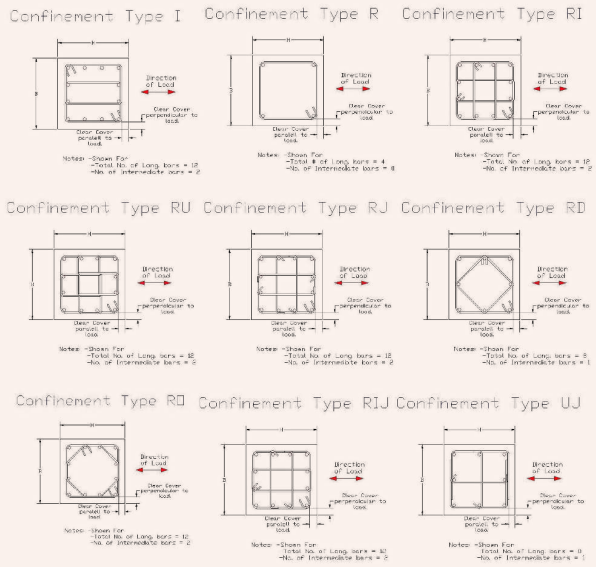


Figura 63.10: Tipos de confinamentos (Berry, Parrish e Eberhard, 2004)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

54 O banco de dados pode ser facilmente acessado através da web, Fig. 63.11.

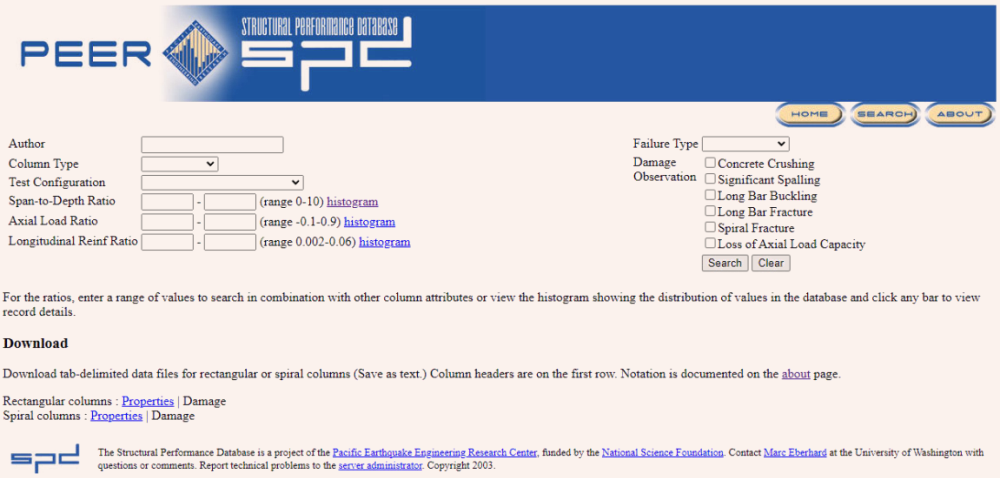


Figura 63.11: Interface gráfica do usuário para o banco de dados de desempenho estrutural (Berry, Parrish e Eberhard, 2004)

63.3.2.1.1 Propriedades

55 Mesas tiradas de (Berry, Parrish e Eberhard, 2004) ilustrar o conjunto de dados normalmente encontrados neste e bases de dados semelhantes (Tabela 63.5-63.7).

Tabela 63.5: Propriedades materiais

Material	Notação	Descrição da propriedade	Pilar Tipo
Concreto	f_c'	Resistência característica à compressão do concreto (MPa)	R, S
Longitudinal Reforço	f_{yl}	Rendimento tensão de reforço longitudinal (MPa)	S
	f_{su} Longo.	Resistência máxima de aço para reforço longitudinal (MPa)	S
	f_{yl} Canto	Renda tensão de barras de canto longitudinal (MPa)	R
	f_{yl} Inerm.	Rendimento tensão de barras intermediárias longitudinais (MPa)	R
	f_{su} Canto	Resistência máxima de aço das barras de canto longitudinal (MPa)	R
	f_{su} Interm.	Resistência máxima de aço das barras intermediárias longitudinais (MPa)	R
Transverso Reforço	f_{yt}	Rendimento tensão de reforço transverso (MPa)	R, S
	f_{su} Trans.	Resistência máxima de aço para reforço transversal (MPa)	R, S

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 63.6: Classificação transversal

Notação	Forma transversal	Código
O	Octogonal	2
C	Circular	0
S	Quadrado	3

Tabela 63.7: Códigos do modo de falha

Fracasso	Código
Flexura	1
Cisalhamento	2
Flexura-Cisalhamento	3

Tabela 63.8: Geometria

	Notação	Descrição	Pilar Tipo
No geral Pilar Dimensões	H ou D	Profundidade (mm)	R, S
	B	Largura	R
	Área (A_g)	Área transversal de pilar (mm^2)	R, S
	L	Comprimento do cantilever equivalente (mm)	R, S
Longitudinal Reforço	Total # Barras	Número de barras de reforço longitudinais	R, S
	Bar Dia.	Diâmetro das barras de reforço longitudinal (mm)	S
	Bar Dia.Corner	Diâmetro das barras de canto longitudinal (mm)	R
	Bar Dia. Interm.	Diâmetro das barras intermediárias longitudinais (mm)	R
	Lsplice	Comprimento da junção de força longitudinal	R, S
	Reinf. Razão	Razão de reforço longitudinal (calculada).	R, S
Transverso Reforço	Bar Dia.	Diâmetro da força transversal (mm)	R, S
	Espaçamento	Espaço de reforço transversal (mm)	R, S
	Vol. Trans	Relação de força transversal volumétrica (notificada)	R, S
	Nv	Número de barras transversais cisalhamento em seção transversal	R, S
	"Limpo da Capa"	Distância da superfície externa de pilar até a borda exterior de reforço transversal (mm)	R
	"Limpo de cobertura"	Distância da superfície externa de pilar ao centro de reforço transversal (mm)	S

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Tabela 63.9: Detalhes de confinamento

Notação	Descrição	Código de Confinamento
I	Engarrafamento de gravatas	1
R	Ligações retangulares (ao redor do perímetro)	2
RI	Gravatas retangulares e entrelaçadas	4
RU	Gravatas retangulares e barras U	8
RJ	Ligações retangulares com os ganchos	6
RD	Ligações retangulares e diagonais	3
RO	Ligações retangulares e octogonais	7
RIJ	Gravatas retangulares e interligadas, com ganchos J	5
UJ	Barras com ganchos J	9

Tabela 63.10: Detalhes de confinamento

Descrição	Código de Confinamento
Cantilever	C
Dupla Curvatura	DC
Duplo-Fim	DE
Base Flexível	CFB
Hammerhead	HH

63.3.2.1.2 Resumo das capacidades de flexão

56 Um resumo das capacidades de flexão calculadas é dado na tabela 63.11

63.3.2.1.3 Exemplo

57 Um exemplo do uso da base de dados PEER é fornecido por Haselton et al., 2008 que procuraram viga pilar satisfazendo os seguintes critérios,

$$\rho_{sb}(\text{area confinement ratio}) > 0.006(\text{ACI 318-05 Eq. 21-4 requires } \rho_{sh} > 0.0075)$$
$$\frac{P}{A_g} f_c' < 0.30$$
$$f_c' < 40 \text{ MPa}$$

Isso resultou em 30 testes experimentais que preenchem os critérios e aqueles são mostrados na tabela 63.12.

63.3.2.2 Stanford/Lignos

58 Lignos e Krawinkler, 2013 desenvolveu três bases de dados para modelagem de componentes estruturais:

Aço de seção W vigas: O banco de dados W-sections inclui 316 espécimes. A maioria

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 63.11: Resumo dos testes de reforçados retangulares pilares (Berry, Parrish e Eberhard, 2004)

Teste #	Referência	Designação	Comentários	M_{max} (kN-m)	$\frac{M_{max}}{M_{ACI}}$	V_{max} (kN)	Δ_y (mm)	Modo de falha
1	Gill et al. (1979)	No. 1		838	1.22	657	7.12	1
2	Gill et al. (1979)	No. 2		953	1.05	764	7.13	1
3	Gill et al. (1979)	No. 3		817	1.20	642	4.85	1
4	Gill et al. (1979)	No. 4		903	1.44	697	4.09	1
5	Ghee et al. (1981)	No. 3	espaçamento de barras 120mm-75mm-120mm	337	1.24	192	9.61	1
6	Ghee et al. (1981)	No. 4	espaçamento de barras 120mm-75mm-120mm	298	1.14	169	12.19	1
7	Soesian. et al. (1986)	No. 1		354	1.17	200	10.36	1
8	Soesian. et al. (1986)	No. 2		481	1.18	279	9.16	1
9	Soesian. et al. (1986)	No. 3		474	1.17	277	8.77	1
10	Soesian. et al. (1986)	No. 4		457	1.19	265	9.59	1
11	Zahn et al. (1986)	No. 7		398	1.35	213	11.88	1
12	Zahn et al. (1986)	No. 8		554	1.44	269	10.27	1
13	Watson e Park (1989)	No. 5		535	1.42	292	8.09	1
14	Watson e Park (1989)	No. 6		528	1.41	295	6.19	1
15	Watson e Park (1989)	No. 7		525	1.75	293	4.02	1
16	Watson e Park (1989)	No. 8		523	1.81	295	4.16	1
17	Watson e Park (1989)	No. 9		602	2.08	310	4.76	1
18	Tanaka e Park (1990)	No. 1	Aros de reforço transversos foram soldados	290	1.14	167	13.81	1
19	Tanaka e Park (1990)	No. 2		291	1.14	168	13.04	1
20	Tanaka e Park (1990)	No. 3		302	1.18	175	11.37	1
21	Tanaka e Park (1990)	No. 4		292	1.15	170	12.35	1
22	Tanaka e Park (1990)	No. 5		704	1.15	386	13.55	1
23	Tanaka e Park (1990)	No. 6		717	1.17	409	11.96	1
24	Tanaka e Park (1990)	No. 7		1070	1.34	588	9.68	1
25	Tanaka e Park (1990)	No. 8		1090	1.36	619	8.39	1
26	Park e Paulay (1990)	No. 9		727	1.21	393	10.71	1
27	Arakawa et al. (1982)	No. 102	suporte flexível	60	1.15	153	3.78	1
28	Nagasaka (1982)	HPRC10-63	Capa escalada de desenho	27	1.02	87	2.74	3
29	Nagasaka (1982)	HPRC19-32	Capa escalada de desenho	34	1.08	111	1.94	3
30	Ohno e Nishioka (1984)	L1	Capa escalada de desenho	201	1.30	119	9.49	1
31	Ohno e Nishioka (1984)	L2	Capa escalada de desenho	186	1.20	111	9.05	1
32	Ohno e Nishioka (1984)	L3	Capa escalada de desenho	172	1.11	104	9.79	1
33	Ohue et al. (1985)	2D16RS	Capa escalonada de desenho, falha na separação	41	1.08	98	4.55	3
34	Ohue et al. (1985)	4D13RS	A capa dimensionou de desenho, dividindo-se..	44	1.01	108	4.59	3

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Tabela 63.12: Resultados do estudo de calibração para 30 testes experimentais (Haselton et al., 2008)

	Propriedades físicas					Dados Calibrados							Comparação com Fardis			
Número do teste (Base de dados Eberhard)	$P/A_g f'_c$	P/P_b	ρ_{sh}	s (mm)	f'_c (Mpa)	θ_y	EI_{eff}/EI_g	EI_{eff}/EI_{gst2}	α_c	$\theta_{cap,pl}$ (rad)	Se a tampa for observada	λ	c	Fardis $\theta_{u,mono}^{pl}$ (rad)	$\theta_{cap,pl}$ Computado com Fardis θ_u^{pl} (rad)	$\theta_{cap,pl}$ Fardis / Calibrado
1	0.26	0.65	0.0071	80	23.1	0.008	0.25	0.47	0.01	–	0.028	0	136	1.0	0.032	0.010	0.36
6	0.21	0.55	0.0087	90	25.0	0.009	0.31	0.83	0.04	–	0.036	0	64	1.0	0.045	0.023	0.63
11	0.22	0.58	0.0067	117	28.3	0.010	0.34	0.75	0.07	–	0.078	0	74	1.0	0.046	0.024	0.31
18	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.010	0.30	0.65	0.02	–	0.083	0	114	1.0	0.050	0.028	0.33
19	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.33	0.77	0.02	–	0.069	0	89	1.0	0.050	0.028	0.40
20	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.34	1.92	0.02	–	0.065	0	41	1.0	0.050	0.028	0.42
21	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.32	1.14	0.01	–	0.073	0	159	1.0	0.050	0.028	0.38
22	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.18	0.35	0.03	–	0.038	0	132	1.0	0.075	0.053	1.41
23	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.19	0.40	0.03	–	0.070	0	145	1.0	0.075	0.053	0.76
24	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.010	0.28	0.79	0.04	–	0.050	0	105	1.0	0.057	0.035	0.69
25	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.011	0.27	0.73	0.01	–	0.046	0	127	1.0	0.057	0.035	0.75
26	0.10	0.26	0.0106	80	26.9	0.008	0.27	0.61	0.04	–	0.055	0	200	1.0	0.079	0.057	1.03
88	0.10	0.27	0.0061	76	29.1	0.010	0.34	0.55	0.05	–	0.016	0	123	1.0	0.060	0.038	2.37
90	0.10	0.27	0.0061	76	29.2	0.010	0.30	0.54	0.06	–	0.022	0	127	1.0	0.060	0.038	1.73
92	0.20	0.56	0.0061	76	29.4	0.014	0.30	0.64	0.02	–	0.019	0	82	1.0	0.052	0.030	1.58
94	0.26	0.72	0.0061	76	33.3	0.012	0.36	0.61	0.06	–	0.026	0	44	1.0	0.047	0.025	0.98
96	0.28	0.76	0.0061	76	31.0	0.010	0.43	0.67	0.01	–	0.028	0	45	1.0	0.045	0.023	0.83
Mediana:	0.20	0.55	0.0078	76	29.2	0.011	0.27	0.50	0.04	-0.08	0.070	0.00	109	1.0	0.064	0.042	0.75
- Não, não.	0.17	0.48	0.0079	76	30.0	0.013	0.25	0.59	0.05	-0.09	0.063	0.13	106	1.0	0.065	0.043	0.80
C.O.V.:	0.45	0.45	0.21	0.24	0.16	0.32	0.32	0.59	0.76	0.37	0.46	2.59	0.39	0.00	0.27	0.41	0.57

* A rotação de plástico é um limite inferior se uma tampa (ou seja, Não foi observada nos dados uma inclinação deformação-softening].

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

destes espécimes são flange larga vigas (W ou H) variando de W43×13 para W36×300. O principal modo de deterioração dos subconjuntos de aço coletados é torcional local e lateral flambagem, porque o foco está no comportamento cíclico das conexões pós-Norte-viga-para-pilar que são amplamente utilizadas na construção moderna de aço. 54 espécimes incluem vigas que falham por causa de fratura prematura (não-dutil) nas conexões. Espécimes falhando por fratura quebradiça em conexões não fazem parte da discussão seguinte, porque o foco está nas conexões viga-para-pilar que se deterioram de forma dúctil.

Aço quadrado tubular 120 pontos de dados experimentais para HSS pilares foram desenvolvidos (44 testes monotônicos e 76 cíclicos). Estes pilares foram submetidos à carga axial combinada e monotônica ou cíclica momentos fletores. A razão de aplicação N Para produzir carga axial $N_y(N/N_y$ dos espécimes coletados varia de 0 a 0,60. A profundidade pilar D Para a espessura t Rácios (D/t) dos dados variam de 18 a 100. O rendimento tensão f_y da HSS coletada pilares varia de 276 a 500 MPa.

RC vigas: Apenas subconjuntos que incluem vigas que falham na flexão foram incluídos neste conjunto de dados. O banco de dados incluía cantilever, duplo curvatura, cabeça de martelo e espécimes fixos.

59 Todas as três bases de dados de componentes estruturais contêm as seguintes informações:

Metadados: Geometria de configuração, propriedades do material medido, laje detalhes (no caso de espécimes compostos), layout de reforço e detalhes (para RC), etc.

Relatar trechos que contêm um resumo dos testes subconjunto e/ou componente.

Resultados reportados (i.e., medições e observações como relatado na documentação do teste) incluindo histórias digitalizadas de diagramas histeréticos globais de carga-deslocamento

Dados deduzidos em formato digitalizado (i.e., informações deduzidas de metadados e dados reportados para fins de calibração de modelos analíticos), incluindo histórias digitalizadas de diagramas histeréticos de rotação de momento deduzidos e zona do painel cisalhamento V_{pz} versus distorção cisalhamento γ Subconjuntos de aço viga-para-pilar Estes dados foram obtidos diretamente dos investigadores individuais, que conduziram o experimento (se as informações estavam disponíveis digitalmente), ou digitalizando os diagramas histeréticos acima mencionados diretamente dos relatórios experimentais. O conjunto completo de dados, juntamente com documentação abrangente que descreve a notação para as três bases de dados estruturais podem ser baixados através do armazém central NEES.

60 Para cada conjunto de dados foi usado um modelo de calibração da deterioração, e as funções cumulativas de distribuição para os parâmetros de deterioração são plotadas (usando uma distribuição lognormal).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

63.3.2.3 UTSA/Ghannoum

61 Como parte do desenvolvimento de um novo modelo de plasticidade para viga pilar (§62.3.4), Suselo, 2021, Chapter 3 desenvolveu o banco de dados experimental UTSA Concreto armado Pilar para validação de seu modelo.

62 Uma característica interessante (única possivelmente) deste banco de dados é sua curadoria. É composto de duas partes: a) Dados primários (i.e. "Como está"coletando dados; e b) dados secundários calculados e extraídos que contêm propriedades derivadas de dados primários, ou calculados a partir de dois ou mais parâmetros (por exemplo, razão de carga axial) ou extraídos da carga - deslocamento dados.

63.3.2.4 Continuum elemento finito/Dolati

63 A maioria dos experimentos em concreto pilares, a partir do qual os modelos de banco de dados são derivados, foram conduzidos usando protocolos de carregamento cíclico totalmente invertidos, com apenas uma pequena fração de testes pilar sendo testados sob Protocolos de carregamento diferentes. O banco de dados anterior da UTSA pilar (possivelmente até agora o maior), contém 689 pilar testes, com apenas oito deles explorando protocolos de carregamento que não completamente cíclicos reversos. Como tal, enquanto os modelos atualmente disponíveis capturam os efeitos das propriedades pilar e condições de contorno, eles não captam o efeito de diferentes histórias de carregamento em capacidades pilar.

64 Para preencher lacunas em dados experimentais com relação ao efeito das histórias de carregamento sobre as capacidades de resistência e deformação do concreto pilares, Dolati, Matamoros e Ghannoum, 2023 realizou análises contínuas elemento finito

65 Modelos não lineares contínuos elemento finito foram calibrados para testes experimentais de sete pilares submetidos a diferentes protocolos de carga lateral. Selecionado pilares modos de resistência lateral. Pilares foram selecionados para cobrir uma faixa de cisalhamento tensões, seção transversal, cargas axiais, espaçamento e relações de armadura transversas, e razões de reforço longitudinais. Todos testados pilares colapso axial sustentado após dano cumulativo de carga lateral. Os modelos calibrados foram submetidos a uma série de protocolos de carregamento, incluindo o monotônico e completamente invertidos protocolos de carga cíclica com número variável de ciclos. Os efeitos dos protocolos de carga lateral na progressão, força e capacidade de deformação são discutidos.

63.3.2.5 ACI-437-A

66 ACI-437 (Avaliação de Força das Estruturas Existentes de Concreto) recentemente criou um subcomitê (ACI 437-A) com a tarefa de criar (ainda outro) banco de dados que recolherá informações sobre os dados laboratoriais e de testes de campo.

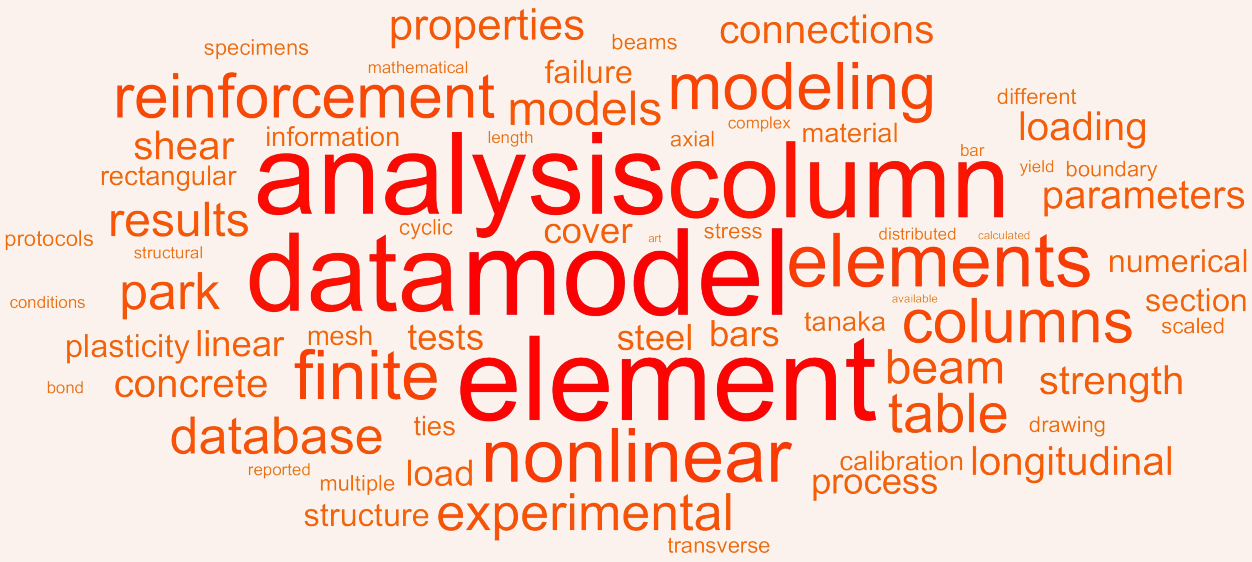
67 As informações a serem coletadas incluem:

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Tipo de estrutura: RC, PC, PT
- Descrição do elemento: idade, tipo, extensão, profundidade, seção transversal, armadura, resistência à compressão, capacidade esperada/calculada
- Razão para testar: flexural, cisalhamento, socos cisalhamento, outras informações de fundo
- Protocolo de Teste: monotônico ou CLT, campo ou laboratório
- Carregamento e geometria: carga distribuída, cargas concentradas, vários vãos, etc.
- TLM: método de cálculo, relação DL/LL, TLM aplicado
- Código: ACI 318 ou 562, ano de publicação, magnitude da carga
- Consertado ou nova estrutura

[68] Dada a composição do comitê (indústria e academia), e sua existência dentro de uma grande organização nacional (ACI), é provável que em breve se torne uma referência.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Intermezzo: Da análise para a identificação do parâmetro

Os próximos dois capítulos desenvolvem ferramentas complementares para análise estrutural sob incerteza. Capítulo 64 (*Dados e Dúvidas*) estabelece como representar, propagar e analisar incertezas prévias em entradas. Capítulo 65 (*Decisões*) inverte esse problema: dadas as medições, quais os valores dos parâmetros são suportados pelos dados, e como devemos calibrar modelos computacionais?

Capítulo 64:. Análise Avançada

Dados e Dúvidas
|
+— Qualidade dos Dados
|
+- Quantificação da incerteza
| (Representação, Propagação)
|
+— Análise de Sensibilidade
| (Morris, Sobol, Tornado)
|
+? Inferência Bayesiana
(Anterior, posterior, MCMC)

Capítulo 65:. Análise inversa

Decisões
|
+— Problema Inverso
|
+? Quadro de Aplicações
|
+? Robustness de dados
| (Preprocessamento Ransac)
|
+Levenberg, Marquardt
| (Estimação do ponto)
|
+— Bayesian Identification
| (Posterior para parâmetros)
|
+.. Implementação MATLAB
|
+— Fluxos de trabalho híbridos

Complementaridade: C-10-A fornece a ferramenta de análise avançada: representar incerteza prévia, propagar através de modelos, identificar parâmetros importantes. C-10-B aplica métodos inversos ao problema de identificação dos parâmetros: Candidatos de tela usando sensibilidade, parâmetros de ajuste dos dados, quantificar incerteza posterior. Juntos, completam o ciclo: incerteza anterior → propagação → Sensação de sensibilidade → Calibração do parâmetro → Previsões de apoio à decisão.

CÓPIA PARA REVISÃO

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 64

Dados e Dúvidas: Incertezas e análise de sensibilidade

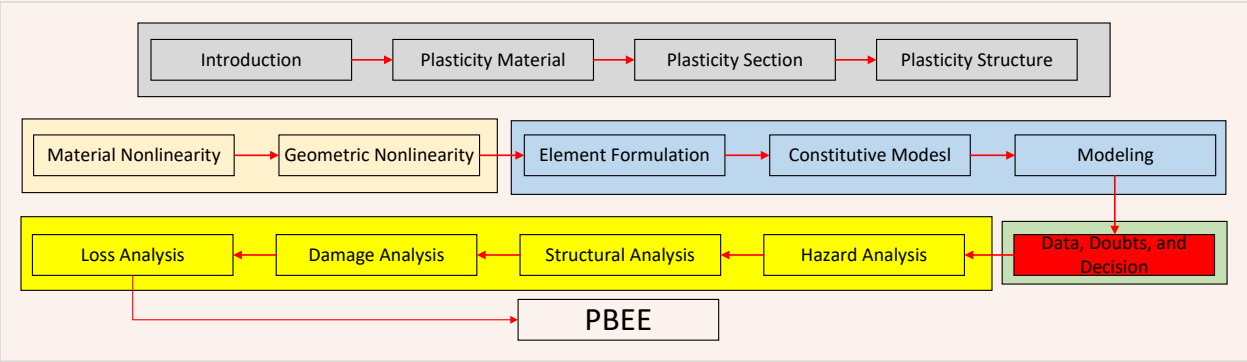
Abstract

Este capítulo desenvolve as ferramentas de análise avançada necessárias para passar de dados imperfeitos para previsões estruturais defensáveis. Ele primeiro distingue variabilidade aleatória, incerteza epistêmica, erro de medição e discrepância modelo-forma; então mostra como a incerteza é representada, correlacionada e propagada através de modelos computacionais. Simulação de Monte Carlo, amostragem do hipercubo latino, aproximações linearizadas e estimativas pontuais, e expansões do caos polinomial são introduzidas com suas suposições e limitações.

A segunda metade aborda a análise de sensibilidade. Medidas locais de uma vez, o método de rastreamento Morris, índices de variância e diagramas de tornado são usados para determinar quais entradas incertas controlam a resposta e quais podem ser fixadas ou atribuídas prioridade menor. O capítulo fecha mostrando como parâmetros influentes se tornam candidatos à identificação. Capítulo 65 então formula e resolve esse problema inverso.

64.1 Introdução 2187
64.2 Qualidade dos dados e fontes de dúvida 2187
64.3 incerteza Quantificação e Análise . . 2188
64.3.1 Caracterização da incerteza de entrada 2188
64.3.2 Dependência e Amostragem Correlacionada 2190
64.3.3 Propagação da incerteza . . 2193
64.3.4 Interpretação da incerteza de saída 2203
64.4 Análise de Sensibilidade 2203
64.4.1 Método Morris 2204
64.4.2 Índices de Sensibilidade Baseados em Variância Sóbol . 2209
64.4.3 Comparação dos métodos de propagação e sensibilidade . 2211
64.4.4 Determinação de importantes variáveis aleatórias 2211
64.4.5 Diagramas de Tornado . . . 2216
64.5 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro 2216

CÓPIA PARA REVISÃO



64.1 Introdução

1 Raramente começa com entradas exatas. As propriedades do material variam dentro de um membro e através de uma estrutura; cargas e ações ambientais são aleatórias; As medidas são incompletas e ruidosas; condições de contorno são idealizados; e cada modelo computacional omite alguns detalhes físicos. A questão central, portanto, não é se existe incerteza, mas se foi representada com disciplina suficiente para apoiar a decisão tomada.

2 Três tarefas devem ser mantidas distintas. Primeiro, os dados disponíveis devem ser examinados quanto à relevância, consistência, viés, observações ausentes e outliers. Segundo, a incerteza restante deve ser representada e propagada através do modelo para que se saiba a disseminação de respostas plausíveis. Em terceiro lugar, a análise de sensibilidade deve identificar quais entradas são responsáveis por essa propagação. Tratar essas tarefas separadamente impede que um grande volume de dados seja confundido com informações confiáveis.

3 Este capítulo aborda o problema da frente

$$\mathbf{X} \longmapsto Y = g(\mathbf{X}),$$

onde o vetor de entrada incerto $\mathbf{X}$ é mapeado através de um modelo estrutural para uma ou mais quantidades de interesse Y.. Capítulo 65 aborda o problema inverso complementar: dadas as medidas de Y, determinar os componentes desconhecidos de $\mathbf{X}$ ou do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

64.2 Qualidade dos dados e fontes de dúvida

4 Antes de atribuir distribuições de probabilidade, o analista deve distinguir incerteza de dados defeituosos. Observações repetidas podem conter erro de medição aleatório,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

viés sistemático, desvio do sensor, erros de transcrição, unidades inconsistentes, valores censurados ou intervalos ausentes. Esses efeitos requerem tratamentos diferentes. Erro aleatório pode ser incorporado em uma matriz de covariância de probabilidade ou medição; O viés requer correção ou um parâmetro de viés explícito; Uma observação corrompida isolada pode justificar uma estimativa robusta; e dados desaparecidos não devem ser substituídos silenciosamente sem documentar a regra de imputação.

5 Igualmente importante é a distinção entre *incerteza do parâmetro* e.. *Desfasamento do modelo*.. A incerteza do parâmetro reflete o conhecimento incompleto de quantidades que existem dentro do modelo adotado, como módulo elástico ou uma constante de tempo de degradação. A discrepância do modelo é a diferença entre o sistema físico e a melhor resposta que o modelo adotado pode produzir, mesmo quando seus parâmetros são escolhidos de forma ideal. Forçar parâmetros para compensar uma discrepância sistemática de modelo pode gerar um excelente ajuste, mas valores fisicamente enganosos.

6 Uma análise defensável, portanto, registra: A proveniência e as unidades de cada observação; precisão de medição e repetibilidade; Amostra espacial e temporal; Exclusões de dados; Suposições usadas para preencher lacunas; e o alcance sobre o qual um modelo calibrado será usado mais tarde. Esses registros se tornam parte do modelo de incerteza ao invés de uma etapa informal de pré-processamento.

64.3 incerteza Quantificação e Análise

7 Terminologia varia entre as disciplinas. Neste livro, *Quantificação da incerteza* (UQ) denota o processo completo de análise avançada: identificar fontes de incerteza, caracterizar inputs incertos e sua dependência, propaga-los através do modelo, resumir a incerteza resultante da saída, e determinar quais insumos importam. *Análise da incerteza* (UA) denota a interpretação orientada para a decisão desses resultados propagados. A distinção é de ênfase em vez de uma separação rígida: UQ produz e organiza a informação de incerteza, enquanto UA explica o que essa informação significa para a decisão de engenharia.

64.3.1 Caracterização da incerteza de entrada

8 Um estudo de propagação é tão defensável quanto seu modelo de entrada. O analista deve identificar a fonte de cada incerteza, decidir se uma descrição probabilística é justificada, especificar intervalos credíveis ou distribuições, e documentar qualquer dependência entre variáveis. A incerteza de medição e a discrepância do modelo devem ser mantidas distintas da variabilidade física sempre que as informações disponíveis permitirem.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 64.1: Terminologia adotada neste livro para quantificação de incertezas e análise de incerteza

Aspect	quantificação da incerteza (UQ)	Análise da incerteza (UA)
Escopo	Fluxo de trabalho completo da caracterização de entrada através de propagação, sensibilidade e relatórios	Interpretação e relato de incertezas nas saídas do modelo
Entradas	Modelos marginais, dependência, intervalos, evidências e suposições de modelos	Usa o modelo de entrada e propagação estabelecido pelo estudo UQ
Saídas	Distribuição, momentos, quantis, excedência e probabilidades de falha, e medidas de sensibilidade	Resumos, intervalos, probabilidades de cauda e comparações relevantes
Papel	Produz e organiza informações de incerteza	Explica o que a incerteza propagada significa para a decisão de engenharia

64.3.1.1 Tipos de incertezas

Incerteza Aleatorativa: variabilidade inerente que permanece até mesmo com conhecimento perfeito, como a variabilidade do evento-a-evento em terra-moção ou genuína variabilidade espacial nas propriedades materiais. É normalmente representado probabilisticamente e não é eliminado coletando mais informações sobre uma determinada realização.

Incerteza epistêmica: conhecimento incompleto sobre o sistema, seus parâmetros ou seu ambiente. Muitas vezes pode ser reduzido por testes adicionais, medições melhoradas, ou melhores modelos físicos.

Incerteza de medição: Erro aleatório, resolução finita, erro de calibração e viés nas observações usadas para caracterizar ou calibrar o modelo. A incerteza de medição é geralmente epistêmica, embora ruídos repetidos são frequentemente modelados probabilisticamente.

Incerteza de modelo: discrepância causada por idealizações, mecanismos omitidos, pressupostos constitutivos, discretização ou aproximações numéricas. Não deve ser automaticamente absorvido na incerteza dos parâmetros.

Incerteza mista: Problemas práticos geralmente contêm várias das fontes anteriores simultaneamente. Por exemplo, a variabilidade do movimento no solo é Aleator, a incerteza na caracterização do local é epistêmica, as acelerações registradas contêm erro de medição, e o modelo estrutural tem discrepância entre modelos.

64.3.1.2 Representação Matemática

Distribuição de probabilidades: apropriado quando dados ou conhecimento prévio defensável suportam um modelo de probabilidade. As distribuições marginais des-

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

crevem variáveis individuais; uma distribuição conjunta ou modelo de dependência é necessário quando as variáveis estão correlacionadas. As distribuições comuns estão resumidas no Apêndice M.

Intervalos e conjuntos confusos: útil quando limites são credíveis, mas frequências ou probabilidades não são. Um intervalo diz apenas que $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$.. Descrições confusas adicionam afiliações graduadas e podem ser úteis para informações linguísticas ou especializadas, mas não devem ser interpretadas como probabilidades sem mais suposições.

Momentos e quantis: A média, variância, covariância, inclinação e quantis selecionados resumem uma distribuição. Momentos são convenientes para propagação linearizada, enquanto quantis e probabilidades de excedência são muitas vezes mais informativos para decisões de estado limite. Momentos estatísticos são revisados em §M.4.1.

64.3.2 Dependência e Amostragem Correlacionada

9 As distribuições marginais não definem um modelo de incerteza conjunta. Quando quantidades incertas compartilham causas físicas comuns, tendências espaciais, exposição ambiental ou processos de medição, sua dependência deve ser representada explicitamente. Ignorar a dependência pode exagerar ou suprimir as probabilidades de variância e cauda da resposta estrutural.

64.3.2.1 Covariância e Correlação

10 Para duas variáveis aleatórias X e.. Y,

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big], \qquad \rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{64.1}$$

O coeficiente de correlação é dimensional e está entre -1 e.. $+1$.. Um valor de zero significa ausência de *linear* Correlação, não necessariamente independência. Correlação também não estabelece causa, e outliers podem distorcer fortemente o coeficiente de Pearson comum.

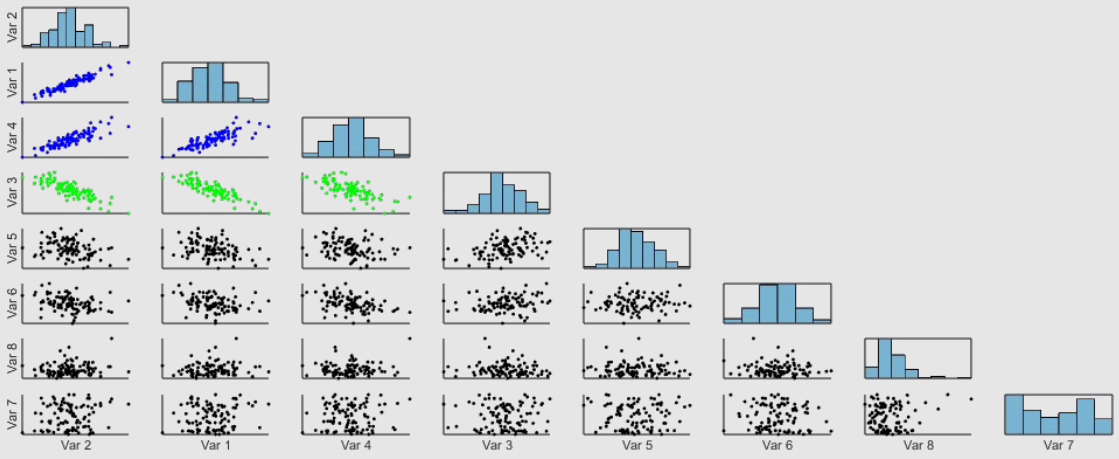
64.3.2.1.0.1 Ex 64.1: Matriz de correlação

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

A matriz abaixo combina histogramas marginais e parcelas de dispersão em pares para oito variáveis. A dependência foi introduzida deliberadamente quando as amostras foram geradas; Usando diferentes distribuições marginais por si só não criaria correlação. Tal enredo é útil para detectar tendências lineares, dependência não linear, agrupamentos e observações isoladas antes de uma matriz de correlação formal ser aceita.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



O valor numérico de ρ deve ser interpretado no contexto da aplicação. Descritores como "fraco"ou "forte"são apenas heurísticas e não devem substituir uma avaliação de engenharia de como a dependência afeta a quantidade de interesse.

Tabela 64.2: Descrevedores qualitativos ilustrativos para a magnitude de um coeficiente de correlação de Pearson

Magnitude	**Possível termo descritivo**
$0.0 \le \lvert\rho\rvert < 0.1$	desprezíveis ou muito fracos
$0.1 \le \lvert\rho\rvert < 0.3$	Fraco
$0.3 \le \lvert\rho\rvert < 0.5$	moderada
$0.5 \le \lvert\rho\rvert < 0.7$	forte
$0.7 \le \lvert\rho\rvert < 0.9$	Muito forte
$0.9 \le \lvert\rho\rvert \le 1.0$	extremamente forte para perfeita associação linear

11 Mesa 64.2 registra uma convenção descritiva comumente usada. Os limites não são universais e não transmitem significância estatística nem importância de engenharia; Ambos dependem do tamanho da amostra, qualidade dos dados e da decisão tomada.

64.3.2.2 Covariância espacial

12 Uma propriedade espacialmente variável é representada como um campo aleatório $X(\mathbf{s})$.. Sua função de covariância é

$$C_X(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \mathrm{Cov}[X(\mathbf{s}), X(\mathbf{s}')] \,. \tag{64.2}$$

Para um campo isotrópico homogêneo, a covariância depende apenas da distância de separação $h = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|$.. Um modelo ilustrativo comum é

$$C_X(h) = \sigma_X^2 \exp\!\left(-\frac{h}{\ell_c}\right), \tag{64.3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

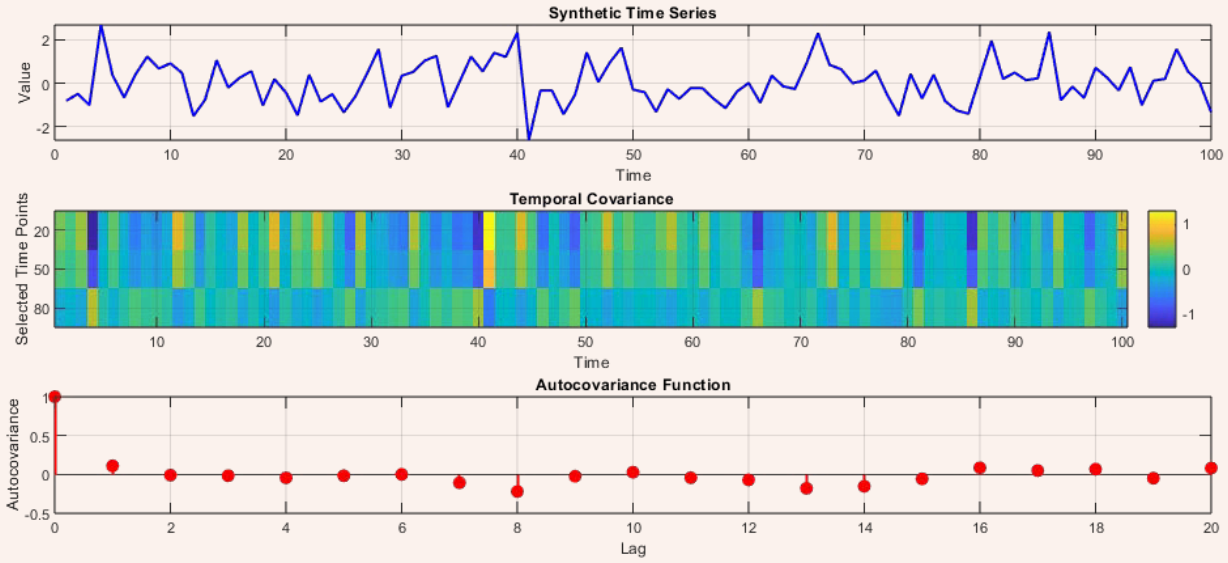
Onde ℓ_c é um comprimento de correlação. Pequeno ℓ_c produz rápida variação espacial; Grande ℓ_c produz amplas regiões que variam juntas. Anisotropia pode ser introduzida permitindo diferentes comprimentos de correlação em diferentes direções. Covariância espacial é essencial quando se atribui propriedades materiais a elementos finitos: Amostras independentes de elementos por elementos geralmente criam campos irrealmente ásperos.

64.3.2.3 Covariância temporal

13 Para um processo estocástico X_t,

$$C_X(t,s) = \mathbb{E}\big[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\big] \,. \tag{64.4}$$

Se o processo for fraco e estacionário, $C_X(t,s) = C_X(\tau)$ Depende apenas do atraso $\tau = |t-s|$.. Por exemplo, o processo autorregressivo estacionário de primeira ordem $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, com $|\phi| < 1$, tem uma autocovariância que decai geometricamente com atraso. O ruído branco é o caso limitante em que a autocovariância teórica é zero para cada defasagem não-zero; No entanto, amostras finitas mostram pequenas estimativas aleatórias em torno de zero.



14 A figura ilustra uma sequência estacionária simulada, uma exibição de covariância empírica e uma função estimada de autocovariância. Um produto empírico de um único par de observações não é, em si mesmo, uma estimativa de covariância; A covariância requer uma expectativa ou média sobre realizações repetidas ou origens temporais sob a suposição da estacionalidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64.3.2.4 Gerando amostras correlacionadas

15 Amostras independentes são inadequadas quando as entradas têm dependência significativa. Para variáveis Gaussianas conjuntas com matriz de correlação **R**Pode-se calcular um fator Cholesky **L** De tal forma que.. $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, gerar $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, e set

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}_\sigma \mathbf{L}\mathbf{z}, \tag{64.5}$$

Onde $\mathbf{D}_\sigma$ contém os desvios padrão marginais.

16 Para marginais não gaussianos, uma construção Gaussiana-cópula é frequentemente usada: Gerar variáveis normais padrão correlacionadas $\mathbf{z}_c = \mathbf{L}\mathbf{z}$Transformá-los em uniformes $u_i = \Phi(z_{c,i})$, e finalmente definir $x_i = F_i^{-1}(u_i)$.. A correlação prescrita é exata no espaço gaussiano latente; as correlações de Pearson resultantes no espaço físico podem diferir e requerer calibração. Mais dependência geral pode ser representada por outras cópulas ou por distribuições conjuntas diretamente estimadas.

64.3.3 Propagação da incerteza

17 A propagação da incerteza avalia como o modelo de entrada conjunta afeta a resposta do sistema estrutural. O método necessário depende do custo do modelo, não linearidade, dimensionalidade, a importância do comportamento da cauda, e se o objetivo é uma distribuição de saída completa ou apenas momentos selecionados e quantis.

64.3.3.1 Simulação de Monte Carlo (MCS)

18 A simulação de Monte Carlo é um procedimento numérico direto para propagação da incerteza.

1. Amostrar o modelo de entrada conjunta para $X_1, X_2, \ldots, X_n$, incluindo qualquer dependência prescrita;
2. avaliar $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ para cada realização;
3. estimar a distribuição de saída necessária, momentos, quantis, probabilidades de excedência ou probabilidades de falha da amostra resultante.

19 O método é conceitualmente simples e assintoticamente geral, mas sua convergência estatística é lenta e o custo computacional pode ser proibitivo quando cada avaliação de modelo é cara. Erro de amostragem deve ser avaliado em vez de inferido por uma única corrida.

64.3.3.2 Amostra de hipercubos latinos (LHS)

20 LHS melhora a cobertura estratificando cada distribuição marginal (Olsson e Sandberg, 2002). Para muitos modelos suaves, reduz a variância da amostragem em relação a uma

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

amostra aleatória simples de tamanho igual, embora o benefício dependa da função resposta e de como a dependência entre entradas é representada.

LHS é uma técnica de amostragem estratificada. Ele divide o CDF de cada entrada em N estratos de igualdade, seleciona um valor de cada estrato marginal, e combina os valores em N Vetores de entrada. A estratificação é exata em cada projeção unidimensional; A cobertura do espaço multidimensional depende do emparelhamento ou permutação das amostras marginais.

21 LHS frequentemente fornece estimativas úteis com menos avaliações de modelo do que amostragem aleatória simples, mas não por si só garante precisão; Convergência ainda deve ser verificada aumentando o tamanho da amostra ou repetindo o projeto.

1. Dividam as distribuições de entrada: Para cada variável de entrada X, dividir sua função de distribuição cumulativa (CDF) em N Intervalos de probabilidade iguais:

$$X_1, X_2, \ldots, X_N, \quad \text{onde } P(X_i) = \frac{1}{N}.$$

2. Amostragem Estratificada: Selecione um valor de cada estrato de probabilidade.
3. Combinar amostras de entrada: Para múltiplas variáveis de entrada $X_1, X_2, \ldots, X_n$, aleatoriamente permute as amostras para criar N Combinações únicas de entrada.
4. Execute simulações de modelos. Para cada vetor de entrada, avaliar

$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

5. Quantificar incerteza de saída: Use as saídas para calcular medidas estatísticas (§M.4.1)

22 Mesa 64.3 Compara Monte Carlo com Amostra de Hipercubo Latino.

23 Figura 64.1 ilustra as diferenças entre a amostragem clássica de Monte Carlo (MCS) e a amostragem latina de hipercubos (LHS) para dados bidimensionais.

1. No gráfico esquerdo (MCS), as amostras são distribuídas aleatoriamente, levando a agrupamentos perceptíveis em algumas regiões e lacunas em outras. Essa dispersão desigual reflete a aleatoriedade inerente do MCS, que não impõe cobertura uniforme através do espaço amostral.
2. No enredo certo (LHS), cada estrato marginal é representado exatamente uma vez. A permutação exibida também dá uma projeção bidimensional mais equilibrada, embora este grau de uniformidade multidimensional não seja garantido por cada projeto LHS.
3. As parcelas superiores correspondem a distribuições uniformes, e as inferiores à distribuição normal ($\mu = 0$, $\sigma = 0.3$).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 64.3: Comparação de MCS e LHS

Aspect	Amostra de Monte Carlo	Amostra de hipercubos latinos (LHS)
Cobertura marginal	Amostras podem se aglomerar e deixar lacunas.	Exatamente um ponto ocupa cada estrato de probabilidade marginal.
Eficiência	Método básico com teoria de convergência simples.	Muitas vezes reduz a variância para respostas suaves, mas o ganho é dependente do problema.
Dependência	Desenhe diretamente do modelo conjunto especificado.	Requer uma construção ou reordenação de dependência quando as entradas estão correlacionadas.
Verificação	Aumentar N ou repetir corridas independentes.	Aumentar N, repetir projetos, e verificar a sensibilidade à permutação ou projeto otimizado.

24 A comparação ilustra a principal vantagem do LHS: cobertura marginal controlada com uma amostra limitada. A precisão ainda depende do tamanho da amostra, modelagem de dependência, a função resposta e a permutação selecionada.

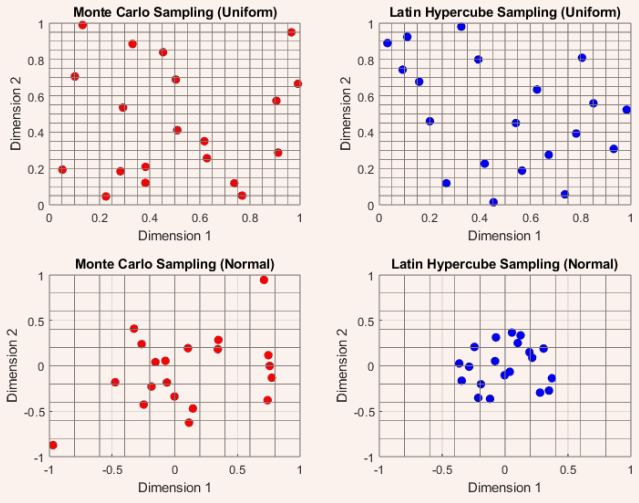


Figura 64.1: Comparação de MCS e LHS

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

25 O termo *Amostra de hipercubos latinos (LHS)* combina a ideia do quadrado latino de usar cada estrato uma vez com a representação hipercubo de um domínio multidimensional de entrada.

Quadrado latino: uma matriz combinatória em que cada símbolo ocorre exatamente uma vez em cada fileira e cada pilar. Por exemplo, em um 3×3 Quadrado latino:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

Cada linha e pilar tem exatamente uma ocorrência de A, B, e C, garantindo uma distribuição estratificada através da praça.

Este conceito foi adaptado para uma amostragem de alta dimensão, garantindo que cada amostra seja estratificada em todas as dimensões.

Hypercube: A extensão de um intervalo, quadrado e cubo para n Dimensões; representa o espaço normalizado da amostra de n Variáveis de entrada.

64.3.3.2.0.1 Ex 64.2: Hipercubo latino: Trabalhou como exemplo com duas variáveis

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considere um simples problema de duas variáveis: Modelo estrutural deslocamento Y em função de Módulo de Young E e carga aplicada P.. Nós presumimos:

$$E \sim \mathcal{N}\left(200\ \text{GPa}, (10\ \text{GPa})^2\right), \tag{64.6}$$
$$P \sim \mathcal{U}(10\ \text{kN}, 20\ \text{kN}), \tag{64.7}$$

E queremos gerar $N = 4$ Combinações únicas de entrada usando LHS.

Passo 1: Dividam as distribuições de entrada Por.. E (Distribuição normal), dividimos seu CDF em $N = 4$ Intervalos de probabilidade iguais:

$$\text{Intervals} : \left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Os quantis correspondentes a estes intervalos são:

$$\Phi^{-1}(0.125) \approx -1.150 \implies E_1 \approx 188.5\ \text{GPa}, \tag{64.8}$$
$$\Phi^{-1}(0.375) \approx -0.319 \implies E_2 \approx 196.8\ \text{GPa}, \tag{64.9}$$
$$\Phi^{-1}(0.625) \approx +0.319 \implies E_3 \approx 203.2\ \text{GPa}, \tag{64.10}$$
$$\Phi^{-1}(0.875) \approx +1.150 \implies E_4 \approx 211.5\ \text{GPa}. \tag{64.11}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Por.. P (distribuição uniforme), os intervalos e as amostras correspondentes são simples:

$$P_1 = 10 + 0.125 \times 10 = 11.25 \text{ kN}, \tag{64.12}$$
$$P_2 = 10 + 0.375 \times 10 = 13.75 \text{ kN}, \tag{64.13}$$
$$P_3 = 10 + 0.625 \times 10 = 16.25 \text{ kN}, \tag{64.14}$$
$$P_4 = 10 + 0.875 \times 10 = 18.75 \text{ kN}. \tag{64.15}$$

Passo 2-3: Amostragem Estratificada e Permutação Uma amostra é extraída de cada intervalo, então as amostras são aleatoriamente permutadas entre as variáveis para formar combinações únicas. Uma permutação aleatória dos índices produz:

Amostra	E (Gpa)	P (kN)	Notas
1	188.5	13.75	Dos intervalos 1 e 2
2	196.8	18.75	Dos intervalos 2 e 4
3	203.2	11.25	Dos intervalos 3 e 1
4	211.5	16.25	Dos intervalos 4 e 3

Esta permutação garante que cada intervalo marginal seja amostrado exatamente uma vez. Não garante espaçamento uniforme no espaço multidimensional completo, então permutações alternativas ou projetos otimizados de LHS podem fornecer melhores propriedades de projeção.

Passo 4: Correr Simulações de Modelo Para cada combinação, o modelo é avaliado. Suponha que o modelo deslocamento é:

$$Y = \frac{PL^3}{48EI}$$

Onde $L = 2$ m e.. $I = 1 \times 10^{-5}$ m^4 Estão consertados. As saídas são:

Amostra	E (Gpa)	P (kN)	Y (mm)
1	188.5	13.75	1.216
2	196.8	18.75	1.588
3	203.2	11.25	0.923
4	211.5	16.25	1.281

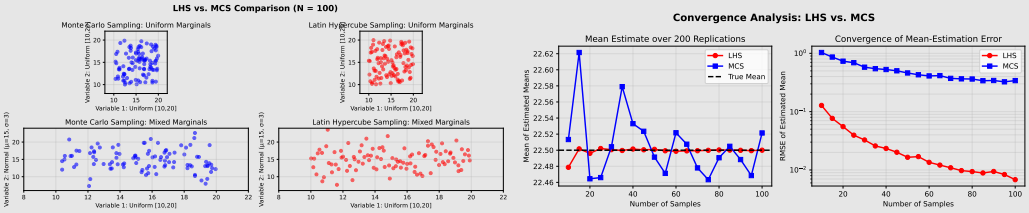
Passo 5: Quantificar incerteza de saída Da $N = 4$ Saídas:

$$\bar{Y} = \frac{1}{4}(1.216 + 1.588 + 0.923 + 1.281) \approx 1.252 \text{ mm}, \tag{64.16}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Y_i - \bar{Y})^2} \approx 0.236 \text{ mm}. \tag{64.17}$$

Com apenas $N = 4$ Amostras, esta estimativa é aproximada. Tamanhos maiores de amostras fornecem melhor convergência estatística.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



MATLAB®O código é dado em §I.5.7; Veja também §64.3.3.2.

64.3.3.3 Alternativas aproximadas e substitutas para amostragem direta

26 A simulação de Monte Carlo pode exigir muitas avaliações de modelos. As seguintes duas aproximações reduzem esse custo substituindo amostragem aleatória por um pequeno conjunto de avaliações prescritas. Sua economia é obtida por suposições mais fortes, então sua precisão deve ser verificada contra a não linearidade, dependência e dimensionalidade do problema.

64.3.3.3.1 Método de Estimativa de Pontos (PEM)

27 O termo *Método de estimativa de pontos* cobre várias aproximações relacionadas. A versão simples usada aqui é um projeto de dois níveis: Cada entrada é atribuída aos valores $\mu_i - k\sigma_i$ e.. $\mu_i + k\sigma_i$E o modelo é avaliado em todos os cantos. Não deve ser confundida com esquemas de previsão de momentos mais econômicos que usam apenas um número limitado de pontos ponderados.

A PEM funciona como segue:

1. Para cada variável de entrada X_i, identificar sua média μ_i e desvio padrão σ_i.
2. Defina dois valores para cada entrada: $\mu_i - k\sigma_i$ e.. $\mu_i + k\sigma_i$.
3. Avaliar o modelo em tudo 2^n Combinações de valores de entrada, onde n é o número de variáveis de entrada.
4. Calcular a média de saída, variância e outros momentos estatísticos baseados nas avaliações do modelo.

28 O projeto de canto pode expor a resposta sobre uma faixa prescrita de dois níveis, mas geralmente não reproduz o distribuição de probabilidade das entradas originais ou momentos de saída de alta ordem. O valor selecionado de k E os pesos de ponto devem ser declarados. Seu custo também cresce exponencialmente com o número de entradas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64.3.3.3.1.1 Ex 64.3: Exemplo do Método Estimativo de Pontos

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Um sistema tem duas variáveis de entrada:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$:. média = 10, desvio padrão = 2.
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$:. Média = 20, desvio padrão = 3.

A saída do sistema é dada por:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

Gol: Use o Método de Estimativa de Pontos (PEM) para estimar a média e variância do Y.

Passos:

1. Defina dois valores para cada variável de entrada:

$$X_1 = \mu_{X_1} \pm \sigma_{X_1}, \quad X_2 = \mu_{X_2} \pm \sigma_{X_2}.$$

2. Avaliar a função $Y = X_1^2 + 3X_2$ em todas as combinações de X_1 e.. X_2:

$$Y = f(X_1, X_2), \quad \text{for } (X_1, X_2) \in \{(8, 17), (8, 23), (12, 17), (12, 23)\}.$$

3. Com pesos iguais nos quatro cantos, computar os momentos aproximados:

$$\widehat{\mu}_Y = 164, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

Para comparação, os momentos exatos sob as entradas declaradas independentes normais são $\mu_Y = 164$ e.. $\mathrm{Var}(Y) = 1713$.. O acordo está próximo deste exemplo quadrático, mas não é garantido para uma resposta geral não linear.

64.3.3.3.2 Um de cada vez (série de Taylor-diferença finita estimativa TSFD)

29 Esta abordagem simplificada começa com uma expansão Taylor de primeira ordem sobre o vetor dos meios de entrada e mantém apenas termos lineares (Benjamin e Cornell, 1970). É, portanto, mais confiável quando a resposta é localmente suave e apenas levemente não linear ao longo da gama de interesse.

$$\mu_F \approx F(\boldsymbol{\mu})$$

Onde $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de entradas. Essa igualdade é uma aproximação de primeira ordem. para uma resposta não linear, $\mathbb{E}[F(\mathbf{X})]$ Não precisa ser igual $F(\mathbb{E}[\mathbf{X}])$.. Para as variáveis aleatórias independentes, a aproximação de variância da primeira ordem é

CÓPIA PARA REVISÃO

$$
\begin{aligned}
Var(F) = \sigma_F^2 &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 \\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &\approx \frac{F_i^+ - F_i^-}{2\sigma_i} \\
F_i^+ &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i + \sigma_i, \cdots, \mu_n) \\
F_i^- &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i - \sigma_i, \cdots, \mu_n)
\end{aligned}
$$

Onde σ_i são os desvios padrão das variáveis. Por isso,

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{F_i^+ - F_i^-}{2} \right)^2}$$

30 O procedimento (Bryant, Brokaw e Mlakar, 1993) pode ser resumido da seguinte forma:

1. Faça uma análise inicial com todas as variáveis em suas médias. A resposta resultante é a aproximação de primeira ordem para a média de saída.
2. Atue $2n$ Análises, nas quais todas as variáveis são definidas iguais aos seus valores médios, exceto variáveis i, que assume um valor igual a $\mu_i + \sigma_i$, e então $\mu_i - \sigma_i$.. Por isso, este método requer $2n + 1$ Análises.
3. Para cada variável x_i, computar a contribuição assinada de primeira ordem $c_i = (F_i^+ - F_i^-)/2$.. Sua magnitude fornece uma indicação local de sensibilidade a essa variável.
4. Para variáveis independentes, esquadrinhar as contribuições, adicioná-las, e tomar a raiz quadrada: $\sigma_F \approx \sqrt{\sum_i c_i^2}$.. Para variáveis correlacionadas, as covariâncias correspondentes devem também ser incluídas.
5. Ordene os resultados em ordem decrescente e forme o chamado diagrama de Tornado.

31 Como o TSFD é local, a escala de perturbação e o modelo de probabilidade adotado devem ser relatados. A $\pm\sigma_i$ O estudo só tem significado quando σ_i é uma medida de incerteza defensável e a resposta permanece suficientemente suave durante esse intervalo.

64.3.3.3.2.1 Ex 64.4: Taylor Series Diferença finita Método Exemplo

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Use as mesmas entradas e respostas normais independentes como no exemplo anterior da PEM:

$$X_1 \sim N(10, 2^2), \qquad X_2 \sim N(20, 3^2), \qquad Y = X_1^2 + 3X_2.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

No ponto médio,

$$\widehat{\mu}_Y = F(10, 20) = 160.$$

As duas contribuições de diferença finita são

$$c_1 = \frac{F(12, 20) - F(8, 20)}{2} = \frac{204 - 124}{2} = 40,$$
$$c_2 = \frac{F(10, 23) - F(10, 17)}{2} = \frac{169 - 151}{2} = 9.$$

Portanto,

$$\widehat{\sigma}_Y = \sqrt{40^2 + 9^2} = 41, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

Os exatos momentos são $\mu_Y = 164$ e.. $\mathrm{Var}(Y) = 1713$.. O método de primeira ordem falha a correção média causada pelo termo quadrático e subestima ligeiramente a variância; a comparação ilustra tanto sua economia quanto sua limitação local-linear.

64.3.3.3.3 Expansão do caos polinomial (PCE)

32 Expansão do Caos Polinomial (PCE) é um método usado na quantificação da incerteza para representar variáveis aleatórias ou funções estocásticas como uma série de polinômios ortogonais.

33 Conceitos-chave no PCE:

Representação Espectral A representação espectral refere-se a expressar uma função em termos de uma série de funções de base, semelhante a como as séries de Fourier representam sinais usando funções seno e cosseno. No PCE, as funções básicas são *Polinomiais ortogonais*, adaptado ao distribuição de probabilidade da variável aleatória de entrada.

Polinomiais ortogonais Polinômios ortogonais formam as funções de base no PCE. Estes polinômios são ortogonais em relação a uma determinada função de peso, que corresponde ao distribuição de probabilidade da variável aleatória. Exemplos incluem:

- *Lendre Polinomials*:. Usado para variáveis aleatórias com distribuições uniformes.
- *Polinômios hermitas*:. Usado para variáveis aleatórias com distribuições normais (Gaussian).
- *Laguerre Polinomiais*:. Usado para variáveis aleatórias com distribuições exponenciais.

Variável aleatória e função de resposta A *variável aleatória* é uma entrada que segue um determinado distribuição de probabilidade (por exemplo, uniforme, normal). O *função de resposta* é a saída determinística de um sistema dependente da variável aleatória. Por exemplo, se x É uma variável aleatória, a função de resposta pode ser $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$.

Coeficientes de PCE Os coeficientes no PCE quantificam a contribuição de cada termo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

polinomial na aproximação da função de resposta. Estes coeficientes são calculados usando técnicas como ajuste de mínimos quadrados para minimizar o erro entre a função real e sua aproximação polinomial.

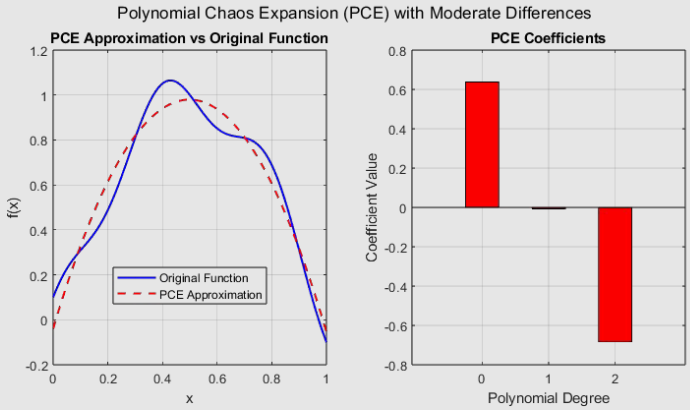
64.3.3.3.3.1 Ex 64.5: Expansão do caos polinomial

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considere a função de resposta $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$, onde x é uniformemente distribuído sobre $[0, 1]$.. Nós aproximamos f usando polinômios de Legendre deslocados, equivalentes aos comuns $2x - 1$Para que a base seja ortogonal em relação à densidade uniforme $[0, 1]$.

1. Gere a variável aleatória: Um conjunto de amostras aleatórias uniformemente distribuídas x no intervalo $[0, 1]$.
2. Construir Funções de Base: Use polinômios de Legendre deslocados $[0, 1]$, ou equivalentemente comum Legendre polinômios avaliados em $2x - 1$, até um grau especificado.
3. Calcular Coeficientes de PCE: Encaixe os coeficientes da expansão usando o método dos mínimos quadrados.
4. Aproxime a função: Combine as funções de base com seus coeficientes correspondentes para aproximar $f(x)$.

Os resultados do PCE podem ser visualizados da seguinte forma:



Trama de comparação: Um enredo comparando a função original $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ e sua aproximação com o PCE. A função original é mostrada como uma linha azul contínua, enquanto a aproximação do PCE é representada como uma reta vermelha tracejada. A aproximação é razoavelmente precisa, mas se desvia ligeiramente devido à complexidade da função original e ao limitado grau polinomial usado na expansão. Isso destaca o comércio entre simplicidade computacional e precisão de aproximação no PCE.

Coeficiente Traço: Um gráfico de barras mostrando os coeficientes do PCE para cada grau polinomial. As alturas das barras indicam a importância relativa de cada termo na expansão da série. Para esta resposta particular e grau polinomial, os coeficientes de ordem inferior dominam. Esse padrão não é universal. gradientes agudos, descontinuidades ou oscilações podem exigir termos de ordem mais alta.

CÓPIA PARA REVISÃO

64.3.4 Interpretação da incerteza de saída

34 Uma vez que a distribuição de resposta foi propagada, a análise da incerteza traduz em quantidades que levam diretamente à questão da engenharia. A incerteza de saída não se limita a momentos. Dependendo da decisão, resumos úteis incluem densidade de probabilidade e funções cumulativas de distribuição, médias e variâncias, previsão ou intervalos credíveis, quantis, probabilidades de excedência e probabilidades de falha. Uma resposta média pode ser adequada para a comparação de nível de serviço, enquanto avaliação de um estado limite normalmente requer atenção à cauda relevante da distribuição.

35 A medida reportada deve corresponder à sua interpretação. Um intervalo de confiança descreve incerteza em uma quantidade populacional estimada; um intervalo de previsão descreve o alcance de uma observação futura sob o modelo adotado; e um intervalo credível Bayesiano descreve probabilidade posterior para uma quantidade incerta condicionada ao modelo, dados e suposições anteriores. Esses intervalos respondem a diferentes perguntas e não devem ser usados de forma intercambiável.

36 Um UA defensável também relata as suposições que controlam o resultado: as distribuições marginais adotadas e modelo de dependência, tratamento do erro de medição e discrepância do modelo, convergência numérica ou amostral, e a sensibilidade da conclusão para hipóteses plausíveis alternativas. Onde a decisão depende de uma pequena probabilidade de falha, o analista deve demonstrar que o método de amostragem ou aproximação resolve a cauda relevante com precisão adequada ao invés de confiar apenas em momentos globais.

37 Propagação estabelece *Quanto* A resposta pode variar; Análise de sensibilidade estabelece *Por quê*.. A seção seguinte, portanto, reparti a variabilidade de saída entre os inputs incertos e identifica aqueles que exigem uma melhor caracterização, retenção explícita em análises subsequentes, ou eventual identificação dos parâmetros.

64.4 Análise de Sensibilidade

38 A propagação da incerteza pergunta o quanto a saída pode variar. A análise da sensibilidade pergunta por que ela varia. A distinção é essencial: Dois modelos podem ter a mesma variância de saída, mas parâmetros de controle muito diferentes.

39 Métodos de sensibilidade podem ser organizados em quatro grupos:

- **Derivados locais ou métodos de uma vez**, que descrevem a resposta perto de um ponto inicial selecionado;
- **Métodos de triagem globais**, como Morris, que identificam eficientemente entradas insignificantes e influentes em todo o domínio completo;

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Métodos baseados em variância global**, tais como os índices de Sóbol, que alocam variância de saída para efeitos principais e interações;
- **Resumos gráficos**, como os diagramas de tornados, que exibem o alcance induzido por perturbações prescritas uma de cada vez.

40 Nenhum método é universalmente melhor. A triagem é apropriada quando o modelo tem muitas entradas e cada avaliação é cara. Índices baseados em variância fornecem uma decomposição mais completa, mas requerem substancialmente mais avaliações. Derivados locais são baratos, mas podem perder o comportamento não linear e interações longe do ponto de base.

64.4.1 Método Morris

41 O método Morris é uma técnica global de rastreamento para modelos com muitos insumos incertos e avaliações caras (Morris, 1991). Distribui perturbações únicas por todo o espaço de entrada admissível, retendo assim grande parte da economia local diferenças finitas enquanto detecta mudanças na sensibilidade longe de uma única linha de base. Suas principais saídas classificam variáveis influentes e sinalizam possíveis não linearidades ou interações; Eles não constituem uma decomposição completa da variância.

Método original de Morris

42 A abordagem de estimativa da série Taylor-Diferença finita (TSFD) perturba uma variável aleatória (RV) de cada vez (geralmente por $\pm\sigma$), como descrito anteriormente. Esta abordagem, referida como o método One-at-a-Time (OAT), serve de base para a extensão *Método Morris*.

43 O projeto de efeitos elementares muda um trailer de cada vez ao longo de cada trajetória, mas a coleção de efeitos é global porque as trajetórias começam em diferentes locais no espaço de entrada. Índices Morris não isolam termos de interação individuais; Ao invés disso, uma grande dispersão dos efeitos elementares indica não linearidade, interações com outros VDs, ou ambos. A influência de cada RV é resumida através **Efeitos elementares (EEs)**.

44 No método Morris, EEs são calculados para cada RV e agem como indicadores de sensibilidade. Um grande valor EE significa que o RV correspondente tem uma influência substancial na saída do modelo. O primeiro passo no método Morris envolve selecionar aleatoriamente pontos iniciais no discreto hiperespaço dos VRs. Esses pontos são retratados como círculos pretos preenchidos na Figura 64.2.

45 Freqüentemente, o conjunto de k RVs para um ponto inicial é representado no hiperespaço quantile, onde:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m}, \tag{64.18}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

com X_i^j como o j^{th} Um valor discreto do i^{th} RV, F_i como sua função de distribuição cumulativa (CDF), $i = [1 : k]$, $j = [1 : m]$, e m como o número de níveis discretos no CDF.

46 O segundo passo envolve perturbar um trailer por um pequeno incremento Δ, mantendo todos os outros trailers consertados.

47 O terceiro passo aplica a mesma perturbação Δ para outro trailer, repetindo o processo até que todos k Os trailers foram perturbados uma vez. Estes passos são ilustrados como círculos vermelhos preenchidos na figura 64.2.. A sequência em que os trailers estão perturbados, bem como a direção da perturbação ($+\Delta$ ou $-\Delta$), é escolhido aleatoriamente.

48 Para um sistema com k RVs, uma única trajetória requer $k + 1$ Avaliação do modelo (ilustrada por flechas vermelhas na Figura) 64.2). If r trajetórias são usadas, o número total de avaliações torna-se $r \times (k + 1)$.. Os EEs para cada VD em uma trajetória são calculados usando a seguinte equação:

$$EE_i = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k)}{\Delta}, \tag{64.19}$$

Onde EE_i é o efeito elementar para i^{th} RV, e $f(x_i)$ é a saída do modelo correspondente ao valor do RV x_i.

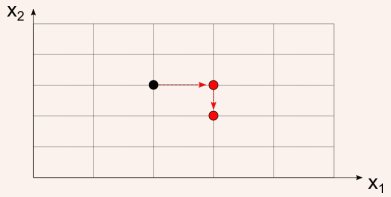


Figura 64.2: Exemplo de uma trajetória para $k = 2$.

49 Morris (Morris, 1991) propôs duas medidas de sensibilidade baseadas nos EEs:

- O **Quer dizer** dos EEs (μ_i), o que indica o impacto geral do i^{th} RV na saída.
- O **desvio padrão** dos EEs (σ_i), que reflete a contribuição da i^{th} RV para não linearidade ou interações com outros RVs.

50 Para lidar com possíveis efeitos de cancelamento quando EEs têm valores positivos e negativos, a média dos valores absolutos dos EE (μ_i^*) é comumente usado em vez de μ_i.. Esta modificação garante que as medidas de sensibilidade permaneçam robustas mesmo quando EEs exibem sinais opostos.

Método Morris Melhorado

51 As trajetórias geradas aleatoriamente Morris podem se sobrepor ou agrupar, especialmente em uma grade grossa. Avaliações repetidas ou espaçadas reduzem a diversidade

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

do espaço de entrada explorado e podem tornar os índices estimados menos estáveis para um orçamento computacional fixo.

52 Figura 64.2 introduziu uma única trajetória. Figura 64.3 mostra o fenômeno adicional de interesse: trajetórias geradas independentemente podem coincidir ou se aglomerar, reduzindo assim a diversidade do espaço de entrada explorado.

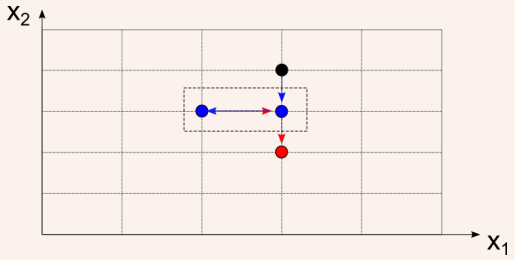


Figura 64.3: Sobrepondo ou aglomerando pontos de diferentes trajetórias Morris.

53 Trajetória de preenchimento espacial e variantes de pontos radiais foram propostas (Sohier, Farges e Piet-Lahanier, 2014). Seu objetivo é reduzir a sobreposição evitável e melhorar a cobertura; Eles não podem garantir que cada característica não linear da resposta seja amostrada.

54 **Mapeando trailers para o espaço quantílico.** Na abordagem melhorada:

- Todos k Os trailers são transformados em um espaço quantil normalizado $[0, 1]$, onde cada dimensão corresponde à função de distribuição cumulativa (CDF) $F_i(X_i^j)$ do trailer.
- O j^{th} quantile valor do i^{th} O trailer é dado por:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m},$$

  Onde m é o número de níveis discretos. Este mapeamento garante uma representação uniforme das variáveis em seus intervalos, independentemente de suas distribuições originais.

Este processo de mapeamento está ilustrado na figura 64.4.

55 A estratégia de amostragem melhorada inclui:

- *Amostra de hipercubos latinos (LHS):* Pontos iniciais são escolhidos usando LHS para melhorar a cobertura do espaço de entrada e reduzir a probabilidade de selecionar pontos de partida idênticos ou sobrepostos.
- *Tamanho fixo do passo (Δ):* Um degrau fixoΔ = 0.5) no espaço quântico garante perturbações consistentes através de trajetórias. Perturbações são aplicadas em um **Ordem fixa** ao invés de aleatoriamente, evitar sobreposições.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

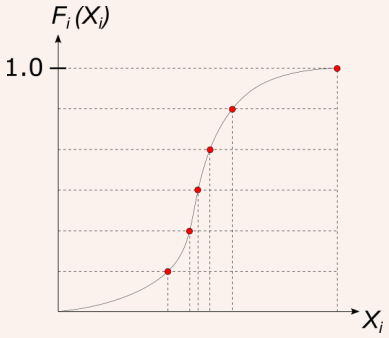


Figura 64.4: Variável aleatória e sua função de distribuição cumulativa (CDF).

56 **Tamanhos alternativos.** Sohier, Piet-Lahanier e Farges, 2015 introduziu tamanhos alternados de passos ($\Delta = 0.5$ e.. $\Delta = 0.375$) para lidar com respostas periódicas ou oscilatórias de forma eficaz. Figura 64.5 mostra um exemplo em que um tamanho fixo não consegue captar a variabilidade de uma resposta periódica do modelo.

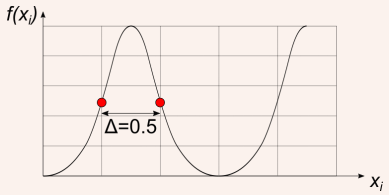


Figura 64.5: Resposta periódica de uma variável aleatória x_i.. Tamanhos fixos podem não detectar variações periódicas.

57 **Desenho de ponta radial.** Um novo refinamento substitui cada trajetória por perturbações de um centro comum:

- Em vez de construir uma trajetória por variáveis seqüencialmente perturbadoras, o método melhorado usa um ponto central no espaço quântico.
- Cada variável é perturbada independentemente deste centro, eliminando redundâncias e melhorando a eficiência da amostragem.

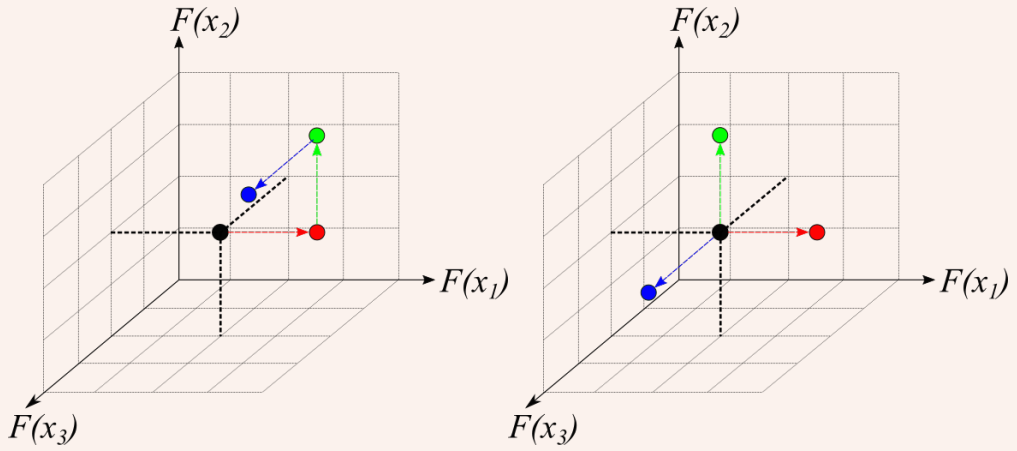
Figura 64.6 compara a abordagem tradicional baseada em trajetória (a) com a abordagem de ponto radial (b).

58 Em resumo, o método Morris melhorado incorpora as seguintes melhorias chave:

- Mapeando para o espaço quântico: Garante uma representação uniforme das variáveis.
- Inicialização do LHS: Melhora a cobertura marginal e pode reduzir a sobreposição.
- Tamanhos fixos ou alternantes: Reduz o risco de que um único passo perca características de resposta selecionadas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Trajetória (b) Pontos radiais

Figura 64.6: Comparação dos métodos de trajetória (a) e ponto radial (b) $k = 3$ RVs em hiperespaço quântico.

- Amostragem de pontos radiais: Evita a dependência sequencial dos passos de trajetória e pode reduzir avaliações redundantes.

Esses refinamentos podem melhorar a cobertura espacial e reduzir avaliações redundantes. Seu benefício deve ser avaliado para a resposta na mão, particularmente quando periodicidade, descontinuidades, ou interações fortes são plausíveis.

64.4.1.1 Ex 64.6: Método Morris

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considere o mesmo sistema dos exemplos anteriores:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

onde as entradas são:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$:. média = 10, desvio padrão = 2.
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$:. Média = 20, desvio padrão = 3.

O objetivo é usar o método Morris para identificar os efeitos elementares de X_1 e.. X_2 na saída Y.

Passos do Método Morris

1. Normalizar os intervalos de entrada para $[0, 1]$.
2. Gere um ponto de base $\mathbf{X}_{\text{baseline}}$.
3. Perturbe uma variável de entrada de cada vez por um tamanho de passo Δ, mantendo os outros constantes.

CÓPIA PARA REVISÃO

4. Calcular os efeitos elementares para cada variável como:

$$EE = \frac{f(\mathbf{X}_{+i}) - f(\mathbf{X})}{\Delta},$$

   Onde $\mathbf{X}_{+i}$ é a entrada perturbada.
5. Repetir para múltiplas trajetórias e resultados agregados (média e desvio padrão de EE).

64.4.2 Índices de Sensibilidade Baseados em Variância Sóbol

59 Índices de Sóbol fornecem uma decomposição global da variância de saída para um modelo

$$Y = g(X_1, \ldots, X_k), \tag{64.20}$$

com entradas mutuamente independentes. Sob condições de integração quadrada padrão, a resposta pode ser escrita como a decomposição funcional da análise de variância

$$g(\mathbf{X}) = g_0 + \sum_i g_i(X_i) + \sum_{i<j} g_{ij}(X_i, X_j) + \cdots + g_{1\cdots k}(X_1, \ldots, X_k), \tag{64.21}$$

e a variância se decompõe em contribuições ortogonais,

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \cdots + V_{1\cdots k}. \tag{64.22}$$

Esta decomposição é a base dos índices de sensibilidade globais introduzidos por Sobol', 2001.

64.4.2.1 Índices de primeira ordem

60 A contribuição de primeira ordem da entrada X_i É

$$V_i = \mathrm{Var}_{X_i}(\mathbb{E}[Y \mid X_i]), \tag{64.23}$$

E seu índice de Sobol normalizado é

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}. \tag{64.24}$$

Assim S_i é a fração da variância de saída explicada pela mudança X_i Sozinho, em média sobre as distribuições de todas as outras entradas. Sim $S_i = 0.60$, o principal efeito de X_i Conta com 60% da variância de saída.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64.4.2.2 Interação e índices de efeito total

61 Um índice de segunda ordem $S_{ij} = V_{ij}/V(Y)$ Mede a variância causada pela interação de X_i e.. X_j Isso não é atribuído a nenhum dos efeitos principais. Índices de ordem mais alta são definidos da mesma forma. Para entradas independentes,

$$\sum_i S_i + \sum_{i<j} S_{ij} + \cdots + S_{1\cdots k} = 1. \tag{64.25}$$

Consequentemente, $1 - \sum_i S_i$ é a contribuição combinada de todas as interações.

62 O índice de efeito total reúne todos os termos de variância envolvendo X_i:

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\mathrm{Var}_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\mathbb{E}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}])}{V(Y)} \tag{64.26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{X}_{\sim i}}\left(\mathrm{Var}_{X_i}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}]\right)}{V(Y)}, \tag{64.27}$$

Onde $\mathbf{X}_{\sim i}$ Denota todas as entradas, exceto X_i.. A diferença $S_{T_i} - S_i$ Mede até que ponto X_i participa de interações.

64.4.2.3 Interpretação

- Um grande S_i indica um forte efeito direto.
- Um grande S_{T_i} com um pequeno S_i indica que a variável importa principalmente através de interações.
- If S_{T_i} está perto de zero, X_i geralmente pode ser corrigido em qualquer lugar dentro de sua distribuição prescrita com pouco efeito na variância da saída.
- Se a soma dos índices de primeira ordem está próxima de um, o modelo é quase aditivo sobre o domínio investigado.

64.4.2.4 Computação e custo

63 Índices de sobol são comumente estimados com matrizes de amostragem emparelhadas e avaliações de ”pick–congelar’. Um projeto frequentemente usado requer aproximadamente $N(k + 2)$ Avaliação do modelo para estimar todos os índices de primeira ordem e efeito total para k Entradas; Estimar todos os índices de segunda ordem geralmente aumenta o custo para aproximadamente $N(2k + 2)$ (Saltelli, 2002). Como os índices são estimativas de Monte Carlo, convergência deve ser verificada e intervalos de confiança devem ser relatados quando possível.

64 O método pode se tornar proibitivo quando cada análise não linear é cara. Modelos substitutos, expansões do caos polinomial ou modelos de ordem reduzida podem ser montados primeiro, com os índices Sobol avaliados na barriga após sua precisão preditiva ter sido verificada.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

64.4.2.5 Relação com a exibição de Morris

65 Os métodos Morris e Sobol respondem a perguntas relacionadas, mas diferentes. Morris é principalmente um método de triagem: com $r(k+1)$ avaliações que classificam as entradas usando μ_i^* e indica possível não linearidade ou interações através de σ_i.. A análise de Sóbol é uma decomposição quantitativa da variância: Separa contribuições diretas e totais, mas geralmente requer muito mais avaliações. Uma sequência prática é, portanto, usar Morris para remover entradas desprezíveis e então aplicar a análise Sobol ao conjunto reduzido.

66 A decomposição clássica na equação 64.22 Assume entradas independentes. Com entradas correlacionadas, efeitos principais e de interação não são mais separados pela decomposição clássica da ANOVA. Índices condicionais ou agrupados, ou medidas de alocação como efeitos Shapley, então devem ser considerados; no mínimo, o modelo de dependência deve ser explicitamente declarado.

64.4.3 Comparação dos métodos de propagação e sensibilidade

67 Mesa 64.4 Distingue os métodos de propagação da incerteza dos métodos de sensibilidade. Amostragens como LHS podem apoiar qualquer tarefa, mas não são medidas de sensibilidade por si só.

Tabela 64.4: Comparação de métodos de incerteza e sensibilidade

Método	O papel principal	Custo típico	Interações	Limitação principal
Monte Carlo	Incerteza de saída	N Avaliação	Capturado implicitamente	Convergência estatística lenta para modelos caros
LHS	Desenho de amostragem para UQ ou SA	N Avaliação	Capturado através do modelo avaliado	O ganho de eficiência depende da resposta e do tratamento de dependência
TSFD/OAT de primeira ordem	Propagação e classificação locais	$2k+1$ Avaliação	Não resolvido	Válido apenas perto da linha de base; Fraco por forte não linearidade
Design de canto de dois níveis	Tempos de saída aproximados	2^k Avaliação	Incluído em cantos amostrados	Crescimento exponencial e representação bruta de dois níveis
Morris	Rastreio global	$r(k+1)$ Avaliação	Indicado em conjunto com não linearidade através σ_i	Não aloca contribuições de interação separadas
Sobol	Descomposição da variância global	Aproximadamente $N(k+2)$ Para os primeiros e totais índices	Quantificado através de primeiro, maior e efeitos totais	Alto custo computacional; Forma clássica assume entradas independentes

64.4.4 Determinação de importantes variáveis aleatórias

68 A triagem padrão de Morris é geralmente interpretada através μ_i^* e.. σ_i.. O procedimento de ponto radial modificado usado no exemplo seguinte introduz uma regra adicional de

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

limiar (Gakuhari, 2021). Porque esta regra é específica para esse procedimento, não deve ser apresentada como parte do método universal Morris.

69 Vamos M_i^* ser o maior efeito elementar absoluto observado para o trailer i.. Em cada atualização:

1. Ordenar o M_i^* valores em ordem crescente e definir lacunas adjacentes $d_j = M^*_{(j+1)} - M^*_{(j)}$.
2. Vamos $d^{(q)}_{\max} = \max_j d_j$ Após atualização q.. Continuar a inicialização até três valores consecutivos satisfazerem

$$\min\left(d^{(q-2)}_{\max}, d^{(q-1)}_{\max}, d^{(q)}_{\max}\right) \geq \frac{1}{2}\max\left(d^{(q-2)}_{\max}, d^{(q-1)}_{\max}, d^{(q)}_{\max}\right). \tag{64.28}$$

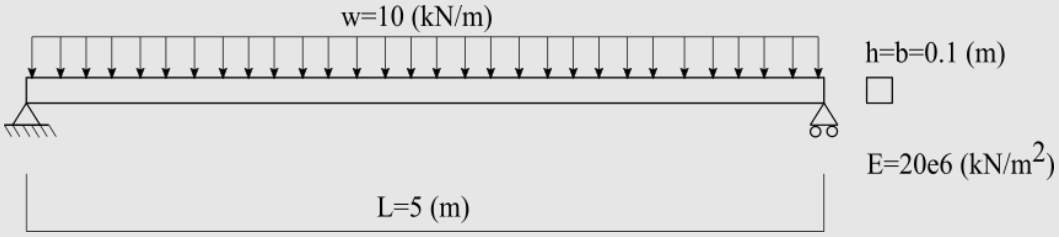
3. Após a inicialização, escaneie os valores ordenados da extremidade de baixa sensibilidade e coloque o limiar na primeira abertura adjacente satisfazendo $d_j \geq d_{\max}/10$.. Variáveis acima do limiar são classificadas provisoriamente como importantes.
4. Recomponha efeitos elementares para variáveis abaixo do limiar. Se a classificação mudar, restaure a nova variável admitida e repita a atualização anterior.

64.4.4.1 Ex 64.7: Método Morris. identificação de variáveis importantes

De.. Gakuhari, 2021

O procedimento de ponto radial modificado é ilustrado com um biapoiado viga submetido a um carga uniformemente distribuída. A quantidade de interesse é o máximo vertical deslocamento no midspan.

A carga uniforme w, viga comprimento L, e altura da seção h são tratados como RV1, RV2 e RV3, respectivamente. Cada um tem uma distribuição normal com um coeficiente de variação de 10%, e a corrida máxima M_i^* dos efeitos elementares absolutos são avaliados.



Como a saída desta análise é a deformação vertical no centro da viga, o impacto de cada VD pode ser avaliado com antecedência pelas seguintes equações:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

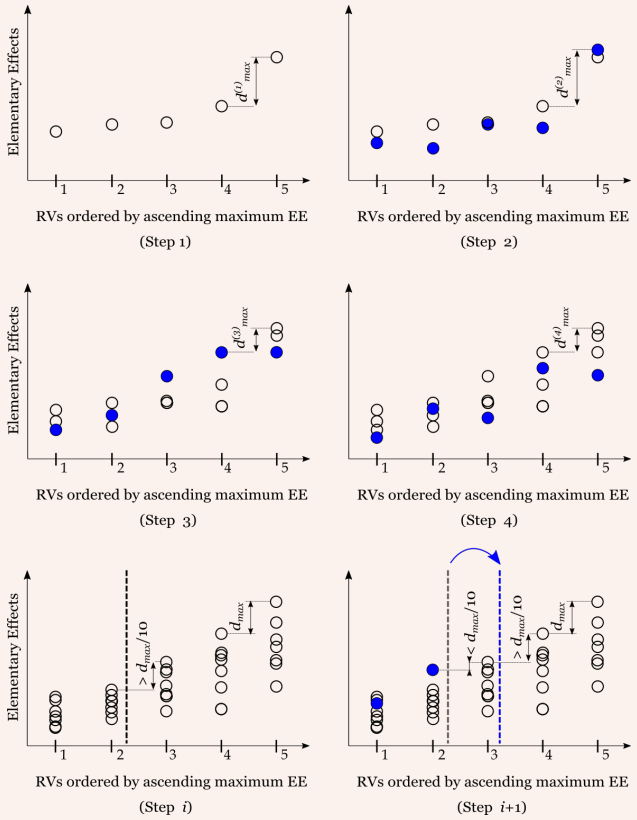


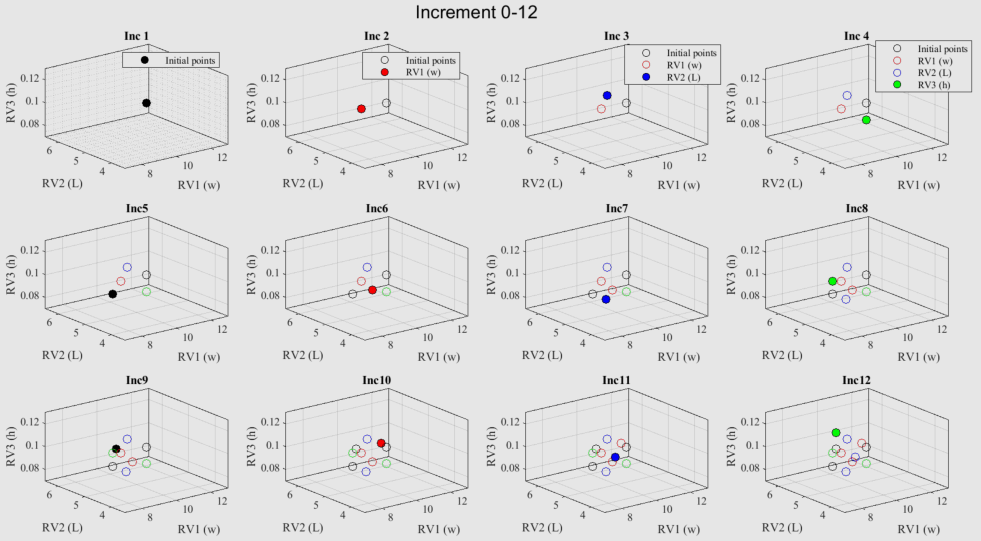
Figura 64.7: Inicialização e pós-inicialização no procedimento de rastreamento do ponto radial modificado

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{bh^3}{12} \\
\delta &= \frac{5wL^4}{384EI} \\
&= \frac{5wL^4}{32Ebh^3}
\end{aligned}
\tag{64.29}
$$

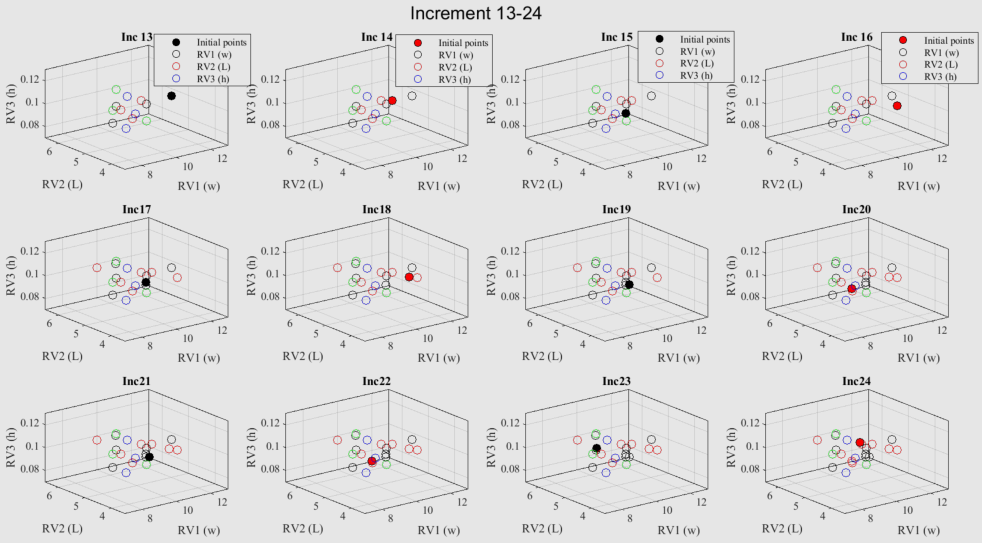
Os expoentes analíticos antecipam o ranking: L (RV2) deve dominar porque $\delta \propto L^4$, seguido por h (RV3), para o qual $\delta \propto h^{-3}$.. A carga w (RV1) entra linearmente.

Os painéis abaixo mostram, no espaço quântico $[0, 1]$, os pontos selecionados em sucessivas avaliações de efeitos elementares. Cada linha de inicialização adiciona um centro e três pontos radiais, produzindo um efeito elementar para cada RV. Três dessas atualizações fornecem $d_{\max}^{(1)}$, $d_{\max}^{(2)}$, e $d_{\max}^{(3)}$.. Porque a condição de estabilidade na Equação 64.28 Está satisfeito, as extremidades de inicialização no incremento 12 e RV2 e Rv3 são provisoriamente classificadas como importantes.

CÓPIA PARA REVISÃO



Inicialização

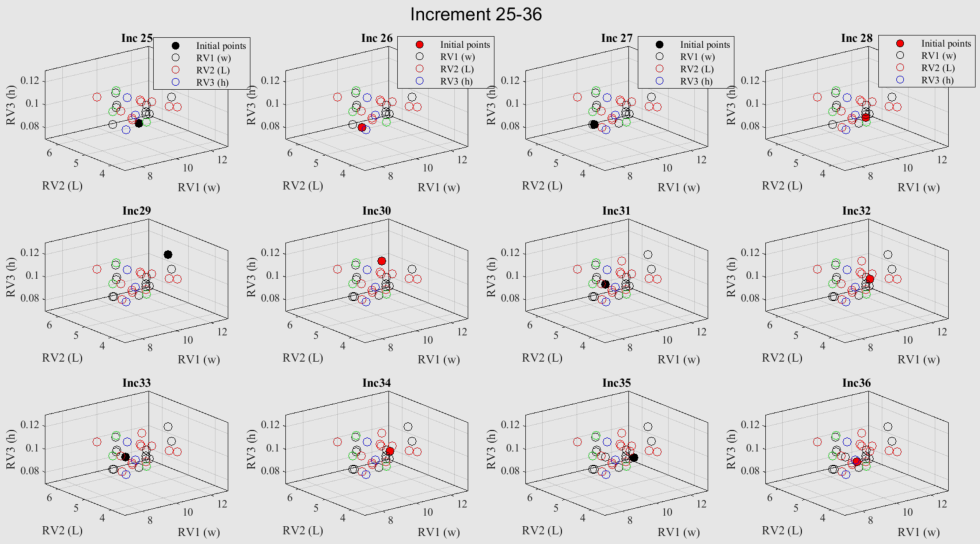


Pós-inicialização (RV2 e RV3 são fixos)

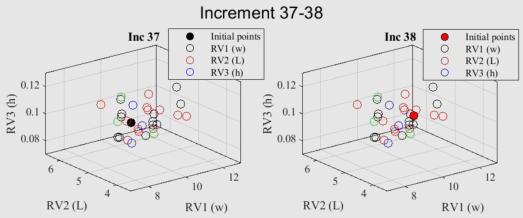
RVs selecionados em seu espaço quântico (Inc=0-24)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Pós-inicialização (RV2 e RV3 são fixos)



Pós-inicialização (RV2 e RV3 são fixos)

RVs selecionados em seu espaço quântico (Inc=25-38)

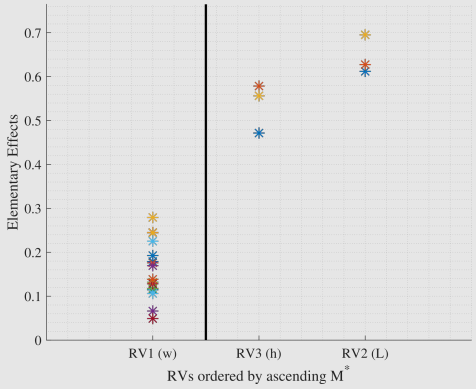
Após a inicialização, RV2 e RV3 permanecem no conjunto importante; As avaliações posteriores pós-inicialização concentram-se no RV1 para determinar se sua classificação muda.

O orçamento prescrito é $(n_{\text{RV}} + 1) \times 10 = 40$ Avaliação de efeitos elementares (Sohier, Farges e Piet-Lahanier, 2014). Como as duas avaliações finais correspondem a RV2 e RV3, que já foram retidas, nenhuma informação de classificação adicional é obtida deles e o procedimento ilustrado para no incremento 38.

O ranking resultante concorda com a Equação 64.29:. viga comprimento tem a maior influência sobre deslocamento, seguido pela altura da seção, enquanto o carga uniformemente distribuída tem a menor influência baseada em expoentes sobre faixas relativas comparáveis.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Resultados do teste simples.

64.4.5 Diagramas de Tornado

70 Um diagrama de tornados é um resumo gráfico de um estudo único. Para cada entrada, o modelo é avaliado em valores baixos e altos selecionados enquanto todas as outras entradas permanecem na linha de base. O intervalo de saída resultante é traçado como uma barra horizontal, e as barras são ordenadas por comprimento.

71 Diagramas de Tornado são fáceis de explicar e úteis para triagem preliminar, mas eles são locais para a linha de base selecionada e intervalos. Eles não revelam por si mesmos interações, e seu ranking pode mudar quando a linha de base ou o intervalo de perturbação muda. Morris resultados são mais naturalmente exibidos em um μ^*–σ Enquanto os resultados de Sobol são exibidos como índices de primeira ordem e efeito total; Um gráfico de barras pode resumir, mas deve ser rotulado de acordo com a medida subjacente.

72 Figura 64.8 mostra um caso em que apenas as seis primeiras variáveis têm uma influência material sob a regra adotada de perturbação. Tal resultado pode suportar uma redução do parâmetro definido antes da análise inversa começar.

64.5 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro

73 Análise de sensibilidade identifica quais parâmetros podem mudar as previsões; A identificação dos parâmetros pergunta quais valores desses parâmetros são suportados por medições. A distinção é importante. Um parâmetro com sensibilidade total insignificante geralmente não pode ser identificado da resposta selecionada, não importa o quão sofisticado seja o otimizador. Por outro lado, um parâmetro altamente sensível ainda pode

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

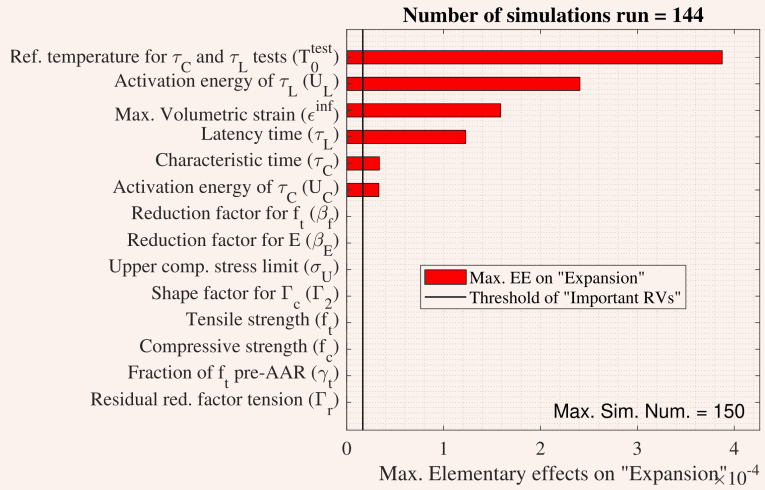


Figura 64.8: Exemplo de sensibilidade (Gakuhari, 2021)

ser difícil de identificar se seu efeito é quase indistinguível do de outro parâmetro, fig. 1. 64.9.

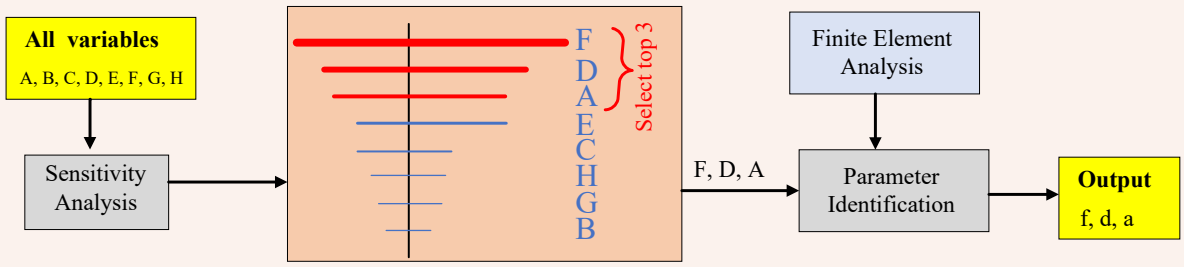


Figura 64.9: Análise de sensibilidade identifica parâmetros candidatos; A identificação dos parâmetros determina os valores suportados pelas observações

74 A sequência prática é, portanto:

1. Defina as quantidades de interesse e intervalos de parâmetros plausíveis;
2. Analisar os parâmetros e reter aqueles com influência material;
3. Examine se os parâmetros retidos têm assinaturas de resposta distinguíveis;
4. identificar apenas o subconjunto defensável, enquanto fixa, agrupa ou regulariza o restante.

75 Capítulo 65 desenvolve o problema inverso em detalhes. Ela formula não linear ponderada mínimos quadrados, examina a identidade e discrepância de modelo, e compara Levenberg - Marquardt, RANSAC, e abordagens Bayesianas. O presente capítulo, portanto,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 64.5: Diferentes mas complementares papéis de análise de sensibilidade e identificação de parâmetros

Aspect	Análise de sensibilidade	Identificação do parâmetro
Pergunta	Quais entradas podem mudar materialmente as saídas selecionadas?	Que valores de parâmetro são suportados pelas observações?
Informação usada	Faixas ou distribuições plausíveis e o modelo dianteiro	Medições, um modelo residual, e o modelo dianteiro
Resultado principal	Ranking, triagem ou alocação de variância	Valores de parâmetros calibrados e sua incerteza ou diagnóstico
Aviso de falha	Um parâmetro insensível não pode ser aprendido com a resposta escolhida	Um parâmetro sensível pode permanecer não identificável quando os efeitos são confundidos

termina onde o problema de decisão começa: com um reduzido, fisicamente significativo conjunto de parâmetros e uma descrição explícita da incerteza que permanece.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 65

Decisões: Método de identificação do parâmetro

Abstract

Capítulo 64 estabeleceu como inputs incertos são caracterizados e propagados através de modelos computacionais, e como sua influência é classificada por meio da análise de sensibilidade. Este capítulo aborda o problema inverso: determinando os valores dos parâmetros suportados por observações e quantificando a confiança que deve ser colocado neles.

O capítulo formula não linear ponderado mínimos quadrados e explica a identificação, escala, limites, regularização, discrepância do modelo, calibração e validação. Então compara Levenberg, otimização de Marquardt, RANSAC para dados contaminados por outliers grosseiros, e inferência Bayesiana para incerteza dos parâmetros posteriores. Um manual completo do programa de análise traduz a teoria em um fluxo de trabalho baseado em planilhas. A seção final integra as partes A e B e pontes para os capítulos subsequentes que levam a Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE).

65.1 Identificação do parâmetro como um problema inverso 2220
65.2 Aplicações e Quadro de Decisão . . 2221
65.2.1 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro . 2222
65.2.2 Quadro de decisão: Qual método quando? 2222
65.3 Qualidade e Robustidade dos Dados 2222
65.3.1 Fontes de Contaminação de Dados 2222
65.3.2 Estimação do Consenso Robusto: RANSAC 2223
65.4 O Algoritmo de Marquardt 2227
65.4.1 Abordagens de modelagem e seleção de modelos 2227
65.4.2 Não linear ponderado Mínimos quadrados 2228
65.4.3 Etapa de atualização de Levenberg–Marquardt e interpretação do algoritmo . . 2228
65.4.4 Ex 65.1: Adaptando-se a um modelo hiperbólico não linear 2228
65.4.5 Escala, limites e regularização 2231
65.4.6 Identificação 2231
65.4.7 Modelo Discrepância 2233
65.5 Identificação do parâmetro bayesiano 2233
65.5.1 Identificação do parâmetro bayesiano: Configuração . . 2234

CÓPIA PARA REVISÃO

65.5.2 Estimativa de MAP e estimativas de pontos 2234
65.5.3 Amostragem posterior e MCMC para parâmetros . . 2235
65.5.4 Ex 65.2: Regressão bayesiana com base quadrática e Metrópolis.. 2235
65.5.5 Exemplo trabalhado: Inferência Bayesiana para parâmetros de degradação 2236
65.5.6 Quando usar a identificação Bayesiana 2237
65.6 O algoritmo de Marquardt na prática 2237
65.6.1 Prática dos mínimos quadrados 2239
65.7 Fluxos de trabalho híbridos e melhores práticas 2248
65.7.1 Calibração e validação 2248
65.7.2 Aplicações estruturais 2248
65.7.3 Quadro de Decisão do Fluxo de Trabalho 2248
65.8 Ponte para Engenharia sísmica baseada em desempenho 2249

65.1 Identificação do parâmetro como um problema inverso

1 A identificação do parâmetro é fundamental para várias aplicações principais: (i) *Calibração do Modelo*-Alinhando modelos elemento finito com resultados experimentais obtidos de testes laboratoriais ou em campo; (ii) *Monitoramento Estrutural da Saúde*Otimizando modelos elemento finito para combinar dados de sensores e rastrear mudanças ao longo do tempo; e (iii) *Determinação do modelo de demanda*-estabelecendo modelos sísmicos de demanda para design baseado em desempenho (ver §68.5).

O fluxo de trabalho de identificação do parâmetro

2 O processo de identificação dos parâmetros segue um fluxo de trabalho iterativo baseado em dados ilustrado na Figura 65.1.. Os passos principais são:

1. **Configuração inicial:** Obter resultados de laboratório ou campo (medidas), e estabelecer um conjunto inicial de valores de parâmetros $\mathbf{x}_0$ baseado em conhecimentos prévios, padrões de design ou literatura.
2. **Avaliação do modelo:** Execute uma análise elemento finito (FE) usando os valores dos parâmetros atuais para obter previsões de modelos.
3. **Avaliação de erro:** Compare as previsões de modelos com medições de laboratório/campo por computação de resíduos (erros). A norma residual quantifica quão bem os parâmetros atuais se encaixam nos dados.
4. **Verificação de Convergência:** Se os resíduos são aceitavelmente pequenos (dados do modelo coincidem), pare, parâmetros são identificados. Caso contrário, prossiga para o passo 5.
5. **Atualização do Parâmetro:** Use um algoritmo de otimização para calcular os valores dos parâmetros melhorados $\mathbf{x}_{new}$ que deve reduzir os resíduos.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

6. **Iterar:** Retorne ao passo 2 com os parâmetros atualizados e repita até a convergência.

3 Este ciclo de feedback é a essência da identificação dos parâmetros: O modelo é tratado como uma função $f(\mathbf{x})$ que mapeia parâmetros para previsões, e otimização é usada para encontrar os valores dos parâmetros que melhor combinam com as observações.

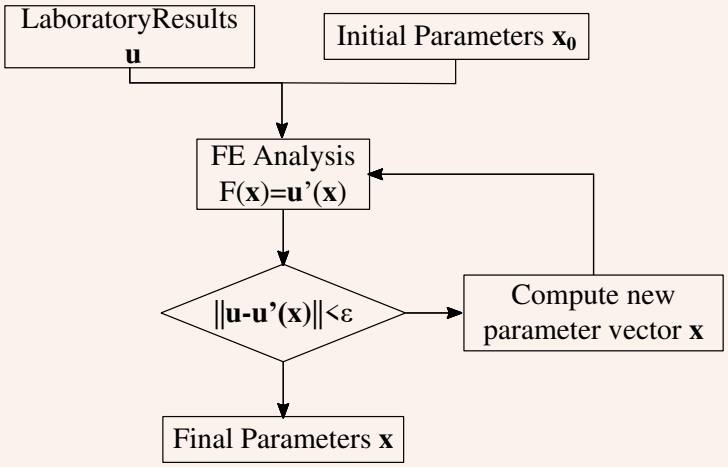


Figura 65.1: Princípio da abordagem de identificação do sistema: Refinamento iterativo de parâmetros para minimizar discrepância modelo-dados.

4 Matematicamente, vamos $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ Contenha as medidas e deixe $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ conter as previsões correspondentes do modelo. O vetor residual é

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}. \tag{65.1}$$

5 O problema inverso é difícil quando o modelo é não linear, os dados são esparsos ou correlacionados, várias combinações de parâmetros produzem respostas semelhantes, ou as observações contêm outliers ou discrepância sistemática.

65.2 Aplicações e Quadro de Decisão

6 Os três domínios de aplicação listados acima, calibração do modelo, monitoramento estrutural da saúde e determinação da demanda sísmica, compartilham uma estrutura comum: As observações devem informar parâmetros desconhecidos que afetam as previsões. A escolha de qual método de estimativa depende da qualidade dos dados, não linearidade do modelo, orçamento computacional e as consequências da incerteza.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

65.2.1 Da análise de sensibilidade à identificação do parâmetro

7 Análise de sensibilidade é um pré-requisito, não um substituto, para identificação. Capítulo 64 identifica parâmetros que podem afetar as respostas selecionadas. A análise inversa deve começar com esse conjunto reduzido. Parâmetros com sensibilidade total negligenciável são fixados. parâmetros com efeitos quase indistinguíveis são agrupados, regularizados ou informados por medições adicionais. Essa redução melhora a eficiência computacional e a interpretabilidade.

65.2.2 Quadro de decisão: Qual método quando?

8 O presente capítulo explica três abordagens:

Levenberg-Marquardt (Seção 65.4): A escolha padrão para a maioria dos problemas. Rápido, estável e computacionalmente eficiente quando os dados são basicamente gaussianos. Produz uma estimativa pontual e incerteza de parâmetros aproximados.

RANSAC (Seção 65.3.2): Recomendado quando os outliers nojentos são suspeitos ou confirmados. Identifica um conjunto de dados mais profundos antes de se adaptar com mínimos quadrados. Robusto à contaminação que enganaria L-M.

Inferência Bayesiana (§ 65.5): Essencial quando toda incerteza posterior é necessária para a tomada de decisão. Computacionalmente mais caro, mas fornece intervalos credíveis, correlações posteriores e sensibilidade a suposições anteriores.

9 Um fluxo de trabalho prático pode combinar estes: Use o RANSAC para limpar dados, aplicar L-M para calibração e validação inicial, e empregar inferência Bayesiana se incerteza parâmetro afeta materialmente decisões a jusante.

65.3 Qualidade e Robustidade dos Dados

65.3.1 Fontes de Contaminação de Dados

10 Medições reais de laboratórios e locais de campo contêm várias fontes de erro e contaminação:

- **Ruído de medição:** Erros aleatórios, aproximadamente gaussianos inerentes a sensores e instrumentos.
- **Viés sistemáticos:** Offset consistente ou deriva em medições devido à calibração do instrumento ou efeitos ambientais.
- **Falha do sensor:** Falha temporária ou permanente de um instrumento de monitoramento, produzindo leituras erráticas ou congeladas.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Apagões nojentos:** Pontos isolados causados por erros de entrada de dados, interferências transitórias ou falhas no equipamento.
- **Modelo de incompatibilidade:** Desfasamento sistemático entre previsões de modelos e observações devido à física não modelada ou condições de contorno.

11 O ruído de medição gaussiano é manuseado naturalmente por mínimos quadrados (Seção 65.4). Excessos brutos e contaminação sistemática requerem pré-processamento ou métodos robustos.

65.3.2 Estimação do Consenso Robusto: RANSAC

12 O Consenso de Amostras Aleatórias (RANSAC) estima um modelo a partir de dados contaminados por outliers brutos (Fischler e Bolles, 1981). É melhor entendido como um círculo de pesquisa por consenso. Os parâmetros do candidato são ajustados para subconjuntos aleatórios mínimos ou pequenos; Todas as observações são classificadas por um limiar residual; O consenso mais forte é mantido; e os parâmetros finais são adaptados usando todos os inliers aceitos.

65.3.2.1 Algoritmo

1. Selecione um subconjunto aleatório grande o suficiente para estimar o modelo.
2. Encaixe um vetor de parâmetro candidato a esse subconjunto.
3. Calcular resíduos para o conjunto de dados completo e classificar observações usando um limite declarado.
4. Marcar o candidato por contagem mais intensa e, quando apropriado, pela qualidade adequada dentro do conjunto de consensos.
5. Repita para o número de testes prescrito ou atualizado.
6. Reajustar o modelo usando todos os inliers do melhor conjunto de consenso.
7. Revisão excluiu observações e testou o ajuste final em dados independentes.

13 Se a fração mais intensa é aproximadamente wO tamanho mínimo da amostra é s, e a probabilidade desejada de desenhar pelo menos um subconjunto tudo-inlier é p, a aproximação de planejamento familiar é

$$N \geq \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^s)}. \tag{65.2}$$

Porque.. w é inicialmente desconhecido e as suposições de amostragem podem ser imperfeitas, a contagem do julgamento deve ser atualizada conservadoramente como melhores conjuntos de consenso são encontrados.

14 O limiar mais profundo deve ser ligado à incerteza de medição ou uma estimativa robusta da escala, não selecionada apenas para maximizar o número de pontos aceitos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

RANSAC aborda contaminação bruta; Não substitui um modelo probabilístico para o ruído de medição comum.

Simples exemplo de regressão linear

15 Um exemplo de RANSAC aplicado à regressão linear simples é mostrado na Figura 65.2.. O algoritmo seleciona iterativamente subconjuntos aleatórios, encaixa linhas para cada um, e conta quantos pontos de dados estão dentro de um limite definido pelo usuário. A linha que captura mais insígnias é selecionada como o melhor modelo.

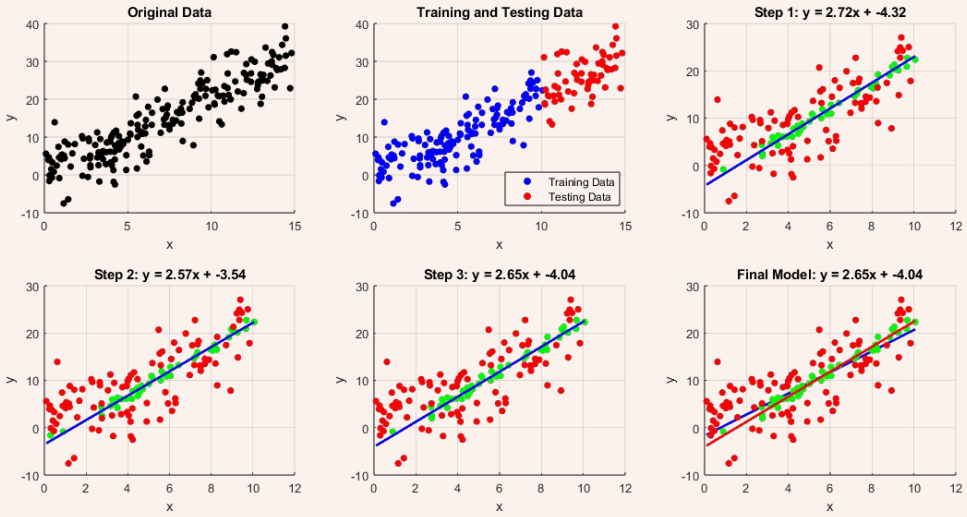


Figura 65.2: Exemplo ilustrativo de regressão linear com RANSAC

Aplicação para Degradação de Concreto

16 Um exemplo mais prático e detalhado é mostrado na Figura 65.3, o que demonstra RANSAC aplicado para identificar modelos de degradação do primeiro princípio em núcleos de concreto recuperados de um local. O objetivo é estimar parâmetros de uma função analítica que rege a deterioração do concreto devido à reação álcali-agregada (RAA).

17 De núcleos de campo recuperados na represa Seminoe, módulo elástico (E), resistência à tração (f_t), e resistência à compressão (f_c') foram medidos em diferentes profundidades e idades. O objetivo era ajustar um modelo de primeiro princípio a esses dados de degradação enquanto filtrava ruídos de medição e outliers experimentais.

18 A quantidade de interesse (QOI) - propriedades de concreto degradadas - segue:

$$\frac{\text{QoI}}{\text{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d) \cdot D(t) \tag{65.3}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

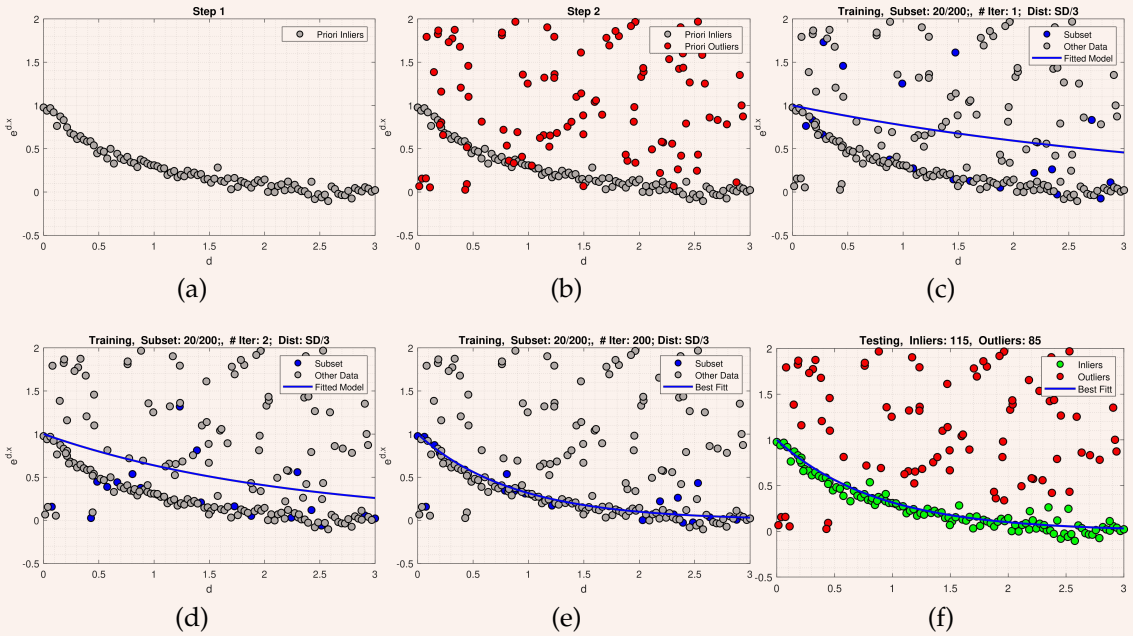


Figura 65.3: RANSAC aplicado à degradação do concreto: Estudo de caso (Gakuhari, 2021)

Onde QoI_0 é o valor inicial (não danificado) da propriedade de concreto, $D(t)$ É normalizado dano em função do tempo t, e $f(d)$ é um fator de correção que explica a variação dos danos na barragem.

19 O fator profundidade é modelado como:

$$f(d) = A \cdot d + B \tag{65.4}$$

com parâmetros A e.. B representando progressão de danos dependentes da profundidade.

20 Para o dano dependente do tempo, dois modelos concorrentes de primeiro princípio foram considerados baseados na cinética AAR:

$$D(t)|_{\text{Model 1}} = (1-\beta)\frac{(1-e^{-t/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - t)/\tau_C}} \tag{65.5}$$

ou:

$$D(t)|_{\text{Model 2}} = (1-\beta)\frac{\int_0^t \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - s)/\tau_C}} ds}{\int_0^{t_{\text{end}}} \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - s)/\tau_C}} ds} \tag{65.6}$$

Onde τ_C é o tempo característico, τ_L é o período de latência, e β representa dano assintótico a longo prazo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

21 **O Processo RANSAC:**

22 Como as medições de campo das represas se estendem por muitos anos e vários locais de corte, os dados inevitavelmente contêm erros de medição e podem conter outliers. A maioria dos pontos deve, em princípio, se encaixar no primeiro princípio do modelo AAR se apenas os outliers pudessem ser identificados e removidos. RANSAC propõe um consenso definido sob o modelo e limite especificados; A revisão de engenharia ainda é necessária antes que os pontos excluídos sejam tratados como inválidos.

Fase de pesquisa do consenso:
- **Inicialização:** O usuário especifica o número de iterações N, tamanho da amostra n por iteração, e limite de tolerância a erros (ETT).
- Dados de campo (profundidade, idade, propriedades do concreto) estão carregados.
- Passem por aqui N iterações: Para cada iteração, selecione aleatoriamente n Pontos de dados.
- Encaixe o modelo de degradação AAR ao n- Subconjunto de pontos.
- Pontuação: Conte quantos pontos de dados totais têm magnitudes residuais abaixo do limite de tolerância ao erro (ETT).
- Depois N iterações, manter o modelo com a maior pontuação (mais inliers).

Classificação e fase de adaptação:
- Selecione o modelo de maior pontuação obtido durante a busca por consenso.
- Usando este melhor modelo, classifique todos os pontos de dados como inliers ou outliers.
- Reajustar os parâmetros usando todos os inliers identificados, e examinar observações excluídas antes de descartá-los permanentemente.

23 **Visão crítica:** Para esta aplicação de degradação do concreto, um modelo baseado em física dá ao critério mais interno uma interpretação de engenharia defensável: Um ponto é julgado contra um mecanismo de degradação esperado ao invés de uma curva flexível arbitrária. O RANSAC também pode ser aplicado a modelos empíricos e baseados em dados, mas um modelo excessivamente flexível pode absorver contaminação ao invés de expô-la, e a extrapolação permanece especialmente perigosa.

24 Uma vez que o melhor conjunto de inlier é identificado, os parâmetros (A, B, τ_C, τ_L, β) são refinados usando regressão convencional mínimos quadrados em apenas os dados mais internos, fornecendo estimativas que são menos influenciados pela contaminação bruta excluída.

25 RANSAC é particularmente valioso no monitoramento estrutural da saúde da infraestrutura de envelhecimento porque dados reais de sensores e medições experimentais frequentemente contêm leituras espúrias, falhas do sensor e erros transitórios. Ao propor um consenso reprodutível para revisão de engenharia, RANSAC pode reduzir a influência

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

de leituras grosseiramente corrompidas; Não prova que cada observação excluída esteja errada.

65.4 O Algoritmo de Marquardt

26 O algoritmo de Levenberg-Marquardt (L-M) é o cavalo de trabalho do parâmetro Identificação na prática. Combina elementos de Gauss, otimização Newton e descida gradiente, tornando-o robusto através de uma ampla gama de não linearidades enquanto permanece computacionalmente eficiente. Seu parâmetro adaptativo amortecimento Ajusta automaticamente entre convergência rápida perto de uma solução e cautelosa Passos em terreno difícil - um equilíbrio que fez com que fosse a escolha padrão para problemas não lineares de mínimos quadrados em engenharia estrutural, hidrologia, ciência dos materiais, e muitos outros campos.

27 Para a teoria algorítmica completa dos métodos de confiança e convergência Análise, veja o apêndice Q.. Esta seção desenvolve o Formulação prática: Como definir o objetivo ponderado, lidar com escala e limites, diagnosticar a identidade, e extrair incerteza dos parâmetros da aproximação de covariância local. Um exemplo de hipérbole trabalhado ilustra o algoritmo em ação.

65.4.1 Abordagens de modelagem e seleção de modelos

28 A identificação do parâmetro começa com uma escolha de classe modelo:

Modelos baseados em física: derivado de mecânica, termodinâmica, transporte ou cinética. Seus parâmetros normalmente têm significado físico, o que suporta extrapolação e interpretação de engenharia, mas a discrepância do modelo pode permanecer.

Modelos baseados em dados: Deduzem uma relação funcional das observações com estrutura física limitada. Eles podem se ajustar às tendências complexas de forma eficiente, mas são vulneráveis à extrapolação e precisam de mais dados.

Modelos híbridos: combinar um núcleo baseado em física com uma correção empírica, substituta ou termo de discrepância. Eles podem melhorar as previsões enquanto mantêm restrições físicas, desde que os papéis dos dois componentes sejam identificáveis.

29 Para uma dada aplicação, a escolha de restrições de classe modelo que parâmetros são estimados a partir dos dados disponíveis. Um modelo com muitos graus de liberdade em relação aos dados sofrerá de identificação fraca; um modelo com muito poucos pode ignorar a física importante e produzir viés (diferença do modelo).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

65.4.2 Não linear ponderado Mínimos quadrados

30 Não linear comum mínimos quadrados minimiza

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}. \tag{65.7}$$

Quando as medições têm diferentes unidades, variâncias ou correlações, o objetivo defensável é ponderado mínimos quadrados,

$$\Phi_W(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}, \tag{65.8}$$

Onde $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ é a matriz de covariância do erro de medição. Com observações independentes de desvios padrão s_iIsso equivale a minimizar resíduos normalizados r_i/s_i.. A ponderação numérica arbitrária deve ser evitada porque muda silenciosamente o significado de engenharia do ajuste.

65.4.3 Etapa de atualização de Levenberg–Marquardt e interpretação do algoritmo

31 Com Jacobian $\mathbf{J} = \partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\theta}$, o passo Levenberg - Marquart resolve

$$\left(\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{J} + \lambda\mathbf{D}\right)\Delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \tag{65.9}$$

Onde λ Controles amortecimento e $\mathbf{D}$ Providencia escala.

32 **Intuição do algoritmo:** O parâmetro amortecimento λ controla a região de confiança eficaz, mas não é ela mesma o raio da região. Um grande valor de λ produz um passo muito curto, que corresponde qualitativamente a uma pequena região de confiança; Quando $\mathbf{D}$ é diagonal e positivo, a direção torna-se gradiente-como após escalar. Como λ Diminui, o passo se aproxima do Gauss - passo de Newton e pode convergir rapidamente perto de um mínimo bem comportado. A convergência quadrática só é possível em condições favoráveis adicionais e não deve ser assumida geralmente. O algoritmo permanece local e pode convergir para diferentes soluções de diferentes pontos de partida.

65.4.4 Ex 65.1: Adaptando-se a um modelo hiperbólico não linear

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Este exemplo é deliberadamente pequeno o suficiente para se reproduzir à mão ou com um Algumas linhas de MATLAB®, mas é genuinamente não linear em um de seus desconhecidos Parâmetros. Considere o modelo

$$g(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{a}{b+x}, \qquad \boldsymbol{\theta} = [a,b]^T, \qquad a>0, \quad b>0. \tag{65.10}$$

Ao contrário de um polinômio que é linear em seus coeficientes, este modelo é Não linear em b, e sua Jacobian portanto muda como as iterações Prossiga.

Dados sintéticos e convenção residual

Para auditoria, as observações são geradas exatamente a partir de

$$\boldsymbol{\theta}_\star = [6,2]^T$$

nos cinco locais $x_i \in \{0,1,2,3,4\}$.. Assim,

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = 6/(2+x_i)$	3.000000	2.000000	1.500000	1.200000	1.000000

Nenhum ruído de medição é adicionado neste exemplo pedagógico, então o mínimo objetivo é exatamente zero em aritmética exata. Com dados bem barulhentos, A estimativa dos mínimos quadrados não coincidiria exatamente com o parâmetros usados para gerar a resposta sem ruído subjacente.

Ao longo do exemplo, defina

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}, \tag{65.11}$$

De modo que

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

Para cada observação,

$$\frac{\partial g_i}{\partial a} = \frac{1}{b+x_i}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial b} = -\frac{a}{(b+x_i)^2}.$$

Ponto inicial e regra Amortecimento

Começar de..

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [4,1]^T, \qquad \lambda_1 = 10^{-2},$$

e usar escala Marquardt

$$\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}\left(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k\right).$$

Em cada julgamento, resolva

$$\left(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k + \lambda_k\mathbf{D}_k\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\mathbf{J}_k^T\mathbf{r}_k. \tag{65.12}$$

Se o ponto de teste diminuir Φ, aceitá-lo e definir $\lambda_{k+1} = \lambda_k/10$; Caso contrário, rejeite-o, mantenha a corrente parâmetros, e definir $\lambda_k \leftarrow 10\lambda_k$ Antes de recomputar o Passo do julgamento. Esta regra simples de fator-de-dez é usada apenas para fazer o exemplo transparente. As implementações de produção geralmente usam a relação entre o real e Previu redução para atualizar o amortecimento mais suavemente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Primeira Iteração em Completo

Em.. $\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T$,

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 4.000000 & 2.000000 & 1.333333 & 1.000000 & 0.800000 \end{bmatrix}^T,$$

e, portanto,

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0 & -0.166667 & -0.200000 & -0.200000 \end{bmatrix}^T, \qquad \Phi_0 = 0.553888889.$$

O Jacobiano é..

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & -4.000000 \\ 0.500000 & -1.000000 \\ 0.333333 & -0.444444 \\ 0.250000 & -0.250000 \\ 0.200000 & -0.160000 \end{bmatrix}.$$

Os produtos necessários são

$$\mathbf{J}_0^T\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.46361111 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.28563086 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_0^T\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.85444444 \\ -3.84392593 \end{bmatrix}.$$

Porque.. $\mathbf{D}_0 = \text{diag}(1.46361111, 17.28563086)$ e.. $\lambda_1 = 0.01$O primeiro sistema linear é

$$\begin{bmatrix} 1.47824722 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.45848717 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} -0.85444444 \\ 3.84392593 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo dá

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0.99934608 \\ 0.49165043 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 4.99934608 \\ 1.49165043 \end{bmatrix}.$$

No ponto de julgamento aceito,

$$\Phi_1 = 0.071941238 < \Phi_0,$$

Então o passo é aceito e o próximo valor é $\lambda_2 = 10^{-3}$.

Iterações posteriores

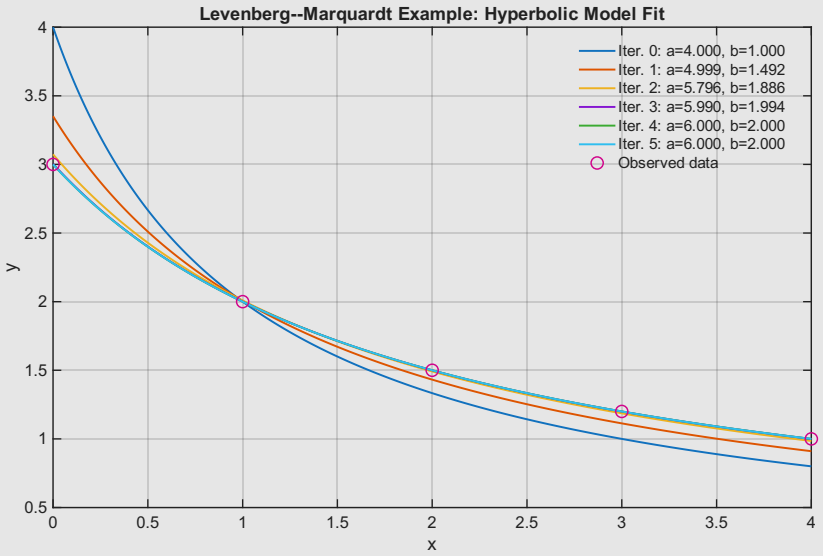
Re-avaliar o resíduo e Jacobian em cada ponto aceito dá a Seguindo sequência. Todos os cálculos foram realizados com dupla precisão; Os valores relatados são arredondados apenas para exibição.

Iterações aceitas	λ_k	a_k	b_k	$\Phi_k = \frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k$
0	–	4.000000	1.000000	5.538889×10^{-1}
1	10^{-2}	4.999346	1.491650	7.194124×10^{-2}
2	10^{-3}	5.795603	1.885772	2.971964×10^{-3}
3	10^{-4}	5.990433	1.994207	8.259246×10^{-6}
4	10^{-5}	5.999974	1.999984	6.810857×10^{-11}
5	10^{-6}	6.000000	2.000000	2.295319×10^{-20}

O Jacobiano muda com b, confirmando que este é um verdadeiro Problema de mínimos quadrados não lineares. Os iterados aceitos se aproximam exatamente Solução $\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$, e as abordagens objetivas Zero para precisão da máquina. Um julgamento rejeitado deixaria o vetor de parâmetros Não se altera e aumenta λ antes de um novo passo ser calculado.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A MATLAB®O roteiro que reproduz a tabela de iterações é dado no Apêndice I.5.1.. Ele usa a mesma convenção residual, matriz de escala, e amortecimento regra como derivação Em cima.

Trata o contador de admissão separadamente do Contador de julgamentos. Consequentemente, um julgamento rejeitado aumenta λ e.. Recompõe o passo sem avançar falsamente na tabela de iteração.

65.4.5 Escala, limites e regularização

33 Parâmetros medidos em escalas numéricas muito diferentes devem primeiro ser não dimensionalizados ou atribuídos magnitudes representativas. Limites podem evitar valores fisicamente impossíveis, mas um parâmetro repetidamente conduzido a um limite pode indicar dados inadequados, má escala ou discrepância de modelo ao invés de identificação bem sucedida.

34 Para problemas mal determinados ou fracos identificados, um objetivo regularizado pode ser usado:

$$\Phi_R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r} + \frac{\alpha}{2}\left\|\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)\right\|_2^2 . \tag{65.13}$$

O segundo termo penaliza a saída dos valores anteriores ou de referência. Regularização seleciona uma solução entre muitos; Não cria informação, e sua força α Deve ser reportado.

65.4.6 Identificação

35 *Identificabilidade estrutural* pergunta se observações exatas e livres de ruído poderiam determinar os parâmetros em princípio. *Identificabilidade prática* pergunta se as observações ruidosas e finitas disponíveis determinam-nas com precisão aceitável.

36 Perto de uma solução candidata, identificabilidade prática é diagnosticada pelo Jacobiano ponderado $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{J}$:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Deficiência de classificação:** Rank menor que o número de parâmetros implica que pelo menos uma combinação de parâmetros é localmente inidentificável.
- **Pequenos valores singulares:** Valores singulares muito pequenos indicam direções fracamente informadas; Os parâmetros correspondentes estão mal determinados.
- **Grande número de condição:** $\kappa = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} > 10^6$ indica grave mau-condicionamento e fraca identificação.
- **Colinear Jacobian pilares:** Quase colinear pilares indicam parâmetros cujos efeitos não podem ser distinguidos dos dados.
- **Correlações de parâmetros fortes:** Correlações estimadas > 0.95 Indicar combinações de parâmetros compensadores; Mudar um para caber nos dados requer mudar outro.

37 Uma pequena norma residual é necessária, mas não suficiente. Um modelo pode encaixar as observações quase exatamente enquanto parâmetros individuais permanecem não-símios. Os remédios incluem adicionar tipos de resposta independentes, mudar os locais dos sensores ou carregar caminhos, fixar parâmetros insensíveis, agrupar parâmetros correlacionados, usar a regularização ou informações prévias, e repetir a análise de múltiplos pontos de partida.

38 Para dados laboratoriais e experimentais, este processo pode ser muito facilitado pela estimativa de consenso robusto (RNASAC, Seção 65.3.2), que remove outliers brutos antes da estimativa do parâmetro L-M.

65.4.6.1 Aproximação da incerteza local

39 Se o modelo residual for apropriado, a solução é interior, e a linearização é adequada, uma aproximação de covariância local é

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \approx c \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}\right)^{-1}, \tag{65.14}$$

40 Quando $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}$ é a matriz de precisão absoluta conhecida (variâncias de medição), $c = 1$ E a covariância é adequadamente escalada. Quando $\mathbf{W}$ contém apenas pesos relativos (por exemplo, inverso dos valores nominais), c é comumente estimada como a variância residual ponderada:

$$c \approx \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r}}{m - n_p}, \tag{65.15}$$

Onde m é o número de observações e n_p é o número de parâmetros. Isso garante que a incerteza do parâmetro reflete tanto a qualidade dos dados quanto a precisão da medição. A aproximação não é confiável para restrições ativas, não linearidade pronunciada, identificação fraca, objetivos multimodais ou discrepância de modelo. Probabilidades de perfil, análises bootstrap ou posteriores bayesianos são mais informativas nesses casos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

65.4.7 Modelo Discrepância

41 Uma observação conceitual útil [1] É

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{65.16}$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ É erro de medição e $\boldsymbol{\delta}$ É uma discrepância sistemática do modelo. Sim $\boldsymbol{\delta}$ é ignorado, o otimizador pode distorcer parâmetros fisicamente significativos para compensar os mecanismos que faltam. Calibração bayesiana pode representar discrepância explicitamente (Kennedy e O'Hagan, 2001); Calibração determinística deve pelo menos examinar padrões residuais para dependência sistemática de carga, tempo, local ou tipo de resposta.

65.5 Identificação do parâmetro bayesiano

42 A inferência bayesiana fornece uma estrutura geral para atualização prévia Conhecimento com dados observacionais. Na identificação dos parâmetros, o desconhecido os parâmetros do modelo são tratados como variáveis aleatórias, e a combinação de A informação com uma função de probabilidade produz uma distribuição posterior caracterizando os valores dos parâmetros suportados por ambas as fontes de informação.

43 O método de Levenberg (Seção 65.4) e RANSAC (Seção 65.3) são fundamentalmente otimização Abordagens: eles produzem estimativas pontuais, complementadas por linearizados locais incerteza ou informação de consenso. A identificação bayesiana em vez disso produz uma distribuição posterior completa. Pode representar assimétrico ou multimodal incerteza, correlações de parâmetros, a influência de suposições anteriores, e a propagação da incerteza dos parâmetros nas previsões subsequentes e Decisões.

44 A inferência bayesiana é muito valiosa quando a incerteza posterior materialmente Afeta margens de segurança, previsões de vida útil, estimativas de confiabilidade, ou Decisões informadas de risco. Também é natural quando as informações de anterior Testes, literatura, restrições físicas ou julgamento de especialistas devem influenciar A identificação, e quando a atualização sequencial é necessária como novos dados ficar disponível.

[1] Equação (65.16) é formalmente análoga a Eq. (47.2), introduzido na derivação variacional de a equação de Euler-Lagrange: Ambos expressam uma quantidade de referência aumentada por uma perturbação aditiva. A analogia é apenas estrutural. Em Eq. (47.2), δu Denota uma variação admissível, enquanto que em Eq. (65.16), $\boldsymbol{\delta}$ Denota discrepância sistemática do modelo e $\boldsymbol{\varepsilon}$ Denota erro de medição.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

65.5.1 Identificação do parâmetro bayesiano: Configuração

45 O teorema de Bayes combina conhecimento prévio sobre parâmetros desconhecidos com as informações contidas nas observações:

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}. \tag{65.17}$$

Aqui $p(\boldsymbol{\theta})$ é a distribuição anterior, $p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ é a probabilidade, $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ é a distribuição posterior, e

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta} \tag{65.18}$$

é a evidência, ou probabilidade marginal. A evidência normaliza o posterior. Não é exigido explicitamente por Metrópolis - tem amostra porque ele Cancela da taxa de aceitação.

46 Assumindo erro de medição Gaussiano aditivo com matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$, a probabilidade é

$$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \left|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))^T \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))\right], \tag{65.19}$$

Onde m é o número de observações. A discrepância do modelo pode ser representada separadamente, por exemplo através do termo aditivo introduzido em Eq. (65.16).. Se a discrepância for omitida, posterior A incerteza está condicionada ao modelo assumido e não deve ser interpretada como contabilização automática para erro de modelo-forma.

47 Os parâmetros anteriores podem codificar positividade, limites admissíveis, literatura ou Valores do banco de dados, resultados dos testes de acompanhantes, ou outras informações defensáveis. Quando a informação prévia é fraca, os antecedentes pouco informativos sobre fisicamente Faixas confiáveis são preferíveis a antecedentes arbitrariamente difusos. Previsão prévia Simulando parâmetros do anterior, executando o modelo, e examinando as respostas implícitas – é um diagnóstico importante antes dos dados são usados.

65.5.2 Estimativa de MAP e estimativas de pontos

48 Se um único parâmetro vetor é necessário, o *máximo a posteriori* (MAP) estimativa é o modo da posterior:

$$\boldsymbol{\theta}^*_{\text{MAP}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}). \tag{65.20}$$

49 Para uma probabilidade Gaussiana, a estimativa da MAP é equivalentemente obtida por minimizando um termo de mínimos quadrados ponderado aumentado pelo log-prior negativo:

$$\boldsymbol{\theta}^*_{\text{MAP}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{2}\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) - \log p(\boldsymbol{\theta})\right]. \tag{65.21}$$

Isto é computacionalmente semelhante ao ponderado mínimos quadrados (Seção 65.4.2), com o log-prior agindo como um termo de regularização. Com um uniforme anterior

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

sobre a região admissível, o MAPA Estimativa coincide com a estimativa da probabilidade máxima. Outros resumos incluir a média posterior e mediana posterior; Nenhum deles transmite sozinho o Forma ou estrutura de dependência do posterior completo.

65.5.3 Amostragem posterior e MCMC para parâmetros

50 Para obter a distribuição posterior completa ao invés de uma estimativa pontual, Os métodos da cadeia de Markov Monte Carlo (MCMC) geram amostras de $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ Sem precisar de avaliação do Normalização posterior constante. No algoritmo de Metrópolis, um julgamento vetor $\boldsymbol{\theta}'$ é tirado de uma densidade proposta $q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})$ e aceito com probabilidade

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')q(\boldsymbol{\theta}^{(s)} \mid \boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.22}$$

Para uma proposta de caminhada aleatória simétrica, as duas densidades da proposta cancelam, então..

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.23}$$

Os estados aceitos e repetidos formam uma cadeia de Markov cuja estacionária A distribuição é a posterior sob as condições habituais de regularidade.

51 Amostras iniciais fortemente afetadas pelo ponto de partida são comuns Descartado como queimado. Amostras sucessivas estão correlacionadas, então o número de Armazenado não é o número de sorteios independentes. Os diagnósticos devem incluir Traços, funções de autocorrelação, tamanho efetivo da amostra e múltiplos correntes inicializadas de pontos dispersos. Para análises de cadeias múltiplas, $\widehat{R}$ Valores próximos a um fornecem evidências, mas não provas.. As correntes alcançaram uma distribuição estacionária comum. O comprimento necessário da corrente é dependente do problema e deve ser determinado a partir de mistura e amostra eficaz Tamanho ao invés de uma contagem universal de iteração.

65.5.4 Ex 65.2: Regressão bayesiana com base quadrática e Metrópolis..

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Considere o modelo de regressão

$$y_i = \theta_1 x_{1i}^2 + \theta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{65.24}$$

Onde θ_1 e.. θ_2 são desconhecidos. A resposta usa um quadrático base em x_1Mas o modelo é linear nos parâmetros desconhecidos. Simples assim A estrutura é intencional. com antecedentes gaussianos e

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

conhecidos σExatamente posterior está disponível analiticamente e, portanto, pode ser usado para auditar Implementação do MCMC.

As observações sintéticas são geradas com

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{true}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \qquad \sigma = 1, \qquad n = 50, \tag{65.25}$$

e antecedentes gaussianos independentes são atribuídos:

$$\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 10^2), \qquad j = 1, 2. \tag{65.26}$$

Uma proposta de caminhada aleatória gaussiana simétrica é usada, então a aceitação A probabilidade é dada pelo Eq. (65.23).. O roteiro gera 10.000 estados, descarta os primeiros 2.000 como queimados e calcula posterior média, desvio padrão, 95% intervalos credíveis, correlação de parâmetros, Traços, funções de autocorrelação e uma resposta previsória posterior Banda. Também compara as estimativas do MCMC com a posterior exata Gaussiana e com a estimativa dos mínimos quadrados.

A implementação compacta usa uma corrente para a clareza pedagógica. A A análise da produção deve usar múltiplas cadeias dispersas e relatar $\widehat{R}$ e tamanho de amostra eficaz. O desvio padrão de ruído é tratado como conhecido; Em uma análise mais completa, pode ser atribuído um anterior e inferido Juntamente com os parâmetros de regressão.

O correspondente MATLAB®O código é dado em § I.5.8.

65.5.5 Exemplo trabalhado: Inferência Bayesiana para parâmetros de degradação

52 Considere o modelo de degradação dependente do tempo introduzido em Seção 65.3.2:

$$\frac{\text{QoI}}{\text{QoI}_0}(d, t) = 1 - f(d) \cdot D(t),$$

Onde $D(t)$ segue um modelo de cinética AAR com parâmetros τ_C (Hora característica), τ_L (período de latência), e β (danos assintóticos).

53 Uma análise bayesiana atribui antecedentes defensáveis a cada parâmetro:

- $\tau_C > 0$:. escala de tempo característica, por exemplo um lognormal anterior centrada nos valores da literatura.
- $\tau_L > 0$:. período de latência, com um anterior potencialmente informado por temperatura e teor de álcali.
- $\beta \in (0, 1)$:. Dano fracionário a longo prazo, representado por exemplo por um uniforme ou beta antes.

54 A probabilidade combina medições de campo de quantidades como elástico módulo e força em múltiplas profundidades e idades com seu erro de medição Estimativas. A amostragem do MCMC produz, então, desenhos posteriores, permitindo:

- densidades posteriores marginais para cada parâmetro;

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- 95% Intervalos credíveis baseados em quantis ou maior densidade pós-terior regiões;
- correlação dos parâmetros posteriores e identificação de confusão;
- Curvas de degradação previsória posterior com bandas de incerteza.

55 Se o posterior revelar forte correlação entre dois parâmetros, Como τ_C e.. τ_L, os dados disponíveis podem não separar seus efeitos. Tipos de resposta adicionais, medições em diferentes momentos ou locais, ou um Então, pode ser necessário mais informação prévia. Cheques de previsão pósteros comparam Respostas observadas com respostas replicadas geradas em desenhos posteriores e ajudar a revelar inadequação sistemática do modelo.

65.5.6 Quando usar a identificação Bayesiana

56 A identificação dos parâmetros bayesianos é particularmente valiosa quando:

- **Informações anteriores são substanciais:** Testes históricos, Restrições teóricas, ou conhecimento de especialistas devem influenciar a calibração.
- **A incerteza posterior completa é crítica.** As decisões dependem de Probabilidades de cauda ou intervalos credíveis, não só em estimativas pontuais.
- **Correlação do parâmetro deve ser quantificada:** A análise deve Revelar se os parâmetros são identificados ou confundidos pela Medição definida.
- **É necessária uma atualização sequencial.** Novas observações chegam O tempo, e o posterior de uma análise torna-se o anterior para a próxima.
- **A discrepância do modelo é significativa:** Tratamento explícito de Erro sistemático de modelo é necessário para evitar atribuir todos os descompassos ao Parâmetros.

57 Os métodos bayesianos são computacionalmente mais exigentes que Levenberg, otimização de Marquardt e requer diagnósticos cuidadosos. Em Retorno, eles fornecem intervalos credíveis, dependência de parâmetros conjuntos, incerteza previsória posterior, e uma representação transparente do anterior informações–quantidades que podem ser essenciais em alta consequência estrutural Decisões.

65.6 O algoritmo de Marquardt na prática

58 Para a teoria algorítmica completa dos métodos de confiança-região e análise de convergência Levenberg-Marquardt, veja Apêndice Q.. Esta seção foca na implementação prática do algoritmo de Levenberg-Marquardt acoplado à análise elemento finito.

MATLAB®Código 59 O MATLAB®O código está descrito na figura. Q.2 e é relativamente simples de seguir.

60 Note que neste caso, a análise se concentra em uma represa afetada pela reação do

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

agregado álcali (RAA). O objetivo é determinar os parâmetros do modelo AAR de tal forma que a crista deslocamentos da análise elemento finito correspondam estreitamente às medidas de campo.

1. Medições de campo são lidas e ajustadas.
2. O arquivo de entrada de controle é lido, e dividido em três partes: uma central contendo as linhas a serem modificadas pelo código (associado com as propriedades AAR), e as duas adjacentes que permaneceriam inalteradas. Números de linhas correspondentes são registrados para uso posterior pela função de minimização.
3. Variáveis definidas pelo usuário são lidas de um arquivo externo do Excel.
4. Os parâmetros de otimização estão definidos
5. O `lsqnonlin` função, §Q.3, é então chamado.

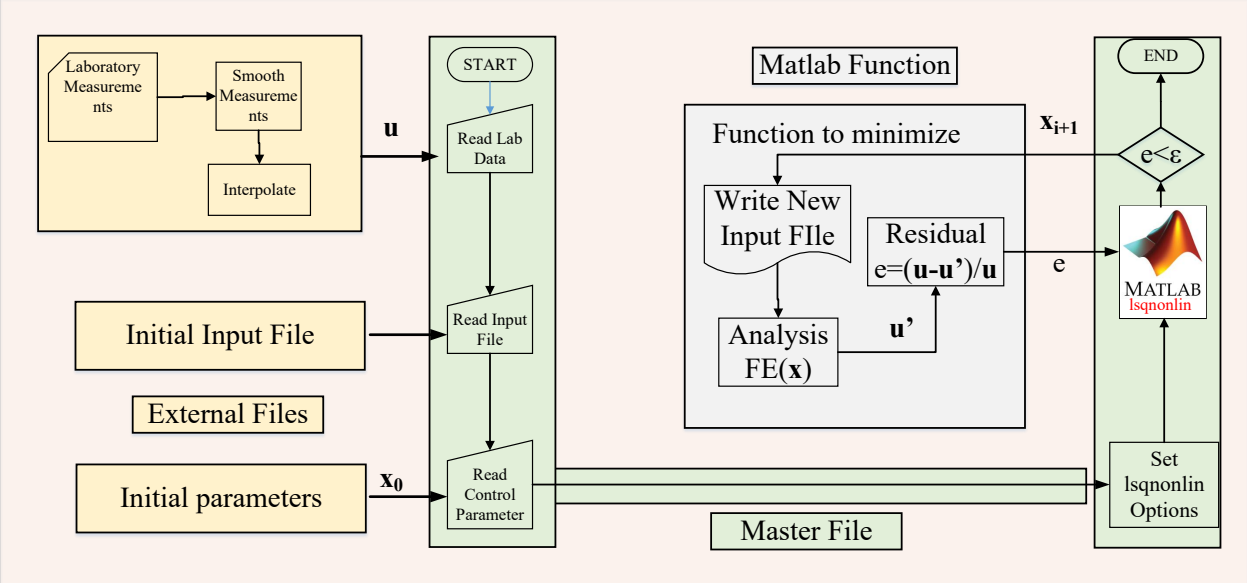


Figura 65.4: Fluxograma do procedimento de identificação do parâmetro

Definição da função [61] Uma parte crítica do algoritmo é a definição da função a ser minimizada.

1. Escreva um novo arquivo em termos de $\mathbf{x}$; na primeira iteração, use os valores padrão $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.. Isso é facilitado pela partição anterior do arquivo de controle.
2. Faça a análise elemento finito usando Merlin neste caso.
3. Extrair do arquivo de saída o computado deslocamentos, $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$.
4. Computar o resíduo $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$.
5. Computar a norma e dos resíduos.
6. Devolva o novo vetor residual ao otimizador.

CÓPIA PARA REVISÃO

62 A conclusão do programa é governada por `Isqnonlin` com base no vetor residual e nas opções previamente selecionadas (§ Q.3). Porque a função objetiva requer dados além do vetor de parâmetros, quantidades extras (tais como $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) são passados como `Global` Variáveis nesta implementação.

63 O MATLAB®O código para a otimização não linear dos mínimos quadrados é dado em § I.6.1.

Visualização em tempo real 64 Como a simulação não linear de problemas complexos é computacionalmente cara, e identificação de parâmetros requer muitas dessas análises, o processo geral é computacional e intensivo.

65 Assim, uma interface gráfica de usuário é usada, Figura Q.3.. O primeiro quadrante é uma parcela do intermediário deslocamentos ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) em comparação com os medidos ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$). Os outros três quadrantes são parcelas de variáveis selecionadas a serem identificadas (ε^{∞}, τ_l, e τ_c) em termos de números de iteração.

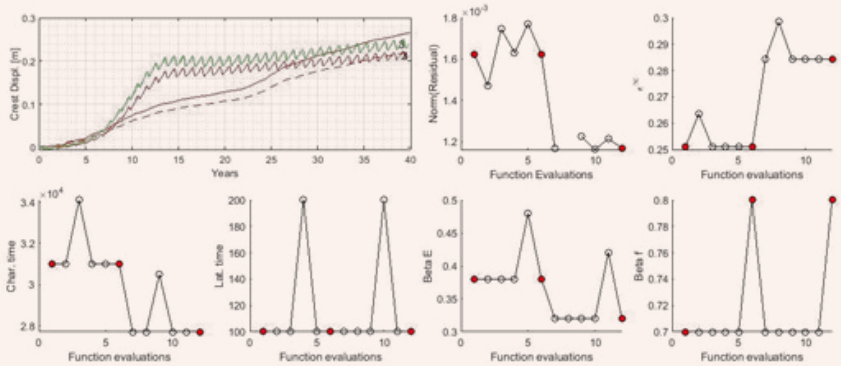


Figura 65.5: Interface gráfica para uma única função residual e cinco variáveis. Veja Fig. 65.7 para um exemplo mais abrangente.

65.6.1 Prática dos mínimos quadrados

66 Para calibração convencional elemento finito, a sequência recomendada é: normalizar ou massa residual; Parâmetros da tela; Examine o posto Jacobiano; Escolha limites fisicamente defensáveis e pontos de partida; Fugir de várias partidas; inspecionar a estrutura residual; e validar independentemente. Capítulo Q desenvolve os algoritmos numéricos, e Apêndice I.4 contém o correspondente MATLAB®Código, cuja descrição completa segue.

65.6.1.1 Programa de Identificação do Parâmetro MATLAB: Descrição

67 As seções anteriores fornecem a estrutura matemática. Esta seção documenta uma implementação baseada em dados que combina com a MATLAB `Isqnonlin` Otimizador para um solucionador externo elemento finito Embora esta versão seja implementada com

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

o programa de análise ATENA (elemento finito), a arquitetura modular do programa torna simples adaptar o código para qualquer outro pacote de análise elemento finito. A implementação atualiza os parâmetros selecionados do material, lança o solucionador, lê respostas monitoradas, avalia resíduos e registra o histórico de identificação sem modificar os arquivos originais.

Visão geral do programa [68] Todas as informações específicas do problema são lidas em uma única planilha, `Log.xlsx`.. Dadas as medidas de campo ou laboratório e um modelo FEAP cuja resposta depende de parâmetros desconhecidos, o programa realiza a seguinte sequência:

1. Leia nomes de arquivos, nomes de parâmetros, nomes do monitor, expressões de agregação, valores alvo e opções de resolução a partir do `Entrada` Folha;
2. Leia o vetor do parâmetro inicial $\mathbf{x}_0$ e recomendados intervalos do arquivo de entrada FEAP;
3. criar uma cópia de trabalho temporária do arquivo de entrada;
4. Criar uma nova folha de registro na linha chamada `PI #n`;
5. Execute uma corrida seca em $\mathbf{x}_0$ para verificar toda a cadeia MATLAB-FEAP;
6. Lançar `Isqnonlin`; em cada avaliação de função, atualizar a entrada temporária, executar FEAP, analisar a saída, as previsões agregadas, e retornar o vetor residual;
7. atualizar um painel mostrando relação predição-alvo, magnitudes residuais em uma escala logarítmica e evolução dos parâmetros;
8. Registre cada um detectado iteração otimizador com seu timestamp, tempo decorrido, valores de parâmetros, relação predição-alvo, e resíduos;
9. Relate os parâmetros identificados, norma residual, bandeira de saída e estatísticas de iteração.

[69] A implementação pretende permanecer independente do problema. O número de parâmetros, previsões, expressões de agregação e medições do alvo podem variar sem alterações na fonte MATLAB. Conversões de unidades são escritas explicitamente nas expressões da planilha; Nenhum fator oculto deformação-para-microstrain é aplicado no código.

Estrutura da Pasta

```
FEAP/
|-- Main.m                    <- entry point: ParIdentification()
|-- ParIdentification.m       <- main function and nested minfunc
|-- Log.xlsx                  <- control spreadsheet and PI logs
|-- input.dat                 <- original FEAP input (never modified)
|-- input_temp.dat            <- working copy (overwritten)
|-- output.dat                <- FEAP output (overwritten)
|
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
‘-- functions/
    |-- createTempInputFile.m
    |-- extractEvaluateValues.m
    |-- initPISheet.m
    |-- logIterationToSheet.m
    |-- readInputSheet.m
    |-- readModelPredValues.m
    |-- runAnalysis.m
    |-- runLSQnonlin.m
    |-- updateEvaluateValues.m
    |-- updatePlots.m
    |
    ‘-- private/
        |-- buildFieldAggFunctions.m
        |-- findKey.m
        |-- isMissingLike.m
        |-- normalizeText.m
        |-- readNumericVectorByKey.m
        |-- readScalarByKey.m
        |-- readTextVectorByKey.m
        ‘-- toText.m
```

[70] O antigo ajudante `Obrigado` Não é exigido pelo atual registrador de PI. O ajudante `Construir o CampoAggFunctions` Compila as expressões da planilha exatamente como está escrito, sem adicionar um fator de escala.

Planilha de controle: Log.xlsx [71] O `Entrada` Folha, Fig. 65.6 usa um layout baseado em palavras-chave. Pilar A contém uma etiqueta descritiva, pilar B contém a chave lida por MATLAB, e pilares C em diante contêm um ou mais valores.

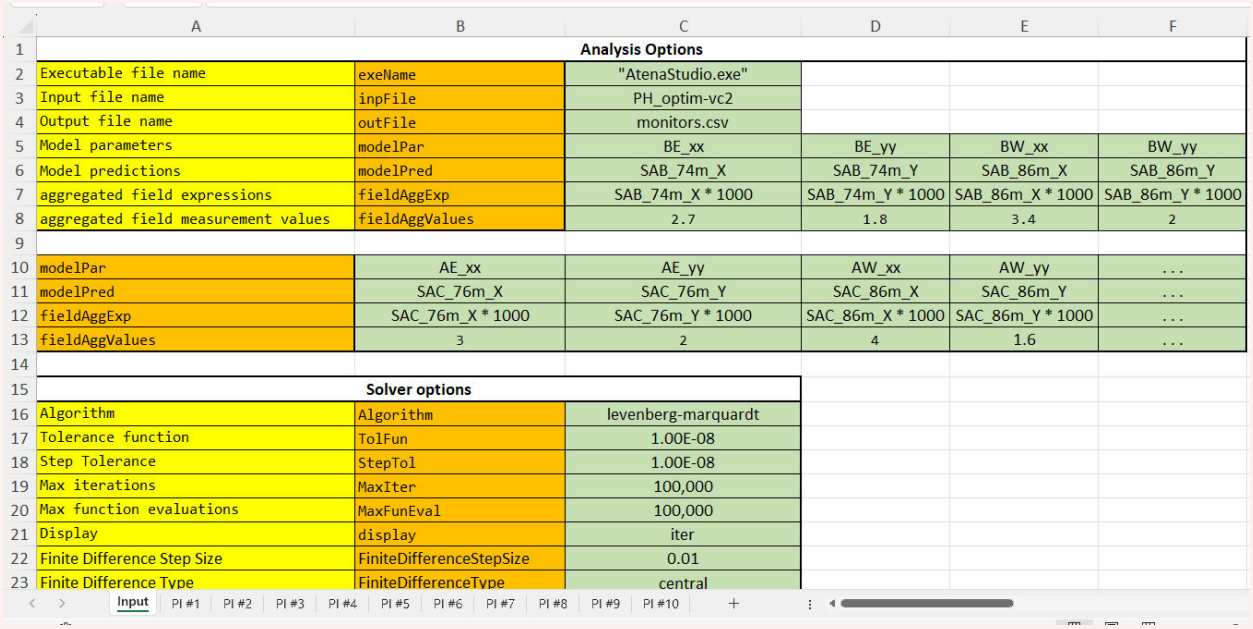
O código busca por chave ao invés de pelo número fixo da linha.

Tabela 65.1: Entradas de configuração do representante em `Log.xlsx`

Configuração	Chave	Valor representativo
Arquivo executável	`exeName`	`D:\FEAP\AtenaConsole.exe`
Arquivo de entrada	`InpFile`	`PH_Optim-vc2`
Arquivo de saída	`Fora do Arquivo`	`Monitores.  CSV`
Parâmetros do modelo	`ModelPar`	`BE_XX, BE_Sim, BW_XX, BW_yy, ...`
Previsão de modelos	`ModeloPred`	`SAB_74m_X, SAB_74m_Y, ...`
Expressões de agregação	`campoAggExp`	`SAB_74m_X*1000, ...`
Medições do alvo	`CampoAggValues`	`2.7, 1.8, 3.4, 2, ...`
Algoritmo	`Algoritmo`	`levenberg-marquardt`
Tolerância de função	`TolFun`	`1e-8`
Tolerância relativa ao passo	`StepTol`	`1e-8`
Máximas iterações	`MaxIter`	`100000`
Avaliações máximas	`MaxFunEval`	`100000`
Passo de diferença finita	`FiniteDiffStepSize`	`0.01`
Tipo de diferença finita	`Tipo Diff Finito`	`Central`
Exibição	`Exibição`	`Iter`

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



	A	B	C	D	E	F
1	**Analysis Options**					
2	Executable file name	exeName	"AtenaStudio.exe"			
3	Input file name	inpFile	PH_optim-vc2			
4	Output file name	outFile	monitors.csv			
5	Model parameters	modelPar	BE_xx	BE_yy	BW_xx	BW_yy
6	Model predictions	modelPred	SAB_74m_X	SAB_74m_Y	SAB_86m_X	SAB_86m_Y
7	aggregated field expressions	fieldAggExp	SAB_74m_X * 1000	SAB_74m_Y * 1000	SAB_86m_X * 1000	SAB_86m_Y * 1000
8	aggregated field measurement values	fieldAggValues	2.7	1.8	3.4	2
9						
10	modelPar	AE_xx	AE_yy	AW_xx	AW_yy	...
11	modelPred	SAC_76m_X	SAC_76m_Y	SAC_86m_X	SAC_86m_Y	...
12	fieldAggExp	SAC_76m_X * 1000	SAC_76m_Y * 1000	SAC_86m_X * 1000	SAC_86m_Y * 1000	...
13	fieldAggValues	3	2	4	1.6	...
14						
15	**Solver options**					
16	Algorithm	Algorithm	levenberg-marquardt			
17	Tolerance function	TolFun	1.00E-08			
18	Step Tolerance	StepTol	1.00E-08			
19	Max iterations	MaxIter	100,000			
20	Max function evaluations	MaxFunEval	100,000			
21	Display	display	iter			
22	Finite Difference Step Size	FiniteDifferenceStepSize	0.01			
23	Finite Difference Type	FiniteDifferenceType	central			

Input | PI #1 | PI #2 | PI #3 | PI #4 | PI #5 | PI #6 | PI #7 | PI #8 | PI #9 | PI #10

Figura 65.6: Arquivo de dados de entrada para o Levenberg... Otimização não linear dos mínimos quadrados

[72] A exata capitalização e ortografia de cada chave de planilha devem corresponder à versão esperada por `LeiaInputSheet.m`.. Internamente, o leitor pode normalizar esses nomes `StepTol` pode ser armazenado como `S.tolX`Mas a planilha em si deve usar a chave implementada.

Unidades e expressões de agregação [73] Os valores dos monitores da FEAP são lidos em suas unidades nativas. Se as saídas FEAP deformação enquanto os alvos estão em microstrain, a conversão pertence à expressão da planilha, por exemplo

```
fieldAggExp    = 1e6*(M02+M08+M12)/3
fieldAggValues = 136  237  228  132
```

Isso torna a convenção da unidade visível e impede que o mesmo fator seja aplicado duas vezes.

Folhas de registro PI [74] Cada corrida cria a próxima folha disponível, `PI #1`, `PI #2`E assim por diante. O cabeçalho em linha é

```
Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
     <Pred/Target...> | <Residual...>
```

Linha 2 é iteração 0 e contém $\mathbf{x}_0$ com zero tempo decorrido. Cada iteração detectada subsequentemente adiciona o vetor de parâmetros, relação predição-alvo e resíduos. Este formato é diretamente ordenável e adequado para plotagem ou pós-processamento independente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Arquivos de Entrada e Saída FEAP [75] Os parâmetros a serem identificados estão localizados em `AVALIAR` Declarações. O valor atual fornece o palpite inicial e o comentário opcional fornece a faixa recomendada:

```
EVALUATE "EcD1 = /*# EcD1 */ 62000"
         // Recommended range 10000 - 50000
```

O arquivo original nunca é substituído; Todas as atualizações são escritas para a cópia temporária.

[76] O analisador de saída escaneia os blocos de monitor solicitados e extrai o último valor de resposta válido para cada monitor. Nomes de previsão estão alinhados com os sufixos listados em `ModeloPred`.. Valores ausentes, não-finitos ou inigualáveis devem parar a corrida seca em vez de serem passados silenciosamente para o otimizador.

Otimização fluxo de trabalho e objetivo [77] Vamos $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ser o vetor das previsões de FEAP agregadas e $\mathbf{y}$ O vetor alvo. O programa retorna

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \tag{65.27}$$

para `Isqnonlin`, o que minimiza $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$.. Se os alvos têm unidades substancialmente diferentes ou níveis de incerteza, eles devem ser normalizados ou ponderados como descrito em §65.4.2; Caso contrário, os maiores resíduos numéricos dominam o ajuste.

Resíduos ponderados e correlacionados na implementação [78] O objetivo pode ser convertido para estatisticamente ponderado mínimos quadrados sem alterar o otimizador. Para medições independentes com desvios padrão declarados s_iRetornem resíduos normalizados.

```
res = (predicted - target) ./ sigmaMeasurement;
```

Então.. `Isqnonlin` minimiza $\sum_i r_i^2/s_i^2$.. Os resíduos brutos de engenharia ainda devem ser retidos no registro para que a normalização não esconda a magnitude ou as unidades do desajustado.

[79] Para erros de medição correlacionados com matriz de covariância $\mathbf{\Sigma}_\varepsilon$, computar um fator de Cholesky inferior $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{\Sigma}_\varepsilon$ e devolver resíduos pré-branqueados:

```
rawRes = predicted(:) - target(:);
L      = chol(SigmaMeasurement,'lower');
res    = L \ rawRes;
```

A norma do quadrado resultante é $\mathbf{r}^T\mathbf{\Sigma}_\varepsilon^{-1}\mathbf{r}$.. A matriz de covariância deve ser positiva definida e expressa em unidades consistentes com o vetor residual bruto.

Correr a seco [80] Antes da otimização, `Minfunc` é avaliado uma vez em $\mathbf{x}_0$.. Isso verifica atualização de arquivos, execução do solucionador, análise de saída, agregação e avaliação residual. O resultado é replicado como iteração 0 na avaliação de função 0 e não é contado como uma iteração otimizadora.

Iterações e avaliações de funções [81] Com uma diferença finita Jacobian, um otimizador pode exigir aproximadamente $n_{\text{par}} + 1$ Avaliação de funções para diferenças na frente e

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

aproximadamente $2n_{\text{par}} + 1$ Para as diferenças centrais, além de etapas do julgamento rejeitadas ou outras avaliações internas. Inferir verdadeiras iterações apenas de um padrão fixo de função-conta é, portanto, uma aproximação. Uma função de saída otimizadora é preferível quando eventos exatos são necessários.

Escala, tolerância e limites 82 As magnitudes dos parâmetros são fornecidas através de `TípicoX`; O código usa valores médios quando faixas finitas recomendadas estão disponíveis. A tolerância ao passo da planilha é dimensional e pode ser convertida internamente em uma escala absoluta. Tolerâncias muito pequenas não garantem uma solução mais precisa e podem causar corridas desnecessárias.

83 Os intervalos recomendados são valiosos para verificar $\mathbf{x}_0$, detectando deriva para valores implausíveis, e configurando algoritmos que impõem limites. O analista deve verificar que os escolhidos `Isqnonlin` Algoritmo e liberação MATLAB fazem cumprir as restrições pretendidas para as dimensões do problema. Um ajuste mal determinado pode convergir numericamente enquanto permanece não único.

Painel e Diagnósticos 84 O painel separa as avaliações de funções das iterações aceitas e exibe:

- Previsão para o alvo em escala linear;
- resíduos absolutos em uma escala logarítmica;
- a evolução de cada parâmetro;
- Um marcador distinto para iteração 0 e marcadores separados para iterações aceitas.

85 Convergência não deve ser julgada pela norma residual. A revisão final deve incluir a bandeira de saída, localização dos parâmetros relativos aos limites, padrões residuais, correlações de parâmetros ou valores singulares Jacobianos, sensibilidade ao palpite inicial, e validação contra observações que não foram usadas para Calibração.

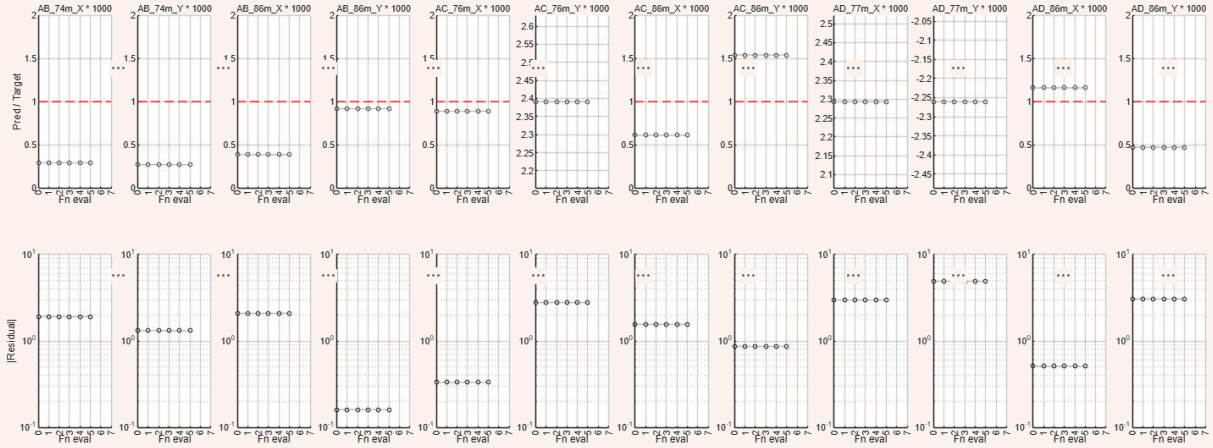
Diagnósticos de identificação pós-corrida recomendados 86 Quando solicitado como saída, `Isqnonlin` Retorna o Jacobiano residual no ponto final. As seguintes quantidades devem ser arquivadas com os parâmetros instalados:

- A classificação numérica e os valores singulares do Jacobiano ponderado ou normalizado;
- Seu número de condição, com o limiar usado para declarar deficiência quase-rank;
- uma matriz de covariância ou correlação de parâmetros aproximados quando as suposições lineares locais são defensáveis;
- A mudança na solução sob palpites iniciais alternativos, passos de diferença finita e limites admissíveis;
- Gráficos de perfil ou ajustes restritos para parâmetros suspeitos de identificação fraca.

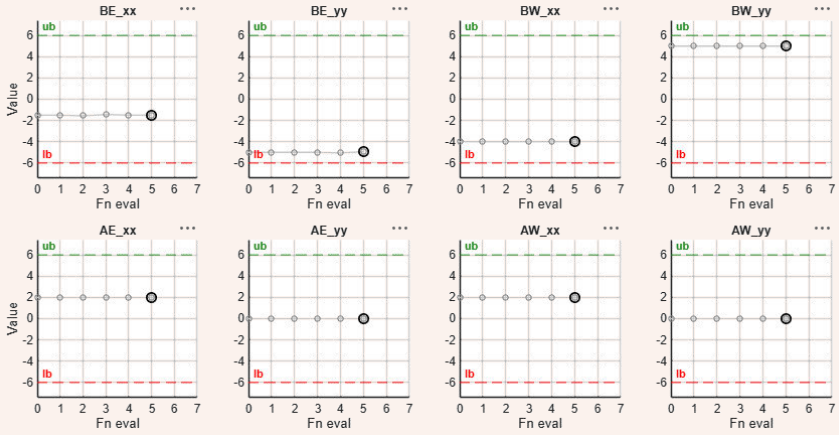
87 Estes diagnósticos são recomendados extensões para o fluxo de trabalho de relatórios;

CÓPIA PARA REVISÃO

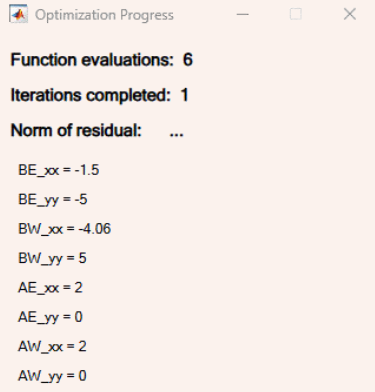
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Doze alvos previstos e resíduos associados



(b) Oito variáveis



(c) Atualização de status ao vivo

Figura 65.7: Painel para o Levenberg, otimização não linear de mínimos quadrados. 12 alvos previstos e 8 variáveis.

Eles não devem ser descritos como saídas automáticas a menos que o código correspondente tenha sido implementado e verificado.

Funções Públicas

Funções particulares de ajudante

Principais estruturas de dados e variáveis de execução

Adicionando um novo problema de identificação

1. Substituir ou renomear os arquivos de entrada e saída do ATENA.
2. Atualizar `exeName`, `InpFile`, e `Fora do Arquivo` Em `Log.xlsx`.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 65.2: Funções principais no programa de identificação de parâmetros

Função	Propósito
`LeiaInputsheet`	Leia todas as configurações baseadas em palavras-chave e construa a estrutura S.
`ExtrairValores de Avaliação`	Leia $\mathbf{x}_0$, limites inferiores, e limites superiores de combinar `AVALIAR` Linhas.
`criarTempInputFile`	Crie a cópia de trabalho com _`Temp` inserido antes da extensão.
`AVALIAR VALUES`	Substitua os valores dos parâmetros na entrada temporária; O modo silencioso opcional é usado durante a corrida.
`Correr a Análise`	Lançar a FEAP de forma sincronizada e retornar seu status e saída do console.
`Tradução`	Analisar os valores de saída e retorno do monitor alinhados com `ModeloPred`.
`InitPISheet`	Crie a próxima fileira `PI #n` Folha e escrever iteração 0.
`LogIterationToSheet`	Anexar o número de iteração, tempo, parâmetros, proporções e resíduos.
`RunLSQnonlin`	Configurar e executar `Isqnonlin`.
`updatePlots`	Criar e atualizar painéis residuais e parâmetros.

Tabela 65.3: Funções auxiliares privadas usadas pelo leitor de planilhas e camada de agregação

Função	Propósito
`Tradução e Sincronia`	Encontre uma chave e devolva o primeiro valor não vazio à sua direita.
`Tradução e Sincronia`	Devolva todos os valores de texto não vazios à direita de uma chave.
`Tradução e Sincronia`	Devolva todos os valores numéricos não vazios à direita de uma chave.
`Construir o CampoAggFunções`	Compile expressões de agregação de planilha em cabos de função sem escalas ocultas.
`FindKey`	Localize uma chave sensível a casos nas células da planilha.
`Está faltando como`	Reconheça entradas vazias, desaparecidas, em branco ou não-finitas como implementadas.
`ParaTexto`	Converta um valor de planilha em texto para comparação normalizada.
`normalizar Texto`	Normalizar texto convertido, incluindo remoção de espaços não quebrantes.

Tabela 65.4: Campos principais da estrutura de configuração S

Campo	Tipo	Propósito
`exeName, InpFile, Fora do Arquivo`	texto	Solucione nomes de arquivos executáveis e entradas/saídas
`ModelPar`	lista	Nomes dos parâmetros a serem atualizados no arquivo de entrada FEAP
`ModeloPred`	lista	Monitore os nomes a serem extraídos da saída FEAP
`campoAggExpr`	lista	Expressões usadas para agregar previsões e realizar conversão de unidades
`CampoAggValues`	vetor	Medições do alvo
`CampoAggFcn`	lista	A função compilada é correspondente às expressões de agregação
`maxFunEval, MaxIter`	escalar	Limites de otimização
`TolFun, TolX`	escalar	Função e tolerâncias internamente normalizadas
`algoritmo, Exibição`	texto	Algoritmo otimizador e modo de exibição
`lb, ub`	Vetores	Limites de parâmetros inferiores e superiores ou intervalos recomendados

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 65.5: Variáveis de tempo de execução selecionadas em `ParIdentificação`

Variável	Tipo	Propósito
`x0`, `lb`, `ub`	Vetores	Parâmetros iniciais e limites admissíveis lidos do arquivo de entrada
`InpFileTemp`	texto	Arquivo temporário de entrada FEAP sobrescrito em cada avaliação
`PiSheetName`	texto	Folha de identificação atual
`NFnEval`, `Não`	inteiros	Avaliação de funções e contadores de detecção de energia
`X`	Matriz	Histórico do parâmetro
`Previsto, Last`, `RestLast`	Vetores	Mais recentes previsões agregadas e resíduos
`x`, `Resnorm`, `Res`	Saídas	Parâmetros finais, norma residual e vetor residual
`Flag de saída`, `saída`	Saídas	Razão de encerramento e estatísticas otimizadoras

3. Digite os nomes dos parâmetros, sufixos do monitor, expressões de agregação e medições do alvo.
4. Verifique as unidades e inclua explicitamente cada conversão em `campoAggExp`.
5. Verifique se cada parâmetro identificado tem um valor inicial defensável e intervalo no arquivo de entrada.
6. Execute a corrida e inspecione todos os resíduos antes de permitir que a otimização não vigiada continue.
7. Após a convergência, repita a corrida de valores iniciais alternativos e valide o modelo calibrado independentemente.

[88] Nenhuma mudança de código MATLAB deve ser necessária quando o novo problema segue as mesmas convenções de entrada e saída. Uma mudança de código é necessária quando o formato do solucionador, analisador monitor, regra de ponderação ou lógica de otimização muda.

Decisões e Limitações de Design

Registro em linha: uma fileira por iteração é mais fácil de filtrar, plotar e exportar do que a antiga organização pilar-wise.

Corrida seca como iteração 0: a cadeia de solução externa completa é exercitada antes da otimização, enquanto o resultado permanece visualmente distinto do histórico formal do otimizador.

Unidade de escala explícita: Cada conversão está registrada em `campoAggExp`; As funções MATLAB não adicionam um fator de escala oculto.

Configuração guiada por planilhas: O mesmo código pode servir diferentes modelos quando suas convenções de arquivos e monitores são compatíveis.

Detecção de iteração: Inferir iterações de contagens de avaliação de função é aproximado, especialmente com diferenças centrais, passos rejeitados, ou mudanças de algoritmo. Uma função de saída é a implementação preferencial a longo prazo.

Confiabilidade do processo externo: Cada execução da FEAP deve ser verificada quanto

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ao status de saída, criação esperada de saída e frescura do arquivo e valores finitos do monitor antes que o resíduo seja aceito.

65.7 Fluxos de trabalho híbridos e melhores práticas

65.7.1 Calibração e validação

89 Calibração usa observações para estimar parâmetros. Validação testa o modelo calibrado contra observações independentes, caminhos de carregamento, locais ou períodos de tempo. Reutilizar os mesmos dados para ambas as tarefas mede, não capacidade preditiva. Sempre que o conjunto de dados é pequeno, validação cruzada, sensores retidos, ou um estágio experimental separado deve ser usado para expor sobreposição.

65.7.2 Aplicações estruturais

90 Os métodos de identificação dos parâmetros se aplicam em todo o ciclo de vida da engenharia estrutural:

- **Calibração constitutiva:** Ajustar parâmetros fisicamente significativos para respostas laboratoriais, e então validar sob diferentes caminhos de carregamento.
- **Monitoramento estrutural da saúde:** Modelos atualizados de frequências, formas modais, deformações, deslocamentos, ou tendências de longo prazo enquanto contabilizam a qualidade dos sensores e os efeitos ambientais.
- **Infraestrutura de envelhecimento:** combinar dados de campo com conhecimento prévio para inferir amplitudes, taxas e variação espacial.
- **Exigência sísmica e fragilidade:** propagar incerteza de parâmetros em modelos de demanda, probabilidades de estado limite e funções de fragilidade.
- **Atualização sequencial:** assimilar novas observações quando chegam usando filtros bayesianos ou calibração em lote repetida.

65.7.3 Quadro de Decisão do Fluxo de Trabalho

91 Um fluxo de trabalho híbrido prático pode combinar múltiplas estratégias em sequência:

1. **Limpeza de dados:** Se houver suspeita de contaminação, aplique o RANSAC 65.3.2) para identificar um sólido conjunto de consensos de dados mais internos.
2. **Calibração inicial:** Use Levenberg-Marquardt (Seção) 65.4) sobre os dados limpos para obter estimativas de parâmetros iniciais e para detectar problemas de identificação.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

3. **Validação independente:** Teste o modelo calibrado contra dados retidos ou diferentes condições de carga.
4. **Incerteza posterior:** Se a incerteza dos parâmetros afetar materialmente as decisões a jusante, use inferência Bayesiana (Seção 65.5) para quantificar distribuições posteriores, intervalos credíveis e sensibilidades a suposições anteriores.
5. **Trilha de auditoria:** Preservar registros de exclusões de dados, pesos, antecedentes, versões de modelos e diagnósticos de convergência para reprodutibilidade e revisão por pares.

92 Cada estágio deve preservar evidências documentadas de escolhas e resultados de modelagem. Esta disciplina melhora o rigor científico e a comunicação prática com os interessados.

65.8 De Data, Dúvidas e Decisões para Engenharia sísmica baseada em desempenho

93 O propósito da seção final é a síntese. Capítulo 64 estabeleceu como inputs incertos e qualidade de dados afetam as previsões estruturais; o presente capítulo estabeleceu como parâmetros selecionados são inferidos das observações. Juntos eles fornecem a ponte metodológica para os capítulos seguintes sobre sismologia (capítulo 67), análise computacional avançada (capítulo 69), avaliação de riscos sísmicos (capítulo 70E, em última análise, PBEE (capítulo 72).

94 Design sísmico baseado em desempenho surgiu porque a conformidade de código sozinho não indica como uma determinada estrutura é esperada para executar, que dano é provável, ou quais consequências seguem (Hamburger et al., 2004). PBEE requer uma cadeia de modelos conectando o local perigo, resposta estrutural, danos e consequências. Cada ligação contém incerteza, e vários links contêm parâmetros que devem ser calibrados a partir de laboratório ou evidência de campo.

95 O fluxo de trabalho resumido na Figura 65.8 é:

Caracterização do local: estabelecer o modelo de sismicidade do local, características físicas, instrumentação, registro de monitoramento a longo prazo, e, quando útil, dados de teste forçado-vibração.

Elemento finito modelo: selecione as características de análise necessárias, modelos constitutivos, descrições de materiais, condições de contorno, e plataforma computacional. Recorde suposições de modelos explicitamente.

Análise determinística inicial: verificar o equilíbrio, unidades, e mecanismos de resposta dominantes antes de introduzir entradas estocásticas ou otimização.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

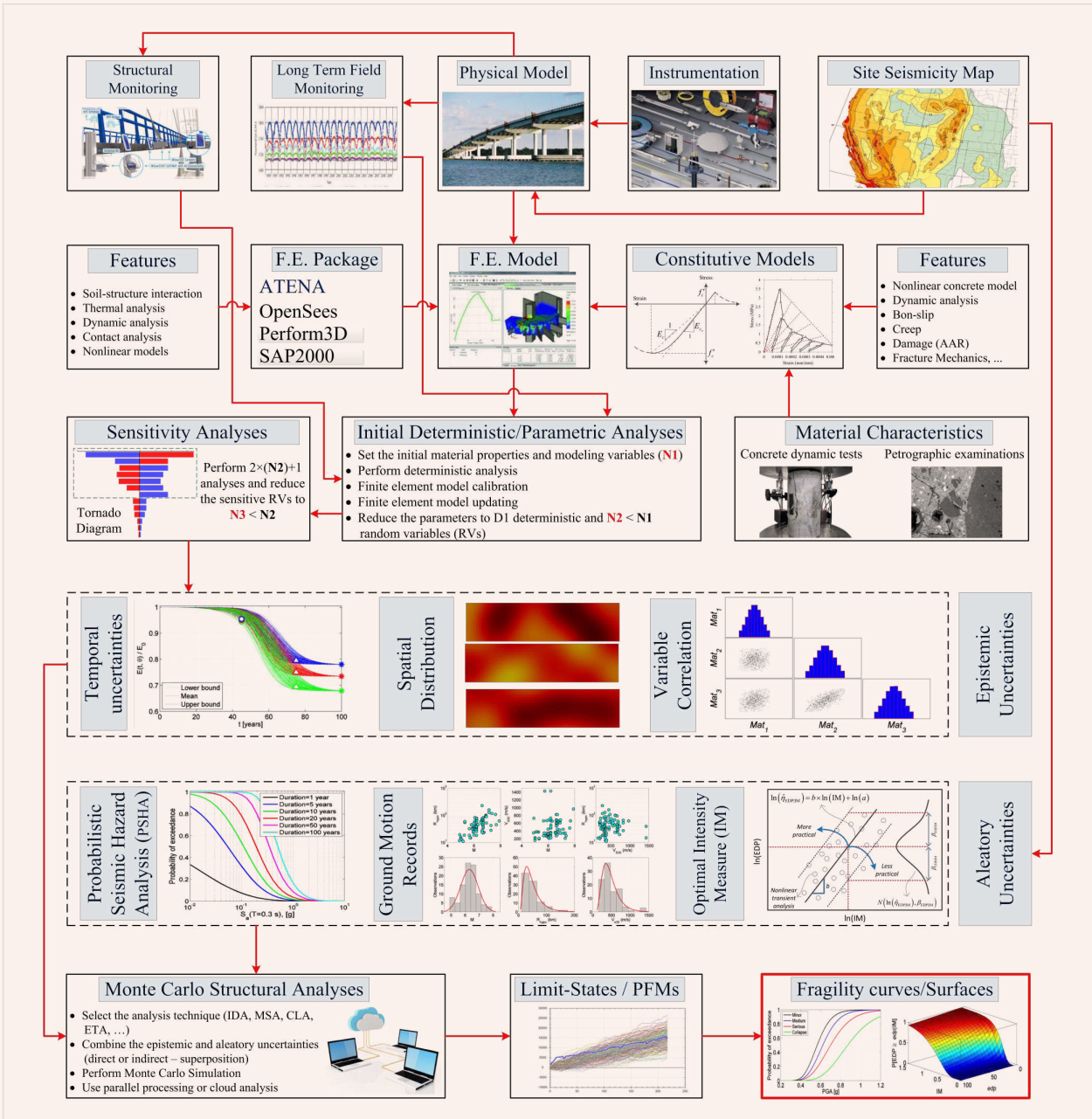


Figura 65.8: Integração da caracterização do local, desenvolvimento de modelos, incerteza, identificação dos parâmetros, análise estrutural, e avaliação da fragilidade

Rastreamento de sensibilidade: Atribua faixas plausíveis ou distribuições para entradas candidatas. Um estudo preliminar de baixo custo pode usar $2N + 1$ avaliações únicas e um diagrama de tornados; Um problema não linear de alta dimensão é melhor rastreado com Morris. Se uma alocação quantitativa de variância for necessária após o rastreamento, aplique índices Sobol no conjunto reduzido.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Identificação do parâmetro: Use medidas para calibrar os parâmetros influentes e praticamente identificáveis. Resíduos de peso de acordo com a incerteza da medição, inspecionar correlação Jacobiana e parâmetros, usar métodos robustos quando outliers brutos são plausíveis, e validar o modelo calibrado independentemente.

Incerteza epistêmica: representam um conhecimento incompleto das propriedades do material, campos espaciais, condições de contorno, estados de degradação, parâmetros calibrados e discrepância no modelo. Preservar dependência através de modelos de covariância ou distribuições conjuntas.

Incerteza Aleatorativa: representam variabilidade inerente, particularmente evento-a-evento e registro-para-gravar a variabilidade de movimento em terra. Análise de risco sísmico probabilística fornece curvas de perigo; Registros apropriados e medidas de intensidade são então selecionados (PEER, 2014; Padgett, Nielson e DesRoches, 2008).

Probabilística análise estrutural: propagar a incerteza epistêmica e aleatória através de análises não lineares usando Monte Carlo, LHS, substitutos, ou outros métodos verificados. A economia computacional não deve ser obtida omitindo fontes de incerteza influentes.

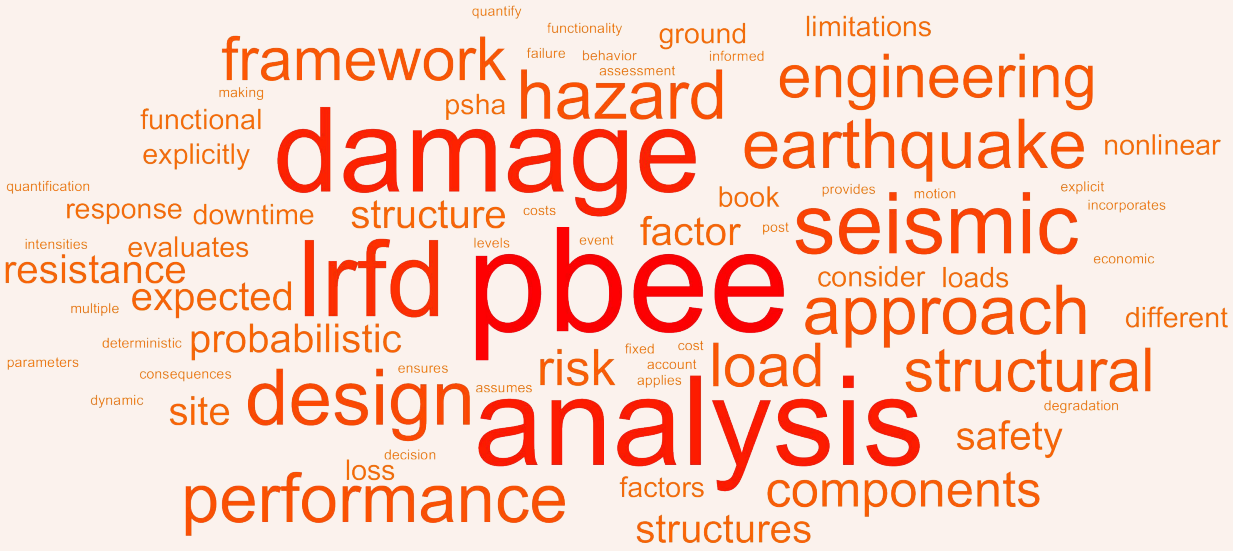
Capacidade e funções de dano: definir estados limites e potenciais modos de falha usando mecânica, experimentos, observações e quantidades calibradas de resposta.

Fragilidade e desempenho: Construir curvas de fragilidade ou superfícies e combiná-los com modelos de perigo e consequência para apoiar decisões informadas do risco.

[96] Esta sequência não é estritamente de sentido único. Novos dados de monitoramento podem desencadear recalibração; A análise de sensibilidade pode revelar que medições adicionais são necessárias; validação pode expor discrepância de modelo; E os resultados da PBEE podem identificar qual incerteza afeta mais a decisão. Os próximos capítulos fornecem os componentes de risco e análise necessários para completar este ciclo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 66

Intermezzo

Abstract

Este capítulo serve como uma transição entre o tradicional projeto de cargas e fatores de resistência (LRFD) e Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE). Enquanto a LRFD fornece uma estrutura de segurança determinística, falta avaliação explícita de danos e quantificação de risco.

PBEE supera essas limitações integrando análise de perigo, avaliação estrutural da resposta, estimativa de danos e avaliação de perdas em uma abordagem unificada e informada do risco.

Este capítulo descreve a motivação para adotar o PBEE e introduz a estrutura do livro, que sistematicamente se constrói em direção a um abrangente framework de "Battom-up".

66.1 Limitações do projeto de fatores de carga e resistência (LRFD) 2253
66.2 Por que se mudar para Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE)? 2254
66.3 Os Quatro Componentes de PBEE . 2255
66.4 Estrutura do Livro 2256

66.1 Limitações do projeto de fatores de carga e resistência (LRFD)

1 Design de Factores de Carga e Resistência (LRFD), §36.3, é uma metodologia amplamente utilizada em engenharia estrutural, particularmente para o aço e concreto projeto. Embora forneça uma estrutura probabilística para explicar incertezas em cargas e propriedades materiais, tem várias limitações que exigem a transição para Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE):

CÓPIA PARA REVISÃO

Verificação de segurança em nível único LRFD garante que as estruturas permaneçam seguras sob cargas predefinidas, mas não considera explicitamente critérios de desempenho além da força e capacidade de manutenção, como reparação pós-terremoto ou inatividade.

Falta de consideração explícita sobre danos: LRFD garante que uma estrutura não colapse sob o máximo estados limites mas não quantifica os danos esperados sob diferentes intensidades de terremoto. Estruturas projetadas por LRFD podem sofrer danos significativos durante um evento sísmico, levando a altos custos de reparo ou perda de funcionalidade.

Inflexibilidade para cenários complexos de carregamento: O LRFD é baseado em uma abordagem linear baseada em fatores, que não considera explicitamente comportamento não linear, degradação ou dano cumulativo. Ele assume combinações de carga fixa, enquanto ações sísmicas são dinâmicas e variam em intensidade, duração e conteúdo de frequência.

Margens de segurança uniformes ao invés de design baseado em risco: LRFD aplica fatores genéricos de resistência que não são específicos do local ou estrutura. Ele não diferencia estruturas com maiores consequências de fracasso (por exemplo, hospitais vs. Depósitos. A mesma filosofia de design se aplica a regiões com riscos sísmicos muito diferentes.

Incapacidade de contabilizar Região de Confiança Em Movimento do solo: A LRFD assume um conjunto determinístico de fatores de carga, enquanto terremotos produzem demandas altamente variáveis. Não incorpora análise de risco sísmico probabilístico (PSHA) para quantificar a variabilidade específica do local.

66.2 Por que se mudar para Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE)?

2 Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) aborda essas limitações, mudando de uma abordagem prescritiva baseada em código para um quadro informado pelo risco que avalia estruturas sob múltiplas intensidades sísmicas. As principais vantagens incluem:

Objetivos de Desempenho Explícito: Em vez de apenas verificar a força e a capacidade de manutenção, PBEE avalia vários níveis de desempenho:

- **Operação (O)**:. Nenhum dano significativo, a estrutura continua funcional.
- **Ocupação imediata (IO)**:. Pequeno dano, totalmente reparável.
- **Segurança de Vida (LS)**:. Dano moderado, reparável mas não funcional imediatamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Prevenção de colapso (CP)**:. Graves danos, mas nenhum fracasso global.

Quantificação Direta de Consequências Econômicas e Funcionais: PBEE incorpora decisões baseadas em custos, estimando:

- Custos esperados de reparo.
- Espera-se tempo de parada.
- Esperavam baixas.

Design baseado em risco usando a Probabilística Análise de Riscos Sísmicos (PSHA): PBEE incorpora curvas de perigo específicas do local em vez de usar fatores de carga fixa, permitindo que os projetos reflitam o risco sísmico real.

Análise não linear e comportamento estrutural realista: PBEE depende de análise não linear da história do tempo (NLTHA), capturando progressão de danos, rendimento e degradação, o que LRFD não faz.

Abordagem Orientada por Resiliência; O LRFD não considera explicitamente a funcionalidade pós-terremoto, enquanto o PBEE permite que os engenheiros projetem uma recuperação rápida após um evento.

66.3 Os Quatro Componentes de PBEE

[3] PBEE é estruturado em torno de quatro componentes interconectados, como ilustrado na figura. 66.1:

1. **Análise de Risco:** Quantifica a probabilidade de experimentar diferentes níveis de tremor no solo em um determinado local usando *Análise Probabilística de Risco Sísmico* (PSHA), chapter 67.
2. **Análise estrutural:** Avalie a resposta estrutural às cargas sísmicas, incorporando *Análise dinâmica não linear* e parâmetros de demanda de engenharia (PEDs), chapter 69.
3. **Análise de Danos:** Usa parâmetros de resposta para estimar danos físicos *Componentes estruturais e não estruturais*, chapter 70.
4. **Análise de perdas:** Traduz danos para *Perdas econômicas, inatividade e estimativas de baixas*, permitindo a tomada de decisão baseada em custos, chapter 71.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

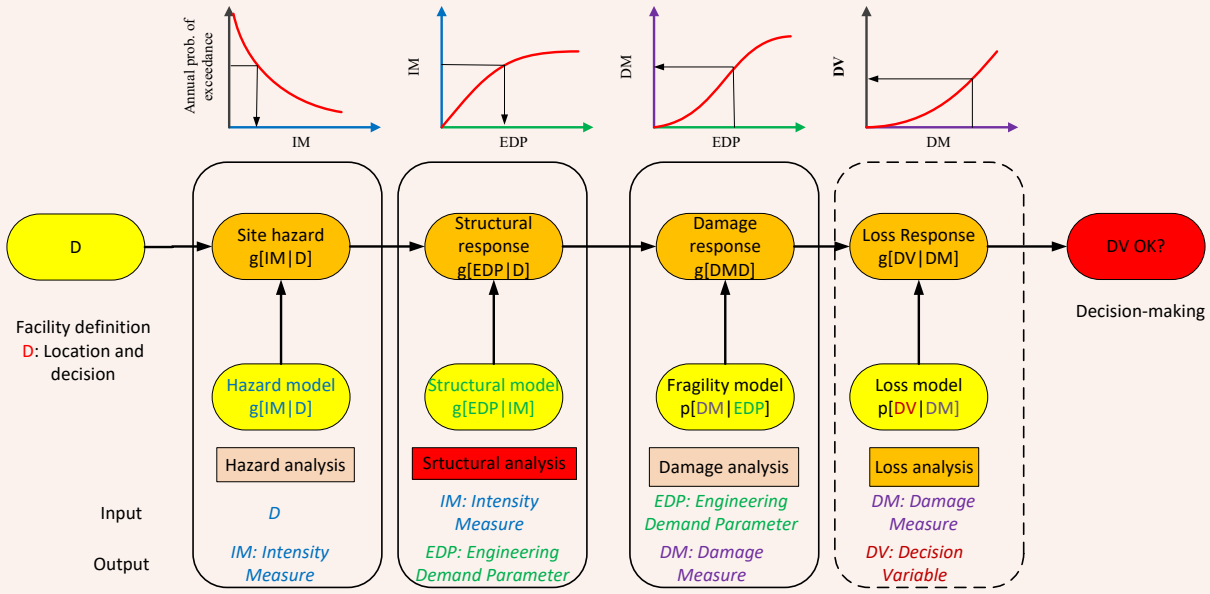


Figura 66.1: Quatro componentes de PBEE

66.4 Estrutura do Livro

4 Há duas possíveis abordagens para introduzir PBEE:

1. Aproximação de cima para baixo: Fornecer uma visão geral do PBEE primeiro, e discutir cada um dos quatro componentes separadamente.
2. Abordagem ascendente: Explore cada componente em detalhes primeiro, depois sintetize-os dentro da estrutura PBEE.

5 Este livro adota o *Abordagem de baixo para cima.*. Assim, os próximos quatro capítulos examinarão individualmente a análise de perigo, análise estrutural, análise de danos e análise de perdas. O capítulo final vai então integrar esses elementos, formando a **culminação da estrutura PBEE.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 67

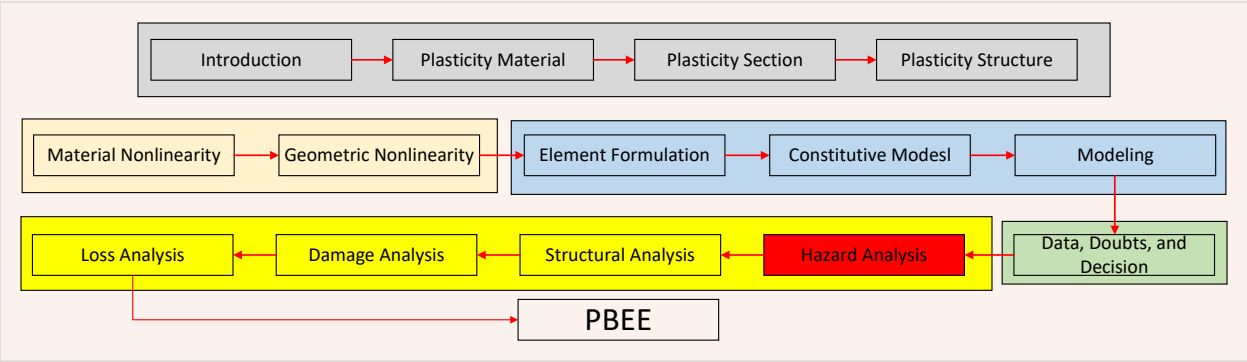
Análise de Riscos

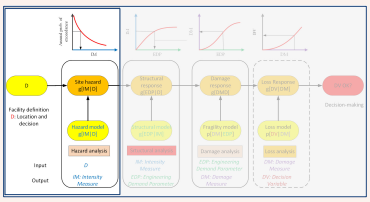
Abstract

Esta seção explica os fundamentos da análise de riscos sísmicos como parte de engenharia sísmica. De acordo com Elnashai e Di Sarno, 2015, Engenharia sísmica é um ramo de engenharia preocupado com a estimativa das consequências do terremoto e da atenuação dessas conseqüências. É um assunto interdisciplinar envolvendo sismólogos, engenheiros estruturais e geotécnicos, arquitetos, planejadores urbanos, tecnólogos da informação e cientistas sociais.

67.1 Introdução 2258
67.2 Relacionamento de recorrência . . . 2258
67.3 Modelo de atenuação 2261
67.3.1 Fundamentos 2261
67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997) 2262
67.3.3 Avaliação paramétrica 2263
67.4 Análise de risco sísmico determinista 2265
67.5 Análise de risco sísmico probabilístico 2266
67.6 Hora da ocorrência 2268
67.7 Curvas de perigo sísmico 2268
67.8 Mapas de perigo sísmicos 2270
67.9 Desagregação de riscos sísmicos . . 2271
67.10 Alvo espectros de resposta 2273
67.11 Simulação estocástica movimento do solo 2276
67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal 2277
67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b) . . . 2279
67.12 Funções de excitação do tempo de perseverança 2281
67.12.1 Primeira geração de ETEFs . 2282
67.12.2 Segunda geração de ETEFs . 2282
67.12.3 Terceira geração de ETEFs . . 2284
67.12.4 Quarta geração de ETEFs . . 2284
67.12.5 Quinta geração de ETEFs . . 2285
67.13 Ex 67.1: Análise de riscos sísmicos 2287

CÓPIA PARA REVISÃO





Escrito por M. Amin Hariri-Ardebili em *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* por Saouma e Hariri-Ardebili, 2021

67.1 Introdução

O risco sísmico associado a uma região depende de 1) probabilidade de ocorrência de um terremoto causando um certo nível de tremor de terra (risco sismo) e 2) vulnerabilidade estrutural das construções. Análise de risco sísmico requer dois modelos separados:

- Modelo de consequência (relação de recorrência/lei): descreve distribuição geográfica de potenciais zonas de origem ativa (fontes sismotectônicas) e distribuição de magnitudes em cada fonte.
- Modelo de atenuação: descreve o efeito de um terremoto originado de uma fonte sismotectônica específica, em qualquer local determinado, em função da magnitude e distância entre a fonte e o local.

67.2 Relacionamento de recorrência

Relacionamentos de recorrência expressam a probabilidade de um terremoto de um determinado tamanho ocorrendo na fonte dada durante um período específico de tempo,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

por exemplo. Um ano. O Gutenberg e Richter, 1954 A relação frequência-magnitude é expressa como Figura 67.1:

$$\ln N_M = a - b\,M$$
$$\log N_M = a' - b'\,M$$

Onde a e.. b são constantes de modelos que podem ser avaliados a partir de dados observacionais sismológicos através do ajuste menos quadrado. N_M é o número de terremotos de magnitude maior ou igual a M por unidades de tempo e unidades de área. A relação entre a e.. a' e também b e.. b' é:

$$a = 2.3025a', \qquad b = 2.3025b'$$

Valores típicos para a' e.. b' (Kaila e Narain, 1971):

- Canadá Ocidental: $a' = 5.05$; $b' = 1.09$
- Japão: $a' = 6.86$; $b' = 1.22$
- Oeste dos Estados Unidos: $a' = 5.94$; $b' = 1.14$
- Leste dos Estados Unidos: $a' = 5.79$; $b' = 1.38$

Pode-se notar que o $\frac{1}{N_M}$ representa o período de retorno em unidades de tempo.

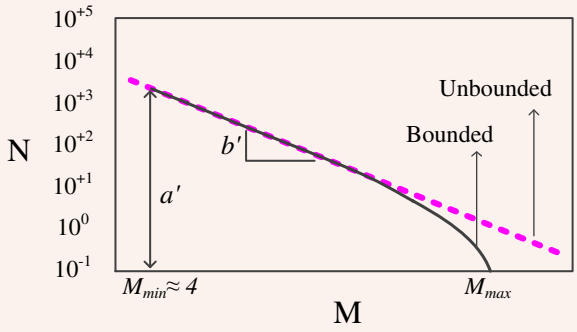


Figura 67.1: A lei de recorrência do Gutenberg-richter

Registros de eventos com $M < 4$, embora bastante numerosos, voltar apenas alguns anos. Estes dados são geralmente excluídos ao calcular a relação magnitude-recorrência, pois podem dar um viés enganador. Assim, $M_{min} \approx 4$.. Por outro lado, para qualquer linha de falha, há uma magnitude máxima alcançável. M_{max} surge por causa de restrições físicas que limitam o tamanho máximo de um evento. Assim, a lei de recorrência deve ser modificada para capturar M_{max}.

A lei de recorrência limitada (modificada) Gutenberg-Richter pode ser escrita como uma relação quadrática, Figura 67.1:

$$N_M = N_{M_{min}} e^{-b(M - M_{min})} \; ; \quad M > M_{min}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde $N_{M_{min}} = e^{a-bM_{min}}$.

Considerando que a probabilidade pode ser interpretada como uma frequência relativa, o acumulado distribuição de probabilidade (mostrado com capital) F) de magnitude do terremoto pode então ser expressa como:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{M}}(M) &= P\left[\mathfrak{M} < M | \mathfrak{M} > M_{min}\right] \\ &= \frac{N_{M_{min}} - N_M}{N_{M_{min}}} = 1 - e^{-b(M-M_{min})} \end{aligned}$$

e sua função de densidade de probabilidade correspondente (mostrada com pequena f"Seremos:

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{d}{dM} F_{\mathfrak{M}}(M) = be^{-b(M-M_{min})}$$

Portanto, o limite Gutenberg-Richter é modificado aplicando um limite superior:

$$N_M = N_{M_{min}} \frac{e^{-b(M-M_{min})} - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}};\ M_{min} \leq M \leq M_{max}$$

A correspondente função de distribuição cumulativa torna-se

$$F_{\mathfrak{M}}(M) = P\left[\mathfrak{M} < M | M_{min} \leq M \leq M_{max}\right] = \frac{1 - e^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

e finalmente, a função de densidade de probabilidade correspondente é

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{be^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

A lei de recorrência aplica-se sobre a área geométrica de uma determinada fonte de terremoto. Portanto, a definição da geometria das fontes do terremoto torna-se crítica na análise de riscos sísmicos. Em geral, uma fonte sísmica pode ser classificada como um dos seguintes modelos (Filiatrault, 2013), Figura 67.2:

- Fontes: Terremotos originados de atividade vulcânica ocorrem tipicamente em áreas pequenas o suficiente para serem caracterizadas como fontes pontuais. As falhas com curto comprimento de ruptura também podem ser consideradas como fonte pontual.
- Fonte da linha: Aviões de falha propagando-se para a superfície são geralmente bem definidos e geram terremotos rasos na ou perto da superfície. Essas fontes podem ser consideradas como fontes unidimensionais.
- Fonte da superfície vertical: Pode ser usado para modelar regiões com terremotos bem definidos, mas mais profundos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

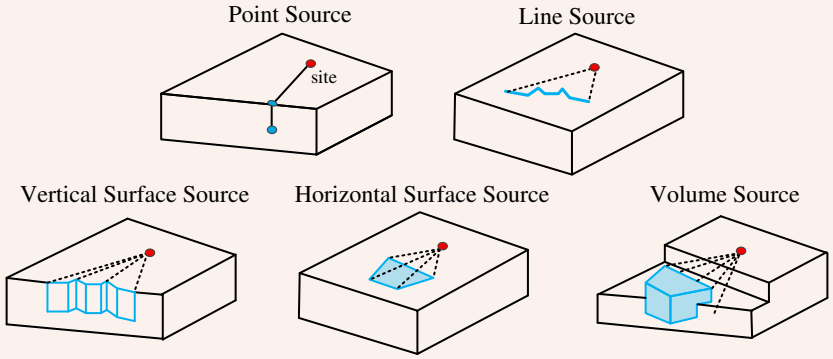


Figura 67.2: Classificação de fontes sísmicas

- Fonte de superfície horizontal: Em regiões onde a falha do terremoto é mal definida (por exemplo: No nordeste da América), falhas individuais não são facilmente identificadas. Se terremotos rasos ocorrem nessas regiões, podem ser categorizados como fontes horizontais de superfície.
- Fonte do volume: Em regiões onde a falha do terremoto é mal definida e terremotos profundos ocorrem, eles são caracterizados por grandes fontes de volume. A profundidade focal pode variar.

67.3 Modelo de atenuação

67.3.1 Fundamentos

Uma relação de atenuação é uma função que é usada para estimar diferentes medidas de intensidade movimento do solo em função da magnitude e distância (Atkinson e Boore, 1995; Somerville et al., 1997; Youngs et al., 1997).

$$\text{IM} = f\left(M, R\right) \tag{67.1}$$

onde IM é medida de intensidade, por exemplo. PGA, $S_a(0.2s)$, etc.

Na realidade, muitas variáveis estão envolvidas que também são difíceis de avaliar corretamente. Assim, um alto nível de Região de Confiança está associado a relações de atenuação. As relações de atenuação são às vezes chamadas de equações de predição (GMPE). *Equação de Predição* A forma funcional mais famosa para a Equação 67.1 é:

$$\begin{aligned}\log\left(\text{IM}\right) = \log(b_1) + \log\left[f_1(M)\right] + \log\left[f_2(R)\right] \\ + \log\left[f_3(M,R)\right] + \log\left[f_4(E_i)\right] + \log(\varepsilon)\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde E_i é possível fonte, local e efeitos geológicos e geotécnicos das estruturas; ε é um parâmetro que representa o Região de Confiança e erros.

67.3.2 Boore, Joyner e Fumel (1997)

Foram propostas centenas de GMPEs para diferentes regiões e responsáveis por vários níveis de complexidade. Douglas, 2011 resumiu todas essas relações de 1964-2010. Por exemplo, a seguinte equação foi proposta por Boore, Joyner e Fumal, 1997 para coordenadas espectrais em locais de rocha:

$$\ln(\mathrm{Y}) = b_1 + b_2(M-6) + b_3(M-6)^2 + b_5 \ln(r) + b_V \ln\left(\frac{V_S}{V_A}\right)$$

Onde

$$r = \sqrt{r_{jb}^2 + h^2}$$

$$b_1 = \begin{cases} b_{1SS} & \text{for strike-slip earthquakes} \\ b_{1RV} & \text{for reverse-slip earthquakes} \\ b_{1ALL} & \text{if mechanism is not specified} \end{cases}$$

A variável Y é aceleração espectral (5% amortecimento) em [g]; M é a magnitude do momento, V_S é a velocidade média de onda cisalhamento em [M/s] nos 30 metros superiores do perfil em consideração, e V_A é a referência cisalhamento velocidade da onda em [M/s].

O r_{jb} é a distância horizontal mais próxima em [km] do local para a projeção da superfície da fonte, e h é profundidade. Todos os coeficientes estão dentro [km] e listado na Tabela 67.1.

O V_S pode ser simplesmente estimado a partir da tabela 67.2.. Pode-se notar que Y é o valor médio da aceleração espectral. Portanto, ln (Y) será o valor médio previsto. Além disso, $\sigma_{\ln(\mathrm{Y})}$ É o desvio padrão de ln (Y).

Diferentes definições da distância local-a-fonte são, Figura 67.3:

- Distância da ruptura: A menor distância da estação até a superfície de ruptura
- Distância Joyner-Boore: A menor distância horizontal para a projeção vertical da ruptura
- Distância sismogênica: a menor distância de um local para um ponto em uma superfície de ruptura que é mais profundo do que alguma profundidade sismogênica mínima
- Profundidade sismogênica: profundidade dos materiais de superfície (supõe que a ruptura da superfície próxima em sedimentos não é sismogênica)
- Distância hipocentral: A distância da estação para o hipocentro

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 67.1: Coeficientes dependentes do período de Boore, Joyner e Fumal, 1997 Modelo

Ponto final	b_{1ss}	b_{1RV}	b_{1ALL}	b_2	b_3	b_5	b_V	V_A	h	$\sigma_{\ln(Y)}$
0	-0.313	-0.117	-0.242	0.527	0	-0.778	-0.371	1396	5.57	0.52
0.1	1.006	1.087	1.059	0.753	-0.226	-0.934	-0.212	1112	6.27	0.479
0.12	1.109	1.215	1.174	0.721	-0.233	-0.939	-0.215	1452	6.91	0.485
0.14	1.135	1.261	1.208	0.707	-0.23	-0.938	-0.228	1718	7.18	0.489
0.16	1.112	1.257	1.192	0.702	-0.226	-0.935	-0.248	1910	7.24	0.495
0.18	1.063	1.222	1.151	0.705	-0.216	-0.93	-0.27	2037	7.16	0.499
0.2	0.999	1.17	1.089	0.711	-0.207	-0.924	-0.292	2118	7.02	0.502
0.22	0.925	1.104	1.019	0.721	-0.198	-0.918	-0.315	2158	6.83	0.508
0.24	0.847	1.033	0.941	0.732	-0.189	-0.912	-0.338	2178	6.62	0.511
0.26	0.764	0.958	0.861	0.744	-0.18	-0.906	-0.36	2173	6.39	0.514
0.28	0.681	0.881	0.78	0.758	-0.168	-0.899	-0.381	2158	6.17	0.518
0.3	0.598	0.803	0.7	0.769	-0.161	-0.893	-0.401	2133	5.94	0.522
0.4	0.212	0.423	0.311	0.831	-0.12	-0.867	-0.487	1954	4.91	0.538
0.5	-0.122	0.087	-0.025	0.884	-0.09	-0.846	-0.553	1782	4.13	0.556
0.6	-0.401	-0.203	-0.314	0.928	-0.069	-0.83	-0.602	1644	3.57	0.569
0.7	-0.634	-0.452	-0.555	0.962	-0.053	-0.818	-0.639	1545	3.2	0.582
0.8	-0.829	-0.666	-0.76	0.992	-0.041	-0.809	-0.666	1476	2.98	0.593
0.9	-0.993	-0.848	-0.933	1.018	-0.035	-0.802	-0.685	1432	2.89	0.604
1	-1.133	-1.009	-1.08	1.036	-0.032	-0.798	-0.698	1406	2.9	0.613
1.1	-1.249	-1.145	-1.208	1.052	-0.03	-0.795	-0.706	1396	2.99	0.622
1.2	-1.345	-1.265	-1.315	1.064	-0.032	-0.794	-0.71	1400	3.14	0.629
1.3	-1.428	-1.37	-1.407	1.073	-0.035	-0.793	-0.711	1416	3.36	0.637
1.4	-1.495	-1.46	-1.483	1.08	-0.039	-0.794	-0.709	1442	3.62	0.643
1.5	-1.552	-1.538	-1.55	1.085	-0.044	-0.796	-0.704	1479	3.92	0.649
1.6	-1.598	-1.608	-1.605	1.087	-0.051	-0.798	-0.697	1524	4.26	0.654
1.7	-1.634	-1.668	-1.652	1.089	-0.058	-0.801	-0.689	1581	4.62	0.66
1.8	-1.663	-1.718	-1.689	1.087	-0.067	-0.804	-0.679	1644	5.01	0.664
1.9	-1.685	-1.763	-1.72	1.087	-0.074	-0.808	-0.667	1714	5.42	0.669
2	-1.699	-1.801	-1.743	1.085	-0.085	-0.812	-0.655	1795	5.85	0.672

Tabela 67.2: Estimado V_S baseado na classe do site

Local NEHRP classe B	1070 m/s
Local NEHRP classe C	520 m/s
Local NEHRP classe D	250 metros
Rock	620 m/s
Solo	310 m/s

67.3.3 Avaliação paramétrica

Pode-se derivar as seguintes observações generalizadas para os GMPES, Figura 67.4:

- Aumentar a distância diminui a medida de intensidade (Y).
- Aumentar a magnitude aumenta a intensidade da medida (Y).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

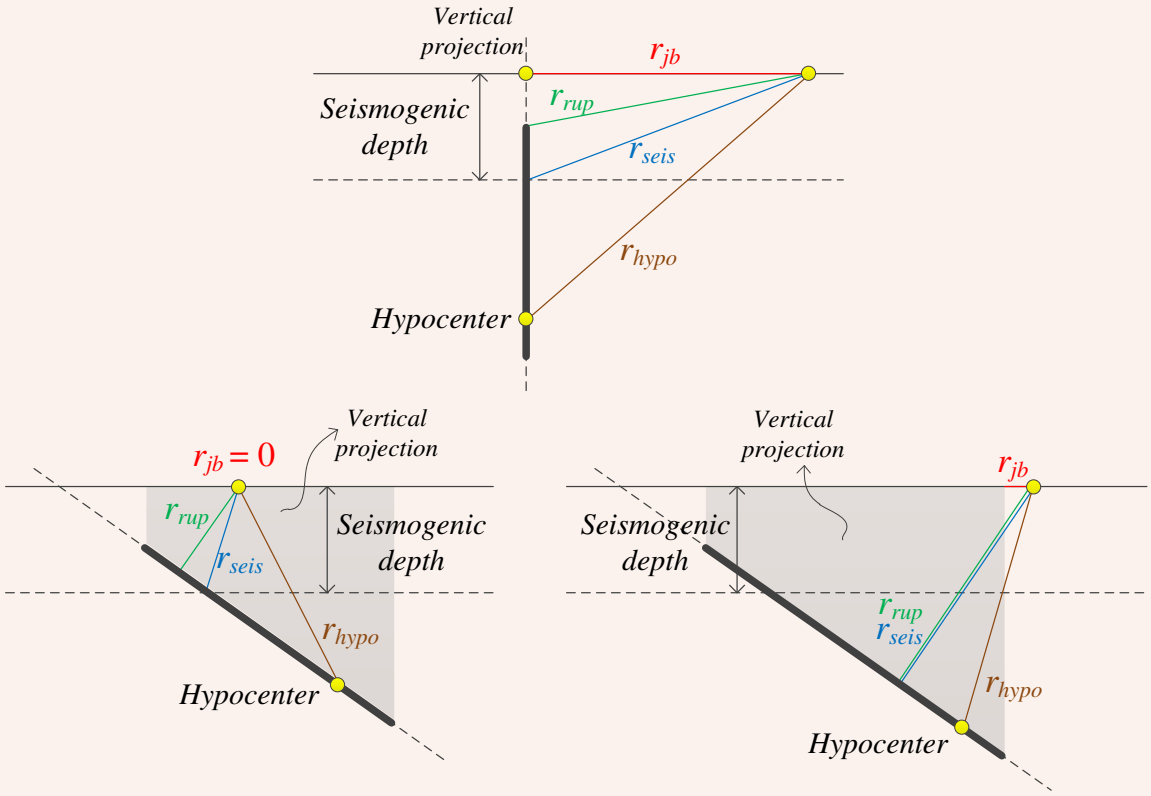
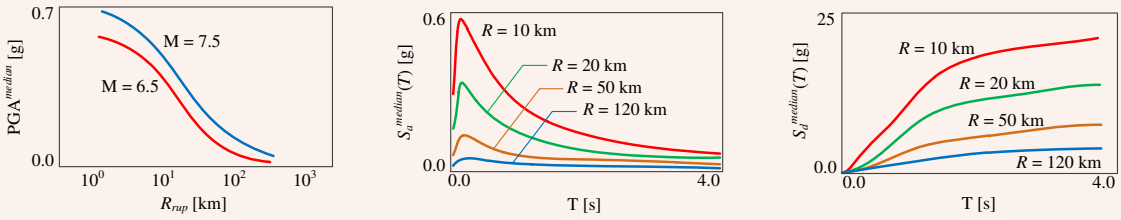


Figura 67.3: Classificação das distâncias de local a fonte

- Magnitude e distância afetam não só a intensidade, mas também a forma espectral.



(a) R e.. M efeitos

(b) Evolução espectral dependente do período

Figura 67.4: Investigação paramétrica em GPS

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

67.4 Análise de risco sísmico determinista

Análise de risco sísmica determinística (DSHA) usa geologia e sismicidade histórica para identificar fontes de terremotos e interpretar o terremoto mais forte (pior caso) que cada fonte é capaz de produzir independentemente do tempo. O procedimento envolve o desenvolvimento de um cenário sísmico e a caracterização desse cenário. A aplicação do DSHA requer quatro passos separados, Figura 67.5:

- PASSO 1: Identificar e caracterizar (geometria e magnitude máxima) todas as fontes de terremotos capazes de gerar tremores significativos no local.
- PASSO 2: Calcule a distância de origem para cada fonte identificada no passo 1 (dependendo da relação de atenuação, a distância epicentral ou hipocentral pode ser usada).
- PASSO 3: Selecione o terremoto controlador. Este é o terremoto que vai gerar o maior tremor no local usando uma relação de atenuação apropriada.
- PASSO 4: Defina o perigo no local baseado no terremoto controlador. O perigo pode ser expresso por coordenadas espectrais, aceleração máxima do solo, velocidade máxima do chão, terra máxima deslocamento, etc.

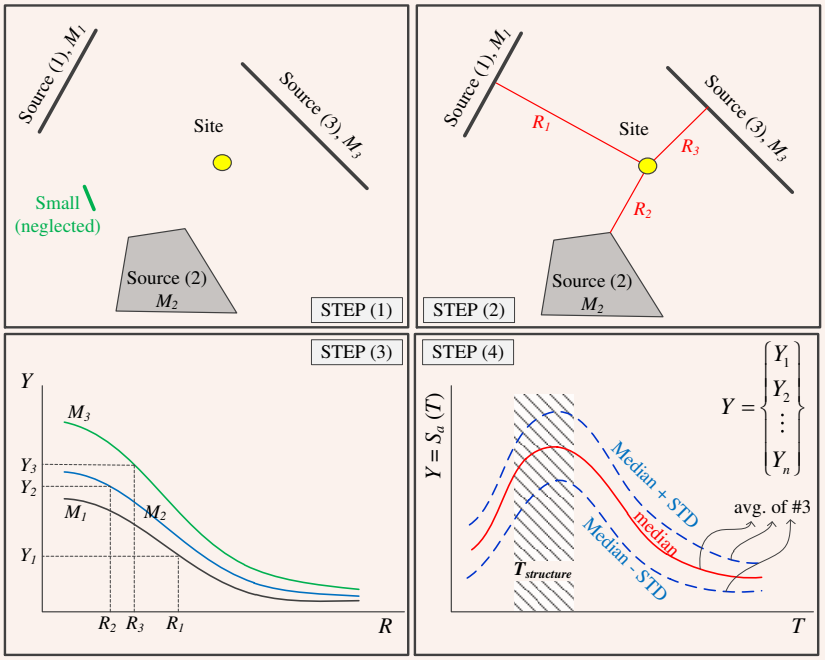


Figura 67.5: Análise de risco sísmico determinista

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Vantagens:
  - Simples de aplicar,
  - Procedimento conservador onde características tectônicas são bem definidas (fontes de linha).
- Desvantagens:
  - Difícil de se aplicar a fontes distribuídas perto do local,
  - Região de Confiança não é bem tratado,
  - Nenhuma informação é fornecida sobre a probabilidade do controle do terremoto,
  - Nenhuma informação é fornecida sobre o nível de tremor que pode ser experimentado na vida útil da estrutura no local.

67.5 Análise de risco sísmico probabilístico

Análise de risco sísmica probabilística (PSHA), proposta por C.A. Cornell (1968), usado para determinar o terremoto de projeto para todos os locais nos EUA. Dá uma quantificação relativa do terremoto de projeto, para um determinado local, em termos de parâmetros sísmicos (PGA, PGV, $S_a(T_i)$). PSHA leva em conta as incertezas associadas à ocorrência e efeitos de terremotos importantes. Não pode prever a data, magnitude, localização ou efeitos de futuros terremotos em zonas sísmicas ativas.

A abordagem PSHA usa os elementos do DSHA e acrescenta uma avaliação da probabilidade de que movimentos de terra de uma determinada magnitude ocorreriam. A probabilidade ou frequência de ocorrência de terremotos de magnitude diferente em cada fonte sísmica significativa e incertezas inerentes são diretamente contabilizadas na análise. A possível ocorrência de cada terremoto de magnitude em qualquer parte de uma fonte é diretamente incorporada em um PSHA. Os resultados da abordagem PSHA também podem ser usados para identificar quais combinações de magnitude e distância é o maior contribuinte para o perigo. A aplicação de PSHA requer quatro passos separados, (Figura 68.3) mostrado novamente abaixo:

- PASSO 1: Definição das fontes sismogênicas: Para um determinado local, as zonas geográficas que representam fontes sismotectônicas são desenhadas. Para cada zona, supõe-se que a probabilidade de ocorrência do terremoto é a mesma para toda a área de superfície (fonte sismogênica).
- PASSO 2: Definição de um modelo de sismicidade: Para cada fonte, uma relação de magnitude-recorrência do tipo $\ln N_M = a - b\,M$ é definido. A sismicidade histórica é

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

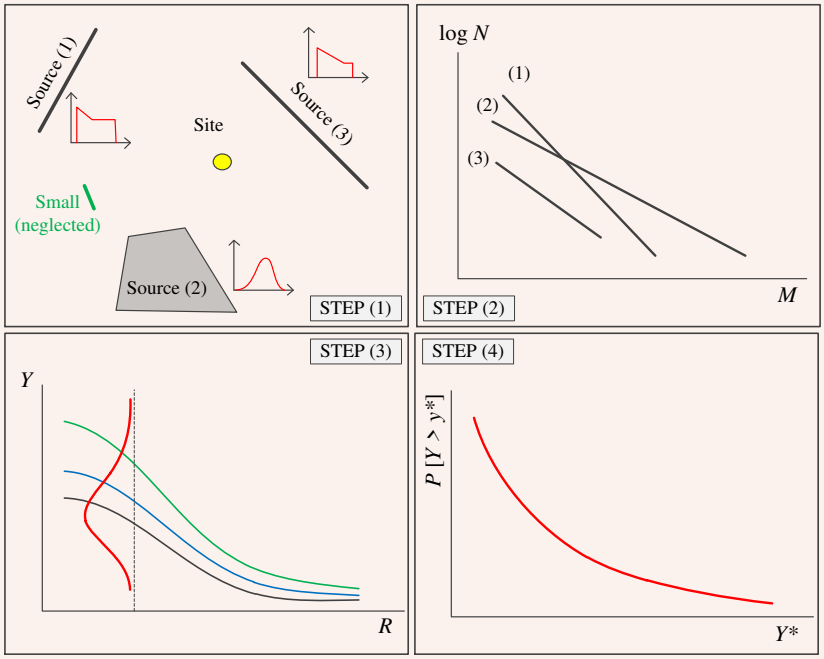


Figura 67.6: Análise de risco sísmico probabilístico

usada para estabelecer os parâmetros dessa relação. Uma magnitude de corte, M_{max}, também é definido para cada fonte.

- PASSO 3: Definição de um modelo de atenuação: Uma relação de atenuação é determinada entre cada fonte e um determinado local. Normalmente a mesma relação de atenuação é usada para toda a região.
- PASSO 4: Cálculo da curva de perigo para o local:
  - PASSO 4:1: Cálculo da taxa de recorrência de um dado nível: As relações de atenuação são combinadas com as relações de magnitude-recorrência para encontrar o número anual de terremotos causando um nível escolhido movimento do solo em qualquer local.
  - PASSO 4-2: Cálculo da probabilidade anual de exceder o nível escolhido: Um teórico distribuição de probabilidade é usado para calcular a probabilidade anual de exceder um nível escolhido movimento do solo em qualquer local. O cálculo é baseado na taxa de recorrência calculada no Passo 4-1.
  - PASSO 4-3: Traçando linhas de contorno com uma probabilidade anual constante de excedência: Todos os passos anteriores (1 a 4-2) são repetidos para cada local. Linhas de contorno são então traçadas para o parâmetro escolhido. Estas linhas de contorno são baseadas na mesma probabilidade anual de excedência para toda a área superficial.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

67.6 Hora da ocorrência

A taxa de recorrência, N, e o período de retorno, T_R, são obtidos da sísmica histórica de uma região. As previsões podem ser obtidas assumindo que a sequência de ocorrência do terremoto segue um modelo teórico distribuição de probabilidade.

No PSHA, modelo de probabilidade de Poisson, que assume que terremotos são espaço e tempo independentes (modelo sismogênico), geralmente é considerado. A probabilidade, $P_n(y)_t$, de ter n terremotos produzindo um valor do parâmetro sísmico de interesse maior ou igual a y em um determinado local durante um certo tempo t é dado por:

$$P_n(y)_{t|N} = \frac{(Nt)^n \ e^{-Nt}}{n!}$$

Onde N é o número de terremotos anuais (taxa de recorrência) produzindo um valor do parâmetro sísmico de interesse maior ou igual a y No local.

A probabilidade, $P_n(y)_{t|N}$, de ter pelo menos um terremoto causando um valor do parâmetro sísmico de interesse maior ou igual a y no local durante um determinado tempo t é então igual a 1 menos a probabilidade, $P_n(y)_{t|N}$, de não ter terremoto causando um valor do parâmetro sísmico de interesse maior ou igual a y No local, Figura 67.7a.

$$P(y)_{t|N} = 1 - e^{-Nt} \tag{67.2}$$

Considerando a probabilidade anual ($t = 1$ ano), a equação produz-se para, Figura 67.7b.

$$P(y)_{1|N} = 1 - e^{-N} \tag{67.3}$$

Por pequenos valores de NO modelo simplificado é

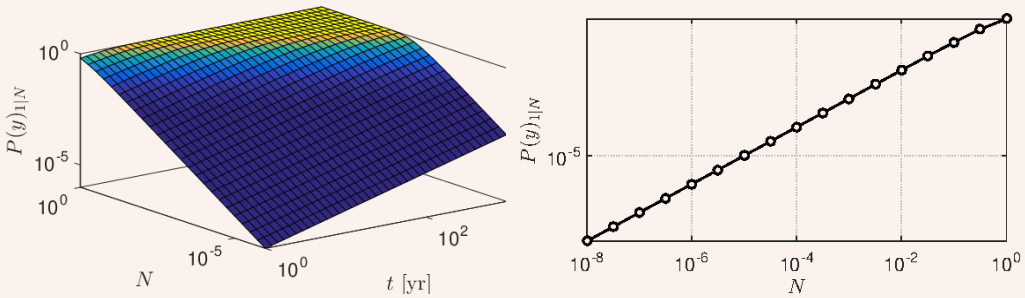
$$P(y)_{1|N} = N$$

67.7 Curvas de perigo sísmico

O resultado fundamental de uma PSHA é a curva sísmica de perigo, que mostra a taxa anual ou probabilidade em que um nível específico movimento do solo será excedido no local da represa. Em qualquer curva de perigo, o eixo vertical apresenta probabilidade anual de excedência (ou período de retorno), e o eixo horizontal é parâmetro de medida de intensidade (IM). Curvas de perigo sísmico geralmente são uma ferramenta importante e útil na análise de risco de barragens e estruturas nucleares. Figura 67.8 mostra curvas típicas de perigo sísmico na represa Pine Flat.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Equação 67.2 (b) Equação 67.3

Figura 67.7: O modelo de probabilidade de Poisson

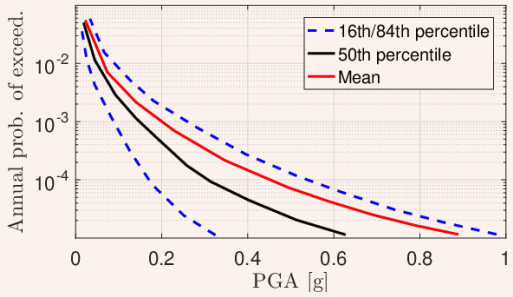


Figura 67.8: Amostra de curvas sísmicas de risco

Existem códigos de computador diferentes para produzir uma curva sísmica de perigo. Por exemplo, *Calculadora de Curva de Risco OpenSHA* Em.. www.opensha.org/apps é um dos códigos online mais famosos.

Baseado em recomendações USBR (USBR-manual, 2011), a medida de intensidade mais comum na geração de curvas de perigo para barragens é PGA; No entanto, $S_a(T = 1sec)$ é tipicamente usado para barragens, e períodos mais curtos como $S_a(T = 0.2sec)$ ou $S_a(T = 0.4sec)$ As curvas são frequentemente usadas para barragens de concreto.

Tendo acesso à previsão de ruptura do terremoto e equações de predição, a curva de perigo sísmico é estimada da seguinte forma (Applied Technology Council, 2012a):

$$\lambda\left(Y \geq y\right) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{m=M_{min}}^{M_{max,f}} \sum_{\varrho=1}^{N_{\varrho,f,m}} \left(\lambda\left(f, m, \varrho\right) - \lambda\left(f, m + \Delta m, \varrho\right)\right) \times \left(1 - F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)\right)$$

onde,

$$F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right) = \frac{1}{N_a} \sum_{a=1}^{N_a} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{exp\left(\mu_{\ln Y,a}\right)}\right)}{\sigma_{\ln Y,a}}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Y É local sacudindo parâmetro IM, geralmente $S_a(T_1, \xi = 5\%)$,
- y é um valor particular de Y,
- $\lambda\left(Y \geq y\right)$ é a média da taxa em que o local pode experimentar tremor de intensidade y ou maior, aqui referido como o perigo sísmico,
- f é um índice de falhas na previsão de ruptura do terremoto, $f = 1, 2, ..., N_f$,
- N_f é o número de falhas na previsão de ruptura do terremoto,
- m é a magnitude do momento, em Δm = incrementos de magnitude de 0,1; $m = M_{min}$, $M_{min} + \Delta m$, $M_{min} + 2\Delta m$, ..., $M_{max,f}$,
- M_{min} é a magnitude mínima considerada, como 5.0,
- $M_{max,f}$ É a magnitude máxima que falha f Acredita-se ser capaz de produzir, de acordo com a previsão da ruptura do terremoto,
- ϱ é um índice para locais discretos ao longo de uma falha no rastro em que epicentros de terremoto são discretizados, $\varrho = 1, 2, ..., N_{\varrho,f,m}$,
- $N_{\varrho,f,m}$ É o número de locais discretos ao longo da falha f em que um terremoto de magnitude m pode ser centrado,
- $\lambda\left(f, m, \varrho\right)$ é a frequência média com que falha f pode produzir terremotos de magnitude m ou maior em localização ϱDe acordo com a previsão de ruptura do terremoto,
- $F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)$ É provável que a intensidade de tremor $Y \leq y$ dado um terremoto na falha f de magnitude m com epicentro localizado em ϱ,
- a é um índice para as equações de predição movimento do solo usadas aqui, $a = 1, 2, ..., N_a$,
- N_a é o número de equações de predição movimento do solo usadas,
- Φ é a função normal de distribuição cumulativa avaliada no termo entre parênteses. Esta tese assume que todas as equações de predição movimento do solo assumem que Y É normalmente distribuído condicionado em magnitude, distância, mecanismo, etc.
- $\mu_{\ln Y,a}$ é o valor esperado do logaritmo natural de Y sob a equação de previsão movimento do solo a.
- $\sigma_{\ln Y,a}$ é o desvio padrão total do logaritmo natural de Y sob a equação de previsão movimento do solo a.

67.8 Mapas de perigo sísmicos

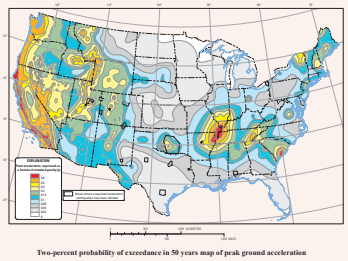
Os mapas sísmicos nacionais de risco são geralmente produzidos usando curvas de perigo com vários 5%-Aceleração espectral danificada em períodos de 0,0 (PGA), 0,2, 0,3, 0,5, 0,75,

CÓPIA PARA REVISÃO

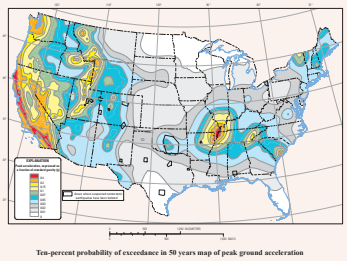
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1,0 e 2,0 segundos. A taxa anual de recorrência de $N = 0{,}00211$, 0,00103 e 0,00040 por ano são usados para obter os valores correspondentes para 10%, 5% e 2% probabilidade de excedência em 50 anos. A probabilidade de excedência geralmente é calculada usando o modelo probabilístico Poisson (independente do tempo). Para os EUA. mapas de perigo, as condições uniformes do local da rocha firme com a velocidade média de onda cisalhamento de 760 m/s nos 30 m superiores da crosta foi assumido.

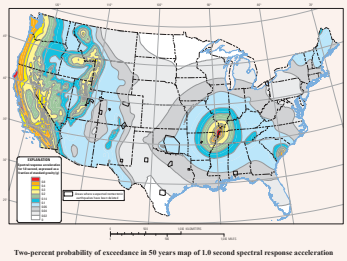
Mapas de risco sísmico para os EUA. são mostrados na figura 67.9.. Os mapas de risco nacionais da USGS mostram a distribuição dos níveis de tremores de terra que têm uma certa probabilidade de ocorrer nos Estados Unidos. Pode-se criar um mapa de perigo personalizado usando a aplicação USGS online[1]



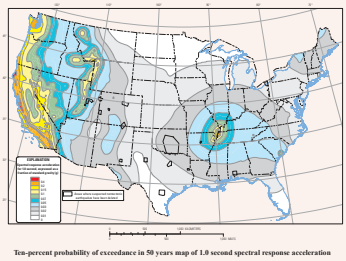
(a) 2%- 50 anos. PGA



(b) 10%- 50 anos. PGA



(c) 2%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$



(d) 10%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$

Figura 67.9: Amostras de nós mapas perigosos

67.9 Desagregação de riscos sísmicos

As parcelas de desagregação sísmica são úteis já que podem fornecer uma visão clara da contribuição dos diferentes parâmetros no processo de seleção de registros. Também podem ser usados para identificar a fonte que controla o perigo no local da represa.

[1] USGS Custom Hazard Map

CÓPIA PARA REVISÃO

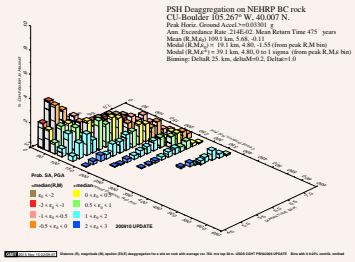
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Uma desagregação mostra as combinações de magnitude e distância que contribuem mais para uma curva de perigo. É útil para selecionar histórias de tempo do terremoto para análise da história de resposta. Um plano de desagregação depende da intensidade do interesse e probabilidade de excedência. Na prática, a desagregação é obtida numericamente sobre pequenos incrementos de magnitude Δm, e distância, Δr.

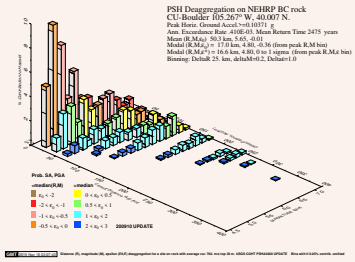
$$C(M,R) = \frac{N(m \leq M < m + \Delta m \; ; \; r \leq R < r + \Delta r)}{N_{total}}$$

Onde $N(M,R)$ É a taxa de recorrência dos terremotos com magnitude e distância ao redor m e.. r, e N_{total} é a taxa total de recorrência no local.

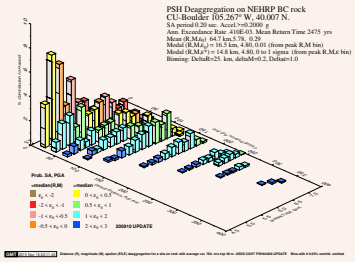
Figura 67.10 mostra as parcelas de desagregação sísmica para a Universidade do Colorado Boulder com diferentes medidas de intensidade e períodos de retorno em meio rock (USGS, 2003). A distância modal, magnitude e termo inter-evento podem ser encontrados em cada caso.



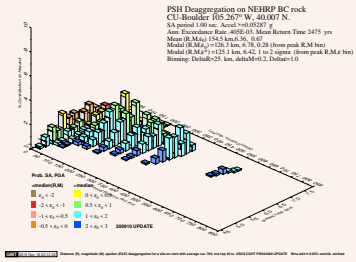
(a) 475 anos; PGA



(b) 2475 anos; PGA



(c) 2475 anos; $S_a(T = 0.2s)$



(d) 2475 anos; $S_a(T = 1.0s)$

Figura 67.10: Amostras de parcelas sísmicas para a universidade de pedra colorada

CÓPIA PARA REVISÃO

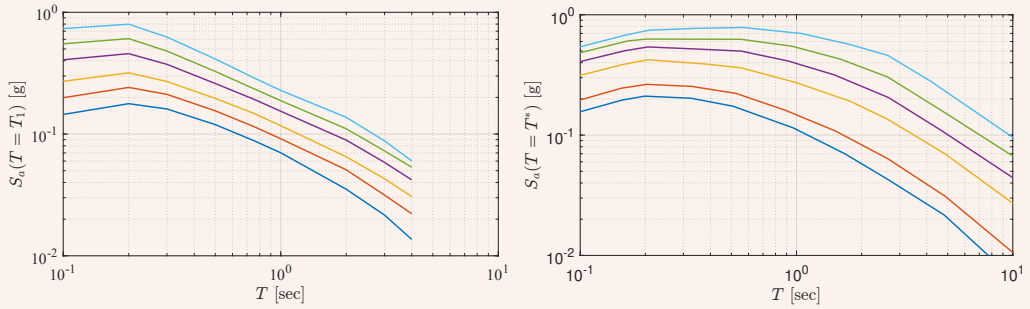
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

67.10 Alvo espectros de resposta

Um espectro é necessário para cada um dos vários intervalos de risco sísmico usados para análise que são selecionados a partir da curva de perigo sismático local. Três tipos de espectros comuns são:

- Espectro de Perigo Uniforme (UHS)
- Spectra Condicional (CS)
- Espectro Médio Condicional (CMS)

UHS *Espectro de Perigo Uniforme* são computados a partir das curvas sísmicas de perigo. Isso é feito desenvolvendo curvas de perigo por vários períodos de vibração para definir o espectros de resposta. Então, para uma determinada probabilidade de excedência ou período de retorno, as coordenadas são tiradas das curvas de perigo para cada aceleração espectral, e um "risco igual espectro de resposta" é gerado. Assim, as curvas espectros de resposta são geradas para períodos de retorno especificados de interesse, geralmente 10.000 e 50.000 anos, mas muitas vezes em períodos de volta inferiores, intermediários ou ainda maiores. Figura 67.11a mostra o UHS para apenas a direção horizontal no local da represa hipotética.



(a) UHS (T_1 = 0.3 s) (b) CMS (T^* = 2.5 s)

Figura 67.11: Comparação de diferentes espectros de resposta

Por outro lado, o CS Spectra condicional é um espectro de resposta que especifica o distribuição de probabilidade de diferentes acelerações espectrais ao longo de um intervalo de período condicionado em aceleração espectral em um determinado (condicionamento) período, T^* (Lin e Baker, 2014). O espectro condicional explica as correlações entre acelerações espectrais em vários períodos para calcular o espectro esperado e sua variabilidade (Baker e Jayaram, 2008). Figura 67.11b apresenta amostra CMS em diferentes níveis de risco para uma estrutura com T^* = 2.5 s.

Para eventos frequentes, o SUS e CMS devem ter formas semelhantes. Para eventos infrequentes, a amplitude de um CMS será menor em alguns períodos do que o UHS

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

como o espectro médio condicional quantifica um espectro menos conservador e mais realista para um único terremoto. O CS difere do CMS apenas em que considera Região de Confiança em valores espectrais. O uso de CMS ou CS fornecerá estimativas mais precisas de resposta para uma determinada intensidade de tremores de terra do que o SUS, mas é necessário esforço adicional para gerar esses tipos de espectros.

A versão estendida do CMS, que considera outros parâmetros movimento do solo que não espectros de resposta, é a medida de intensidade condicional generalizada (GCIM) (Bradley, 2010). Este método é baseado principalmente na construção da distribuição multivariada de qualquer conjunto de IMs movimento do solo condicionados à ocorrência de um MI específico movimento do solo (geralmente obtido a partir de PSHA).

Os passos fundamentais para calcular um CMS, que é adotado a partir de (Lin e Baker, 2014), pode ser resumido da seguinte forma:

- Determine os parâmetros de entrada para o terremoto, incluindo aceleração espectral do alvo $S_a(T^*)$, no período de condicionamento, T^*, usando PSHA e a magnitude do terremoto causal associada, M, distância, R, mecanismo de ruptura e condição do local, θ.
- Calcular a média logarítmica, $\mu_{\ln S_a}(M, R, \theta, T_i)$, e desvio padrão, $\sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)$, de aceleração espectral em todos os períodos, T_i, usando os modelos GMPE.
- Compute épsilon, $\varepsilon(T_i)$, (o número de desvios padrão pelo qual $\ln S_a(T_i)$ Difere da média das coordenadas espectrais previstas por um determinado GMPE) para qualquer $S_a(T_i)$ Valor:

$$\varepsilon(T_i) = \frac{\ln S_a(T_i) - \mu_{\ln S_a}(M, R, \theta, T_i)}{\sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)}$$

- Calcular a média condicional de aceleração espectral logarítmica, $\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, usando o modelo de correlação (Baker e Jayaram, 2008) que especifica o coeficiente de correlação entre pares de valores de épsilon em dois períodos, $\rho\left(\varepsilon(T_i), \varepsilon(T^*)\right)$, como:

$$\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \mu_{\ln S_a}(M, R, \theta, T_i) + \rho\left(\varepsilon(T_i), \varepsilon(T^*)\right) \sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)$$

- Calcular desvio-padrão condicional, $\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, como:

$$\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \sigma_{\ln S_a}(M, \theta, T_i)\sqrt{1 - \rho^2\left(\varepsilon(T_i), \varepsilon(T^*)\right)}$$

- A combinação de desvio padrão condicional e valor médio condicional especifica uma distribuição completa dos valores de aceleração espectral logarítmica em todos os períodos. A distribuição do espectro resultante é chamada de CS, para ser distinguida da CMS que não considera a variabilidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Avaliações de desempenho baseadas em intensidade (IBPA)

Este método avalia o desempenho de uma estrutura assumindo que ela está sujeita a uma intensidade específica de tremor. No caso de estruturas pórtico, a intensidade do tremor é definida por um 5% Aceleração elástica amortecida espectros de resposta. Esta avaliação é geralmente usada quando a estrutura é submetida ao tremor de terra com um específico espectro de resposta (como design espectro de resposta) (Applied Technology Council, 2012b), Figura 67.12.

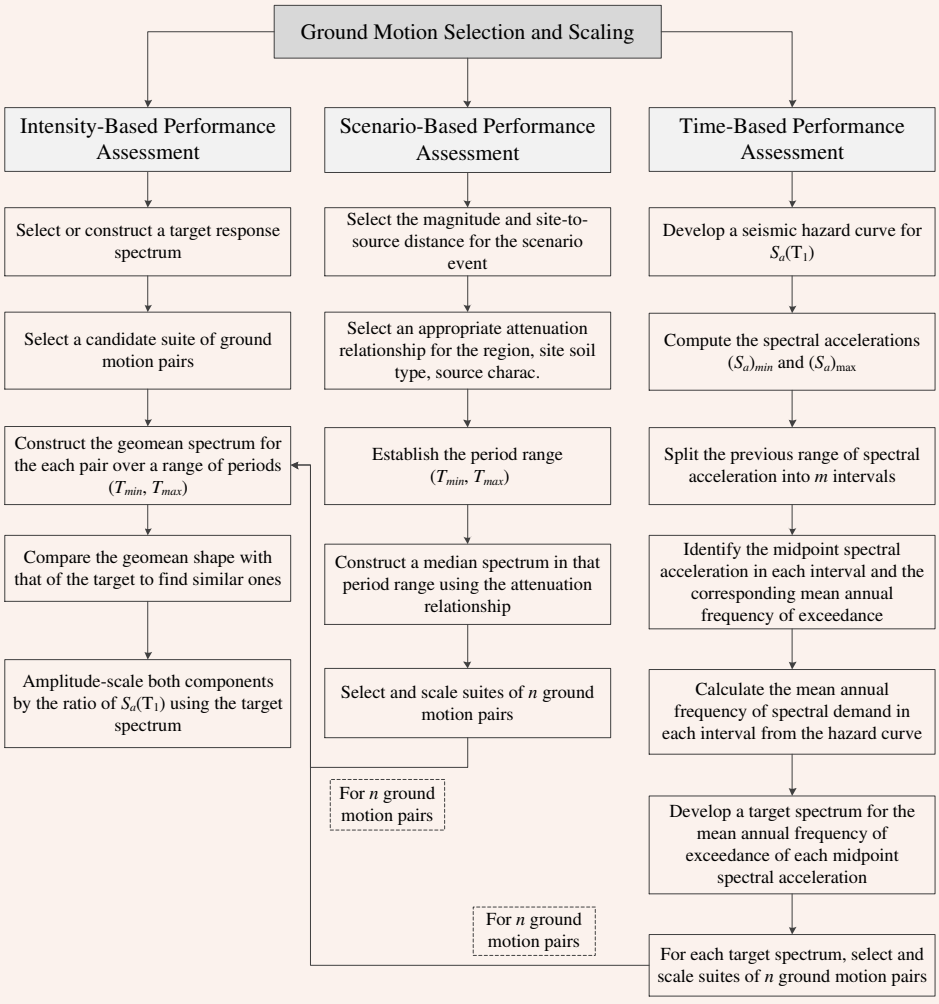


Figura 67.12: Comparação de seleção e escala para IPPA, SBPA e TBPA

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Avaliação de desempenho baseada em cenários (SBPA)

Este método avalia o desempenho de uma estrutura assumindo que ela está sujeita aos efeitos de um terremoto de magnitude específica ocorrendo em um local específico relativo ao local da estrutura. Avaliações de cenários podem ser úteis para os tomadores de decisões com estruturas localizadas perto de uma ou mais falhas ativas conhecidas. Avaliações baseadas em cenários são muito semelhantes às avaliações baseadas em intensidade, exceto que Região de Confiança na intensidade do terremoto, dado o cenário, é considerado (Applied Technology Council, 2012b), Figura 67.12.

Avaliação de desempenho baseada no tempo (TBPA)

Este método avalia o desempenho de uma estrutura ao longo de um período considerando todos os terremotos que podem ocorrer nesse período de tempo e a probabilidade de que cada um ocorra. Avaliações baseadas no tempo consideram Região de Confiança na magnitude e localização de futuros terremotos, bem como a intensidade do movimento resultante desses terremotos. Avaliações baseadas em um único ano são úteis para avaliações de custo-benefício usadas para decidir entre critérios de desempenho alternativos (Applied Technology Council, 2012b).

Figura 67.12 compara o procedimento passo a passo para seleção e escalação com base nos três métodos acima mencionados. Vale ressaltar que na TBPA, os valores recomendados para os parâmetros introduzidos na Figura 67.12 são as seguintes: $(S_a)_{min} = 0{,}05$ g, e $(S_a)_{max}$ está associada com a frequência anual de excedência de $0{,}00002/yr$ (isto é, 1 ocorrência em 50.000 anos). O número de intervalos m geralmente é recomendado para ter 8 anos.

67.11 Simulação estocástica movimento do solo

Embora o uso de registros reais movimento do solo seja um método padrão na avaliação sísmica das estruturas, ele pode sofrer de ter um número limitado de movimentos registrados no solo (que podem cobrir uma estreita e discreta gama de riscos símicos) e pode Exige simulação de registros extras movimento do solo para ser usado no contexto da PBEE.

A maioria das técnicas de simulação são capazes de gerar uma série temporal de aceleração baseada em um cenário sísmico particular, o que as torna uma excelente opção para uso na SBPA (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010), (Yamamoto e Baker, 2013). Em geral, essas técnicas podem ser divididas em dois grupos (Yamamoto, 2011; Taborda e Roten, 2014; Rezaeian e Sun, 2014):

- Modelos baseados em física simulam o movimento do solo modelando explicitamente a ruptura de falhas, propagação de ondas e amplificação do local próximo à superfície.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Eles exigem informações precisas para fornecer uma boa estimativa de movimentos reais. Esta abordagem é, em geral, cara de implementar e não muito precisa para movimentos de alta frequência (Pitarka et al., 1998; Taborda e Roten, 2014).

- Modelos estocásticos simulam diretamente a série de tempo movimento do solo e são calibrados empiricamente com base no conjunto de dados existente. Esta abordagem é, em geral, computacionalmente barata. Modelos estocásticos podem ser construídos usando um dos seguintes métodos (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010):. 1) passando um ruído branco através de um filtro (Shinozuka e Sata, 1967), 2) passando um trem de Poisson pulsos através de um filtro linear (Cornell, 1964), 3) modelo médio móvel autorregressivo (Hoshiya e Hasgur, 1978), e 4) modelos espectrais evolucionários (Priestley, 1965). Para obter uma boa estimativa dos movimentos reais do solo, tanto a não estacionalidade temporal (a amplitude muda com o tempo) quanto a não-estacionalidade espectral (a mudança de frequência com o momento) devem ser contabilizadas no modelo.

Nesta seção, dois modelos estocásticos recentemente desenvolvidos e amplamente utilizados são explicados.

67.11.1 Rezaeian e Der Kiureghian (r-d) modal

Rezaeian e Der Kiureghian desenvolveram um modelo estocástico totalmente não estacionário baseado em um processo de ruído branco filtrado modulado com parâmetros variáveis no tempo (Rezaeian e Der Kiureghian, 2008), (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010). Neste modelo, as características temporais e espectrais não estacionárias são completamente dissociadas o que facilita a fácil identificação dos parâmetros do modelo. O modelo tem um pequeno número de parâmetros com interpretações físicas. A série de tempo da aceleração discretizada do movimento do solo pode ser expressa como:

$$\hat{x}\left(t|\boldsymbol{\theta},\mathbf{W}\right)=\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{h\left[t-t_i,\boldsymbol{\theta}(t_i)\right]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k}h\left[t-t_j,\boldsymbol{\theta}(t_j)\right]^2}}w\left(i\Delta t\right),$$
$$k\Delta t<t<(k+1)\Delta t$$

Onde $\mathbf{W}=[w\left(i\Delta t\right);i=1,2,...,N_T]$ é uma sequência de ruído branco gaussiano, Δt é o intervalo de discretização escolhido, $\boldsymbol{\theta}$ é um n_θ- Modelo dimensional vetor de parâmetros (i.e. $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n_\theta}]$), $\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)$ é a função moduladora do tempo, e $h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(\tau)\right]$ é uma função de impulso unitário devido à resposta pseudo-aceleração de um oscilador linear

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

SDOF com tempo dependente frequência natural $\omega_f(\tau)$ e amortecimento relação $\zeta_f(\tau)$, em que τ denota o tempo do pulso.

$$h\left[t-\tau, \boldsymbol{\theta}(t)\right] = \begin{cases} \dfrac{\omega_f(\tau)}{\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}} \exp\left[-\omega_f(\tau)\zeta_f(\tau)(t-\tau)\right] & \\ \qquad \sin\left[\omega_f(\tau)\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}(t-\tau)\right] & \tau \le t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A função de frequência dependente do tempo toma uma forma linear, enquanto a função amortecimento é assumida como constante:

$$\omega_f(\tau) = \omega_{mid} + \omega'\left(\tau - t_{mid}\right) \; ; \qquad \zeta_f(\tau) = \zeta_f$$

Onde ω_{mid} refere-se à frequência central, ω' é a variação de frequência, e t_{mid} É o meio-tempo da forte duração do movimento (o tempo em que Arias intensidade atinge 45% de seu valor final).

Para a função moduladora, uma função do tipo gama é selecionada que é controlada por três parâmetros:

$$\beta\left(t, I_A, \alpha_2, \alpha_3\right) = \underbrace{\sqrt{I_A \frac{(2\alpha_3)^{2\alpha_2-1}}{\Gamma(2\alpha_2-1)}}}_{\text{intensity}} \underbrace{t^{\alpha_2-1}}_{\text{shape}} \underbrace{e^{-\alpha_3 t}}_{\text{duration}}$$

Onde $\Gamma(.)$ é a função gama, I_A é a intensidade de Arias escalada, e α_2 e.. α_3 são os parâmetros de controle da forma e duração e podem ser conectados à física do problema através da duração efetiva, $D_{5-95} = I_A^{95\%} - I_A^{5\%}$, e t_{mid}, respectivamente. Finalmente, a função simulada é filtrada para garantir velocidade residual zero.

O vetor de parâmetros do modelo movimento do solo pode ser resumido como $\boldsymbol{\theta} = \left\{I_A, D_{5-95}, t_{mid}, \omega_{mid}, \omega', \zeta_f\right\}$.. Relações preditivas foram desenvolvidas para cada parâmetro do modelo, adaptando o modelo estocástico a um subconjunto da base de dados de atenuação (NGA) de próxima geração. Estes modelos preditivos descrevem $\boldsymbol{\theta}$ em termos das seguintes características do terremoto e local: 1) magnitude do momento (M_w2) distância mais próxima da ruptura (R_{rup}) em [km], 3) cisalhamento velocidade de onda do topo 30 m de solo (V_{S30}) em [M/s], e 4) mecanismo de falha (F_{mech}), ou strike-slip ou ao contrário. As equações empíricas assumem a seguinte forma genérica:

$$\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right] = \mu\left(M_w, R_{rup}, V_{S30}, F_{mech}, \mathbf{c}\right) + \eta + \sigma$$

Onde θ é um parâmetro modelo, $\Phi[.]$ é a função de distribuição cumulativa Gaussiana padrão (CDF), e F_θ é o CDF de θ (que é empiricamente determinado). Depois disso,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$\Phi^{-1}[F_\theta(\theta)]$ transforma um parâmetro modelo do espaço físico para o espaço normal padrão. μ é a média prevista em função do terremoto e características do local e **c** representa o vetor dos coeficientes de regressão. Além disso, η e.. σ são normalmente distribuídas variáveis aleatórias de média zero e referem-se aos erros interevento e intra-evento, respectivamente. Os coeficientes de regressão, as variâncias dos termos de erro e as correlações entre os parâmetros do modelo podem ser encontradas em (Rezaeian e Der Kiureghian, 2010).

67.11.2 Yamamoto e Baker (y-b)

Yamamoto e Baker empregaram a transformada de pacote wavelet (WPT) (que é a versão estendida da transformada discreta wavellet, DWT), a fim de quantificar as características de tempo e frequência da série temporal para gerar movimentos estocásticos no solo (Yamamoto, 2011), (Yamamoto e Baker, 2013). WPT aumenta o flexibilidade no controle da resolução em domínios de tempo e frequência. Além disso, as funções básicas são ortogonais, o que permite a reconstrução fácil da série temporal.

O WPT para a frente e o inverso são definidos como:

$$c^i_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^i_{j,k}(t)dt \; ; \quad x(t) = \sum_{i=1}^{2^j}\sum_{k=1}^{2^{N-j}} c^i_{j,k}\psi^i_{j,k}(t)$$

Onde $x(t)$ é a série do tempo, 2^N é o número de pontos de dados na série temporal, $c^i_{j,k}$ Denota o i^{th} Um conjunto de pacotes wavelet no j^{th} parâmetro de escala e k é o parâmetro de tradução, e $\psi^i_{j,k}$ é função WPT.

WPT resulta em séries temporais com poucos coeficientes de wavelet de grande amplitude e muitos de pequena amplitude. Yamamoto e Baker usaram esta vantagem e definiram dois grupos de major (que contém cerca de 70% da energia total no movimento do solo e menor (que contém os 30 restantes% Coeficientes do pacote wavelet. Como resultado, os coeficientes totais do pacote wavelet são uma combinação desses dois grupos:

$$\left|c^i_{j,k}\right|^2 = \left|c^i_{j,k,maj}\right|^2 + \left|c^i_{j,k,min}\right|^2$$

em que $c^i_{j,k,maj}$ e.. $c^i_{j,k,min}$ são os maiores e menores coeficientes do pacote wavelet.

Este modelo requer 13 parâmetros para quantificar totalmente as características de tempo e frequência da série de tempo aceleração. Estes parâmetros são categorizados aqui, no entanto, para a formulação detalhada os leitores são referidos (Yamamoto e Baker, 2013).

- Para o grupo principal: 1) Centróide temporal $E(t)_{maj}$, 2) variância temporal $S^2(t)_{maj}$, 3) centróide espectral $E(f)_{maj}$, 4) variância espectral $S^2(f)_{maj}$5) correlação entre o tempo e a frequência dos coeficientes $\rho(t,f)_{maj}$, 6) média de amplitudes quadradas os coeficientes do pacote wavelet $E(a)_{maj}$,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- Para o grupo menor: 7) Centróide temporal $E(t)_{min}$, 8) variação temporal $S^2(t)_{min}$, 9) centroide espectral $E(f)_{min}$, 10) variância espectral $S^2(f)_{min}$, 11) correlação entre o tempo e os coeficientes de frequência $\rho(t, f)_{min}$,
- 12) Aleatoriedade da amplitude dos pacotes wavelet $S(\xi)$, e 13) cumulativa aceleração ao quadrado E_{acc}.

Os pacotes wavelet no grupo principal são fortemente aleatórios em comparação com os do grupo menor. Assim, as amplitudes quadradas e os locais de frequência dos pacotes wavelet são modelados separadamente

$$a_{maj} \sim \text{Exponential}\left[E\left(\left|c^i_{j,k,maj}\right|^2\right)\right]$$
$$\left[t_{k,maj}, f_{i,maj}\right] \sim \text{Lognormal}\left[M_{maj}, \Sigma_{maj}\right]$$

Onde a_{maj} é a amplitude quadrada do coeficiente de pacote wavelet no grupo principal, $t_{k,maj}$ e.. $f_{i,maj}$ são o centro da localização do tempo e frequência dos principais coeficientes wavelet, e M_{maj} e.. Σ_{maj} são definidos como:

$$M_{maj} = \begin{bmatrix} E\left(\ln t_{k,maj}\right) & E\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_{maj} = \begin{bmatrix} S^2\left(\ln t_{k,maj}\right) & Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) \\ Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) & S^2\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$

Por outro lado, os pacotes wavelet no grupo menor podem ser estimados pelas funções lognormais bivariadas do tempo, frequência e resíduos (o que requer apenas cinco parâmetros para controlar):

$$\left|c^i_{j,k,min}\right|^2 = \frac{1}{2\pi S\left(\ln t_{k,min}\right) S\left(\ln f_{i,min}\right)\sqrt{1-\rho^2\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)}}$$
$$\times \frac{1}{\ln t_{k,min}.\ln f_{i,min}} \exp\left[-\frac{W_1^2 - 2\rho\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right) W_1 W_2 + W_2^2}{2\left(1-\rho^2\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)\right)}\right] \times \xi_{k,i}$$

Onde $t_{k,min}$ e.. $f_{i,min}$ são o centro da localização do tempo e frequência dos menores coeficientes wavelet, ρ é o coeficiente de correlação, $\xi_{k,i}$ é uma variável aleatória lognormal usada para calibração, e duas variáveis intermediárias são definidas como $W_1 = \frac{\ln t_{k,min} - E(\ln t_{k,min})}{S(\ln t_{k,min})}$ e.. $W_2 = \frac{\ln f_{i,min} - E(\ln f_{i,min})}{S(\ln f_{i,min})}$.

Finalmente, a fim de gerar um movimento do solo para um determinado cenário de terremoto, os 13 parâmetros estão conectados a esses parâmetros do cenário usando a análise de regressão em dois estágios. Um grande conjunto de movimentos de terra registrados do banco de dados NGA foram usados para estimar os parâmetros usando estimativas de máxima verossimilhança e a seguinte forma funcional:

$$Y = \alpha + \beta_1 M_w + \beta_2 \ln M_w + \beta_3 \exp M_w + \beta_4\left(R_{hyp} - R_{rup}\right) + \beta_5 \ln\sqrt{R_{rup}^2 + h^2} + \beta_6 \ln V_{S30} + \eta + \sigma$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Onde Y é o logaritmo natural de um parâmetro modelo, e σ e.. η são resíduos intra e intereventos, respectivamente. O parâmetro h é designado para evitar prever valores extremamente grandes de Y Para pequenos valores de R_{hyp} (distância hipocentral), e os parâmetros α e.. β_i são coeficientes de regressão que podem ser encontrados em (Yamamoto, 2011) e.. (Yamamoto e Baker, 2013).

67.12 Funções de excitação do tempo de perseverança

O uso prático do método tempo de resistência (ET) requer funções de excitação adequadas ao tempo de duração (ETEFs) que levam a resultados consistentes de análise. Esta seção destaca diferentes gerações ETEF, bem como sua produção de funções objetivas[2].. No método do tempo de resistência, ETEFs são usados como funções dinâmicas de entrada de carga. No método ET, todos os níveis de intensidade são cobertos por uma única função de excitação. Em outras palavras, cada vez em um tempo de resistência excitação corresponde a um nível de intensidade particular. ETEFs são normalmente gerados de modo que sejam compatíveis com espectros de projeto desejados ou conjuntos de movimentos e intensidades do solo que aumentam com o tempo. Compatibilidade com os movimentos de terra e intensificação são duas características principais dos ETEFs que devem ser consideradas na simulação dessas funções artificiais. A propriedade de intensificação dos ETEFs é obtida aplicando um perfil de aumento de amplitude. O perfil de aumento de amplitude pode assumir várias formas. Nas excitações iniciais do tempo de resistência, um perfil linear (no qual a aceleração máxima é diretamente proporcional ao tempo) foi adotado. Formas exponenciais também são consideradas para simular excitações cumulativas do tempo de resistência (Mashayekhi et al., 2018b).

Compatibilidade com movimentos de terra é outra característica importante da excitação do tempo de resistência. Os movimentos no solo têm três características principais: intensidade, frequência e duração. A fim de simular uma excitação eficiente do tempo de resistência, estas três características têm que ser consideradas. Uma vez que o conteúdo de frequência e amplitude dos movimentos são adequadamente refletidos em espectros de resposta, considerando espectros de resposta no processo de simulação implica que a amplitude e o conteúdo da frequência são devidamente considerados.

Os requisitos acima mencionados são conhecidos como simulando restrições. O número de restrições simulando geralmente é muito mais do que o número de variáveis, independentemente do método de definição variável usado, Mashayekhi, Estekanchi e Vafai, 2019a; Mashayekhi, Estekanchi e Vafai, 2019b. Como os métodos analíticos não fornecem um procedimento prático para simular ETEFs, as abordagens de otimização são então empregadas.

[2]Esta seção está escrita em colaboração com o Prof. H.E. Estekanchi e Dr. M.R. Mashayekhi.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nesta seção, a geração de ETEFs são explicadas. As funções de carga de aceleração existentes diferem em termos do espectro alvo, intervalo de períodos, funções objetivas, passo de tempo, duração e algoritmo de otimização. Estas excitações estão disponíveis online através do método Tempo Endurance website.. No caminho de progresso da produção ETEF, cinco gerações de excitações do tempo de resistência podem ser distinguidas.

67.12.1 Primeira geração de ETEFs

Excitações de primeira geração só foram geradas para introduzir o conceito básico do método ET. ETEFs desta geração não são adequados para uso prático. Na simulação de excitações de primeira geração, o conceito de padrões aleatórios não estacionários em amplitude e conteúdo de frequência foram usados. Neste método, as funções de excitação são expressas somando um número finito de funções harmônicas como:

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

Onde N é o número de funções harmônicas, ω_i e.. ϕ_i são a frequência angular e fase anjo de i^{th} Senofunção, e A_i é a amplitude da frequência.

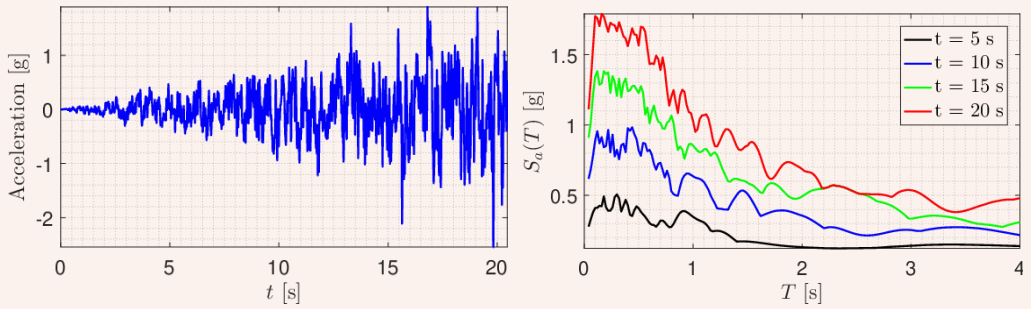
Uma excitação aleatória com distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão de um foi considerada. O número de pontos de dados de aceleração foi escolhido para ser 2048, com a aceleração máxima de 1,0 g. Uma função moduladora apropriada foi adotada. Para remover as frequências indesejáveis, as excitações foram filtradas pela técnica inversa da transformada de Fourier. O objetivo era simular uma excitação que combinasse com um espectro particular. O espectro alvo era um típico espectro sísmico de projeto de código. O sinal foi modificado para corresponder à função de aceleração espectral, ajustando suas amplitudes espectrais de Fourier. Este procedimento foi repetido até que a correspondência aceitável fosse alcançada. O acelerograma estacionário resultante foi então modificado aplicando uma função de perfil linear que o fez se intensificar, com relação às acelerações de pico, em diferentes intervalos de tempo. Estes acelerogramas serviram bem para demonstrar o conceito de análise do tempo de resistência. Um histórico de aceleração da primeira geração é mostrado na Figura 67.13a.

67.12.2 Segunda geração de ETEFs

Na segunda geração, aceleração e espectros deslocamento são considerados no processo de simulação. Espectro alvo pode ser o espectro médio de um conjunto de movimentos no solo, ou um espectro codificador. Na segunda geração, técnicas de otimização foram empregadas pela primeira vez para simular novos ETEFs. No contexto da otimização, equações são expressas em termos de funções objetivas. A função objetiva para esta série

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) História do tempo de aceleração; ETA20ac01 (1a geração)

(b) Espectros de resposta; ETA20a01 (2a geração)

Figura 67.13: Amostra etef

é mostrada na Equação 67.4.. Aceleração e espectros deslocamento são considerados na função objetiva.

$$F(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \{\left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 + \alpha \left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2\} \tag{67.4}$$

Onde a_g é a excitação do tempo de resistência sendo buscada, e α é o parâmetro de peso relativo que pode ajustar a penalidade efetiva atribuída ao desvio deslocamento em comparação com desvios de aceleração dos valores alvo. Altos valores de α tornar a função alvo mais sensível às diferenças de resposta deslocamento e baixo valor de α torna a função do alvo mais sensível às diferenças de espectros de aceleração. $S_{aC}(T,t)$ é a aceleração do alvo espectros de resposta no momento tE ponto final T que pode ser codificado espectro de aceleração do projeto ou espectro médio de um conjunto de movimentos no solo. $S_{uC}(T,t)$ é o alvo deslocamento espectros de resposta no momento tE ponto final T. $S_u(T,\tau)$ e.. $S_a(T,\tau)$ são deslocamento e aceleração espectros de resposta de excitação do tempo de resistência no período T, e o tempo τ. t_{target} É o tempo alvo que é o tempo em que as excitações do tempo de resistência produzem espectro alvo. A escolha de um horário apropriado também deve ser considerada. No caso não linear geral, se o tempo alvo é muito baixo, a estrutura pode não ter tempo para passar por um número razoável de ciclos não lineares. Por outro lado, se o tempo de alvo é muito alto, o número de ciclos vai tornar-se irrealistamente grande.

Resposta não linear não está incluída na geração de excitações de resistência de segunda geração. No entanto, ao incluir longos períodos na simulação de excitações de segunda geração, eles podem ser usados em análises dinâmicas não lineares com precisão razoável. Espectros de aceleração do ETA20a01, que é a primeira série gerada na segunda geração, é mostrado na Figura 67.13b.. Pode-se ver que os espectros de aceleração desta excitação estão linearmente aumentados.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

67.12.3 Terceira geração de ETEFs

Na simulação da terceira geração, a compatibilidade de respostas não lineares também foi considerada. Similar à formulação de simular excitações do tempo de resistência de segunda geração, terceira geração é simulada definindo fator de força R é formulada da seguinte forma:

$$S_u(T,t,R) = \max\left(|u(\tau)|\right); \quad \tau \in [0,t]$$

$$S_{uT}(T,t,R) = \frac{t}{t_{target}} \times S_{uT}(T,R) \times \frac{T^2}{4\pi^2}; \quad \tau \in [0,t]$$

$$F(a_g) = \sum_{T_k=0}^{T_k=T_{max}} \sum_{R_j=0}^{R_j=R_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_u(T_k,R_j,t_i) - S_{uT}(T_k,R_j,t_i)\right]^2$$

Em contraste com a segunda geração onde a função objetiva da computação em cada período requer uma única análise dinâmica para todos os tempos, a função objectiva da computação de terceira geração em cada tempo exige uma análise dinâmica separada para cada vez. Este fato complica simulando excitações de resistência da terceira geração.

67.12.4 Quarta geração de ETEFs

Na quarta geração, parâmetros relacionados à duração também estão incluídos no procedimento de simulação. Embora a aceleração e os espectros deslocamento sejam bons representantes da intensidade e frequência do conteúdo dos movimentos no solo, para quantificar adequadamente os movimentos no chão, é necessário considerar não só a intensidade e o conteúdo de frequência, mas também as características da duração. Embora uma variedade de definições tenham sido propostas por tempo na literatura de engenharia sísmica (O'Hara e Jacobson, 1991; Wang et al., 2016; Bommer e Martinez-Pereira, 1999; Bolt, 1973), a velocidade absoluta cumulativa (CAV) foi incluída na simulação dos ETEFs de quarta geração. Campbell e Bozorgnia, 2012 sugerem que o CAV pode ser usado para avaliar rapidamente possíveis danos a uma classe geral de estruturas convencionais. CAV é matematicamente representado como $CAV = \int_0^{t_{max}} |a(t)|\, dt$, onde $a(t)$ É a história do tempo de aceleração, e t_{max} é a duração.

Funções objetivas da Equação 67.5 foram usados para simular a série "ETA40lc"'. Os três primeiros termos calculam os resíduos de uma forma relativa, e os outros três calculam de uma maneira absoluta. Mashayekhi et al., 2018b mostrou que a combinação de termos absolutos e relativos resulta em uma excitação mais eficiente do tempo de resistência. Estas funções objetivas integram resíduos ao longo de todo o tempo e intervalos de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

período. Note-se que espectros de aceleração, espectros lineares deslocamento e CAV são considerados nestas funções objetivas.

$$F_{CAV-M}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{S_a(T_j,t_i)-S_{aC}(T_j,t_i)}{S_{aC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{S_u(T_j,t_i)-S_{uC}(T_j,t_i)}{S_{uC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{CAV(t_i)-CAV_C(t_i)}{CAV_C(t_i)}\right]^2 \\ + \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ +\alpha_{S_u}\left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ \alpha_{CAV}\left[CAV(t_i) - CAV_C(t_i)\right]^2 \end{array} \right\} \tag{67.5}$$

Onde a_g é a história do tempo de aceleração.

Essas funções objetivas levam a_g como a entrada; α_{S_u} e.. α_{CAV} são fatores de peso que controlam a contribuição dos resíduos associados com espectros deslocamento e CAV, respectivamente.

O perfil intensificador que controla a forma do aumento dos espectros de aceleração no tempo não precisa ser linear. Um perfil exponencial foi usado para esta série. O VC de ETA40lc01 é comparado com o alvo na Figura 67.14 e uma considerável correspondência entre eles é observada.

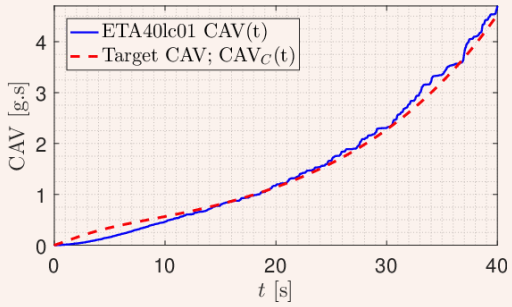


Figura 67.14: Cav of eta40lc01 versus alvo

67.12.5 Quinta geração de ETEFs

Na quinta geração, a energia histerética absorvida também está incluída no processo de geração. Deve-se mencionar que a demanda de energia histerética absorvida é usada como um indicador do parâmetro relacionado aos danos cumulativos. Uma função crescente linear para espectros de aceleração é adotada e uma função crescente correspondente de espectros não lineares deslocamento e energia histerética são matematicamente calculadas. Um procedimento detalhado para calcular funções crescentes de demanda não linear e histerética de energia pode ser encontrado em Mashayekhi et al., 2018a. Equação 67.6 é a

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

função objetiva que calcula discrepâncias ao quadrado entre as características dinâmicas das excitações do tempo de resistência e os movimentos do solo alvo:

$$F_{ETEF}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 + \sum_{\mu_k=1}^{\mu_k=\mu_{max}} \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{matrix} \alpha_{u_m}\left[u_m(\mu_k,T_j,t_i) - u_{mC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \\ +\alpha_{E_H}\left[E_H(\mu_k,T_j,t_i) - E_{HC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \end{matrix} \right\} \tag{67.6}$$

Onde $a_g(t)$ É a história do tempo de aceleração, $S_a(t,T)$, $u_m(t,T,\mu)$ e.. $E_H(t,T,\mu)$ são características dinâmicas das excitações do tempo de resistência, e $S_{aC}(t,T)$, $u_{mC}(t,T,\mu)$ e.. $E_{HC}(t,T,\mu)$ são características dinâmicas dos movimentos do solo. E_H é a energia histerética, e u_m é resposta não linear deslocamento. Figura 67.15 compara a energia histerética da ETA20kd01 com o alvo em quatro períodos diferentes.

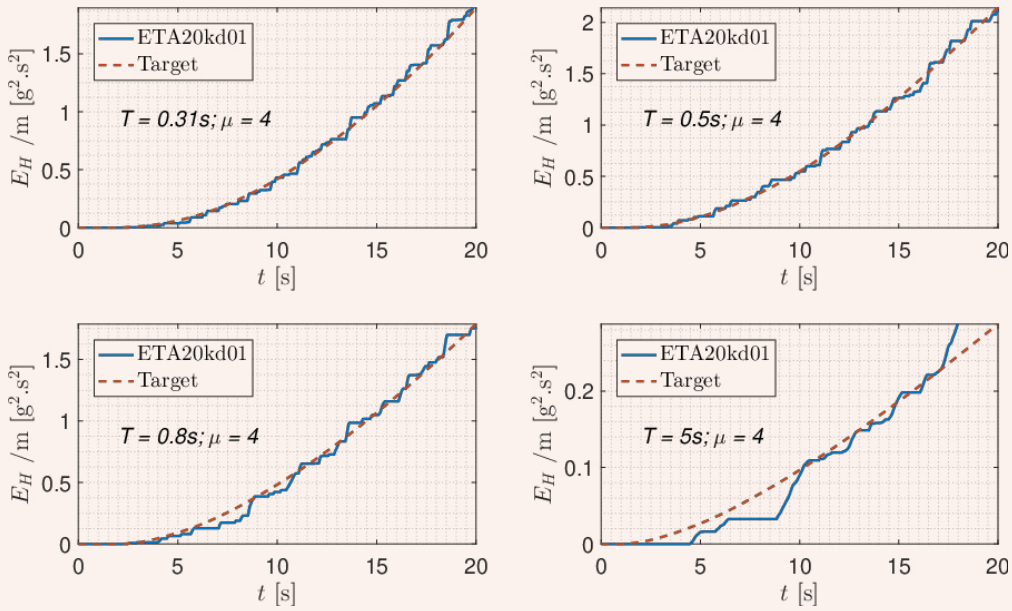


Figura 67.15: Energia histerética de ETA20kd01 contra alvo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Terremoto em Popayán por Fernando Botero, 1999. Museo Botero, Bogotá, Colômbia.

67.13 Ex 67.1: Análise de riscos sísmicos

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Este exemplo apresenta uma análise de risco sísmica probabilística (PSHA) e desagregação sísica para um edifício de 30 andares em Los Angeles, Califórnia. O objetivo é estimar a probabilidade anual de excedência de diferentes níveis de aceleração do pico do solo (PGA) e determinar os cenários dominantes de terremoto contribuindo para o risco sísmico.

Setting Seismotectônico

- O prédio está localizado a 50 km da falha de San Andreas, uma grande falha com um histórico de produzir terremotos M7,8-8,2. - Falhas moderadas adicionais (M5,5–6,5) existem a 20 km do local. - O

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

local é classificado como solo duro (Site Classe C) com uma velocidade média de onda cisalhamento $V_{S30} = 600$ M/s.

Modelo de Seismicidade (Recorrência Relacionamento)

Usando a Lei Gutenberg-Richter:

$$\log N_M = a' - b'M \tag{67.7}$$

onde:

- Parâmetros regionais de sismicidade:
  - Califórnia: $a' = 6.2$, $b' = 1.1$
- magnitude mínima: $M_{min} = 4.5$
- magnitude máxima: $M_{max} = 8.0$
- Período de retorno de uma magnitude $M \geq 7.5$ evento: 200 anos
- Taxa anual de ocorrência de $M \geq 6.0$ Terramotos: 0,03 eventos/ano

Modelo de atenuação

Usando o Boore, Joyner e Fumal (1997) GMPE:

$$\ln \text{PGA} = b_1 + b_2(M - 6) + b_5 \ln(r_{jb} + h) \tag{67.8}$$

onde:

- $M = 7.5$
- Distância Joyner-Boore: $r_{jb} = 50$ km
- Termo de profundidade: $h = 5.0$ km
- PGA predito: $0.22g$ (Valor mediano)

Análise de Risco Sísmico

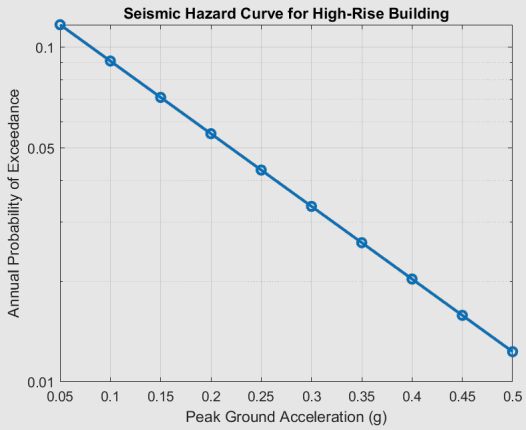
A curva de perigo sísmico ilustra a probabilidade de excedência de diferentes níveis de aceleração do pico do solo (PGA) no local. A curva de perigo é gerada usando um modelo exponencial de decaimento para a probabilidade de excedência:

$$P(Y \geq y) = \lambda_0 e^{-by} \tag{67.9}$$

Onde λ_0 é a probabilidade de excedência da base e b é a taxa de decomposição.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



A tabela seguinte fornece a probabilidade anual de excedência para diferentes níveis movimento do solo.

PGA (g)	Probabilidade Anual de Excedência
0.05	0.12
0.1	0.06
0.2	0.015
0.3	0.003

Desagregação de Riscos Sísmicos

A desagregação dos riscos sísmicos identifica os cenários mais prováveis de terremotos contribuindo para o risco em um determinado nível de aceleração espectral. Esta análise é crucial para selecionar movimentos de terra representativos para projeto estrutural.

Por.. $S_a(T = 1.0s) = 0.8g$O cenário mais provável de terremotos é:

- **Magnitude:** $M = 7.3$
- **Distância:** $R = 35$ km
- **Tipo de Ruptura:** Strike-slip

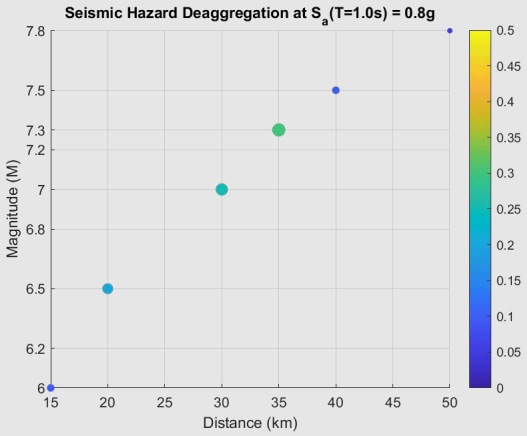
Contribuições adicionais para o perigo incluem:

- M6.5 Em.. 20 O km contribui 20%
- M7.8 Em.. 50 O km contribui 30%
- M7.0 Em.. 40 O km contribui 50% (Cenário dominante)

A seguinte parcela de desagregação mostra as contribuições relativas de diferentes pares de magnitude-distância para o nível de perigo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Discussão e Implicações de Engenharia

Os resultados da curva de perigo e análise de desagregação fornecem informações valiosas para o projeto sísmico:

- O cenário mais crítico do terremoto corresponde a um $M7.3$ Evento a 35 km, indicando que efeitos sísmicos próximos do campo devem ser considerados.
- A probabilidade de superação anual para PGA = 0,2g é 1,5%, o que pode influenciar decisões sísmicas baseadas em níveis de risco alvo.
- Os resultados da desagregação ajudam a selecionar registros para análise não linear do histórico temporal para garantir previsões realistas de resposta estrutural.

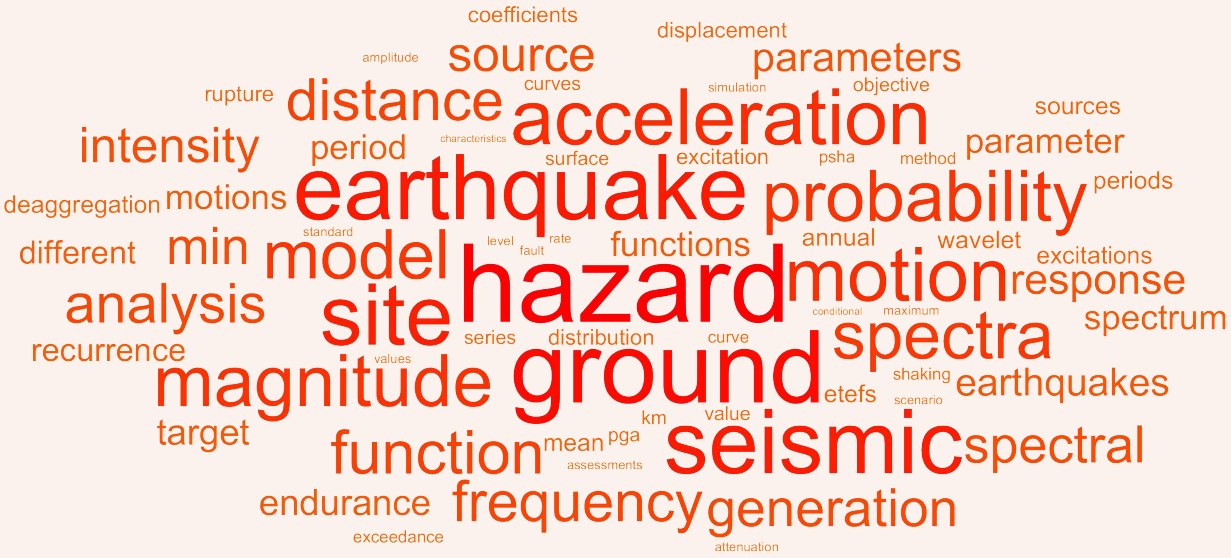
Conclusão

Os resultados do PSHA indicam que o *O perigo mais significativo* Para o edifício de edifícios altos vem de $M7.3$ terremotos ocorrendo a uma distância de 35 km. Esses resultados ajudam os engenheiros a determinarem o que é apropriado *Parâmetros sísmicos do projeto* para segurança estrutural. A curva de perigo fornece uma base para avaliar a probabilidade de diferentes intensidades movimento do solo, enquanto a análise de desagregação identifica os cenários dominantes do terremoto contribuindo para o risco sísmico.

MATLAB®O código está dentro §I.7.1.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Capítulo 68

Análise de Risco Sísmico II

Abstract

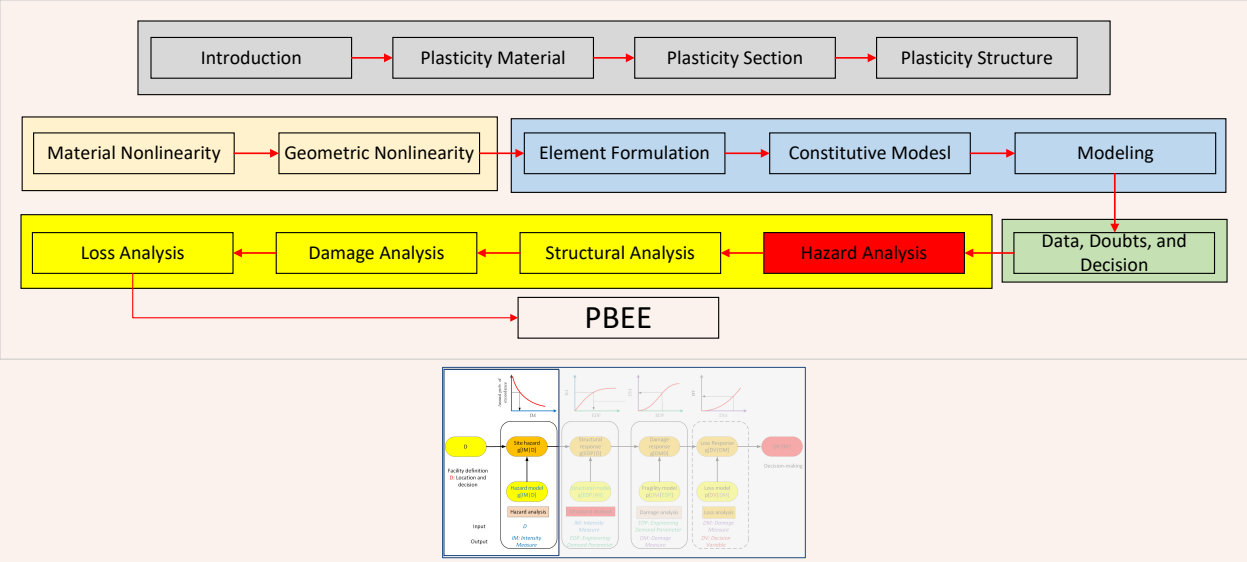
Baseando-se nos conceitos fundamentais de análise sísmica de risco apresentados no Capítulo 67, este capítulo amplia a discussão abordando aspectos-chave necessários para uma avaliação abrangente dos riscos.

Ele introduz o quadro probabilístico usado para quantificar a taxa anual de excedência para intensidades movimento do solo e explora a construção e interpretação de curvas de perigo.

Além disso, integra a análise de risco sísmico (ESRA) para avaliar as implicações do perigo sísimico no desempenho estrutural e resiliência. O capítulo também examina o papel dos períodos de retorno no projeto sísmico, a aplicação de árvores lógicas para Região de Confiança quantificação, e a interseção da análise de risco sísmico probabilístico (PSHA) com engenharia sísmica baseada em desempenho. Estas metodologias avançadas fornecem insights críticos para projetar estruturas que podem resistir a eventos sísmicos enquanto gerenciam efetivamente o risco.

68.1 Introdução 2293
68.2 Taxa anual de excessos 2294
68.3 Curva de Perigo 2295
68.4 Análise de risco sísmico da engenharia (ESRA) 2296
68.4.1 Ex 68.1: Cálculos do Período de Retorno 2297
68.5 Análise Probabilística de Risco Sísmico (PSHA) como SHA + ESRA . . 2297

CÓPIA PARA REVISÃO



68.1 Introdução

Considerando que a análise de riscos sísmicos foi detalhada no capítulo 67, certos aspectos permanecem desapercebidos, particularmente aqueles relacionados a aplicações práticas e extensões do quadro probabilístico. Este capítulo baseia-se nas fundações estabelecidas no anterior, explorando ainda mais componentes chave como curvas de perigo, períodos de retorno e análise de risco sísmico da engenharia. Além disso, integra métodos probabilísticos com avaliações estruturais de desempenho, oferecendo uma perspectiva mais abrangente sobre quantificação sísmica de perigo. Expandindo esses tópicos, nós superamos a lacuna entre modelagem de risco teórico e suas implicações práticas para o projeto de engenharia e mitigação de riscos.

1 Considerando que a análise de riscos sísmicos foi detalhada no capítulo 67, alguns aspectos permanecem desapercebidos[1].

2 Apesar da abordagem de baixo para cima, as partes que faltam estão cobertas aqui.

3 Análise de Riscos Sísmicos (SHA) é o processo de avaliação do potencial para tremores de terra e outros efeitos relacionados ao terremoto em um local específico devido à atividade sísmica. Ele tem como objetivo quantificar a probabilidade e intensidade de eventos sísmicos, fornecendo informações críticas para projetar estruturas, avaliar riscos e planejar a resiliência do terremoto.

[1] Como eu optei por não modificar o capítulo escrito por Amin Hariri-Ardebili *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

68.2 Taxa anual de excessos

4 Na Probabilística Análise de Riscos Sísmicos (PSHA), o *Taxa anual de excedência* (λ) de uma intensidade específica movimento do solo (IM) é uma medida fundamental. Ele quantifica a probabilidade de que o movimento do solo irá exceder um determinado nível de intensidade em um ano:

$$\lambda(IM) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} P(IM > x \mid m, r) f_M(m) f_R(r) \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}r,$$

onde:

- $P(IM > x \mid m, r)$:. Probabilidade de que a medida de intensidade excede x dado um terremoto de magnitude m À distância r.
- $f_M(m)$:. Função de densidade de probabilidade da magnitude do terremoto, derivada de modelos de recorrência como a relação Gutenberg-Richter.
- $f_R(r)$:. Função de densidade de probabilidade da distância entre a fonte e o local, que explica os efeitos regionais de sismicidade e atenuação.
- $m_{\min}, m_{\max}, r_{\min}, r_{\max}$:. Limites de magnitude e distância, escolhidos para capturar todas as fontes sísmicas relevantes para o local.

5 A taxa anual de excedência (λ) representa com que frequência, em média, uma intensidade específica movimento do solo (IMEspera-se que seja excedido em um ano em um local específico. Combina a probabilidade de todos os possíveis cenários de terremoto, ponderando cada cenário pela sua probabilidade de ocorrência e sua contribuição para a intensidade movimento do solo. Esta medida fornece uma estrutura probabilística para quantificar o perigo sísmico.

6 A probabilidade $P(IM > x \mid m, r)$ é tipicamente derivada de Equações de Previsão (GMPEs), que modelam a intensidade esperada de tremores com base na magnitude, distância fonte-a-local e condições específicas do local, como propriedades do solo.

7 PSHA muitas vezes emprega árvores lógicas para capturar incertezas epistêmicas na caracterização de fontes sísmicas, modelos de recorrência e GMPEs. Cada ramo da árvore representa um modelo ou suposição diferente, com pesos atribuídos refletindo a confiança em cada opção. Estas contribuições ponderadas são combinadas para produzir uma estimativa de risco probabilística abrangente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

68.3 Curva de Perigo

O *Curva de perigo* representa a relação entre λ (taxa de excedência anual) e IM (medida de intensidade, como o pico do solo Aceleração (PGA) ou Aceleração Espectral (SA), como mostrado na figura. 68.1:

$\lambda(IM)$ = Taxa de excedência de um nível específico de movimento do solo no local.

Curvas de perigo são usadas para:

- Estimar a probabilidade de sofrer danos no solo ao longo da vida do edifício, o que é crítico para engenharia sísmica baseada em desempenho.
- Selecione movimento do solo níveis correspondentes a períodos de retorno específicos (por exemplo, 10% Excedência em 50 anos ou 2% Excedência em 50 anos), que são comumente usados em códigos de projeto sísmicos.
- Avaliar as respostas de construção e margens de segurança sob diferentes cenários de terremoto, ajudando em projeto estrutural e mitigação de riscos.

As curvas de perigo variam significativamente entre os locais, refletindo diferenças na sismicidade local, proximidade com falhas e condições específicas do solo. Por exemplo, locais perto de falhas ativas geralmente exibem maiores taxas anuais de excedência para o mesmo nível de intensidade em comparação com aqueles em regiões menos ativas.

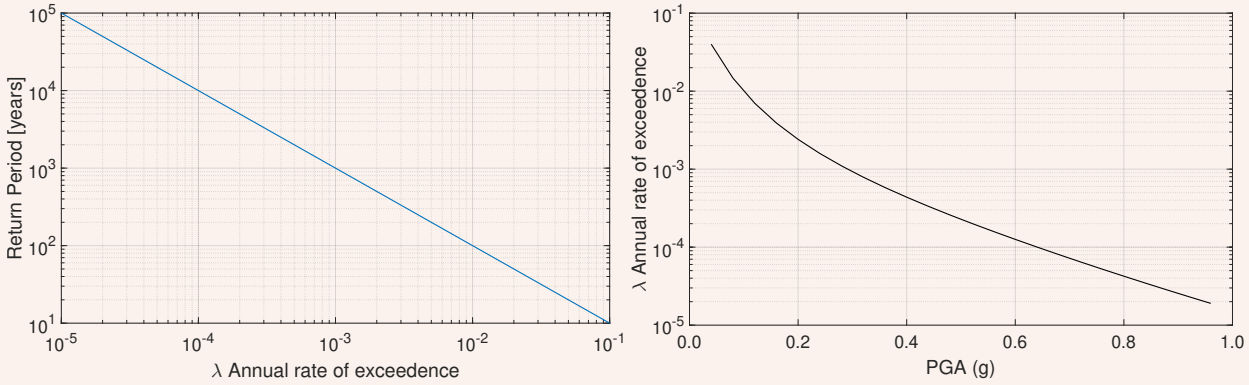


Figura 68.1: Curva de perigo. O enredo esquerdo ilustra o conceito de períodos de retorno, enquanto o plano direito mostra uma curva de perigo para um local específico.

Em sua forma mais simples, a relação entre o período de retorno (T) e a taxa anual de excedência (λ) é crítico. O período de retorno é o intervalo médio de tempo entre as ocorrências de uma intensidade específica movimento do solo sendo ultrapassada em um local. Esta relação é expressa como:

$$T = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{or equivalently,} \quad \lambda = \frac{1}{T}.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

11 Por exemplo, um período de retorno de 475 anos corresponde a uma probabilidade anual de superação de aproximadamente 0,0021 (0,21)%), enquanto um período de retorno de 2.475 anos corresponde a uma probabilidade de 0,0004 (0,04%). Estes valores são amplamente usados em projetos sísmicos para estruturas comuns e críticas, respectivamente.

12 É importante notar que o período de retorno não implica que um evento específico ocorrerá precisamente nesses intervalos. Em vez disso, representa o intervalo médio de recorrência, com probabilidades calculadas em múltiplos prazos. Por exemplo, um período de retorno de 475 anos implica um 10% probabilidade de excedência em 50 anos.

68.4 Análise de risco sísmico da engenharia (ESRA)

13 Engenharia Análise de Risco Sísmico refere-se ao processo de avaliação e quantificação dos riscos potenciais associados com terremotos para estruturas projetadas, infraestrutura e sociedade.

14 Ele estende a Análise de Riscos Sísmicos (SHA) incorporando *Vulnerabilidade* (o quanto uma estrutura pode ser danificada) e *exposição* (o valor ou importância da infraestrutura afetada). Juntos, esses fatores determinam as consequências esperadas dos eventos sísmicos.

15 Se assumirmos uma distribuição Poisson para representar ocorrências de terremoto como aleatórias e independentes ao longo do tempo, então a probabilidade de pelo menos uma superação de um nível movimento do solo durante um período de tempo t é dado por:

$$P_E = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Resolvendo pela taxa de superação λ, nós entendemos:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - P_E)}{t}.$$

Usando isso na definição do período de retorno:

$$T_R = \frac{t}{-\ln(1 - P_E)}.$$

16 A equação simplificada $T_R = 1/\lambda$ assume uma taxa de superação anual constante λ e é uma aproximação válida para pequenas probabilidades de excedênciaP_E) com o tempo t.. Esta aproximação se mantém quando λt É pequeno, levando a:

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t.$$

17 Assim, podemos expressar λ em termos de P_E:

$$P_E \approx \lambda t \quad \Longrightarrow \quad \lambda \approx \frac{P_E}{t}.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

18 A partir disto:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{t}{P_E}.$$

No entanto, para maiores P_EA relação logarítmica deve ser usada para maior precisão.

68.4.1 Ex 68.1: Cálculos do Período de Retorno

Considere os intervalos de probabilidade típicos para excedência:

- Nível de base do projeto (DBL): $P_E \in [20\%, 64\%]$,
- Nível máximo de projeto (MDL): $P_E \in [10\%, 20\%]$.

Para uma represa com uma vida de design $t = 100$ Anos, calculamos as taxas de excedência e os períodos de retorno como segue:

1. Por.. $P_E = 0.20$ (DBL, 20% Probabilidade de excedência:

$$\lambda = -\frac{\ln(1-0.20)}{100} = -\frac{\ln(0.80)}{100} \approx 0.00223.$$

Usando esta taxa de superação, o período estimado de retorno é:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00223} \approx 450\,\text{years}.$$

2. Por.. $P_E = 0.10$ (MDL, 10% Probabilidade de excedência:

$$\lambda = -\frac{\ln(1-0.10)}{100} = -\frac{\ln(0.90)}{100} \approx 0.00105.$$

Usando esta taxa de superação, o período estimado de retorno é:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00105} \approx 1,000\,\text{years}.$$

68.5 Análise Probabilística de Risco Sísmico (PSHA) como SHA + ESRA

19 Engenharia Análise de Riscos Sísmicos (ESRA) produz a taxa anual de excedência λ, que representa a probabilidade de pelo menos um evento ocorrer em uma determinada vida t (Figura 68.3).

20 Análise de Riscos Sísmicos (SHA) fornece a relação entre a taxa anual de excedência λ e uma medida de intensidade (IM).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

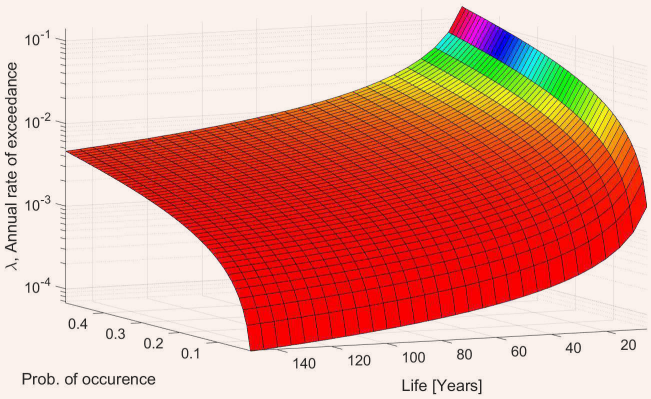


Figura 68.2: Análise de risco sísmica da engenharia

21 A Probabilística Análise de Riscos Sísmicos (PSHA) integra ESRA e SHA para estimar a probabilidade de diferentes níveis de tremores no solo em um local específico durante um determinado período.

22 Ao contrário das avaliações determinísticas de risco sísmico, que se concentram em cenários específicos de terremotos, a PSHA responde por incertezas na ocorrência, magnitude, localização e movimento do solo, fornecendo uma medida probabilística do perigo sísimico.

23 A abordagem segue um processo estruturado, como ilustrado na Figura 68.3:

1. Determine: (a) a vida de juros (anos) e (b) a probabilidade de ocorrência.
2. Obter λ da superfície do ESRA (Figura 68.2).
3. Use a curva SHA para determinar o pico correspondente de aceleração do solo (PGA) 68.1).

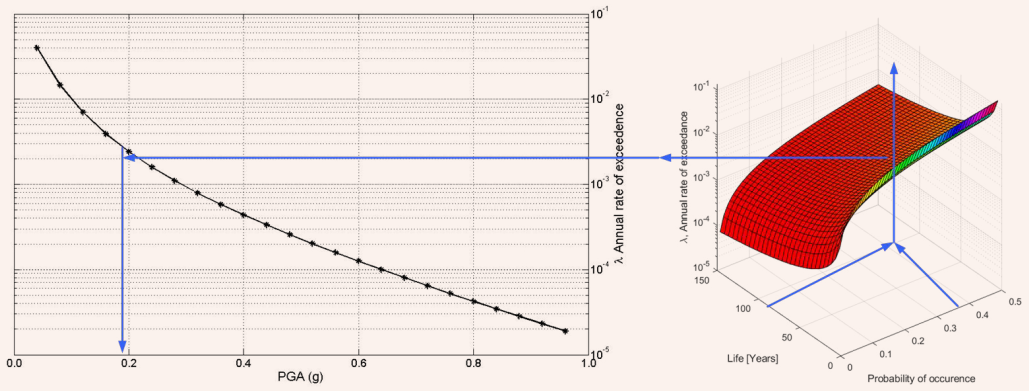


Figura 68.3: Análise de Riscos Sísmicos Probabilísticos (PSHA).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

24 Uma vez que o PGA é determinado, um conjunto de n Histórias de aceleração do tempo são selecionadas (ou geradas) para análises múltiplas.

25 A partir dessas análises, os principais parâmetros de resposta são extraídos e plotados:

Medida de Intensidade (IM) Uma representação quantitativa das características movimento do solo, tipicamente a aceleração do pico de solo (PGA) ou aceleração espectral.

Parâmetro de Exigência da Engenharia (PED) Uma quantidade de resposta estrutural relevante para a avaliação da segurança, como base cisalhamento, deriva interstory, ou aceleração do piso.

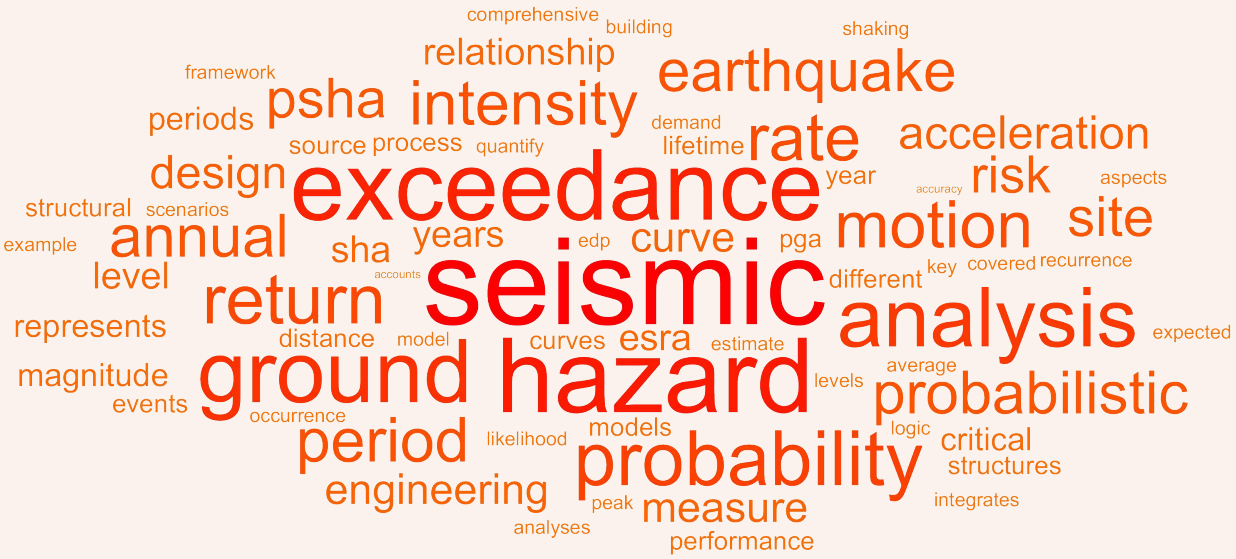
26 Este processo é repetido m Tempos para diferentes níveis de intensidade para desenvolver modelos probabilísticos de demanda sísmica.

27 Em todos os casos nós tramamos EDP *vs* IM, que é o *Modelo de demanda sísmica* Que é muitas vezes representado por

$$EDP = a.IM^b$$

Onde a e.. b são coeficientes de regressão obtidos a partir de análises dinâmicas não lineares (ver capítulo 53)

28 Cuidado, os resultados da PSHA dependem muito da precisão dos modelos de entrada, incluindo a caracterização da fonte; pode ter dados históricos limitados para eventos raros e extremos; e resultados probabilísticos podem ser desafiadores para interpretar para as partes interessadas não técnicas.



CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 69

Análise estrutural

Abstract

Este capítulo apresenta metodologias avançadas em análise sísmica, abrangendo múltiplas abordagens usadas para avaliar a capacidade sísica de estruturas como edifícios e pontes. Fundamentos teóricos e aplicações práticas de vários métodos, incluindo análise pushover (POA), Análise Multi-Strip (MSA), Analise Dinâmica Incremental (IDA), Análise de Nuvens (CLA) e Análise do Tempo de Endurance (ETA), são explorados, destacando seus respectivas vantagens e limitações.

A análise de Pushover é discutida extensivamente como um procedimento não linear estático amplamente utilizado que fornece insight sobre o comportamento estrutural inelástico sob carga lateral aplicada incrementalmente. Saídas-chave como a curva de capacidade e ponto de desempenho são analisadas para facilitar uma compreensão da resiliência estrutural sob forças sísmicas. Além disso, definições essenciais como função de capacidade, relações estressor-resposta, e parâmetros de demanda de engenharia são introduzidos para estabelecer um quadro conceitual abrangente para análise sísmica.

Cada metodologia é examinada em termos de sua base teórica, considerações de implementação e aplicações práticas. O capítulo discute sistematicamente abordagens de modelagem, definições de padrões de carga, procedimentos incrementais de carregamento e a interpretação de dados estruturais de resposta. Vários padrões de carga, incluindo as distribuições triangulares inversas, retangulares e de primeiro modo, são analisados para ilustrar seus efeitos nos resultados da análise.

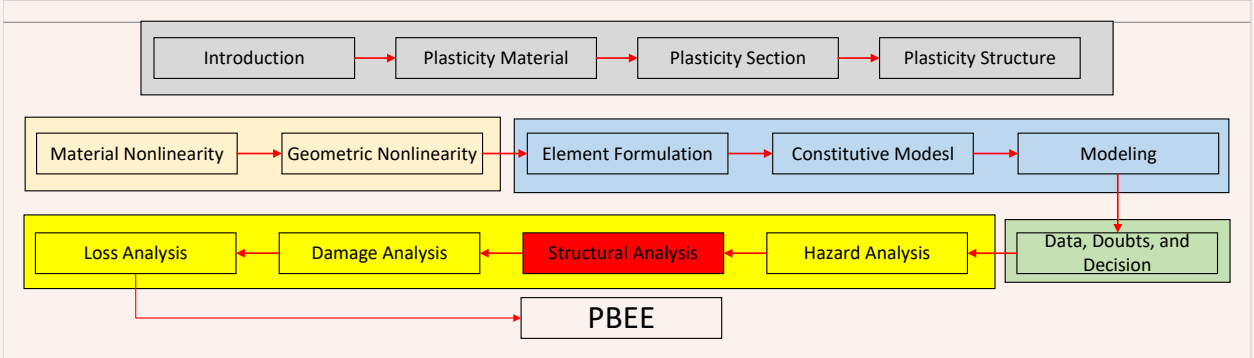
Para unir teoria e prática, dois estudos de caso detalhados são apresentados. O primeiro exemplo envolve um aço pórtico submetido a análise sísmica, demonstrando a identificação de capacidades de base cisalhamento, e limites de deformação. O segundo exemplo fornece uma avaliação aprofundada de um projeto do píer da ponte real, incorporando análise espectro de resposta, cálculos de momento plástico e critérios de avaliação baseados em desempenho baseado nas diretrizes de projeto da ponte sísmica AASHTO.

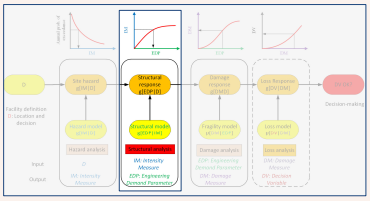
O capítulo conclui reafirmando a importância dessas metodologias na avaliação da resiliência estrutural. Ao fornecer uma metodologia estruturada e estudos de caso práticos, este capítulo serve como um recurso crucial para engenheiros envolvidos na avaliação sísmica e design de estruturas.

69.1 Introdução 2301
69.2 Definições básicas 2302
69.3 Capacidade e demanda 2303
69.3.1 Exigir relações de capacidade 2303
69.3.2 Métodos de estimativa da demanda 2304
69.3.3 Princípios do projeto de capacidade 2305
69.4 Métodos de análise sísmica 2306

CÓPIA PARA REVISÃO

69.4.1 Análise de Push-Over (POA) 2306
69.4.2 Análise Dinâmica Incremental (IDA) 2343
69.4.3 Análise de Múltiplas Listras (MSA) 2345
69.4.4 Análise de Nuvem (CLA) . . 2348
69.4.5 Análise do Tempo de Endurance (ETA) 2349
69.4.6 Resumo 2351
69.5 O que vem a seguir 2353





69.1 Introdução

1 A avaliação precisa da resposta estrutural a eventos sísmicos é um aspecto crítico de engenharia sísmica. Ao longo dos anos, vários métodos analíticos e numéricos foram desenvolvidos para avaliar o desempenho sísmico de edifícios, pontes e outras infraestruturas.

2 Essas metodologias, que vão desde abordagens estáticas simplificadas a simulações dinâmicas abrangentes, oferecem aos engenheiros um espectro de ferramentas para prever o comportamento estrutural e mitigar riscos sísmicos.

3 Métodos de análise sísmica podem ser amplamente classificados em abordagens lineares e não lineares, com mais distinções entre técnicas estáticas e dinâmicas. Análises linear-elásticas tradicionais, enquanto computacionalmente eficientes, muitas vezes não conseguem capturar a extensão total de deformações inelástica e mecanismos de dano que as estruturas experimentam durante fortes terremotos. Métodos não lineares, por outro lado, fornecem uma representação mais realista do desempenho estrutural considerando material e não linearidade geométrica.

4 Este capítulo apresenta uma discussão aprofundada sobre as principais metodologias de

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

análise sísmica, com foco em técnicas não lineares que fornecem insights mais profundos sobre resiliência estrutural. Dentre estes, a análise de pushover, um procedimento não linear estático, ganhou destaque por sua capacidade de aproximar o comportamento inelástico com uma demanda computacional relativamente baixa. Outros métodos avançados, como Análise Dinâmica Incremental (IDA), Análise Multi-Strip (MSA) e Análise do Tempo de Endurance (ETA), oferecem perspectivas dinâmicas sobre o desempenho estrutural sob diferentes excitações sísmicas.

5 Um aspecto crítico da análise sísmica é a interpretação dos principais parâmetros de resposta, incluindo curvas de capacidade, parâmetros de demanda e mecanismos de falha. Esses indicadores informam decisões de design, estratégias de retromontagem e avaliações de risco. Além disso, ferramentas computacionais modernas como SAP2000, ETABS e OpenSees têm melhorado significativamente a precisão e aplicabilidade desses métodos, facilitando simulações estruturais complexas com eficiência crescente.

6 O capítulo segue delineando sistematicamente os fundamentos teóricos, os marcos metodológicos e as aplicações práticas das técnicas de análise sísmica. Através de discussões comparativas e estudos de caso, visa equipar engenheiros e pesquisadores com uma compreensão abrangente das vantagens e limitações de cada abordagem, apoiando a tomada de decisão informada em design sísmico-resistente e avaliação.

7 No próximo capítulo (70Vamos cobrir a avaliação quantitativa da análise sísmica não linear coberta por esta.

69.2 Definições básicas

8 Vamos começar distinguindo os vários termos relacionados à capacidade do sistema estrutural.

Curva de Capacidade: Em sua definição original, esta noção se refere a uma curva de força não linear-deslocamento (Freeman, 1978); é determinado por carregar estaticamente a estrutura para calcular o telhado deslocamento *vs.* base cisalhamento. Esta curva também se refere ao *Curva pushover* (Freeman, 1998). No laboratório, a curva de carga-deslocamento pode ser registrada estabelecendo ou controle de carga ou protocolos de controle deslocamento, dependendo da disponibilidade de instalações. No entanto, usando o teste de controle deslocamento, o pós-fracasso pode ser capturado. A curva de capacidade convencional também pode ser plotada em termos de energia dissipada, referida como *curva de capacidade baseada em energia* (D'Ambrisi e Mezzi, 2015).

Diagrama de Capacidade: Esta noção se refere à pseudo-aceleração *vs.* Espectro de deformação ordenado (Chopra e Goel, 1999); é calculado dividindo tanto a base cisalhamento pela massa modal efetiva no modo de vibração fundamental e o pico

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

deslocamento pelo fator de participação em massa. Este diagrama também é chamado de *Espectro de capacidade*.

Função de capacidade: Essa noção é definida como a relação entre um parâmetro externo (ou interno) que afeta a capacidade da estrutura, também chamado de "stressor"(S) e "resposta"(R) do sistema no nível macro. Ao contrário da curva de capacidade convencional, a função de capacidade é um conceito mais geral e pode ser gerado por qualquer dos iniciadores explicados na introdução; Além disso, não se limita apenas à ação sísmica.

Estressador: pode ser 1) uma carga monotônica, cíclica ou dependente do tempo incremental (ou deslocamento, aceleração, pressão); 2) um parâmetro de resistência que diminui incrementalmente ou degradação em propriedades de força; ou 3) um parâmetro crítico discreto que aumenta/decresce em um sistema levando à falha. Em PBEE, S é tipicamente chamado de parâmetro de medição de intensidade (IM). No presente trabalho, porém, S é mais geralmente definido e se refere a qualquer quantidade cuja variação (contínua ou discreta) pode levar à falha progressiva do sistema e seu colapso final.

Resposta: é representativo do comportamento do sistema sob o estressor variável. É retratado em um sentido absoluto ou relativo. R pode ser: 1) uma única variável de dano (DV), como deriva ou dissipação de energia; 2) uma combinação de vários DVs em termos de índice de danos (DI); ou 3) qualquer índice de monitoramento de segurança (Wang, Gu e Bao, 2013). No campo de engenharia sísmica, R é tipicamente chamado de parâmetro de demanda de engenharia (EDP) (Vamvatsikos e Cornell, 2004).

69.3 Capacidade e demanda

69.3.1 Exigir relações de capacidade

9 Em análise estrutural, entender a interação entre capacidade e demandas é fundamental para garantir segurança, funcionalidade e custo-efetividade.

10 A relação entre capacidade e demandas define se uma estrutura pode funcionar como pretendido em condições típicas e extremas. Uma estrutura deve ter capacidade suficiente para superar as demandas previstas, incorporando uma margem de segurança para dar conta das incertezas no comportamento do material, estimativas de carga, ocorrência de terremotos, magnitude, movimento do solo e qualidade da construção. Este equilíbrio é expresso muitas vezes através de uma fator de segurança ou da relação demanda-capacidade.

11 Tanto a capacidade quanto as demandas são geralmente caracterizadas por uma distribuição probabilística gaussiana, fig. 1. 69.1, refletindo a variabilidade inerente em materiais, construção e fatores ambientais. Estas distribuições permitem aos engenheiros quantificar a probabilidade de falha analisando a sobreposição entre as curvas de capacidade e demanda.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

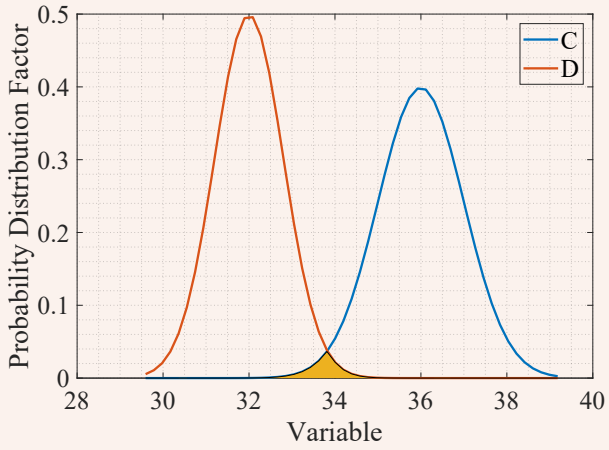


Figura 69.1: Probabilisitc natureza de capacidade e demanda

69.3.2 Métodos de estimativa da demanda

12 Exigências, representam as cargas e tensões uma estrutura é submetida durante sua vida útil, incluindo gravidade, vento, terremotos, e outras forças ambientais ou operacionais.

13 Em nosso contexto, precisamos identificar parâmetros específicos de demanda por engenharia (PED) e critérios de aceitação adequados para avaliar quantitativamente os níveis de desempenho.

14 EDP são quantidades de resposta mensuráveis (tipicamente pico (cisalhamento, forças e deformações, derivas inter-histórias, ou acelerações do piso em componentes estruturais e não estruturais.

15 A performance é verificada por comparando demandas computadas com critérios de aceitação (capacidade) para o nível de desempenho desejado.

16 EDP são determinados a partir de

Desenvolvimento de Modelo Estrutural: Um modelo detalhado da estrutura é criado no software análise estrutural. O modelo captura propriedades do material, geometria, e características amortecimento.

Seleção de Moções em terra: Movimentos terrestres específicos são escolhidos com base em análises sísmicas de perigo. Estes movimentos podem ser registros de terremotos reais ou acelerogramas gerados sinteticamente.

Risco sísmico: refere-se ao potencial de tremor de terra em um local devido a terremotos. O perigo é quantificado em termos da probabilidade de exceder níveis específicos de movimento do solo, tais como aceleração do pico do solo (PGA) ou aceleração espectral (SA).

Análise Dinâmica: **Análise não linear da história do tempo:** Este é o método mais

CÓPIA PARA REVISÃO

comum em PBEE para determinar EDPs. A estrutura é submetida aos movimentos de terra selecionados, e a resposta é calculada em cada passo.

Análise de Pushover Estático: Para alguns estudos mais simples, EDPs são aproximados usando análise estática não linear.

Análise Linear: Em alguns casos, a análise linear espectro de resposta pode ser usada, mas é menos precisa para PBEE.

Gravando EDPs: A análise produz histórias de tempo ou valores máximos dos EDPs para cada movimento do solo. Análise estatística desses resultados (por exemplo, média, mediana ou percentil 90) é realizada para avaliar o desempenho.

17 Dependendo da configuração estrutural, os resultados das análises não lineares podem ser sensíveis aos parâmetros de entrada assumidos e aos tipos de modelos usados.

18 Deve-se ter expectativas claras sobre essas porções da estrutura que se espera sofrer deformações inelásticas e então usar as análises para

1. Confirme a localização das deformações inelásticas
2. Caracterização:

   - Exigências de deformação de elementos cedentes.
   - Exigências de força em elementos que não cedem.

19 Conceitos de design de capacidade podem fornecer desempenho confiável.

69.3.3 Princípios do projeto de capacidade

20 O projeto de capacidade é um conceito fundamental em engenharia sísmica, desenvolvido para garantir o comportamento dúctil e previsível das estruturas sob forças sísmicas. Este princípio prioriza o controle de mecanismos de falha em estruturas, visando maximizar a dissipação de energia e evitar modos de falha quebradiços. Ao enfatizar a ductilidade e uma hierarquia de força, o projeto da capacidade garante que as estruturas funcionem com segurança durante os terremotos.

21 A ideia central do projeto de capacidade é estabelecer uma hierarquia de força entre os componentes estruturais. Por exemplo, em resistência ao momento pórticos, vigas são intencionalmente projetados para ceder antes pilares. Isto garante que a estrutura pode dissipar energia sísmica através da formação de rótulas plásticas em vigas, enquanto pilares permanecer elástico e estável. Esta abordagem é frequentemente referida como o conceito de "forte pilar, fraco viga", que minimiza o risco de colapso e promove comportamento estrutural previsível.

22 Dutilidade é um elemento central do projeto de capacidade. Componentes estruturais são detalhados para sofrer deformações inelásticas significativas sem perder sua capacidade de carga. Esta habilidade de deformar plasticamente permite que a estrutura absorva e

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

dissipe energia durante um terremoto. Para conseguir isso, o projeto cuidadosamente evita mecanismos de falha quebradiços, tais como falha cisalhamento, ou falha na ligação. Esses modos de falha são considerados indesejáveis, pois ocorrem de repente e sem aviso prévio.

23 Fatores de super-força também são empregados para garantir a hierarquia da força. Por exemplo, pilares e fundações são projetadas com maior força do que vigas, evitando falhas não intencionais em componentes críticos. Da mesma forma, em sistemas com suportes pórtico, os aparelhos são projetados para ceder na tensão enquanto permanecem estáveis na compressão, garantindo que a dissipação de energia ocorra como pretendido.

24 Os princípios do projeto de capacidade se estendem a uma variedade de sistemas estruturais. Em concreto armado momento resistindo pórticos, rótulas plásticas são projetados para se formar no final de vigas durante eventos sísmicos. Estas dobradiças permitem que vigas sofra grandes rotações, dissipando energia efetivamente enquanto protegem pilares e outras partes da estrutura. Nas paredes cisalhamento, o projeto de capacidade garante que a flexão ocorra antes da quebra do frágil cisalhamento, aumentando o comportamento dúctil da parede.

25 Um dos principais benefícios do projeto de capacidade é a previsibilidade que proporciona no desempenho estrutural durante terremotos. Controlando a localização e sequência de falhas, engenheiros podem garantir que as estruturas se comportem de forma controlada e segura. Essa abordagem também aumenta a segurança, evitando colapsos súbitos e proporcionando aos ocupantes tempo suficiente para evacuar. Além disso, o projeto de capacidade é econômico, pois concentra comportamento dúctil em regiões específicas, reduzindo a necessidade de superprojeção em outras partes da estrutura.

26 Princípios de projeto de capacidade estão embutidos em códigos de design sísmico modernos, como ASCE/SEI 7 nos Estados Unidos, Eurocode 8 na Europa, e a lei padrão do edifício japonês. Esses códigos incorporam as idéias fundamentais da ductilidade, hierarquia de força e dissipação de energia, garantindo que as estruturas sejam capazes de suportar forças sísmicas enquanto protegem vidas e propriedades.

69.4 Métodos de análise sísmica

69.4.1 Análise de Push-Over (POA)

Teoria

27 A análise de Pushover é um procedimento não linear estático usado para estimar a capacidade sísmica das estruturas. É particularmente popular na engenharia estrutural para avaliar o desempenho de edifícios e pontes sob cargas sísmicas.

28 Ao contrário das análises sísmicas dinâmicas, a análise pushover fornece uma visão

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

detalhada do comportamento inelástico de uma estrutura, incluindo seus mecanismos de falha, simulando sua resposta para aumentar gradualmente as cargas laterais. Com o aumento da magnitude do carregamento, os elos fracos (articulares plásticas) e os modos de falha da estrutura são encontrados.

29 A saída chave da análise de pushover é o *curva de capacidade* ou *Curva pushover*, que representa a relação entre base cisalhamento e telhado deslocamento. Esta curva permite aos engenheiros determinar a capacidade sísmica de uma estrutura e avaliar se ela atende objetivos de desempenho sob vários níveis de risco.

30 ATC-40 (ATC-40, 1996) E FEMA-273 (FEMA, 1997b)Documentos desenvolveram procedimentos de modelagem, critérios de aceitação e procedimentos de análise para análise pushover. Estes documentos definem critérios de força-deformação para dobradiças usadas na análise do pushover.

31 O método permite traçar a sequência de rendimento e falha no membro e os níveis da estrutura, bem como o progresso da curva de capacidade global da estrutura. 69.2. Isso basicamente define a demanda na estrutura.

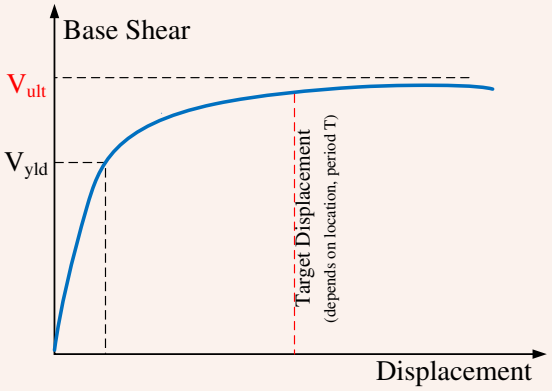


Figura 69.2: Curva de capacidade

Objetivos-chave

32 A análise do Pushover tem vários propósitos críticos:

- Avaliar o desempenho estrutural: Avalie a resposta inelástica da estrutura.
- Identifique pontos fracos: Detecte potenciais pontos de falha e componentes críticos.
- Determine a capacidade sísmica: Estimar a base cisalhamento, telhado deslocamento, e exigências de ductilidade.
- Avaliar as Necessidades de Retroajuste: Informe o fortalecimento e estratégias para melhorar o desempenho sísmico.

CÓPIA PARA REVISÃO

Suposições e Limitações

33 Embora eficaz, a análise "pusover"é baseada em pressupostos específicos que podem limitar sua aplicabilidade:

- A análise assume que a resposta é dominada pelo *Modo fundamental de vibração*, tornando-o adequado principalmente para edifícios de baixo e médio edifício.
- Engaste condições são tipicamente assumidas, e *Efeitos de modo mais elevado* são negligenciados a menos que várias análises de pushover com diferentes padrões de carga sejam realizadas.
- Efeitos dinâmicos como duração, frequência e interação solo-estrutura não são capturados.

Passos na Análise Pushover

Modelando a estrutura

- Use um *Modelo estrutural não linear* para representar a geometria, as propriedades do material e condições de contorno.
- Defina rótulas plásticas em locais críticos, como conexões viga-pilar, base de pilares, ou meio-espalho de vigas.
- Representar o comportamento material usando um *relação força-deformação* (por exemplo, modelos bilineares ou trilineares).

Aplique cargas de gravidade Cargas de gravidade estática, incluindo cargas mortas e uma fração de cargas vivas, são aplicadas para garantir que a estrutura esteja em equilíbrio antes da carga lateral.

Defina padrões de carga lateral Os padrões comuns de carga incluem, Fig. 69.3:

- Carga triangular inversa: Um padrão de carga aumentando linearmente da base para o topo, representando uma distribuição triangular invertida.
- Carga retangular: Uma distribuição uniforme de carga aplicada na altura da estrutura.
- Primeiro Modo de Carga: Um padrão de carga proporcional ao fundamental forma modal da estrutura.
- Carga Dinâmica Modal: Uma distribuição de carga derivada das contribuições modais da análise dinâmica, representando efeitos de modo mais elevado.

Carregamento Incremental

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

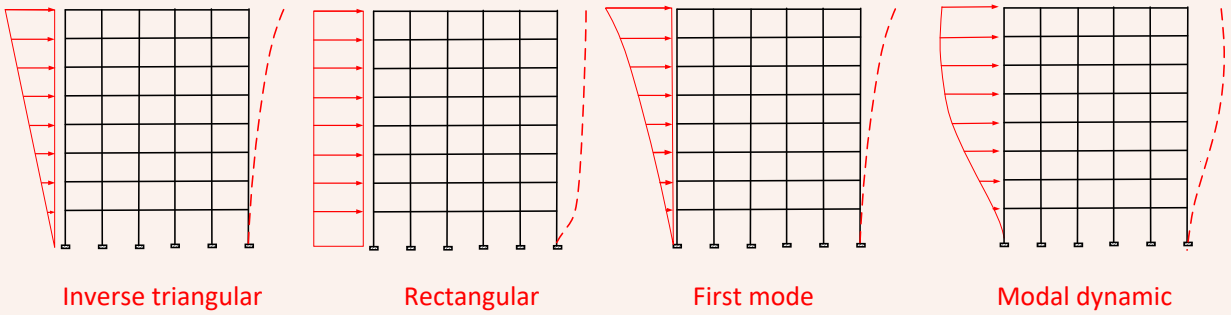


Figura 69.3: Cargas laterais para análise push-over

- Incrementalmente aplicar forças laterais ou deslocamentos até um valor alvo. O alvo deslocamento pode ser determinado a partir do espectro de resposta

$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right) C_s$$

  Onde Δ é o espectral deslocamento, T é o período, e C_s o coeficiente sísmico elástico.
- Faça verificações de equilíbrio e compatibilidade a cada passo.
- Continue até que a falha global ou local ocorra (por exemplo, formação rótula plástica, excessiva deslocamento).

Monitore a resposta estrutural Os principais parâmetros de resposta incluem:

- Base cisalhamento: Força lateral total resistida pela estrutura.
- Teto deslocamento: Medição da capacidade de deformação da estrutura.
- Formação: Locais e sequência de comportamento inelástico.

Desenvolva a curva de capacidade Trace a base cisalhamento contra o telhado deslocamento para criar o *Curva pushover*, representando a resposta inelástica global da estrutura.

Interpretação de Saída

Capacidade Curva A curva de flexão está segmentada em:

- Região Elastic: Resposta inicial.
- Região Inelástica: Resposta não linear mostrando degradação gradual.
- Ponto de colapso: Ponto de base máxima cisalhamento ou capacidade deslocamento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Ponto de Desempenho A interseção do *Espectro de demanda* (da análise sísmica) com a curva de capacidade define o *Ponto de desempenho*, representando esperado deslocamento durante um terremoto.

Padrões de Formação do Dobradilho Rótulas plásticas fornecer insights sobre mecanismos de falha e potenciais elos fracos. Use sequências de formação de dobradiças para verificar se a estrutura exibe *Comportamento dúctil* (preferido) ou *comportamento frágil* (indesejável).

Deriva e Dutilidade Calcule as razões de deriva inter-story e a demanda geral da ductilidade para garantir que a estrutura atenda aos objetivos de desempenho do projeto.

Aplicações

- Design baseado em desempenho: Avaliar desempenho sob diferentes níveis de risco sísmico (ocupação imediata, segurança da vida, prevenção do colapso).
- Retrofit Design: Avaliar a eficácia das técnicas de fortalecimento estrutural (por exemplo, adicionar suportes, paredes cisalhamento).
- Avaliação de Danos: Estimar possíveis danos nas estruturas existentes para o planejamento de resposta a desastres.

Considerações Avançadas

- Efeitos de Modo Superior: Realizar múltiplas análises com padrões de carga variados para explicar os modos mais altos, especialmente em estruturas altas ou irregulares.
- Análise de Pushover Adaptativa: Atualizar o padrão de distribuição de carga dinamicamente como dobradiças e rigidez mudanças.
- Ferramentas de Software: Ferramentas como SAP2000, ETABS e OpenSees facilitam a análise de pushover com recursos embutidos para modelagem rótulas plásticas e comportamento não linear.
- Modelos de Materiais Não-lineares: Incorpora modelos específicos de materiais (por exemplo, concreto confinado, produção de aço) para simular melhor o comportamento real.

Comparação com análise sísmica

34 Análise de Pushover e Análise Sísmica são comparadas na tabela 69.1.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.1: Comparação da Análise de Pushover e Análise Sísmica

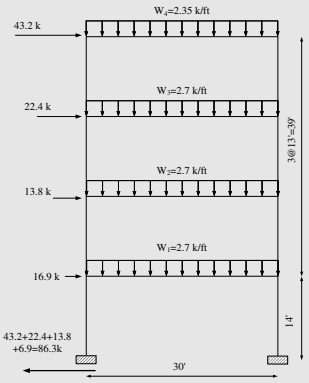
Aspect Meia regra Natureza	**Análise de Pushover** Procedimento estático não linear	**Análise sísmica** ou procedimento dinâmico não linear
Efeitos dinâmicos	Ignora propriedades dinâmicas (por exemplo, forças inerciais dependentes do tempo)	Considera diretamente as propriedades dinâmicas, incluindo efeitos movimento do solo
Comportamento modelado	Foca em respostas inelásticas e mecanismos de falha	Muitas vezes limitada à resposta elástica a menos que análise não linear seja usada
Efeitos de alta-moda	Negligenciado, a menos que várias análises sejam conduzidas	Totalmente capturados em análise dinâmica
Complexo	Computacionalmente mais simples, requer menos recursos	Mais computacionalmente intensivo, especialmente para análise dinâmica não linear
Saídas	Curva de capacidade, padrões de formação de dobradiças, exigências de ductilidade	Respostas da história do tempo, contribuições modais, dissipação de energia
Aplicabilidade	Adequado para estruturas de baixo a médio edifício com configurações regulares	Necessário para estruturas altas, irregulares ou críticas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

69.4.1.1 Ex 69.1: Exemplo de curva da demanda

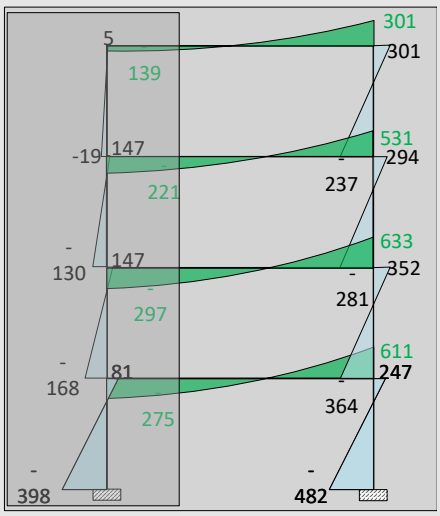
Adaptado de *Design Plástico Baseado em Desempenho: Estruturas de aço resistentes ao terremoto* por Goel e Chao



Nós procuramos determinar a curva de demanda para o seguinte pórtico F_y= 50 ksi, E=30.000 ksi, deformação axial e cisalhamento são negligenciados. Curvação de Momento Elastic-perfeitamente Plástica presumida.

- Primeiro é feita uma análise elástica, e todos os membros estão satisfeitos $M_{max} < M_p = F_y Z_x$.

Andar	$M_{u,req}$ (k-ft)	Viga Seção	M_p (k-ft)	$M_{u,req}$ (k-ft)	Pilar Seção	M_p (k-ft)
4	301	W16x40	304	301	W16x40	304
3	531	W24x55	558	294	W16x40	304
2	633	W24x62	638	364	W21x44	398
1	611	W24x62	638	482	W21x55	525

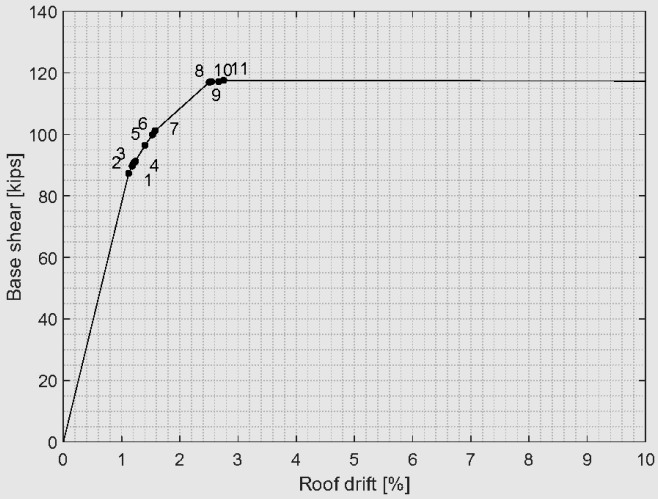


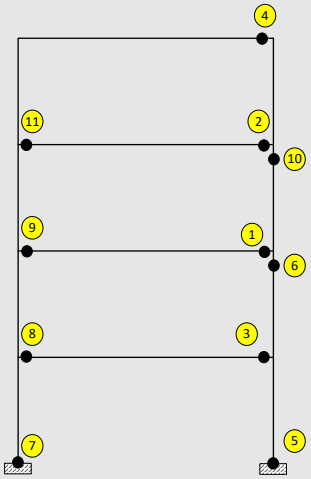
- Base cisalhamento (força lateral total] versus relação de deriva do teto (teto deslocamento/altura) e a localização e sequência da formação do rótulas plásticas são mostradas abaixo.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- A força lateral no limite elástico quando o primeiro rótula plástica se forma é de 87.6 kips, ligeiramente acima do valor de projeto de 86.3 kips.
- A partir daí, a redistribuição dos momentos ocorre com rótulas plásticas formando-se sequencialmente, e o pórtico atinge sua força final de 117,5 kips em uma proporção de deriva do telhado de 2,7%.
- O mecanismo de rendimento acabou por ser um mecanismo de oscilação parcial sobre 3 andares com rótulas plásticas nas extremidades viga e na base do pilares e no topo da segunda e terceira histórias.
- A relação de ductilidade (V_{ult}/V_y) é 1,36.





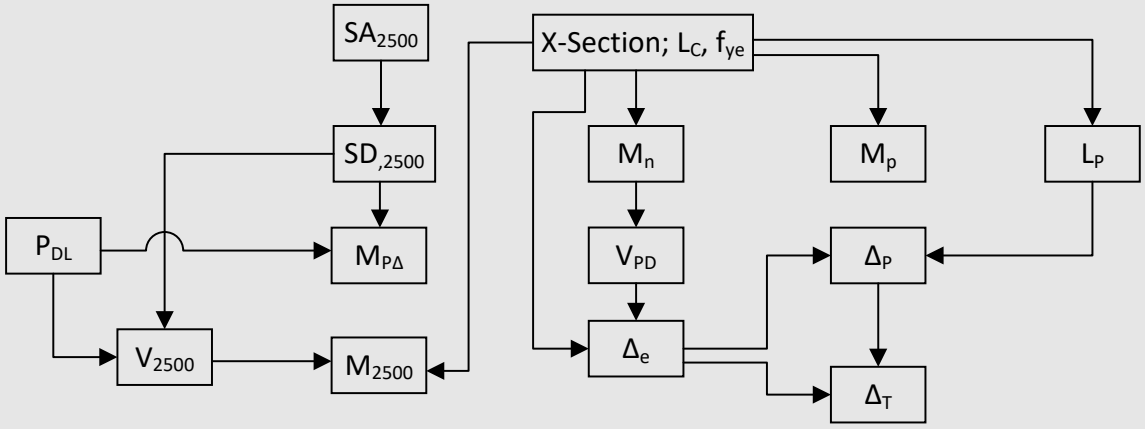
69.4.1.2 Ex 69.2: Análise de push-over; Exemplo prático

Formulador de problemas: Marilyne Lefebvre (Kiewit Engenharia Co.)
Soluções: Marilye Lefebvre, Victor Saouma, Cody Harrington, Mohammad Salchi, Moammad T. Nikoukalam

Formulação de problemas

Esta escrita será dividida em várias partes. Primeiro, o problema está articulado em §69.4.1.2.. Então você terá que realizar uma análise espectro de resposta para o local, a fim de determinar o projeto deslocamento que deve ser acomodado, §69.4.1.2.. Neste ponto você poderia determinar a capacidade por cálculos manuais (de acordo com o código AASHTO), §69.4.1.2.. Isso implicaria cálculos do comprimento rótula plástica, dos momentos plásticos e da base correspondente cisalhamento, e finalmente o elástico e plástico deslocamentos.

CÓPIA PARA REVISÃO



Declaração do problema

A tarefa seguinte é baseada em uma análise feita por Kiewit. Isso vai te dar uma sensação do que é tipicamente feito em uma empresa de design.

A Ponte Goethals está localizada fora de Nova York. Cruza o Arthur Kill (Sonho de Staten Island) entre Staten, NY e Elisabeth, NJ, Fig. 69.4.. O principal espaço da nova ponte é uma ponte com cabo, enquanto as duas aproximações são vigas segmentares pré-moldadas. A nova ponte está substituindo uma ponte de aço que foi construída durante os anos 20. Neste exercício, você deve analisar o desenho do cais da extensão de aproximação no lado de New Jersey contra a carga de terremoto. Um píer é selecionado como a seção representativa, e uma análise de pushover é realizada nele.

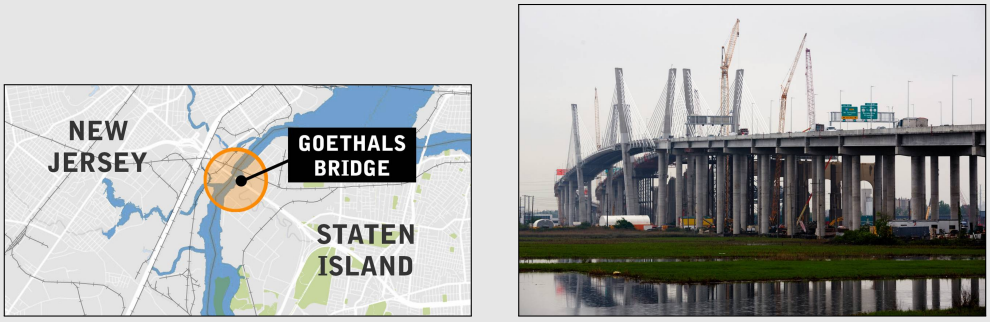


Figura 69.4: Localização e imagem da ponte

Pilar comprimento (L_c) é 40 pés; comprimento do eixo até o ponto de fixação (L_S) é 60 pés; Diâmetro do eixo perfurado (d_s) é 8 pés; f_{cc} para pilar 5.000 psi e finalmente eixo f_{cs} é 4.000 psi.

Parte 1: espectro de resposta análise

O projeto espectro de resposta para o site está resumido na tabela 69.2 Onde C_S são o coeficiente sísmico elástico. Selecione 2.500 anos no Site Classe F.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.2: NJ aproximam-se de estruturas projeto espectro de resposta

1000 anos Classe A			2.500 anos de classe A			1000 anos Classe F			2.500 anos de classe F		
T (seg)	C_s	Δ (ft)	T (seg)	C_s	Δ (ft)	T (seg)	C_s	Δ (ft)	T (seg)	C_s	Δ (ft)
0.00	0.072	0	0.00	0.244	0	0.00	0.270	0	0.00	0.520	0
0.04	0.144	0.000217	0.04	0.578	0.000754	0.04	0.379	0.000495	0.04	1.144	0.001493
0.05	0.144	0.000294	0.05	0.566	0.001155	0.05	0.407	0.000829	0.05	1.300	0.002651
0.10	0.144	0.001175	0.10	0.508	0.004143	0.10	0.543	0.004432	0.10	1.300	0.010603
0.15	0.144	0.002643	0.15	0.451	0.008277	0.15	0.680	0.012479	0.15	1.300	0.023857
0.20	0.144	0.004698	0.20	0.394	0.012854	0.20	0.680	0.022185	0.20	1.300	0.042413
0.22	0.144	0.005531	0.22	0.381	0.01503	0.22	0.680	0.026844	0.22	1.300	0.05132
0.30	0.104	0.007634	0.30	0.328	0.024053	0.30	0.680	0.049917	0.30	1.300	0.095429
0.45	0.069	0.011446	0.45	0.228	0.037685	0.45	0.200	0.033033	0.45	0.813	0.134198
0.50	0.062	0.012724	0.50	0.195	0.039762	0.50	0.167	0.033985	0.50	0.650	0.132541
0.60	0.056	0.01649	0.60	0.177	0.051914	0.60	0.100	0.029363	0.60	0.552	0.162083
1.00	0.031	0.025448	1.00	0.104	0.084826	1.00	0.040	0.032625	1.00	0.160	0.130502
2.00	0.025	0.081237	2.00	0.050	0.163127	2.00	0.016	0.052201	2.00	0.055	0.17944
3.00	0.019	0.136537	3.00	0.040	0.293629	3.00	0.013	0.092982	3.00	0.035	0.256925
4.00	0.012	0.160517	4.00	0.030	0.391505	4.00	0.009	0.121802	4.00	0.025	0.326254
5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818	5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818
									6.00		0.5

Atribuição

1. Trace o C_s espectro de resposta.
2. Extrapolar a curva, e dizer o que é C_S para T = 6 segundos.
3. Trace o deslocamento espectro de resposta.
4. Extrapole a curva, e diga o que é o deslocamento para T = 6 segundos.

Parte 2: Capacidade (calcula a mão para o cais)

Você precisará acessar a cópia anexa da 2a edição do *Especificações do guia AASHTO para o projeto de ponte sísmica LRFD* (AASHTO, Seismic, 2011). O electronic copy pode ser acessado do site da biblioteca da CU.

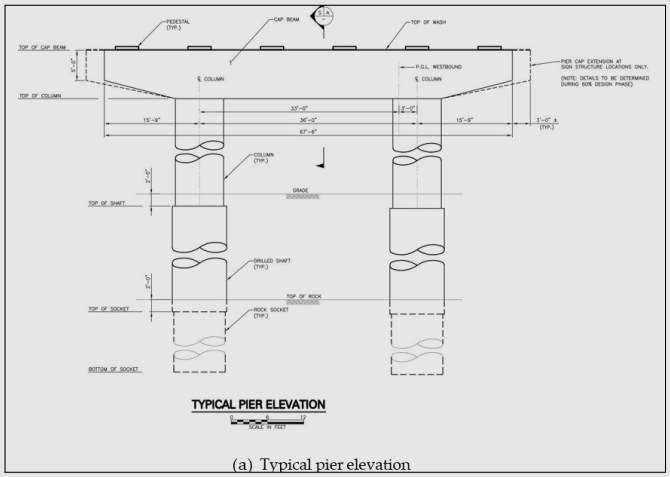
As propriedades da curva são indicadas abaixo:

1. Comprimento de pilar = 40 pés
2. Comprimento do eixo perfurado = 60 pés
3. Diâmetro de pilar =7 pés
4. Diâmetro do eixo perfurado = 8 pés
5. Resistência à compressão de pilar e tampa do píer (f_c') = 5 ksi
6. Resistência à compressão do eixo perfurado (f_c') = 4 ksi
7. Suponha que a tampa do píer seja retangular viga com uma profundidade de 7′-0″ e uma largura de 8′-6″ Só se concentre na porção entre o pilares. Negligencie as extensões do píer e os pedestais ao analisar o píers. As propriedades da curva são:
8. Pilar seção: Suponha que o espaçamento da barra seja de aproximadamente 6 polegadas.
9. Seção do eixo perfurado: Negligencie o invólucro de aço. A cobertura clara é de 4 polegadas. Suponha que o espaçamento de barras seja aproximadamente 6 polegadas para o #14 barras e 9 polegadas para o # 18 barras.

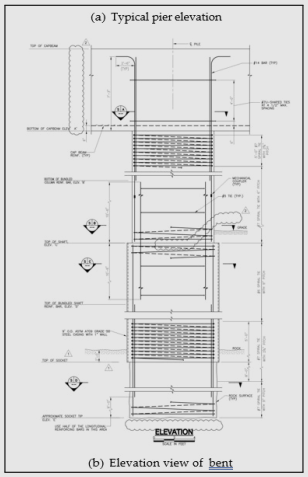
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

As elevações típicas do píer e os planos para a extensão da aproximação são mostrados na figura. 69.5 e.. 69.6



(a) Típico de elevação do cais

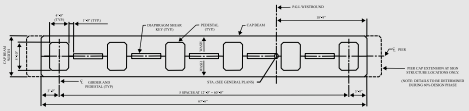


(b) Vista de elevação da curva

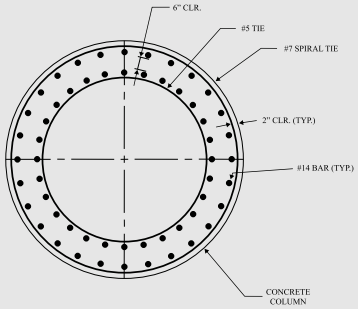
Figura 69.5: Pilares e dimensões do píer

CÓPIA PARA REVISÃO

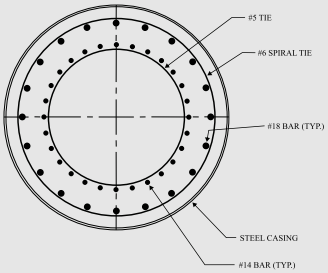
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



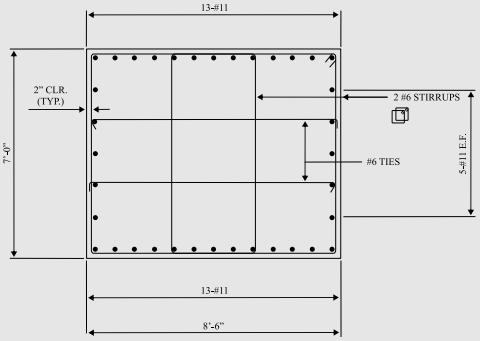
(a) Típico de elevação do cais



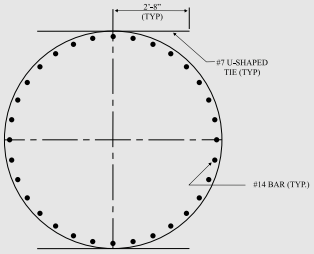
(b) Seção SB



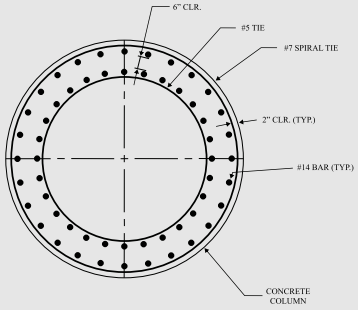
(c) Seção SC



(d) Seção SA



(e) Pilar seção na tampa viga



(f) Seção na base

Figura 69.6: Seções transversais dos pilares e do eixo

Por que um poço perfurado?

Em (AASHTO, Seismic, 2011), você é obrigado a projetar um eixo perfurado como um membro de capacidade protegida na Zona B-D Sésmica (e você quer que ele permaneça elástico durante um terremoto). Dessa forma, qualquer dano ao pilar pode ser visto e reparado.

Atribuição

CÓPIA PARA REVISÃO

5. A julgar pelos planos, identifique o sistema de resistência a terremotos como indicado em (AASHTO, Seismic, 2011, chap. 3) (i.e. É tipo 1, tipo 2, etc.?).
6. Encontre a capacidade nominal de momento do pilar. Pontos de bônus serão concedidos se você determinar M_{ne} usando a relação tensão-deformação de Mander (Mander, Priestley e Park, 1988), Fig. 69.7, em vez do bloco de Whitney.

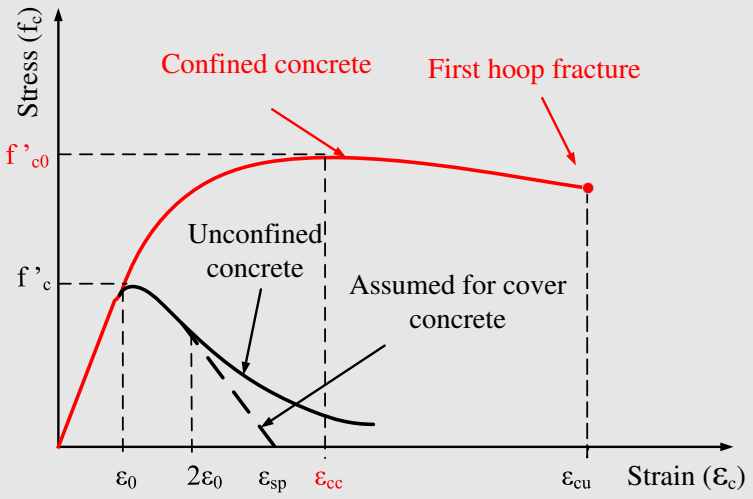


Figura 69.7: Relação tensão-deformação para carregamento monotônico de concreto confinado e não confinado (Mander, Priestley e Park, 1988)

Whitney, $M_n = 6.220$ kip-ft (±10%); Mander, $M_n = 8.551$ kip-ft (±10%)

7. Usando (AASHTO, Seismic, 2011, chap 8), determine a força de rendimento esperada f_{ye} da barra de ferro se a barra é aço ASTM A706 (nota: $f_y = 60$ ksi).
8. Determine o comprimento analítico rótula plástica L_p do pilar. Dica: Verificado (AASHTO, Seismic, 2011, §4.11).

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl} \quad (4.11.6\text{-}1)$$

L	Comprimento do pilar entre o ponto de momento máximo e o ponto de contraflexão (in.)
Onde f_{ye}	Resistência esperada ao escoamento das barras longitudinais de reforço do pilar (ksi)
d_{bl}	Diâmetro nominal das barras longitudinais de reforço do pilar (in.)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

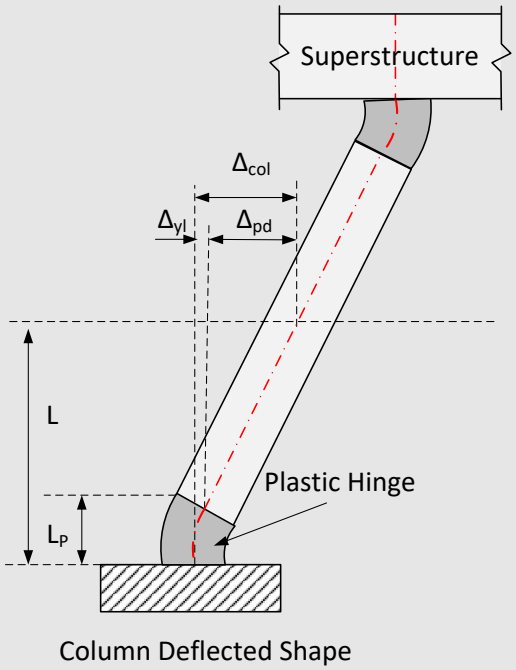
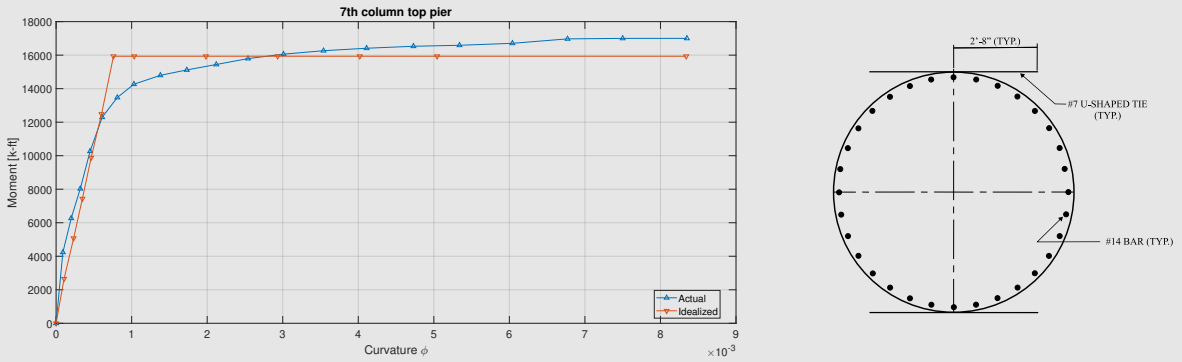


Figura 69.8: Forma deformada do pilar e diagrama de curvatura; adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

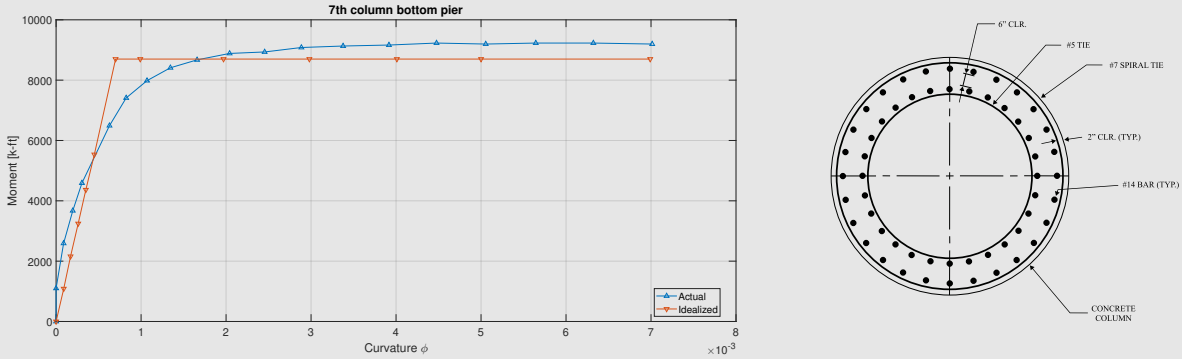
9. Usando os dados em `P-M-Diagrams.Xlsx`, determinar o momento plástico M_p no topo do pilar, a base do pilar, e no eixo perfurado. Trace essas curvas de curva do momento idealizadas (AASHTO, Seismic, 2011, figures 8.5.1 and C4.9.1).Estado qual destes momentos é o menor (estaremos usando-o para comparar nossos resultados na Parte 3). Por enquanto, suponha que o projeto de carga axial no pilar é P_{DL} = 2.500 kips (isto inclui o peso próprio do cais). Os momentos de plástico devem ser iguais aos mostrados na figura. 69.9.

CÓPIA PARA REVISÃO

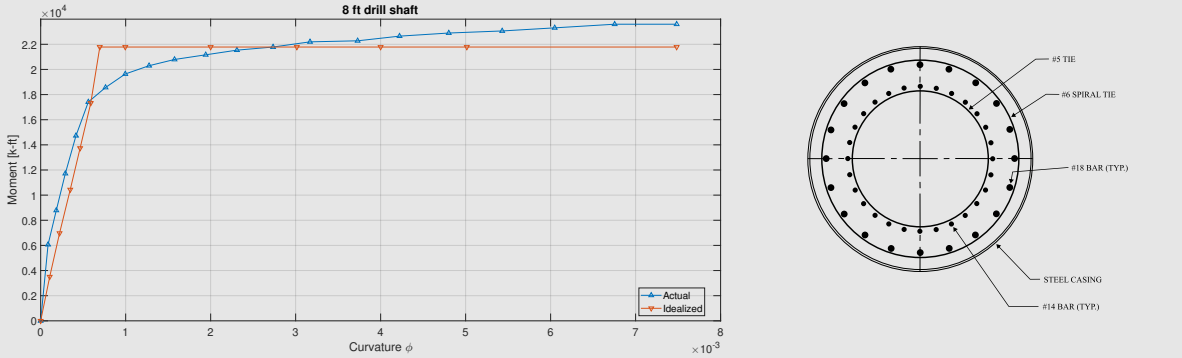
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) 7 pés de diâmetro pilar no topo do cais; M_P=15.839 kip-ft (± 10%)



(b) Momento-curvatura de 7 pés de diâmetro pilar no fundo do píer; M_P= 8.662 kip-ft (± 10%)



(c) Curva moment-curvatura de 8 pés diâmetro eixo perfurado; M_P=21.786 kip-ft (± 10%)

Figura 69.9: Curvações de momento e momentos plásticos

10. O que é o cisalhamento V_p Precisa fazer o momento plástico se desenvolver?
11. Encontre o elástico deslocamento do pilar Δ_e. **Dica:** Consulte AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2, e aplicar área de momento.
12. Encontre o plástico deslocamento do pilar Δ_{pd}.. Suponha que a curvatura plástica Φ_{pd} É de 0.005/ft.
13. Encontre o total deslocamento no topo do pilar (Δ_{total}).

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Parte 3: determinar as cargas de demanda

A carga axial do projeto no pilar é P_{DL} = 2.500 kips.

Atribuição

14. Qual é o momento na base do pilar da $P\Delta$ Efeitos? É $M_{P\Delta}$ menor/maior/igual a $0.25M_P$?
15. O que é o cisalhamento V_{2500} na base do pilar?
16. Qual é o momento M_{2500} na base do pilar deste força cortante? M2500 é menor, maior e igual a $0.25M_P$?
17. O momento de demanda é maior, menor e igual ao momento permitido encontrado na Parte 2? Em AASHTO, o Φ fator de flexão é 0,9 se a seção é controlada por tensão ou 0,7 se a seção é controlada pela compressão.

Parte 4: Análise do Pushover

Um total aproximado deslocamento foi determinado a partir do código AASHTO, agora procuramos realizar uma análise de pushover e chegar a um valor mais preciso.

Precisamos usar um software para realizar as várias análises (RISA, SAP ou qualquer outro código elástico).

Figura AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 4.8-2 ilustra a sequência assumida para um píer. Por simplicidade, assumiremos que a tampa do cais é rígida. Assim, só temos de lidar com o deslocamento do pilares. Mantenha essa sequência em mente enquanto passamos pela análise de "pushover".

Atribuição

18. Dê uma ilustração do seu modelo, certificando-se de rotular claramente o elemento e notação de nó (figuras de pau são aceitáveis). Modele o cais e os poços perfurados. Suponha que o eixo perfurado está fixado na parte inferior do seu modelo.
19. Assim como na Parte 2, determinar o momento plástico M_P no topo do pilar, a base do pilar, e no eixo perfurado. Tabule os resultados de P = 0 kips to P = 5.000 kips (ΔP = 500 kips). *Para ser extraído do* `P-M.xlsx` *Arquivo disponibilizado*).
20. Coloque uma força horizontal de 1 kip no topo do pilar. Declare o força axial, o momento, eo deslocamento em cada nó de seu modelo.
21. Aumente o força cortante até que uma dobradiça se forme. Em que força e localização forma a dobradiça?
22. Tabule seus resultados. Em cada nó, diga o força axial, o momento, e o deslocamento.
23. Coloque uma dobradiça no nó (se certifique de que não haja momento zero na dobradiças). Novamente, coloque uma força horizontal de 1 kip no topo do pilar. Declare o força axial, o momento, eo deslocamento em cada nó de seu modelo.
24. Aumente o força cortante até que uma dobradiça se forme. Em que força e localização forma a dobradiça?
25. Novamente, tabule seus resultados.
26. Coloque uma dobradiça no nó, e continue empurrando o pilar (em outras palavras, mais duas vezes).
27. Adicione a força horizontal dos quatro cenários. Também somamos o força axial, o momento, e o deslocamentos em cada nó.
28. Onde no píer veremos o fracasso? Será que ele segue os critérios de falha declarados no AASHTO?

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

29. O que é o deslocamento no topo do pilar em fracasso?
30. Compare a análise do "pushover"com os cálculos feitos na parte 2. Qual dessas análises você acha que é mais conservadora?
31. O projeto do cais é adequado (em outras palavras, o cisalhamento e o momento calculado formam a análise de pushover maior/ menor/igual às cargas de projeto que calculamos da parte 3)?

Socorro

Análises estruturais

Para facilitar sua tarefa, o pórtico foi analisado sequencialmente e os resultados são mostrados na tabela 69.3.

Tabela 69.3: Análises sequenciais para análise de pushover

V (K)	Nó	P_{eq} (K)	M^i_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.81	28.84	0.00
	N2	-0.81	-1.17	-0.01
	N3	-0.81	-21.17	-0.01
	N4	0.81	28.82	0.00
	N5	0.81	-1.17	-0.01
	N6	0.81	-21.17	-0.01
1	N1	-0.56	28.15	0.00
	N2	-0.56	11.23	-0.01
	N3	-0.56	0.00	-0.02
	N4	0.56	43.47	0.00
	N5	0.56	0.37	-0.01
	N6	0.56	-28.37	-0.02
1	N1	-0.75	0.00	0.00
	N2	-0.75	0.00	-0.02
	N3	-0.75	0.00	-0.03
	N4	0.75	60.61	0.00
	N5	0.75	0.63	-0.02
	N6	0.75	-39.38	-0.03

Determinação das Formações de Dobradiças

Após cada análise, você terá que determinar onde a próxima dobradiça (s) forma. Você teria que completar uma mesa como a seguinte:

V (K)	Nó (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plástico Hinge?	$M_P/M_{eq,Tot}$
40	Ni	-	-	-	-	-	-	-	-
	Nj	-	-	-	-	-	-	-	-

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

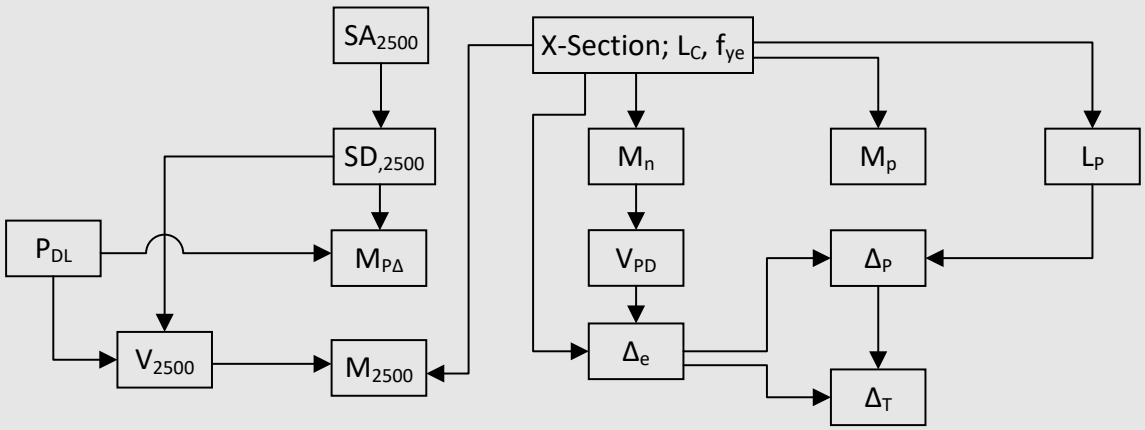
- P_{EQ}, M^i_{EQ}, e Δ são obtidos dos resultados da análise anterior (Tabela 69.6) multiplicado pelo força cortante em pilar 1 (mais sobre ele em um minuto).
- P_{total} é a soma de P_{DL} 2.500 Kip e P_{eq}.
- $M_{EQ,total}$ é simplesmente igual à soma de todos os valores precedentes e o atual. Por exemplo, na Tabela 69.9, $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ E para N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P requer atenção especial, já que o forças axiais nas seções muda à medida que a força horizontal no topo é aumentada, daí o momento em que as capacidades são alteradas também. Assim, a tabela Excel usa o `tendência` função que procura aproximação menos quadrada para um *linear* função entre dois pontos finais, como:
`TREND ('P vs MP'!`$D3{:}D53$`, 'P vs MP'!`$A3{:}A53$`,F10)`
Na análise atual, $0 < P_{total} < 5,000$.
- Nós consideramos que o próximo rótula plástica formará quando $M_{eq,Tot} \geq 0.95M_p$

No entanto, o problema é realmente não linear, uma vez que a condição para a formação de uma dobradiça depende da magnitude do cisalhamento neste passo. Assim, aumentaremos o valor de V Até que uma dobradiça se forme. Neste caso, são 40.

Interação entre tarefas



Solução

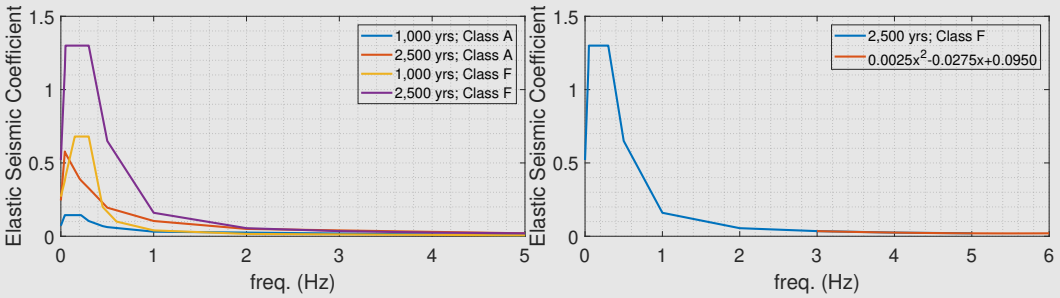
Parte 1: espectro de resposta análise

C_s Coeficiente para a localização especificada e 1000, 2500 anos para as classes A e F foram mostrados na tabela 69.2

① Traços de C_s e deslocamento espectro de resposta (juntamente com extrapolações para 6 segundos) são mostrados na figura. 69.10.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Todos (b) 2.500 anos, Classe F

Figura 69.10: Espectro de resposta análise (C_S)

Coeficientes sísmicos elásticos (C_S) pode ser transformado em espectral deslocamentos (Δ) através de

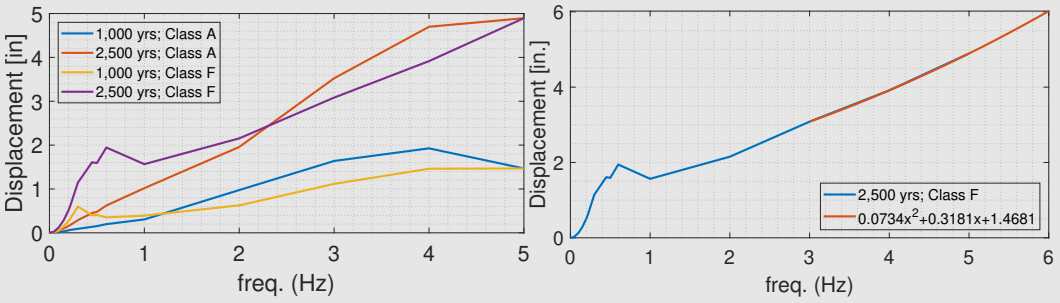
$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 C_S \tag{69.1}$$

② Um ajuste quadrático para os últimos três pontos de dados produz

$$C_S = 0.0025f^2 - 0.0275f + 0.0950 \tag{69.2}$$

Substituindo em Eq. 69.2 para $T = 6$ Seg, C_s=0,02 (também da Fig. 69.11b)

③ Deslocamento espectro de resposta são mostrados na figura. 69.11.



(a) Todos (b) 2.500 anos, Classe F

Figura 69.11: Deslocamento espectro de resposta análise

④ Que vai render C_S para $T = 6$ segundos de rendimento, Δ =Seis dentro.

Parte 2: Capacidade (calcula a mão para o cais)

Sistema de resistência a terremotos

AASHTO, Seismic, 2011, §3.3 especifica que o sistema de resistência a terremotos (ERS) das pontes deve fornecer um caminho de carga confiável e ininterrupta para transmitir forças induzidas sismicamente no solo circundante e meios suficientes de dissipação de energia e/ou retenção para

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

confiável Controle sismicamente induzido. Todos os elementos estruturais e de fundação da ponte devem ser capazes de alcançar o esperado deslocamentos consistente com os requisitos da estratégia de projeto escolhida de resistência sísmica e outros requisitos estruturais. O projeto deve ser baseado nas seguintes três estratégias de design sísmico globais usadas nestas especificações do guia com base nas características de comportamento esperadas do sistema de ponte, fig. 1. 69.12:

Tipo 1 Subestrutura Ductil com superestrutura essencialmente elástica: Esta categoria inclui o tilintar plástico convencional em pilares e paredes e pilares que limitam as forças inerciais por total mobilização de resistência passiva ao solo. Também estão incluídas fundações que podem limitar forças inerciais por hinging no solo, como pilares integrais de areia dobrada em pilhas.

Tipo 2 Essencialmente, subestrutura elástica com uma superestrutura dual: Esta categoria aplica-se apenas a aço I-Section compósito reto, não esfolado, superestruturas de viga composta de aço com cruzado dúctil pórticos nos suportes. O uso desta estratégia deve ser aprovado pelo proprietário e baseado em um critério de projeto específico caso-específico e metodologia.

Tipo 3 Superestrutura elástica e subestrutura com um mecanismo de fusão entre os dois: Esta categoria inclui estruturas sismicamente isoladas e estruturas nas quais dispositivos de dissipação suplementar de energia, como amortecedores, são usados para controlar forças inerciais transferidas entre a superestrutura e subestrutura.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

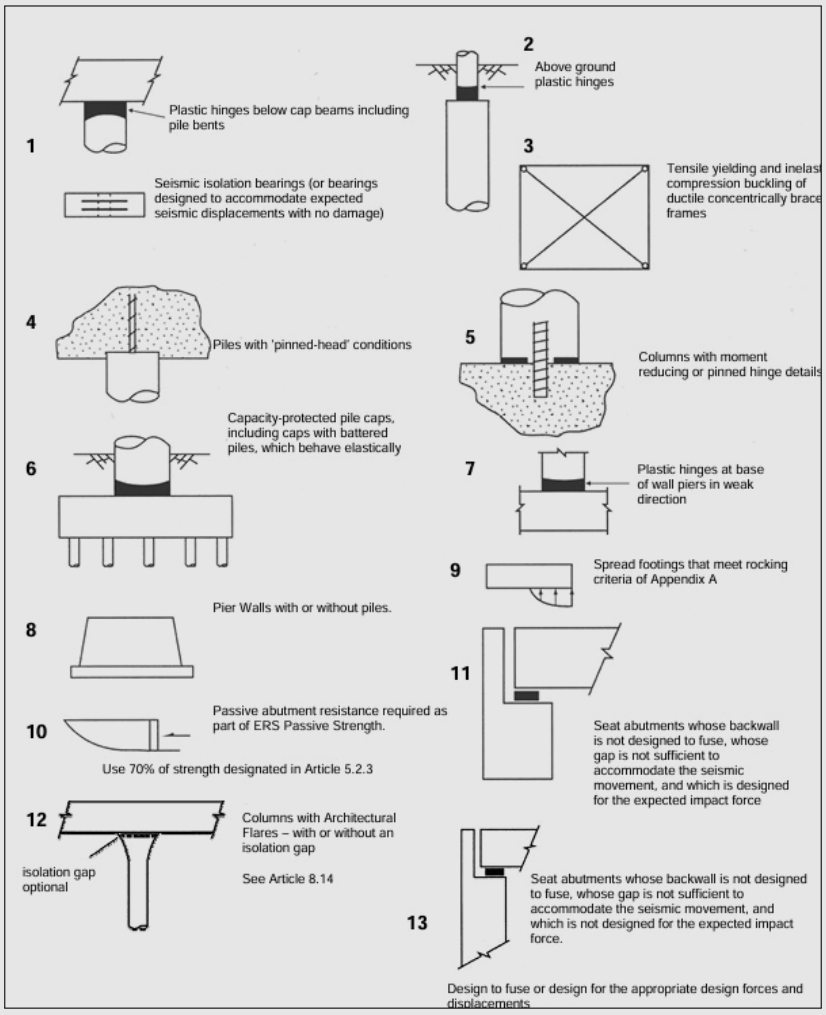


Figura 69.12: Permissíveis elementos resistentes ao terremoto (AASHTO, Seismic, 2011)

⑤ Da Figura 69.5a, a superestrutura em consideração é concreto armado viga e a ponte não está sismicamente isolada e nenhum dispositivo de dissipação de energia suplementar são usados, portanto o sistema resistente ao terremoto da ponte é Tipo 1.

Capacidade nominal do momento

⑥ `Note que os cálculos para o momento nominal não são relatados aqui, e foram dados por Kiewit`

AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 Define a capacidade esperada de momento nominal, M_{ne}, em termos de concreto e armaduras de aço quando o concreto deformação atinge uma magnitude de 0,003 ou o aço reforçado deformação atinge a tração final reduzida deformação, como definido na tabela 69.4.

A base pilar é mostrada na Figura 69.6bE procuramos calcular a capacidade do momento nominal usando o bloco Whitney ou o modelo de Mander[a]

CÓPIA PARA REVISÃO

Usando o bloco Whitney tensão, a capacidade de momento nominal do pilar na base é encontrado para ser M_{ne} = 6.220 kip-ft (± 10%(Whitney).

No modelo de Mander (Mander, Priestley e Park, 1988), Figura 69.7, toda a curva tensão-deformação é descrita pelas equações de 3 parâmetros

$$\frac{f_c}{f'_{cc}} = \frac{n\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)}{(n-1)+\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^n} \tag{69.3}$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \tag{69.4}$$

$$E_c \text{ (MPa)} = 5,000\sqrt{f'_c \text{ (MPa)}} \tag{69.5}$$

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \tag{69.6}$$

ε_{cc} é o deformação na resistência máxima à compressão do concreto confinado:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0}\left[1+5\left(\frac{f'_{cc}}{f'_c}-1\right)\right]$$

e.. f'_{cc}, a resistência à compressão do concreto confinado é dada como:

$$f'_{cc} = f'_c\left(-1.254+2.254\sqrt{1+\frac{7.94f'_t}{f'_c}}-2\frac{f'_t}{f'_c}\right)$$

em que f'_t é dado por:

$$f'_t = \frac{1}{2}k_e\rho_s f_{yh}$$

em que ρ_s = razão de volume do aço transversal confinando ao volume do núcleo de concreto confinado, f_{yh} = força de escoamento da armadura transversal, k_e = coeficiente de confinamento. Para aros circulares:

$$k_e = \frac{\left(1-\frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1-\rho_{cc}}$$

e para espirais circulares

$$k_e = \frac{1-\frac{s'}{2d_s}}{1-\rho_{cc}}$$

Onde ρ_{cc} = relação da área de reforço longitudinal com a área do núcleo da seção, s' = espaçamento claro entre barras de espiral ou aro, d_s = diâmetro da espiral.

Usando o modelo de Mander para definir a curva tensão-deformação, a capacidade do momento nominal da base é encontrada como sendo

$$M_{ne} = 8,551(\pm 10\%) \text{ (kip-ft; Mander)} \tag{69.7}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

⑦ **Espera-se a força de rendimento** f_{ye} AASHTO, Seismic, 2011, §8.4.2 afirma que o aço de reforço deve ser modelado com uma relação tensão-deformação que exibe uma porção elástica inicial, um platô de rendimento e uma faixa de enduramento deformação, na qual o tensão aumenta com deformação, Figura 69.13 (AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.4.2-1).

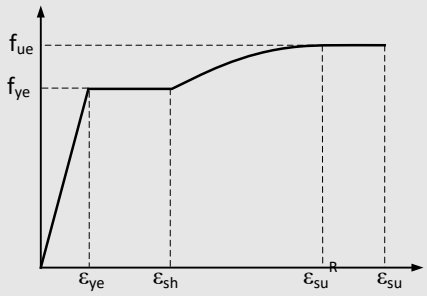


Figura 69.13: Reforçando o modelo de aço tensão-deformação

Em vez de dados específicos, as propriedades de armadura de aço fornecidas na tabela 69.4 Deve ser usado.

Tabela 69.4: Propriedades de barras de aço reforçadas (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1)

Propriedade	Notação	Tamanho da Barra	ASTM A 706	ASTM A 615 (Grau 60)
Rendimento mínimo especificado tensão (ksi)	fy	#3– #18	60	60
Rendimento esperado tensão (ksi)	f_{ye}	#3– #18	68	68
Espera-se resistência à tração (ksi)	f_{ue}	#3– #18	95	95
Rendimento esperado deformação	ε_{ye}	#3– #18	0.0023	0.0023
		#3– #8	0.0150	0.0150
		#9	0.0125	0.0125
Início de encruamento	ε_{sh}	#10 & #11	0.0115	0.0115
		#14	0.0075	0.0075
		#18	0.0050	0.0050
Reduzir a tração final deformação	ε_{su}^{R}	#4– #10	0.090	0.060
		#11– #18	0.060	0.040
A tração final	ε_{su}	#4– #10	0.120	0.090
		#11– #18	0.090	0.060

Dentro da região elástica, o módulo de elasticidade, E_s, deve ser tomado como 29.000 ksi. De acordo com a Tabela 69.4, a força de rendimento esperada da barra ASTM A706, tamanho #3-#18, é encontrado para ser 68 ksi.

⑧ **Rótula plástica comprimento** L_p AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.6 afirma que o comprimento analítico rótula plástica para pilares, L_p, deve ser tomado como o comprimento equivalente de pilar sobre o qual a curvatura plástica é assumida constante para estimar a rotação do plástico, Fig. 69.16..

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O plástico deslocamento de um membro equivalente do ponto de momento máximo ao ponto de contraflexura deve ser determinado com base na rotação plástica.

Para concreto armado pilares enquadrando-se em uma base, uma tampa dobrada integral, um eixo grande, eixo com caixa, o comprimento rótula plástica, L_P Em polegadas, pode ser determinado a partir de AASHTO, Seismic, 2011, Equation 4.11.6-1 :

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl}$$

onde:

L comprimento de pilar desde o ponto do momento máximo até o ponto de contraflexura do momento (in.)
f_{ye} Espera-se uma resistência de rendimento das barras de aço longitudinais pilar que reforçam (ksi)
d_{bl} Diâmetro nominal de barras de aço longitudinais pilar reforçado (in)

Como neste projeto, a interação do solo e eixo não é considerada na análise, a altura total do cais é a soma da altura de pilar (40 pés) e eixo (60 pés). Neste caso, o ponto de inflexão seria aproximadamente na altura média do cais ($L \simeq$50 pés. Portanto:

$$\begin{aligned} L_c &\simeq 50 \times 12 = 600 \text{ (in)} && (69.8)\\ f_{ye} &= 68 \text{ (ksi)} && (69.9)\\ d_{bl} &= 1.693 \text{ (in)} && (69.10)\\ L_P &= \max\{0.08 \times 600 + 0.15 \times 68 \times 1.693, 0.3 \times 68 \times 1.693\} && (69.11)\\ &= \max\{65.3, 34.5\} = 65.3 \text{ (in)} && (69.12) \end{aligned}$$

⑨ **Momento plástico** M_p AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 afirma que a capacidade do momento plástico de todos os elementos dúcteis de concreto deve ser calculada por curva de momento ($M - \Phi$) análise com base nas propriedades esperadas do material. A análise da curva do momento deve incluir o forças axiais devido à carga morta junto com o forças axiais devido a derrubamento.

O..$M - \Phi$A curva deve ser idealizada com uma resposta elástica perfeitamente plástica para estimar a capacidade de momento plástico da seção transversal de um membro. A parte elástica da curva idealizada deve passar pelo ponto marcando o primeiro rendimento de reforço. A capacidade idealizada do momento plástico deve ser obtida equiparando as áreas entre o real e o idealizado ($M - \Phi$) curvas além do primeiro ponto de rendimento da barra de reforço, como mostrado na Figura 69.14 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.5-1.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

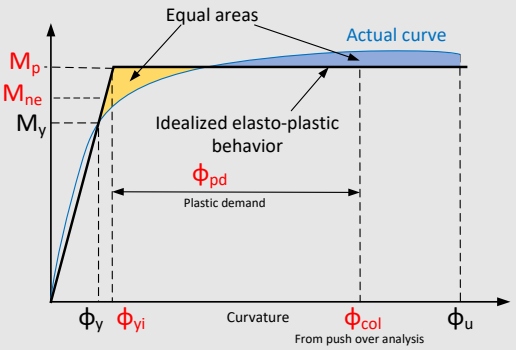


Figura 69.14: Curvação do momento (adaptada de (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1))

A curva momentânea das seções no topo do pilar, a base da pilar, e no eixo perfurado com as curvas idealizadas correspondentes são determinadas como abaixo.

Novamente, note que há uma porção de 2 polegadas na parte inferior do pilar (onde o acoplador está) em que a barra externa é descontínua. O acoplador só serve como conector. Você não obtém nenhuma força com isso. Você também vê que logo acima do eixo perfurado, há também uma distância de 2' 'entre o topo do eixo e a ponta da barra externa. Em ambos os casos, o momento plástico na parte inferior pilar deve ser calculado com base no concreto confinado formado dentro da barra interna apenas.

De acordo com os resultados, o momento plástico na base do pilar é o menor. No entanto, deve-se notar que isso não significa que o primeiro rótula plástica ocorrerá na base do pilar, uma vez que a razão de capacidade para demanda controla a ordem da formação de rótulas plásticas em uma estrutura.

⑩ **Cisalhamento** V_p Da estática, o primeiro rótula plástica ocorre no topo do pilar e o correspondente cisalhamento, V_p, necessário para causar o primeiro momento plástico a se desenvolver em ambos pilares, Figura 69.15, é

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

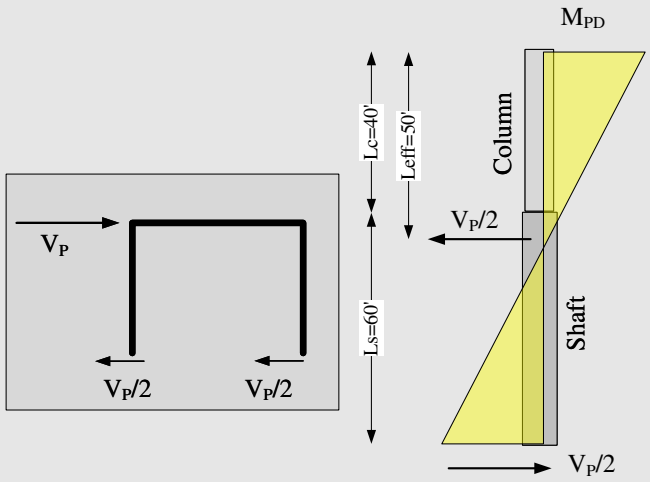


Figura 69.15: Distribuição do momento na altura do píer

Para o topo do diâmetro de 7 pés pilar, $M_p = 15,839$K-ft

$$L_{eff} = \frac{L_C + L_S}{2} = \frac{60+40}{2} = 50\text{ft} \tag{69.13}$$

$$\frac{V_P}{2} L_{eff} = M_c^t \Rightarrow V_P = 2\frac{M_c^t}{L_{eff}} = 2\frac{15,839}{50} = 634 \text{ (kips)} \tag{69.14}$$

11 **Deslocamento elástico** Δ_e Usamos o método da área de curvatura para determinar a rotação e deflexão dos membros[b], Fig. 69.16.

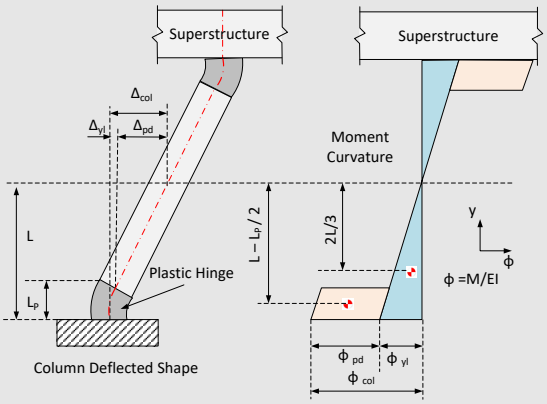


Figura 69.16: Forma deformada do pilar e diagrama de curvatura; adaptado de AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \text{ 1st curvature area theorem} \tag{69.15}$$
$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld} \frac{L}{2}\right) \times \frac{2}{3} L \text{ 2nd curvature area theorem} \tag{69.16}$$
$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C} \tag{69.17}$$
$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)} \tag{69.18}$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi \times 7^4 \times 12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)} \tag{69.19}$$
$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5} \tag{69.20}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3} (50 \times 12) = 2.32 \text{ inch} \tag{69.21}$$
$$\tag{69.22}$$

12 **Deslocamento plástico** Δ_{PD} Φ_{PD} pode ser estimado a partir da Fig. 69.9b como 0.005/ft. O deslocamento plástico pode ser determinado pelas seguintes equações:

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \tag{69.23}$$
$$\Phi_{PD} = 0.005 \times \frac{65.3}{12} = 0.0272 \tag{69.24}$$
$$\Delta_{PD} = \theta_P \left(L_C - \frac{L_P}{2}\right) \tag{69.25}$$
$$= 0.0272 \left((50 \times 12 - \frac{65.3}{2}\right) \simeq 15.4 \text{ (in.)} \tag{69.26}$$

13 **Deslocamento total** Δ_{total} O deslocamento total é a soma das parcelas elástica e plástica:

$$\Delta_{tot} = \Delta_e + \Delta_{PD} = 2.3 + 15.4 = 17.7 \text{ (in.)} \tag{69.27}$$

Parte 3: Cargas de projeto

A carga axial do projeto no pilar é $P_{DL} = 2.500$ kips.

14 **Momento na base do pilar devido aos efeitos** $P - \Delta$ AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.5 trata dos efeitos $P - \Delta$, e AASHTO, Seismic, 2011, Eq. 4.11.5-1 especifica, para pilares de concreto armado, que

$$P_{DL} \Delta_r \leq 0.25 M_P$$

Onde

P_{DL}	Carga permanente não majorada (kips)
Δ_r	Deslocamento lateral relativo entre o ponto de contraflexão e a extremidade mais distante da rótula plástica (in.). Neste caso, corresponde ao deslocamento do espectro de resposta para 2.500 anos.
M_P	Capacidade idealizada de momento plástico do pilar de concreto armado, baseada nas propriedades esperadas do material (kip-in.)

O comentário correspondente do AASHTO diz que $P - \Delta$ Os efeitos podem ser negligenciados. Para pilares que não satisfazem a equação anterior, o Designer tem a opção de considerar um ou mais dos seguintes:

- Aumentando a capacidade de momento pilar adicionando reforço longitudinal.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- Ajustando as características dinâmicas da ponte como discutido em AASHTO, Seismic, 2011, §4.1.3.
- Reconfigurando a ponte para reduzir a demanda de carga morta agindo no pilar.
- Usando análise não linear da história do tempo para considerar explicitamente $P-\Delta$ Efeitos.

O único método rigoroso para considerar $P-\Delta$ Os efeitos em combinação com demandas sísmicas é usar uma análise não linear do histórico temporal. Quando se usa análise não linear do histórico temporal, são necessários modelos de degradação pós-rendimento rigidez, rigidez e descarga rigidez capazes de capturar a resposta esperada da estrutura devido à carga cíclica induzida por sísmica. Devido à complexidade deste tipo de análise, recomenda-se que os requisitos da Eq. 4.11.5-1 e ser satisfeito sempre que for prático.

$$\begin{aligned} M_{P-\Delta} &= P_{DL}\Delta_r && (69.28)\\ P_{DL} &= 2,500 \text{ (Kip)} && (69.29)\\ \Delta_r &= 6 \text{ (in.) From Eq. 69.1} && (69.30)\\ M_{P-\Delta} &= (2,500)(0.5) = 1,250 \text{ (kip-ft)} && (69.31)\\ 0.25 * M_P &= 0.25(8,662) = 2,166 \text{ (kip-ft) } \checkmark && (69.32) \end{aligned}$$

Onde M_P é determinado a partir de Fig. 69.9b. Por isso, $P-\Delta$ Não se espera que os efeitos influenciem significativamente a resposta, e são considerados insignificantes.

15 **Cisalhamento V_{2500} na base da pilar** V_{2500} é o cisalhamento resultante do evento de 2.500 anos e é determinado a partir

$$V_{2500} = C_S P_{DL} = (0.02)(2,500) = 50 \text{ (kips)}$$

C_S é determinado para $T = 6$ Seg. da Figura 69.10b ou Equação 69.2, enquanto o força axial é dado.

16 **M_{2500} na base da pilar** O momento de 2.500 anos na base do pilar M_{2500} é determinado a partir de

$$M_{2500} = V_{2500} L_C = (50)(40) = 2,000 < M_P \text{ (kip-ft.)}$$

que é menor do que a capacidade pilar de 8.662 k-ft. (Fig. 69.9b).

17 **Exigir momento vs. Momento permitido** O momento permitido é..

$$\begin{aligned} \phi M_{ne} &= (0.9)(8,551) = 7,695.9 \text{ (kip-ft)} && (69.33)\\ &> M_{2500}(2,000) && (69.34) \end{aligned}$$

Onde M_{ne} É de Eq. 69.7.

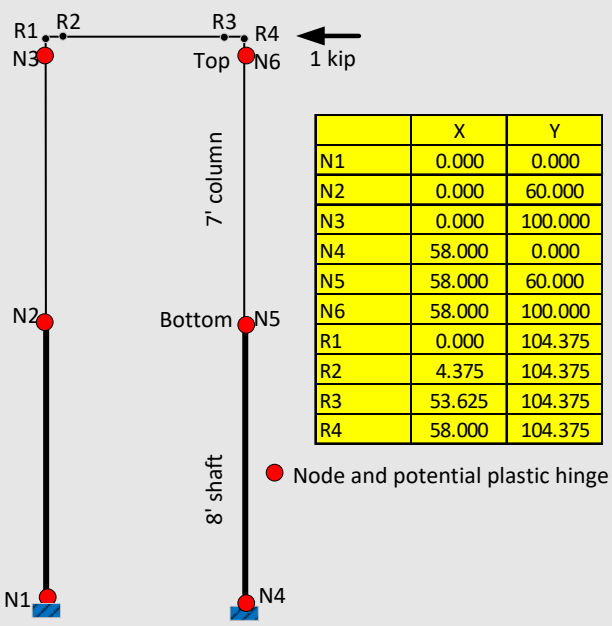
Parte 4: Parte de análise Pushover

18 **Ilustração do modelo** Assumindo uma tampa rígida viga, somente pilares devem ser modeladas e elas deveriam estar rigidamente conectadas à rocha.

Kiewit relata o passo a passo empurrar sobre análise estática elástica baseada na malha mostrada na Fig. 69.17.. Pilar são simplesmente caracterizados pela área da seção, momento de inércia, e módulo de elasticidade. Então, nem material não linear ou seção de fibra precisa ser definido durante a modelagem do software.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



	X	Y
N1	0.000	0.000
N2	0.000	60.000
N3	0.000	100.000
N4	58.000	0.000
N5	58.000	60.000
N6	58.000	100.000
R1	0.000	104.375
R2	4.375	104.375
R3	53.625	104.375
R4	58.000	104.375

Figura 69.17: Modelo Risa

⑲ **Momento plástico M_P no topo de pilares** Mesa 69.5 (extraído do $N - M_p$ A planilha disponibilizada a você mostra as capacidades do momento para as três seções diferentes e para uma faixa de forças axiais (incrementos iguais a 100 kips). Estas capacidades de momento são usadas através da análise pushover para explicar o efeito de força axial sobre as capacidades de instante das seções como a estrutura é empurrada e como resultado a mudança forças axiais. (O que é issoΔP = 500 kips). Estes também são mostrados na figura. 69.18.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.5: Capacidades de momento para as três seções diferentes em uma faixa de forças axiais

	7 pés Pilar (topo)	7 pés Pilar (btm)	8 pés de eixo
P (K)	M_p (K-ft)	M_p (K-ft)	M_p (K-ft)
-	10,858	5,051	16,234
100	11,067	5,216	16,467
200	11,276	5,379	16,698
300	11,484	5,541	16,929
400	11,692	5,702	17,159
500	11,899	5,862	17,388
600	12,105	6,020	17,617
700	12,312	6,177	17,846
800	12,517	6,332	18,073
900	12,721	6,485	18,299
1,000	12,924	6,637	18,525
1,100	13,126	6,787	18,750
1,200	13,327	6,934	18,974
1,300	13,528	7,080	19,196
1,400	13,727	7,224	19,419
1,500	13,924	7,366	19,639
1,600	14,121	7,505	19,859
1,700	14,318	7,643	20,077
1,800	14,512	7,778	20,296
1,900	14,706	7,911	20,512
2,000	14,898	8,040	20,727
2,100	15,089	8,169	20,941
2,200	15,278	8,295	21,154
2,300	15,467	8,419	21,366
2,400	15,654	8,541	21,576
2,500	15,839	8,662	21,786
2,600	16,024	8,780	21,994
2,700	16,207	8,897	22,200
2,800	16,388	9,011	22,405
2,900	16,568	9,122	22,610
3,000	16,747	9,232	22,812
3,100	16,925	9,340	23,013
3,200	17,101	9,445	23,214
3,300	17,275	9,549	23,412
3,400	17,448	9,651	23,609
3,500	17,619	9,751	23,805

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

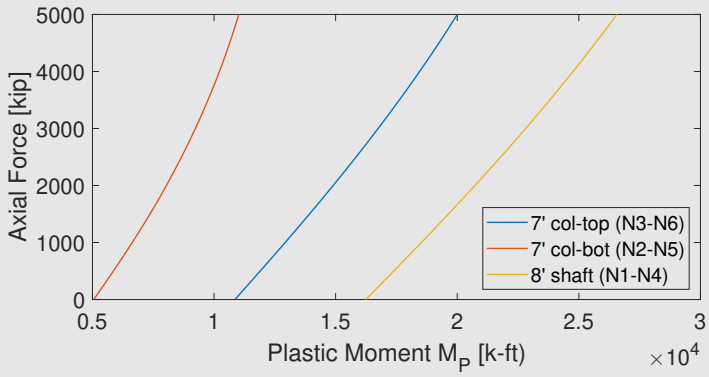


Figura 69.18: Diagrama de interação para os três necessários

Os momentos de plástico para todas as seções (cálculos não relatados aqui) são dados pela Fig. 69.19.

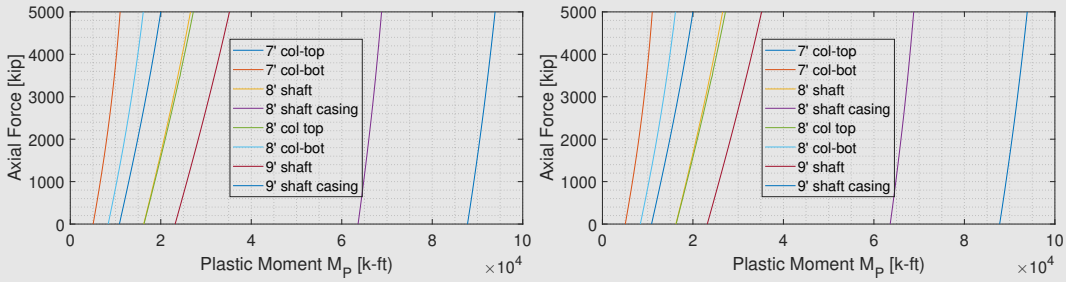


Figura 69.19: Momentos de plástico

Explicação para o 0,95 ϕ Fator `Fornecido por Marilyne Lefebvre`

Eu acredito que o fator 0,95 na equação $M_{EQ} \leq 0.95 M_p$ é um fator de redução aplicado ao momento plástico, e é uma média dos dois fatores de carga encontrados no (AASHTO, LRFD, 2017) (AAHTO LRFD especificações de projeto da ponte) e (AASHTO, Seismic, 2011) (AASHTO especificações sísmicas). Vou explicar a filosofia por trás usando que fator de carga abaixo:

Na 8a edição da AASHTO LRFD, eles colocaram um limite na capacidade de flexão do pilar para o projeto baseado em força. Porque na LRFD eles não calcularam a demanda de ductilidade, adicionaram um fator de redução de 0,9 ao momento plástico para ser conservador:

> *Colunas são requeridas para serem projetadas biaxialmente e para serem investigadas tanto pelo mínimo quanto pelo máximo força axial. A edição anterior destes As especificações reduziram o fator de resistência à flexão de 0,9 para 0,5 como a carga axial aumentou de O para* $0.20 f_c' A_g$*, devido à tendência para uma redução na capacidade de ductilidade como a carga axial aumenta. Isto A exigência está relaxada nesta edição, mas.. P − Δ A exigência foi adicionada (artigo 4.7.4.5) para limitar a demanda na capacidade de ductilidade devido à excessiva deflexão. Além disso, o fator R tem sido mantido em seus níveis anteriores (artigo 3.10.7) embora o período de retorno do terremoto foi aumentado de 500 para 1.000 anos. Em ambas as provisões NCHRP 12-49 e 20-7 (192), o fator de resistência à flexão recomendado é 1,0. No entanto, uma vez que as especificações*

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

> *atuais são baseadas em força e não calculam explicitamente a demanda de ductilidade como nas disposições 12-49 e 20-7 (193), limitar o fator a 0,9 é considerado justificado em vez de uma análise mais rigorosa.*
>
> [C5.11.4.1.2](AASHTO, LRFD, 2017)

De fato, em (AASHTO, Seismic, 2011), esse fator de resistência à carga é 1.0 dado que você está usando a combinação de carga 1,0DC + 1,0DW + 0,5LL + 1,0EQ e usando as propriedades esperadas do material (ou seja, f'_{ce} e.. f_{ye}).

Normalmente em uma zona sísmica alta como a Califórnia e Washington, você quer usar deslocamento-baseado design porque os requisitos para ductilidade e capacidade deslocamento são mais rigorosos em AASHTO Seismic do que em AASHTO LRFD.

Deslocamento-baseado em projeto funciona um pouco diferente do em força-based design, mas a análise pushover é realizada da mesma forma - em vez de incrementar uma força horizontal, você está incrementando um deslocamento.

No entanto, para este exemplo, estamos demonstrando o design baseado em força com a análise de pushover (isto é, Estamos incrementando o força cortante até um rótula plástica formas).

Já que Goethals está na Zona Sísmica A (SD1 = 0,03), AASHTO Seismic não requer que o eixo seja um membro protegido por capacidade. Da visão de elevação desta curva (veja documento em anexo palavra), você pode ver que apenas a gaiola interior pilar é estendida para o eixo. A gaiola espiral pilar não é estendida para o eixo.

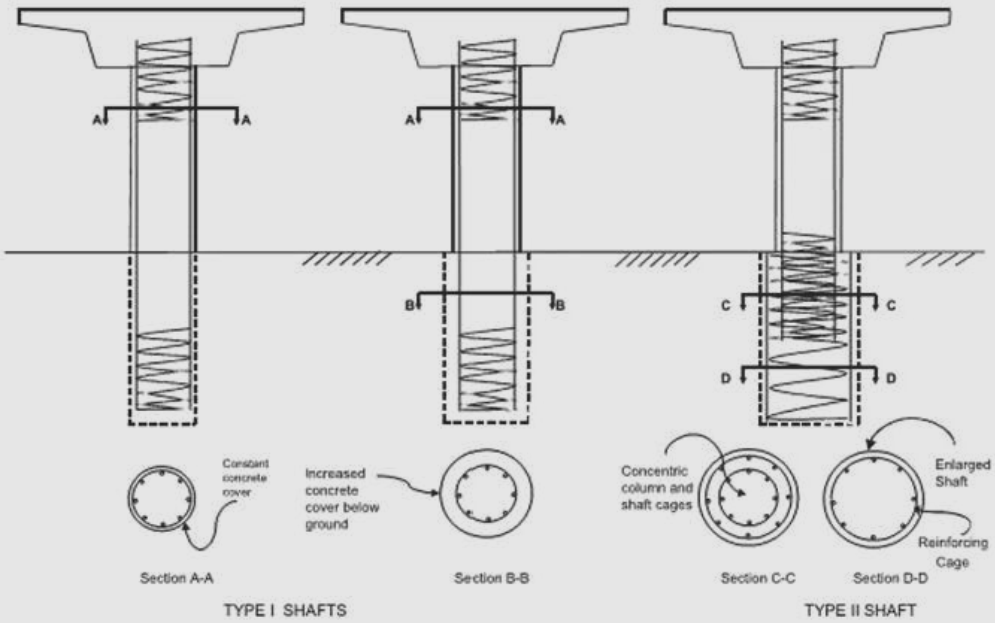
Há uma gaiola interna de 21 '-0' que é estendida para o eixo, mas o reforço transversal são laços. O reforço espiral no pilar não se estende para o eixo como um membro típico de capacidade protegida. Então, determinamos que dadas estas duas coisas, o eixo não está se comportando completamente, significando que o rótula plástica pode se formar dentro do eixo. Através da análise de flexão que fizemos na RISA, acabamos confirmando que o mecanismo de falha desta curva é a formação da dobradiça na base do eixo.

Quanto ao fator de carga, porque o eixo perfurado não é um membro de capacidade protegida, nós não acreditamos que seja apropriado usar um 1,0 fator de carga para o projeto dúctil do pilar, já que AASHTO Seismic baseado no 1.0 fator de carga em uma capacidade protegida Membro. Assim, para o projeto preliminar, ao invés de usar um fator de redução de carga de 1,0, se quisermos continuar usando as equações em AASHTO LRFD, usamos arbitrariamente 0,95 em nossa análise (que é a média entre o fator em AaSHTO lRFD e AAshto Seismic). O artigo C5.11.4.1.2 nos permite usar um fator diferente de 0,9 se fizermos uma análise mais rigorosa do que apenas confiar nas equações de código (ou seja, calculando a capacidade deslocamento do pilar - que fizemos através de nossa análise pushover). Nós simplesmente adicionamos um fator de redução para a capacidade plástica do pilar para considerar a formação rótula plástica no eixo.

CALTRANS, 2013 Forneceu uma boa explicação sobre as duas configurações diferentes do eixo (veja instantâneo abaixo, formulário Caltrans Sísmico Design Criteria Versão 1.7), Fig. 69.20

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Type I shafts are designed so the plastic hinge will form below ground in the shaft. The concrete cover and area of transverse and longitudinal reinforcement may change between the column and Type I shaft, but the cross section of the confined core is the same for both the column and the shaft. The global displacement ductility demand, μ_D for a Type I shaft shall be as specified in Section 2.2.4, with an upperbound value corresponding to that of the supported column.

Type II shafts are designed so the plastic hinge will form at or above the shaft/column interface, thereby, containing the majority of inelastic action to the ductile column element. Type II shafts are usually enlarged shafts characterized by a reinforcing cage in the shaft that has a core diameter larger than that of the column it supports. Type II shafts shall be designed to remain elastic. See Section 7.7.3.2 for design requirements for Type II shafts.

Figure 2.2.4-1 Shaft Definitions

NOTE:
Generally, the use of Type II shafts should be discussed and approved at the Type Selection Meeting. Type II Shafts will increase the foundation costs, compared to Type I Shafts, however there is an advantage of improved post-earthquake inspection and repair. Typically, Type I shafts are appropriate for short columns, while Type II shafts are used in conjunction with taller columns. The end result shall be a structure with a balanced stiffness as discussed in Section 7.

Figura 69.20: Definição do eixo de Caltran(CALTRANS, 2013)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Geralmente, o uso de eixos tipo II deve ser discutido e aprovado na reunião de seleção do tipo. Os eixos tipo II aumentarão os custos da fundação, em comparação com o eixo Tipo 1, no entanto há uma vantagem de melhorar a inspeção e reparação pós-terremoto. Tipicamente, eixos Tipo I são apropriados para curto pilares, enquanto os eixos Tipo II não são colocados em conjunto com mais alto pilares. Os resultados finais serão estruturados com um equilíbrio rigidez como discutido na Seção 7.

(CALTRANS, 2013)

20 **Análise I; Não tem pontas. Pré-Plástico** Começaremos analisando as análises pórtico (staticamente indeterminado) usando um software para uma unidade de força lateral de 1 kip é aplicado, Tabela 69.6.

Tabela 69.6: Resultados da análise; Não tem dobradiça

$V(K)$	Nó	P_{eq} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.805	28.84	0.000
	N2	-0.805	-1.17	-0.008
	N3	-0.805	-21.17	-0.013
	N4	0.805	28.82	0.000
	N5	0.805	-1.17	-0.008
	N6	0.805	-21.17	-0.013

21-22 **Análise Incremental I (Folha)** Criamos uma nova tabela onde

- P_{EQ}, M^i_{EQ}, e Δ são obtidos dos resultados da análise anterior (Tabela 69.6) multiplicado pelo força cortante em pilar 1 (mais sobre ele em um minuto).
- P_{total} é a soma de P_{DL} 2.500 Kip e P_{eq}.
- $M_{EQ,total}$ é simplesmente igual à soma de todos os valores precedentes e o atual. Por exemplo, na Tabela 69.9, $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ E para N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P requer atenção especial, já que o forças axiais nas seções muda à medida que a força horizontal no topo é aumentada, daí o momento em que as capacidades são alteradas também. Assim, a tabela Excel usa o `tendência` função que procura aproximação menos quadrada para um *linear* função entre dois pontos finais, como:
`TREND ('P vs MP'!`$D3{:}D53$`, 'P vs MP'!`$A3{:}A53$`,F10)`
Na análise atual, $0 < P_{total} < 5,000$.
- Nós consideramos que o próximo rótula plástica formará quando $M_{eq,Tot} \geq 0.95M_p$

No entanto, o problema é realmente não linear, uma vez que a condição para a formação de uma dobradiça depende da magnitude do cisalhamento neste passo. Assim, aumentaremos o valor de V Até que uma dobradiça se forme. Neste caso, são 670 kips.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.7: Ajuste que leva à formação da primeira dobradiça

V (K)	Nó (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plástico Hinge?	$M_P/M_{eq,Tot}$
670	N1	-539.66	19,322	0.00	1,960	19,322	20,531	NO	1.06
	N2	-539.66	-784	-5.19	1,960	-784	7,796	NO	-9.94
	N3	-539.66	-14,186	-8.79	1,960	-14,186	14,704	Sim	-1.04
	N4	539.66	19,310	0.00	3,040	19,310	22,769	NO	1.18
	N5	539.66	-785	-5.19	3,040	-785	9,085	NO	-11.58
	N6	539.66	-14,182	-8.78	3,040	-14,182	16,687	NO	-1.18

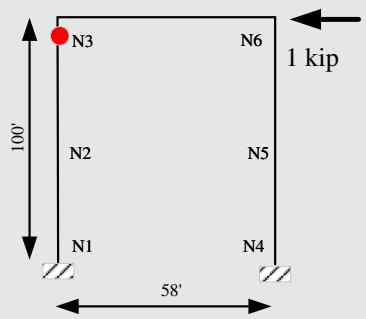


Figura 69.21: Modelo elástico modificado após formação do primeiro rótula plástica

Tabela 69.8: Resultados da análise; Uma dobradiça

V (K)	Nó	P_{eq} (K)	M^2_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.565	28.15	0.000
	N2	-0.565	11.23	-0.009
	N3	-0.565	0.00	-0.022
	N4	0.565	43.47	0.000
	N5	0.565	0.37	-0.012
	N6	0.565	-28.37	-0.021

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.9: Ajuste levando à segunda dobradiça

V (K)	Nó (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plástico Hinge?	$M_P/M_{eq,Tot}$
10	N1	-5.65	282	0.00	1,955	19,603	20,519	Sim	1.05
	N2	-5.65	112	-0.09	1,955	-672	7,789	NO	-11.59
	N3	-5.65	0	-0.22	1,955	-14,186	14,694	Sim	-1.04
	N4	5.65	435	0.00	3,045	19,744	22,781	NO	1.15
	N5	5.65	4	-0.12	3,045	-781	9,092	NO	-11.64
	N6	5.65	-284	-0.21	3,045	-14,466	16,697	NO	-1.15

~~23~~-~~25~~ Uma curva

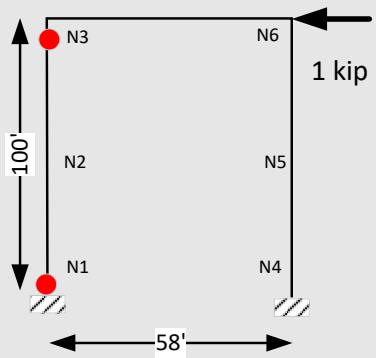


Figura 69.22: Modelo elástico modificado após formação do segundo rótula plástica

Tabela 69.10: Resultados da análise; Duas dobradiças

V (K)	Nó	P_{eq} (K)	M^3_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.755	0.00	0.000
	N2	-0.755	0.00	-0.019
	N3	-0.755	0.00	-0.031
	N4	0.755	60.61	0.000
	N5	0.755	0.63	-0.017
	N6	0.755	-39.38	-0.030

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.11: Ajuste levando à terceira e quarta dobradiças

V (K)	Nó (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{total} (K)	$M_{EQ,total}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	Plástico Hinge?	$M_P/M_{eq,total}$
40	N1	-30.18	0	0.00	1,925	19,603	20,457	Sim	1.04
	N2	-30.18	0	-0.74	1,925	-672	7,753	NO	-11.54
	N3	-30.18	0	-1.24	1,925	-14,186	14,638	Sim	-1.03
	N4	30.18	2,425	0.00	3,075	22,169	22,844	Sim	1.03
	N5	30.18	25	-0.67	3,075	-755	9,128	NO	-12.08
	N6	30.18	-1,575	-1.20	3,075	-16,041	16,753	Sim	-1.04

~~26~~-~~27~~ Duas pontas

~~27~~ Mecanismo de colapso (com quatro pontas) Até agora temos um mecanismo, Fig. 69.23E precisamos somar as cargas.

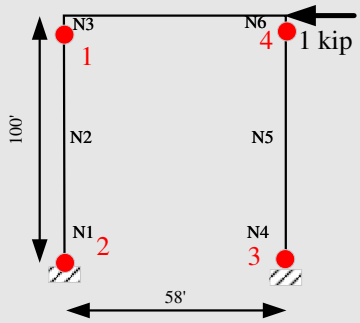


Figura 69.23: Mecanismo de colapso com formação de 4 rótulas plásticas

Na mesa 69.12:

$$
\begin{aligned}
V_{tot} &= 670 + 10 + 40 = 720 \\
P^{N6}_{eq,Tot} &= 539.6 + 5.65 + 30.18 = 575.49 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 19,310 + 435 + 2,425 = 22,169 \\
\Delta^{N5}_{Tot} &= -5.19 - 0.12 - 0.67 = -5.97 \\
P^{N5}_{Tot} &= 2,500 + 575.49 = 3,075 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 22,169 \text{ da análise anterior}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 69.12: Resumição de forças, momentos e..

V_{Tot}	Nó	$P_{EQ,Tot}$	$M_{EQ,Tot}$	Δ_{Tot}	P_{Tot}	$M_{EQ,Tot}$	M_p
720	N1	-575.49	19,603	0.00	1,925	19,603	20,457
	N2	-575.49	-672	-6.02	1,925	-672	7,753
	N3	-575.49	-14,186	-10.25	1,925	-14,186	14,638
	N4	575.49	22,169	0.00	3,075	22,169	22,844
	N5	575.49	-755	-5.97	3,075	-755	9,128
	N6	575.49	-16,041	-10.19	3,075	-16,041	16,753

28 **Falha no pier** A formação progressiva de rótulas plásticas resultando em um mecanismo pilar foi descrita acima. (AASHTO, Seismic, 2011, §4.7) endereça a localização de formações rótula plástica. Nesta análise, rótulas plásticas estão previstos para desenvolver no topo e fundo do píer.

Por isso, O design está de acordo com as especificações da AASHTO.

29 **Topo pilar deslocamento no fracasso** Da mesa 69.12 Topo pilar deslocamento ocorre no nó 3 e é igual a 10,25 polegadas (correspondendo a N3).

30 **Comparação de análise e cálculos manuais** Os cálculos da mão renderam Δ_{tot} = 17.7 Polegada do EQ. 69.27,

Através da análise do pushover, Δ_{tot} = 10.19 Polegada.

Claramente o cálculo da mão está no lado conservador.

31 **Avaliação do projeto do píer** A capacidade cisalhamento é de 360 kips ($V_{tot}/2$) muito mais que a carga de projeto de $V_{2,500}$=50 kip. Da mesma forma, as capacidades do momento ($M_{eq,total}$) calculado na análise de pushover muito exceder as cargas de projeto calculadas na parte 3 (M_{2500}=2,000 kip-ft).

Portanto.. O design é adequado.

[a] Nós perseguimos em classe um exercício como esse, embora com uma equação ligeiramente mais simples (Desayi, 1964) que Mander e para seções retangulares. O código poderia ser facilmente expandido para realizar as análises nesta seção.

[b] 1o Teorema: *Mudança de inclinação entre dois pontos é igual à área da curvatura (M/EI) diagrama entre esses dois pontos.*
2o Teorema (aplicável aqui): *Deslocamento entre dois pontos é igual ao momento da área sob o diagrama de curvatura em relação ao ponto de forma desviada.*

69.4.2 Análise Dinâmica Incremental (IDA)

A seção seguinte é reproduzida de *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* por Mahdavi, 2023.

35 Análise Dinâmica Incremental (IDA) é um método para avaliar a resposta estrutural sob carga sísmica. Nesta abordagem, cada registro movimento do solo é sistematicamente escalado para níveis de medição de múltiplas intensidades (IM), e o parâmetro de demanda

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

de engenharia (EDP) é calculado para cada nível escalonado (Vamvatsikos e Cornell, 2002).

36 A curva IDA é então construída conectando os valores de EDP em diferentes níveis de intensidade, muitas vezes usando encaixe spline (Vamvatsikos e Cornell, 2004).

37 Este método é amplamente utilizado na avaliação da fragilidade sísmica, pois permite aos pesquisadores determinar a probabilidade de colapso em vários níveis de intensidade. Garante que o colapso estrutural ocorra em intensidades suficientemente altas, tornando-o útil para a avaliação sísmica probabilística.

38 No entanto, movimentos de escala podem distorcer seu conteúdo de frequência, levando a formas de registro irrealistas que podem afetar as previsões de resposta estrutural (Haselton et al., 2011).

39 Para avaliar a probabilidade de colapso, IDA se concentra em computação:

$$P\left[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im\right]$$

40 Três abordagens principais existem para estimar fragilidade usando IDA:

Fragilidade baseada na capacidade de EDP com resultados completos da AID A IDA é realizada plotando curvas de IDA e definindo colapso quando a demanda, EDP_d, excede a capacidade estrutural, EDP_c (Zareian et al., 2010). A probabilidade de colapso em um determinado nível de intensidade é calculada como:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{IM}=im]=\sum_{\text{all }edp_c}P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{EDP}_c=edp_c,\mathrm{IM}=im]P[\mathrm{EDP}_c=edp_c]$$

Figura 69.24a ilustra valores de capacidade EDP para diferentes registros movimento do solo, juntamente com a demanda EDP em dois níveis de IM específicos. Computando probabilidades de colapso para cada nível IM e plotando os resultados, um empírico curva de fragilidade pode ser obtido, que é então ajustado usando uma função log-normal de distribuição cumulativa (CDF).

Fragilidade baseada na capacidade de IM com resultados completos da AID A intensidade do colapso mede a capacidade, IM_{cap}, é identificado como o ponto assintótico em cada curva da AID (Figura 69.24b). A probabilidade de colapso é dada por:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{IM}_{cap}<\mathrm{IM}=im]$$

A função de fragilidade é obtida através da montagem de um CDF log-normal para os dados do colapso. Dois métodos estatísticos são comumente usados para estimar os parâmetros log-normais, η e.. β:

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Método de Momentos (MM) A abordagem MM estima η (mediana) e β (desvio padrão logarítmico) combinando os momentos de distribuição log-normal para colapso de dados:

$$\hat{\eta} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_T} \ln(\text{IM}_{cap_i})}{N_T}\right),$$
$$\hat{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_T} \left[\ln\left(\text{IM}_{cap_i}\right) - \ln\left(\hat{\eta}\right)\right]^2}{N_T - 1}}$$

Onde N_T é o número total de registros movimento do solo

Estimação de Probabilidade Máxima Estimativas do MLE η e.. β maximizando a função de log-likelihood:

$$\left\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\right\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{N_T} \ln\left\{\phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right\}$$

MLE normalmente fornece estimativas de parâmetros mais precisas, especialmente para pequenos conjuntos de dados.

Fragilidade baseada na capacidade do IM com resultados truncados da AID Na AID truncada, o nível máximo de IM é limitado a IM_{trunc}, o que significa que alguns registros não chegam ao colapso (Figura 69.24c). Isso resulta em dados censurados, exigindo uma função de probabilidade modificada:

$$\mathcal{L}(\eta\,, \beta\,; \mathbf{IM}_{cap}\,, \text{IM}_{trunc}) = \left(\prod_{i=1}^{N_C} \phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right) \times \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{trunc}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right)^{N_T - N_C}$$

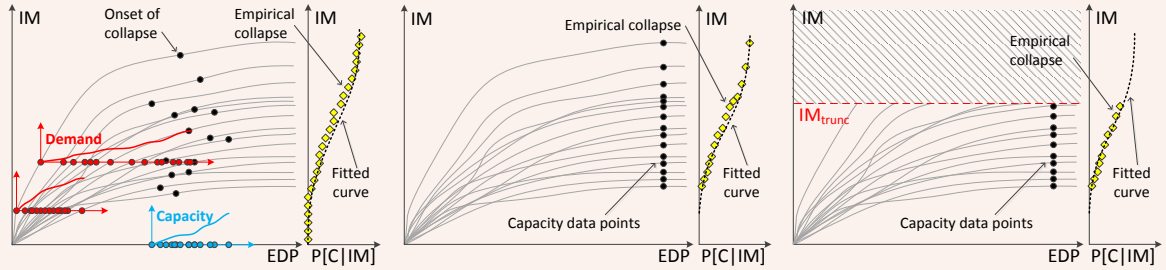
Onde N_C é o número de registros que levam ao colapso. Os parâmetros η e.. β são estimados usando Estimação de Probabilidade Máxima com Dados Censurados (MLECD) (Baker, 2015), garantindo uma avaliação precisa da fragilidade para conjuntos de dados truncados.

69.4.3 Análise de Múltiplas Listras (MSA)

A seção seguinte é reproduzida de Saouma e Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



(a) Capacidade baseada em EDP; IDA completa (b) Baseado na capacidade IM; IDA completa (c) Baseado na capacidade IM; IDA truncada

Figura 69.24: Colapso conceitual baseado no método IDA

41 Ao contrário da Análise Dinâmica Incremental (IDA), onde um conjunto fixo de movimentos no solo é incrementalmente escalado, a Análise Multiple Stripe (MSA) realiza análises em vários níveis de intensidade especificados discretos (SILs).

42 Quando as análises são conduzidas para três ou mais SILs, o método é referido como MSA (Cornell e Jalayer, 2002). Se apenas um ou dois SILs forem usados, a abordagem é chamada de Análise Individual de Faixas (SSA) e Análise Dupla de Faixa (DSA), respectivamente.

43 A MSA fornece maior flexibilidade em comparação com a IDA. Os intervalos entre os SILs sucessivos não precisam ser uniformes; Por exemplo, na figura 69.25a, o espaçamento entre SIL_2 E SIL_3 assim como entre SIL_6 E SIL_7 é maior do que em outros casos. Esta variação pode ser atribuída às frequências de excedência específicas necessárias para a análise.

44 O número de movimentos no solo atribuídos a cada SIL também pode variar, e os movimentos selecionados para cada faixa podem ser diferentes, especialmente quando se usa um espectro condicional para seleção.

45 O número de SILs é opcional, mas aumentando-o melhora a precisão do ajuste curva de fragilidade em detrimento de um esforço computacional adicional. Na figura 69.25a, análises são realizadas para oito SILs, mas mais poderia ser incluído até que todos os movimentos do chão cheguem ao colapso.

46 Devido às variações nos movimentos de terra selecionados através das listras, a probabilidade de colapso empírico para SIL_i Pode ser igual ou maior que o SIL_{i+1}.. Na figura 69.25aSIL_4 tem uma probabilidade de colapso empírico maior que SIL_5, enquanto o número de pontos de dados colapso em SIL_7 E SIL_8 são idênticos.

Estimação de Desvio Padrão Mediano e Logarítmico

47 A mediana e o desvio padrão logarítmico da função de fragilidade podem ser estimados usando um dos três métodos seguintes.

CÓPIA PARA REVISÃO

Soma do Erro Quadrado (SSE) Este método minimiza a soma dos erros ao quadrado entre as frações de colapso observadas e as probabilidades previstas pela função fragilidade:

$$\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmin} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_{C_i}}{N_{T_i}} - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right)^2$$

Onde N_{C_i} e.. N_{T_i} são o número de casos colapsados e o número total de movimentos no solo em IM = im_i, respectivamente, e m é o número de níveis IM.

Estimação de Probabilidade Máxima Assumindo que os eventos de colapso e não colapsamento em cada SIL são independentes, uma distribuição binomial pode ser usada. A função de massa probabilidade para uma distribuição binomial com probabilidade p é:

$$\mathcal{L}(p\,;\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{u_i}{v_i} p_i^{v_i} \left(1 - p_i\right)^{u_i - v_i}$$

Onde v_i representa o número de colapsos em u_i Provações. A função de probabilidade para MSA pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}(\eta, \beta;\, \mathbf{IM}, \mathbf{N_T}, \mathbf{N_C}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right)^{N_{C_i}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right]^{N_{T_i} - N_{C_i}}$$

Muitas vezes é mais conveniente maximizar o logaritmo da função de verossimilhança, produzindo os parâmetros estimados (Baker, 2015):

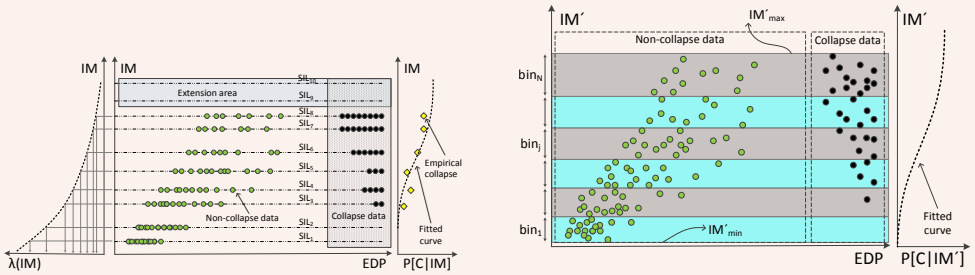
$$\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{m} \left(\ln\binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} + N_{C_i} \ln\left(\Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) + (N_{T_i} - N_{C_i}) \ln\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) \right)$$

Regressão Linear no Espaço Transformado (LRTS) Também conhecido como Método B em Porter, Kennedy e Bachman, 2007, este método é usado quando os movimentos do solo são selecionados com base em uma medida de intensidade alternativa (IM)'). Nesses casos, SSE e MLE não são mais aplicáveis, já que os pontos de dados do colapso não são limitados a SILs predefinidos mas estão espalhados no IM' espaço (Figura 69.25b). O procedimento consiste em identificar IM'_i valores para cada ponto

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

de dados, dividindo-os em N Caixas onde $N = \lfloor \sqrt{M} \rfloor$, e determinando a média de intensidade medida por caixa. Uma linha de regressão é então ajustada em espaço transformado para obter η e.. β, que definem a função de fragilidade.



(a) Baseado em IM primário (b) Baseado em IM alternativa'

Figura 69.25: Colapso conceitual baseado no método MSA

69.4.4 Análise de Nuvem (CLA)

A seção seguinte é reproduzida de Saouma e Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

48 Análise de Nuvem (CLA) é um procedimento no qual uma estrutura é submetida a um conjunto relativamente grande de movimentos de terra sem escala ou como gravados e analisados numericamente.

49 Se os registros movimento do solo são selecionados de um bin predefinido, eles representam um cenário de terremoto caracterizado por (M_{bin}, R_{bin}), onde M_{bin} e.. R_{bin} corresponde à magnitude representativa e distância do bin, respectivamente (Jalayer, 2003).

50 A partir dos resultados da análise, a relação entre o parâmetro de demanda de engenharia (EDP) e a medida de intensidade (IM) é estabelecida, formando a chamada resposta de nuvem**.

51 CLA é frequentemente usado em conjunto com probabilística Análise de demanda sísmica (PSDA). Uma suposição amplamente aceita é que os pontos de dados discretos obtidos do CLA exibem uma tendência linear no espaço logarítmico, o que corresponde a uma relação poder-lei no espaço aritmética (Padgett, Nielson e DesRoches, 2008; Jankovic e Stojadinovic, 2004; Ramamoorthy, Gardoni e Bracci, 2006):

$$\eta_{\text{EDP|IM}} = a \cdot \text{IM}^b \tag{69.35}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Onde a e.. b são constantes de regressão, e $\eta_{\text{EDP|IM}}$ é o valor médio de EDP dado IM. O desvio padrão logarítmico de EDP dado IM, denotado como $\beta_{\text{EDP|IM}}$, é estimado como:

$$\beta_{\text{EDP|IM}} = \sigma_{\ln(\text{EDP|IM})} \approx \sqrt{\frac{\sum \left(\ln(edp_i) - \ln(a \cdot \text{IM}^b)\right)^2}{n-2}} \tag{69.36}$$

Onde n é o número de análises transientes não lineares.

69.4.5 Análise do Tempo de Endurance (ETA)

A seção seguinte é reproduzida de Saouma e Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

Análise do Tempo de Endurance (ETA) é um procedimento dinâmico para estimar o desempenho sísmico das estruturas quando submetidas a excitações intensificadoras pré-desenhadas (Estekanchi, Vafai e Sadeghazar, 2004). As funções de aceleração simuladas são projetadas para progressivamente agitar a estrutura de um nível de excitação baixo, onde a resposta permanece elástica, para um nível médio de excitação, onde o comportamento não linear começa, e finalmente para uma excitação alta nível**, onde a estrutura atinge o fracasso. Toda esta progressão de resposta é capturada em uma análise única da história do tempo.

Geração de Funções de Aceleração do Tempo de Resistência (ETAFs)

Um desafio chave na ETA está em gerar o *funções de aceleração do tempo de resistência (ETAFs)* (Nozari e Estekanchi, 2011), que foram ainda mais otimizados por Mashayekhi e Estekanchi, 2013. O processo para produzir ETAFs consiste nos seguintes passos:

Passo 1: Gere uma função de aceleração aleatória estacionária A função aceleração, denotada como $Z(t)$, é gerado usando $\delta t = 0.01$, $N_{pnt} = 2^{11}$ nós, e aceleração de pico do solo (PGA) = $1.0g$.. O número de pontos, N_{pnt}, é opcional.

Passo 2: Converta-se para o domínio da frequência Aplique a transformada de Fourier para obter:

$$Z(i\omega) = \mathcal{F}(Z(t)),$$

Onde i é a unidade imaginária e ω é a frequência.

Passo 3: Aplicar uma função de filtro Uma função filtrante é aplicada para moldar o

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

conteúdo da frequência de modo que se pareça com movimentos reais do solo (Clough e Penzien, 1993):

$$A\left(i\omega\right)=\frac{1+2i\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+2i\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}}\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2+2i\xi_2\frac{\omega}{\omega_2}}Z\left(i\omega\right)$$

O primeiro termo representa um filtro passa-baixo, enquanto o segundo representa um filtros passa-alto. Parâmetros ω_1, ξ_1, ω_2, e ξ_2 corresponde às frequências e coeficientes amortecimento destes filtros.

Passo 4: Ajuste o conteúdo de frequência para combinar com o espectro alvo Várias iterações são realizadas para modificar o conteúdo de frequência, garantindo que o gerado espectro de resposta se alinha com o espectro alvo:

$$A^{new}\left(i\omega\right)=A^{old}\left(i\omega\right)\frac{S_a^{\text{trg}}(\omega)}{S_a^{\text{gen}}(\omega)}$$

Onde $S_a^{\text{trg}}(\omega)$ é o espectro alvo (de códigos de construção ou análise probabilística dos riscos sísmicos), e $S_a^{\text{gen}}(\omega)$ é o espectro gerado.

Passo 5: Modifique o histórico de aceleração do tempo Uma função de perfil linear, $l(t)=t/t_{\text{trg}}$, é aplicado ao histórico de aceleração do tempo para garantir a intensificação ao longo do tempo. O parâmetro t_{trg}, tipicamente ajustado para 10 segundos, é opcional.

Passo 6: Otimize espectros de resposta A aceleração e deslocamento espectros de resposta são modificadas usando uma função de otimização no domínio do tempo:

$$\underset{a_g}{min}F(a_g)=\int_0^{T_{max}}\int_0^{t_{max}}\left\{\left[S_a(T,t)-\frac{t}{t_{\text{trg}}}S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2+\chi_0\left[S_d(T,t)-\frac{t}{t_{\text{trg}}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2\right\}$$

Onde a_g Está sendo procurado o ETAF, χ_0 é um parâmetro de peso, e $t_{\max}$ e.. $T_{\max}$ são o tempo máximo e período, respectivamente, no processo de otimização. Uma amostra ETAF é mostrada na Figura 69.26a.

Derivando a função de capacidade

Para obter uma função de capacidade, a curva ETA deve primeiro ser determinada (Figura 69.26b). A curva ETA traça o valor absoluto máximo do EDP ao longo do tempo:

$$\Omega\left(\text{EDP}(t)\right)\equiv\max\left\{\text{Abs}\left(\text{EDP}(\tau):\tau\in[0,t]\right)\right\}$$

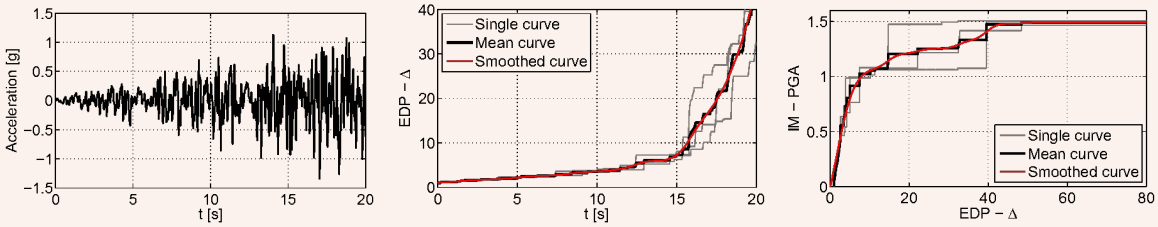
O parâmetro tempo é então convertido em IM, aproveitando a relação direta entre tempo e aceleração (Figura 69.26a). Finalmente, as coordenadas de EDP-IM são transformadas em

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

coordenadas de MIEP-EDP, produzindo uma função de capacidade stepwise. Esta função pode mais tarde ser suavizada (Figura 69.26c).

Desde.. *Solteiro* ETAF está sujeito a.. Região de Confiança Devido à sua natureza aleatória, a média de três ETAFs diferentes é tipicamente usada para melhorar a confiabilidade (Hariri-Ardebili e Mirzabozorg, 2014; Hariri-Ardebili e Saouma, 2015).



(a) Amostra ETAF (b) Curva de ETA (c) Função de capacidade

Figura 69.26: Geração de função de capacidade baseada em ETA

69.4.6 Resumo

52 A análise da fragilidade sísmica pode ser realizada usando diferentes metodologias, cada uma com suas próprias vantagens e limitações. Este capítulo discutiu cinco abordagens amplamente utilizadas: Análise Clássica de Pushover (POA), Análise Dinâmica Incremental (IDA), Análise Múltipla de Listras (MSA), análise em nuvem (CLA) e Análise do Tempo de Endurance (ETA).

53 Uma comparação dessas metodologias é fornecida na tabela 69.13, enquanto figura 69.28 resume suas principais características e aplicações.

Análise de Pushover Clássica (POA)

54 Análise clássica de Pushover (POA) é um *estática* método usado para estimar a resposta sísmica de estruturas sob cargas laterais monotonicamente crescentes.

55 O método assume que a resposta estrutural pode ser capturada através de um único padrão de carga invariante, tipicamente baseado no fundamental forma modal. Enquanto POA é computacionalmente eficiente e amplamente usado em design sísmico baseado no desempenho, *Não capta efeitos de modo mais elevado ou a variabilidade do carregamento dinâmico de terremotos*.

56 A POA fornece uma estimativa da curva de capacidade, mas não tem capacidade probabilística de avaliação.

CÓPIA PARA REVISÃO

Análise Dinâmica Incremental (IDA)

57 IDA é um *Dinâmica* método onde movimento do solo registros estão *Aumentado incrementalmente* para os níveis de medida de intensidade múltipla (IM), e os correspondentes valores do parâmetro de demanda de engenharia (EDP) são calculados.

58 O *Curva IDA*, construído usando esses resultados, permite uma avaliação sísmica probabilística identificando probabilidades de colapso em vários níveis IM.

59 Figura 69.24 ilustra diferentes abordagens de estimativa de fragilidade baseadas em IDA. Enquanto IDA fornece dados de resposta estrutural abrangentes, ele tem limitações, tais como potenciais distorções no conteúdo de frequência movimento do solo quando os registros são escalonados.

Análise de Múltiplas Listras (MSA)

60 A MSA melhora com a IDA, conduzindo análises sísmicas em vários *Níveis de intensidade discretos (SILs)* ao invés de continuamente escalar registros.

61 Essa abordagem aumenta a robustez estatística e permite uma estimativa de fragilidade mais precisa. Ao contrário do IDA, o MSA não assume um conjunto fixo de movimentos no chão; Registros diferentes podem ser usados em diferentes níveis de IM.

62 O flexibilidade de MSA está demonstrado na Figura 69.25, que mostra como os SILs são selecionados. Probabilidades de colapso empírico em cada SIL são obtidas, e diferentes técnicas de regressão - como *Soma dos Erros Quadrados (SSE), Estimação Máxima de Probabilidade (MLE) e Regressão Linear no Espaço Transformado (LRTS)*- pode ser aplicado para estimativa de fragilidade.

Análise de Nuvem (CLA)

63 CLA difere de IDA e MSA submetendo a estrutura a um *Um grande conjunto de movimentos sem escala*, em vez de aumentar gradualmente os níveis de IM.

64 Isso resulta em *Resposta da nuvem*, onde EDP é plotado contra IM para todos os registros. A principal vantagem do CLA é que ele captura *variabilidade natural* em movimento do solo registros sem modificá-los artificialmente.

65 A relação entre EDP e IM é muitas vezes presumida para seguir uma forma de lei do poder, como descrito na Equação 69.35.

66 O *desvio padrão logarítmico de EDP dado IM* é então estimado usando Equação 69.36, fornecendo uma abordagem eficiente e simplificada para avaliação de fragilidade sísmica.

Análise do Tempo de Endurance (ETA)

67 ETA é um método de *pushover dinâmico* no qual as estruturas são submetidas a *excitações predefinidas de intensidade crescente* em vez de registros sísmicos reais.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

68 O *Funções de aceleração do tempo de resistência (ETAFs)* são geradas para aumentar progressivamente a intensidade sísmica, permitindo que o comportamento estrutural seja avaliado em estados elásticos, não lineares e de falha dentro de uma única análise da história temporal. O processo de geração de ETAFs está detalhado na figura 69.26, que ilustra como as histórias de aceleração do tempo são modificadas para combinar espectros de alvo e otimizar características de resposta.

69 O resultado final é.. *função de capacidade*, descrevendo a resposta da estrutura ao longo do tempo e fornecendo informações de fragilidade em um IM-EDP formato.

Comparação e Aplicações

70 Cada uma dessas cinco metodologias tem diferentes propósitos dependendo do nível de precisão, custo computacional e pressupostos envolvidos. Figura 69.27 fornece uma visão comparativa das análises transientes não lineares, ilustrando os requisitos de dados de entrada e as respostas estruturais esperadas para diferentes abordagens.

71 Além disso, tabela 69.13 apresenta uma comparação lado a lado de POA, IDA, MSA, CLA e ETA.

Tabela 69.13: Comparação de métodos sísmicos análise estrutural

Método	Tipo	Dados de Entrada	Computação. Custo	Proba.. bilistica	Limitações
POA	Estático	Curva de flexão única	Baixo	No	Ignora efeitos dinâmicos, sem variabilidade
IDA	Dinâmica	Movimentos de terra escalados	Alto	Sim	Distorção do conteúdo de frequência devido à escala
MSA	Dinâmica	Múltiplos níveis de IM, registros em escala	Médio	Sim	Requer vários movimentos de terra por SIL
CLA	Dinâmica	Um grande conjunto de recordes em escala	Médio	Sim	Assume tendência log-linear na relação EDP-IM
ETA	Dinâmica	Excitações geradas artificialmente	Médio	No	Excitação sintética pode não combinar com registros reais

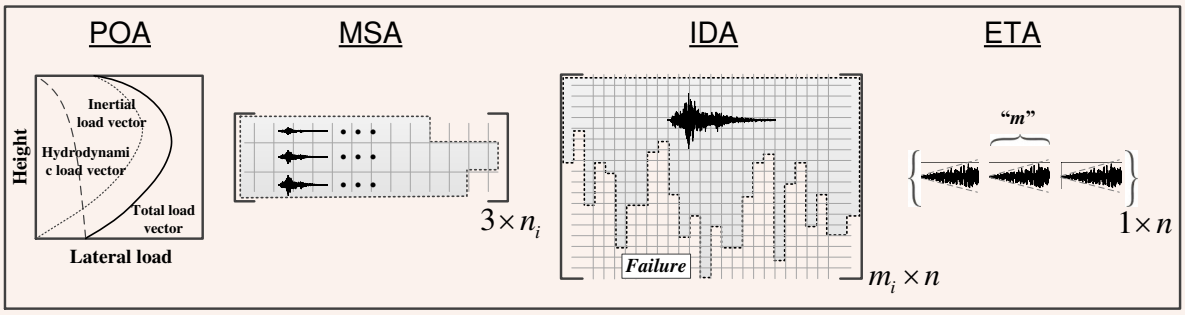
figura 69.28

69.5 O que vem a seguir

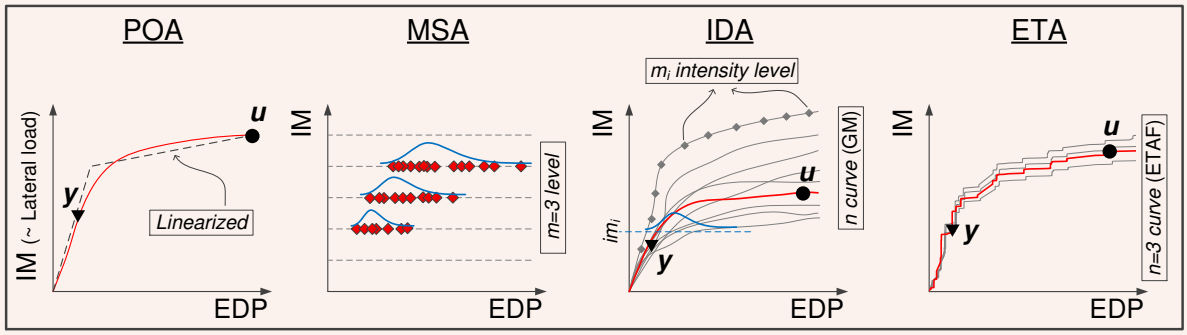
72 No próximo capítulo (70), vamos avaliar quantitativamente a análise sísmica não linear discutida neste capítulo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Diferentes tipos de entrada possíveis para análises não lineares transientes (exceto POA)



(b) Resultado da análise para avaliação

Figura 69.27: Destaque de quatro estratégias diferentes (Hariri-Ardebili, Saouma e Porter, 2016)

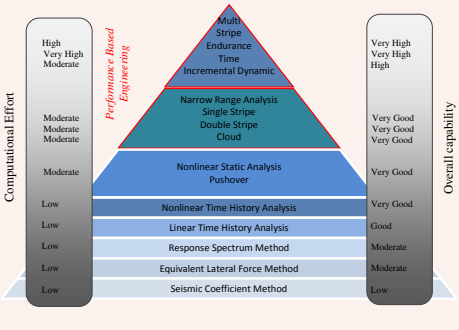
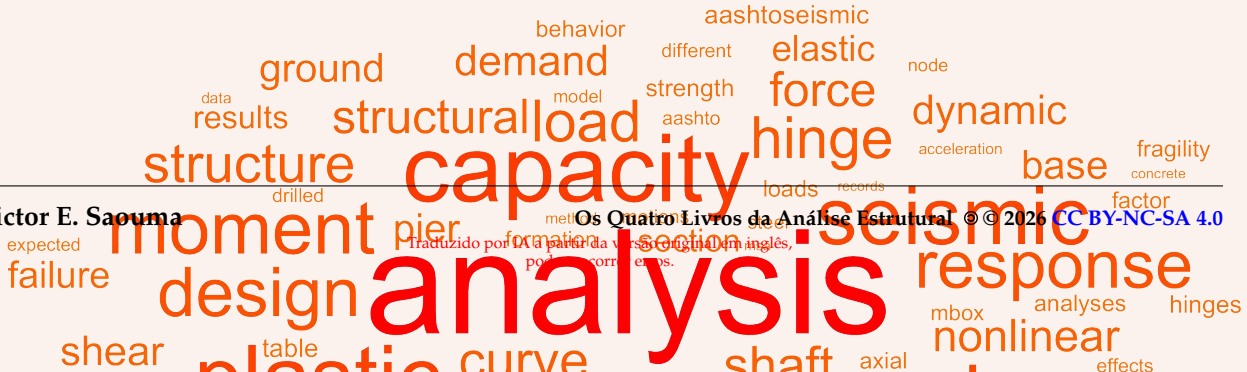


Figura 69.28: Complexidades relativas da análise sísmica



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por DeepL a partir da versão original em inglês, pode conter erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 70

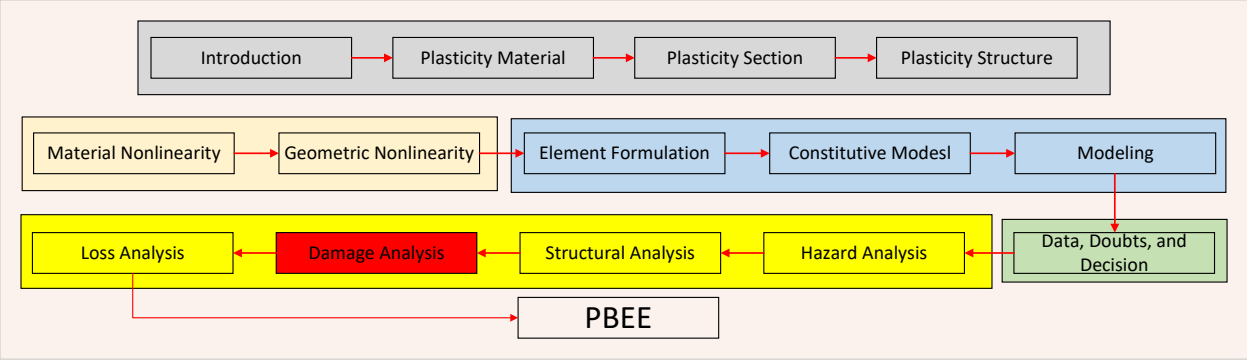
Análise de Danos

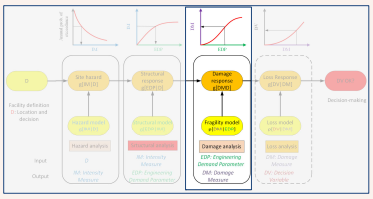
Abstract

Este capítulo apresenta uma estrutura para quantificar e avaliar danos estruturais induzidos por terremotos, integrando abordagens determinísticas e probabilísticas. Começando com o conceito de estados limites - limites separando aceitável do desempenho inaceitável - o capítulo explora uma hierarquia dos estados de prevenção operacionais ao colapso. Vários índices de danos são introduzidos tanto para análise linear (razões demanda-capacidade, duração inelástica cumulativa) e não linear (índices baseados em deformação e energia). A progressão para avaliação probabilística reconhece incertezas na demanda sísmica e capacidade estrutural, usando parâmetros de demanda da engenharia como proxies quantitativos para estados de dano. Limiares estabelecidos para limites de deriva, índices de danos e taxas de capacidade são apresentados com seus níveis de desempenho correspondentes. Ao posicionar a análise de danos dentro do quadro mais amplo Engenharia sísmica baseada em desempenho, o capítulo demonstra como esses conceitos técnicos traduzem respostas estruturais complexas em avaliações significativas para tomada de decisão informada.

70.1 Introdução 2356
70.2 Estados limites 2357
70.2.1 Hierarquia de Estados limites 2358
70.2.2 Quadro Probabilístico 2358
70.2.3 Implementação no Framework PBEE 2359
70.2.4 Calibração e validação 2359
70.2.5 Considerações Multi-Objetivo 2359
70.2.6 Conexão com índices de danos 2360
70.3 Índices de danos 2360
70.3.1 Índices de danos e critérios de desempenho 2360
70.3.2 Transição para avaliação de danos probabilísticos 2362
70.3.3 Representação Probabilística de Danos 2363
70.3.4 Métricas de Danos e Parâmetros da Demanda de Engenharia (PED) 2363
70.3.5 Região de Confiança Em Avaliação de Danos 2364
70.3.6 métricas de danos quantitativos 2364
70.4 Desempenhos 2366
70.4.1 Estrutura de Engenharia Baseada em Desempenho . . . 2366
70.4.2 Níveis de Desempenho e Critérios de Aceitação 2368
70.4.3 Integrando Estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho 2369
70.5 Transição para Curvas de fragilidade e avaliação de risco 2371

CÓPIA PARA REVISÃO





70.1 Introdução

1 Avaliação de danos estruturais representa a interface crítica entre análise de engenharia e tomada de decisão em projeto sísmico e retrofit. Enquanto as técnicas avançadas de análise não linear fornecem insights sobre comportamento estrutural, elas devem ser interpretadas através de métricas de danos e critérios de desempenho para orientar decisões significativas de engenharia. Este capítulo apresenta uma estrutura sistemática para análise de danos dentro do contexto de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE), integrando abordagens determinísticas e probabilísticas para quantificar os efeitos da carga sísmica em sistemas estruturais.

2 A base da análise de danos reside no conceito de limiares claramente definidos que separam o desempenho aceitável do inaceitável. Esses estados estabelecem uma hierarquia de objetivos de desempenho que vão desde a capacidade operacional total até a prevenção do colapso. Ao definir essas fronteiras, criamos um quadro estruturado para avaliar a resposta estrutural contra as expectativas dos stakeholders e os requisitos regulamentares. O tratamento probabilístico de estados limites reconhece as incertezas inerentes em eventos sísmicos e comportamento estrutural, permitindo uma avaliação informada do risco ao invés de uma avaliação binária.

3 Índices de danos servem como ferramentas quantitativas que medem quão perto uma estrutura chega a exceder sua definição estados limites. Para análises elásticas lineares, índices como razões de demanda-capacidade (DCR), duração inelástica cumulativa (CID) e área inelástico cumulativa (CIA) fornecem informações sobre a magnitude, duração e extensão do dano potencial. Em contextos não lineares, índices mais sofisticados captam os

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

efeitos acumulados de produção, fissuração e dissipação de energia através de formulações baseadas em deformação e energia. Essas métricas transformam saídas analíticas complexas em medidas significativas de integridade estrutural e capacidade residual.

4 A integração dos índices de danos determinísticos com métodos probabilísticos de avaliação marca um avanço significativo na engenharia sísmica. Curvas de fragilidade - que expressam a probabilidade de exceder estados de dano específicos em função da intensidade movimento do solo - fornecer uma visão abrangente do desempenho potencial através do espectro de possíveis cenários de terremoto. Este quadro probabilístico é responsável por incertezas nas características movimento do solo, propriedades materiais e pressupostos de modelagem, permitindo uma avaliação de risco mais robusta e estratégias de mitigação.

5 A implementação prática desses conceitos requer relações quantitativas entre métricas analíticas e objetivos de desempenho. Parâmetros de demanda da engenharia (PED) tais como razões de deriva interstory e acelerações de pico do chão servem como proxies mensuráveis para estados de dano. Limites estabelecidos de fontes autoritárias como ASCE 41-17 e FEMA 356 fornecem valores de referência que correlacionam esses EDP com níveis de desempenho esperados. Essas relações permitem aos engenheiros traduzir resultados analíticos em avaliações estruturais de desempenho que se alinham com os requisitos de código e as expectativas dos stakeholders.

6 Ao longo deste capítulo, enfatizamos o papel central da análise de danos dentro do quadro mais amplo PBEE. Ao conectar a caracterização de risco sísmico à avaliação estrutural e de desempenho, a análise de danos fornece a base técnica para tomada de decisão informada do risco. As metodologias aqui apresentadas estabelecem uma abordagem sistemática para quantificar, interpretar e comunicar riscos sísmicos, permitindo projetos estruturais mais resilientes e economicamente viáveis.

7 O capítulo prossegue com um exame detalhado de estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho, culminando em uma abordagem integrada que une o fosso entre análise técnica e aplicação prática. Este tratamento abrangente da análise de danos define o palco para a análise de fragilidade e as metodologias de estimativa de perdas que serão abordadas em capítulos subsequentes.

70.2 Estados limites

8 Estados limites representam limiares críticos que definem os limites entre desempenho estrutural aceitável e inaceitável. Dentro do quadro de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE), estados limites servem como referência essencial para avaliar respostas estruturais contra objetivos de desempenho pré-definidos.

9 Estados limites em PBEE fornecer limites quantitativos que correspondem a condições

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

específicas de danos ou níveis de desempenho. Esses estados estabelecem os critérios contra os quais parâmetros de demanda de engenharia (PED) são avaliados para determinar se uma estrutura cumpre seus objetivos de desempenho.

10 O conceito de estados limites transforma descrições qualitativas de danos em métricas quantitativas de decisão que permitem uma avaliação consistente e confiável do desempenho.

70.2.1 Hierarquia de Estados limites

11 PBEE tipicamente incorpora uma hierarquia de estados limites correspondente a níveis cada vez mais severos de danos estruturais e não estruturais:

1. **Operação Estado limite (OLS)**:. A estrutura continua totalmente funcional com danos insignificantes. Os serviços essenciais continuam sem interrupção, e não é necessário reparo. Isso corresponde à performance de ocupação imediata.
2. **Ocupação imediata Estado limite (IOLS)**:. Pequenos danos estruturais ocorrem, mas o prédio permanece seguro para ocupação imediata após a inspeção. Componentes não estruturais podem sofrer danos limitados, mas manter a funcionalidade.
3. **Segurança de vida Estado limite (LSLS)**:. Dano estrutural significativo ocorre, mas o edifício mantém resistência residual suficiente e rigidez para evitar colapso. Evacuação é necessária, e reparos são necessários antes da recuperação.
4. **Prevenção de colapso Estado limite (CPLS)**:. Graves danos estruturais se aproximam do limiar de colapso parcial ou completo. A estrutura pode não ser reparável, mas impediu a perda de vidas evitando o colapso.

70.2.2 Quadro Probabilístico

12 Dentro da metodologia moderna PBEE, estados limites são tratados probabilisticamente em vez de deterministicamente. Esta abordagem reconhece as incertezas inerentes na demanda sísmica, capacidade estrutural e avaliação de danos. Para cada estado limite, desenvolve-se uma função de fragilidade que expressa a probabilidade de exceder o estado limite em função de uma medida de intensidade (IM) ou parâmetro de demanda de engenharia (EDP).

13 A probabilidade de exceder um estado limite é tipicamente expressa como:

$$P(LS|EDP) = \Phi\left(\frac{\ln(EDP) - \ln(EDP_{median})}{\beta_{LS}}\right)$$

Onde:

- Φ é a função normal de distribuição cumulativa

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

- EDP_{median} é a capacidade mediana associada com o estado limite
- β_{LS} é o desvio padrão logarítmico que representa Região de Confiança

70.2.3 Implementação no Framework PBEE

14 Na estrutura PBEE desenvolvida pelo Pacífico Engenharia sísmica Centro de Pesquisa (PEER), estados limites conectar a análise estrutural da resposta às variáveis de decisão através de uma análise de danos. Isso cria um caminho de avaliação probabilístico completo:

1. **Análise de Riscos**:. Caracteriza o perigo sísmico em termos de medidas de intensidade
2. **Análise estrutural**:. Relaciona IMs aos parâmetros de demanda da engenharia (PED)
3. **Análise de Danos**:. Mapas de EDPs para medidas de danos (DMs) usando estados limites
4. **Análise de perdas**:. Traduz DMs em variáveis de decisão (DVs)

15 Estados limites são centrais para a fase de análise de danos, onde eles definem os limiares em que diferentes estados de dano ocorrem com base nos EDPs calculados.

70.2.4 Calibração e validação

16 Estabelecer o adequado estados limites requer calibração através de testes experimentais, observações de campo de terremotos passados, e julgamento especializado. Estados limites deve ser validado contra o desempenho do mundo real para garantir que eles representem com precisão os níveis de desempenho pretendidos. Este processo de calibração muitas vezes envolve:

- Testes laboratoriais de componentes e sistemas estruturais
- Análise de levantamentos de danos pós-terremoto
- Simulações numéricas usando modelos verificados
- Elicitação de especialistas e desenvolvimento de consensos

70.2.5 Considerações Multi-Objetivo

17 Aplicações modernas envolvem múltiplos estados limites abordando várias preocupações de desempenho:

- Dano do componente estrutural
- Dano de componentes não estruturais
- Dano do conteúdo
- Ruptura de funcionalidade

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Conserte custos e tempo
- Impactos ambientais

18 Esta abordagem multiobjetivo permite que os interessados tomem decisões informadas com base em uma compreensão abrangente do potencial desempenho sísmico em diferentes dimensões.

19 A definição e aplicação corretas de estados limites dentro da PBEE fornecem uma estrutura robusta para projetar estruturas que atendam objetivos específicos de desempenho sob vários níveis de risco sísmico, levando a edifícios mais resistentes e Infraestrutura.

70.2.6 Conexão com índices de danos

20 Embora estados limites definam os limiares críticos do desempenho estrutural, precisamos de métricas quantitativas para determinar quando esses limiares são ultrapassados. Aqui é onde os índices de danos se tornam essenciais. Eles fornecem as ferramentas matemáticas para medir e quantificar a extensão dos danos em relação aos estabelecidos estados limites.

21 Os índices de danos servem como instrumentos práticos de medição que permitem aos engenheiros avaliar se uma estrutura atingiu ou excedeu um determinado estado limite. Como exploraremos na próxima seção, esses índices variam de simples razões demanda-capacidade para funções probabilísticas complexas que respondem por danos acumulados ao longo do tempo. A integração dos índices de danos com estados limites cria uma estrutura abrangente para avaliação do desempenho que une limiares teóricos com respostas estruturais mensuráveis.

70.3 Índices de danos

*A*s partes desta seção são de (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

70.3.1 Índices de danos e critérios de desempenho

22 A *índice de desempenho* é uma medida numérica usada para quantificar danos, estabilidade ou resposta global de uma estrutura submetida a excitação sísmica. Esses índices estabelecem referências objetivas para segurança e manutenção, facilitam comparações entre alternativas de projeto ou estratégias de retroajuste, e permitem tomada de decisão informada do risco. Enquanto a seção anterior estabeleceu estados limites como limites de limiar, índices de danos fornecem as métricas quantitativas necessárias para determinar quando esses limites são cruzados.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

23 Para análise elástica linear, os índices comuns focam em critérios baseados em tensão e deformação, assumindo o comportamento do material elástico sem modelagem explícita de danos. O *relação de capacidade da demanda* Mede a proporção de induzidos tensão ou deformação para limites permissíveis, onde valores maiores do que unidade indicam superação de limiares aceitáveis. Além do critério baseado no padrão tensão, um critério alternativo baseado em deformação é proposto devido à triaxialidade dos tensores de tensão e deformação, dados por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

As taxas de capacidade de demanda correspondentes em termos de tensão e deformação são:

$$\begin{cases} \text{Stress-based} & \text{DCR}^{\sigma} = \frac{\sigma}{f_t'} \\ \text{Strain-based} & \text{DCR}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \end{cases}$$

Enquanto o DCR mede o pico de excedência, ele não captura duração ou extensão, o que requer índices adicionais.

24 O *Duração inelástica cumulativa* (CID) quantifica a duração total das excursões tensão ou deformação acima de um limite definido, indicando a extensão do estresse durante a excitação sísmica. Uma vez que a análise elástica linear não representa tensão redistribuição, uma única excedência não necessariamente leva à falha. Em vez disso, o CID rastreia a duração acumulada de excedência em dois níveis ($1{,}0 \leq \text{DCR} \leq 2.0$), efetivamente fornecendo uma medida de resistência estrutural sob carga cíclica.

25 O *Área inelástica cumulativa* (CIA) refinar CID incorporando a duração ea magnitude da excedência. Definida como a integral de tensão ou deformação excedência ao longo do tempo, CIA explica a gravidade dos eventos estressantes em vez de meramente sua ocorrência. Em avaliações baseadas em tensão, a CIA tem unidades de força por unidade de área multiplicada pelo tempo.

26 Outra métrica importante é o dano *Razão de distribuição espacial* (DSDR), que avalia a extensão da propagação de danos medindo a região super tensa ou sobrecarregada em relação à estrutura total. Ao contrário do CID e da CIA, que quantificam as excedências locais ao longo do tempo, o DSDR fornece uma medida espacial de potenciais zonas de falha.

27 Para análise sísmica não linear, índices são baseados em danos materiais, propagação de crack e dissipação de energia. A base de deformação *índice de danos* (DI^{def}) avalia a estabilidade com base no absoluto máximo deslocamento em pontos críticos, normalizados pelo rendimento e final deslocamento:

$$\text{DI}^{\text{def}} = \frac{|\Delta_{max}| - \Delta_y}{\Delta_u - \Delta_y}, \quad \Delta_y \leq |\Delta_{max}| \leq \Delta_u$$

Onde Δ_y e.. Δ_u representar o rendimento e final deslocamento, respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

28 O *Baseada em energia* índice de danos $(\text{DI})^{\text{energy}}$) rastreia dissipação cumulativa de energia devido a rachaduras e plasticidade:

$$\text{DI}^{\text{energy}} = \frac{\sum_{i=1}^{s} (E_H)_i}{(E_H)_u}$$

Onde $(E_H)_i$ é a energia dissipada por rachaduras individuais e $(E_H)_u$ é a capacidade total de dissipação de energia em colapso.

70.3.2 Transição para avaliação de danos probabilísticos

29 Enquanto os índices de danos determinísticos, como a relação Demanda-Capacidade (DRC), Duração Inelástica Cumulativa (DIC) e Área Inelástico Cumulativo (CIA) fornecem insights essenciais sobre o desempenho estrutural, eles não captam completamente as incertezas inerentes em carregamento sísmico e resposta estrutural.

30 Esses índices oferecem limiares discretos para avaliar danos, mas não têm a capacidade de quantificar a probabilidade de exceder um determinado estado de dano sob intensidade sísmica variável.

31 Na realidade, o perigo sísmico e a resposta estrutural são altamente incertos devido a fatores como variabilidade em características movimento do solo, propriedades do material e envelhecimento estrutural. Uma abordagem mais abrangente requer transição de índices determinísticos para *Avaliação de danos probabilísticos*, que permite a tomada de decisão informada do risco - complementando o quadro probabilístico para estados limites discutido na seção anterior.

32 O conceito fundamental na avaliação probabilística é o *curva de fragilidade*, que expressa o probabilidade de exceder um determinado estado de dano em função de uma medida de intensidade (IM), como aceleração do pico do solo (PGA) ou aceleração espectral (SA). Ao contrário de avaliações determinísticas que produzem um resultado binário passo / fracasso, curvas de fragilidade descrever o *verossimilhança* de diferentes níveis de danos que ocorrem em uma gama de intensidades sísmicas.

33 Para construir curvas de fragilidade, índices determinísticos como DCR, CID e CIA servem como o *parâmetros de demanda da engenharia (PED)* que definem vários limiares de danos. Ao realizar múltiplas simulações estruturais em vários cenários de terremotos, modelos estatísticos podem ser desenvolvidos para estimar a probabilidade de exceder cada limiar de dano. Esses limiares correspondem diretamente ao estados limites estabelecido para avaliação de desempenho.

34 Esta transição da avaliação determinística para a probabilística é essencial em Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE). Em vez de projetar estruturas para simplesmente cumprir limites predefinidos, engenheiros podem usar modelos probabilísticos para avaliar todo o espectro de riscos, permitindo estratégias mais resilientes e econômicas de mitigação sísmica.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

35 O próximo capítulo explorará como esses conceitos são integrados em *análise de perdas*, onde as métricas de danos probabilísticos são mais refinadas para estimar consequências econômicas e funcionais. Uma discussão mais detalhada sobre curvas de fragilidade, incluindo sua derivação e aplicações, é apresentada no capítulo 72.

70.3.3 Representação Probabilística de Danos

36 Em vez de tratar danos como um evento binário (seguro vs. Falhou), modelos PBEE danificam estados como distribuições de probabilidade contínuas. Isso explica incertezas inerentes à entrada sísmica e resposta estrutural, uma extensão direta do tratamento probabilístico de estados limites discutido anteriormente.

37 A probabilidade de exceder um dado estado de dano D_i para uma medida de intensidade dada movimento do solo IM (por exemplo, aceleração do pico do solo, aceleração espectral) é comumente expressa como:

$$P(D > D_i|IM) = \Phi\left(\frac{\ln IM - \ln IM_i}{\beta}\right)$$

onde:

- $\Phi(\cdot)$ é a função normal de distribuição cumulativa.
- IM_i é a medida de intensidade mediana em que o estado do dano D_i é excedido.
- β é o desvio padrão logarítmico, representando Região de Confiança no limiar de danos.

38 Esta formulação leva a *curvas de fragilidade*, que descrevem a probabilidade de atingir ou exceder um determinado estado de dano em função da intensidade sísmica. Cada curva corresponde tipicamente a um determinado estado limite identificado no quadro de avaliação do desempenho.

70.3.4 Métricas de Danos e Parâmetros da Demanda de Engenharia (PED)

39 Para quantificar os danos probabilisticamente, parâmetros de demanda de engenharia (PEDs) são usados como proxies mensuráveis para resposta estrutural. EDPs comuns incluem:

- **Rácio de deriva interstory (IDR):** Usado em edifícios para avaliar danos baseados em deformação.
- **Aceleração do pico de piso (PFA):** Crítico para avaliar danos não estruturais.
- **Pico força cortante (PSF):** Importante para estruturas dominadas por cisalhamento.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Cumulativo deslocamento demanda:** Usado em pontes e estruturas de arranha-céus para capturar degradação cíclica.

40 Esses EDPs servem como a ligação entre demanda sísmica e desempenho estrutural. Uma vez que uma distribuição EDP é obtida de análise dinâmica não linear, ela pode ser mapeada para os estados de dano correspondentes usando modelos empíricos ou analíticos. Este processo de mapeamento é o que conecta as respostas estruturais medidas ou calculadas ao estados limites definido no quadro de desempenho.

70.3.5 Região de Confiança Em Avaliação de Danos

41 A abordagem probabilística da modelagem de danos explica várias fontes de Região de Confiança:

1. **Perigo Sísmico Região de Confiança:** A variabilidade leva a diferenças na resposta estrutural.
2. **Variável Material e Construção:** Diferenças na resistência do concreto, propriedades de aço e capacidade de influência da mão de obra.
3. **Modelo Região de Confiança:** Diferentes técnicas de análise e suposições introduzem variações na resposta prevista.

42 Essas incertezas estão integradas em PBEE através de *Simulações de Monte Carlo*, atualização bayesiana, e calibração estatística de modelos de danos. Ao explicar explicitamente essas incertezas, o quadro fornece uma avaliação mais realista de quando diferentes estados limites podem ser excedidos.

70.3.6 métricas de danos quantitativos

Índice de danos (DI) é definido como uma função de uma ou mais variáveis de dano (DVs). É uma quantidade definida para zero na ausência de qualquer dano e unidade quando falha ou colapso ocorre, DI $\in [0, 1]$ (Hariri-Ardebili et al., 2016):

$$\mathrm{DI} = f\left(\mathrm{DV}_i\right) \ , \quad i = 1, \ldots, N$$

Onde n é o número de DVs contribuintes. Sim $n = 1$, é chamado de DI univariável e se $n > 1$, é um DI multivariável (Kappos, 1997). A forma mais popular para a evolução do índice de danos pode ser escrita como:

$$\mathrm{DI} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{L_i}}{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{U_i}} \right)^{\kappa_i}$$

Onde DV_{L_i} e.. DV_{U_i} são os limites inferiores e superiores (limiar) do i^{th} E o que é isso κ é um expoente relacionado com a taxa de mudanças no índice de danos em diferentes

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

estágios da variável dano. Esses limites inferiores e superiores muitas vezes correspondem diretamente a específicos estados limites no quadro PBEE, criando uma ligação crucial entre o conceito abstrato estado limite e o processo de avaliação quantitativa de danos. Figura 70.1 ilustra quatro modelos diferentes baseados na combinação de κ_i para um DI hipotético com dois DVs.

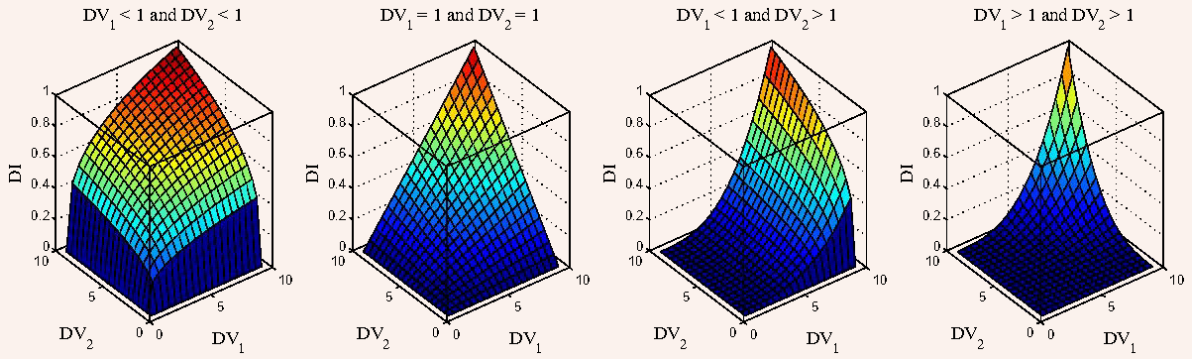


Figura 70.1: Relacionamentos entre um DI e dois DVs (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

Os índices de danos podem ser classificados com base em diferentes aplicações (Hariri-Ardebili e Saouma, 2015):

- *Local* vs. *Global*:. DI local é um indicador de danos em um elemento, membro ou parte limitada da estrutura. O DI global, por outro lado, captura o estado de dano em um todo. O DI global pode ser calculado por soma ponderada dos DI locais.
- *Uma única variável* vs. *Multi-variável*:. O DI pode ser calculado a partir de uma única variável ou de uma combinação de várias. Geralmente, a DI combinada leva em conta parâmetros diferentes e fornece um indicador mais abrangente do progresso dos danos.
- *Cumulativo* vs. *Não-acumulado*:. Um DI cumulativo é capaz de capturar o acúmulo do dano durante a análise transitória, enquanto que um não acumulador só pode capturar o estado final.
- *Determinista* vs. *Estocástico*:. Como todos os materiais são heterogêneos, o DI pode ou não capturar essa heterogeneidade através de expressões estocásticas ou determinísticas.
- *Índice de danos* vs. *Espectro de danos*:. Espectro de danos representa variação do índice de dano versus o período estrutural para uma série de sistemas de liberdade de grau único submetidos a um registro movimento do solo (Bozorgnia e Bertero, 2003).
- *Estrutural* vs. *Economico*:. DI estrutural capta os danos em termos de parâmetros estruturais. Por outro lado, um DI econômico introduziria conceitos de custo como a relação do custo de reparo com o correspondente custo de substituição.

43 Estas classificações de índices de danos fornecem ferramentas flexíveis para os en-

CÓPIA PARA REVISÃO

genheiros avaliarem o desempenho estrutural contra o estados limites estabelecido na estrutura PBEE. Selecionando índices apropriados com base nos requisitos específicos da avaliação, os engenheiros podem desenvolver avaliações abrangentes que conectem medições quantitativas a objetivos de desempenho qualitativo.

44 A classificação e quantificação de danos através de vários índices fornece a base técnica para implementar abordagens baseadas em desempenho para design sísmico e avaliação. Essas métricas de danos servem como a ligação quantitativa entre análise de engenharia e objetivos de desempenho estabelecidos pelas partes interessadas.

45 À medida que passamos da quantificação de danos para a avaliação do desempenho, devemos colocar esses conceitos técnicos em um quadro mais amplo de engenharia baseada no desempenho que aborda não só segurança estrutural, mas também funcionalidade, considerações econômicas, e Expectativas sociais.

70.4 Desempenhos

46 Abordagens baseadas no desempenho representam o culminar de nossa compreensão do perigo sísmico, resposta estrutural e avaliação de danos. Dentro deste contexto mais amplo, os índices de danos e estados limites previamente discutidos fornecem os meios técnicos para quantificar e avaliar o desempenho estrutural, como ilustrado na figura 1. 70.2.

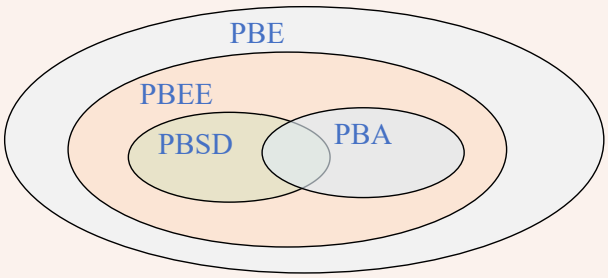


Figura 70.2: PBEE: A Grande Imagem

70.4.1 Estrutura de Engenharia Baseada em Desempenho

47 Engenharia Baseada em Desempenho (PBE) engloba a seleção de critérios de projeto, sistemas estruturais, layout, dimensionamento e detalhamento para uma estrutura e seus componentes e conteúdos não estruturais. Este processo garante qualidade de construção e gerencia manutenção a longo prazo. O objetivo principal do PBE é garantir, dentro de níveis especificados de confiabilidade, que a estrutura ou instalação não suportará danos além dos pré-definidos estados limites sob níveis previstos de excitação.

CÓPIA PARA REVISÃO

48 A PBE integra várias disciplinas, incluindo engenharia estrutural, ciência de materiais e avaliação de risco, para abordar objetivos de desempenho abrangentemente. Envolve avaliações iterativas para refinar as escolhas de design e garantir o cumprimento dos objetivos de desempenho. Este processo abrangente começa com o conceito inicial do projeto e se estende ao longo do ciclo de vida da estrutura, incluindo sua operação, manutenção e eventual desmantelamento (Bertero e Bertero, 2002).

49 No contexto de engenharia sísmica, PBE se manifesta em várias abordagens complementares:

- **Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE)** aplica os princípios da PBE em cenários onde os riscos sísmicos dominam considerações de design. PBEE aborda todo o ciclo de vida de uma estrutura, garantindo que possa suportar movimentos terra terremoto de intensidades variáveis sem exceder os limiares de danos especificados (Bertero e Bertero, 2002).

  PBEE incorpora:

  - Análise de risco sísmico detalhada para definir características.
  - Integração de critérios de desempenho estrutural com avaliações probabilísticas de risco.
  - Ênfase na funcionalidade imediata e resiliência a longo prazo.

- **Design Sésmico Baseado em Desempenho (PBSD)** é um subconjunto de atividades PBEE focadas explicitamente na fase de design. Inclui uma abordagem estruturada para incorporar resiliência sísmica através de (Bertero e Bertero, 2002):

  - Identificação e quantificação de perigos sísmicos usando dados específicos do local.
  - Seleção de níveis de desempenho e objetivos de design.
  - Avaliação das condições do local para adequação e riscos potenciais.
  - Desenvolvimento de projetos conceituais que se alinham com objetivos de desempenho.
  - Modelos e simulações numéricas para verificação preliminar e final do projeto.
  - Cheques abrangentes de aceitabilidade e avaliações interpares.
  - Especificação dos procedimentos de garantia da qualidade da construção.
  - Monitoramento pós-construção para garantir o cumprimento dos objetivos de desempenho.

- **Avaliação baseada no desempenho (PBA)** é a aplicação de princípios PBEE para avaliar quantitativamente o desempenho sísmico das estruturas existentes ou projetos recém-completados. O PBA fornece aos stakeholders informações probabilísticas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

sobre a resposta de uma estrutura a eventos sísmicos, permitindo tomada de decisão informada para o gerenciamento de riscos (Zareian e Krawinkler, 2009).

PBA envolve:

- Modelagem analítica e simulação para prever comportamento estrutural.
- Avaliação de estruturas existentes para identificar vulnerabilidades.
- Avaliação probabilística de risco para estimar a probabilidade e as consequências dos danos.
- Desenvolvimento de estratégias para mitigar riscos identificados.
- Apresentação de resultados em termos claros para ajudar os interessados na compreensão e gestão dos riscos efetivamente.

70.4.2 Níveis de Desempenho e Critérios de Aceitação

50 PBEE procura primeiro identificar níveis discretos de desempenho para os principais componentes estruturais que afetam significativamente a função de construção e segurança. Esses níveis de desempenho fornecem uma forma padronizada de comunicar o comportamento antecipado das estruturas sob diferentes intensidades sísmicas e se conectar diretamente ao estados limites e índices de danos discutidos em seções anteriores.

51 ASCE 41 (ASCE 2007) e outros códigos geralmente fornecem orientação para três níveis de desempenho primário (Tabela 72.1):

- **Ocupação imediata**:. Um comportamento essencialmente elástico é procurado por limitar os danos estruturais (por exemplo, produção de aço, rachadura significativa do concreto) e danos não estruturais.
- **Segurança de vida**:. Limitar danos estruturais e não estruturais para minimizar o risco de lesões ou baixas e manter vias de circulação essenciais acessíveis.
- **Prevenção de colapso**:. Assegure um pequeno risco de colapso parcial ou completo da construção, limitando deformações estruturais e forças ao início de resistência significativa e degradação rigidez.

52 FEMA 356 (FEMA-356, 2000) define vários níveis de desempenho do edifício alvo e níveis de risco de terremotos semelhantes aos apresentados em outras estruturas. Os níveis de desempenho e as descrições dos danos físicos correspondentes são mostrados na tabela 72.1, que fornece uma descrição qualitativa de danos tanto em componentes estruturais quanto não estruturais.

53 Uma estrutura influente para o design sísmico baseado em performance foi fornecida pela Associação de Engenheiros Estruturais da Califórnia (SEAOC) Documento Visão 2000. Estabeleceu quatro níveis de desempenho discretos: 1) totalmente operacional, 2) operacional, 3) segurança de vida, e 4) quase colapso, cada um representando uma

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

faixa distinta no espectro de danos aos componentes estruturais e não estruturais e as consequências resultantes para ocupantes e função da instalação (SEAOC, 1995).

54 A estrutura da SEAOC também descreveu vários níveis de risco baseados na probabilidade de excedência:

- Nível de intensidade frequente: 50% Probabilidade de superação em 30 anos
- Nível de intensidade ocasional: 50% Probabilidade de superação em 50 anos
- Nível de intensidade raro: 10% Probabilidade de superação em 50 anos
- Nível de intensidade muito raro: 10% Probabilidade de superação em 100 anos

55 A integração dos níveis de desempenho com os níveis de risco cria objetivos de desempenho que variam com base na importância da instalação, como ilustrado na Figura 70.3.. As linhas diagonais representam diferentes objetivos correspondentes a diferentes tipos de instalações, com instalações mais críticas esperadas para manter níveis de desempenho mais altos mesmo sob eventos sísmicos graves.

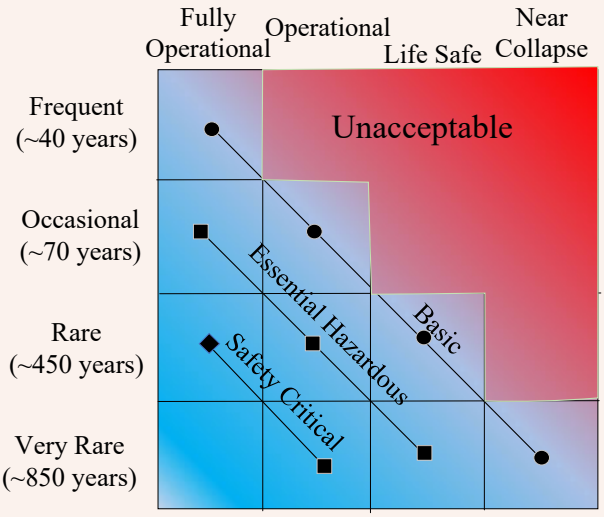


Figura 70.3: Objetivos de desempenho sísmico mínimos recomendados para edifícios (Porter, 2003)

70.4.3 Integrando Estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho

56 Estabelecer relações quantitativas entre estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho é essencial para a implementação prática do PBEE. Mesas 70.1 e.. 70.2 apresentar limiares estabelecidos de fontes autoritárias que podem ser usadas para avaliar o desempenho estrutural.

CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela 70.1: Razões de deriva interstory permitidas (IDR) para vários níveis de desempenho de acordo com ASCE 41-17

Sistema Estrutural	Ocupação imediata	Segurança de vida	Prevenção de colapso
Momento	0.7%	2.5%	5.0%
Momento	1.0%	2.0%	4.0%
Braced Pórticos	0.5%	1.5%	2.0%
Paredes de concreto	0.5%	1.0%	2.0%
Paredes de alvenaria	0.3%	0.6%	1.0%

57 Estes limites de deriva da ASCE 41-17 (Civil Engineers, 2017) fornecer uma correlação direta entre parâmetros de demanda mensuráveis e níveis de desempenho esperados. Os limites variam de acordo com o sistema estrutural, reconhecendo as diferentes capacidades de deformação de vários tipos de construção.

Tabela 70.2: Limiares do Índice de Danos e Estados Estruturais correspondentes

Índice de Danos	Estado de Danos	Descrição
DI < 0.1	Menor	Nenhum dano significativo. A resposta elástica predomina
0.1 ≤ DI < 0.25	Leve	Fractura menor; Rendimento limitado possível
0.25 ≤ DI < 0.4	Moderado	Que rachadura significativa. Alguns locais cedendo; capacidade não afetada
0.4 ≤ DI < 0.8	Grave	Quebraduras extensas; Rendimento generalizado; redução significativa da capacidade
0.8 ≤ DI < 1.0	Recolher	Danos extensos. pouca resistência residual ou rigidez
DI ≥ 1.0	Demolido	Falha total. Sem capacidade residual

58 Os limiares do índice de danos na tabela 70.2 são baseados no Parque & Modelo de danos Ang (Park e Ang, 1985), que foi amplamente validado através de testes experimentais e investigações pós-terremoto. Este modelo combina deformação máxima e dissipação de energia histerética para avaliar danos cumulativos. Williams, Villemure e Sexsmith, 1997 estabeleceu correlações entre esses valores do índice de danos e observou desempenho em estruturas após grandes terremotos.

59 Para avaliações determinísticas sísmicas, as razões demanda-capacidade (DRC) fornecem outra medida quantitativa relacionada aos níveis de desempenho. Mesa 70.3 apresenta limiares de DCR das diretrizes da FEMA.

60 Esses limiares DCR da FEMA 356 (FEMA-356, 2000) Fornecer um método de avaliação simples para o desempenho dos componentes. Embora simplificado em comparação com

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 70.3: Limites de demanda para capacidade (DRC) segundo FEMA 356

DCR Range	Nível de desempenho	Comportamento esperado
DCR < 1.0	Ocupação imediata	O componente permanece essencialmente elástico; Dano negligenciável
1.0 ≤ DCR < 2.0	Segurança de vida	Os danos ocorrem mas a estrutura mantém margem de segurança contra o colapso
2.0 ≤ DCR < 3.0	Prevenção de colapso	Dano significativo com capacidade restante limitada; perto do colapso
DCR ≥ 3.0	Além do PC	O componente falhou. Sem capacidade restante

modelos de danos mais abrangentes, os valores do DCR oferecem critérios práticos para o projeto e avaliação de estruturas.

61 A integração dessas diferentes métricas, limites de deriva, índices de danos e relação demanda-capacidade, fornece aos engenheiros uma estrutura abrangente para avaliar o desempenho estrutural contra a estabelecida estados limites. Ao correlacionar os resultados analíticos com esses limiares, engenheiros podem traduzir respostas estruturais complexas em avaliações significativas de desempenho que se alinham com as expectativas dos stakeholders e requisitos de código.

62 É importante notar que, embora esses limiares forneçam orientação geral, condições específicas do local, peculiaridades estruturais e requisitos especiais de ocupação podem exigir modificações nesses valores. O julgamento profissional continua sendo essencial na interpretação e aplicação desses critérios dentro do contexto mais amplo de design e avaliação baseado em desempenho.

63 Esta abordagem integrada permite aos engenheiros traduzir resultados analíticos (índices de danos e EDPs) em avaliações significativas de desempenho que podem ser comunicadas às partes interessadas. Ao estabelecer essas relações, PBEE une o fosso entre análise técnica e tomada de decisão prática.

70.5 Transição para Curvas de fragilidade e avaliação de risco

64 Com estados limites, índices de danos, e níveis de desempenho agora claramente definidos e integrados, o próximo passo é desenvolver *curvas de fragilidade*, que quantificam a probabilidade de exceder estados de dano específicos ou níveis de desempenho em

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

função da intensidade sísmica. Essas curvas, discutidas no Capítulo 72, servir como base para avaliação de risco, estimativa de perdas e tomada de decisão em PBEE.

65 Curvas de fragilidade representam o culminar de nossa compreensão dos perigos sísmicos, resposta estrutural, mecanismos de danos e expectativas de desempenho. Eles transformam métricas de engenharia determinísticas em avaliações probabilísticas de risco que explicam as incertezas inerentes em engenharia sísmica e permitem que os interessados tomem decisões informadas com base em níveis de risco quantificáveis.



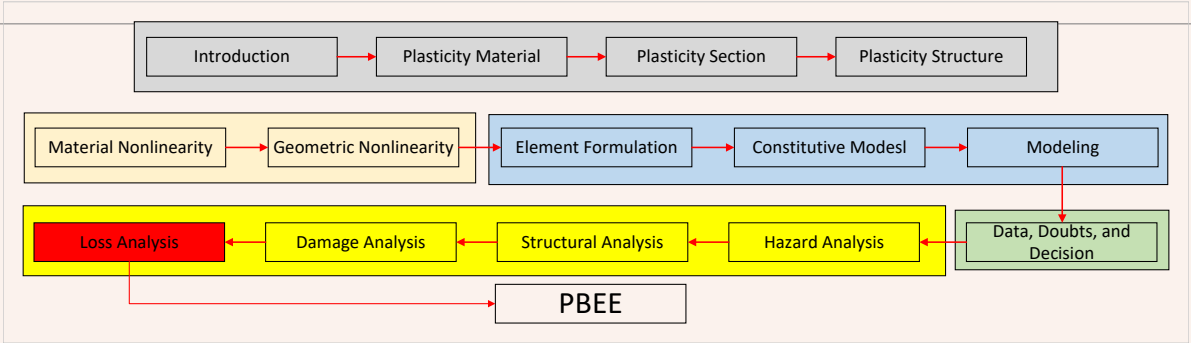
CÓPIA PARA REVISÃO

Capítulo 71

Análise de perdas

Abstract

Análise de perdas em Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) quantifica os impactos econômicos e sociais dos danos sísmicos, incluindo custos de reparo, inatividade e baixas. Usando modelos probabilísticos, funções de fragilidade e funções de consequência, estende a avaliação de risco além da segurança estrutural. O capítulo também examina efeitos em cascata e incertezas socioeconômicas, destacando seu papel no planejamento da resiliência. Integrar análise de perdas na PBEE permite tomar decisões informadas de risco, equilibrar segurança, custo e bem-estar social.



1 Análise de perdas é um componente fundamental de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) e desempenha um papel crítico na avaliação das consequências econômicas e sociais dos danos causados pelo terremoto.

2 Ao contrário das abordagens de design tradicionais que se concentram apenas na segurança estrutural, a PBEE visa quantificar os custos financeiros, o tempo de inatividade funcional e as consequências humanas associadas com eventos sísmicos. Ao fazê-lo, permite engenheiros, formuladores de políticas e stakeholders tomar decisões informadas sobre estratégias de resiliência, apólices de seguros e medidas de mitigação.

CÓPIA PARA REVISÃO

3 O núcleo de análise de perdas está na estimativa dos custos de reparo, inatividade e baixas.

4 Os custos de reparo abrangem os recursos financeiros necessários para restaurar uma estrutura ao seu estado pré-terremoto. Estes custos dependem da extensão dos danos estruturais e não estruturais, bem como da disponibilidade de mão-de-obra e materiais.

5 Tempo de parada refere-se ao período durante o qual uma instalação permanece não operacional devido a danos causados por terremotos, afetando não só empresas e instituições, mas também serviços essenciais como hospitais e centros de resposta às emergências. Em alguns casos, o tempo de inatividade funcional pode ter um impacto maior do que os custos diretos de reparo, particularmente para infraestrutura crítica.

6 As baixas, incluindo ferimentos e mortes, são outro aspecto significativo de análise de perdas, pois falhas estruturais e quedas de detritos representam sérios riscos para a vida humana.

7 Quantificar perdas requer uma combinação de modelos probabilísticos, funções de fragilidade e funções de consequência.

8 Modelos probabilísticos integram avaliações de risco sísmico com dados estruturais de desempenho para estimar a probabilidade de diferentes níveis de danos.

9 Funções de fragilidade definem a probabilidade de uma estrutura atingir um estado particular de dano dado um nível específico de tremor no solo.

10 Funções de consequência traduzem esses estados de danos em perdas quantificáveis, tais como custos de reparo e estimativas do tempo de inatividade. Juntos, esses métodos permitem uma avaliação abrangente do risco sísmico que se estende além do desempenho estrutural sozinho.

11 Análise de perdas é ainda mais complicado por incertezas em fatores socioeconômicos. As incertezas socioeconômicas incluem flutuar os custos do trabalho, escassez de materiais e diferenças nos esforços de recuperação entre as regiões. Abordar essas incertezas requer abordagens estatísticas avançadas, incluindo simulações de Monte Carlo e métodos de inferência bayesiana, para refinar estimativas de perdas e melhorar a tomada de decisão.

12 Um dos aspectos críticos de análise de perdas é entender os efeitos em cascata de danos sísmicos. Por exemplo, a falha de uma ponte crítica pode interromper as redes de transporte, retardando os esforços de resposta às emergências e aumentando as perdas econômicas.

13 Da mesma forma, danos às instalações industriais podem levar a derrames de materiais perigosos, amplificando o impacto do desastre. Ao contabilizar esses efeitos em cascata, a PBEE fornece uma visão mais abrangente da resiliência do terremoto e orienta investimentos em infraestrutura que minimizam perdas indiretas.

14 A implementação de análise de perdas em PBEE tem implicações significativas para o planejamento da resiliência. Os tomadores de decisão podem usar essas análises para determinar se investir em padrões de design sísmico mais elevados é economicamente

CÓPIA PARA REVISÃO

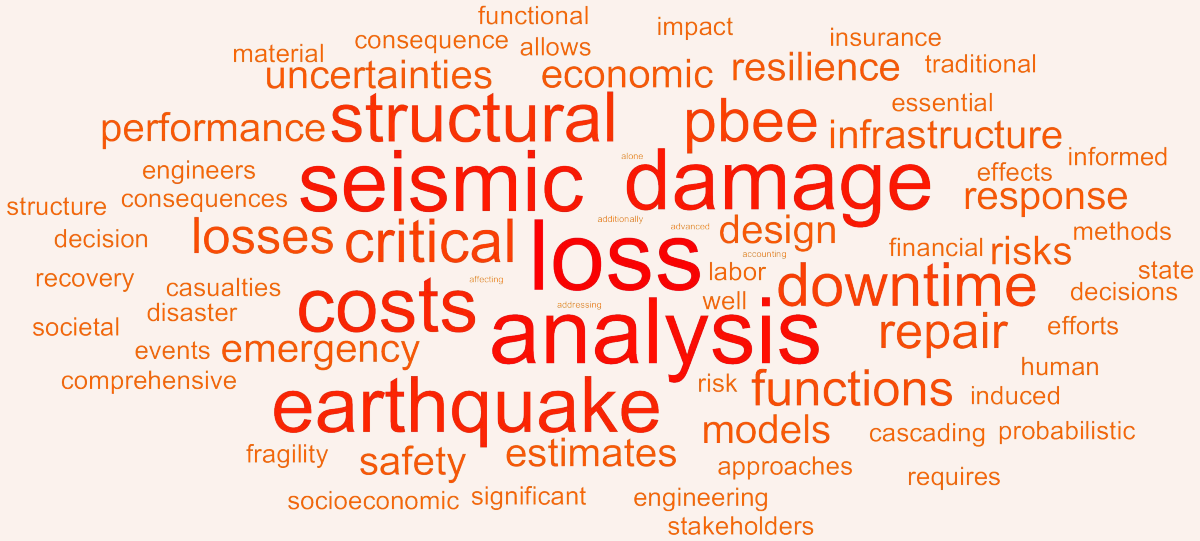
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

justificado ou se as estruturas existentes reforço forneceriam um meio econômico de reduzir riscos a longo prazo.

15 Além disso, estimativas de perdas informam o desenvolvimento de modelos de seguro e planos de preparação para desastres, ajudando as comunidades a se recuperarem mais eficientemente após um terremoto. Governos e partes interessadas do setor privado podem alavancar esses insights para priorizar o financiamento de melhorias sísmicas e infraestrutura de resposta de emergência, garantindo uma recuperação mais robusta e sustentável.

16 Ao integrar análise de perdas na estrutura PBEE, engenheiros e planejadores podem ir além das métricas de segurança tradicionais e considerar os impactos mais amplos dos eventos sísmicos. Esta mudança é essencial para o moderno engenharia sísmica, pois permite decisões de projeto informadas pelo risco que equilibrem segurança, viabilidade econômica e bem-estar social.

17 Além disso, à medida que a urbanização global aumenta e os riscos sísmicos se tornam mais prementes, as metodologias de refino análise de perdas serão críticas na formação de cidades resilientes capazes de suportar futuros desastres.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Capítulo 72

Avaliação de Risco Probabilística (⊇ PBEE)[1]

Abstract

Este capítulo apresenta a Avaliação de Risco Probabilística (ARP) como um quadro abrangente que engloba e amplia os princípios de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE).

Servindo como o topo conceitual de nosso desenvolvimento ascendente da PBEE, ele destaca como a avaliação de risco integra riscos sísmicos, resposta estrutural, danos e perda em uma metodologia probabilística unificada. A evolução do projeto prescritivo aproxima-se de PBEE-1 e PBEE-2 é rastreada, incluindo suas respectivas forças e limitações.

Curvas de fragilidade são introduzidos como ferramentas essenciais dentro deste quadro, fornecendo a ligação probabilística entre parâmetros de demanda de engenharia e medidas de danos, e permitindo a quantificação de Região de Confiança em desempenho estrutural e não estrutural.

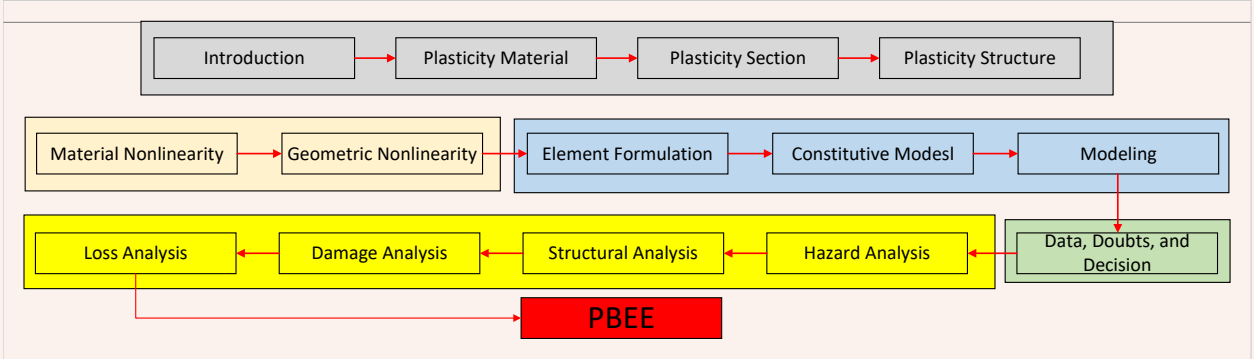
72.1 Novos Paradigmas: Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) 2377
72.1.1 Limitações de carga e fator de resistência projeto (LRFD) 2377
72.1.2 Parte I: Objetivos explícitos de desempenho 2378
72.1.3 Parte II: Quantificação direta das consequências funcionais e econômicas: 2380
72.1.4 Procedimento para implementação do PBEE 2385
72.2 Da resposta aos danos: Curvas de fragilidade 2386
72.2.1 Fundamentos e Definições . 2387
72.2.2 Desenvolvendo Curvas de fragilidade 2388
72.2.3 Representações matemáticas 2388
72.2.4 Função contínua *vs.* Matriz Discreta 2389
72.3 Papel no Framework PBEE 2391
72.4 Ex 72.1: Exemplo completo de PBEE 2392
72.5 Marcos históricos e documentos fundamentais 2397

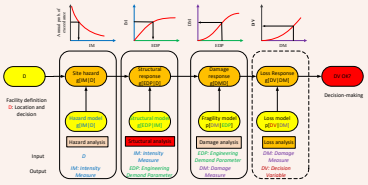
APÊNDICES

Parte 1: Materiais Fundamentais de Referência

[1] O símbolo ⊇ indica que a Avaliação de Risco Probabilística é tratada como um super conjunto de Engenharia sísmica baseada em desempenho.

CÓPIA PARA REVISÃO





72.1 Novos Paradigmas: Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE)

72.1.1 Limitações de carga e fator de resistência projeto (LRFD)

1 Este capítulo começa revisitando as ideias fundamentais introduzidas no *Intermezzo* (chapter 66) para destacar as limitações das filosofias de design tradicionais.

2 Design de Factores de Carga e Resistência (LRFD), discutido em §36.3, é amplamente utilizado na engenharia estrutural, particularmente para o aço e concreto projeto. Enquanto LRFD incorpora conceitos probabilísticos para dar conta de incertezas em cargas e propriedades materiais, apresenta várias limitações que motivam a mudança para PBEE:

Verificação de Segurança em Nível Único: LRFD garante segurança estrutural sob cargas predefinidas, mas não aborda objetivos de desempenho mais amplos como reparação pós-terremoto, tempo de inatividade funcional ou resiliência.

Falta de consideração explícita sobre danos: A LRFD está focada na prevenção de colapso sob o máximo estados limites, sem quantificar os danos esperados em diferentes intensidades de terremoto. Como resultado, estruturas podem sobreviver mas sofrer danos extensos e incorrer em altos custos de reparo.

Inflexibilidade para cenários complexos de carregamento: A LRFD se baseia em combinações lineares de cargas e fatores fixos, limitando sua capacidade de lidar com comportamento não linear, degradação e dano cumulativo sob carga sísmica dinâmica.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Margens de segurança uniformes: A LRFD aplica fatores genéricos de segurança, independentemente do tipo de ocupação ou risco sísmico específico. Assim, instalações críticas e edifícios comuns são frequentemente projetados para os mesmos níveis de segurança, independentemente das diferentes consequências sociais do fracasso.

Sem integração com o "Site-Especific Hazard". LRFD não incorpora Probabilistic Seismic Hazard Analysis (PSHA), negligenciando assim a variabilidade e Região de Confiança inerente a movimentos de terra em locais específicos.

[3] Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) foi desenvolvido para superar as limitações de abordagens prescritivas, baseadas em código. Ele introduz uma estrutura informada de risco que avalia explicitamente o desempenho estrutural através de múltiplas intensidades sísmicas.

72.1.2 Parte I: Objetivos explícitos de desempenho

72.1.2.1 Método

[4] Para lidar com as limitações mencionadas anteriormente, a primeira geração de PBEE introduziu objetivos discretos de desempenho para edifícios submetidos a demandas sísmicas (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a), Fig. 72.2,

- *Operário (O):* Nenhum dano significativo. A estrutura continua totalmente funcional.
- *Ocupação imediata (IO):* Pequeno dano. O prédio é seguro e reparável.
- *Segurança de Vida (LS):* Dano moderado. A estrutura é reparável, mas não funcional sem intervenção.
- *Prevenção de colapso (CP):* Dano grave. A construção evita o colapso global, mas pode estar quase falhando.

[5] Este quadro conceitual está ilustrado na Figura 72.1 e mais resumido na tabela 72.1 (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003).

72.1.2.2 Limitações de PBEE-1

[6] Apesar de suas inovações, PBEE-1 tinha várias falhas:

- *Avaliação baseada em componentes:* O desempenho foi avaliado com base em limites de componentes individuais ao invés de comportamento do sistema.
- *Critérios de Aceitação Subjetiva:* Muitos limiares de desempenho foram baseados em julgamentos especializados, sem validação experimental robusta.
- *Foco Não Estrutural Inadequado:* Procedimentos largamente ignorados danos não estruturais, apesar de seu impacto significativo em perdas e funcionalidade.
- *Resultados não verificados e conservadorismo:* Previsões de desempenho não foram rigorosamente validadas, muitas vezes levando a desenhos conservadores.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

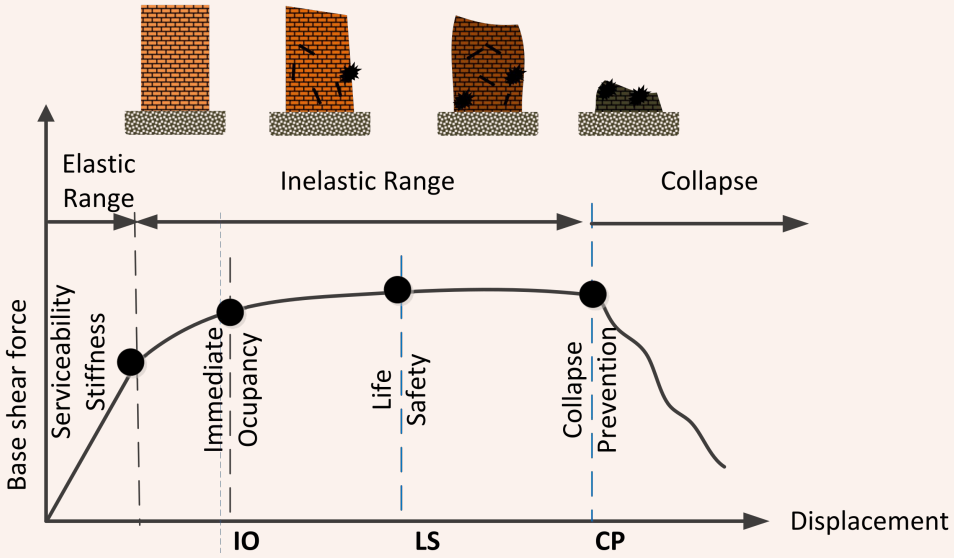


Figura 72.1: Descrição conceitual da primeira geração de PBEE; (Whittaker03, Hamburger e Mahoney, 2003)

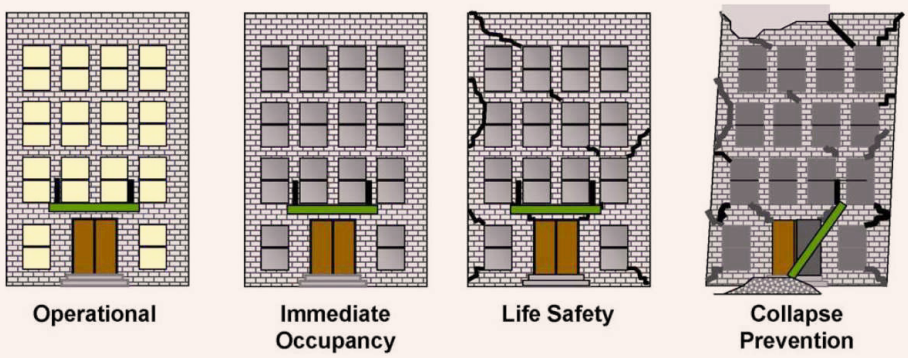


Figura 72.2: Ilustrações discretas de níveis de desempenho, (FEMA, 2012)

- *Interligar stakeholder:* O framework não abordou prioridades de stakeholders, como custos de reparo, inatividade ou continuidade de negócios.
- *Potencial para Responsabilidade:* Desentendimentos de metas de desempenho como garantia de riscos legais aos engenheiros expostos.

7 Essas limitações motivaram o desenvolvimento de um quadro mais abrangente - PBEE-2.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 72.1: A gama de danos de componentes estruturais e não estruturais para vários níveis de desempenho do edifício alvo (Tabela C1-2) (FEMA-356, 2000)

Níveis de desempenho	**Prevenção de colapso**	**Segurança de vida**	**Ocupação imediata**	**Operação**
Dano total	**Grave**	**Moderado**	**Luz**	**Muito leve**
Componentes estruturais	Pouco residual rigidez e força, mas carga-porta pilares e as paredes funcionam. Grandes derivas permanentes. Algumas saídas bloqueadas. Infilts e parapeitos não travados falharam ou falharam incipientemente. O prédio está perto do colapso.	Alguma força residual e rigidez deixada em todas as histórias. Os elementos de carga-gravidade funcionam. Não há falha de paredes fora do avião ou derrubamento de parapeitos. Algum desvio permanente. Danos nas divisórias. O prédio pode estar além de reparo econômico.	Sem deriva permanente. A estrutura retém substancialmente a força original e rigidez. Pequenas rachaduras de fachadas, divisórias, tetos e elementos estruturais. Elevadores podem ser reiniciados. Proteção contra incêndio operada.	Sem deriva permanente. A estrutura retém substancialmente a força original e rigidez. Pequenas rachaduras de fachadas, divisórias, tetos e elementos estruturais. Todos os sistemas importantes para a operação normal são funcionais.
Componentes não estruturais	Danos extensos.	Riscos de queda atenuados, mas muitos sistemas arquitetônicos, mecânicos e elétricos estão danificados.	O equipamento e o conteúdo são geralmente seguros, mas podem não funcionar devido à falha mecânica ou falta de utilidades.	Dano negligenciável ocorre. Energia e outros utilitários estão disponíveis, possivelmente de fontes de espera.

72.1.2.3 Design vs. Análise

8 Assim como a engenharia estrutural§36.1.1) distingue entre design e análise, PBEE expande esta dicotomia:

Design Sésmico Baseado em Performance (PBSD): Projeto de novas estruturas para atender alvos específicos sob carga sísmica.

Avaliação baseada em desempenho (PBA): Avaliação quantitativa do desempenho de uma estrutura, aplicável tanto a edifícios existentes quanto novos.

72.1.3 Parte II: Quantificação direta das consequências funcionais e econômicas:

72.1.3.1 Introdução

9 PBEE implica design, avaliação e construção de instalações projetadas cujo desempenho sob cargas comuns e extremas responde às diversas necessidades e objetivos dos proprietários, usuários e sociedade.

10 Em 1997, o Centro de Pesquisa do Pacífico Engenharia sísmica (PEER) decidiu desenvolver uma metodologia mais robusta para engenharia sísmica baseada em desempenho, chamada de próxima geração PBEE (também chamado PBEE-2 ou PEERPBEE). A estrutura PEER PBEE desenvolvida pela PEER facilita Cálculo direto dos efeitos de Região de Confiança e aleatoriedade em cada passo no procedimento baseado na performance.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

11 Mais especificamente:

- Design sísmico baseado em desempenho avalia explicitamente como *O* prédio é capaz de se apresentar, dado o potencial *O* perigo é provável que ele experimente, considerando incertezas inerentes à quantificação de potenciais perigos e incertezas na avaliação da resposta real do edifício.
- Contrariamente ao LRFD, ele faz *N*ão se limita a um nível de perigo, mas múltiplos.
- O desempenho é medido em termos da probabilidade de incorrer *p*erdas, reparos e custos de reposição, tempo de reparação, e placas inseguras.
- O desempenho pode ser avaliado para um *C*enário ou intensidade do terremoto em particular, ou considerando todos os terremotos que poderiam ocorrer, e a probabilidade de cada um, durante um determinado período de tempo.
- Desempenho expresso em termos de uma série de níveis discretos de desempenho identificados como *O*perações, Ocupação Imediata, Segurança de Vida e Prevenção de Colapso.
- Introduziu o conceito de *D*esempenho relacionado a danos tanto estruturais quanto não estruturais.. Objetivos de desempenho foram desenvolvidos ligando um desses níveis de desempenho a um nível específico de risco de terremoto.
- É o *e*stado da prática entre empresas de alto nível. Está bem estabelecido
- No entanto:
  - Estados limites são *C*om base em componentes não realmente de todo o sistema*E* se um componente falhar, ele causa colapso progressivo
  - Trata apenas o evento MCE (2%- 50 anos.
  - Tratamento limitado de Região de Confiança e probabilidade.
  - Informação limitada para projetar o código acima.

72.1.3.2 Quadro geral

12 O quadro geral para PEER PBEE é mostrado na Figura 72.3.. Quebra a avaliação de desempenho sísmico em quatro etapas primárias, Fig. 72.3:

1. *Análise de Risco:* Quantifica a probabilidade de experimentar diferentes níveis de tremor no solo em um determinado local usando *Análise Probabilística de Risco Sísmico* (PSHA), chapter 67.
2. *Análise estrutural:* Avalie a resposta estrutural às cargas sísmicas, incorporando *Análise dinâmica não linear* e parâmetros de demanda de engenharia (PEDs), chapter 69.
3. *Análise de Danos:* Usa parâmetros de resposta para estimar danos físicos *Componentes estruturais e não estruturais*, chapter 70.
4. *Análise de perdas:* Traduz danos para *Perdas econômicas, inatividade e estimativas de baixas*, permitindo a tomada de decisão baseada em custos, chapter 71.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

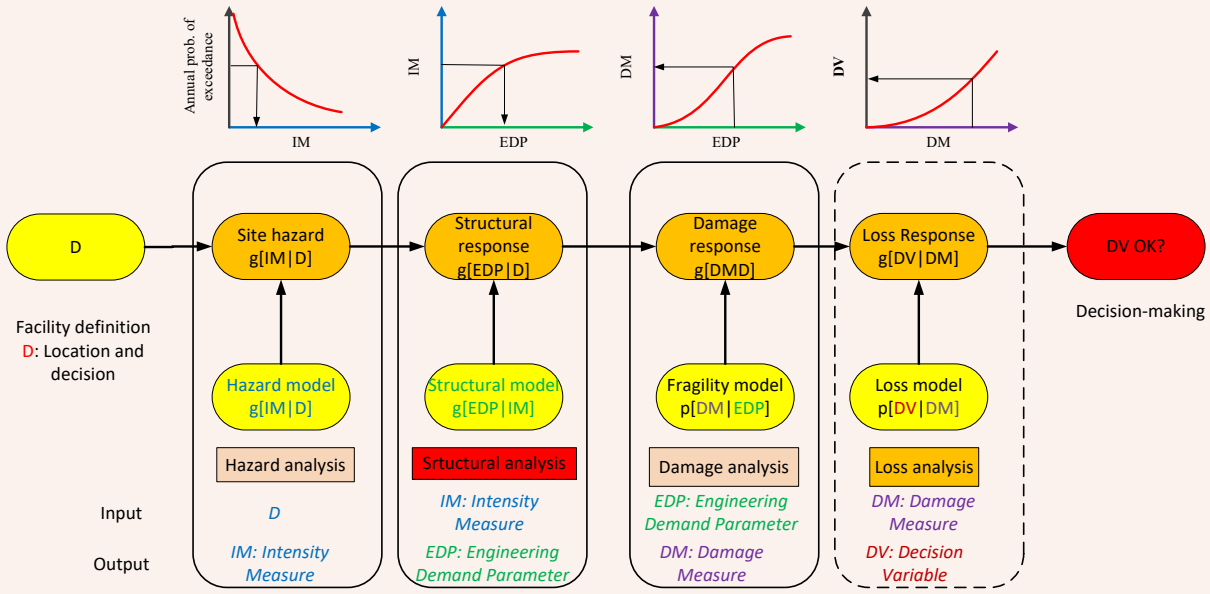


Figura 72.3: Quatro componentes de PBEE

13 Os resultados de cada uma dessas etapas são representados como variáveis generalizadas: Medida de Intensidade (IM), Parâmetro da Demanda de Engenharia (EDP), Medida dos Danos (DM) e Variável da Decisão (DV). Este processo pode ser expresso em termos de uma integral tripla que é uma aplicação do teorema da probabilidade total (Porter, 2003): índice[p2]Dano! Medir índice[p2]Variável decisão

$$g\,[\mathrm{DV}|\mathrm{D}] \;=\; \int\int\int p\,[\mathrm{DV}|\mathrm{DM},\mathrm{D}]\,p\,[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP},\mathrm{D}] \\ p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM},\mathrm{D}]\,g\,[\mathrm{IM}|\mathrm{D}]\,d\mathrm{IM}.d\mathrm{EDP}.d\mathrm{DM} \tag{72.1}$$

Onde $p\,[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]$ Denota a função complementar de distribuição cumulativa de X condicionado em Y, $g\,[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]$ Denota a taxa média anual de ocorrência de X dado Y, e D Denota localização da instalação, estrutural, não-estrutural, e outras características. Note que no futuro omitimos condicionamento em D Por simplicidade.

IM: *Medida de Intensidade* descreve quantitativamente as características do terremoto. Este parâmetro é expresso tipicamente em função da probabilidade média anual de excedência, $g\,[\mathrm{IM}]$.

EDP: *Parâmetro de Exigência da Engenharia* descreve a resposta dos componentes estruturais e não-estruturais e conteúdo ao tremor de terra. Os produtos deste passo são probabilidades condicionais, $p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM}]$.

DM: *Medida de Danos* descreve a condição física de componentes estruturais e não estruturais. Os DMs incluem descrições efetivas de danos para caracterizar a

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

funcionalidade, ocupação pronta, segurança de vida e reparos necessários do prédio. Os produtos deste passo são probabilidades condicionais, p [DM|EDP].

DV: *Decisão Variável* serve para traduzir estimativas de danos em quantidades que são úteis para aqueles encarregados de tomar decisões relacionadas com o risco. Atualmente usados DVs que são identificados como métricas de decisão são perdas diretas em dólares, tempo de inatividade (ou tempo de restauração) e mortes (caudalidades). Os produtos deste passo são probabilidades condicionais, p [DV|DM].

[14] Como mencionado antes, perdas diretas de dólares, inatividade e baixas são usadas como variáveis de decisão na metodologia PBEE-2 para a avaliação do desempenho das estruturas. Applied Technology Council, 2012b usa três tipos de avaliações de desempenho: 1) baseado na intensidade, 2) baseado no cenário e 3) baseado no tempo.

72.1.3.3 Diferenças entre o PBEE 1 e o PBEE 2

A evolução de PBEE 1 (primeira geração Engenharia sísmica baseada em desempenho) para PBEe 2 (segunda geração Engenharia sísmica baseada em desempenho) representa um avanço significativo na metodologia, escopo e aplicação. Abaixo está uma visão geral das grandes diferenças, resumidas na tabela 72.2.

Diferenças chave

- *Quadro metodológico:* A PBEE 1 se baseou em métodos determinísticos e critérios prescritivos, enquanto a PBEe 2 introduziu um quadro probabilístico multidisciplinar (Center, 2010).
- *Passos Analíticos:* PBEE 2 formalizou uma estrutura modular integrando análise de perigo, análise estrutural, análise de danos, e análise de perdas, que não foi explicitamente separada em PBEO 1 (FEMA, 2012).
- *Escopo:* A PBEE 2 expandiu seu foco para incluir sistemas não estruturais, impactos sociais e considerações econômicas, ao contrário da abordagem estrutural-centrada do PBEe 1 (American Society of Civil Engineers, 2017).
- *Movimento do solo Representação:* PBEE 2 incorpora análise de risco sísmico probabilístico (PSHA) e seleção específica do local movimento do solo, enquanto PBEe 1 usou descrições simplificadas de perigo (Civil Engineers, 2022).
- *Métricas de Performance:* PBEE 2 avalia custos de reparo, inatividade, mortes e funcionalidade além da segurança estrutural (FEMA, 2012).
- *Tomando decisões:* PBEE 2 fornece informações acionáveis para tomada de decisão informada do risco, indo além da conformidade baseada em código da PBEe 1 (Center, 2010).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 72.2: Comparação entre o PBEE 1 e o PBEE 2

Aspect	**PBEE 1**	**PBEE 2**
Metodologia	Determinista, prescritiva	Probabilística, multidisciplinar (Center, 2010)
Passos Analíticos	Integração implícita de perigo, demanda e danos	Estrutura modular: Análises de risco, estrutura, danos e perdas (FEMA, 2012)
Escopo	Apenas sistemas estruturais	Sistemas estruturais e não estruturais, impactos sociais e econômicos (American Society of Civil Engineers, 2017)
Movimento do solo	Descrições de perigo simplificadas	Análise de risco sísmica probabilística (PSHA), seleção específica do local (Civil Engineers, 2022)
Métricas de Performance	Segurança estrutural (por exemplo, segurança de vida)	Segurança estrutural, custos de reparo, inatividade, mortes, funcionalidade (FEMA, 2012)
Decision-Making	Compliance baseado em código	Decisões de risco informadas, focadas em partes interessadas (Center, 2010)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

72.1.4 Procedimento para implementação do PBEE

15 Tendo explorado os quatro componentes centrais do PBEE - perigo, resposta estrutural, danos e perdas - de baixo para cima, agora descrevemos a sequência completa de passos necessários para implementar uma avaliação engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE). Este ponto de vista procedimental é especialmente útil para engenheiros e analistas aplicando PBEE na prática.

16 O processo consiste em um conjunto de análises aninhadas, passando do perigo sísmico para variáveis de decisão (DVs), e incorporando incertezas em cada passo. Os passos podem ser delineados da seguinte forma:

1. Defina o objetivo da instalação e do desempenho:
   - Caracterizar a estrutura e sua localização, ocupação e uso.
   - Identifique prioridades dos stakeholders (por exemplo, segurança de vida, continuidade funcional, limites de custos de reparo, limiares de inatividade).
   - Selecione as variáveis de decisão apropriadas (por exemplo, baixas, custo, tempo para recuperação).
2. Realize a Probabilística Análise de Riscos Sísmicos (PSHA), chapter 67:
   - Desenvolva curvas de perigo específicas do local para medidas de intensidade selecionadas (IMs), tipicamente aceleração espectral no período fundamental.
   - Selecione movimentos de terra representativos para diferentes períodos de retorno ou níveis de perigo (por exemplo, 10%, 2%, 0.5% em 50 anos).
3. Condução Análise estrutural para parâmetros de demanda de engenharia derivada (EDPs), chapter 69:
   - Construa um modelo não linear da estrutura (ou use modelos existentes).
   - Realizar análises dinâmicas não lineares ou análise de histórico de resposta sob movimentos de terra selecionados.
   - Extrair EDPs, como derivação interstória, aceleração do piso e deformação dos componentes.
   - Estimar as distribuições de probabilidade condicionais $p(\text{EDP}|\text{IM})$.
4. Realize a análise de danos, chapter 70:
   - Mapa de EDPs para medidas de danos (DMs) para componentes estruturais e não estruturais.
   - Use funções de fragilidade ou relações empíricas para avaliar $p(\text{DM}|\text{EDP})$.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Conte com os limiares específicos dos componentes e a funcionalidade pós-evento.

5. Atue Análise de perdas, chapter 71:

   - Mapa de DMs para variáveis de decisão (DVs) como baixas, custos de reparo e tempo livre.
   - Avaliar $p(\text{DV} \mid \text{DM})$ usando modelos de perda ou funções de recuperação.
   - Perdas agregadas em componentes para obter métricas de perda totais esperadas.

6. Integrem-se em todas as incertezas:

   - Realizar integração probabilística através de IM, EDP, DM e DV usando o teorema da probabilidade total:

$$g[\text{DV}] = \int\int\int p[\text{DV}|\text{DM}]\, p[\text{DM}|\text{EDP}]\, p[\text{EDP}|\text{IM}]\, g[\text{IM}]\, d\text{IM}\, d\text{EDP}\, d\text{DM}$$

   - Use simulação de Monte Carlo ou integração numérica quando expressões em forma fechada não estiverem disponíveis.

7. Relatório e Resultados Interpretados:

   - Resultados atuais, como perda anual esperada (EAL), curvas de excesso de perdas e consequências baseadas em cenários.
   - Use os resultados para informar mitigação de risco, decisões de projeto, priorização ou comunicação com as partes interessadas.

[17] Esta sequência procedimental fornece um roteiro prático para aplicar PBEE em design e avaliação. Enquanto cada passo pode ser desenvolvido com diferentes níveis de detalhes e sofisticação, a estrutura integrada garante que o desempenho seja medido em termos de consequências que importam para a sociedade.

72.2 Da resposta aos danos: Curvas de fragilidade

[18] O quadro de PBEE descrito na seção anterior conecta a entrada sísmica a variáveis significativas de decisão através de uma cadeia de relações condicionais: Medições de intensidade (IMs), parâmetros de demanda da engenharia (EDPs), medidas de danos (DMs) e variáveis de decisão (DVs). Embora análise estrutural produza EDPs como derivação interstory ou acelerações de piso, tomada de decisão requer informações sobre danos e suas consequências.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 A ponte entre a resposta estrutural e os danos físicos é o papel do *curvas de fragilidade*.. Essas curvas quantificam a probabilidade de que um componente estrutural ou não-estrutural exceda um estado específico de dano, dado um certo nível de demanda sísmica (tipicamente uma EDP). Como tal, eles servem como a ligação probabilística entre não linear análise estrutural e modelagem de danos/perdas em PBEE.

20 A função de fragilidade é central para o PBEE, particularmente na formalização do Região de Confiança em início de dano e progressão. Permite uma mudança de verificações determinísticas para uma descrição probabilística do desempenho estrutural. As seguintes seções introduzem definições de fragilidade, distinções, métodos de modelagem e seu papel dentro do quadro mais amplo da PBEE.

72.2.1 Fundamentos e Definições

21 A *curva de fragilidade* representa a probabilidade condicional de que um sistema estrutural ou componente exceda uma determinada estado limite (LS) em função de uma *Medida de intensidade (IM)*, como aceleração espectral (Sa) ou aceleração do pico de solo (PGA):

$$P[\text{LS}|\text{IM} = im]$$

22 Mais formalmente, fragilidade pode ser expressa como:

$$P[D \geq C_{\text{LS}}|\text{IM} = im] = P\left[\frac{D}{C_{\text{LS}}} \geq 1 \mid \text{IM} = im\right]$$

Onde D é a demanda e C_{LS} O limite de capacidade para o estado limite.

23 Em PBEE, fragilidade é frequentemente expressa no nível EDP-DM:

$$P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

Esta forma reflete como a fragilidade conecta a resposta estrutural aos danos esperados.

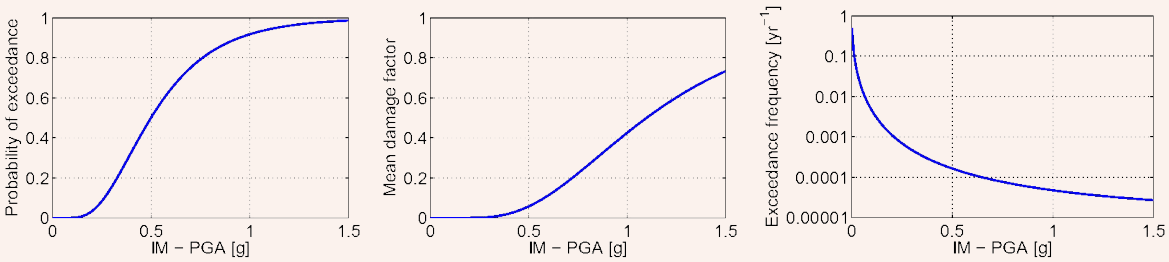
Terminologia: Fragilidade vs. Vulnerabilidade vs. Perigo

- *F*ragilidade quantifica a probabilidade de exceder um estado de dano dada demanda.
- *V*ulnerabilidade quantifica o esperado *Perdas* (por exemplo, custo, tempo de inatividade, baixas) dado o perigo.
- Curvas de perigo quantifique a frequência de valores superiores a IM (saída da PSHA).

24 Esses três elementos juntos apoiam avaliação de risco e estimativa de perdas. Figura 72.4 ilustra a distinção.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Curva de fragilidade (b) Curva de vulnerabilidade (c) Curva de perigo

Figura 72.4: Comparação de fragilidade sísmica, vulnerabilidade e curvas de perigo

72.2.2 Desenvolvendo Curvas de fragilidade

Fontes de dados da fragilidade

- Empírico: Observações pós-terremoto; Real, mas limitado.
- Analítico: Simulações não lineares de história temporal (IDA, MSA).
- Heurística: Opinião de especialista; usado quando os dados são escassos.
- Experimental: Exames de laboratório; Raras por causa do custo.
- Híbrido: Combina dados empíricos e analíticos.

Manuseando colapso e respostas extremas

25 Se o colapso ou instabilidade numérica é observado durante simulações, fragilidade deve ser reformulada para explicar tais eventos:

$$P[EDP \geq edp|IM] = P[EDP \geq edp|IM, \text{NoCollapse}](1-P[\text{Collapse}|IM])+P[\text{Collapse}|IM]$$

Solteira vs. Múltiplos Estados Danos

26 Fragilidade pode ser expressa em uma série de estados limites$_i$), cada um correspondente a um estado de dano (DS$_i$). Quando modelada sequencialmente:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_i|IM] - P[\text{LS}_{i+1}|IM]$$

27 Alternativamente, em sistemas paralelos:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_1|IM] \cdot P[\text{DS}_i|\text{LS}_1]$$

72.2.3 Representações matemáticas

Modelo Lognormal (baseado em MI)

$$P[\text{LS}|IM = im] = \Phi\left(\frac{\ln(im) - \ln(\eta)}{\beta}\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde η é a capacidade mediana e β A dispersão.

Modelos Lineares Generalizados (GLMs)

28 GLMs expressam fragilidade usando funções de link (por exemplo, probit, logit, log-log complementar). Por exemplo:

$$\text{Logit: } P = \frac{e^{\theta_0+\theta_1 IM}}{1+e^{\theta_0+\theta_1 IM}}$$

29 Os GLMs oferecem flexibilidade em forma funcional e podem ser usados para avaliar modelos que se encaixam em diferentes representações.

72.2.4 Função contínua *vs.* Matriz Discreta

30 Os resultados da análise de fragilidade também podem ser classificados com base em como são representados: ou como um *Função contínua* (i.e., um curva de fragilidade) ou como *tabela de valores discretos* Conhecido como um *Matriz de probabilidade de dano (DPM)* (Erberik, 2015).

31 Curvas de fragilidade podem ser categorizados com base no número de estados limites eles representam:

Solteiro: Representa a probabilidade de exceder um determinado estado limite (LS) ou um limiar de um parâmetro de demanda da engenharia (EDP).

Múltiplo: Um conjunto de curvas de fragilidade correspondentes a diferentes estados limites pode ser usado para descrever o perfil completo do estado de dano de um sistema estrutural.

32 Estados limites (LS) (ver seção 70.2) definir os limiares entre diferentes estados de dano (DS), que podem ser descritos qualitativamente (por exemplo, leve, moderada, extensa) ou quantitativamente usando um índice de danos (DI). Para um sistema com N_{LS} estados limites, há $N_{\text{DS}} = N_{\text{LS}} + 1$ Os estados de dano correspondentes. Estado de dano 0 (DS_0) representa a condição não danificada.

33 Os estados de dano podem ser definidos de duas formas distintas:

Sequencial: O sistema deve progredir através de DS_i antes de chegar DS_{i+1}.. A probabilidade de estar em um DS específico é:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im] - P[\text{LS}_{i+1} \mid \text{IM} = im], & 1 \le i < N_{\text{DS}} \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im], & i = N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Simultaneamente: Cada estado de dano é avaliado independentemente.

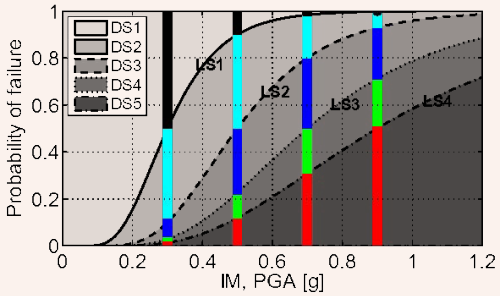
$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im] \cdot P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1], & 1 \leq i \leq N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.3}$$

34 Note que no caso de avaliação simultânea, a soma das probabilidades para todos os estados de dano pode exceder 1,0:

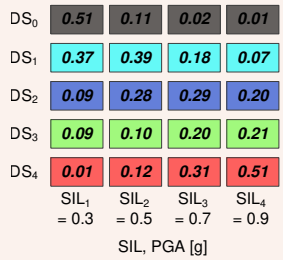
$$\sum_{i=1}^{N_{\text{DS}}} P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1] > 1.0$$

índice[p2]Dano! Matriz de Probabilidade

35 O *M*atriz de Probabilidade de Danos (DPM): é uma matriz que mostra valores discretos de probabilidades de SD em níveis de intensidade sísmica selecionados (SILs). Cada pilar representa um nível de IM discreto, enquanto cada linha corresponde a um estado específico de dano. Embora cada curva de fragilidade seja uma função contínua, o DPM representa uma amostra discreta dessas funções em valores de IM fixos.



(a) Curva de fragilidade



(b) Matriz de probabilidade de danos

Figura 72.5: Relação entre curva de fragilidade e matriz de probabilidade de dano

Curva de fragilidade vs. Surface

36 A *curva de fragilidade* Relaciona a probabilidade de exceder um estado de dano para uma *Solteiro* IM. A superfície de fragilidade, por outro lado, considera *Múltiplo* Variáveis, Fig. 72.6:

- *Vetor IMs:* Fragilidade em função de duas ou mais IMs, por exemplo, $P[\text{LS}|IM_1, IM_2]$
- *Fragilidade dependente do tempo:* Envelhecimento ou deterioração modelados através $P[\text{LS}(t)|IM]$

CÓPIA PARA REVISÃO

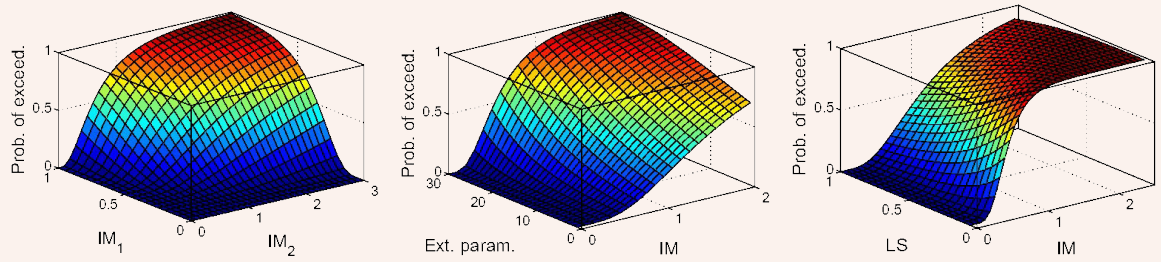
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Tabela 72.3: Comparação de Contínuo vs. Representações de Fragilidade Discretas

Característica	**Curva de fragilidade (Contínuo)**	**Matriz de Probabilidade de Danos (Discreto)**
Representação	Função suave (por exemplo, CDF lognormal)	Tabela de probabilidades em níveis discretos de IM
Resolução de Dados	Infinito dentro do domínio	Limitado a pontos amostrados
Usabilidade	Melhor para os quadros analíticos	Útil para avaliações baseadas em cenários
Formato de Armazenamento	Parâmetros de função (por exemplo, μ, β)	Matriz de valores
Interpretação	Funcional	Tabular

- *Fragilidade do limite:* Superfícies de probabilidade sobre um continuum de estados limites.

[37] Estas generalizações são especialmente relevantes para sistemas complexos, como represas ou usinas nucleares.



(a) Dois parâmetros IM (b) IM + Parâmetro externo (c) IM + LS Variação

Figura 72.6: Diferentes aspectos da fragilidade sísmica

72.3 Papel no Framework PBEE

[38] No contexto de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE), funções de fragilidade servem como elos essenciais em uma cadeia de relações condicionais que quantificam o fluxo de Região de Confiança De movimento do solo para resposta estrutural, danos, e finalmente para métricas de decisão como perda econômica ou baixas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

39 Essa progressão probabilística, Fig. 72.3, é formalizado no PEER PBEE framework, que calcula a frequência média anual de exceder uma determinada variável decisão (DV) usando o teorema da probabilidade total. A formulação central integra medidas de intensidade (IM), parâmetros de demanda de engenharia (EDP) e medidas de danos (DM) para obter a taxa de exceder um limite DV especificado:

$$\lambda_{\mathrm{DV}}(dv) = \int_{dm} \int_{edp} \int_{im} P[\mathrm{DV} \geq dv \mid \mathrm{DM} = dm] \times dP[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]\, dP[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]\, |\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{IM}}(im)|$$

40 Nesta formulação, a fragilidade serve como a principal ligação entre resposta estrutural e dano ou perda resultante. O termo $P[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]$ - Às vezes chamado de fragilidade da demanda (Mackie e Stojadinovic, 2005) — quantifica a probabilidade de que uma demanda estrutural exceda um limite especificado para um determinado nível de intensidade sísmica. Isso reflete o uso tradicional da fragilidade na dinâmica estrutural.

41 Dentro do quadro PEER PBEE, no entanto, fragilidade é definida mais estreitamente como a probabilidade condicional de exceder uma determinada medida de dano dada uma resposta estrutural conhecida:

$$\text{Fragility} = P[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]$$

Esta definição capta a transição da resposta física para o estado de dano e representa um passo probabilístico chave na metodologia PBEE (Porter, Kennedy e Bachman, 2007; Gunay e Mosalam, 2013). Notavelmente, ambas as equações 72.2 e.. 72.3, que descreve probabilidades sequenciais e simultâneas de estado de dano, pode ser reformulada em termos desta expressão de fragilidade.

42 No geral, as funções de fragilidade constituem a espinha dorsal da transformação do perigo sísmico em métricas de desempenho acionáveis.

72.4 Ex 72.1: Exemplo completo de PBEE

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Este exemplo apresenta um exemplo numérico de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE), cobrindo todos os quatro componentes principais:

- *Análise de Risco Sísmico* - Estimativa de probabilidades de excedência.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- *Análise estrutural* Computação de resposta estrutural sob cargas sísmicas.
- *Análise de Danos* Avaliação de danos físicos baseados na resposta.
- *Análise de perdas* Estimativa de perdas econômicas, tempo de inatividade e baixas.

As seguintes suposições são feitas neste estudo:

- O local está localizado no centro de Los Angeles.
- O prédio é um momento de aço de três andares.
- O período fundamental do edifício é $T_1 = 1.2$ Seg.
- Movimento do solo intensidade é medida em aceleração espectral $S_a(T_1)$.
- Parâmetro de Demanda de Engenharia (EDP) é a taxa máxima de deriva interstory θ.

Análise de Risco Sísmico

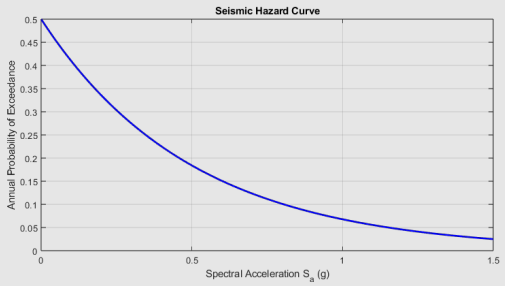
A probabilidade de exceder uma aceleração espectral S_a é modelada como:

$$\lambda(S_a) = Ae^{-BS_a}$$

onde os parâmetros específicos do local são:

- $A = 0.5$ (fator de escalonamento)
- $B = 2.0$ (taxa de decaimento)

A curva de perigo calculada, baseada neste modelo, está abaixo.



Análise estrutural: Curva da IDA

A resposta estrutural é caracterizada pela razão de deriva interstory θ, aproximado como:

$$\theta = C_1 S_a^{C_2}$$

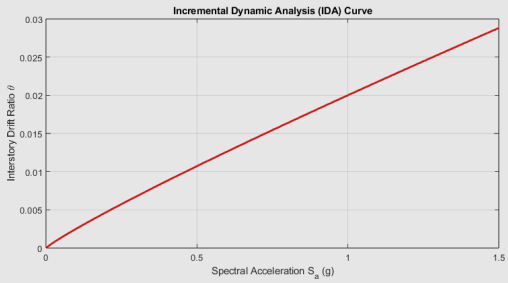
onde as constantes empíricas são:

- $C_1 = 0.02$
- $C_2 = 0.9$

Essa relação é derivada da Análise Dinâmica Incremental (AID).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



Análise de Danos: Curvas de fragilidade

Curvas de fragilidade definir a probabilidade de exceder vários estados de dano baseado na razão de deriva θ:

$$P(D_i|\theta) = \Phi\left(\frac{\ln(\theta) - \ln(\theta_{50})}{\beta}\right)$$

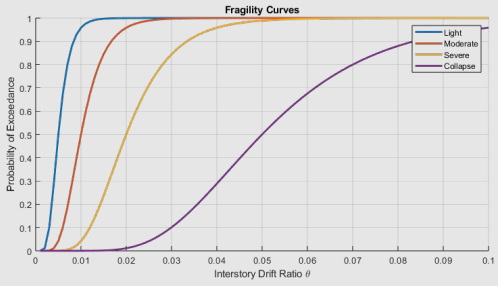
onde:

- θ_{50} é a capacidade de deriva mediana.
- $\beta = 0.4$ representa a dispersão (Região de Confiança Fator).

Os quatro estados de dano considerados são:

Estado de Danos	Razão de deriva mediana θ_{50}	Dispersão β
Danos leves	0.005 (0.5%)	0.4
Dano Moderado	0.01 (1.0%)	0.4
Dano Grave	0.02 (2.0%)	0.4
Recolher	0.05 (5.0%)	0.4

Os curvas de fragilidade são mostrados abaixo



Estimação de perda

A perda esperada é calculada como:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

onde as probabilidades de danos e consequências da perda são:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Estado de Danos	Custo de reparo ($M)	Tempo de descanso (dias)	- Não, não%)
Luz	0.1	2	0.0
Moderado	0.5	14	0.01
Grave	2.0	60	0.1
Recolher	10.0	300	5.0

Usando as probabilidades de dano calculadas:

- Custo esperado de reparo: $0.59M.
- Tempo de parada esperado: 10,4 dias.
- Esperam-se baixas: 0.01%.

Estimação de perda

A perda esperada é calculada como:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

A probabilidade de exceder diferentes estados de dano foi usada para atribuir perdas a cada amostra. As distribuições de probabilidade para cada estado de dano foram usadas para introduzir aleatoriedade nos cálculos.

Os estados de dano e probabilidades associadas foram definidos da seguinte forma:

Estado de Danos	Probabilidade	Perdas atribuídas
Danos leves	90%	Custo de reparo: $0.1M, tempo de parada: 2 dias, baixas: 0.0%
Dano Moderado	60%	Custo de reparo: $0.5M, tempo de parada: 14 dias, baixas: 0.01%
Dano Grave	10%	Custo de reparo: $2.0M, tempo de parada: 60 dias, baixas: 0,1%
Recolher	0%	Custo de reparo: $10.0M, tempo de parada: 300 dias, baixas: 5.0%

Para introduzir variabilidade, distribuições normais foram aplicadas às perdas com desvios padrão estabelecidos em 10% dos valores médios.

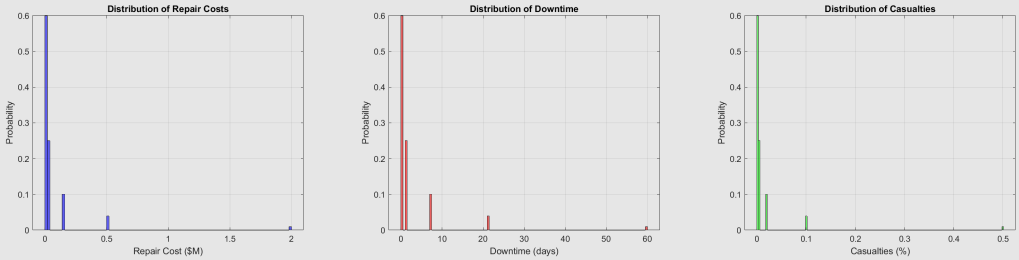
Os valores esperados obtidos da simulação estão resumidos abaixo.

Metric	Valor esperado (mean)	Desvio padrão
Custo esperado de reparos	$1.08M	$0.25M
Esperado tempo de descanso	30,76 dias	8,5 dias
Espera-se baixas	0.48%	0.12%

Os seguintes histogramas mostram a distribuição dos custos de reparo e inatividade obtidos da simulação de Monte Carlo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



onde probabilidades de danos e consequências de perdas são dadas abaixo.

Estado de Danos	Custo de reparo ($M)	Tempo de descanso (dias)	- Não, não%)
Luz	0.1	2	0.0
Moderado	0.5	14	0.01
Grave	2.0	60	0.1
Recolher	10.0	300	5.0

Observação

Em PBEE análise de perdas, é bem possível que o desvio padrão seja maior do que a média. Isso ocorre devido a várias razões relacionadas à natureza da modelagem probabilística na estimativa de perdas.

Distribuições de Esquema Direito: As distribuições de perda em PBEE geralmente seguem distribuições de cauda pesada, à direita, como lognormal ou Pareto. Essas distribuições podem exibir uma grande variação em relação à média.

Respostas estruturais não lineares: Modelos de danos e perdas geralmente exibem alta variabilidade devido a Região de Confiança em movimento do solo características, resposta estrutural e funções de fragilidade. A presença de perdas raras mas extremas pode aumentar significativamente o desvio padrão.

Multiplicativo Região de Confiança Em Modelos de Custo: Modelos de custos de reparo, que são usados na estimativa de perdas, muitas vezes combinam múltiplas incertezas, incluindo tempo de reparação, custos de mão-de-obra, custos materiais e perdas econômicas indiretas. Quando estes são modelados com aleatoriedade multiplicativa (por exemplo, usando distribuições lognormais), o coeficiente de variação (COV) pode ser grande.

Simulações de Monte Carlo e comportamento pesado: Quando a amostragem de Monte Carlo é usada para estimar perdas, realizações extremas (por exemplo, colapso estrutural total levando à perda catastrófica) podem elevar o desvio padrão em relação à média.

Para uma distribuição lognormal com parâmetros μ_X e.. σ_X, a média e desvio padrão são dados por:

$$E[X] = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$

$$\text{Std}(X) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O desvio padrão excede a média quando:

$$\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1} > 1 \tag{72.4}$$

O que simplifica:

$$\sigma_X^2 > \ln(2) \approx 0.693 \tag{72.5}$$

Em PBEE, Região de Confiança em modelos de danos e custos muitas vezes leva a σ_X^2 sendo maior que 1, fazendo $\sigma > \mu$ uma ocorrência comum.

MATLAB®código para este exemplo é dado em §I.7.2.

72.5 Marcos históricos e documentos fundamentais

43 O desenvolvimento de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE) foi moldado por uma série de documentos fundamentais da FEMA, ASCE, PEER e ATC. Estes trabalhos introduziram conceitos e metodologias chave que agora formam a espinha dorsal da avaliação de risco sísmico moderno e design, Tabela 72.4.

- *ATC-13 (1985)* - Fornecendo estimativas de fragilidade e perda baseadas em especialistas nos tipos de prédios, estabelecendo as bases para análise de vulnerabilidade (ATC-13, 1985).
- *FEMA 273/274 (1997)* - Introduziu objetivos de desempenho ligados a níveis probabilísticos de risco e níveis de desempenho, como ocupação imediata, segurança da vida e prevenção de colapso (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a).
- *FEMA 356 (2000)* - Um pré-padrão sintetizando FEMA 273/274 em um formato amigável ao engenheiro, formando a base para ASCE 41 (FEMA-356, 2000).
- *PEER Framework (2003)* O Centro de Pesquisa do Pacífico formalizou a metodologia PBEE-2, introduzindo a cadeia IM-EDP-DM-DV e integração probabilística (Porter, 2003; Center, 2010).
- *FEMA P-58 (2012-2021)* Ofereceu uma estrutura probabilística abrangente para avaliação de desempenho de edifícios individuais, incluindo funcionalidade, tempo de inatividade e estimativa de perdas (FEMA, 2012).
- *ASCE 7 e ASCE 41* - Design e avaliação baseados em desempenho incorporados em códigos de engenharia estrutural (Civil Engineers, 2022; American Society of Civil Engineers, 2017).

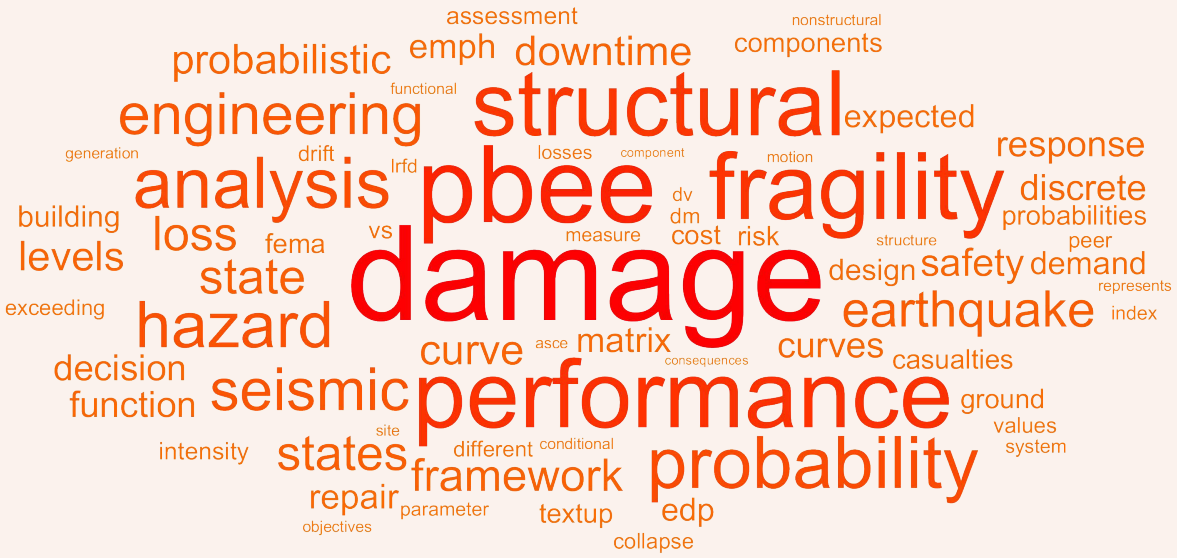
44 Esses documentos, juntamente com metodologias em evolução, como modelagem de perdas baseadas em fragilidade e métricas de desempenho baseadas no tempo, estabeleceram o PBEE como o estado da prática para a engenharia sísmica informada do risco.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela 72.4: Documentos-chave no desenvolvimento histórico de Engenharia sísmica baseada em desempenho (PBEE).

Ano	Documento	Agência	Contribuição chave
1985	ATC-13	ATC	Estimativas de fragilidade e perda baseadas em especialistas
1997	FEMA 273/274	FEMA	Objetivos de desempenho ligados aos níveis de perigo e estados de dano
2000	FEMA 356	FEMA	Pré-padrão levando à ASCE 41 para edifícios existentes
2003	Framework PEER	PEER	Corrente IM-EDP-DM-DV; Probabilística modelagem de desempenho
2012–21	FEMA P-58	FEMA	Perda probabilística específica de construção, tempo de inatividade e funcionalidade
2022	ASCE 7	ASCE	Padrões modernos de carga com provisões baseadas no desempenho
2023	ASCE 41	ASCE	Avaliação sísmica atualizada dos prédios existentes



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

APÊNDICES

CÓPIA PARA REVISÃO

Apêndice A

Unidades

A.1 Si unidades 2400
A.2 Prefixos métricos e multiplicadores . 2401
A.3 Unidades & fatores de conversão . . 2401
A.4 Resumo da força, comprimento, trabalho e tensão em várias unidades métricas 2402
A.5 Conversão de quantidades físicas da métrica para unidades imperiais . . 2402

A.1 Si unidades

Quantidade	Dimensões		Unidades
	Técnica	Unidades da base	Definição
Comprimento	L	L	m
Tempo	t	t	s
Massa	M	M	Kg
Temperatura	T	T	K
Densidade de Massa (ρ)	$M.L^{-3}$	$M.L^{-3}$	Kgm^{-3}
Força (F)	F	$M.L.t^{-2}$	N
Tensão	F.L−2	$M.L^{-3}.t^{-2}$	MPA

CÓPIA PARA REVISÃO

A.2 Prefixos métricos e multiplicadores

Prefixo	Abreviatura	Multiplicador
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
Hecto	h	10^{2}
Deca	da	10
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}

A.3 Unidades & fatores de conversão

comprimento	M (metro)	1 polegada = 0,0254 m	1 m = 39,37 polegadas
Força	N (Newton)	1 lb = 4.4482 N	1 N = 0,22481 lb
Massa	Kg (kilograma)	1 lbm = 0,45359 kg	1 Kg=2.2046 lb
Densidade	Kg/m^3	1 lbm/ft^3 = 16,018 Kg/m^3	1 Kg/m^3=0,062428 lbm/ft^3
Temperatura	T	T ^oF=[(9/5)T^oC+32]	
Aceleração	M/s^2	1 em / s^2 = 0,0254 m/s^2	
Rigidez	N/m	1 lb/in = 175,1 N/m	
Tensão	Pa = N/m^2	1 psi = 6.894,8 Pa	1 MPa = 145,04 psi
Trabalho	J=N-m=	1,3558 J	1 J = 0,73756 pés-bf

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A.4 Resumo da força, comprimento, trabalho e tensão em várias unidades métricas

Força	Comprimento	Trabalho	Tensão
F	L	FL	FL-2
N	m	J	Pa
	mm	mJ	MPA
kN	m	kJ	KPa
	mm	J	GPa
MN	m	MJ	MPA
	mm	kJ	TPa
Pa	m	N	
MPA	mm	N	
	m	MN	

A.5 Conversão de quantidades físicas da métrica para unidades imperiais

f'_c			f'_t		E	
psi	kg/cm^2	Mpa	psi	Mpa	KSI	Gpa
2,000	141	13.8	200	1.38	2,500	17.2
2,500	176	17.2	250	1.72	3,000	20.7
3,000	211	20.7	300	2.07	3,500	24.1
3,500	246	24.1	350	2.41	4,000	27.6
4,000	281	27.6	400	2.76	4,500	31.0
4,500	316	31.0	450	3.10	5,000	34.5
5,000	352	34.5	500	3.45	5,500	37.9
5,500	387	37.9	550	3.79	6,000	41.4
6,000	422	41.4	600	4.14	6,500	44.8
6,500	457	44.8	650	4.48	7,000	48.3

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice B

Cargas, Design Empírico Baseado

O capítulo 18 deve ser lido antes deste.

Abstract

Este apêndice fornece dados empíricos e orientação de projeto para cargas estruturais, complementando os capítulos principais sobre análise estrutural e design. Organizado por categoria de carga – cargas mortas (autopeso), cargas vivas (ocupação e uso), cargas ambientais (vento, neve, terremotos) e cargas especiais – o apêndice tabula pesos unitários de material, cargas típicas de piso e telhado, e fatores de carga para vários Tipos de prédio e ocupações. As tabelas de referência dão valores práticos para alumínio, tijolo, concreto, aço e madeira; especificações para sistemas comuns de piso e construções de telhado; e orientação sobre combinações de carga para a máxima e capacidade de manutenção estados limites. Estes dados empíricos e coeficientes suportam os cálculos de projeto e casos de carga usados ao longo do texto.

B.1 Carregamentos mortos 2404
B.2 O vento está carregado 2404
B.2.1 Ex B.1: Carga do vento . . . 2406
B.3 Terremotos 2407
B.3.1 Ex B.2: Terramoto, carga em um Pórtico 2416
B.3.2 Ex B.3: Terremoto em um prédio alto 2417
B.4 Cargas da ponte 2418
B.5 Combinações de carga 2419
B.6 Redução de carga ao vivo 2420
B.6.1 Ex B.4: Redução de carga ao vivo I 2421
B.6.2 Ex B.5: Redução de carga ao vivo II 2422
B.7 Colocação de carga 2422

CÓPIA PARA REVISÃO

Material	lb/ft^3	kN/m^3
Alumínio	173	27.2
Tijolo	120	18.9
Concreto	145	33.8
Aço	490	77.0
Madeira (pino)	40	6.3

Tabela B.1: Peso unitário dos materiais

Material	lb/ft^2
Madeira	40-50
Aço	50-80
Concreto armado	100-150

Tabela B.2: Carga média bruta em prédios

B.1 Carregamentos mortos

B.2 O vento está carregado

1 Consulte primeiro a §18.2.2.1

2 Durante as tempestades, as velocidades do vento podem atingir valores até ou maiores que 150 milhas por hora, o que corresponde a uma pressão dinâmica q_s de cerca de 60 psf (tanto quanto a carga média de ocupação vertical em edifícios).

3 A pressão do vento aumenta com a altura, tabela B.5.

4 A carga do vento causará sucção nas faces de sotavento, Fig. B.1

5 Esta magnitude deve ser modificada para explicar a forma e o ambiente de O prédio. Assim, a pressão do projeto p (psf) é dado por

$$p = C_e C_q I q_s$$

Pressupõe-se que a pressão seja normal para todas as paredes e telhados

C_e **Coeficiente de Pressão de Velocidade** É responsável pela altura, exposição e fator de rajada. Isso explica o fato de que a velocidade do vento aumenta com a altura e essa dinâmica o caráter do fluxo de ar (ou seja, a pressão do vento não é estável), Tabela B.6.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

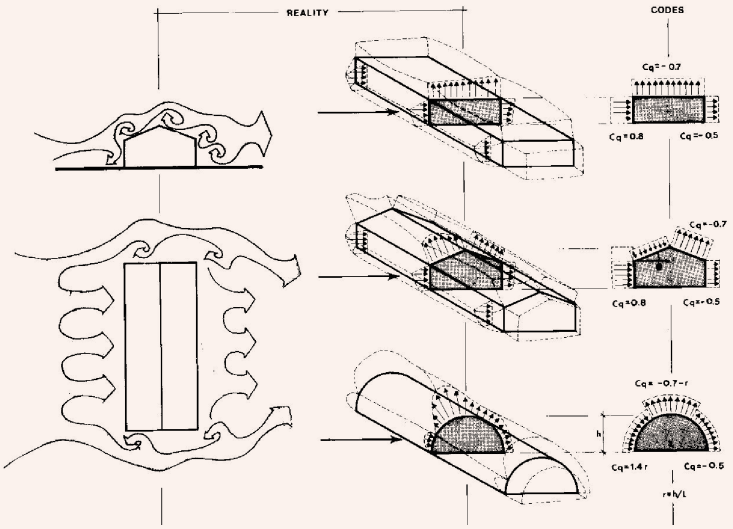


Figura B.1: Efeito da carga do vento nas estruturas (Schueller, 1996)

C_q **Coeficiente de pressão** é um fator de forma dado na Tabela B.7 para pórticos com cobertura em duas águas.

I **Fator de importância** como dado pela tabela B.8. Onde

I Instalações Essenciais: Hospitais; Fogo e delegacias de polícia; Tanques; Abrigos de veículos de emergência, Equipamento gerador de energia em espera; Estruturas e equipamentos no governo. Centros de comunicação.

II Instalações Perigosas: Estruturas abrigando, apoiando ou contendo quantidades suficientes de substâncias tóxicas ou explosivas para serem perigosas para a segurança do general Público se for liberado.

III Estrutura de ocupação especial: Estruturas cobertas cuja ocupação principal é a montagem pública, capacidade > 300 pessoas.
Prédios para escolas através de centros secundários ou creches, capacidade > 250 pessoas.
Edifícios para faculdades ou escolas de educação de adultos, capacidade > 500 pessoas.
Instalações médicas com 50 ou mais pacientes incapacitados, mas não incluídos acima
Prisões e instalações de detenção
Todas as estruturas com ocupação >5 mil pessoas.
Estruturas e equipamentos em centrais elétricas e outras utilidades públicas
Instalações não incluídas acima, e necessárias para continuar a operação.

Estrutura de ocupação padrão IV: Todas as estruturas têm ocupações ou funções não listadas acima.

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

6 Para o projeto preliminar de edifícios comuns, podem-se adotar $C_e = 1.0$ e $C_q = 1.3$, resultando em

$$p = (1.3).020256V^2 = .00333V^2 \tag{B.1}$$

que corresponde a uma pressão de 21 psf para uma velocidade do vento de 80 mph, Fig. B.2, Tabela B.9.

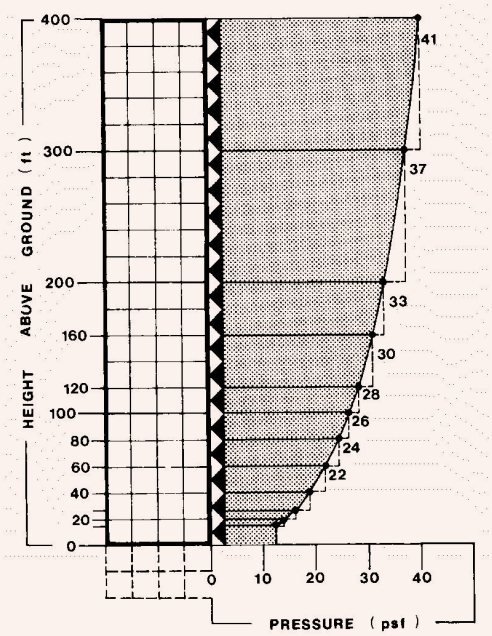


Figura B.2: Pressão aproximada do vento para resistência à força de vento

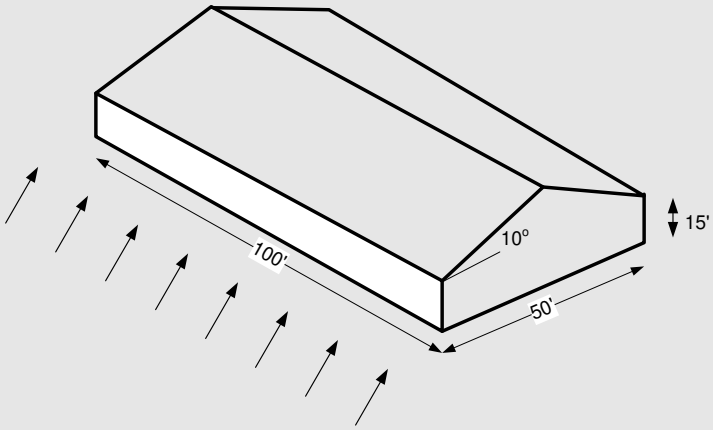
B.2.1 Ex B.1: Carga do vento

Determine as forças do vento no edifício mostrado abaixo, construído em St. Louis e cercado por árvores.

1. Pela Fig. 18.3, a velocidade máxima do vento em St. Louis é 70 mph. Como o edifício está protegido, podem-se adotar $C_e = 0.7$ e $I = 1.$. A pressão básica do vento é $q_s = 0.00256 \times (70)^2 = 12.54$ psf.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



2. A inclinação da cobertura é 8:15=6.4:12, o que fornece $C_q = -0.7$ para ambas as faces, de barlavento e de sotavento. As paredes verticais têm $C_q = 0.8$ na face de barlavento e $C_q = -0.5$ na face de sotavento.
3. Assim, a pressão aplicada à cobertura é $p = 0.7 \times (-0.7) \times 12.54 =$ - 6,14 psf Portanto, a cobertura está sujeita a levantamento.
4. Na parede de barlavento, a pressão é $0.7 \times 0.8 \times 12.54 =$7.02 psf, e, na parede de sotavento, $0.7 \times (-0.5) \times 12.54 =$- 4,39 psf (sucção).
5. A direção do vento pode mudar; portanto, cada componente estrutural deve ser projetado para resistir a todas as combinações de carga possíveis.
6. Para estruturas de grande porte, que podem estar sujeitas a cargas de vento elevadas, frequentemente são realizados ensaios em túnel de vento da própria estrutura e de seu entorno.

B.3 Terremotos

7 Os prédios devem ser capazes de resistir

Pequenos terremotos Sem danos

Terremotos moderados Sem danos estruturais, mas possivelmente com alguns Danos não estruturais

Grandes terremotos Sem colapso, mas possivelmente com algum dano estrutural bem como danos não estruturais.

Isso é conseguido através de uma análise dinâmica apropriada.

8 Para desenhos preliminares ou para pequenos estruturas e *Carga estática horizontal equivalente* pode ser determinado.

9 As cargas reais dependem do seguinte

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Intensidade da aceleração do solo (incluindo propriedades de solo/rocha).
2. Propriedades dinâmicas do edifício, como o seu formas modais e períodos de vibração e suas características amortecimento.
3. Massa do prédio.

10 Um fator crítico na resposta dinâmica de uma estrutura é o período fundamental da vibração da estrutura (ou primeiro modo de Vibração). Este é o tempo necessário para um ciclo completo de movimento, Fig. B.3.. Se o A excitação do terremoto tem uma frequência próxima à do prédio, então.. A ressonância pode ocorrer. Isso deve ser evitado.

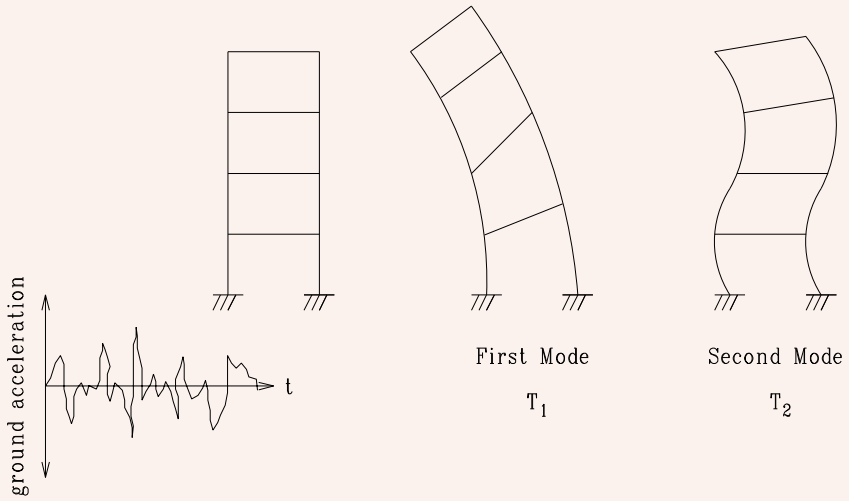


Figura B.3: Vibrações de um prédio

11 A carga do terremoto se manifesta como uma força horizontal devido ao (principalmente) força de inércia horizontal (**F** = m**a**).

12 A força horizontal em cada nível é calculada como uma parte da base força cortante V

$$V = \frac{ZIC}{R_W} W$$

onde:

Z**: Fator de zona:** a ser determinado pela Fig. B.4 e Tabela B.10.

I**: Fator de importância:** dado pela Tabela B.8.

C**: Espectro de resposta de projeto:** dado por

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} \leq 2.75$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

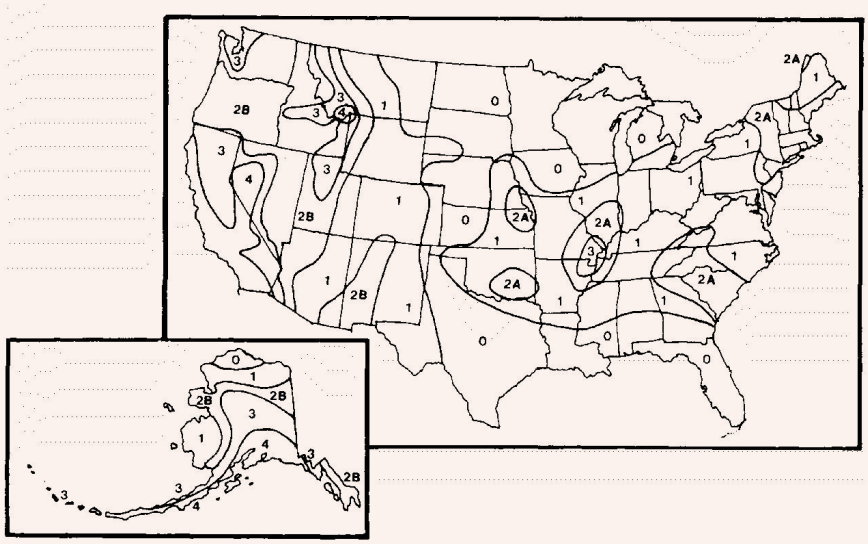


Figura B.4: Zonas sísmicas dos Estados Unidos, (ICBO, 1994)

T é o período fundamental de vibração do edifício em segundos. Isso pode ser determinado a partir da análise de vibração livre do edifício, ou estimado a partir da seguinte fórmula empírica

$$T = C_t(h_n)^{3/4}$$

onde:
h_n é a altura do edifício acima da base em pés.
e..

C_t	0.035	pórticos de aço resistentes a momento
C_t	0.030	pórticos de concreto armado resistentes a momento e pórticos com contraventamento excêntrico
C_t	0.020	todos os outros edifícios

S**: Coeficiente de sítio** dado pela Tabela B.11 Note que a maioria dos Danos em 1990? O terremoto em São Francisco ocorreu na marina onde muitas casas foram construídas em solo macio.

e..

$$\frac{C}{R_W} \geq 0.075$$

R_W é dado pela Tabela B.12.

W **Carregar** Carga total da estrutura.

13 A força horizontal V é distribuído sobre a altura do edifício em duas partes. O primeiro (aplicado apenas se $T \geq 0.7$ Seg.) é uma força concentrada F_1 igual a

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V \tag{B.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

é aplicado no topo do edifício devido ao chicoteamento. O equilíbrio da força $V - F_t$ é distribuído como um triangular Carga diminuindo para zero na base.

14 Assumindo uma constante de peso para cada piso, então a força Agindo em cada um é dado por

$$F_x = \frac{(V - F_t)h_x}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n} = \frac{(V - F_t)h_x}{\Sigma_{i=1}^{n} h_i} \tag{B.3}$$

Onde h_i e.. h_n são a altura em pés acima da base para o nível i, n ou x respectivamente

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Material	lb/ft^2
Tetos	
Sistema suspenso do canal	1
Telha de fibra acústica	1
Pisos	
Deck de aço	2-10
Aplique um pouco de concreto.	12
Linóleo 1/4 dentro.	1
Madeira	4
Telhados	
Cobre ou estanho	1-5
5 ply feltro e cascalho	6
Asfaltar asfalto	3
Azulejos de argila	9-14
Madeira de bainha	3
Isolação 1 dentro. Esvaziou-se no lugar	2
Partições	
Telha de argila 10 dentro.	40
Bloco de gesso 5.	14
Garanhões de madeira 2x4 (12-16 dentro). O.C.)	2
Plaster 1 dentro. Cimento	10
Plaster 1 dentro. Gipso	5
Paredes	
Tijolos 12 dentro.	120
Bloco de concreto oco (agregado pesado)	
Quatro dentro.	30
8 dentro.	55
- 12 dentro.	80
Bloco de concreto oco (agregado leve)	
Quatro dentro.	21
8 dentro.	38
- 12 dentro.	55

Tabela B.3: Pesos de materiais de construção

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Uso ou Ocupação	lb/ft^2
Áreas de montagem	50
Cornijas, marquises, varandas residenciais	60
Corredores, escadas	100
Garagem	50
Edifícios de escritórios	50
Residência	40
Armazenagem	125-250

Tabela B.4: Cargas mínimas distribuídas uniformemente, (ICBO, 1994)

Zona de Altura	Área de Mapa Vento-Velocidade						
(em pés)	20	25	30	35	40	45	50
<30	15	20	25	25	30	35	40
30 a 49	20	25	30	35	40	45	50
50 a 99	25	30	40	45	50	55	60
100 a 499	30	40	45	55	60	70	75
500 a 1199	35	45	55	60	70	80	90
>1,200	40	50	60	70	80	90	100

Tabela B.5: Variação da velocidade do vento acima do solo

C_e	Exposição	
1.39-2.34	D	Terreno aberto e plano, voltado para grandes corpos de água
1.06-2.19	C	Terreno plano aberto, estendendo-se meia milha ou aberto do local em qualqu
0.62-1.80	B	Terreno com prédios, florestas ou irregularidades de superfície 20 pés ou mais

Tabela B.6: C_e Coeficientes para a carga do vento, (ICBO, 1994)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

		Face de barlavento	Face de sotavento
Gable Pórticos (V:H)			
"Slope de Telhado"	<9:12	−0.7	−0.7
	9:12 às 12:12	0.4	−0.7
	>12:12	0.7	−0.7
Paredes		0.8	−0.5
Edifícios (altura) < 200 ft)			
Projeções verticais	altura < 40 ft	1.3	−1.3
	altura > 40 ft	1.4	−1.4
Projeções Horizontais		−0.7	−0.7

Tabela B.7: Coeficientes de pressão do vento C_q, (ICBO, 1994)

	Categoria de ocupação	**Fator de importância** I	
		Terremoto	**Vento**
I	Instalações essenciais	1.25	1.15
II	Instalações perigosas	1.25	1.15
III	Estruturas de ocupação especiais	1.00	1.00
IV	Estruturas de ocupação padrão	1.00	1.00

Tabela B.8: Fatores de importância para o vento e a carga do terremoto, (ICBO, 1994)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Altura Acima Grau (ft)	Exposição			
	B		C	
	Velocidade do vento básica (mph)			
	70	80	70	80
0-15	10	13	17	23
20	11	14	18	24
25	12	15	19	25
30	12	16	20	26
40	14	18	21	28
60	17	22	25	33
80	18	24	27	35
100	20	26	28	37
120	21	28	29	38
160	23	30	31	41
200	25	33	33	43
300	29	37	36	47
400	32	41	38	50

Tabela B.9: Pressão aproximada do vento p para a força eólica comum resistindo estruturas de construção

Zona sísmica	0	1	2A	2B	3	4
Z	0	0.075	0.15	0.2	0.3	0.4

Tabela B.10: Z fatores para diferentes zonas sísmicas, UBC1994

Tipo	Descrição	S Fator
S_1	Um perfil do solo com material rock-like ou terra dura/densa menos de 200 pés.	1.0
S_2	Solo denso ou duro acima de 200 pés	1.2
S_3	70 pés ou mais de solo contendo mais de 20 pés de argila macia a média dura, mas não Mais de 40 pés. de argila macia.	1.5
S_4	Solo contendo mais de 40 pés de argila macia	2.0

Tabela B.11: S Coeficientes locais para carregamento de terremotos, (ICBO, 1994)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Sistema Estrutural	R_W	H (ft)
Sistema de parede de rolamentos		
Paredes com moldura clara com painéis cisalhamento		
Paredes de madeira compensada para estruturas de três andares ou menos	8	65
Todas as outras paredes com molduras de luz	6	65
Paredes		
Concreto	8	240
Alvenaria	8	160
Sistema de construção pórtico usando cordas ou paredes cisalhamento		
Aço excentricamente reforçado, dúctil	10	240
Paredes com moldura clara com painéis cisalhamento		
Paredes de madeira compensada para estruturas de três andares ou menos	9	65
Todas as outras paredes com molduras de luz	7	65
Paredes		
Concreto	8	240
Alvenaria	8	160
Concentricamente preparado pórticos		
Aço	8	160
Concreto (apenas para as zonas I e 2)	8	-
Madeira pesada	8	65
Sistema de resistência ao momento pórtico		
Resistindo a momentos especiais pórticos (SMRF)		
Aço	12	N.L.
Concreto	12	N.L.
Concreto, resistência a momentos intermediáriosApenas para as zonas 1 e 2	8	-
Resiste a momentos comuns		
Aço	6	160
Concreto (somente para a zona 1)	5	-
Sistemas duplos (casos selecionados são para rígido dúctil pórticos apenas)		
Paredes		
Concreto com SMRF	12	N.L.
Alvenaria com SMRF	8	160
Aço excêntrico, dúctil	6-12	160-N.L.
Concentricamente preparado pórtico	12	N. L.
Aço com aço SMRF	10	N.L.
Aço com aço OMRF	6	160
Concreto com concreto SMRF (apenas para as zonas 1 e 2)	9	-

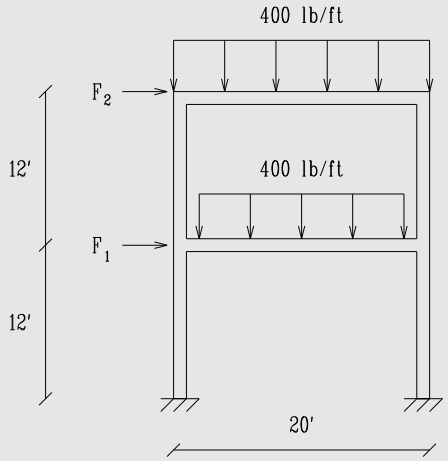
Tabela B.12: Lista parcial de R_W para vários sistemas de estrutura, (ICBO, 1994)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

B.3.1 Ex B.2: Terramoto, carga em um Pórtico

Determine as forças de terremoto aproximadas para o hospital dúctil pórtico estrutura mostrada abaixo. O DL para cada andar é 200 lb/ft e o LL é 400 lb/ft. A estrutura é construída em solo macio. Use DL mais 50%LL como o peso de cada andar. O prédio está dentro Zona 3.



1. O período fundamental da vibração é

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = (0.030)(24)^{3/4} = 0.32 \text{ sec.} \tag{B.4}$$

2. O C Coeficiente é

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(2.0)}{(0.32)^{2/3}} = 5.344 > 2.75 \tag{B.5}$$

   usar $C = 2.75$.
3. Os outros coeficientes são: Z =0.3; I=1.25; R_W=12
4. Cheque

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075\checkmark \tag{B.6}$$

5. A carga vertical total é

$$W = 2\left((200 + 0.5(400)\right)(20) = 16000 \text{ lbs} \tag{B.7}$$

6. A base sísmica total cisalhamento é

$$V = \frac{ZIC}{R_W} = \frac{(0.3)(1.25)(2.75)}{12} = 0.086W \tag{B.8}$$

$$= (0.086)(16000) = 1375\ lbs \tag{B.9}$$

7. Como $T < 0.7$ s, não há efeito de chicote.
8. A carga em cada andar é assim dada por

$$F_2 = \frac{(1375)(24)}{12+24} = 916.7lbs \tag{B.10}$$

$$F_1 = \frac{(1375)(12)}{12+24} = 458.3lbs \tag{B.11}$$

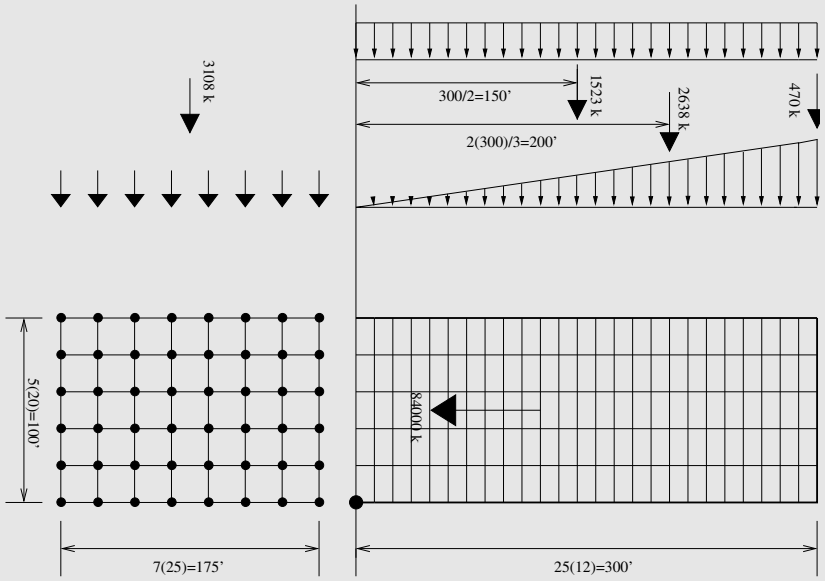
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

B.3.2 Ex B.3: Terremoto em um prédio alto

A seção seguinte é reproduzida de Schueller, 1996 The design of Building Structures.

Determine o carregamento lateral crítico aproximado para 25 andares, dúctil, espaço rígido pórtico estrutura de concreto na direção curta. Os rígidos pórticos estão espaçados 25 pés de distância no seção transversal e 20 pés na direção longitudinal. O A dimensão do plano do edifício é 175x100 pés, e a estrutura é 12 a 300 pés de altura. Este prédio está localizado em um ambiente urbano com uma velocidade de vento de 70 mph e na zona sísmica 4. Por isso investigação, um edifício total de 192 psf é usado. As condições do solo são desconhecido.



1. O peso total de construção é

$$W = (0.1926)\ \text{psf}(100 \times 175)\ \text{ft}^2 \times 25\ \text{storeys} = 84,000\ \text{k} \tag{B.12}$$

2. O período fundamental de vibração para um rígido pórtico é

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = 0.030(300)^{3/4} = 2.16\ \text{sec.} > 0.7\ \text{sec.}\checkmark \tag{B.13}$$

3. O C Coeficiente é

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(1.5)}{(2.16)^{2/3}} = 1.12 \leq 2.75\checkmark \tag{B.14}$$

4. Os outros coeficientes são Z=0.4; I=1, R_W=12
5. Nós checamos

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 \geq 0.075\checkmark \tag{B.15}$$

6. A base sísmica total cisalhamento ao longo da direção crítica curta é

$$V = \frac{ZIC}{R_W}W = \frac{(0.4)(1)(1.12)}{(12)}W = 0.037W \tag{B.16}$$

$$= (0.037)(84000) = 3108kip \tag{B.17}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

7. Como $T > 0.7$ sec., o efeito de chicote deve ser considerado.

$$F_t = 0.07TV = (0.07)(2.16)(3108) = 470 \text{ k} \leftarrow \quad \text{(B.18)}$$
$$le \quad 0.25V = (0.25)(3108) = 777 \text{ k} \quad \text{(B.19)}$$

Por isso, a carga triangular total é

$$V - F_t = 3108 - 470 = 2638 \text{ k} \quad \text{(B.20)}$$

8. Verifiquemos se a carga de vento governa. Pela Tabela xx, Nós presumimos conservadoramente uma pressão de vento uniforme de 29 psf resultando em Uma força lateral total de

$$P_W = (0.029) \text{ psf}(175 \times 300) \text{ ft}^2 = 1523 \text{ k} < 3108 \text{ k} \quad \text{(B.21)}$$

A magnitude da carga sísmica total é claramente maior do que o total Força do vento.

B.4 Cargas da ponte

Para pontes de estrada, cargas de projeto são dadas pela AASHTO (Associação de Oficiais de Transportes Estaduais Americanos. O caminhão HS-20 é usado para o projeto de pontes nas rodovias principais, Fig. B.5. Ou o caminhão de projeto com cargas e espaçamento especificados do eixo deve ser usado ou a carga uniforme equivalente e carga concentrada. Este carregamento deve ser colocado de tal forma que o máximo tensões são produzidos.

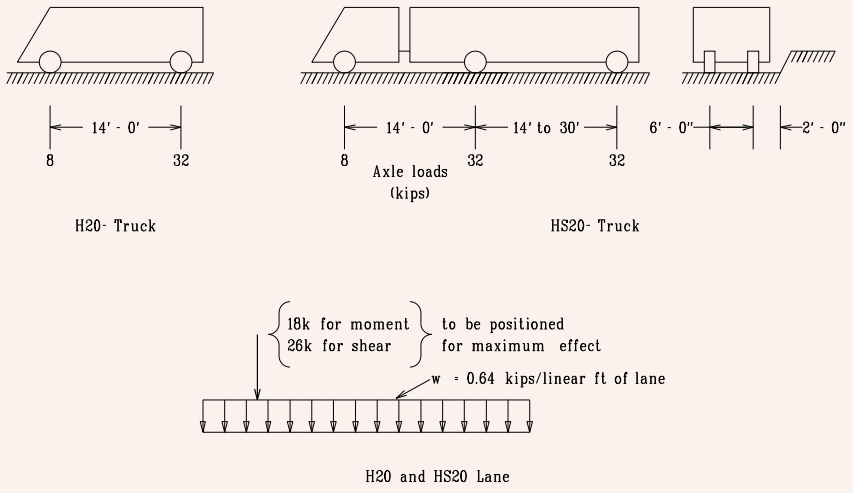


Figura B.5: Carregar o caminhão

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

B.5 Combinações de carga

15 Cargas vivas especificadas por códigos representam o máximo de cargas possíveis.

16 A probabilidade de todas essas cargas ocorrerem simultaneamente é remota. Assim, os códigos de construção permitem certa redução quando certas cargas estão juntos.

17 Além disso, estruturas devem ser projetadas para resistir a uma combinação de cargas.

18 Denotando D= morto; L= ao vivo; O telhado está ao vivo. W= vento; E= terremoto; S= neve; T= temperatura; H= solo:

19 Para o método de projeto de fator de carga e resistência (LRFD) do concreto estruturas, o American Concrete Institute (ACI) código de projeto do edifício (318) (ACI 318, 2019) requer que o seguinte Combinações de carga sejam consideradas:

1. 1.4D+1.7L
2. (1.4D+1.7L+1.7W)
3. 0,9D+1,3W
4. 1.4D +1.7L +1.7H
5. 0,75 (1,4D+1,4T+1.7L)
6. 1.4(D+T)

Considerando que para estruturas de aço, o Instituto Americano de Aço Código de construção (AISC), (American Institute of Steel Construction, 2016) requer que o seguinte As combinações serão verificadas

1. 1.4D
2. 1.2D+1.6L+0.5 (Lr ou S)
3. 1.2D+0.5L (ou 0.8W)+1.6(Lr ou S)
4. 1,2D+0,5L+0,5(Lr ou S)+1,3W
5. 1.2D+0.5L(ou 0.2S)+1.5E
6. 0,9D+1,3W(ou 1,5E)

20 A análise pode ser realizada separadamente para cada uma das cargas básicas (L, D, W, etc) e então usando o princípio da sobreposição das cargas pode ser linearmente combinado (a menos que o limite elástico tenha sido alcançado).

21 As cargas são caracterizadas como *Usual, incomum* e.. *Extremo*.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

B.6 Redução de carga ao vivo

22 A redução de carga ao vivo é um conceito importante em projeto estrutural, destinado a otimizar as cargas de projeto para os membros estruturais, por contabilizar a probabilidade reduzida de cargas totais serem aplicadas simultaneamente em grandes áreas. Esta disposição é permitida sob vários códigos de construção, incluindo (ACI 318, 2019) e.. (ASCE/SEI 7-16, 2017).

23 O princípio por trás da redução de carga ao vivo é que a probabilidade de a carga máxima ser aplicada simultaneamente diminui conforme a área tributária aumenta. Membros estruturais como vigas, vigas, e pilares suportando áreas maiores podem ser projetados para cargas vivas reduzidas.

24 ACI 318 permite redução de carga ao vivo baseado na área tributária apoiada pelo membro. Fórmulas específicas para redução de carga ao vivo são definidas para garantir segurança enquanto otimiza o projeto.

25 ASCE 7-16, Seção 4.8, fornece regras detalhadas para redução de carga ao vivo. A fórmula geral para redução de carga ao vivo é:

$$L_r = L \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right), \tag{B.22}$$

onde:

- L_r é a carga viva reduzida (PSF).
- L é a carga viva não reduzida (PSF).
- A_T é a área tributária apoiada pelo membro (em pés)^2).

26 A carga de vida reduzida não deve ser menor que:

- 50% da carga acidental original para os elementos que suportam um pavimento.
- 40% da carga acidental original para os elementos que suportam vários pavimentos.

27 A redução de carga ao vivo não é permitida em certos cenários, como:

- Áreas de montagem com altas cargas ocupantes.
- Áreas de armazenamento ou armazém.
- Áreas com cargas concentradas.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

B.6.1 Ex B.4: Redução de carga ao vivo I

Considere um pilar que suporta uma área tributária de $A_T = 400\ ft^2$, com carga acidental original de $L = 100\ psf$. A carga acidental reduzida é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_r &= L\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{400}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{20}\right) \\ &= 100\,(0.25 + 0.75) \\ L_r &= 100\,\text{psf} \end{aligned}$$

Neste caso, Sem redução ocorre porque a fórmula de redução de carga viva produz um valor igual ao da carga original.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

B.6.2 Ex B.5: Redução de carga ao vivo II

Em um prédio de 10 andares com um pilar espaçamento de 16 pés em ambas as direções, a carga total morta é 60 psf, Carga de neve 20 psf e carga ao vivo 80 ps f. Qual é a carga total e carga total para a qual A pilar deve ser projetada no piso térreo

1. A área tributária é $16 \times 16 = 256 ft^2 > 150 \checkmark$
2. A redução R É $R = .08(16 \times 16 - 150) = 8.48\%$
3. A redução máxima admissível é $R^{max} = 23.1\left(1 + \frac{60}{80}\right) = 40.4\%$, que é menor que 60% ✓
4. O reduzido *cumulativo* carga para o pilar de cada andar é

Andar	Telhado	10	9	8	7	6	5	4	3	2	Total
CUMULATIVO R (%)	8.48	16.96	25.44	33.92	42.4	51.32	59.8	60	60	60	
LL Cumulativo	20	80	80	80	80	80	80	80	80	80	740
CUMULATIVO R× LL	18.3	66.4	59.6	52.9	46.08	38.9	32.2	32	32	32	410

   A carga ao vivo resultante do projeto para o fundo pilar foi reduzida de 740 Kips para 410 Kips.
5. A carga total está morta $DL = (10)(60) = 600$ Kips, assim o total A redução da carga é $\frac{740-410}{740+600} \times 100$=25%.

B.7 Colocação de carga

[28] Só que a carga morta é estática. A carga ao vivo, por outro lado pode ou não pode ser aplicado em um determinado componente de uma estrutura. Assim, a colocação da carga Arranjo resultando no mais alto esforços internos (momento +ve ou -ve, cisalhamento) em diferentes locais deve ser considerado, Fig. B.6.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

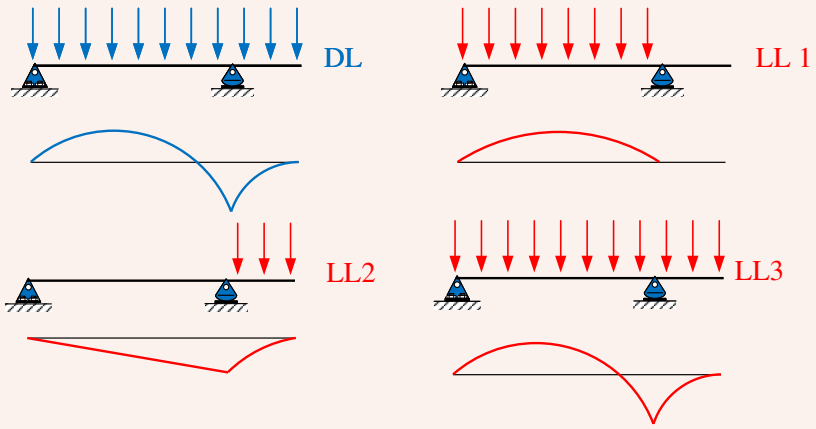


Figura B.6: Colocação de carga para maximizar momentos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice C

Equações Diferenciais Linear homogêneas

Abstract

Ao longo do livro, uma série de formulações levou a equações diferenciais de segunda ou mais frequentemente de quarta ordem. Este capítulo descreverá sucintamente suas soluções.

C.1 Resumo das equações diferenciais de governo 2424
C.2 Soluções 2425
C.3 Estabilidade I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2426
C.4 Estabilidade ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2427
C.5 Viga base elástica; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . 2428

A equação diferencial é uma equação, onde o desconhecido é uma função e tanto a função quanto seus derivados podem aparecer na equação.

C.1 Resumo das equações diferenciais de governo

Viga

(Eq. 22.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \text{ or } \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

Cabo

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Anote analogia com flexão

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

Viga grande deflexão

(Eq. 29.2)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2 \cos\phi$$

Use os Integrais Elípticos Para resolver.

Prato

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.1}$$

ou

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.2}$$

Viga base elástica

Eq. 22.3

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4 y = 0$$

C.2 Soluções

Um *É comum* (ODE) tem apenas um varle independente (como x ou t). Alternativamente, a *parcial equação diferencial* (PDE) tem mais de uma variável independente (como x, y ou x, t).

A equação diferencial é *linear* Se cada termo na equação não contém nenhuma ou exatamente uma das variáveis dependentes ou suas derivadas. Não há produtos da variável dependente com ela mesma ou seus derivados. Cada termo tem, no máximo, um poder do equivalente de x ou $\dot{x}$ ou $\ddot{x}$; ou $f(x)$ e seus derivados.

A equação diferencial tem coeficientes constantes se a variável dependente e todas as derivadas são multiplicadas apenas por constantes.

A *equação linear homogênea* é um em que o lado direito é zero (e todos os termos contêm exatamente uma potência da variável dependente e seus derivados).

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

C.3 Estabilidade I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$

A seguinte segunda ordem é

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \tag{C.3}$$

ou

$$y'' + ky = 0$$

Deve ser óbvio que a solução desta equação teria a forma

$$y = e^{\lambda x}$$

E então..

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Substituindo em Eq. C.3

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + k e^{\lambda x} = 0$$
$$\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + k) = 0$$

No entanto, desde que $e^{\lambda x}$ Nunca pode ser igual a zero, nós temos

$$\lambda^2 + k = 0 \qquad \text{characteristic equation} \tag{C.4}$$

A solução da equação característica é simplesmente

$$\lambda^2 = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k}$$

ou

$$\lambda^2 = \pm i\sqrt{k} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{k} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{k} \end{cases}$$

Substituindo essas expressões em Eq. C.3

$$y = C_1 e^{i\sqrt{k}x} + C_2 e^{-i\sqrt{k}x} \tag{C.5}$$

Invocando a fórmula de Euler (uma das muitas por ele)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{C.6}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós conseguimos

$$e^{i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)$$
$$e^{-i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)$$

Essas expressões são substituídas por Eq. C.5

$$\begin{aligned} y &= C_1\left[\cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)\right] + C_2\left[\cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)\right] \\ &= (C_1 + C_2)\cos(\sqrt{k}x) + i(C_1 - C_2)\sin(\sqrt{k}x) \end{aligned}$$

Podemos introduzir novas constantes de integração D_1 e.. D_2

$$y = D_1\cos(\sqrt{k}x) + D_2\sin(\sqrt{k}x) \tag{C.7}$$

C.4 Estabilidade ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Estabilidade, 29.21.

De novo, a solução de

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

é procurado na forma $y = e^{\lambda x}$.. Então..

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$
$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}.$$

Substituindo pelo equação diferencial dá

$$\left(\lambda^4 + k^2\lambda^2\right)e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 + k^2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0.$$

Ajustando mais,

$$\lambda^2(\lambda - ik)(\lambda + ik) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = ik, \\ \lambda_4 = -ik. \end{cases} \tag{C.8}$$

Porque.. $\lambda = 0$ É uma raiz dupla, sua contribuição é $(C_1 + C_2x)e^{0x} = C_1 + C_2x$.. As raízes conjugadas complexas produzem termos exponenciais $e^{\pm ikx}$.. Daí a solução geral é

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx}.$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Usando as identidades de Euler,

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \qquad e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx),$$

a parte oscilatória pode ser escrita como uma combinação linear de $\cos(kx)$ e.. $\sin(kx)$ (com uma redefinição de constantes). Portanto,

$$y = C_1 + C_2x + C_3\cos(kx) + C_4\sin(kx).$$

C.5 Viga base elástica; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$

Viga base elástica 22.3

Dada a seguinte quarta ordem

$$y^{(4)} + ky = 0 \tag{C.9}$$

Estamos prontos

$$m^2 = \sqrt{\frac{k}{4}} \text{ or } k = 4m^4$$

O equação diferencial se torna

$$y^{(4)} + 4m^4 = 0 \tag{C.10}$$

Novamente, deve ser óbvio que a solução desta equação teria a forma

$$y = e^{\lambda x}$$

e

$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}$$

Substituindo-se em Eq. C.10 Nós conseguimos

$$e^{\lambda x}(\lambda^4 + 4m^4) = 0$$

De novo, $e^{\lambda x}$ Nunca pode ser igual a zero, assim a equação característica correspondente será

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \tag{C.11}$$

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2m^2i)(\lambda^2 + 2m^2i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = m(1+i) \\ \lambda_2 = m(1-i) \\ \lambda_3 = m(-1+i) \\ \lambda_4 = m(-1-i) \end{cases}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Substitua as soluções em Eq. C.9

$$y = C_1 e^{m(1+i)x} + C_2 e^{m(1-i)x} + C_3 e^{m(-1+i)x} + C_4 e^{m(-1-i)x}$$

No entanto $e^{a+b} = e^a e^b$, e invocando novamente a equação de Euler (Eq. C.6)

$$y = e^{(mx)} \left(C_1 \sin(mx) + C_2 \cos(mx)\right) + e^{(-mx)} \left(C_3 \sin(mx) + C_4 \cos(mx)\right) \tag{C.12}$$

Uma solução mais elegante começará usando

$$e^x = \cosh x + \sinh x; \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

e substituto

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 \sin(mx)\sinh(mx) - C_3 \sin(mx)\sinh(mx) \\ & + C_2 \cos(mx)\sinh(mx) - C_4 \cos(mx)\sinh(mx) \\ & + C_2 \cos(mx)\cosh(mx) + C_4 \cos(mx)\cosh(mx) \\ & + C_1 \sin(mx)\cosh(mx) + C_3 \sin(mx)\cosh(mx) \end{aligned}$$

Rearranjando

$$y = D_1 \cos(mx)\cosh(mx) + D_2 \sin(mx)\sinh(mx)) \tag{C.13}$$
$$+ D_3 \cos(mx)\sinh(mx) + D_4 \sin(mx)\cosh(mx) \tag{C.14}$$

Que são análogas às quatro funções de Krylov (Kolosova e Kuroyedov, 2013).

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice D

Arcos elásticos; Análises Avançadas

Resumo

Este apêndice desenvolve equações analíticas para a análise elástica de arcos circulares simétricos sob várias condições de carga. Usando princípios de estática, menos trabalho, e trabalho virtual, soluções em forma fechada são derivadas para três torções, duas torções e arcos sem dobradiças com variáveis trigonométricas que definem geometria do arco. Os métodos analíticos são validados contra soluções numéricas do SAP 2000 e ilustrados através de exemplos detalhados que cobrem cargas concentradas, peso próprio, e uniformemente cargas distribuídas. Esforços internos (cisalhamento, axial, e momento) através do arco de extensão são calculados sistematicamente, e o comportamento estrutural de cada tipo de arco é analisado para revelar diferenças nos padrões de reação, caminhos de carga, e distribuição tensão.

D.1 Introdução 2431
D.2 Arco circular de três torções 2431
D.2.1 Procedimento de análise . . 2432
D.2.2 Carga concentrada 2433
D.2.3 Peso próprio 2439
D.2.4 Carga uniformemente distribuída 2443
D.2.5 Arco circular de três torções: validação 2445
D.2.6 Conclusão 2447
D.3 Arco circular de duas dobradiças . . 2448
D.3.1 Procedimento de análise . . 2448
D.3.2 Carga concentrada 2448
D.3.3 Peso próprio 2459
D.3.4 Carga uniformemente distribuída 2467
D.3.5 Arco circular de duas voltas: validação 2471
D.3.6 Conclusão 2474
D.4 Arco circular sem dobras 2474
D.4.1 Procedimento de análise . . 2474
D.4.2 Carga concentrada 2475
D.4.3 Peso próprio 2488
D.4.4 Carga uniformemente distribuída 2496
D.4.5 Arco circular sem dobras: validação 2501
D.4.6 Conclusão 2503
D.5 Conclusão 2503

Parte 2: Tabelas de Análise e Projeto Estrutural

Da Tese Mestre "Analysis of Arches" por Sonavane, 2014

CÓPIA PARA REVISÃO

D.1 Introdução

Este capítulo foca particularmente na aplicação da estática, principal do menos trabalho e método trabalho virtual para desenvolver equações analíticas para arcos circulares simétricos de três torções, duas torções e sem dobra sob diferentes condições de carga. As equações analíticas são feitas genéricas pela introdução de certas variáveis trigonométricas que definem geometria de cada tipo do arco. As equações são validadas usando exemplos discutidos na literatura existente. Além disso, um programa análise estrutural, Sap 2000 é usado para desenvolver modelos para os três tipos de arcos mencionados acima e sua análise é comparada com as soluções obtidas usando as equações analíticas. As soluções das equações analíticas são mais usadas para discutir o comportamento estrutural de cada tipo de arco.

Um arco de três torções na figura D.1 representa as variáveis trigonométricas que definem a geometria de um arco circular simétrico que são usadas para derivar as equações analíticas. Variáveis semelhantes são usadas para um arco de duas torções e um arco sem dobras. A forma ACB representa um arco, onde A e B são os pilares e o ponto C é a coroa do arco. Distância y0 representa a elevação do arco onde como distância x1 representa metade do arco. Carta α indica um ângulo feito por uma linha que conecta o centro do círculo e o pilar com a horizontal, consequentemente quando α É zero, é um arco semicircular. Todas as dimensões e ângulos são medidos para o pilar B. Carta θ indica um ângulo em que uma carga P é aplicada na costela do arco. Forças Ax e Bx são as reações horizontais e forças Ay e By são as reacções verticais nos pilares. Força cortante (V), força axial (N) e Momento (M) são os esforços internos em qualquer ângulo β através do arco. Figura D.1b indica a convenção de sinais usada para o esforços internos, onde sinal positivo é assumido para relógio sábio Momento, para fora Força cortante e tração Força axial. No geral, a nomenclatura usada na definição da geometria do arco inclui letras maiúsculas para indicar todas as forças e letras minúsculas para apontar todas as dimensões.

Trignometric Variables

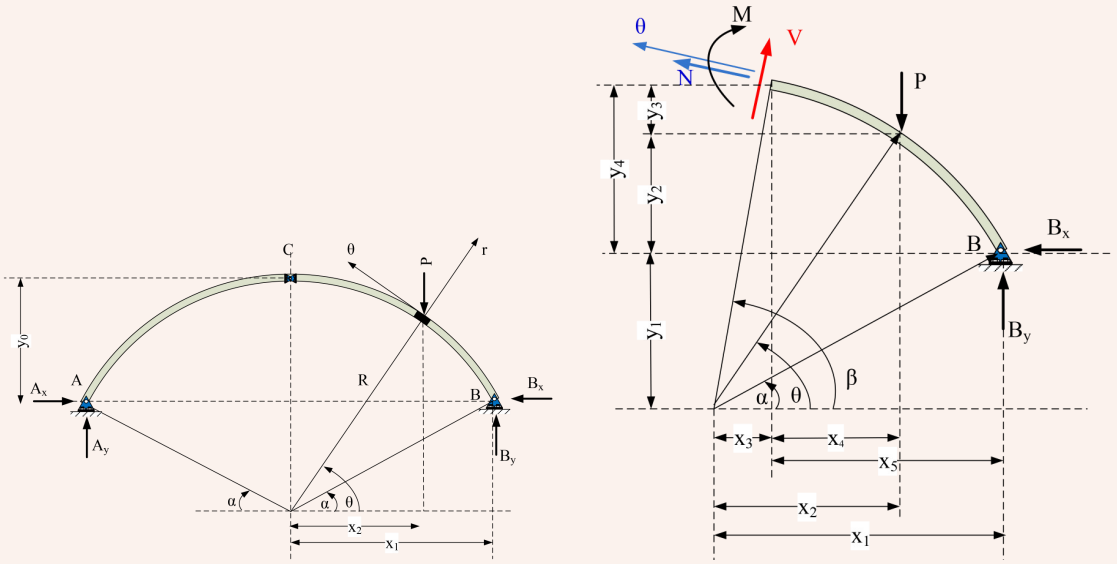
x1=R Cos[α]; x2=R Cos[θ]; x3= R Cos[β]; x4=x2 − x3; x5=x1 − x3;
y0=R(1 − Sin[α]); y1=R Sin[α]; y2=R (Sin[θ] − Sin[α]); y3=R Sin[β] − y1 − y2; y4=R Sin[β] − y1;

D.2 Arco circular de três torções

Um arco circular simétrico de três giros tem quatro reações globais - duas em cada suporte. A principal diferença entre um arco de três dobradiças e um arco duplo ou Hingless é a descontinuidade da costela do arco devido à dobradiça na coroa, que converte um arco

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Reações (b) Esforços internos

Figura D.1: Geometria do arco circular

triangulado em dois componentes curvados suportados independentemente. Em cada um dos componentes independentes, há duas reações iguais e apropriadas. Assim, com duas reações desconhecidas e três equações de equilíbrio para cada componente, um arco circular simétrico de três torções é uma estrutura estaticamente determinada.

D.2.1 Procedimento de análise

Para fins de análise, três condições de carga são consideradas; A carga concentrada, peso próprio do arco e aplicado carga uniformemente distribuída através do arco. O auto-peso e o carga uniformemente distribuída são simétricos sobre o centro do arco onde como um carga concentrada, quando aplicado em qualquer lugar, exceto na coroa, é assimétrico sobre o meio do arco. Assim, para ilustrar a análise, os mesmos números são usados para o peso próprio e as condições de carga uniformemente distribuídas onde como diferentes conjuntos de figuras são usadas para a condição carga concentrada. A análise para as três condições de carga é realizada em três etapas usando Mathematica, onde reações no suporte são calculadas na primeira etapa, esforços internos através do arco são computadas na segunda etapa e usando as equações para esforços internos do segundo passo. Os arquivos do Mathematica para todas as etapas estão incluídos em seções relevantes e para simplificação apenas equações finais para reações e esforços internos são expandidos. As equações analíticas para reações de apoio e esforços internos são em termos das variáveis trigonométricas definidas acima.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

D.2.2 Carga concentrada

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dp = P \tag{D.1}$$

Reações

Considerando a Figura D.2, as reações horizontais e verticais nos suportes são determinadas. Quando um carga concentrada é aplicado em qualquer lugar, exceto na coroa de um arco cria uma condição assimétrica de carga sobre o centro do arco. Como a expressão para a reação vertical 'Por' é dependente da localização do carga concentrada P em relação à coroa C, dois conjuntos diferentes de equações são desenvolvidos, um para a condição $\theta < \frac{\Pi}{2}$ e outro para a condição $\theta \geq \frac{\Pi}{2}$. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a

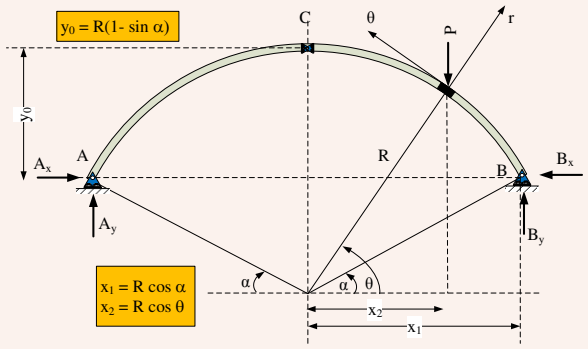


Figura D.2: Arco circular de três torções sob carga concentrada

derivação para computação reação de apoio.

Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY /.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

$\theta < \frac{\pi}{2}$
Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − Px2;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$\frac{-P\text{Cos}[\alpha]+P\text{Cos}[\theta]}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

0

```
Clear[AX]; Clear[BX];
```

$\theta > \frac{\pi}{2}$
Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

0

Esforços internos

Enquanto a localização de um carga concentrada em qualquer lugar, exceto na coroa de um arco, cria uma condição de carga assimétrica, também causa descontinuidade no esforços internos. Esta descontinuidade no esforços internos na figura D.3.. Daí a expressão para o esforços internos em qualquer ângulo β através do arco é dependente de sua relação com respeito ao ângulo θ em que o carga concentrada é aplicado. Levando em consideração as

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

seguintes condições, diferentes conjuntos de equações são desenvolvidos para o esforços internos.

$$\theta < \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta, \quad \theta \geq \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta \tag{D.2}$$

O diagrama de corpo livre na figura D.4 é usado para determinar o esforços internos -

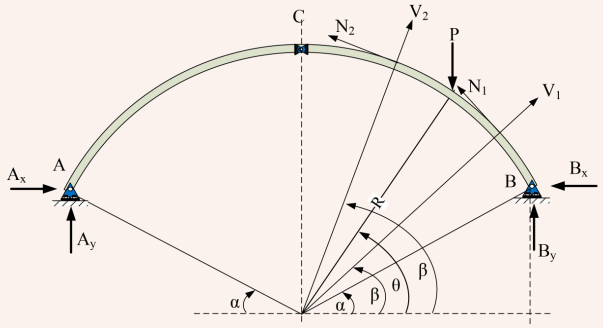


Figura D.3: Relacionamento de β com respeito a θ

axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. A seguir está a

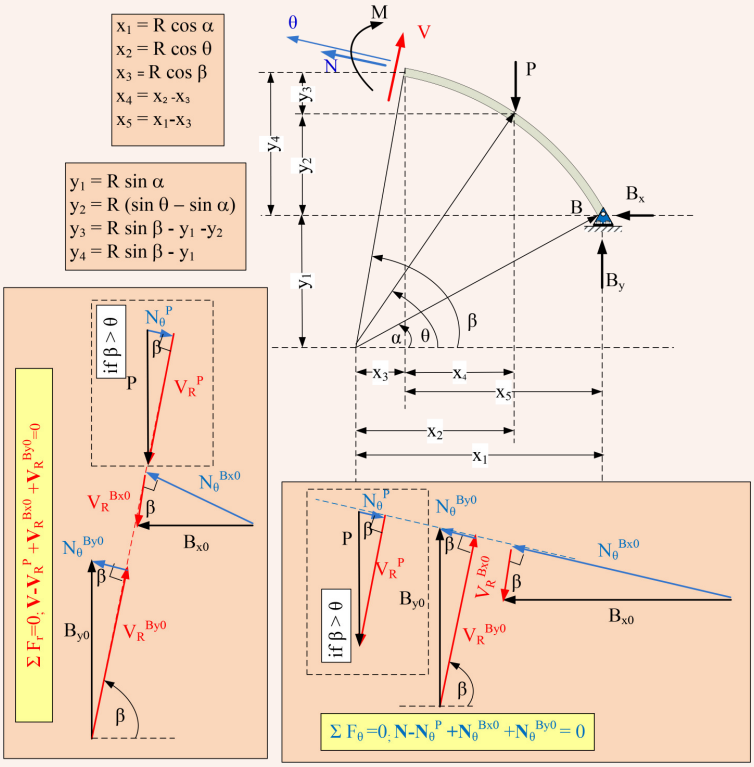


Figura D.4: Fbd de três torções, arco circular sob carga concentrada

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

saída do Mathematica ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco.

Internal Forces

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= − BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$\frac{P(-\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Internal Forces

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= − BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]-\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] - 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Deflexão

Alguns
eixos para calcular a deflexão que forneceu solução complexa. Portanto, precisa de mais investigação em trabalhos futuros.

Resumo dos resultados

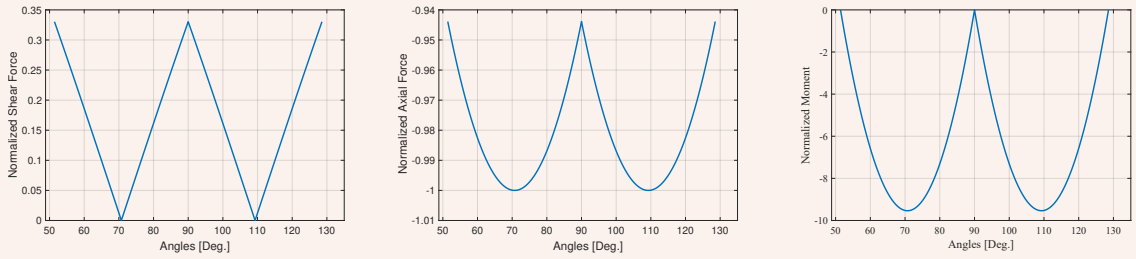


Figura D.5: Lotes de esforços internos para arco circular de três torções sob carga concentrada

Figura D.5 Mostrar enredos para um exemplo de arco com três torções discutido na seção acima. Um carga concentrada é aplicado na coroa do arco. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. Como indicado pelo enredo, todos esforços internos são simétricos sobre a coroa do arco e o arco de três torções se comporta como dois componentes curvados independentes. A força de compressão axial é maior no ponto médio de cada componente e diminui em direção aos suportes dobradilhados com a diferença de cerca de 5% entre o alto e o baixo forças axiais. O momento interno é zero nas dobradiças e é mais alto no

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ponto médio de cada componente. O força cortante por outro lado é comparativamente menor que o interno força axial e momento e é zero nas localizações do momento interno máximo.

D.2.3 Peso próprio

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.3}$$

Reações

Considerando a Figura D.6, as reações horizontais e verticais nos suportes são determinadas. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação reação de

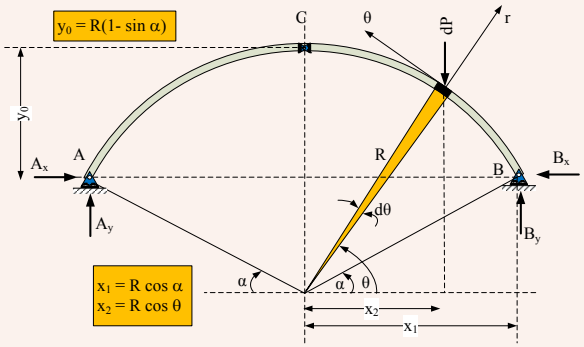


Figura D.6: Arco circular de três voltas sob o próprio peso

apoio.

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

dP′=wR;

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

BY= $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ dP′ $d\theta$

$$Rw\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

SigMC= − BXy0 + BYx1 − $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ x2dP′ $d\theta$;

Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]

$$-\frac{R(-2w+\pi w\text{Cos}[\alpha]-2w\alpha\text{Cos}[\alpha]+2w\text{Sin}[\alpha])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

CX=BX;

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{CX(y1} + \text{y0)} - \int_{\alpha}^{\pi/2} \text{x2dP}' d\theta\right]$

0

Esforços internos

O diagrama de corpo livre na figura D.7 é usado para determinar o esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. A seguir está a

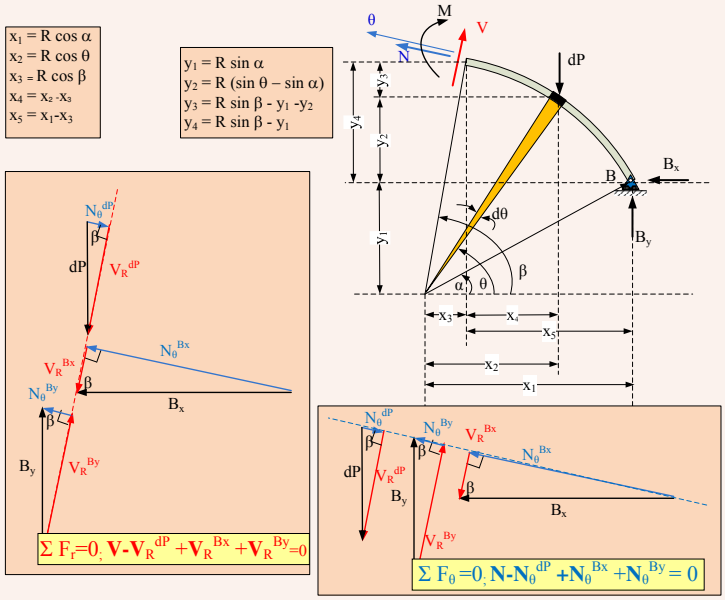


Figura D.7: Um arco circular de três voltas sob o peso próprio

saída do Mathematica ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento.

CÓPIA PARA REVISÃO

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFV= − BXCos[β] + BYSin[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Sin[β]$d\theta$ + V;

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; $V[\beta_]$=V /.Sol2[[1]]

$$-\frac{Rw(\text{Cos}[\beta](-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\beta)(-1+\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Cos[β]$d\theta$ + N;

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[$\beta_$]=N /.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2}Rw\left(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]+\frac{(-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM=BXy4 − BYx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + M;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]]; $M[\beta_]$=M /.Sol4[[1]]

$$\frac{R^2w(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha](-1+\text{Sin}[\beta]))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Deflexão

As equações analíticas desenvolvidas acima são usadas para calcular a deflexão em um arco circular simétrico (Kinney, 1957, pg 547-558)Seguem-se os valores numéricos usados para a variável trigonométrica,

Largura da costela do arco (b) = 2 pés, Arch Rib Profundidade(d) = 3 pés, Área(a) = 6 ft^2, Momento de inércia (i) = 4,5 ft^4, Módulo de elasticidade(e) = 3645 Ksi, α= 0,8975 rad., Raio (R) = 160,35 pés, Span = 200 pés, Subir = 35 pés, W=2.275 kip/ft

A seguinte equação de trabalho virtual é usada para calcular a deserção no exemplo considerado do arco.

$$\delta P.\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}RD\beta+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}RD\beta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{M\ \delta\text{M3}}{EI}RD\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M\ \delta\text{M4}}{EI}RD\beta\right] \tag{D.4}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Onde

δP	Carga externa da unidade virtual aplicada na direção de Δ
Δ	deslocamento externo causado pela carga real aplicada
M	Momento interno na viga causado por carga real
δM1$(\beta < \theta)$,	Momento interno causado devido ao externo
δM2$(\beta \geq \theta)$	Unidade virtual de carga quando $\theta < \frac{\pi}{2}$
δM3$(\beta < \theta)$,	Momento interno causado devido ao externo
δM4$(\beta \geq \theta)$	Unidade virtual de carga quando $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

Resumo dos resultados

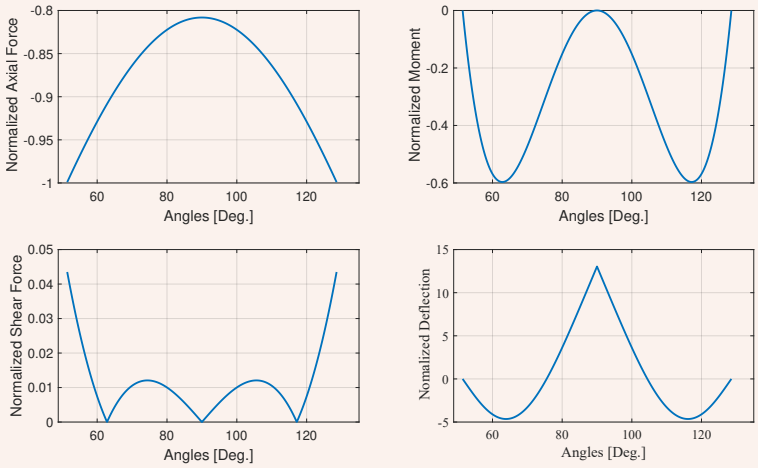


Figura D.8: Tramas para arco circular de três voltas sob o peso próprio

Figura D.8 Mostrar parcelas para o exemplo do arco de três torções sob auto-peso discutido na seção acima. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. A força de compressão axial é mais alta nos pilares e diminui em direção à coroa para cerca de 81% do valor máximo. O força cortante por outro lado é relativamente baixo e varia entre cerca de 4% e 1%, respectivamente do pilar para a coroa. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. O momento interno é zero na localização das dobradiças e é mais alto entre as dobradiça. Sem ponto de inflexão no diagrama do momento entre as dobradiças, pode-se dizer que um arco com três torções sob o peso próprio se comporta como dois componentes curvados suportados independentemente. Deflexão em um arco de três torções é mais alto na coroa e reduz para cerca de 40% do máximo em $\frac{1}{6}$ da extensão dos pilares. Como os suportes são imóveis, a deflexão para baixo causada em componentes individuais curvados empurra a coroa para cima.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

D.2.4 Carga uniformemente distribuída

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.5}$$

Reações

Considerando a Figura D.6, as reações horizontais e verticais nos suportes são determinadas. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação reação de apoio.

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wRSin[θ];
```

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

```
BY= ∫_α^(π/2) dP' dθ
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − ∫_α^(π/2) x2dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]^2}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

```
MO=FullSimplify [BXy1 + BYx1 − CX(y1 + y0) − ∫_α^(π/2) x2dP' dθ]
```

$$0$$

Esforços internos

O diagrama de corpo livre na figura D.7 é usado para determinar o esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. Segue-se a saída

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

do Mathematica, ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco.

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFV= − BXCos[β] + BYSin[β] − ∫_α^β dP'Sin[β]dθ + V;
```

```
Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]];V[β_]=V /.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2} R w \text{Cos}[\beta](1 + \text{Sin}[\alpha] - 2\text{Sin}[\beta])$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] − ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + N;
```

```
Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]];NN[β_]=N /.Sol3[[1]]
```

$$\frac{1}{2} R w \left(-2\text{Cos}[\beta]^2 + \frac{\text{Cos}[\alpha]^2 \text{Sin}[\beta]}{-1 + \text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM=BXy4 − BYx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + M;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]];M[β_]=M /.Sol4[[1]]
```

$$\frac{1}{2} R^2 w(-1 + \text{Sin}[\beta])(-\text{Sin}[\alpha] + \text{Sin}[\beta])$$

D.2.4.1 Deflexão

O processo para calcular a deflexão em arco circular de três eixos sob carga uniformemente distribuída, bem como os valores numéricos usados para a variável trigonométrica são semelhantes aos do Self-weight discutido na seção D.2.3 e, portanto, não é mostrado aqui.

Resumo dos resultados

Figura D.9 Mostrar parcelas para o arco de três torções sob carga uniformemente distribuída discutido na seção acima. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. A força de compressão axial é mais alta nos pilares e diminui em direção à coroa para cerca de 82,5% do valor

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

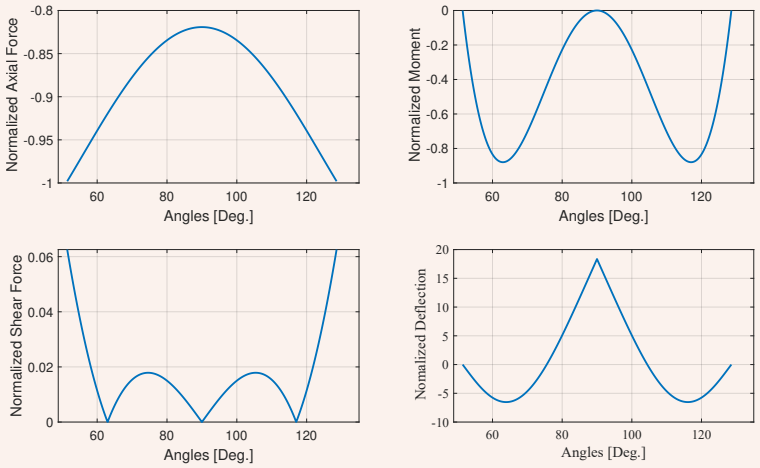


Figura D.9: Tramas para arco circular de três torções sob carga uniformemente distribuída

máximo. O força cortante por outro lado é relativamente baixo e varia entre cerca de 6% e 2%, respectivamente do pilar para a coroa. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. O momento interno é zero na localização das dobradiças e é mais alto entre as dobradiça. Deflexão em um arco de três torções é mais alta na coroa e reduz-se a cerca de 33 % do máximo em $\frac{1}{6}$ da extensão dos pilares. Como os suportes são imóveis, a deflexão para baixo causada em componentes individuais curvados empurra a coroa para cima.

D.2.5 Arco circular de três torções: validação

As equações analíticas desenvolvidas acima para o arco circular de três eixos sob carga concentrada, peso próprio e carga uniformemente distribuída são validadas em duas etapas. Em primeiro lugar, o peso próprio e carga uniformemente distribuída aplicado através da extensão do arco são divididos em série de 20 cargas concentradas. Os gráficos de esforços internos são plotados usando as equações analíticas para o autopeso e carga uniformemente distribuída juntamente com seus respectivos cargas concentradas. Estes gráficos estão sobrepostos para verificar a validade das soluções analíticas. Como o peso próprio ou o carga uniformemente distribuída são equivalentes à sua respectiva série de cargas concentradas seus enredos combinam estreitamente entre si.

Figura D.10 e Figura D.11 ilustra o processo acima discutido usado para validar as equações analíticas. Em segundo lugar, um modelo Sap 2000 é desenvolvido para o arco circular de três torções sob auto-peso caso. No momento, os diagramas força cortante e força axial de sua análise são comparados com os gráficos traçados usando a equação analítica.

Os valores numéricos no diagrama do momento na Figura D.12, força axial diagrama na figura D.13 e força cortante diagrama na figura D.14 coincide com seus respectivos valores nos gráficos da Figura D.10.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

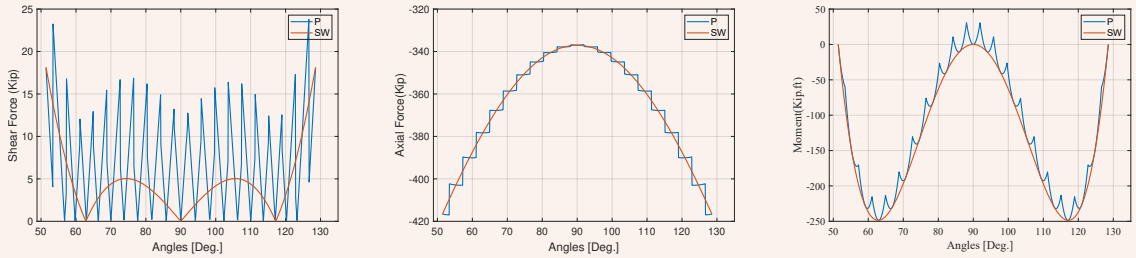


Figura D.10: Arco circular de três torções sob auto-peso vs. Série de carga concentrada

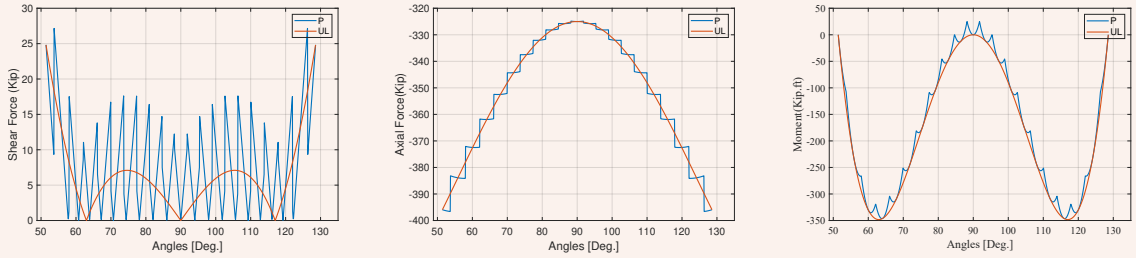


Figura D.11: Arco circular de três torções sob uniformemente distribuir carga vs. série de carga concentrada

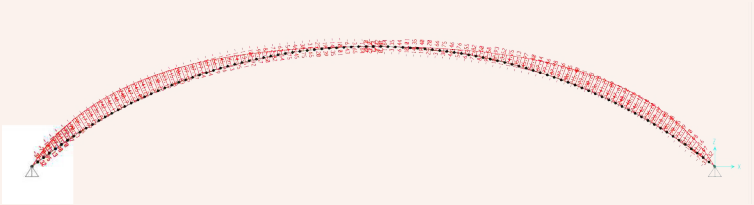


Figura D.12: Sap 2000 - diagrama momentâneo de arco circular triangulado sob o peso próprio

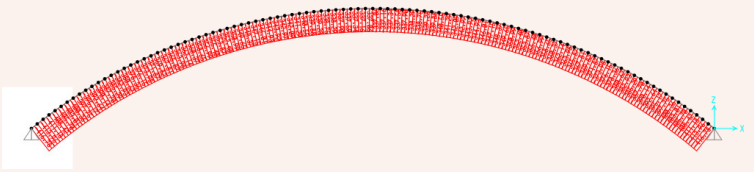


Figura D.13: Sap 2000 - força axial diagrama de arco circular com três torções sob o peso próprio

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

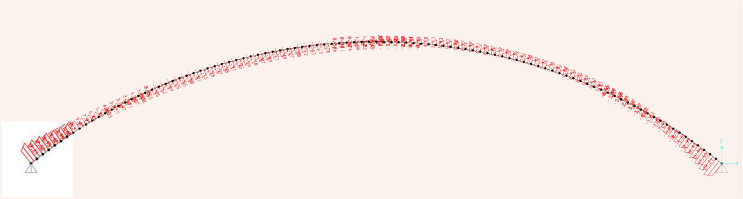


Figura D.14: Sap 2000 - força cortante diagrama de arco circular com três torções sob o peso próprio

D.2.6 Conclusão

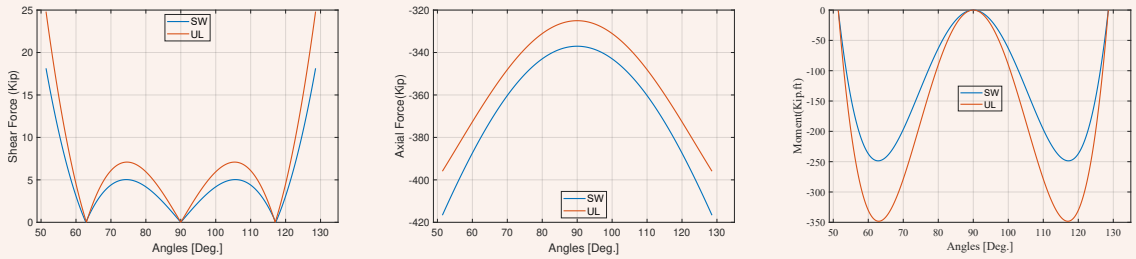


Figura D.15: Arco circular de três torções sob auto-peso vs. Udl

Esta seção discute o comportamento estrutural de um arco com três torções sob carga concentrada, peso próprio e Carga uniformemente distribuída em termos de esforços internos e deflexão. Figura D.15 Compara a condição de carga do peso com a condição uniformemente distribuída sob uma carga igual w=2.275 kip/ft. Comparado com o peso próprio, um carga uniformemente distribuída causa mais interno força cortante e momento, e causa menos compressão interna força axial. Figura D.16 Para isso, uma carga unitária é

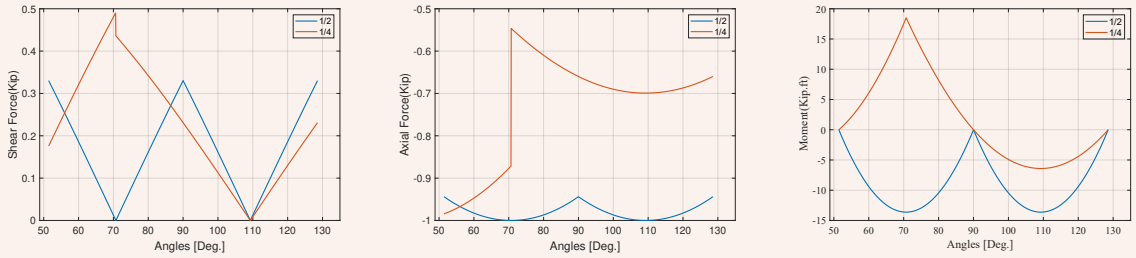


Figura D.16: Arco circular de três torções sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão

aplicada na coroa e no quarto da extensão. Sob esta condição, o momento máximo devido ao carga concentrada aplicado no quarto da extensão é cerca de 1,5 vezes mais do que o aplicado na coroa. O máximo força axial devido ao carga concentrada aplicado no quarto do vão é mais próximo do que o aplicado na coroa.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

D.3 Arco circular de duas dobradiças

Um arco circular simétrico de duas voltas tem quatro reações, duas em cada suporte. Uma vez que a costela de um arco com dois eixos é contínua entre os apoios e o ponto dos suportes são imóveis, carga aplicada não só produzir reações verticais, mas também horizontais, comumente conhecido como um impulso. Com apenas três equações de equilíbrio para resolver as quatro forças reativas desconhecidas, um arco bipartido é estaticamente indeterminado em primeiro grau.

D.3.1 Procedimento de análise

Para começar, uma reação redundante do arco estaticamente indeterminado de duas torções, doravante chamado como uma estrutura original é removida, convertendo-a em um arco estáticamente determinado, agora chamado como estrutura primária. Usando o método comum de estática, os reação de apoio e esforços internos na estrutura primária devido à carga aplicada são calculados. Mais tarde, assumindo que não existe força externa na estrutura primária, uma unidade de força virtual é aplicada no local da força redundante removida e o esforços internos causado pela carga unitária são computados. Equação de compatibilidade para a deformação de um arco sob carga aplicada é considerada para calcular a reação redundante no arco original estaticamente indeterminado de duas dobras. Uma vez que todos os reações de apoio são encontrados, o esforços internos no arco são calculados usando método comum de estática. O processo de análise descrito aqui é realizado em sete etapas usando o Mathematica.Os arquivos do Mathemastica para todas as etapas estão incluídos em seções relevantes e para simplificação apenas equações finais para reações e esforços internos são expandidos.

Para fins de análise, três condições de carga são consideradas; A carga concentrada, peso próprio do arco e aplicado carga uniformemente distribuída através do arco. O auto-peso e o carga uniformemente distribuída são simétricos sobre o centro do arco onde como um carga concentrada, quando aplicado em qualquer lugar, exceto na coroa, é assimétrico sobre o meio do arco. Assim, para ilustrar a análise, as mesmas figuras são usadas para o peso próprio e as condições de carga uniformemente distribuídas onde como diferentes conjuntos de figuras são usados para a condição carga concentrada forças são em termos das variáveis trigonométricas definidas acima.

D.3.2 Carga concentrada

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dp = P \tag{D.6}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

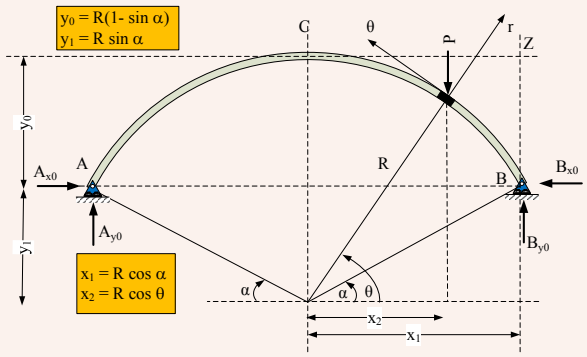


Figura D.17: Arco circular de duas voltas sob carga concentrada

Estrutura Primária: Reações e Esforços internos

A força redundante Bxo no pilar B no arco original de duas voltas mostrado na Figura D.17 é removido convertendo-o em uma estrutura primária. A localização de um carga concentrada em qualquer lugar no arco causa descontinuidade no esforços internos. Esta descontinuidade no esforços internos na figura D.3Por isso a expressão para o esforços internos em qualquer ângulo β através do arco é dependente de sua relação com respeito ao ângulo θ em que o carga concentrada é aplicado. Levando em consideração as seguintes condições, diferentes conjuntos de equações são desenvolvidos para o esforços internos.

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.7}$$

O diagrama de corpo livre na figura D.18, é usado para determinar as reações horizontais e verticais nos suportes, bem como o esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. A seguir está a saída do Mathematica, ilustrando a derivação para computação reação de apoio.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY /.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

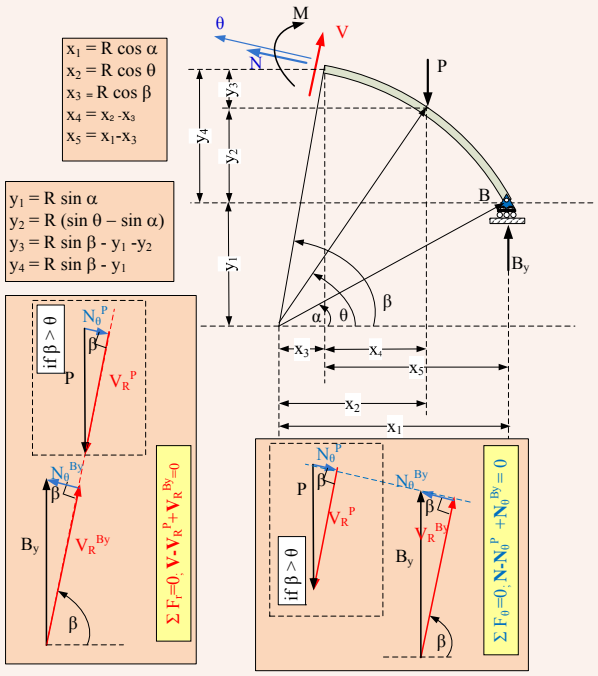


Figura D.18: Arco circular de duas pontas após remover o impulso redundante no pilar b'

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Primary Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1=BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BYCos[β] + NN1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,NN1]]; NN1[β_]=NN1/.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1= − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(R\text{Cos}[\alpha] - R\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

For $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2=BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(-1 + \text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BYCos[β] − PCos[β] + NN2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,NN2]]; NN2[β_]=NN2/.Sol8[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](-1 + \text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2= − BYx5 + Px4 + M2;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Estrutura Primária: Força da Unidade Virtual

Uma unidade de força virtual é aplicada no local Bxo na direção deslocamento do pilar B sob carga real. O diagrama de corpo livre na figura D.19, é usado para determinar o esforços internos em qualquer ângulo β através do arco causado devido à carga da unidade virtual. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação esforços internos causada por força virtual.

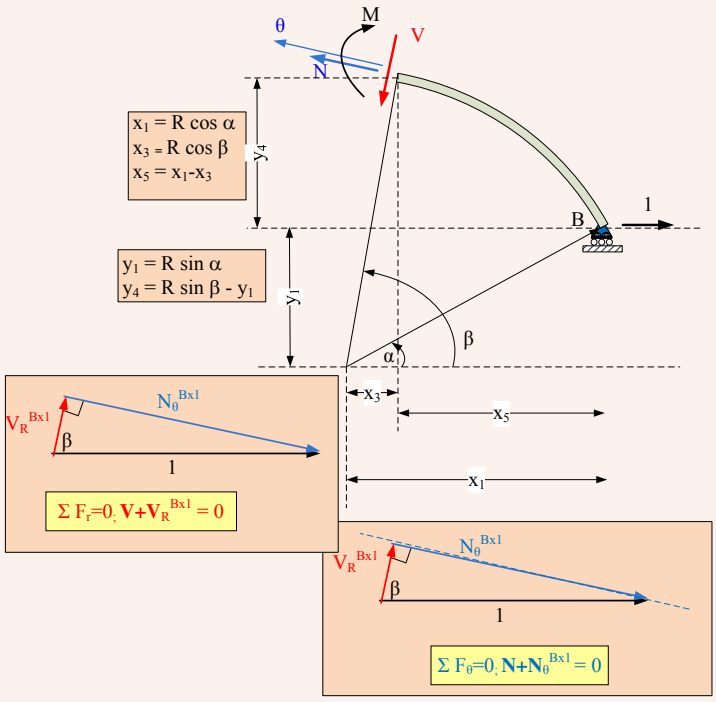


Figura D.19: Arco circular de duas voltas com força virtual aplicada

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

CÓPIA PARA REVISÃO

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] − δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

```
Cos[β]
```

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

Estrutura original: Força redundante

Seguindo a equação de compatibilidade para a deformação de um arco sob carga aplicada juntamente com o método trabalho virtual são usados para determinar a força redundante Bxo no pilar B. Para este processo, tanto os componentes flexurais e axiais da equação de compatibilidade como a descontinuidade no esforços internos são considerados.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta M1}{EI}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{\theta} \frac{N1\ \delta N1}{a\ e}\, d\beta \ + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta N2}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.8}$$

Onde

$M1(\beta < \theta)$, $M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno na viga causado por carga real
$\delta M1(\beta < \theta)$,$\delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causado devido ao externo Unidade virtual de carga
$N1(\beta < \theta)$,$N2(\beta \geq \theta)$	força axial interno na viga causado por carga real
$\delta N1(\beta < \theta)$, $\delta N2(\beta \geq \theta)$	força axial interno causado devido a externa Unidade virtual de carga

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular a força redundante.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta + \int_{\theta}^{\pi-\alpha} \frac{M2[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{NN1[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta + \int_{\theta}^{\pi-\alpha} \frac{NN2[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta M[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta\right]$;

F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta N[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

Redundant force in original structure

Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];

FullSimplify[BXO]

$$\frac{P\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta]))\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]}$$

Estrutura original: Reações e Esforços internos

Após a força redundante na estrutura original Bxo é calculado, permanecendo reação de apoio e o esforços internos na estrutura inicial são determinados usando o diagrama de corpo livre na Figura D.20. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o reações de apoio

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMAO=BYO2x1 − *P*(x1 + x2);

Sol13=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol13[[1]]

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

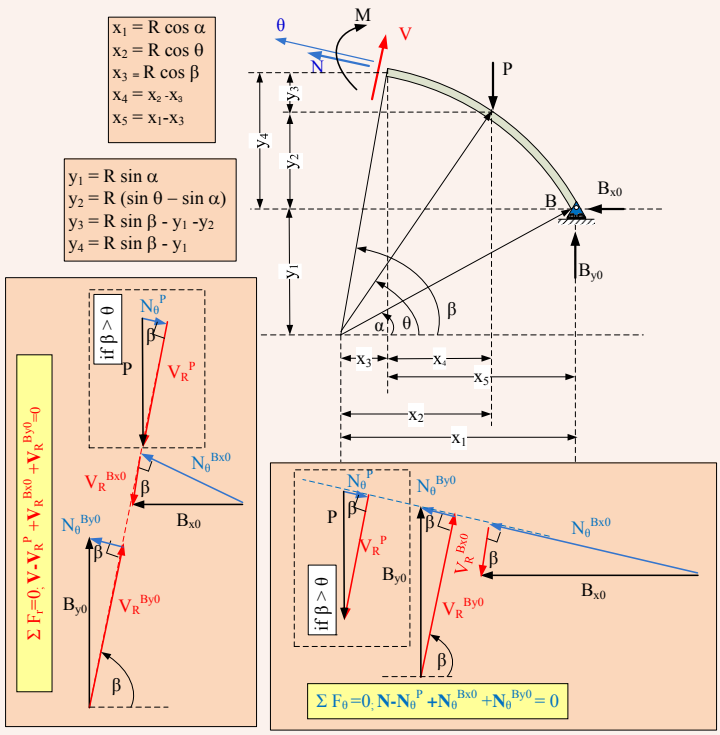


Figura D.20: Fbd do arco circular original de duas voltas sob carga concentrada

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol14=Solve[BYO − P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol14[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 − AYOx1 − AXOy1 − Px2]
```

0

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o esforços internos.

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= − BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol15=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol15[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)\Big/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol16=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol16[[1]];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$+\left(\text{Sin}[\beta]\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)\Big/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + MO1;
```

```
sol17=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol17[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(R(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$-\left(R(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)\Big/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

For $\beta > \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol18=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol18[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(2\text{Sin}[\beta]-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)\Big/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol19=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol19[[1]];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

FullSimplify[NO2[β]]

$$\frac{1}{2}P\,(2\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]+(\text{Sin}[\beta]\,((i-3aR^2)\,\text{Cos}[2\alpha]+(-i+aR^2)\,\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])))\,/((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha]))$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 – BYOx5 + Px4 + MO2;
```

```
sol20=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol20[[1]];
```

FullSimplify[MO2[β]]

$$\frac{1}{2}PR\,(2(\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\theta])+(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]+((\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\,(-(i-3aR^2)\,\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)\,\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])))\,/((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha]))$$

Deflexão

Figura D.21 e as equações analíticas desenvolvidas acima são usadas para calcular a deflexão no arco circular simétrico de duas voltas. A seguinte equação de trabalho virtual é usada para calcular a deflexão.

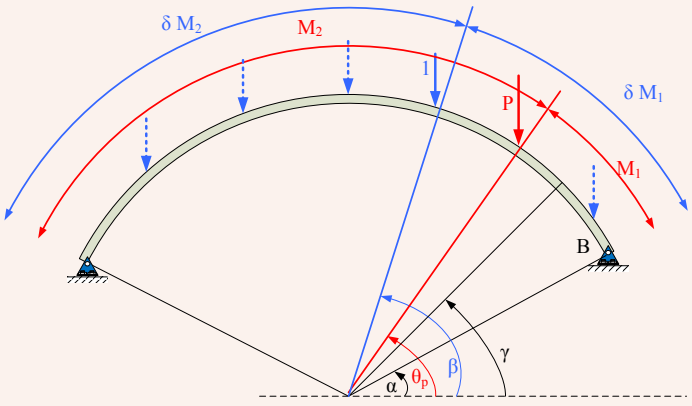


Figura D.21: Fbd para calcular a deflexão em arco circular de duas voltas

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M1\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M2\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.9}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Onde

δP	Carga externa da unidade virtual aplicada Na direção de Δ
Δ	deslocamento externo causado pelo Carga real aplicada
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno na viga causado por real carga concentrada
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causado Devido à carga externa da unidade virtual

Resumo dos resultados

Figura D.22 Mostrar enredos para um exemplo de arco de duas coisas discutido acima. Um carga concentrada é aplicado na coroa do arco. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. Como indicado pela trama, todos esforços internos são simétricos sobre a coroa do arco. A força de compressão axial é mais alta em torno de $\frac{1}{6}$ da extensão de ambos os pilares e diminui para cerca de 91% do valor máximo da coroa. O momento interno é zero nas dobradiças e é mais alto na coroa. O força cortante por outro lado é comparativamente menor que o interno força axial e momento. A deflexão é zero nas dobradiças e máxima em cerca de $\frac{1}{6}$ do vão de ambos os pilares.

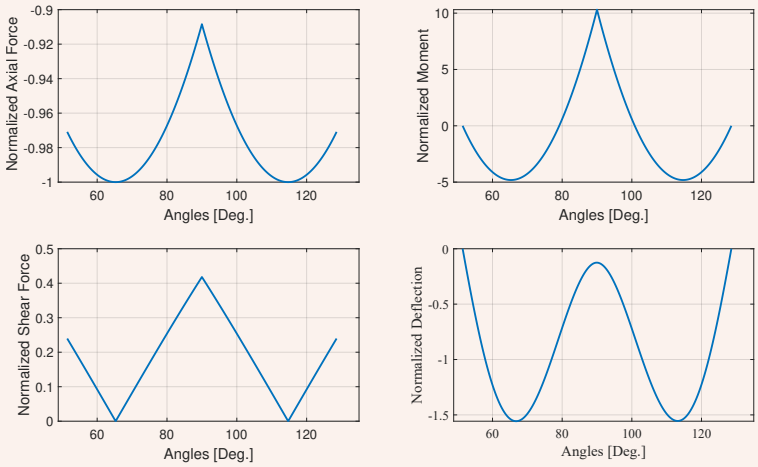


Figura D.22: Tramas para arco circular de duas voltas sob carga concentrada

D.3.3 Peso próprio

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.10}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

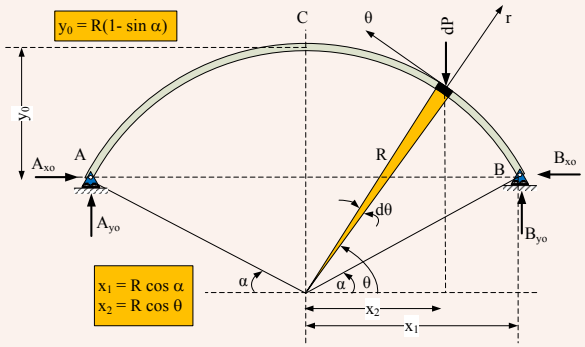


Figura D.23: Arco circular de duas voltas sob o próprio peso

Estrutura Primária: Reações e Esforços internos

A força redundante Bxo no pilar B no arco original de duas voltas mostrado na Figura D.23 é removido convertendo-o em uma estrutura primária. O diagrama de corpo livre na figura D.24, é usado para determinar as reações horizontais e verticais nos suportes, bem como o esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação reação de apoio.

Primary Strucure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve [BY - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AY==0,AY] ; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + ∫_α^(π−α) dP′(x1 − x2)dθ − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify [BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − ∫_α^(π−α) x2dP′dθ]
```

```
0
```

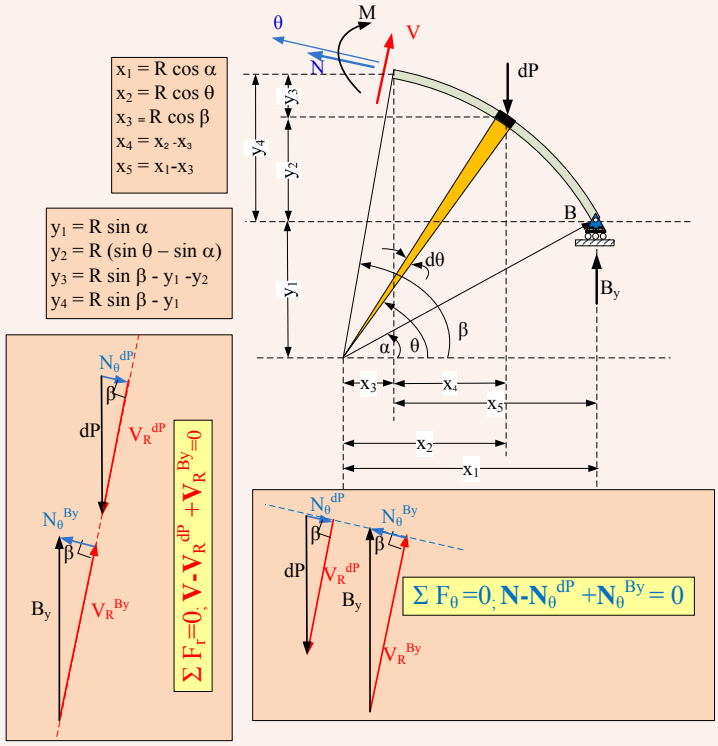


Figura D.24: Fbd de arco circular de duas pontas após remover o impulso redundante no pilar b′

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV=BYSin[β] − ∫_α^β dP'Sin[β]dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V /.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN=BYCos[β] − ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + N;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N /.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM= − BYx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + M;
```

```
Sol6=Solve[SigM==0,M]; M[β_]=M /.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

Estrutura Primária: Força da Unidade Virtual

Figura D.19 e um processo semelhante usado para arco circular de duas torções sob carga concentrada é seguido para determinar o esforços internos em qualquer ângulo β através do arco causado devido à carga de unidade virtual. Segue-se a saída do Mathematica, ilustrando a derivação para computação esforços internos causada devido às forças virtuais.

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] − δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV /.Sol10[[1]]
```

$$\text{Cos}[\beta]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

Estrutura original: Força redundante

Usando a equação de compatibilidade seguinte para a deformação de um arco sob carga aplicada juntamente com o método trabalho virtual é usado para determinar a força redundante Bxo no pilar B. Para este processo, tanto componentes flexurais como axiais da equação de compatibilidade são considerados.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\mathrm{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\mathrm{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.11}$$

Onde

M Momento interno na viga causado por carga real
δM Momento interno causado devido à unidade virtual externa carga
N força axial interno na viga causado por carga real
δN força axial interno causado devido à unidade virtual externa carga

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular a força redundante.

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify [∫_α^(π−α) M[β]δM[β]/(e i) dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify [∫_α^(π−α) NN[β]δN[β]/(a e) dβ];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify [∫_α^(π−α) δM[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
F11A=FullSimplify [∫_α^(π−α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left((\pi-2\alpha)\left(-4aR^2-\left(i-5aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

Estrutura original: Reações e Esforços internos

Após a força redundante na estrutura original Bxo é calculado, permanecendo reação de apoio e o esforços internos na estrutura inicial são determinados usando o diagrama de corpo livre na Figura D.25. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o reações de apoio.

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − ∫_α^(π−α) (x1 + x2)dP′ dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve [BYO − ∫_α^(π−α) dP′ dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

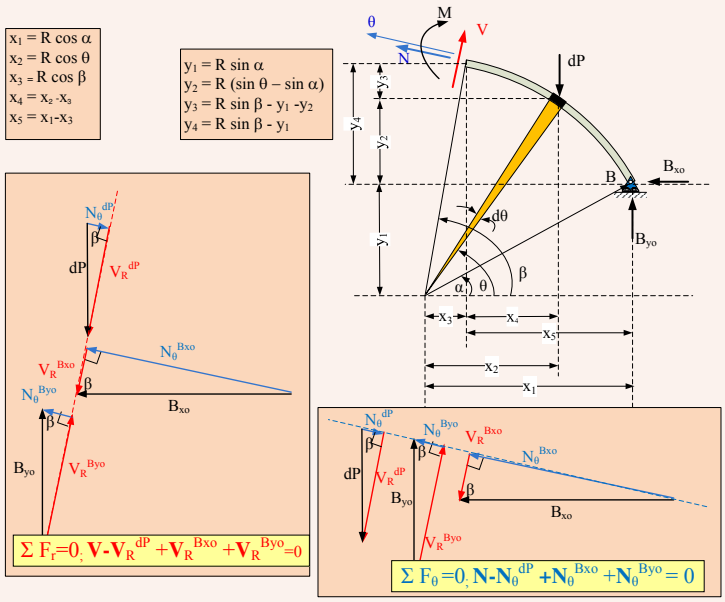


Figura D.25: Fbd do arco circular original de duas voltas sob o peso próprio

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

$$\text{MO=FullSimplify}\left[\text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}'\text{x2}\,d\theta\right]$$

```
0
```

A seguir está a saída do Mathematica, ilustrando a derivação para calcular o esforços internos.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

$$\text{SigFVO= } - \text{BXOCos}[\beta] + \text{BYOSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Sin}[\beta]\,d\theta + \text{VO};$$

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
FullSimplify[VO[β]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+(\pi-2\beta)\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];
```

```
FullSimplify[NNO[β]]
```

$$\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 - BYOx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β]]
```

$$\frac{1}{2}R^2w\left((\pi-2\alpha)(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-\left(\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)-2((\alpha-\beta)\text{Cos}[\beta]-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\beta])\right)$$

Deflexão

As equações analíticas desenvolvidas acima são usadas para calcular a deflexão no exemplo simétrico do arco circular discutido na seção D.2.3.. A seguinte equação de trabalho virtual é usada para calcular a deflexão.

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.12}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Onde

δP	Carga externa da unidade virtual aplicada em a direção de Δ
Δ	deslocamento externo causado pela carga real aplicada
M	Momento interno na viga causado por carga real
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causado por Carga externa da unidade virtual

Resumo dos resultados

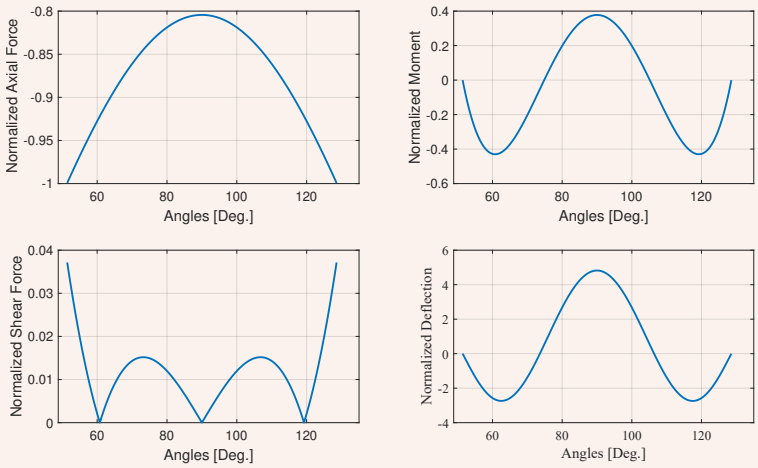


Figura D.26: Tramas para arco circular de duas voltas sob auto-peso

Figura D.26 Mostrar parcelas para o arco de duas rodas sob auto-peso discutido na seção acima. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. A força de compressão axial é mais alta nos pilares e diminui em direção à coroa para cerca de 80.5% do valor máximo. O força cortante por outro lado é relativamente baixo e varia entre cerca de 3,75% e 1.5%, respectivamente do pilar para a coroa. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. O momento interno é zero na localização das dobradiças e é mais alto em cerca de $\frac{1}{6}$ de distância dos pilares. Há dois pontos de inflexão no diagrama do momento e eles correspondem com os pontos de deflexão zero no arco. A deflexão é mais alta na coroa e o gráfico de deflexões segue um perfil semelhante ao do diagrama do momento. A deflexão máxima positiva e negativa corresponde ao ponto do momento máximo positivo e negativo no arco, respectivamente.

D.3.4 Carga uniformemente distribuída

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.13}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

A força redundante Bxo no pilar B no arco original de duas voltas mostrado na Figura D.23 é removido convertendo-o em uma estrutura primária. Os primeiros três passos, incluindo reação de apoio e esforços internos causados devido à carga real e esforços internos causado devido à força virtual são semelhantes ao que para o arco circular de duas voltas sob auto-peso. Para simplificar, apenas os passos que envolvem a computação da força redundante, reações de apoio e o esforços internos na estrutura original são mostrados aqui.

Estrutura original: Força redundante

O processo usado para o arco de duas voltas sob autopeso repetido aqui. A equação de compatibilidade para a deformação de um arco sob carga aplicada juntamente com o método trabalho virtual são usados para determinar a força redundante Bxo no pilar B. Para este processo, tanto componentes flexurais quanto axiais da equação de compatibilidade são considerados. Seguindo é a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular a força redundante.

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify [∫_α^(π-α) M[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify [∫_α^(π-α) NN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify [∫_α^(π-α) δM[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
F11A=FullSimplify [∫_α^(π-α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

FullSimplify[BXO]

$$\frac{w\left(9aR^3\text{Cos}[\alpha]-16iR\text{Cos}[\alpha]^3+aR^3(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha]))\right)}{12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Estrutura original: Reações e Esforços internos

Após a força redundante na estrutura original Bxo é calculado, permanecendo reação de apoio e o esforços internos na estrutura inicial são determinados usando o diagrama de corpo livre na Figura D.25.. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o reações de apoio.

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMAO=BYO**2**x1 − $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}$(x1 + x2)dP′ $d\theta$;

Sol10=Solve[SigMAO==**0**,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[**1**]]

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

Sol11=Solve $\left[\text{BYO} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}' d\theta + \text{AYO}==\mathbf{0},\text{AYO}\right]$; AYO=AYO/.Sol11[[**1**]]

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

AXO=BXO;

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

Clear[MO];

MO=FullSimplify $\left[\text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}'\text{x2} d\theta\right]$

0

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o esforços internos.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − ∫_α^β dP'Sin[β]dθ + VO;
```

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β]]
```

$$\left(Rw\left(3\left(-4i+3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\left(-4i+7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]\text{Cos}[\beta]\right.\right.$$
$$+3aR^2(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\beta](\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])$$
$$\left.\left.-6\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)\right)/$$
$$\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] − ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];
```

```
FullSimplify[NNO[β]]
```

$$\left(Rw\left(12\text{Cos}[\beta]^2\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$+\left(3\left(4i-3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]+\left(4i-7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]+3aR^2(\pi-2\alpha)(-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[3\alpha])\right)\text{Sin}[\beta]\Big)/$$
$$\left.\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β]]
```

$$\frac{1}{12}R^2w\left(12\text{Cos}[\alpha](\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-6(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])^2\right.$$
$$\left.+\left(\left(9aR^2\text{Cos}[\alpha]-16i\text{Cos}[\alpha]^3+aR^2(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])\right)\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/$$
$$\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Deflexão

O processo para calcular a deflexão no arco circular bidirecional sob carga uniformemente distribuída, bem como os valores numéricos usados para a variável trigonométrica são semelhantes aos do autopeso e, portanto, não é mostrado aqui.

Resumo dos resultados

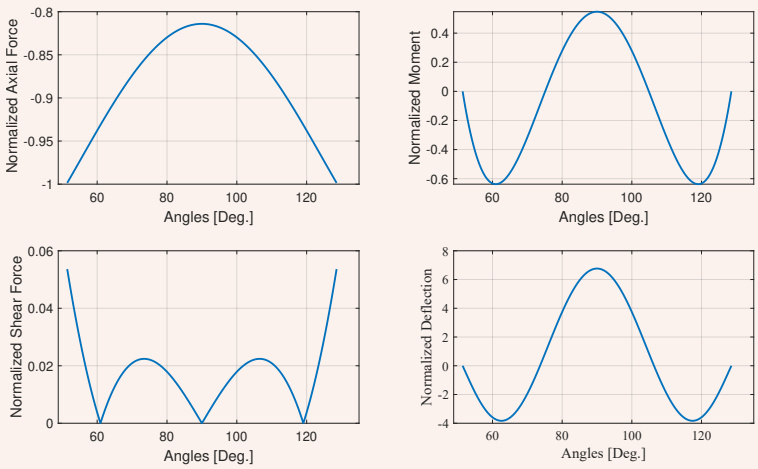


Figura D.27: Traços para arco circular de duas voltas sob Udl

Figura D.27 Mostrem parcelas para o arco de duas voltas sob distribuição uniforme da carga discutida na seção acima. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. A força de compressão axial é mais alta nos pilares e diminui em direção à coroa para cerca de 81,5% do valor máximo. O força cortante por outro lado é relativamente baixo e varia entre cerca de 5,25% e 2%, respectivamente do pilar para a coroa. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. O momento interno é zero na localização das dobradiças e é mais alto em cerca de $\frac{1}{6}$ de distância dos pilares. Há dois pontos de inflexão no diagrama do momento e eles correspondem com os pontos de deflexão zero no arco. A deflexão é mais alta na coroa e o gráfico de deflexões segue um perfil semelhante ao do diagrama do momento. A deflexão máxima positiva e negativa corresponde ao ponto do momento máximo positivo e negativo no arco, respectivamente.

D.3.5 Arco circular de duas voltas: validação

As equações analíticas desenvolvidas acima para o arco circular de duas voltas sob carga concentrada, peso próprio e carga uniformemente distribuída são validadas em duas etapas. Em primeiro lugar, o peso próprio e carga uniformemente distribuída aplicado através da extensão do arco são divididos em série de 20 cargas concentradas. Os gráficos de esforços internos e deflexões são traçados usando as equações analíticas para o autopeso

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e carga uniformemente distribuída juntamente com seus respectivos cargas concentradas. Estes gráficos estão sobrepostos para verificar a validade das soluções analíticas. Como o peso próprio ou o carga uniformemente distribuída são equivalentes à sua respectiva série de cargas concentradas seus enredos combinam estreitamente entre si.

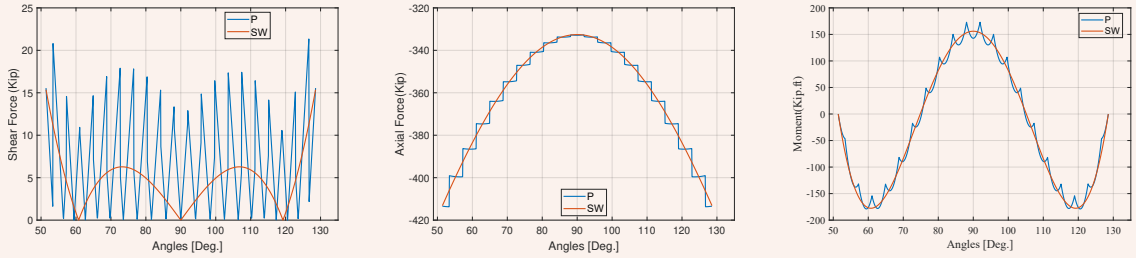


Figura D.28: Arco circular de duas voltas sob peso próprio vs. Série de carga concentrada

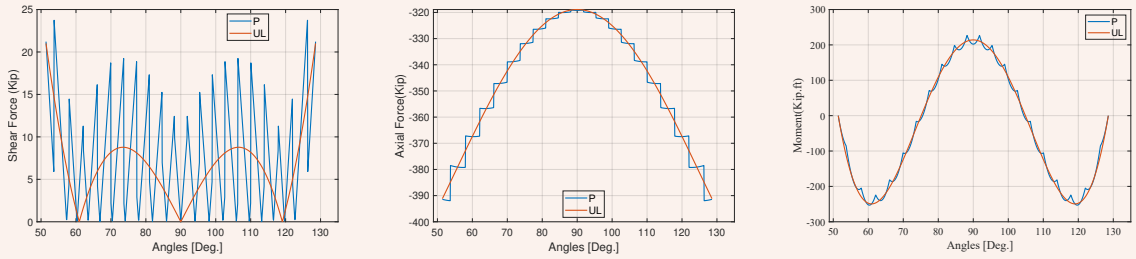


Figura D.29: Arco circular de duas voltas sob uniformemente distribuir carga vs. Série de carga concentrada

Figura D.28 e Figura D.29 ilustra o processo acima discutido usado para validar as equações analíticas. Em segundo lugar, um modelo Sap 2000 é desenvolvido para o arco circular de três torções sob auto-peso caso. No momento, os diagramas força cortante e força axial de sua análise são comparados com os gráficos traçados usando a equação analítica.



Figura D.30: Sap 2000 - diagrama momentâneo de dois arcos circulares sob auto-peso

Os valores numéricos no diagrama de momento na Figura D.30, força axial diagrama na figura D.31 e força cortante diagrama na figura D.32 batem com seus respectivos valores nos gráficos FiguraD.28.

CÓPIA PARA REVISÃO



Figura D.31: Sap 2000 - diagrama de dois arcos circulares sob o peso próprio



Figura D.32: Sap 2000 - diagrama de dois arcos circulares sob o peso próprio

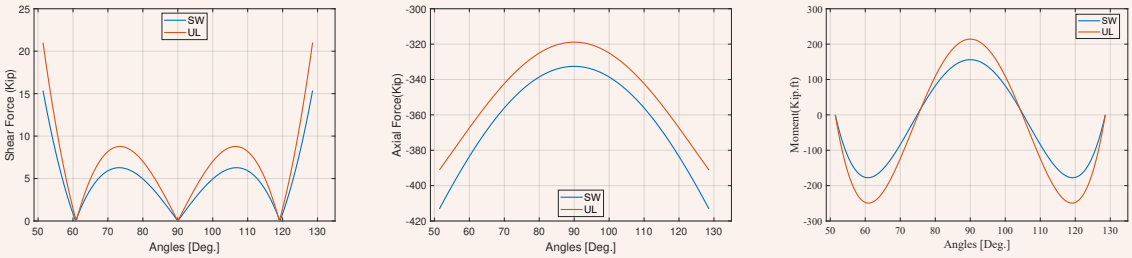


Figura D.33: Arco circular de duas voltas sob peso próprio vs.udl

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

D.3.6 Conclusão

Essas seções discutem o comportamento estrutural de um arco de duas voltas sob carga concentrada, peso próprio e carga uniformemente distribuída em termos de esforços internos e deflexão. Figura D.33 Compara a condição de carga do peso com o estado de carga uniformemente distribuído em uma carga igual w=2.275 kip/ft. Comparado ao peso próprio, um carga uniformemente distribuída causa mais interno força cortante e momento, e causa menos interna Compressiva força axial.

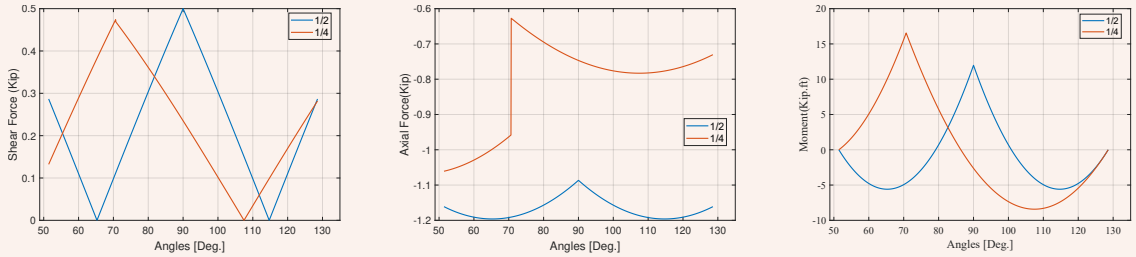


Figura D.34: Arco circular de duas voltas sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão

Figura D.34 mostrar parcelas de uma condição assimétrica de carga. Para este fim, uma carga unitária é aplicada na coroa e no quarto da extensão. Sob esta condição, o momento máximo devido ao carga concentrada aplicado no quarto da extensão é cerca de 1,4 vezes mais do que o aplicado na coroa. O máximo força axial devido ao carga concentrada aplicado na coroa do span é cerca de 1,2 vezes mais do que o aplicado no quarto do vão.

D.4 Arco circular sem dobras

Um arco circular simétrico Hingeless tem seis reações, três em cada suporte. Uma vez que a costela de arco de um arco sem dobra é contínua entre os suportes e o ponto dos apoios são imóveis, carga aplicada não só produzir reações verticais mas também horizontais, comumente conhecido como um impulso. Com apenas três equações de equilíbrio para resolver as seis forças reativas desconhecidas, um arco Hingeless é estaticamente indeterminado em terceiro grau.

D.4.1 Procedimento de análise

Para começar, três reações redundantes do arco estaticamente indeterminado Hingeless são removidas convertendo-o em um arco estatalmente determinado, estrutura primária. Usando o método comum de estática, os reação de apoio e esforços internos na estrutura primária devido à carga aplicada são calculados. Mais tarde, assumindo que não existe força externa na estrutura primária, uma unidade de força virtual ou momento é aplicada no local das forças redundantes removidas ou momento respectivamente e o esforços

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

internos causado são calculados. Equação de compatibilidade para a deformação de um arco sob carga aplicada é considerada para calcular a reação redundante no arco original estaticamente indeterminado de Hingeles. Uma vez que todos os reações de apoio são encontrados, o esforços internos no arco são calculados usando método comum de estática. Além disso, estes esforços internos são usados para calcular a deflexão no arco sob a carga aplicada. O processo de análise descrito aqui é realizado em sete etapas usando o Mathematica.Os arquivos do Mathemastica para todas as etapas estão incluídos em seções relevantes e para simplificação apenas equações finais para reações e esforços internos são expandidos. Para fins de análise, três condições de carga são consideradas; A carga concentrada, peso próprio do arco e aplicado carga uniformemente distribuída através do arco. O auto-peso e o carga uniformemente distribuída são simétricos sobre o centro do arco onde como um carga concentrada, quando aplicado em qualquer lugar, exceto na coroa, é assimétrico sobre o meio do arco. Assim, para ilustrar a análise, os mesmos números são usados para o peso próprio e as condições de carga uniformemente distribuídas onde como diferentes conjuntos de figuras são usadas para a condição carga concentrada.

D.4.2 Carga concentrada

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dp = P \tag{D.14}$$

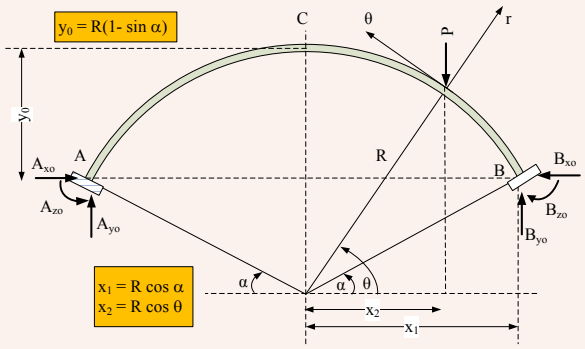


Figura D.35: Arco circular sem dobra sob carga concentrada

Estrutura Primária: Reações e Esforços internos

A força redundante Bxo e os momentos redundantes Bzo e Azo no arco Hingeless original mostrado na figura D.35 A localização de um carga concentrada em qualquer lugar do arco causa descontinuidade no esforços internos. Esta descontinuidade no esforços internos na figura D.3Por isso a expressão para o esforços internos em qualquer ângulo β através do

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

arco é dependente de sua relação com respeito ao ângulo θ em que o carga concentrada é aplicado. Levando em consideração as seguintes condições, diferentes conjuntos de equações são desenvolvidos para o esforços internos.

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.15}$$

A estrutura primária do arco Hingeless é semelhante à do arco de duas voltas. O diagrama de corpo livre na figura D.18, é usado para determinar as reações horizontais e verticais nos suportes, bem como o esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação reação de apoio.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

```
0
```

Estrutura Primária: Força da Unidade Virtual

Uma unidade de força virtual é aplicada no local Bxo na direção de deslocamento do pilar B sob carga real D.19, é usado para determinar o esforços internos em qualquer ângulo β Ao longo do arco causado devido à carga da unidade virtual. Similarmente, um momento unitário é aplicado na localização de Bzo e Azo na direção de rotação nos pilares B e A respectivamente sob carga real. O diagrama de corpo livre na figura D.36, e Figura D.37, são usados para determinar o esforços internos em qualquer ângulo β através do arco causado devido ao momento virtual aplicado nos pilares B e A. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação esforços internos causada por forças virtuais.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

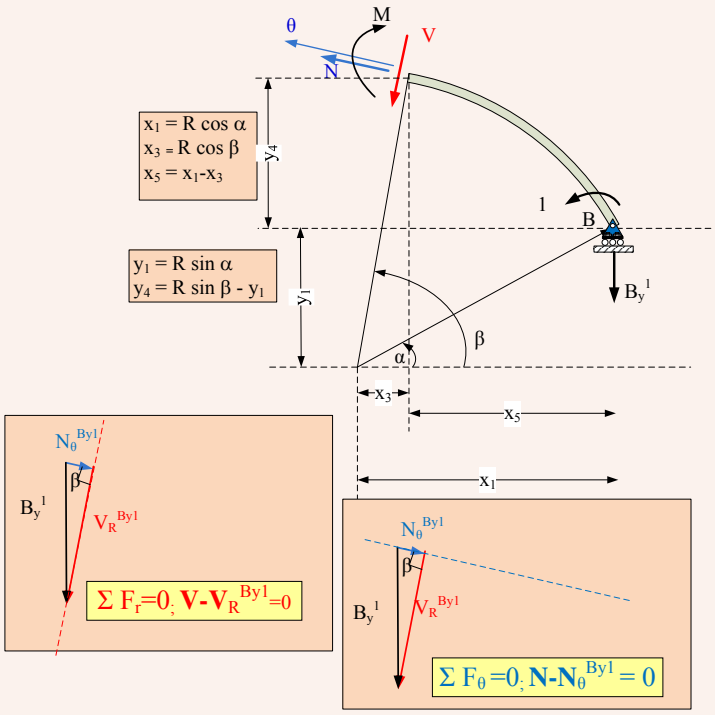


Figura D.36: Arco circular sem dobras com momento virtual no 'b'

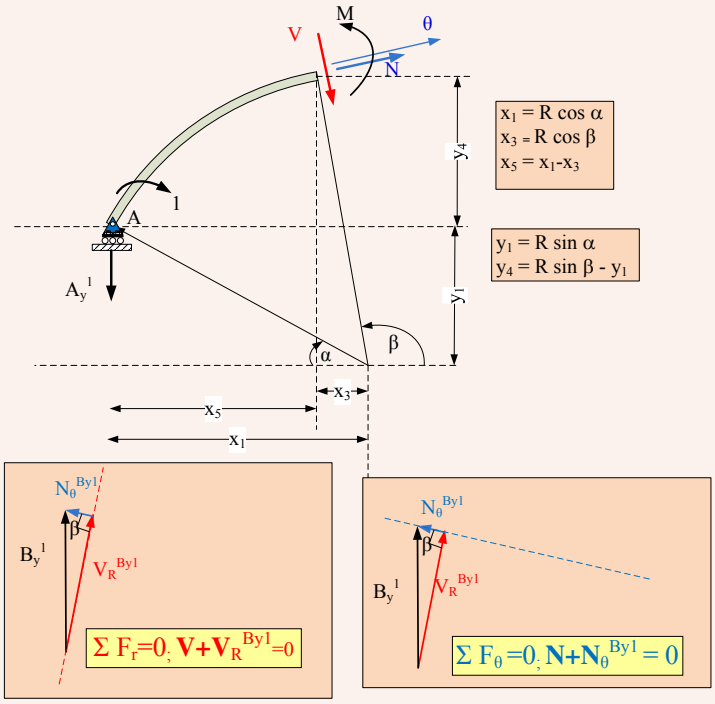


Figura D.37: Arco circular sem dobras com momento virtual em 'a'

CÓPIA PARA REVISÃO

Primary Structure: Virtual Forces

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVBX1=FullSimplify[BX1Cos[β] + δVBX1];
```

```
Sol7=Solve[SigFδVBX1==0,δVBX1]; δVBX1[β_]=δVBX1/.Sol7[[1]]
```

$$-\text{Cos}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNBX1=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δNBX1];
```

```
Sol8=Solve[SigFδNBX1==0,δNBX1]; δNBX1[β_]=δNBX1/.Sol8[[1]]
```

$$\text{Sin}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBX1=FullSimplify[−BX1y4 + δMBX1];
```

```
Sol9=Solve[SigδMBX1==0,δMBX1]; δMBX1[β_]=δMBX1/.Sol9[[1]]
```

$$-R\text{Sin}[\alpha] + R\text{Sin}[\beta]$$

Apply virtual moment at B

```
BZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMABZ1=FullSimplify[2x1BY1 − BZ1];
```

```
Sol10=Solve[SigMABZ1==0,BY1]; BY1=BY1/.Sol10[[1]]
```

$$\frac{\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of forces in the radial direction; Shear(+ve outward)

```
SigFδVBZ1=FullSimplify[−BY1Sin[β] + δVBZ1];
```

```
Sol11=Solve[SigFδVBZ1==0,δVBZ1]; δVBZ1[β_]=δVBZ1/.Sol11[[1]]
```

$$\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
SigFδNBZ1=FullSimplify[−BY1Cos[β] + δNBZ1];
```

```
Sol12=Solve[SigFδNBZ1==0,δNBZ1]; δNBZ1[β_]=δNBZ1/.Sol12[[1]]
```

$$\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBZ1=FullSimplify[BY1x5 − BZ1 + δMBZ1];
```

```
Sol13=Solve[SigδMBZ1==0,δMBZ1]; δMBZ1[β_]=δMBZ1/.Sol13[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 + \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

Apply virtual moment at A

```
AZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMAAZ1=FullSimplify[AZ1 − 2x1BY2];
```

```
Sol14=Solve[SigMAAZ1==0,BY2]; BY2=BY2/.Sol14[[1]];
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVAZ1=FullSimplify[BY2Sin[β] + δVAZ1];
```

```
Sol15=Solve[SigFδVAZ1==0,δVAZ1]; δVAZ1[β_]=δVAZ1/.Sol15[[1]]
```

$$-\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNAZ1=FullSimplify[BY2Cos[β] + δNAZ1];
```

```
Sol16=Solve[SigFδNAZ1==0,δNAZ1]; δNAZ1[β_]=δNAZ1/.Sol16[[1]]
```

$$-\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMAZ1=FullSimplify[−BY2x5 + δMAZ1];
```

```
Sol17=Solve[SigδMAZ1==0,δMAZ1]; δMAZ1[β_]=δMAZ1/.Sol17[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 - \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Estrutura original: Força redundante

Seguindo a equação de compatibilidade para a deformação de um arco sob carga aplicada juntamente com o método trabalho virtual são usados para determinar as forças redundantes Bxo, Bzo e Azo. Para este processo, tanto os componentes flexurais e axiais da equação de compatibilidade como a descontinuidade no esforços internos são considerados.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_\alpha^\theta \frac{M1\ \delta M1}{EI}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\,d\beta + \int_\alpha^\theta \frac{N1\ \delta N1}{a\ e}\,d\beta + \int_\alpha^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta N2}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.16}$$

Onde

$M1(\beta < \theta), M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno na viga causado por carga real
$\delta M1(\beta < \theta), \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causado devido à unidade virtual externa carga
$N1(\beta < \theta), N2(\beta \geq \theta)$	força axial interno na viga causado por carga real
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	força axial interno causado devido à unidade virtual externa carga

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular a força redundante.

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{M1[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei}\,d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{NN1[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae}\,d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

DeltaBZ1F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{M1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei}\,d\beta\right]$;

DeltaBZ1A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{NN1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae}\,d\beta\right]$;

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
DeltaAZ1F=FullSimplify[Integrate[M1[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,α,θ}]+Integrate[M2[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,θ,(π-α)}]];
```

```
DeltaAZ1A=FullSimplify[Integrate[NN1[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,α,θ}]+Integrate[NN2[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,θ,(π-α)}]];
```

```
DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;
```

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMBX1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F11A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNBX1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

```
F12F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMBZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F12A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNBZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F12=F12F + F12A;
```

```
F13F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F13A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F13=F13F + F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMBZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F22A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNBZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F22=F22F + F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F23A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F33F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(e i) dβ];
F33A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(a e) dβ];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 +
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\theta]-2aR^2(\pi-2\alpha+2\text{Sin}[2\alpha])+4aR^2\text{Cos}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Estrutura original: Reações e Esforços internos

Depois que a força redundante na estrutura original Bxo, Bzo e Azo são computados, permanecendo reação de apoio e o esforços internos na estrutura inicial são determinados usando o diagrama de corpo livre na Figura D.38. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o reações de apoio.

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − P(x1 + x2) + AZO − BZO;
```

```
Sol21=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[BYO]
```

$$\frac{P\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol22=Solve[BYO − P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[AYO]
```

$$\frac{P\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-2\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta+\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

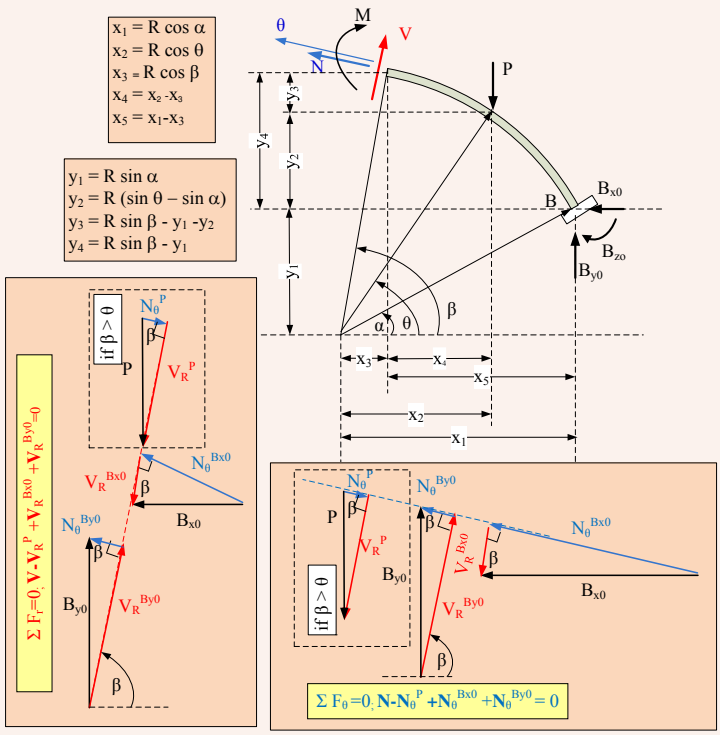


Figura D.38: Fbd do arco circular original sem dobradiças sob carga concentrada

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[−BZO + BYOx1 + BXOy1 + AZO − AYOx1 − AXOy1 − Px2]
```

```
0
```

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o esforços internos.

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= − BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol23=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1 / .Sol23[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.$$
$$\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol24=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1 / .Sol24[[1]];
```

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-2\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + BZO + MO1;
```

```
sol25=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1 /.sol25[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right.\right.$$
$$-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-2\text{Cos}[\theta]\left(-2aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)(\pi-\alpha-\theta)-2aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.\right.$$
$$(\pi-\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]\Big)+\left(i+aR^2\right)(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\Big)$$
$$+\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.$$
$$\left.\left.\left.(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\right)/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

For $\beta > \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol26=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2 /.Sol26[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$-\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-4\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\right.$$
$$\left.\left.\left.\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\right)/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.$$
$$\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol27=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2 /.Sol27[[1]];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
FullSimplify[NO2[β]]
```

$$-\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)-4\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + BZO + MO2;
```

```
sol28=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol28[[1]];
```

```
FullSimplify[MO2[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)+\left(i+aR^2\right)\left(2\text{Cos}[\theta]\left((\pi-2\alpha)\left(aR^2(2+(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta))+i(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta)+2aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-8aR^2\text{Cos}[\alpha]^3\text{Sin}[\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]^2\right)+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\right)-\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2\alpha-2\theta+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\Big/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Deflexão

Figura D.21 e as equações analíticas desenvolvidas acima são usadas para calcular a deflexão no exemplo simétrico do arco circular Hingeless discutido na seção D.2.2.. A seguinte equação de trabalho virtual é usada para calcular a deflexão.

$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.17}$$

Onde

δP	Carga externa da unidade virtual aplicada na direção de Δ
Δ	deslocamento externo causado pela carga real aplicada
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno na viga causado pelo real carga concentrada
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causado devido à unidade virtual externa carga

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Resumo dos resultados

Figura D.39 Mostrar parcelas para um exemplo de arco Hingeless discutido na seção acima. Um carga concentrada é aplicado na coroa do arco. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. Como indicado pela trama, todos esforços internos são simétricos sobre a coroa do arco. A força de compressão axial é mais alta em torno de $\frac{1}{4}$ do vão dos dois pilares e diminui para cerca de 93,5% do valor máximo da coroa. O momento interno é máximo na coroa. O força cortante por outro lado é comparativamente menor que o interno força axial e momento. A deflexão é zero nos pilares e máxima em cerca de 1/4 da extensão dos dois pilares.

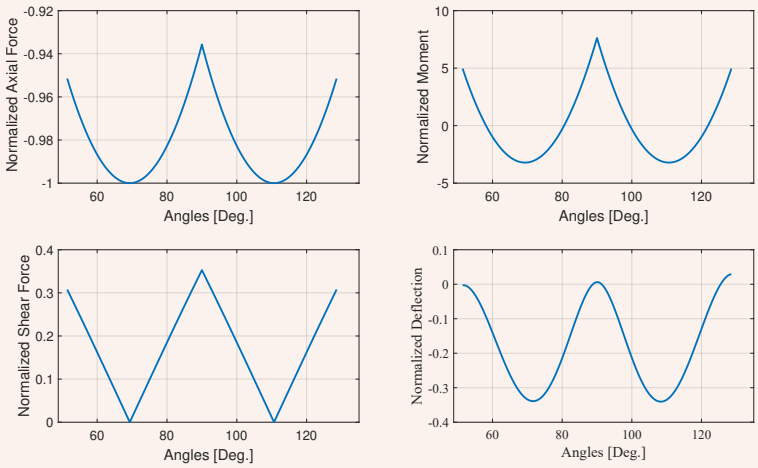


Figura D.39: Lotes para arco circular sem dobradiças sob carga concentrada

D.4.3 Peso próprio

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.18}$$

Estrutura Primária: Reações e Esforços internos

A força redundante Bxo e os momentos redundantes Bzo e Azo no arco original Hingeless mostrado na Figura D.40 são removidos convertendo-o em uma estrutura primária. A estrutura primária do arco Hingeless é semelhante à do arco de duas voltas. O diagrama de corpo livre na figura D.24, é usado para determinar as reações horizontais e verticais nos suportes, bem como o esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação reação de apoio.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

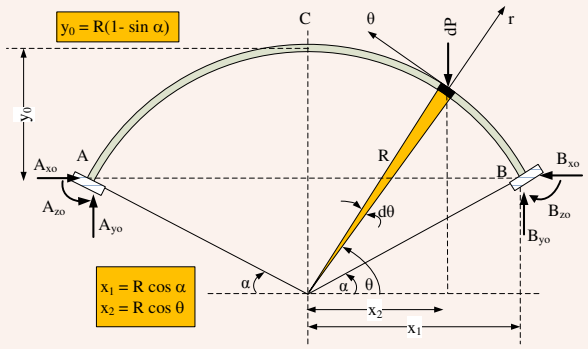


Figura D.40: Arco circular sem dobra sob o próprio peso

Primary Structure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - Integrate[(x1 + x2)dP' dθ, {θ, α, π - α}];
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2} R w (\pi - 2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - Integrate[dP' dθ, {θ, α, π - α}] + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]];
```

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + Integrate[dP'(x1 - x2) dθ, {θ, α, π - α}] - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - Integrate[x2dP' dθ, {θ, α, π - α}]]
```

0

CÓPIA PARA REVISÃO

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para esforços internos - axial, cisalhamento e momento em qualquer ângulo β através do arco.

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV=BYSin[β] − ∫_α^β dP'Sin[β]dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V /.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN=BYCos[β] − ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + NN;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,NN]]; NN[β_]=NN /.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM= − BYx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + M;
```

```
Sol6=Solve[SigM==0,M]; M[β_]=M /.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

Estrutura Primária: Força da Unidade Virtual

Figura D.19, Figura D.36 e Figura D.37 e um processo similar usado para arco circular sem dobra sob carga concentrada é seguido para determinar o esforços internos em qualquer ângulo β através do arco causado devido à carga de unidade virtual. A saída do Mathematica ilustrando a derivação para computação esforços internos causada devido às forças virtuais usadas para o arco Hingeless sob carga concentrada também é aplicável aqui.

Estrutura original: Força Vermelha

Usando a equação de compatibilidade seguinte para a deformação de um arco sob carga aplicada juntamente com o método trabalho virtual são usados para determinar as forças

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

redundantes Bxo, Bzo e Azo. Para este processo, tanto componentes flexurais como axiais da equação de compatibilidade são considerados.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\mathrm{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\mathrm{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.19}$$

Onde

M	Momento interno na viga causado por carga real
δM	Momento interno causado devido à unidade virtual externa carga
N	força axial interno na viga causado por carga real
δN	força axial interno causado devido à unidade virtual externa carga

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular a força redundante

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MBX1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right]$;
DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NBX1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

DeltaBZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MBZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right]$;
DeltaBZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NBZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right]$;

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

DeltaAZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MAZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right]$;
DeltaAZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NAZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right]$;

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\mathrm{MBX1}[\beta]\delta\mathrm{MBX1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\mathrm{NBX1}[\beta]\delta\mathrm{NBX1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right]$;

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F11=F11F + F11A;
```

$$\text{F12F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F12A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

```
F12=F12F + F12A;
```

$$\text{F13F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MAZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F13A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NAZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

```
F13=F13F + F13A;
```

$$\text{F22F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBZ1}[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F22A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBZ1}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

```
F22=F22F + F22A;
```

$$\text{F23F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBZ1}[\beta]\delta\text{MAZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F23A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBZ1}[\beta]\delta\text{NAZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

```
F23=F23F + F23A;
```

$$\text{F33F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MAZ1}[\beta]\delta\text{MAZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F33A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NAZ1}[\beta]\delta\text{NAZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 +
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

FullSimplify[BXO]

$$\frac{Rw\left(-2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)-\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Estrutura original: Reações e Esforços internos

Depois que a força redundante na estrutura original Bxo, Bzo e Azo são computados, permanecendo reação de apoio e o esforços internos na estrutura inicial são determinados usando o diagrama de corpo livre na Figura D.41. A seguir está a saída do Mathematica

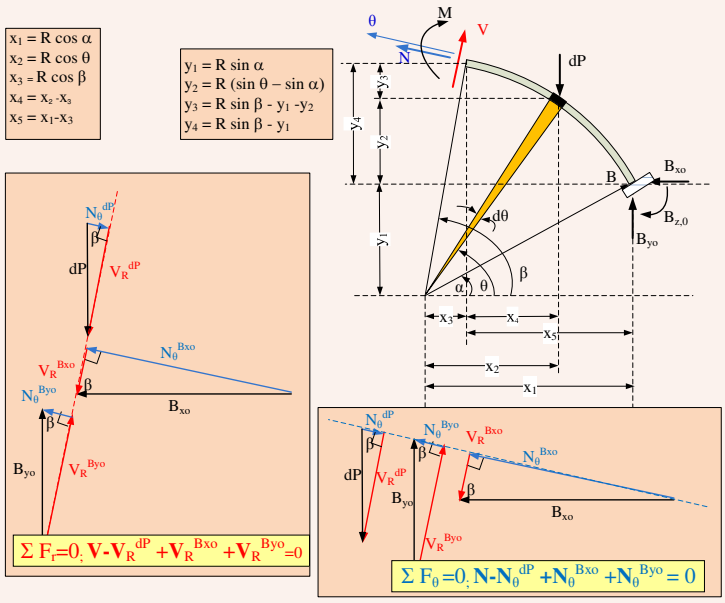


Figura D.41: Esforços internos em arco circular sem dobradiças

ilustrando a derivação para calcular o reações de apoio.

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMAO=BYO2x1 – $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}$(x1 + x2)dP′ $d\theta$ + AZO – BZO;

Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]

$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
Sol19=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o esforços internos.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\pi-2\beta)\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2 w \left(2\left(3i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\left(aR^2-i\left(-3+(\pi-2\alpha)^2\right)-aR^2(\pi-2\alpha)^2+\left(3i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\alpha]\right.\right.$$
$$+(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$
$$\left.\left.+\left(-2\left(4aR^2+i(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-8aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right) /$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Deflexão

As equações analíticas desenvolvidas acima são usadas para calcular deflexão no exemplo do arco circular simétrico Hingeless discutido na Seção D.2.3.. A seguinte equação de trabalho virtual é usada para calcular a deflexão.

$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.20}$$

Onde

δP	Carga externa da unidade virtual aplicada na direção de Δ
Δ	deslocamento externo causado pela carga real aplicada
M	Momento interno na viga causado por carga real
$\delta M1(\beta < \theta)$	Momento interno causado devido à unidade virtual externa carga
$\delta M2(\beta \geq \theta)$	Momento interno causado devido à unidade virtual externa carga

Resumo dos resultados

Figura D.42 Mostrar enredos para o arco Hingeless sob peso próprio discutiu a seção acima. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. A força de compressão axial é mais alta nos pilares e diminui em direção à coroa para cerca de 81% do valor máximo. O força cortante por outro lado é relativamente baixo e varia entre cerca de 4,75% e 1.0%, respectivamente do pilar para a coroa. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. O momento interno é mais alto nos pilares e é cerca de 60 % do valor máximo na coroa e em aproximadamente $\frac{1}{6}$ de distância dos pilares. Há quatro pontos de inflexão no diagrama do momento e eles correspondem com os pontos de deflexão zero no arco. A deflexão é mais alta na coroa e o gráfico de deflexões segue um perfil semelhante

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

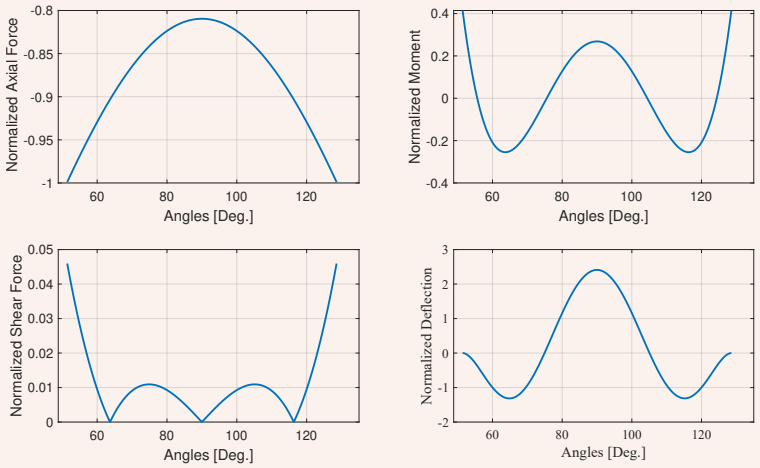


Figura D.42: Lotes para arco circular sem dobradiças sob o peso próprio

ao do diagrama do momento. A deflexão positiva e negativa corresponde ao momento positivo e negativo no arco, respectivamente.

D.4.4 Carga uniformemente distribuída

Neste caso, a força elementar aplicada é dada por

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.21}$$

A força redundante Bxo e os momentos redundantes Bzo e Azo no arco Hingeless original mostrado na figuraD.40são removidos convertendo-o em uma estrutura primária. Os primeiros três passos, incluindo reação de apoio e esforços internos causados devido à carga real e esforços internos causados pela carga virtual são semelhantes aos do arco circular Hingeless sob o peso próprio. Para simplificar, apenas os passos que envolvem a computação da força redundante, reações de apoio e o esforços internos na estrutura original são mostrados aqui.

Estrutura original: Força redundante

O processo usado para o arco Hingeless sob auto-peso repetido aqui. A equação de compatibilidade para a deformação de um arco sob carga aplicada juntamente com o método trabalho virtual são usados para determinar a força redundante Bxo no pilar B. Para este processo, tanto componentes flexurais quanto axiais da equação de compatibilidade são considerados. Seguindo é o resultado do Mathematica, ilustrando a derivação para calcular a força redundante.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

DeltaBZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaBZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

DeltaAZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaAZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

F12F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F12A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F12=F12F + F12A;

F13F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F13A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F13=F13F + F13A;
```

$$\text{F22F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta \text{MBZ1}[\beta]\delta \text{MBZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{F22A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta \text{NBZ1}[\beta]\delta \text{NBZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

```
F22=F22F + F22A;
```

$$\text{F23F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta \text{MBZ1}[\beta]\delta \text{MAZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{F23A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta \text{NBZ1}[\beta]\delta \text{NAZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

```
F23=F23F + F23A;
```

$$\text{F33F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta \text{MAZ1}[\beta]\delta \text{MAZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{F33A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta \text{NAZ1}[\beta]\delta \text{NAZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 +
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)}{3\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

Estrutura original: Reações e Esforços internos

Depois que a força redundante na estrutura original Bxo, Bzo e Azo são computados, permanecendo reação de apoio e o esforços internos na estrutura inicial são determinados usando o diagrama de corpo livre na Figura D.41. A seguir está a saída do Mathematica ilustrando a derivação para calcular o reações de apoio.

Original Strcture: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ + AZO - BZO;
```

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

A seguir está a saída do Mathematica, ilustrando a derivação para calcular o esforços internos.

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$\left(Rw\left(2\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.-3\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)\Big/$$
$$\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$\left(Rw\left(6\text{Cos}[\beta]^2\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.+2\text{Cos}[\alpha]\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)/$$
$$\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO];MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2w\left(9\left(-3i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]^2\right.\right.$$
$$+3\text{Cos}[2\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$
$$+\text{Cos}[\alpha]\left(-\left(5i+aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]-6\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]+4\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\Big)\Big/\left(12\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Deflexão

O processo para calcular a deflexão no arco circular sem ângulo sob carga uniformemente distribuída, bem como os valores numéricos usados para a variável trigonométrica são semelhantes aos do peso próprio e, portanto, não é mostrado aqui.

Resumo dos resultados

Figura D.43 mostrar parcelas para o arco Hingeless sob carga uniformemente distribuída discutido na seção acima. Os internos força axial e força cortante são normalizados com relação ao resultado da reação vertical e impulso nos pilares. A força de compressão axial é mais alta nos pilares e diminui em direção à coroa para cerca de 82,5% do valor máximo. O força cortante por outro lado é relativamente baixo e varia entre cerca de 6,75% e 1,75%, respectivamente do pilar para a coroa. O momento interno é normalizado em relação ao produto interno força axial e o aumento. O momento interno é o mais alto nos pilares e é cerca de 67 % do valor máximo na coroa e em aproximadamente $\frac{1}{6}$ de distância dos pilares. Há quatro pontos de inflexão no diagrama do momento e eles correspondem com os pontos de deflexão zero no arco. A deflexão é mais alta na coroa e o gráfico de deflexões segue um perfil semelhante ao do diagrama do momento. A deflexão positiva e negativa corresponde ao momento positivo e negativo no arco, respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

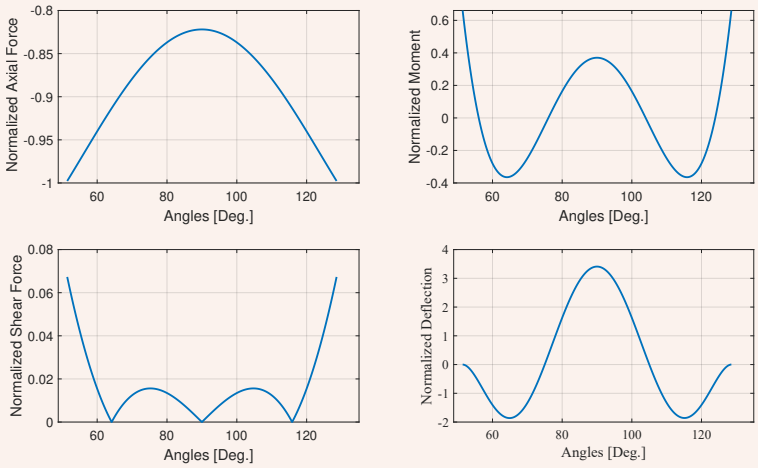


Figura D.43: Tramas para o arco circular sem dobradiças sob Udl

D.4.5 Arco circular sem dobras: validação

As equações analíticas desenvolvidas acima para o arco circular Hingeless sob carga concentrada, peso próprio e carga uniformemente distribuída são validadas em duas etapas. Em primeiro lugar, o peso próprio e carga uniformemente distribuída aplicado através da extensão do arco são divididos em série de 20 cargas concentradas. Os gráficos de esforços internos e deflexões são traçados usando as equações analíticas para o autopeso e carga uniformemente distribuída juntamente com seus respectivos cargas concentradas. Estes gráficos estão sobrepostos para verificar a validade das soluções analíticas. Como o peso próprio ou o carga uniformemente distribuída são equivalentes à sua respectiva série de cargas concentradas seus enredos combinam estreitamente entre si.

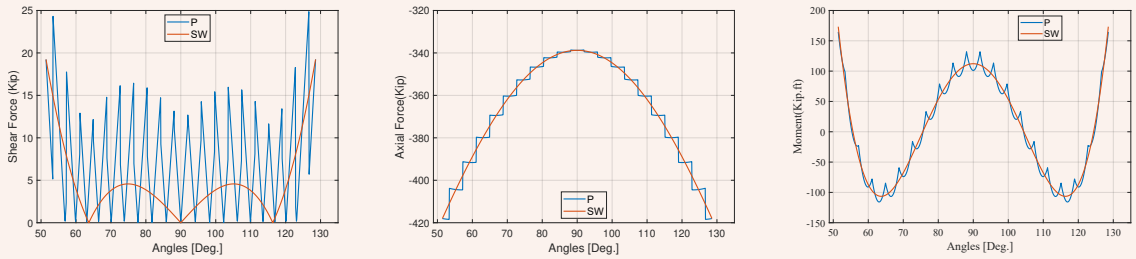


Figura D.44: Arco circular sem dobra sob auto-peso vs. Série de carga concentrada

Figura D.44 e Figura D.45 ilustra o processo acima discutido usado para validar as equações analíticas. Segundo, um modelo Sap 2000 é desenvolvido para o arco circular Hingeless sob peso próprio. No momento, os diagramas força cortante e força axial de sua análise são comparados com os gráficos plotados usando a equação analítica Os valores numéricos no diagrama do momento na Figura D.46, força axial diagrama na figura D.47 e força cortante diagrama na figura D.48 batem com seus respectivos valores nos gráficos da FiguraD.44.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

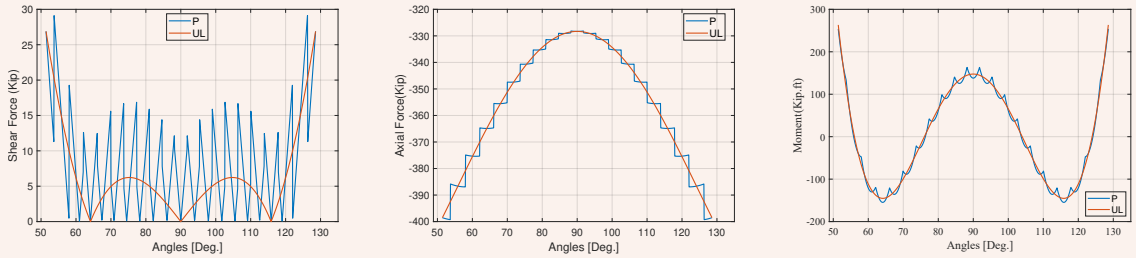


Figura D.45: Arco circular sem dobra sob uniformemente distribuir carga vs. Série de carga concentrada



Figura D.46: Sap 2000 - diagrama momentâneo de arco circular sem dobradiças sob o peso próprio



Figura D.47: Sap 2000 - força axial diagrama de arco circular sem dobradiças sob auto-peso

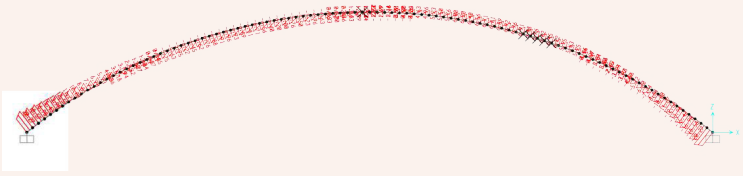


Figura D.48: Sap 2000 - força cortante diagrama de arco circular sem dobradiças sob auto-peso

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

D.4.6 Conclusão

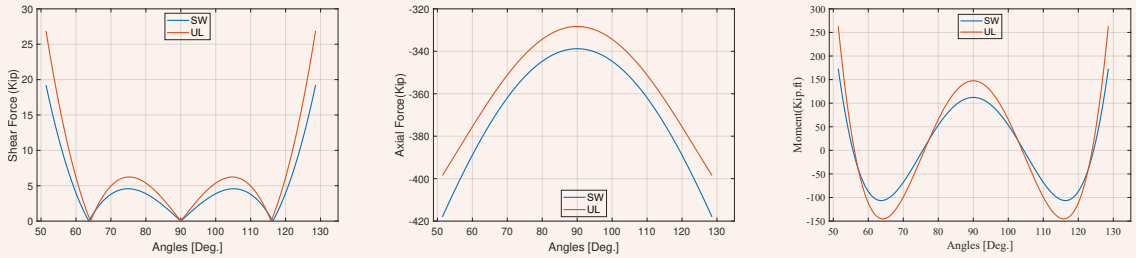


Figura D.49: Arco circular sem dobra sob o peso próprio vs.udl

Estas seções discutem o comportamento estrutural de um arco Hingeless sob carga concentrada, peso próprio e Carga uniformemente distribuída em termos de esforços internos e deflexão. Figura D.49 Compara a condição de carga do peso com o estado de carga uniformemente distribuído em uma carga igual w=2.275 kip/ft. Comparado ao peso próprio, um carga uniformemente distribuída causa mais interno força cortante, momento e deflexão, e isso provoca Menos compressão interna força axial. Figura D.50 Para isso,

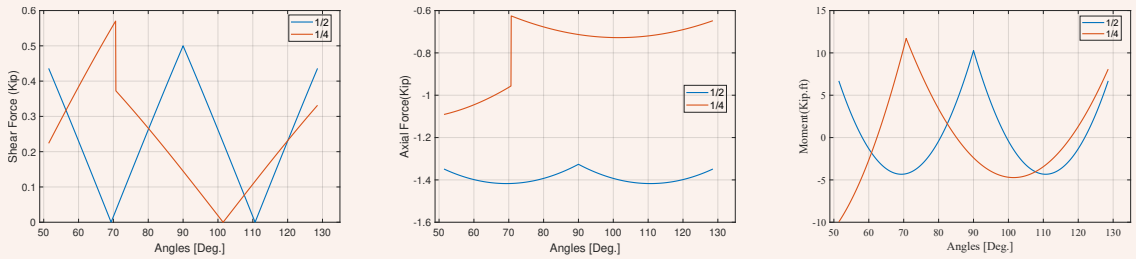


Figura D.50: Arco circular sem dobra sob carga concentrada em 1/2 e 1/4 de extensão

uma carga unitária é aplicada na coroa e no quarto da extensão. Sob esta condição, o momento máximo devido ao carga concentrada aplicado no quarto do span é cerca de 1,2 vezes mais do que o aplicado na coroa. O máximo força axial devido ao carga concentrada aplicado na coroa do span é cerca de 1,3 vezes mais do que o aplicado no quarto do vão.

D.5 Conclusão

O foco deste capítulo foi desenvolver equações analíticas para o reações de apoio e esforços internos em arco de três torções, duas torções e Hingeless e usar essas equações para entender o comportamento estrutural de cada tipo de arco. O arco de três eixos sendo estaticamente determinado só precisava de métodos comuns de estática para derivar as equações analíticas. Por outro lado, para o arco indeterminado e estaticamente de duas

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

torções e arco sem eixo, foi utilizado o método trabalho virtual juntamente com a equação de compatibilidade para a deformação.

Cada tipo de arco foi analisado sob três condições de carga - carga concentrada, peso próprio e carga uniformemente distribuída. Sob carga simétrica, a principal diferença encontrada entre os três tipos de arco é o número de pontos de inflexão em seu diagrama de momento e seu efeito na distribuição do momento através do arco. Como visto na figura D.15 um arco de três pontas não tem ponto de inflexão e tem alto momento negativo entre dobradiças adjacentes. Como mostrado na Figura D.33 com pontos vermelhos, um arco de duas voltas tem duas inflexões e tem alto momento positivo na coroa. Como mostrado na Figura D.49 com pontos vermelhos, um arco Hingeless tem quatro pontos de inflexão e tem alto momento positivo nos pilares. Para todos os três arcos, a comparação entre os pesos próprios e condições de carga uniformemente distribuídas indicam que o auto-peso contribui mais para o interno força axial, onde como o carga uniformemente distribuída contribui mais com o interior Momento. Isto demonstra o mecanismo de compressão único de um arco para resistir ao seu peso próprio.

As parcelas de esforços internos para cada tipo de arco indicavam que quando um carga concentrada aplicado na coroa de um arco causa um padrão diferente de esforços internos em comparação com o peso próprio do arco ou carga uniformemente distribuída aplicado em todo o espaço de Um arco. Quando um carga concentrada é aplicado na coroa de um arco de duas voltas ou de um Hingeless causa o máximo força axial a uma distância de cerca de $\frac{1}{4}$ para $\frac{1}{6}$ da extensão dos pilares e causa o momento máximo na coroa. Quando um carga concentrada é aplicado na coroa de um arco de três torções, causa o máximo força axial e momento a uma distância de aproximadamente $\frac{1}{4}$ da extensão dos pilares. Quando o auto-peso ou carga uniformemente distribuída é aplicado em um arco de três torções ou dois torcidos, causa máximo força axial nos pilares e momento máximo a uma distância de $\frac{1}{6}$ da extensão dos pilares, mas quando as mesmas forças são aplicadas em um arco de Hinges tanto o máximo força axial quanto o momento ocorre nos pilares. A deflexão máxima para todos os três arcos tipo sob o peso próprio ou carga uniformemente distribuída ocorre na coroa do arco. Sublinhamento da variação no esforços internos e deflexão dos arcos de estudos podem ser aplicados para otimizar sua seção transversal, bem como a resistência à compressão e flexão. Para todo o tipo de arcos, a análise também comparou esforços internos causado devido a um carga concentrada aplicado na coroa e em $\frac{1}{4}$ da extensão. O resultado mostra que o momento máximo ocorre quando um carga concentrada é aplicado no $\frac{1}{4}$ de span onde como máximo força axial ocorre quando é aplicado na coroa. Em geral, uma condição de carga assimétrica em todos os três tipos de arcos causa um momento interno substancialmente alto comparado com um carregamento simétrico. Esta relação de localização de um carga concentrada com o esforço interno pode ser usada para derivar locais apropriados para os cais no caso de um projeto aberto ponte arco spandrel. A partir dos resultados da análise, pode-se dizer que um layout simétrico de cais sobre o centro do arco fornecerá uma solução eficiente de projeto. Para as equações de compatibilidade mostradas na 'Estrutura Original: Seção de Força Redundante do arco de duas pontas e pontadas, ambos componentes axiais e flexurais são considerados. Observou-se que

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

múltiplas literaturas existentes na análise do arco usam apenas o componente flexural da equação de compatibilidade. Embora isso tenha efeito negligenciável sobre o arco de duas torções, foi encontrado que omitir o componente axial causaria cerca de 20% Erro no momento interno do arco Hingeless. Para validar as soluções analíticas, o programa Sap 2000 foi usado. Atualmente, não há um componente 'arco' disponível e, portanto, vários segmentos são usados para construir um arco em Sap 2000. O processo de validação indiciou que não ter o melhor número de segmentos poderia causar um erro substancial na computação de esforços internos. As equações analíticas desenvolvidas aqui podem servir como uma ferramenta preliminar para encontrar esforços internos em um arco.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice E

Tabelas de análise cilíndricas

As seguintes tabelas são tiradas de (Whitney et al., 1952). Eles também são dados em (Portland Cement Association, 1954) (Gibson, 1968) E claro (Billington, 1965).

Derivação original por Finsterwalder, 1933.

CÓPIA PARA REVISÃO

an ordinary indeterminate structure. As a matter of fact, since in most cases the thickness of the shell is determined by practical considerations (such as sufficient depth for reinforcement), a single investigation is generally sufficient. However, to achieve this economy in time and labor, a systematization of the analytical procedure is necessary. Such a systematization is here attempted, and to expedite the analysis and bring the various load-stress relationships into a coherent group, formulas and tables for the various stresses in a shell are given in this section. Those interested in the development of the formulas from which the tables are computed can find the development of the theory in Appendix II.

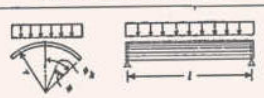
In its broader aspects the analysis of cylindrical shells is strikingly similar to the analysis of ordinary indeterminate structures. In the analysis of an indeterminate structure, it is customary to make it determinate by releasing end restraints, thereby allowing rotation and displacement of the end to occur. Afterward, reactions are applied to bring the boundary back to its original or desired position. The final stresses are the algebraic sum of those found in the determinate state and those induced by the end restraints.

The analysis of a thin shell follows the same procedure. It is first assumed that the surface load is transmitted to the supports solely by direct stresses, generally called "membrane stresses," which is equivalent to assuming the structure to be determinate. In the indeterminate two-dimensional analysis the preliminary step of making the structure determinate leads to displacements that are inconsistent with the prescribed end conditions, but in shell design the preliminary step called "membrane analysis" yields displacements and reactions along the longitudinal edges of the shell that do not comply with the boundary requirements. To satisfy these requirements, line loads must be applied along the longitudinal edges of the shell. In contrast with general surface loading, these line loads create bending as well as direct stresses in the shell. The stresses produced by the line loads must be added to the direct stresses previously evaluated to obtain the final stress pattern. Thus it is evident that the design of thin shells can be divided into two stages: (1) Determine the internal stresses and the edge forces created by the surface loading on the basis of membrane analysis; and (2), determine the stresses due to the edge line loading. It is in this order that the analysis of cylindrical shells will be presented.

Notation.—The letter symbols in this manual are defined where they first appear, in the text or by diagram, and are assembled alphabetically for reference, in Appendix III.

Step 1. Surface Loads.—The membrane analysis of a cylindrical shell subjected to surface loads involves only successive differentiations and integrations of the radial and tangential components of the surface loads. Since this is always possible for continuous loads, the stresses created by any type of continuous load distribution expressible as a function of the longitudinal and radial coordinates, x and ϕ, can be determined. For most conditions, the surface loads on the shell will be uniform in the longitudinal direction of the shell. The force and displacement components produced by two such loads

TABLE 1A.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE LENGTH OF THE BARREL

	(a) Uniform Transverse Load[a]	(b) Dead Weight Load[a]
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (1) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (2) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (3) Vertical Displacement[b] Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{\rho^4 t E} \times \left\{2\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right\} \times$ Col. (4) Horizontal Displacement[c] Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\rho^4 t E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (5) $+ \left[2\left(\frac{r}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{r}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left(\frac{x}{l} - (x/l)^2\right)\right] \times$ Col. (6)$\right\}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (7) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (8) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (9) Vertical Displacement Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{\rho^4 t E}\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (10)$\right\}$ Horizontal Displacement Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\rho^4 t E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (11)

$\phi_0 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−1.500	0	−1.0000	0.5000	0	0	−1.0000	0	−1.0000	1.0000	0
5	−1.477	−0.1302	−0.9924	0.4944	0.0872	−0.0003	−0.9960	−0.0871	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−1.409	−0.2565	−0.9698	0.4775	0.1736	−0.0025	−0.9853	−0.1736	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−1.295	−0.3749	−0.9330	0.4506	0.2588	−0.0072	−0.9749	−0.2589	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−1.150	−0.4820	−0.8830	0.4148	0.3420	−0.0200	−0.9399	−0.3421	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.965	−0.5748	−0.8214	0.3722	0.4226	−0.0377	−0.9088	−0.4225	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.750	−0.6503	−0.7500	0.3447	0.5000	−0.0625	−0.8658	−0.5000	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.513	−0.7048	−0.6710	0.2748	0.5736	−0.0944	−0.8194	−0.5737	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.261	−0.7385	−0.5868	0.2247	0.6428	−0.1328	−0.7661	−0.6428	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.7500	−0.5000	0.1767	0.7071	−0.1768	−0.7071	−0.7071	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.261	−0.7385	−0.4132	0.1328	0.7680	−0.2247	−0.6427	−0.7661	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.513	−0.7048	−0.3290	0.0944	0.8191	−0.2749	−0.5736	−0.8192	−0.5738	0.3290	0.4698
60	0.750	−0.6503	−0.2500	0.0625	0.8660	−0.3248	−0.5000	−0.8660	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.965	−0.5748	−0.1786	0.0377	0.9063	−0.3722	−0.4225	−0.9062	−0.4226	0.1786	0.3830
70	1.150	−0.4820	−0.1170	0.0199	0.9397	−0.4149	−0.3420	−0.9397	−0.3420	0.1170	0.3214
75	1.295	−0.3749	−0.0689	0.0086	0.9659	−0.4506	−0.2588	−0.9659	−0.2588	0.0689	0.2500
80	1.409	−0.2565	−0.0301	0.0028	0.9848	−0.4776	−0.1732	−0.9847	−0.1736	0.0301	0.1710
85	1.477	−0.1302	−0.0076	0.0004	0.9962	−0.4943	−0.0873	−0.9962	−0.0872	0.0076	0.0868
90	1.500	0	0	0	1.0000	−0.5000	0	−1.0000	0	0	0

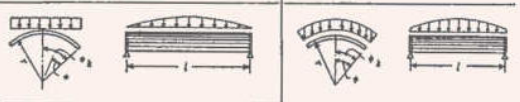
[a] The use of column numbers in the formulas refers to the appropriate coefficient in the column cited
[b] Downward direction is positive. [c] Inward direction is positive.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$
	Shearing Force S— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right] \cos \frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right] \cos \frac{\pi x}{l}$
	Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin \frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin \frac{\pi x}{l}$
	Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$	Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2+\frac{2}{\pi^2}+\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (10)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$
	Horizontal Displacement Δ_H— $+p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)}+\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin \frac{\pi x}{l}$	Horizontal Displacement Δ_H— $+p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin \frac{\pi x}{l}$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.4775	−0.5000	0.04355	0.7071	−0.04355	−0.1433	−0.4502	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.0528	−0.4702	−0.4132	0.03272	0.7660	−0.05537	−0.1302	−0.4877	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.1040	−0.4487	−0.3290	0.02325	0.8191	−0.06771	−0.1162	−0.5215	−0.5736	0.3290	0.4698
60	0.1520	−0.4140	−0.2500	0.01539	0.8660	−0.08001	−0.1013	−0.5513	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.1954	−0.3658	−0.1786	0.00930	0.9063	−0.09170	−0.0856	−0.5769	−0.4226	0.1786	0.3830
70	0.2329	−0.3069	−0.1170	0.00490	0.9397	−0.10222	−0.0693	−0.5982	−0.3420	0.1170	0.3214
75	0.2623	−0.2387	−0.0659	0.00213	0.9659	−0.11102	−0.0534	−0.6149	−0.2588	0.0659	0.2500
80	0.2856	−0.1633	−0.0301	0.00064	0.9848	−0.11766	−0.0351	−0.6269	−0.1736	0.0301	0.1710
85	0.2993	−0.0829	−0.0076	0.00009	0.9962	−0.12180	−0.0177	−0.6342	−0.0872	0.0076	0.0868
90	0.3040	0	0	0	1.0000	−0.12319	0	−0.6368	0	0	0

TABLE 1C.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING SINUSOIDALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$
	Shearing Force S— $p_0 r \frac{1}{r} \times \text{Col. (2)} \times \cos \frac{3\pi x}{l}$	Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)} \times \cos \frac{3\pi x}{l}$
	Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$
	Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (4)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$	Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left[\frac{2}{81(\pi r)^2}+\frac{4}{9}\left(\frac{r}{\pi l}\right)^2+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right] \sin \frac{3\pi x}{l}$
	Horizontal Displacement Δ_H— $+p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)}+\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4+\frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (6)}\right\} \sin \frac{3\pi x}{l}$	Horizontal Displacement Δ_H— $+p_0 r \frac{l^3}{\pi^4 l E}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.0338	0	−1.0000	0.00152	0	0	−0.0225	0	−1.0000	1.0000	0
5	−0.0332	−0.0276	−0.9924	0.00150	0.0872	−0.00000	−0.0224	−0.0185	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.0317	−0.0544	−0.9698	0.00145	0.1736	−0.00000	−0.0222	−0.0368	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.0291	−0.0796	−0.9330	0.00137	0.2588	−0.00002	−0.0219	−0.0549	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.0259	−0.1023	−0.8830	0.00126	0.3420	−0.00006	−0.0212	−0.0726	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.0217	−0.1219	−0.8214	0.00113	0.4226	−0.00011	−0.0204	−0.0897	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.0169	−0.1383	−0.7500	0.00099	0.5000	−0.00019	−0.0195	−0.1061	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.0116	−0.1498	−0.6710	0.00081	0.5736	−0.00029	−0.0181	−0.1217	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0059	−0.1567	−0.5868	0.00068	0.6428	−0.00040	−0.0172	−0.1364	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.1592	−0.5000	0.00054	0.7071	−0.00054	−0.0159	−0.1501	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.0059	−0.1567	−0.4132	0.00040	0.7660	−0.00068	−0.0145	−0.1625	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.0116	−0.1498	−0.3290	0.00029	0.8191	−0.00081	−0.0129	−0.1738	−0.5736	0.3290	0.4698
60	0.0169	−0.1383	−0.2500	0.00019	0.8660	−0.00099	−0.0113	−0.1838	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.0217	−0.1219	−0.1786	0.00011	0.9063	−0.00113	−0.0095	−0.1923	−0.4226	0.1786	0.3830
70	0.0259	−0.1023	−0.1170	0.00006	0.9397	−0.00126	−0.0077	−0.1994	−0.3420	0.1170	0.3214
75	0.0291	−0.0796	−0.0689	0.00002	0.9659	−0.00137	−0.0058	−0.2050	−0.2588	0.0689	0.2500
80	0.0317	−0.0544	−0.0301	0.00000	0.9848	−0.00145	−0.0040	−0.2090	−0.1736	0.0301	0.1710
85	0.0332	−0.0276	−0.0076	0.00000	0.9962	−0.00150	−0.0019	−0.2114	−0.0872	0.0076	0.0868
90	0.0338	0	0	0	1.0000	−0.00152	0	−0.2122	0	0	0

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

(the first varies uniformly in the transverse direction and the second varies as the weight of the shell) are presented in Table 1A, in which the internal forces and displacements in the system of cylindrical coordinates, shown in Fig. 13, are:

T_ϕ = the direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile;
T_x = the direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile;
S = the tangential shearing force, considered positive when it creates tension in the direction of increasing values of x and ϕ;
Δ_V = the vertical displacement, considered positive when it is in the downward direction;
Δ_H = the horizontal displacement, considered positive when it is directed inward;

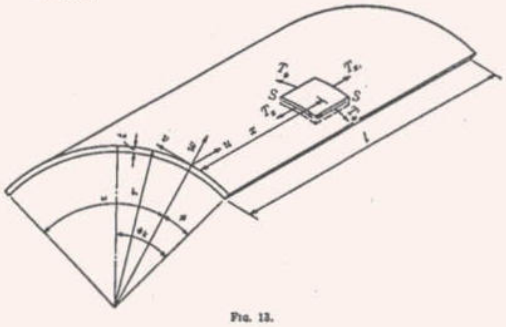


FIG. 13.

l = length of shell between supports;
r = centerline radius of shell;
t = thickness of shell;
x = longitudinal distance measured from the left support;
ϕ = angle measured from the right edge of shell;
ϕ_k = angle subtended by the edge of shell measured from the centerline axis;
E = modulus of elasticity of concrete;
p_x = intensity of uniform load on unit area; and,
p_d = intensity of dead load on unit area.

Although it is possible to obtain the internal forces produced by any surface loads, because of mathematical difficulties, the corrective line loads applied along the longitudinal edges are expressible only as functions of $\sin \frac{n\pi x}{l}$ or $\cos \frac{n\pi x}{l}$ in which n is any integer. To avoid confusion in the application of

the line loads under Step 2, it is expedient to regard the surface load on the shell as the sum of partial loads, the intensity of which is defined as $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

By a suitable selection of the values of A_n which will vary with each n, it is possible to approximate with any degree of accuracy any variation of loading. This representation of a known function by a series of sines or cosines is called "Fourier Analysis" and the series is called "Fourier Series." The Fourier series for a uniform load equals:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} \ldots\right] \quad (1a)$$

or:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (1b)$$

The partial loads represented by the first three terms are shown in Figs. 14(a), 14(b) and 14(c). The sum of the first and second term is shown in Fig. 14(d), and the sum of the first three terms is represented in Fig. 14(e). The sum of all the terms of the series gives the straight line $p = 1$. In general, only the first few terms of this series are needed to achieve sufficient accuracy. Hence, the internal forces and displacements produced by the sinusoidal loading represented by the first two terms are given in Tables 1B and 1C.

For the purpose of indicating the accuracy obtained by using only the first two partial loads, a comparison between values obtained by Table 1A and the sum of the values of Tables 1B and 1C is made. The internal forces at $\phi_k - \phi = 30°$ and at $x = \frac{l}{2}$ for T_x and T_ϕ and at $x = 0$ for S, in a shell subject to a uniform load, computed by Table 1A, are

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2(-0.750 \times \tfrac{1}{4}) = -0.1875\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad (2a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)(-0.650 \times 1) = -0.650\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad (2b)$$

and,

$$T_\phi = p_x r\,(-0.750 \times 1) = -0.750\, p_x r \quad (2c)$$

Using the coefficients from Tables 1B and 1C and applying the load constants indicated by the Fourier series:

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2\frac{4}{\pi}\left[-0.1520 \times 1 - \frac{1 \times (-)\,0.0169}{3}\right] = -0.186\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad (3a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)\frac{4}{\pi}\left[-0.414 + \frac{1 \times (-)\,0.1380}{3}\right] = -0.586\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad (3b)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

and,

$$T_\phi = p_u r \frac{4}{\pi}\left[-0.750 - \frac{1 \times (-) 0.750}{3}\right] = -0.635\, p_u r \ldots\ldots (3c)$$

Comparing the values obtained by the partial loads with those obtained by the uniform load, it is seen that good agreement is obtained for the longitudinal force T_x. The shear and transverse force components obtained by the sum of the first two sinusoidal loads are approximately 10% and 15% too small. In designing shells by partial loads, this discrepancy should be borne in mind and adjustments should be made to the final values.

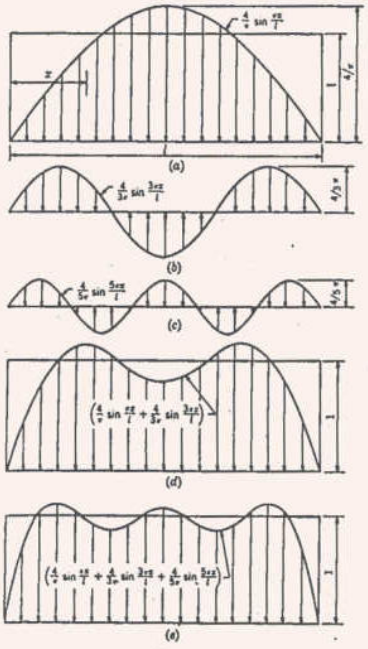
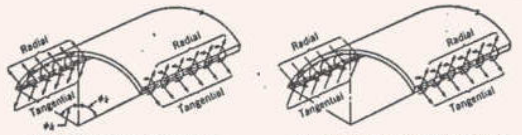


FIG. 14.

It is evident from Tables 1A, 1B and 1C that, for shells whose subtended angle is less than 180°, the membrane analysis gives transverse and shearing forces acting on and along the longitudinal edge. If the necessary marginal forces can be provided by the edge reactions and at the same time, the displacement of the supporting members correspond to the calculated displacements of the shell, the membrane analysis suffices; but to fulfill these requirements, deep edge members are often needed. In most cases these are neither possible nor desirable. On the contrary, in current practice the longitudinal edge beams are frequently omitted or reduced to a minimum size to exploit the full strength of the concrete shell. This reduction in the size of the edge beams means that the boundary conditions required by the membrane analysis are unfulfilled—in other words that the statical requirements of the shell are unsatisfied. To satisfy the requirements of statics, line loads must be applied.

Step 2—Line Loads Along the Longitudinal Edges.—Along the longitudinal edges four separate line loads, a radial shearing force, a longitudinal shearing force, a tangential transverse force and a moment, can be applied along each edge as shown in Fig. 15. The line loads along one edge can be different from those acting along the other edge. With these eight line loads, four on each edge, any edge requirement can be satisfied.

For a single barrel with no edge member, subject to a symmetrical load, the corrective line loads will consist simply of a tangential transverse force and a longitudinal shearing force equal to but opposite in direction to T_ϕ and S given by the membrane analysis. When the edge conditions are complicated by the presence of longitudinal edge beams or adjoining shells, in addition to the two afore-mentioned loads, a radial shearing force and a moment normal to the edge must be applied. The relative magnitude of each force will depend on the strains and rotation produced by each load. The determination of the correct proportions of each is illustrated in design examples. However, briefly,



(a) SYMMETRICAL LINE LOADS (b) ANTISYMMETRICAL LINE LOADS

FIG. 15.

the procedure consists of establishing a number of simultaneous equations fulfilling known edge requirements.

The effect of edge line loads on the shell is basically different from the effect of surface loads. As previously mentioned, line loads produce bending as well as direct forces. The various forces produced by line loads are illustrated in Fig. 16 with the additional force components defined as:

- N_ϕ = the radial shearing force on the radial face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative ϕ-direction;
- N_x = the radial shearing force on the longitudinal face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative x-axis;
- M_ϕ = bending moment on the radial face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
- M_x = bending moment on the transverse face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
- M_t = torsional moment, considered positive when it produces tension in the inner fibers in the direction of increasing values of x and ϕ;
- u = the displacement of the shell in the longitudinal direction, considered positive in the direction of increasing values of x;

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

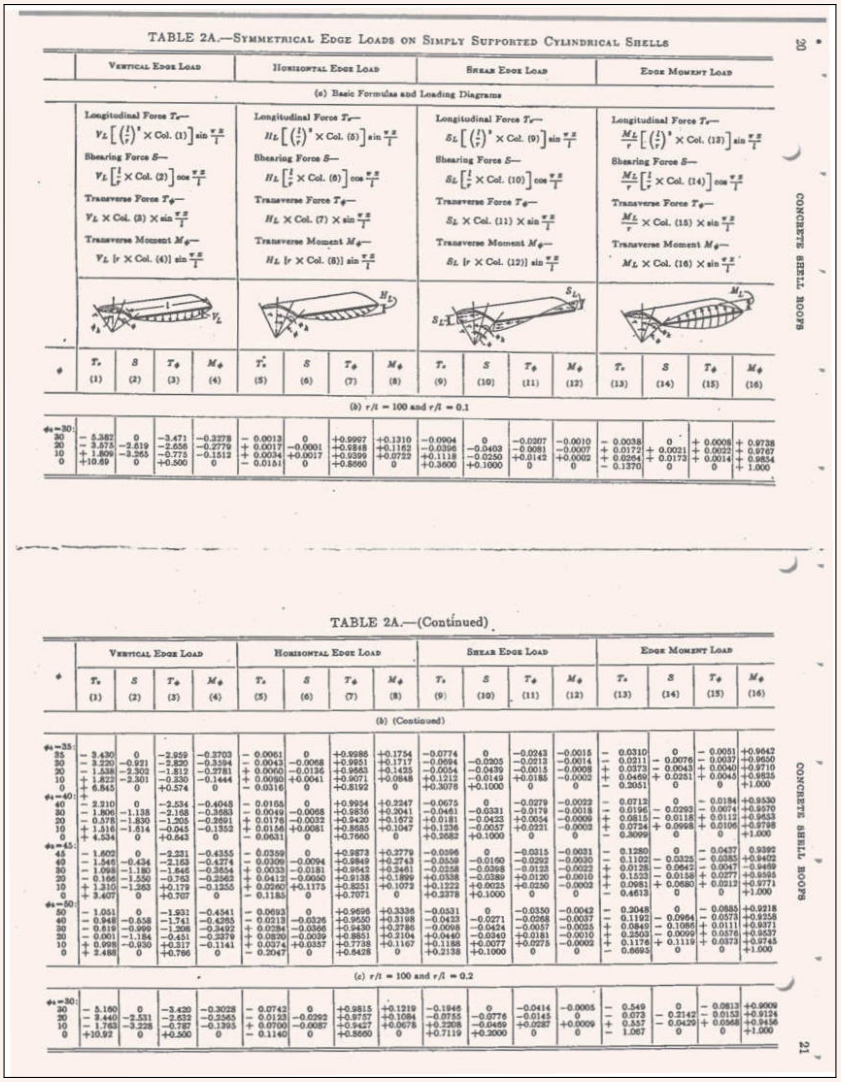


TABLE 2A.—Symmetrical Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

20

CONCRETE SHELL ROOFS

	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	(a) Basic Formulas and Loading Diagrams															
	Longitudinal Force T_x— $V_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $V_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $V_L \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $V_L\,[r \times \text{Col. (4)}]\sin\frac{\pi x}{l}$				Longitudinal Force T_x— $H_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (5)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $H_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (6)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $H_L \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $H_L\,[r \times \text{Col. (8)}]\sin\frac{\pi x}{l}$				Longitudinal Force T_x— $S_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (9)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (10)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times \text{Col. (11)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L\,[r \times \text{Col. (12)}]\sin\frac{\pi x}{l}$				Longitudinal Force T_x— $\frac{M_L}{r}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (13)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $\frac{M_L}{r}\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (14)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $\frac{M_L}{r} \times \text{Col. (15)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times \text{Col. (16)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$			
ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
	(b) $r/l = 100$ and $r/l = 0.1$															
ϕ_k=30°	− 5.382	0	−3.471	−0.3278	− 0.0013	0	+0.9997	+0.1310	−0.0904	0	−0.0207	−0.0010	− 0.0038	0	+ 0.0008	+ 0.9738
20	− 3.572	−2.619	−2.656	−0.2779	+ 0.0017	−0.0001	+0.9948	+0.1162	−0.0396	−0.2403	−0.0081	−0.0007	+ 0.0172	+ 0.0021	+ 0.0022	+ 0.9787
10	+ 1.809	−3.265	−0.773	−0.1512	+ 0.0034	+0.0017	+0.9399	+0.0722	+0.1118	−0.0250	+0.0142	+0.0002	+ 0.0264	+ 0.0173	+ 0.0014	+ 0.9854
0	+10.89	0	+0.500	0	− 0.0181	0	+0.8860	0	+0.3600	+0.1000	0	0	− 0.1370	0	0	+ 1.000

TABLE 2A.—(Continued)

	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
	(b) (Continued)															
ϕ_k=35°	− 3.430	0	−2.959	−0.3703	− 0.0061	0	+0.9986	+0.1754	−0.0774	0	−0.0243	−0.0015	− 0.0310	0	− 0.0051	+0.9642
35	− 3.220	−0.921	−2.820	−0.3394	− 0.0043	−0.0068	+0.9951	+0.1717	−0.0694	−0.0205	−0.0213	−0.0014	− 0.0311	− 0.0076	− 0.0037	+0.9650
30	− 1.538	−2.302	−1.812	−0.2781	+ 0.0060	−0.0136	+0.9853	+0.1425	−0.0554	−0.0439	−0.0115	−0.0008	+ 0.0373	− 0.0043	+ 0.0040	+0.9710
20	+ 1.822	−2.301	−0.330	−0.1444	+ 0.0090	+0.0041	+0.9071	+0.0948	+0.1212	−0.0149	+0.0185	−0.0002	+ 0.0489	+ 0.0251	+ 0.0045	+0.9825
10	+ 6.845	0	+0.574	0	− 0.0316	0	+0.8192	0	+0.3076	+0.1000	0	0	− 0.2051	0	0	+1.000
ϕ_k=40°																
40	− 2.310	0	−2.534	−0.4048	− 0.0165	0	+0.9934	+0.2247	−0.0675	0	−0.0279	−0.0022	− 0.0712	0	− 0.0184	+0.9530
30	− 1.806	−1.138	−2.168	−0.3583	− 0.0049	−0.0068	+0.9836	+0.2041	−0.0461	−0.0331	−0.0179	−0.0018	− 0.0196	− 0.0293	− 0.0074	+0.9570
20	− 0.578	−1.830	−1.205	−0.2891	+ 0.0176	−0.0032	+0.9420	+0.1672	+0.0181	−0.0423	+0.0054	−0.0009	− 0.0815	− 0.0118	− 0.0112	+0.9653
10	+ 1.516	−1.814	−0.045	−0.1552	+ 0.0156	+0.0081	+0.8585	+0.1047	+0.1236	−0.0057	+0.0231	−0.0003	− 0.0724	+ 0.0098	+ 0.0106	+0.9798
0	+ 4.534	0	+0.643	0	− 0.0631	0	+0.7660	0	+0.3682	+0.1000	0	0	− 0.3099	0	0	+1.000
ϕ_k=45°																
45	− 1.602	0	−2.231	−0.4355	− 0.0359	0	+0.9873	+0.2779	−0.0596	0	−0.0315	−0.0031	− 0.1280	0	− 0.0437	0.9392
40	− 1.546	−0.434	−2.163	−0.4274	− 0.0309	−0.0094	+0.9849	+0.2743	−0.0559	−0.0160	−0.0292	−0.0030	− 0.1102	− 0.0325	− 0.0385	+0.9402
30	− 1.068	−1.185	−1.846	−0.3854	+ 0.0033	−0.0181	+0.9643	+0.2461	−0.0258	−0.0398	−0.0123	−0.0022	+ 0.0128	− 0.0642	− 0.0247	−0.9489
20	− 0.166	−1.550	−0.763	−0.3262	+ 0.0412	−0.0050	+0.9138	+0.1899	+0.0338	−0.0389	+0.0120	−0.0010	+ 0.1533	− 0.0158	+ 0.0277	+0.9595
10	+ 1.310	−1.263	+0.179	−0.1355	+ 0.0260	+0.1175	+0.8251	+0.1072	+0.1222	+0.0025	+0.0250	−0.0002	+ 0.0081	+ 0.0580	+ 0.0213	+0.9771
0	+ 3.407	0	+0.707	0	− 0.1185	0	+0.7071	0	+0.3278	+0.1000	0	0	− 0.4613	0	0	+1.000
ϕ_k=50°																
50	− 1.051	0	−1.931	−0.4541	− 0.0693	0	+0.9696	+0.3336	−0.0531	0	−0.0350	−0.0042	− 0.2048	0	− 0.0885	+0.9218
40	− 0.948	−0.658	−1.741	−0.4265	− 0.0213	−0.0326	+0.9550	+0.3198	−0.0423	−0.0271	−0.0268	−0.0037	− 0.1192	− 0.0964	− 0.0573	+0.9258
30	− 0.619	−0.999	−1.208	−0.3492	+ 0.0284	−0.0366	+0.9430	+0.2786	−0.0096	−0.0424	−0.0057	−0.0025	+ 0.0849	− 0.1086	+ 0.0111	+0.9271
20	− 0.001	−1.184	−0.451	−0.2378	+ 0.0830	−0.0039	+0.9051	+0.2104	+0.0460	−0.0340	+0.0181	−0.0010	+ 0.2353	− 0.0099	+ 0.0576	+0.9537
10	+ 0.998	−0.930	+0.217	−0.1141	+ 0.0374	+0.0357	+0.7738	+0.1167	+0.1188	+0.0077	+0.0275	−0.0002	+ 0.1176	+ 0.1119	+ 0.0373	+0.9745
0	+ 2.488	0	+0.786	0	− 0.2047	0	+0.6428	0	+0.2138	+0.1000	0	0	− 0.6695	0	0	+1.000
	(c) $r/l = 100$ and $r/l = 0.2$															
ϕ_k=30°	− 5.150	0	−3.420	−0.3028	− 0.0743	0	+0.9815	+0.1219	−0.1946	0	−0.0414	−0.0005	− 0.549	0	− 0.0813	+0.9009
20	− 3.440	−2.531	−2.623	−0.2565	− 0.0123	−0.0292	+0.9757	+0.1084	−0.0755	−0.0776	−0.0145	0	− 0.073	− 0.2142	− 0.0153	+0.9124
10	− 1.763	−3.228	−0.787	−0.1393	+ 0.0700	−0.0687	+0.9427	+0.0678	+0.2208	−0.0489	+0.0287	+0.0009	− 0.357	− 0.0429	+ 0.0588	+0.9456
0	+10.92	0	+0.500	0	− 0.1465	0	+0.8660	0	+0.7119	+0.3000	0	0	− 1.067	0	0	+1.000

21

CONCRETE SHELL ROOFS

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

TABLE 2A.—(Continued)

22

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(c) (Continued)																
$\phi_1 = 25°$	− 3.087	0	−2.871	−0.3347	− 0.1552	0	+0.9603	+0.1591	−0.1487	0	−0.0458	−0.0024	− 0.912	0	− 0.1914	+0.8637
30	− 2.939	−0.833	−2.744	−0.3248	− 0.1560	−0.0399	+0.9622	+0.1559	−0.1334	−0.0394	−0.0401	−0.0022	+ 0.742	− 0.2343	− 0.1685	+0.8069
20	− 1.829	−2.156	−1.807	−0.2314	+ 0.0581	−0.0634	+0.9849	+0.1301	−0.0108	−0.0845	−0.0018	−0.0012	+ 0.327	− 0.3747	+ 0.0318	+0.8914
10	+ 1.501	−2.296	−0.365	−0.1302	+ 0.1556	+0.0074	+0.9224	+0.0781	+0.2378	−0.0293	+0.0369	−0.0001	+ 0.928	+ 0.0486	+ 0.1212	+0.9562
0	+ 7.434	0	+0.574	0	− 0.2244	0	+0.8192	0	+0.6139	+0.3000	0	0	+ 2.045	0	0	+1.000
$\phi_1 = 40°$																
40	− 1.764	0	−2.398	−0.3556	− 0.3096	0	+0.9087	+0.1962	−0.1273	0	−0.0325	−0.0035	− 1.421	0	− 0.3885	+0.8156
30	− 1.645	−0.947	−2.105	−0.3339	− 0.1336	−0.1389	+0.9351	+0.1845	−0.0880	−0.0626	−0.0335	−0.0029	− 0.631	− 0.6481	− 0.3007	+0.8306
20	− 0.963	−1.697	−1.351	−0.2374	+ 0.2243	−0.1133	+0.9680	+0.1487	+0.0323	−0.0817	+0.0109	−0.0013	+ 1.015	− 0.5396	+ 0.1574	+0.8707
10	+ 1.111	−1.763	−0.109	−0.1188	+ 0.2753	+0.0557	+0.9161	+0.0870	+0.2408	−0.0111	+0.0434	−0.0007	+ 1.316	+ 0.2523	+ 0.2259	+0.9271
0	+ 6.356	0	+0.643	0	− 0.7210	0	+0.7660	0	+0.6460	+0.2000	0	0	+ 3.452	0	0	+1.000
$\phi_1 = 45°$																
45	− 0.775	0	−1.934	−0.3619	− 0.5679	0	+0.7941	+0.2293	−0.1067	0	−0.0377	−0.0050	− 2.074	0	− 0.7385	+0.7309
40	− 0.820	−0.217	−1.897	−0.3556	− 0.4967	−0.1493	+0.8118	+0.2269	−0.0988	−0.0287	−0.0535	−0.0048	− 1.828	− 0.5460	− 0.6582	+0.7358
30	− 1.062	−0.731	−1.584	−0.3068	− 0.2210	−0.2078	+0.9229	+0.2071	−0.0506	−0.0795	−0.0228	−0.0034	− 0.116	− 1.138	− 0.1410	+0.7920
20	− 0.934	−1.217	−0.910	−0.2176	+ 0.5381	−0.1552	+1.008	+0.1641	+0.0570	−0.0737	+0.0224	−0.0014	+ 1.958	− 0.6987	+ 0.3956	+0.8510
10	+ 0.700	−1.478	+0.039	−0.1073	+ 0.4245	+0.1611	+0.9154	+0.0948	+0.2353	+0.0028	+0.0482	0	+ 1.641	+ 0.2811	+ 0.3778	+0.9196
0	+ 5.344	0	+0.707	0	− 1.392	0	+0.7071	0	+0.4995	+0.3000	0	0	+ 5.299	0	0	+1.000
$\phi_1 = 50°$																
50	+ 0.052	0	− 1.437	−0.3493	− 0.9469	0	+0.5813	+0.2514	−0.0848	0	−0.0601	−0.0065	− 2.814	0	− 1.245	+0.6613
40	− 0.291	−0.028	− 1.413	−0.3315	− 0.8427	−0.4585	+0.7040	+0.2452	−0.0714	−0.0439	−0.0468	−0.0056	− 1.762	− 1.381	− 0.8336	+0.6869
30	− 1.016	−0.383	− 1.345	−0.2788	+ 0.2885	−0.5526	+0.9656	+0.2238	−0.0258	−0.0723	−0.0113	−0.0035	+ 0.797	− 1.690	+ 0.0839	+0.7533
20	− 1.244	−1.059	− 0.745	−0.1953	+ 0.1015	−0.1620	+1.112	+0.1794	+0.0656	−0.0959	+0.0312	−0.0013	+ 3.038	− 0.538	+ 0.7607	+0.8338
10	+ 0.381	−1.427	+0.110	−0.0943	+ 0.5824	+0.3610	+0.9471	+0.1015	+0.2257	+0.0125	+0.0513	0	+ 1.811	+ 1.083	+ 0.3718	+0.9154
0	+ 5.670	0	+0.766	0	− 2.398	0	+0.6428	0	+0.4748	+0.3000	0	0	+ 7.473	0	0	+1.000
(d) $r/t = 100$ and $r/t = 0.3$																
$\phi_1 = 30°$																
30	− 4.709	0	− 3.362	−0.2789	− 0.2662	0	+0.9571	+0.1099	−0.2618	0	−0.0596	−0.0024	+ 2.101	0	− 0.3444	+0.7859
20	− 3.668	−2.381	− 2.632	−0.2347	− 0.0094	−0.0961	+0.9753	+0.0982	−0.1182	−0.1174	−0.0231	−0.0016	+ 0.108	− 0.7689	− 0.0803	+0.8119
10	+ 1.053	−3.290	− 0.837	−0.1275	+ 0.2942	+0.0035	+0.9639	+0.0622	+0.3251	−0.0750	+0.0421	−0.0003	+ 2.372	+ 0.0141	+ 0.1945	+0.8845
0	+12.43	0	+0.500	0	− 0.6606	0	+0.8660	0	+1.102	+0.3000	0	0	+ 5.456	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

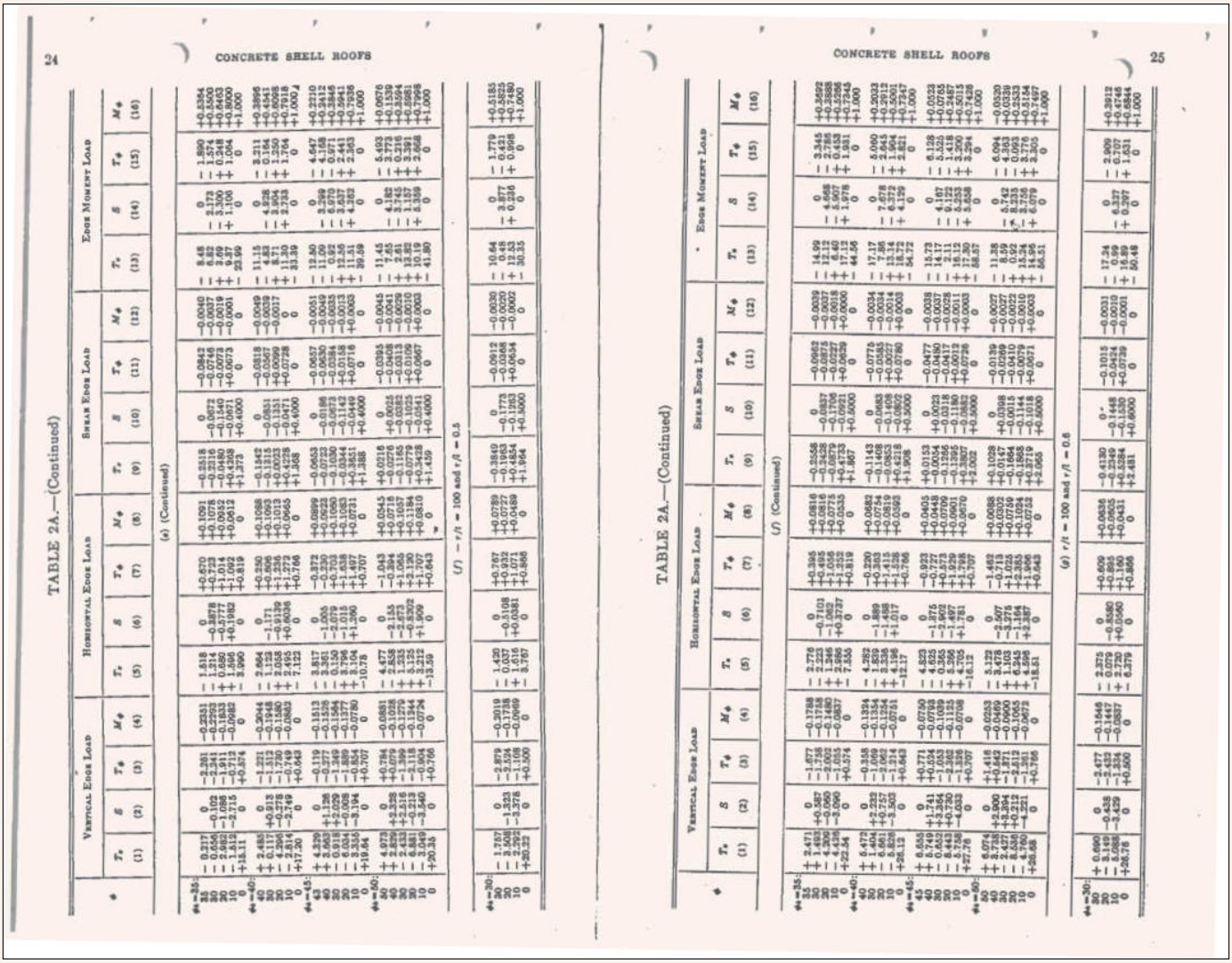
23

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(d) (Continued)																
$\phi_1 = 35°$	− 2.156	0	− 2.682	−0.2903	− 0.8039	0	+0.8706	+0.1362	−0.2140	0	−0.0585	−0.0036	+ 3.493	0	− 0.7613	+0.7084
30	− 2.203	−0.595	− 2.591	−0.2821	− 0.4823	−0.1544	+0.8932	+0.1338	−0.1937	−0.0568	−0.0603	−0.0033	+ 2.808	− 0.8945	− 0.5319	+0.7161
20	− 2.151	−1.817	− 1.950	−0.2201	− 0.2958	−0.2300	+0.9459	+0.1137	−0.0244	−0.1245	−0.0346	−0.0018	+ 1.508	− 1.358	+ 0.1098	+0.7729
10	+ 0.513	−2.456	− 0.452	−0.1148	+ 0.8242	+0.0755	+0.9830	+0.0898	+0.3455	−0.0471	+0.0535	−0.0002	+ 3.764	+ 0.4236	+ 0.4372	+0.8589
0	+10.03	0	+0.574	0	− 1.343	0	+0.8192	0	+0.8978	+0.3000	0	0	+ 9.403	0	0	+1.000
$\phi_1 = 40°$																
40	− 0.218	0	− 1.977	−0.2853	− 1.176	0	+0.8733	+0.1553	−0.1668	0	−0.0736	−0.0048	+ 5.193	0	− 1.489	+0.6071
30	− 1.030	−0.275	− 1.822	−0.2631	− 0.4855	−0.5149	+0.8708	+0.1488	−0.1238	−0.0637	−0.0483	−0.0039	+ 2.223	− 2.288	− 0.7475	+0.6444
20	− 2.210	−1.303	− 1.430	−0.1982	+ 0.9141	−0.3958	+1.059	+0.1252	+0.0263	−0.1164	+0.0125	−0.0018	+ 3.993	− 1.809	+ 0.5718	+0.7382
10	− 0.295	−3.141	− 0.338	−0.1018	+ 1.073	+0.2676	+1.040	+0.0762	+0.3397	−0.0252	+0.0611	−0.0001	+ 5.004	+ 1.180	+ 0.7966	+0.8572
0	+10.01	0	+0.643	0	− 3.068	0	+0.7660	0	+0.8934	+0.3000	0	0	+ 14.38	0	0	+1.000
$\phi_1 = 45°$																
45	+ 1.400	0	− 1.178	−0.2565	− 1.970	0	+0.3055	+0.1591	−0.1142	0	+0.0719	−0.0059	+ 6.846	0	− 2.463	+0.4746
40	+ 1.083	+0.334	− 1.224	−0.2537	− 1.728	−0.5178	+0.3766	+0.1589	−0.1112	−0.0310	−0.0674	−0.0056	+ 6.032	− 1.802	− 2.202	+0.4871
30	− 1.040	+0.432	− 1.454	−0.2296	− 0.0472	−1.061	+0.8585	+0.1550	−0.0776	−0.0851	−0.0328	−0.0040	+ 0.316	− 3.743	− 0.4779	+0.5768
20	− 3.110	−0.788	− 1.396	−0.1743	+ 1.941	−0.5051	+1.279	+0.1338	+0.0382	−0.1013	+0.0241	−0.0016	+ 6.770	− 1.867	+ 1.313	+0.7124
10	− 0.946	−2.214	− 0.330	−0.0899	+ 1.313	+0.6328	+1.158	+0.0821	+0.3209	−0.0128	+0.0645	−0.0001	+ 5.696	+ 2.230	+ 1.229	+0.8510
0	+11.24	0	+0.707	0	− 5.257	0	+0.7071	0	+0.8743	+0.3000	0	0	+ 19.61	0	0	+1.000
$\phi_1 = 50°$																
50	+ 2.803	0	− 0.326	−0.2300	− 2.821	0	−0.2407	+0.1409	−0.0565	0	−0.0511	−0.0063	+ 7.871	0	− 3.553	+0.3153
40	+ 1.276	+1.180	− 0.678	−0.2032	− 1.744	−1.346	+0.1577	+0.1474	−0.0651	−0.0337	−0.0514	−0.0056	+ 4.994	− 3.782	− 2.394	+0.3734
30	− 1.837	+1.062	− 1.342	−0.1928	+ 0.8732	−1.624	+1.033	+0.1561	−0.0643	−0.0730	−0.0308	−0.0036	+ 2.207	− 4.666	+ 0.2204	+0.5237
20	− 4.099	−0.890	− 1.432	−0.1527	+ 3.129	−0.4486	+1.523	+0.1422	+0.0214	−0.0879	+0.0276	−0.0013	+ 8.917	− 1.422	+ 2.171	+0.5995
10	− 7.187	−3.497	− 0.379	−0.0801	+ 1.705	+1.155	+1.315	+0.0885	+0.3002	−0.0113	+0.0639	−0.0002	+ 5.588	+ 3.217	+ 1.625	+0.8508
0	+12.66	0	+0.766	0	− 7.773	0	+0.6428	0	+0.8992	+0.3000	0	0	− 23.76	0	0	+1.000
(e) $r/t = 100$ and $r/t = 0.4$																
$\phi_1 = 30°$																
30	− 3.508	0	− 3.175	−0.2404	− 0.736	0	+0.881	+0.0947	−0.3318	0	−0.0772	−0.0028	+ 5.33	0	− 0.879	+0.6558
20	− 3.500	−1.942	− 2.562	−0.2048	+ 0.038	−0.2682	+0.958	+0.0856	−0.1568	−0.1503	−0.0304	−0.0019	+ 0.14	− 1.920	− 0.196	+0.8995
10	− 0.244	−3.281	− 0.947	−0.1121	+ 0.804	−0.0008	+1.008	+0.0344	+0.4153	−0.0998	+0.0545	−0.0003	+ 6.27	+ 0.187	+ 0.502	+0.8169
0	+15.23	0	+0.500	0	− 1.772	0	+0.866	0	+1.508	+0.4000	0	0	− 15.27	0	0	+1.000

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

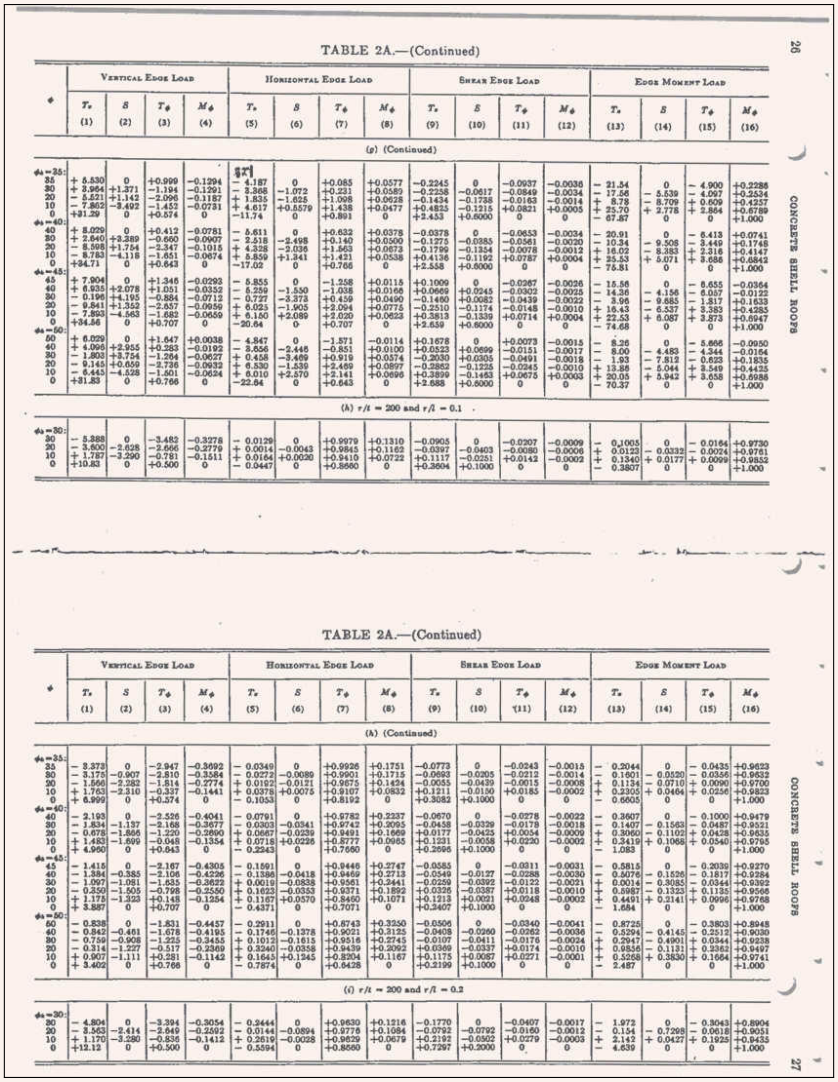


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(p) (Continued)																
$\phi_0 = 25°$:																
35	+ 5.530	0	+0.999	−0.1294	− 4.187	0	+0.085	+0.0577	−0.2245	0	−0.0937	−0.0036	− 21.54	0	− 4.900	+0.2288
30	+ 3.964	+1.371	−1.194	−0.1291	− 3.868	−1.072	+0.231	+0.0589	−0.2238	−0.0617	−0.0849	−0.0034	− 17.56	− 5.539	− 4.097	+0.2534
20	− 5.521	+1.142	−2.096	−0.1167	+ 1.835	−1.625	+1.098	+0.0628	−0.1434	−0.1738	−0.0163	−0.0014	+ 8.78	+ 8.709	+ 0.509	+0.4257
10	− 7.862	−3.492	−1.452	−0.0731	+ 4.617	+0.5579	+1.438	+0.0477	+0.4825	−0.1215	+0.0821	+0.0005	+ 25.70	+ 2.778	+ 2.864	+0.6789
0	+81.29	0	+0.574	0	−11.74	0	+0.891		+2.453	+0.6000	0	0	− 67.87	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	+ 8.029	0	+0.412	−0.0781	− 5.611	0	+0.632	+0.0378	−0.0378	0	−0.0653	−0.0034	− 20.91	0	− 6.413	+0.0741
30	+ 2.940	+2.289	−0.660	−0.0907	− 2.518	−2.498	+0.140	+0.0509	−0.1275	−0.0385	−0.0561	−0.0020	− 10.34	− 9.508	− 3.449	+0.1748
20	− 8.598	+1.754	−2.347	−0.1015	+ 4.328	−2.036	+1.563	+0.0573	−0.1799	−0.1354	−0.0078	−0.0012	+ 16.02	+ 8.383	+ 2.316	+0.4147
10	− 8.783	−4.118	−1.851	−0.0674	+ 5.859	+1.341	+1.421	+0.0538	+0.4136	−0.1192	+0.0787	+0.0004	+ 25.53	+ 5.071	+ 3.686	+0.6842
0	+84.71	0	+0.643	0	−17.02	0	+0.766		+2.538	+0.6000	0	0	− 76.81	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	+ 7.904	0	+1.345	−0.0293	− 5.855	0	−1.358	+0.0115	+0.1009	0	−0.0267	−0.0026	− 15.56	0	− 5.655	−0.0364
40	+ 6.935	+2.078	+1.051	−0.0352	− 5.259	−1.550	−1.038	+0.0166	+0.0669	+0.0245	−0.0302	−0.0025	− 14.36	− 4.158	− 6.037	−0.0122
30	− 0.196	+4.195	−0.884	−0.0712	− 0.727	−3.373	+0.459	+0.0490	−0.1460	+0.0082	−0.0439	−0.0022	− 3.96	− 9.885	− 1.817	+0.1633
20	− 9.841	+1.352	−2.857	−0.0959	+ 5.023	−1.905	+2.094	+0.0775	−0.2510	−0.1174	−0.0148	−0.0010	+ 16.43	− 6.537	+ 3.383	+0.4285
10	− 7.893	−4.563	−1.682	−0.0659	+ 6.100	+2.089	+2.020	+0.0622	+0.3813	−0.1339	+0.0714	+0.0004	+ 22.53	+ 6.087	+ 3.873	+0.6947
0	+94.56	0	+0.707	0	−20.64	0	+0.707		+2.659	+0.6000	0	0	− 74.68	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	+ 6.029	0	+1.647	+0.0038	− 4.847	0	−1.371	−0.0114	+0.1678	0	+0.0073	−0.0015	− 8.26	0	− 5.866	−0.0950
40	+ 4.095	+2.955	+1.283	−0.0192	− 3.256	−2.445	−0.851	+0.0100	+0.0523	+0.0699	−0.0151	−0.0017	− 8.00	− 4.483	− 4.344	−0.0154
30	− 1.803	+3.754	−1.264	−0.0527	+ 0.458	−3.409	+0.919	+0.0374	−0.2030	+0.0305	−0.0491	−0.0018	− 1.93	− 7.812	− 0.523	+0.1835
20	− 9.143	+0.659	−2.738	−0.0933	+ 5.530	−1.539	+2.469	+0.0897	−0.2862	−0.1255	−0.0245	−0.0010	+ 13.86	+ 5.044	+ 3.549	+0.4425
10	− 6.445	−4.528	−1.501	−0.0624	+ 8.010	+2.570	+2.141	+0.0696	+0.3899	−0.1453	+0.0675	+0.0003	+ 20.05	+ 5.942	+ 3.658	+0.6686
0	+81.83	0	+0.766	0	−22.84	0	+0.643		+2.688	+0.6000	0	0	− 70.37	0	0	+1.000
(h) $r/t = 200$ and $r/l = 0.1$																
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 5.388	0	−3.483	−0.3278	− 0.0129	0	+0.9979	+0.1310	−0.0905	0	−0.0207	−0.0009	− 0.1005	0	− 0.0164	+0.9730
20	− 3.600	−2.628	−2.666	−0.2779	+ 0.0014	−0.0043	+0.9845	+0.1163	−0.0397	−0.0403	−0.0080	−0.0006	+ 0.0123	− 0.0335	− 0.0024	+0.9781
10	+ 1.787	−3.290	−0.781	−0.1511	+ 0.0164	+0.0030	+0.9410	+0.0722	+0.1117	−0.0251	+0.0142	−0.0002	+ 0.1340	+ 0.0177	+ 0.0099	+0.9852
0	+10.83	0	+0.500	0	− 0.0447	0	+0.8580		+0.3604	+0.1000	0	0	− 0.3807	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(i) (Continued)																
$\phi_0 = 35°$:																
35	− 3.373	0	−2.947	−0.3692	− 0.0349	0	+0.9926	+0.1751	−0.0773	0	−0.0243	−0.0018	− 0.2044	0	− 0.0435	+0.9623
30	− 3.178	−0.907	−2.810	−0.3584	− 0.0272	−0.0089	+0.9901	+0.1715	−0.0693	−0.0205	−0.0212	−0.0014	− 0.1601	− 0.0520	− 0.0356	+0.9632
20	− 1.566	−2.382	−1.814	−0.2774	+ 0.0122	−0.0121	+0.9875	+0.1454	−0.0265	−0.0439	−0.0115	−0.0008	+ 0.1134	+ 0.0710	+ 0.0090	+0.9700
10	+ 1.763	−3.310	−0.337	−0.1441	+ 0.0378	+0.0075	+0.9107	+0.0832	+0.1211	−0.0130	+0.0185	−0.0002	+ 0.2305	+ 0.0464	+ 0.0256	+0.9823
0	+ 6.999	0	+0.574	0	− 0.1053	0	+0.8192		+0.3082	+0.1000	0	0	− 0.6605	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	− 3.193	0	−2.526	−0.4041	− 0.0791	0	+0.9782	+0.2337	−0.0670	0	−0.0278	−0.0022	− 0.3607	0	− 0.1000	+0.9479
30	− 1.834	−1.137	−2.168	−0.3677	− 0.0303	−0.0341	+0.9742	+0.2093	−0.0458	−0.0329	−0.0178	−0.0018	− 0.1407	− 0.1563	− 0.0487	+0.9531
20	− 0.678	−1.866	−1.220	−0.2890	+ 0.0667	−0.0239	+0.9491	+0.1669	+0.0177	−0.0425	+0.0054	−0.0009	+ 0.3060	+ 0.1102	+ 0.0428	+0.9635
10	+ 1.483	−1.899	−0.048	−0.1354	+ 0.0718	+0.0226	+0.8777	+0.0955	+0.1231	−0.0058	+0.0230	−0.0002	+ 0.3419	+ 0.1068	+ 0.0540	+0.9795
0	+ 4.960	0	+0.643	0	− 0.2343	0	+0.7660		+0.2695	+0.1000	0	0	− 1.083	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	− 1.415	0	−2.167	−0.4305	− 0.1591	0	+0.9446	+0.2747	−0.0585	0	−0.0311	−0.0031	− 0.5815	0	− 0.2039	+0.9270
40	− 1.384	−0.385	−2.106	−0.4226	− 0.1586	−0.0418	+0.9469	+0.2713	−0.0549	−0.0127	−0.0288	−0.0030	− 0.5076	− 0.1525	− 0.1817	+0.9284
30	− 1.097	−1.081	−1.635	−0.3622	− 0.0619	−0.0838	+0.9561	+0.2441	−0.0259	−0.0392	−0.0122	−0.0021	− 0.2014	− 0.3085	− 0.0344	+0.9362
20	− 0.250	−1.505	−0.798	−0.2550	+ 0.1623	−0.0353	+0.9371	+0.1892	+0.0326	−0.0387	+0.0118	−0.0010	+ 0.3987	+ 0.1323	+ 0.1135	+0.9566
10	+ 1.178	−1.323	+0.148	−0.1254	+ 0.1167	+0.0570	+0.8465	+0.1071	+0.1213	+0.0021	+0.0348	−0.0002	+ 0.4491	+ 0.2141	+ 0.0996	+0.9768
0	+ 3.887	0	+0.707	0	− 0.4371	0	+0.7071		+0.2407	+0.1000	0	0	− 1.684	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	− 0.838	0	−1.831	−0.4457	− 0.2911	0	+0.8743	+0.3250	−0.0506	0	−0.0340	−0.0041	− 0.8725	0	− 0.3803	+0.8948
40	− 0.842	−0.461	−1.678	−0.4195	− 0.1746	−0.1378	+0.9021	+0.3125	−0.0408	−0.0260	−0.0262	−0.0036	− 0.5294	− 0.4145	− 0.2512	+0.9030
30	− 0.759	−0.908	−1.225	−0.3455	+ 0.1012	−0.1615	+0.9518	+0.2745	−0.0107	−0.0411	−0.0176	−0.0024	+ 0.2947	− 0.4901	+ 0.0344	+0.9238
20	− 0.314	−1.227	−0.517	−0.2369	+ 0.3240	−0.0358	+0.9439	+0.2092	+0.0369	−0.0337	+0.0174	−0.0010	+ 0.9856	− 0.1131	+ 0.2362	+0.9497
10	+ 0.907	−1.111	+0.281	−0.1142	+ 0.1643	+0.1345	+0.8204	+0.1167	+0.1175	+0.0087	+0.0271	−0.0001	+ 0.5268	+ 0.3830	+ 0.1664	+0.9741
0	+ 3.402	0	+0.766	0	− 0.7874	0	+0.6428		+0.2199	+0.1000	0	0	− 2.487	0	0	+1.000
(i) $r/t = 200$ and $r/l = 0.2$																
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 4.804	0	−3.394	−0.3054	− 0.3444	0	+0.9630	+0.1216	−0.1770	0	−0.0407	−0.0017	− 1.972	0	− 0.3043	+0.8904
20	− 3.563	−2.414	−2.649	−0.2592	− 0.0144	−0.0894	+0.9778	+0.1084	−0.0792	−0.0792	−0.0160	−0.0012	− 0.154	− 0.7295	− 0.0618	+0.9051
10	+ 1.170	−3.280	−0.836	−0.1412	+ 0.2619	−0.0028	+0.9579	+0.0679	+0.2197	−0.0522	+0.0279	−0.0003	+ 2.143	+ 0.0422	+ 0.1925	+0.9435
0	+12.13	0	+0.500	0	− 0.5594	0	+0.8569		+0.7297	+0.3000	0	0	− 4.639	0	0	+1.000

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

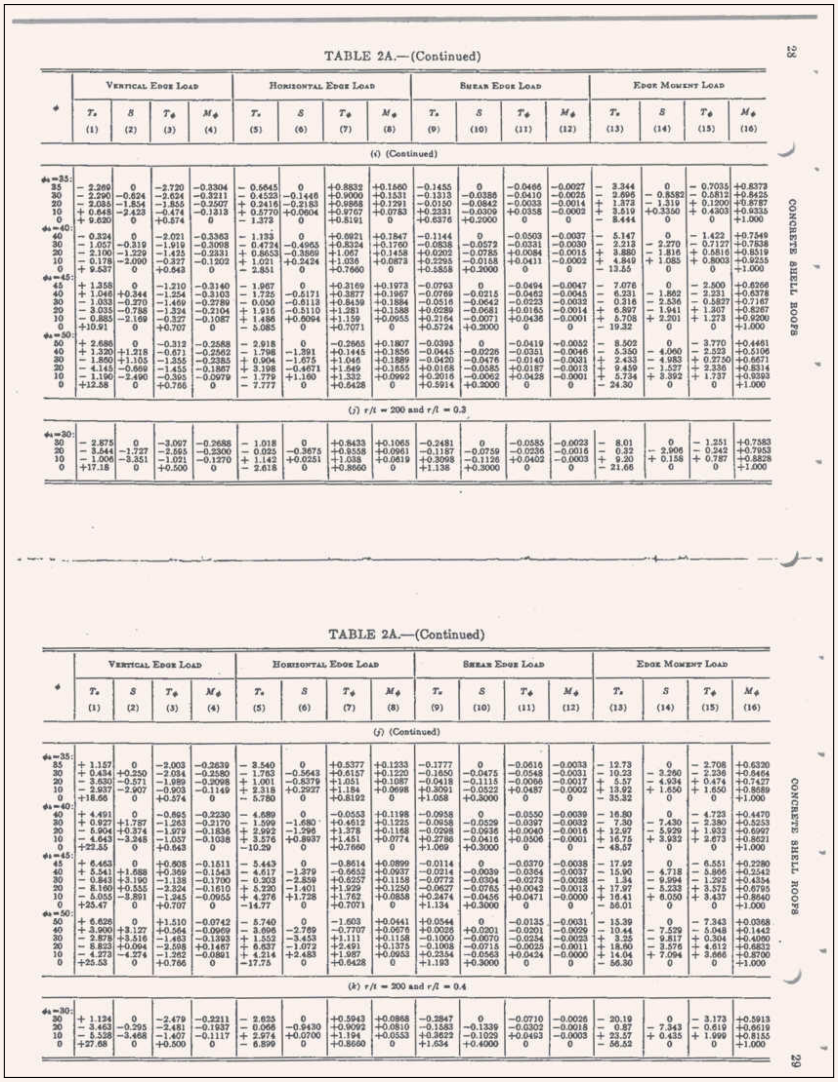


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(i) (Continued)																
$\phi_1=35°$	− 2.269	0	−2.720	−0.3304	− 0.5645	0	+0.8832	+0.1580	−0.1455	0	−0.0466	−0.0027	− 3.344	0	− 0.7035	+0.8373
30	− 2.290	−0.624	−2.634	−0.3211	− 0.4523	−0.1448	+0.9000	+0.1531	−0.1313	−0.0386	−0.0410	−0.0025	− 2.695	− 0.8582	− 0.5812	+0.8425
20	− 2.035	−1.854	−1.855	−0.2507	+ 0.2416	−0.2183	+0.9868	+0.1291	−0.0150	−0.0842	−0.0033	−0.0014	+ 1.373	− 1.319	+ 0.1200	+0.8787
10	+ 0.648	−2.423	−0.474	−0.1313	+ 0.2770	+0.0604	+0.9767	+0.0783	+0.2331	−0.0309	+0.0358	−0.0003	+ 3.619	+0.3350	+ 0.4303	+0.9335
0	+ 9.620	0	+0.574	0	− 1.372	0	+0.8191	0	+0.6376	+0.2000	0	0	− 8.444	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	− 0.324	0	−2.021	−0.3363	− 1.133	0	+0.6921	+0.1847	−0.1144	0	−0.0503	−0.0037	− 5.147	0	− 1.422	+0.7549
30	− 1.057	−0.319	−1.919	−0.3098	− 0.4724	−0.4955	+0.8324	+0.1760	−0.0838	−0.0572	−0.0331	−0.0030	− 2.213	− 2.270	− 0.7127	+0.7838
20	− 2.100	−1.229	−1.425	−0.2331	+ 0.8653	−0.3898	+1.067	+0.1458	+0.0202	−0.0785	+0.0084	−0.0015	+ 3.880	− 1.816	+ 0.5816	+0.8519
10	− 0.178	−2.090	−0.327	−0.1202	+ 1.021	+0.2424	+1.038	+0.0873	+0.2295	−0.0158	+0.0411	−0.0002	+ 4.849	+ 1.085	+ 0.8003	+0.9255
0	+ 9.537	0	+0.543	0	− 2.851	0	+0.7660	0	+0.5858	+0.3000	0	0	− 13.55	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 1.358	0	−1.210	−0.3140	− 1.967	0	+0.3169	+0.1973	−0.0763	0	−0.0494	−0.0047	− 7.078	0	− 2.500	+0.6266
40	+ 1.046	+0.344	−1.254	−0.3103	− 1.725	−0.6171	+0.3877	+0.1967	−0.0709	−0.0215	−0.0463	−0.0045	− 6.231	− 1.662	− 2.231	+0.6378
30	− 1.033	−0.370	−1.469	−0.2789	− 0.050	−0.5113	+0.8439	+0.1884	−0.0516	−0.0642	−0.0223	−0.0032	− 0.316	− 2.536	− 0.5827	+0.7167
20	− 3.035	−0.758	−1.324	−0.2104	+ 1.916	−0.3110	+1.281	+0.1588	+0.0289	−0.0681	+0.0185	−0.0014	+ 6.897	− 1.941	+ 1.207	+0.8267
10	− 0.885	−2.169	−0.327	−0.1087	+ 1.496	+0.3094	+1.159	+0.0955	+0.2164	−0.0071	+0.0436	−0.0001	+ 5.708	+ 2.201	+ 1.273	+0.9200
0	+10.91	0	+0.707	0	− 5.085	0	+0.7071	0	+0.5724	+0.3000	0	0	− 19.32	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 2.686	0	−0.312	−0.2688	− 2.918	0	−0.2965	+0.1807	−0.0393	0	−0.0419	−0.0052	− 8.502	0	− 3.770	+0.4461
40	+ 1.320	+1.218	−0.671	−0.2562	− 1.798	−1.291	+0.1445	+0.1856	−0.0446	−0.0228	−0.0351	−0.0046	− 5.350	− 4.090	− 2.523	+0.5106
30	− 1.850	+1.105	−1.355	−0.2385	+ 0.904	−1.675	+1.046	+0.1589	−0.0420	−0.0476	−0.0140	−0.0031	+ 2.433	− 4.983	+ 0.2750	+0.6671
20	− 4.145	−0.669	−1.455	−0.1857	+ 3.198	−0.4671	+1.549	+0.1555	+0.0168	−0.0585	+0.0187	−0.0013	+ 9.459	− 1.537	+ 2.336	+0.8314
10	− 1.196	−2.490	−0.395	−0.0979	− 1.779	+1.160	+1.532	+0.0992	+0.2016	−0.0062	+0.0428	−0.0001	+ 5.734	+ 3.292	+ 1.737	+0.9393
0	+12.58	0	+0.766	0	− 7.777	0	+0.6428	0	+0.5914	+0.3000	0	0	− 24.30	0	0	+1.000
(j) $r/t = 200$ and $r/l = 0.3$																
$\phi_1=30°$	− 2.575	0	−3.097	−0.2688	− 1.018	0	+0.8433	+0.1065	−0.2481	0	−0.0585	−0.0023	− 8.01	0	− 1.251	+0.7383
20	− 3.544	−1.727	−2.595	−0.2300	+ 0.025	−0.3675	+0.8538	+0.0981	−0.1187	−0.0759	−0.0235	−0.0016	+ 0.32	− 2.908	− 0.342	+0.7953
10	− 1.006	−0.351	−1.071	−0.1270	+ 1.142	+0.0251	+1.038	+0.0619	+0.3098	−0.1126	+0.0402	−0.0003	+ 9.20	+ 0.158	+ 0.787	+0.8828
0	+17.18	0	+0.500	0	− 2.618	0	+0.8660	0	+1.138	+0.3000	0	0	− 21.66	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(j) (Continued)																
$\phi_1=35°$	+ 1.157	0	−2.003	−0.2639	− 3.540	0	+0.5377	+0.1233	−0.1777	0	−0.0616	−0.0033	− 12.73	0	− 2.708	+0.6330
30	+ 0.434	−0.250	−2.034	−0.2580	− 1.763	−0.3543	+0.6157	+0.1220	−0.1650	−0.0475	−0.0543	−0.0031	− 10.23	− 3.290	− 2.236	+0.5464
20	− 3.630	−0.571	−1.999	−0.2098	+ 1.001	−0.5379	+1.051	+0.1087	−0.0418	−0.1118	−0.0096	−0.0017	+ 5.57	− 4.934	+ 0.474	+0.7427
10	− 2.937	−2.907	−0.903	−0.1149	+ 2.318	+0.2927	+1.184	+0.0698	+0.3091	−0.0522	+0.0487	−0.0002	+ 13.92	+ 1.650	+ 1.650	+0.8689
0	+18.66	0	+0.574	0	− 5.780	0	+0.8182	0	+1.068	+0.3000	0	0	− 35.32	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	+ 4.491	0	−0.895	−0.2230	− 4.589	0	−0.0553	+0.1198	−0.0958	0	−0.0550	−0.0039	− 16.80	0	− 4.723	+0.4470
30	+ 0.927	+1.787	−1.263	−0.2170	− 1.599	−1.680	+0.4612	+0.1225	−0.0958	−0.0529	−0.0397	−0.0032	− 7.30	− 7.430	− 2.380	+0.5253
20	− 4.904	+0.374	−1.979	−0.1836	+ 2.992	−1.296	+1.378	+0.1158	−0.0298	−0.0936	+0.0040	−0.0016	+ 12.97	+ 5.929	+ 1.932	+0.6997
10	− 4.643	−3.248	−1.057	−0.1038	+ 3.576	+0.8937	+1.451	+0.0774	+0.2786	−0.0416	+0.0506	−0.0001	+ 16.75	+ 3.932	+ 2.673	+0.8521
0	+22.55	0	+0.643	0	−10.29	0	+0.7660	0	+1.069	+0.3000	0	0	− 48.57	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 5.463	0	+0.808	−0.1511	− 5.443	0	−0.8614	+0.0899	−0.0114	0	−0.0370	−0.0038	− 17.92	0	− 6.551	+0.2280
40	+ 4.541	+1.888	+0.369	−0.1543	− 4.617	−1.379	−0.6652	+0.0937	−0.0214	−0.0039	−0.0364	−0.0037	− 15.90	− 4.718	− 5.866	+0.2542
30	− 0.843	+3.190	−1.138	−0.1700	+ 0.303	−2.859	+0.6257	+0.1158	−0.0772	−0.0304	−0.0273	−0.0038	− 1.34	− 9.994	− 1.292	+0.4304
20	− 8.160	+0.555	−2.324	−0.1610	+ 5.220	−1.401	+1.929	+0.1250	−0.0627	−0.0765	+0.0042	−0.0013	+ 17.97	+ 5.233	+ 3.575	+0.6795
10	− 5.055	−3.891	−1.245	−0.0955	+ 4.276	+1.728	+1.763	+0.0858	+0.2474	−0.0456	+0.0471	−0.0000	+ 16.41	+ 8.050	+ 3.437	+0.8940
0	+25.47	0	+0.707	0	−14.77	0	+0.7071	0	+1.134	+0.3000	0	0	− 56.01	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 5.628	0	+1.510	−0.0742	− 5.740	0	−1.603	+0.0441	+0.0544	0	−0.0135	−0.0031	− 15.39	0	− 7.343	+0.0368
40	+ 3.900	+3.127	+0.564	−0.0969	− 3.696	−2.789	−0.7707	+0.0676	+0.0026	+0.0201	−0.0201	−0.0029	− 10.44	− 7.529	− 5.048	+0.1442
30	− 2.878	+3.516	−1.463	−0.1393	+ 1.553	−3.453	+1.111	+0.1168	−0.1000	−0.0670	−0.0234	−0.0033	+ 3.25	− 9.817	+ 0.304	+0.4090
20	− 8.823	+0.094	−2.598	+0.1467	+ 6.537	−1.072	+2.491	+0.1375	−0.1008	−0.0716	−0.0025	−0.0011	+ 18.80	− 3.576	+ 4.612	+0.6832
10	− 5.273	−4.374	−1.282	−0.0891	+ 4.214	+2.483	+1.987	+0.0953	+0.2254	−0.0563	+0.0424	−0.0000	+ 14.04	+ 7.094	+ 3.666	+0.8700
0	+25.53	0	+0.766	0	−17.75	0	+0.6428	0	+1.193	+0.3000	0	0	− 56.36	0	0	+1.000
(k) $r/t = 200$ and $r/l = 0.4$																
$\phi_1=30°$	+ 1.134	0	−2.479	−0.2211	− 2.625	0	+0.5943	+0.0868	−0.2847	0	−0.0710	−0.0026	− 20.19	0	− 3.173	+0.5913
20	− 3.463	−0.295	−2.481	−0.1937	− 0.066	−0.9430	+0.9092	+0.0810	−0.1583	−0.1339	−0.0302	−0.0018	+ 0.87	− 7.343	− 0.619	+0.6619
10	− 5.528	−3.668	−1.407	−0.1117	+ 2.974	+0.0700	+1.194	+0.0553	+0.3622	−0.1029	+0.0493	−0.0003	+ 22.57	+ 0.435	+ 1.999	+0.8155
0	+27.68	0	+0.500	0	− 6.899	0	+0.8660	0	+1.534	+0.4000	0	0	− 56.52	0	0	+1.000

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

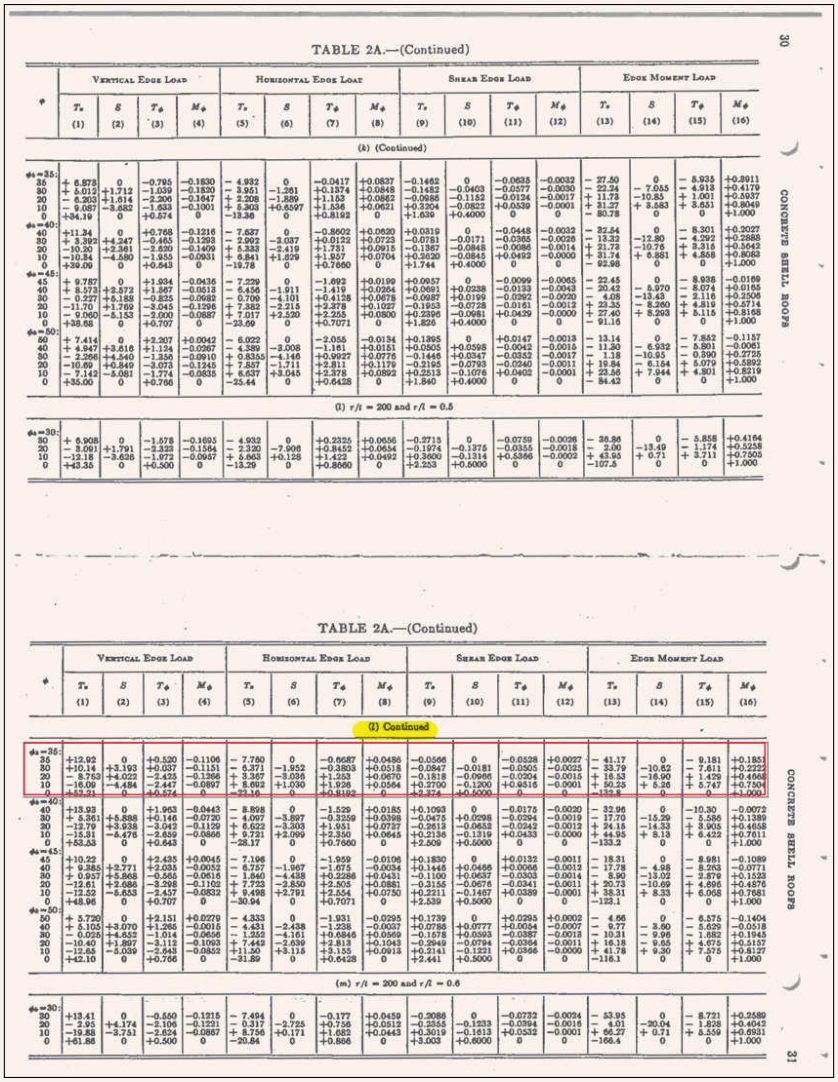


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_θ (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_θ (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_θ (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_θ (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(k) (Continued)																
$\phi_k = 35°$																
35	+ 6.873	0	−0.795	−0.1830	− 4.932	0	−0.0417	+0.0837	−0.1462	0	−0.0635	−0.0032	− 27.50	0	− 5.935	+0.3911
30	+ 5.012	+1.712	−1.039	−0.1820	+ 3.951	−1.261	+0.1374	+0.0848	−0.1482	−0.0403	−0.0577	−0.0030	+ 22.24	− 7.055	+ 4.913	+0.4179
20	− 6.203	+1.614	−2.206	−0.1647	+ 5.208	−1.889	+1.153	+0.0862	−0.0985	−0.1152	−0.0124	−0.0017	+ 11.72	−10.55	+ 1.001	+0.5937
10	− 9.087	−3.682	−1.633	−0.1001	+ 5.303	+0.6597	+1.536	+0.0621	+0.3204	−0.0822	+0.0539	−0.0001	+ 31.27	+ 3.583	+ 3.551	+0.8049
0	+34.19	0	+0.574	0	−13.36	0	+0.8192	0	+1.639	+0.4000	0	0	− 80.78	0	0	+1.000
$\phi_k = 40°$																
40	+11.34	0	+0.768	−0.3216	− 7.637	0	−0.8502	+0.0620	+0.0319	0	−0.0448	−0.0032	− 32.54	0	− 8.301	+0.2027
30	+ 3.392	+4.247	−0.485	−0.1293	− 2.992	−3.037	+0.0152	+0.0723	−0.0781	−0.0171	−0.0365	−0.0026	− 13.32	−12.80	− 4.292	+0.2888
20	−10.30	+2.361	−2.620	−0.1409	+ 5.333	−2.419	+1.751	+0.0915	−0.1367	−0.0848	−0.0086	−0.0014	+ 21.72	−10.76	+ 3.316	+0.5642
10	−10.84	−4.580	−1.955	−0.0931	+ 6.841	+1.629	+1.937	+0.0704	+0.3620	−0.0845	+0.0492	−0.0000	+ 31.74	+ 6.881	+ 4.868	+0.8063
0	+39.09	0	+0.843	0	−19.78	0	+0.7660	0	+1.744	+0.4000	0	0	− 92.86	0	0	+1.000
$\phi_k = 45°$																
45	+ 9.787	0	+1.934	−0.0436	− 7.229	0	−1.692	+0.0199	+0.0957	0	−0.0099	−0.0065	− 22.45	0	− 8.936	−0.0169
40	+ 8.573	+2.572	+1.567	−0.0513	− 6.456	−1.911	−1.419	+0.0264	+0.0691	+0.0238	−0.0133	−0.0043	− 20.42	− 5.970	− 8.074	+0.0165
30	− 0.227	+5.188	−0.825	−0.0982	− 0.709	−4.101	+0.4128	+0.0678	−0.0987	+0.0199	−0.0262	−0.0030	− 4.08	−13.43	− 2.116	+0.2506
20	−11.70	+1.769	−3.045	−0.1296	+ 7.382	−2.215	+2.378	+0.1027	−0.1953	−0.0728	−0.0161	−0.0012	+ 23.35	− 8.260	+ 4.819	+0.5714
10	− 9.060	−5.153	−2.000	−0.0887	+ 7.017	+2.520	+2.255	+0.0800	+0.2396	−0.0981	+0.0429	−0.0000	+ 27.40	+ 8.293	+ 5.115	+0.8168
0	+38.88	0	+0.707	0	−23.09	0	+0.7071	0	+1.826	+0.4000	0	0	− 91.16	0	0	+1.000
$\phi_k = 50°$																
50	+ 7.414	0	+2.307	+0.0042	− 6.022	0	−2.055	−0.0134	+0.1395	0	+0.0147	−0.0013	− 13.14	0	− 7.852	−0.1157
40	+ 4.947	+3.616	+1.124	−0.0267	− 4.389	−3.008	−1.161	+0.0151	+0.0505	+0.0598	−0.0042	−0.0015	− 11.30	− 6.932	− 5.801	−0.0061
30	− 2.266	+4.540	−1.356	−0.0910	+ 0.8355	−4.146	+0.9927	+0.0776	−0.1445	+0.0347	−0.0352	−0.0017	− 1.18	−10.95	− 0.390	+0.2725
20	−10.89	+0.849	−3.073	−0.1245	+ 7.857	−1.711	+2.811	+0.1179	−0.2195	−0.0793	−0.0340	−0.0011	+ 19.84	− 6.154	+ 5.079	+0.5892
10	− 7.142	−5.081	−1.774	−0.0835	+ 6.537	+3.045	+2.378	+0.0892	+0.2513	−0.1076	+0.0402	−0.0001	+ 23.56	+ 7.944	+ 4.801	+0.8219
0	+35.00	0	+0.766	0	−25.44	0	+0.6428	0	+1.840	+0.4000	0	0	− 84.42	0	0	+1.000
(l) $r/t = 200$ and $r/t = 0.5$																
$\phi_k = 30°$																
30	+ 5.908	0	−1.578	−0.1695	− 4.932	0	+0.2355	+0.0656	−0.2715	0	−0.0759	−0.0026	− 38.86	0	− 5.858	+0.4164
20	− 3.061	+1.791	−2.323	−0.1564	+ 2.330	−7.908	+0.8452	+0.0634	−0.1974	−0.1375	−0.0355	−0.0018	+ 2.00	−13.49	− 1.174	+0.5258
10	−12.18	−3.826	−1.972	−0.0957	+ 5.863	+0.128	+1.422	+0.0492	+0.3600	−0.1314	+0.5386	−0.0002	+ 43.95	+ 0.71	+ 3.711	+0.7505
0	+43.35	0	+0.500	0	−13.29	0	+0.8660	0	+2.253	+0.5000	0	0	−107.5	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_θ (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_θ (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_θ (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_θ (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(l) Continued																
$\phi_k = 35°$																
35	+12.92	0	+0.520	−0.1106	− 7.760	0	−0.6687	+0.0486	−0.0566	0	−0.0528	+0.0027	− 41.17	0	− 9.181	+0.1851
30	+10.14	+3.193	+0.037	−0.1151	+ 5.371	−1.952	−0.3803	+0.0518	−0.0847	−0.0181	−0.0505	−0.0025	+ 33.79	−10.62	− 7.811	+0.2222
20	− 8.763	+4.022	−2.425	−0.1286	+ 3.367	−3.036	+1.253	+0.0670	−0.1818	−0.0966	−0.0204	−0.0015	+ 16.53	−16.90	+ 1.429	+0.4668
10	−16.09	−4.484	−2.447	−0.0897	+ 8.602	+1.030	+1.926	+0.0564	+0.2700	−0.1200	+0.0416	−0.0001	+ 50.25	+ 5.26	+ 5.747	+0.7504
0	+52.91	0	+0.574	0	−22.16	0	+0.8192	0	+2.374	+0.5000	0	0	−133.8	0	0	+1.000
$\phi_k = 40°$																
40	+13.93	0	+1.963	−0.0443	− 8.898	0	−1.529	+0.0185	+0.1093	0	−0.0175	−0.0020	− 32.96	0	−10.30	−0.0072
30	+ 5.361	+5.888	+0.146	−0.0720	− 4.097	−3.897	−0.3359	+0.0398	−0.0475	+0.0298	−0.0294	−0.0019	+ 17.70	−15.29	− 5.586	+0.1389
20	−12.79	+3.938	−3.042	−0.1129	+ 6.622	−3.303	+1.931	+0.0727	−0.2613	−0.0652	−0.0242	−0.0012	+ 24.16	−14.53	+ 3.903	+0.4658
10	−15.31	−8.476	−2.859	−0.0866	+ 9.721	+2.099	+2.350	+0.0645	+0.2136	−0.1319	+0.0433	−0.0000	+ 44.95	+ 8.13	+ 6.422	+0.7611
0	+53.53	0	+0.643	0	−28.17	0	+0.7660	0	+2.509	+0.5000	0	0	−133.2	0	0	+1.000
$\phi_k = 45°$																
45	+10.22	0	+2.435	+0.0045	− 7.196	0	−1.959	−0.0106	+0.1830	0	+0.0132	−0.0011	− 18.31	0	− 8.981	−0.1089
40	+ 9.385	+2.771	+2.035	−0.0052	− 6.757	−1.967	−1.675	−0.0034	+0.1446	+0.0466	+0.0066	−0.0013	− 17.78	− 4.98	− 8.263	−0.0771
30	+ 0.957	+5.868	−0.565	−0.0616	− 1.640	−4.438	+0.2286	+0.0431	−0.1100	+0.0637	−0.0303	−0.0014	− 8.90	−13.02	− 2.379	+0.1533
20	−12.61	+2.686	−3.298	−0.1102	+ 7.723	−2.850	+2.505	+0.0881	−0.2155	−0.0676	−0.0341	−0.0011	+ 20.73	−10.69	+ 4.896	+0.4876
10	−12.62	−6.653	−2.457	−0.0832	+ 9.498	+2.791	+2.554	+0.0750	+0.2211	−0.1467	+0.0389	−0.0001	+ 38.31	+ 8.33	+ 6.068	+0.7681
0	+48.96	0	+0.707	0	−30.94	0	+0.7071	0	+2.539	+0.5000	0	0	−123.1	0	0	+1.000
$\phi_k = 50°$																
50	+ 5.720	0	+2.151	+0.0279	− 4.333	0	−1.931	−0.0295	+0.1739	0	+0.0295	+0.0002	− 4.56	0	− 6.575	−0.1404
40	+ 5.155	+3.070	+1.285	−0.0015	− 4.431	−2.438	−1.228	−0.0037	+0.0785	+0.0777	+0.0054	−0.0007	− 9.77	− 3.80	− 5.629	−0.0518
30	− 0.025	+4.452	−1.014	−0.0656	− 1.252	−4.161	+0.6846	+0.0569	−0.1578	+0.0593	−0.0387	−0.0013	− 10.31	− 9.96	− 1.682	+0.1945
20	−10.40	+1.897	−3.112	−0.1093	+ 7.442	−2.639	+2.813	+0.1043	−0.2949	−0.0794	−0.0364	−0.0011	+ 16.18	− 9.55	+ 4.675	+0.5157
10	−12.63	−5.039	−2.643	−0.0833	+11.50	+3.115	+3.155	+0.0913	+0.2141	−0.1221	+0.0366	−0.0000	+ 41.78	+ 8.30	+ 7.373	+0.8127
0	+42.10	0	+0.766	0	−31.89	0	+0.6428	0	+2.441	+0.5000	0	0	−116.1	0	0	+1.000
(m) $r/t = 200$ and $r/t = 0.6$																
$\phi_k = 30°$																
30	+13.41	0	−0.550	−0.1215	− 7.494	0	−0.177	+0.0459	−0.3086	0	−0.0732	−0.0024	− 53.95	0	− 8.721	+0.2589
20	− 2.95	+4.174	−2.106	−0.1231	− 0.317	−2.725	+0.756	+0.0513	−0.2355	−0.1333	−0.0394	−0.0016	+ 4.01	−20.04	− 1.828	+0.4043
10	−19.88	−3.751	−2.624	−0.0887	+ 8.756	+0.171	+1.682	+0.0443	+0.3019	−0.1613	+0.0532	−0.0001	+ 66.27	+ 0.71	+ 8.559	+0.6931
0	+61.88	0	+0.500	0	−20.84	0	+0.866	0	+3.003	+0.6000	0	0	−166.4	0	0	+1.000

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

TABLE 2A.—(Continued)

(m) (Continued)

ϕ	Vertical Edge Load			Horizontal Edge Load			Shear Edge Load			Edge Moment Load		
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
0	+117.48	0	+1.241	−0.0576	+ 8.794	0	−1.155	+0.0231	+0.0614	0	−0.0363	−0.0020	48.68	0	−11.31	+0.0453
5	+115.76	+0.442	+1.223	−0.0568	+ 8.665	−0.160	−1.138	+0.0227	+0.0605	−0.113	−0.0361	−0.0020	47.97	−12.65	−11.15	+0.0447
10	+110.67	+3.000	+1.170	−0.0539	+ 8.284	−1.070	−1.088	+0.0213	+0.0579	−0.0463	−0.0345	−0.0019	45.86	−21.22	−10.66	+0.0427
20	+92.33	+5.090	+1.019	−0.0827	+ 7.000	−1.270	−1.311	+0.0331	+0.0719	−0.1613	−0.0454	−0.0000	17.11	−18.27	−10.53	+0.0710
30	+68.53	+6.000	+0.874	0	+ 5.299	0	−1.252	+0.0333	+0.1859	−0.8000	−0.0454	0	65.22	0	−10.53	+1.000
40	+14.46	0	+2.530	−0.0552	+ 8.900	0	−1.788	−0.0029	+0.2066	+0.0719	−0.0030	−0.0012	29.22	0	−14.50	−0.0830
30	+ 6.70	+0.504	+0.519	−0.0397	+ 4.840	−4.143	−0.357	+0.0213	−0.0157	−0.0438	−0.0224	−0.0013	20.21	−16.27	+ 6.191	+0.0578
20	−13.24	+4.922	−3.187	−0.0946	+ 6.008	−4.889	+2.003	+0.0650	−0.3733	−0.0384	−0.0384	−0.0010	18.87	−7.56	+ 2.394	+0.3969
10	−40.22	−5.810	−1.114	−0.0412	+ 12.10	−2.231	+2.921	+0.0616	−0.1169	−0.1797	−0.0373	0	18.09	0	+ 7.253	+0.7139
0	−68.53	0	+0.048	0	− 30.19	0	+0.766	0	+3.267	−0.6000	0	−0.0001	169.2	0	0	+1.000
40	+ 8.60	0	+2.397	+0.0217	+ 5.729	0	−1.538	−0.0205	+0.2347	0	−0.0256	−0.0004	8.38	0	+ 7.554	−0.1241
30	+ 6.15	+2.319	+2.268	+0.0133	+ 5.622	−1.565	−1.616	−0.0140	+0.1924	+0.0005	−0.0199	−0.0003	10.38	−2.49	+ 7.198	−0.0988
20	+ 1.48	+3.500	+1.641	−0.0048	+ 5.294	−3.438	−0.441	+0.0759	+0.1305	−0.0044	−0.0178	−0.0011	12.49	−10.03	+ 5.659	+0.0113
10	−16.02	−5.641	−3.371	−0.0772	+ 12.13	+2.709	+2.753	+0.0995	+0.1908	−0.1895	−0.0361	−0.0001	50.54	−6.80	+ 6.668	+0.7190
0	−58.53	0	+0.707	0	− 38.04	0	+0.707	0	+3.268	+0.8000	0	0	158.3	0	0	+1.000
50	+ 3.09	0	+1.709	+0.0284	+ 1.816	0	−1.467	−0.0273	+0.1854	0	+0.0382	+0.0002	+ 7.18	0	+ 3.972	−0.1088
40	+ 4.42	+1.981	+1.179	+0.0063	+ 3.693	−1.374	−1.120	+0.0084	+0.1051	+0.0872	+0.0118	−0.0003	5.77	1.40	+ 4.634	−0.0572
30	+ 2.57	+4.287	−0.638	−0.0476	+ 3.650	−3.722	+0.325	+0.0406	−0.1481	+0.0826	−0.0419	−0.0012	20.51	6.83	+ 3.347	+0.1206
20	− 1.43	+2.920	−2.775	−0.0948	+ 5.372	−3.425	+2.461	+0.0962	−0.3819	−0.0757	−0.0497	−0.0012	7.78	12.83	+ 3.041	+0.4149
10	− 9.14	−0.742	−3.742	−0.0706	+ 11.37	+2.415	+2.907	+0.07	−0.1908	−0.1895	−0.0984	−0.0001	51.00	6.80	+ 6.371	+0.7134
0	−53.46	0	+0.765	0	− 41.80	0	+0.643	0	+3.218	+0.8000	0	0	156.9	0	0	+1.000

v = the tangential displacement of the shell, considered positive in the direction of increasing values of ϕ;

w = the radial displacement of the shell, considered positive in the outward direction; and,

θ = the rotation of the shell, considered positive when the section rotates clockwise.

The effect of line loads is most pronounced in the vicinity of the edge at which the line load is applied, with the intensity of the internal forces generally diminishing as the distance from the applied forces is increased. When the chord width of the shell is small compared to the longitudinal span, the internal resisting forces produced by line loads applied at one edge do not diminish

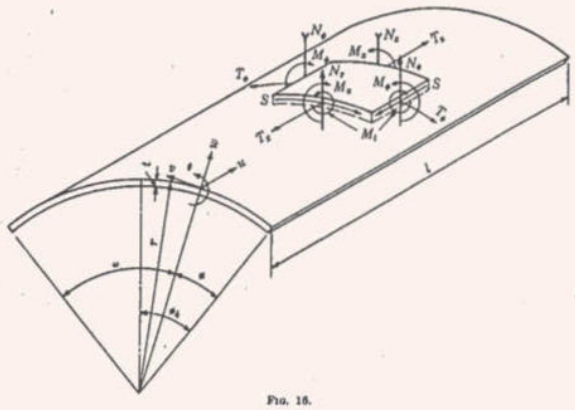


FIG. 16.

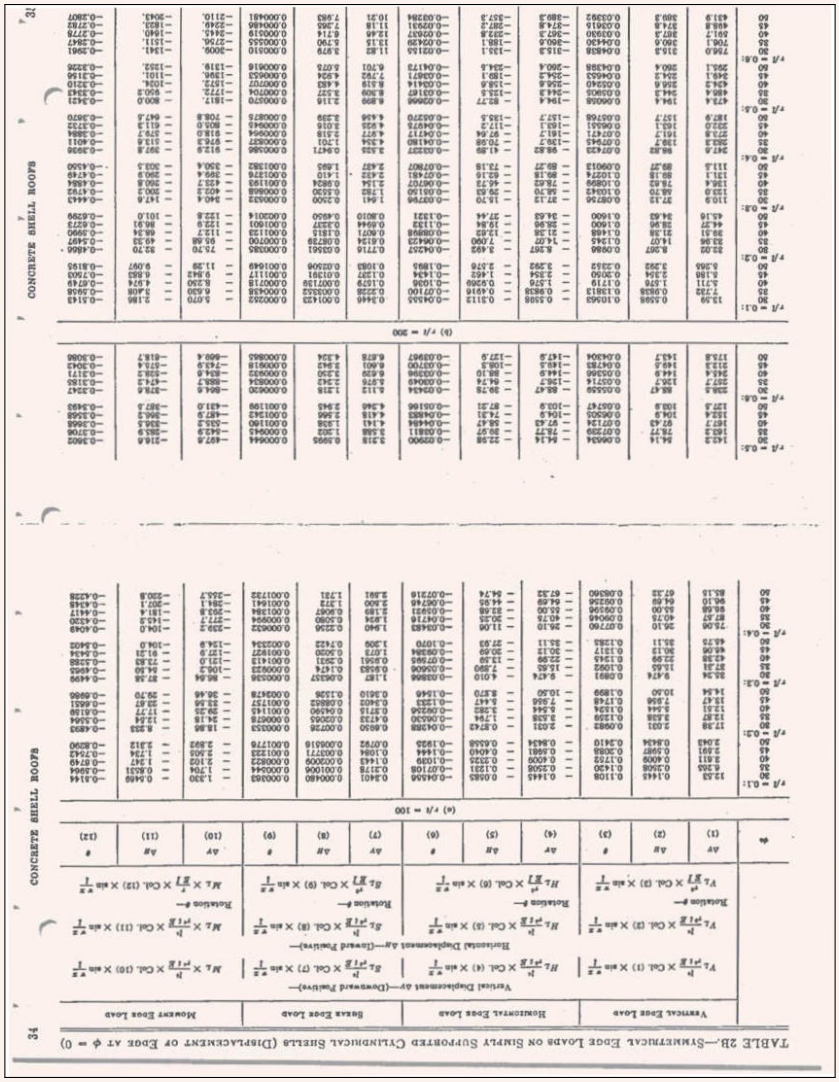
sufficiently fast so that the effect of a line load applied at one edge is felt at the farther edge. For this condition, the magnitude of angle subtended by the shell plays an important role in the distribution of the forces and must be considered; but, when the chord width is large compared with the longitudinal span, the effect of line loads on one edge is negligible on the other edge, and therefore line loads on each edge can be treated separately. There is no definite line of demarcation as to when the effect of line loads applied to one edge can be neglected at the other edge. However, computed values seem to indicate that, when r/l exceeds 0.6 with ϕ_1 more than 30°, each longitudinal edge can be treated individually.

Because of this indication, data showing the effect of line loads are presented in two groups of tables. The first group (Tables 2A and 2B) gives the force distribution and displacements at the edge in long barrels for symmetrical

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice F

Projeto do Barrel Casca Telhados

. Este exemplo, tirado de (Portland Cement Association, 1954 PDF), é de particular interesse. Ele ilustra não só a análise e o desenho de uma estrutura casca, mas também o tratamento de um caso estaticamente indeterminado em que o conceito de flexibilidade - discutido anteriormente no Capítulo 25- é empregado. A estrutura é dividida em duas partes, cada uma analisada independentemente. A solução final é então obtida através da aplicação de compatibilidade deslocamento quando as duas partes são recombinadas.

Pode-se ver o procedimento como análogo a uma viga suportado por suportes elásticos de mola, como mostrado em 1054.

CÓPIA PARA REVISÃO

CONCRETE INFORMATION
PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

Design of Barrel Shell Roofs

Introduction

The roofing of large unobstructed areas with a minimum amount of material is a goal that has claimed the attention of engineers and architects for years. Of the various types of roof construction, the concrete shell offers the best possibility of attaining this desirable end. For example, shells only 2¼ in. thick spanning distances up to 150 ft. have been built. In Mexico a shell only 1½ in. thick cantilevers 36 ft. without the aid of any supporting members. In countries throughout the world, including the United States, Great Britain, Germany, Spain and India, there are examples of concrete shells having a smaller ratio of thickness to span than that provided by nature in its protective covering of an egg.

Although concrete shells are of relatively recent origin (the first experimental shell was built in 1920 at the Zeiss works in Germany while the first shell roof in the U.S. was constructed in 1933), the list of shell structures throughout the world is impressive. At least 500 such roofs of various shapes and sizes have been built. In the United States alone over 12 million sq.ft. of shell roofs have been constructed for structures varying from small industrial buildings to monumental buildings displaying new architectural forms.

Aware of the potentialities of this form of construction, the American Society of Civil Engineers in 1952 published Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. By a series of comprehensive tables this manual greatly simplifies the design of shell roofs. The following article is intended to supplement the manual by presenting in detail the design of a concrete shell roof for a typical industrial building.

Structural Behavior

Although the analysis of a shell in a strict sense is a three-dimensional problem, structural behavior of a shell can best be understood by comparing its action to that of an ordinary beam. Consider the curved longitudinal shell in Fig. 1 to be a beam supported by two transverse supports. This beam differs from the ordinary concept of a beam only in that its cross-section is a thin curved slab.

The application of load on the shell induces longitudinal fiber stresses similar to those induced in any homogeneous beam under load, and if the longitudinal span l (Fig. 1) is large compared to the transverse chord width, the variation of fiber stresses across any section is the same as that created in a beam; that is, it is linear from top to bottom. These fiber stresses designated in shell terminology as T_x, the force per unit width, are comparable to the f_c-stresses of conventional reinforced concrete design.

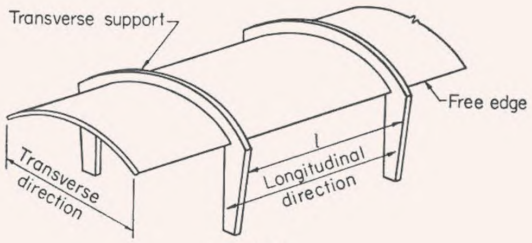


FIG. 1

As the ratio of chord width to span length increases, the variation of T_x-forces changes from straight-line to curvilinear. The extent of this change is shown in Fig. 2, where T_x-forces are plotted in the conventional manner. The ordinate represents vertical distance measured from the bottom of the shell in terms of $\frac{y}{h}$ and the abscissa indicates magnitude of T_x-forces. For convenience, curves are drawn for various values of $\frac{r}{l}$, the ratio of shell radius to span length, rather than for the previously discussed ratio of chord width to span length. Although the two ratios are interdependent, $\frac{r}{l}$ is a more suitable parameter since it includes the effect of shell rise as well as chord

The activities of the Portland Cement Association are limited to scientific research, the development of new or improved products and methods, technical service, promotion and educational effort (including safety work), and are primarily designed to improve and extend the uses of portland cement and concrete. The manifold program of the Association and its varied services to cement users are made possible by the financial support of its member companies in the United States and Canada, engaged in the manufacture and sale of a very large proportion of all portland cement used in these two countries. A current list of member companies will be furnished on request.

Printed in U.S.A.

COPYRIGHT 1954 BY PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

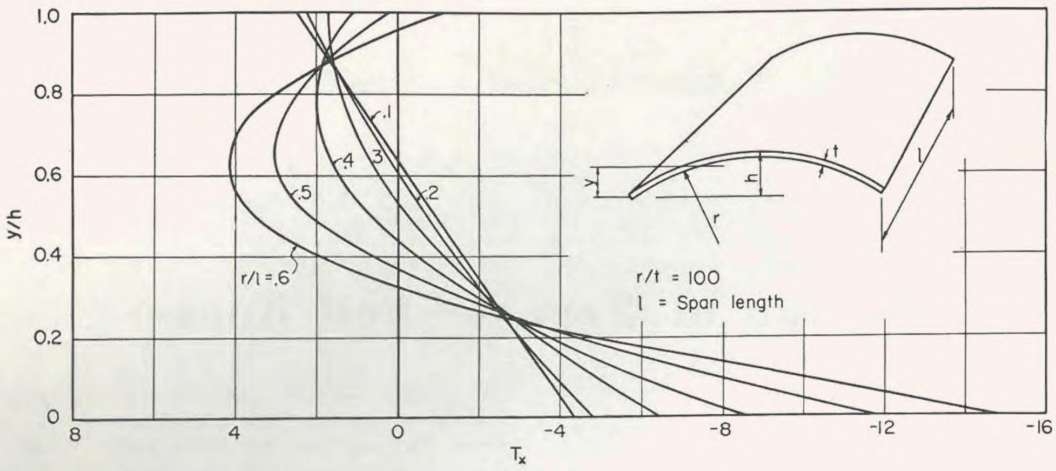


FIG. 2

width. Curves of Fig. 2 apply to a given load, the specific ratio of $\frac{r}{t} = 100$ in which t equals thickness, and a subtended angle of 80°. However, the trend shown is applicable to all shells. When $\frac{r}{l}$ is less than 0.2, the variation is almost linear, while for larger values of $\frac{r}{l}$, the force at the lower edge is greater than that given by ordinary beam theory.

The departure from ordinary flexural action is due basically to the presence of transverse bending in the shell. In the typical shell strip of unit width illustrated in Fig. 3a, moments of the external load and internal forces about any face such as AC must be in equilibrium. With face BD taken at the lower edge of the shell, moment M_ϕ must equal the difference between moment due to external load acting on the unit strip and that due to tangential shears S. These tangential shears are similar to the shearing stresses v in a beam.

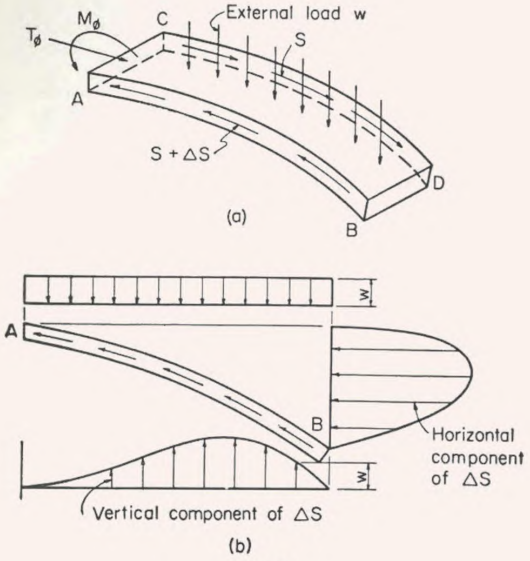


FIG. 3

For most distributed loads, moment produced by an external load and that produced by tangential shears are seldom equal. In fact, for usual distributed loads the moment M_ϕ is counterclockwise while the net moment of external load and tangential shears is clockwise. This can be inferred by inspecting Fig. 3b in which vertical and horizontal components of the difference in tangential shears acting on faces AB and CD have been plotted to the same scale as uniform external load. Statical moment of external load to the right of any point is clockwise. In contrast to this the vertical component of the tangential shears always produces a counterclockwise moment about that point. Throughout most of the shell this counterclockwise moment is larger than the statical moment of the external load, although the difference between the two is small since total upward and downward forces are of equal magnitude. As a result, addition of the clockwise moment due to the horizontal component always produces a clockwise final moment, and the resisting moment M_ϕ is counterclockwise. From this line of reasoning, it follows that uniformly distributed loads always produce tension in the upper fibers and compression in the lower fibers of a shell that is unrestrained along its edges.

Since transverse moment M_ϕ at any point is always counterclockwise or negative, point B (Fig. 3a) deflects down and inward relative to A. This differential deflection of point B induces longitudinal fiber stresses in the lower portion of the shell which are in excess of those given by ordinary beam theory. This condition forces a departure from straight-line stress variation.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

The increase in the tensile fiber stresses in the lower region of the shell cross-section, as shown in Fig. 2, must be accompanied by an increase in compressive stresses above the neutral axis so that the summation of forces in the longitudinal direction will be zero. Since moment produced by the longitudinal internal forces must still equal the external moment, this increase in magnitude of the internal forces is accompanied by a shortening of the moment arm between centroids of compressive and tensile forces. The effect of this action is to lower the position of the neutral axis.

If the curves in Fig. 2 are examined critically, it becomes apparent that as values of $\frac{r}{l}$ increase, the concentration of stresses in the vicinity of the lower edge indicates a decrease in the height of shell participating in beam action. In other words, for large values of $\frac{r}{l}$ the top or crown portion of the shell participates to only a minor extent in beam action. This action can be compared to the decreasing effectiveness of remote portions of a T-beam flange as the ratio of flange width to beam span increases.

Although the magnitude of tensile stress at the lower edge of the shell as indicated in Fig. 2 is sometimes quite sensitive to variations of $\frac{r}{l}$, total tensile area under these curves does not vary to the same degree. For example, the ratio of bottom fiber stresses for values of $\frac{r}{l}$ of 0.6 and 0.1 is 3.2 while the ratio of tensile areas below the neutral axis for these cases is only 1.4. Since reinforcement required depends essentially on total tensile area rather than maximum fiber stress, the design of a shell is not so sensitive a problem as the curves indicate. Moreover, curves of Fig. 2 are prepared for a single shell unrestrained at the lower edges. When these edges are restrained from deflecting down and inward by adjoining shells or edge beams, longitudinal stresses conform more closely to the straight-line variation.

Factors Affecting Shell Dimensions

An example is presented to illustrate the procedure involved in the analysis and design of a typical cylindrical concrete shell roof. A column spacing of 40x50 ft. is selected as being representative of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. A typical unit of the shell roof shown in Fig. 4 consists of three barrels, two exterior and one interior, spanning 50 ft. in the longitudinal direction. The barrels are supported by transverse frames spanning 40 ft. These dimensions result in a unit 100 ft. long and 120 ft. wide with shells continuous over alternate frames. Split frames are provided every 100 ft. This layout permits six re-uses of forms in a building 600 ft. long and limits the amount of concrete placed in one operation to about 200 cu.yd.

Shell thickness is taken as 4 in., which for most conditions is more than adequate to resist compressive forces and flexural moments induced in a shell. As a matter of fact, except in the vicinity of transverse frames, depth of

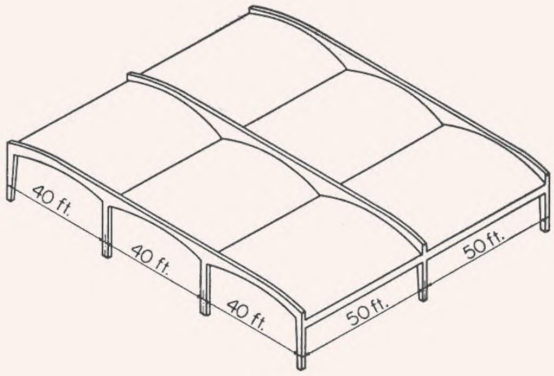


FIG. 4

the shell is controlled by requirements of adequate coverage for reinforcement. Usually, three to four layers of reinforcement are required, depending upon loading and type of shell; and with a minimum clear distance between reinforcement and shell surface of ¾ in., minimum depth is about 3 in. Many shells have been built abroad with a thickness of less than 3 in., such shells requiring close tolerance in the placement of reinforcement. While it might be argued that the increased labor involved in such circumstances is not justified by the reduction in concrete volume, a decrease in dead weight may be important since it is reflected almost directly in the amount of longitudinal and diagonal reinforcement required.

The relationship between dead weight and reinforcement follows from the fact that a shell acts essentially as a beam in the longitudinal direction with effective depth dependent upon the rise of the shell. For a given rise, the distance between centroids of tensile and compressive forces is almost unaffected by minor changes in shell thickness, and total longitudinal tension varies directly with the load. As a result, a reduction in dead load due to a decrease in shell thickness leads to a smaller total tension.

Transverse moment is also reduced in proportion to the load. However, this moment is resisted by the shell thickness itself so that a decrease in thickness allows little reduction in the amount of transverse reinforcement. In selecting shell thickness, its effect on reinforcement should be considered.

With shell thickness established, the next step involves the selection of rise (see Fig. 5), the distance from the lowest point of the structure (the bottom of the edge beams, if required) to mid-depth of the shell at the crown. For long-barrel, simply supported shells, a rise of one-tenth the longitudinal span generally gives sufficient curvature to produce a satisfactory stress condition and to avoid a large concentration of reinforcement in the valley. This ratio of one-tenth is simply a guide in preliminary layout work. For shells continuous in the longitudinal direction, rise can be less than one-tenth of the span.

In this example a rise of approximately $0.1\,l$ is pro-

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

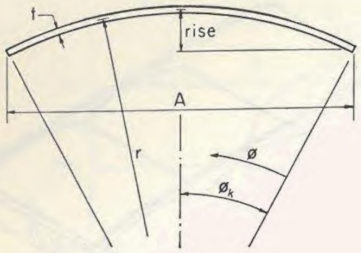


FIG. 5

duced by a shell radius of 45 ft. The rise of the interior barrel is determined by trigonometry from Fig. 5.

$$\text{rise} = r - \sqrt{r^2 - (0.5A)^2}$$
$$= 45 - \sqrt{45^2 - 20^2}$$
$$= 4.69 \text{ ft.}$$

The sine and cosine of one-half the angle subtended by the shell are:

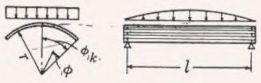
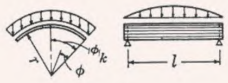
$$\sin \phi_k = \frac{20}{45} = 0.4444$$
$$\cos \phi_k = \frac{(45 - 4.69)}{45} = 0.8958$$

Therefore ϕ_k, the angle from the crown to the edge of the shell, is equal to 26° 23′. Physical constants required in shell analysis are:

$$\frac{r}{l} = \frac{45}{50} = 0.9$$
$$\frac{rt}{l^2} = \frac{45 \times 4}{50^2 \times 12} = 0.006$$

Two separate analyses are required for the roof unit shown in Fig. 4 since support conditions at longitudinal edges of interior and exterior barrels are different. Edges of the interior barrel are restrained horizontally by adjoining exterior barrels, while outside edges of exterior barrels are restrained only by edge beams. The first analysis deals with the interior barrel and the second with exterior barrels.

TABLE 1B.—Membrane Forces and Displacements in Simply Supported Cylindrical Shells; Loads Varying Longitudinally from Zero at the Ends to Maximum Positive at the Middle

	(a) Uniform Transverse Load	(b) Dead Weight Load
		
	Longitudinal Force T_x— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{ur} \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_V— $p_{ur}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+ p_{ur}\frac{l^4}{r^3tE}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{dr} \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_V— $p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+ p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin\frac{\pi x}{l}$

$\phi_k - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924

Discussion of Tables in ASCE Manual No. 31

As discussed in ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*,* shell analysis resembles the analysis of indeterminate structures. The shell is first considered supported along both the transverse and longitudinal edges, a condition equivalent to assuming the shell determinate. Under this condition load is carried only by direct forces acting entirely in the plane of the shell, and reactions and displacements along the edges are inconsistent with actual end conditions. Therefore, corrective forces called edge or line loads are applied subsequently along the edges inducing bending moments as well as direct forces in the shell. Consequently, the analysis of a shell consists of two principal steps:

1. Determination of internal forces and edge reactions, assuming the shell to be statically determinate. This is called the "membrane analysis."

2. Determination of internal forces due to corrective loads applied along the edges of the shell, and the superposition of these forces on those resulting from the membrane analysis.

Table 1B and portions of Tables 3A and 3B reproduced from ASCE Manual No. 31 will be utilized. Table 1B deals with internal membrane forces and the displacements induced in a simply supported shell by sinusoidal surface loads. As shown in sketches at the top of the table, the load on the shell is assumed symmetrical about the crown. Coefficients in the left half are for a load uniform in the transverse direction, while coefficients in the right half are for a load varying as the weight of the shell. In both cases, load distribution in the longitudinal direction varies as sin $\frac{\pi x}{l}$.

*Published by the American Society of Civil Engineers.

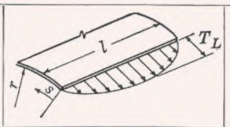
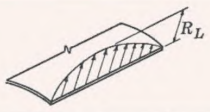
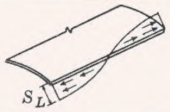
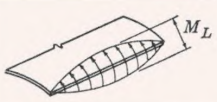
Victor E. Saouma

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

TABLE 3A.—Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas for $n = 1$; for $n = 3$ Substitute $\frac{3\pi x}{l}$ Instead of $\frac{\pi x}{l}$			
	Longitudinal Force T_x— $T_L \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $T_L \times$ Col. (2) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $T_L \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $T_L \times t \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (6) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $R_L \times \frac{t}{t} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $R_L \times l \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L \times$ Col. (10) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L \times t \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (13) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (14) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (15) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times$ Col. (16) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$
	(b) $n = 1$			
				

$\frac{s}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
0.2	+ 8.039	−2.488	+0.769	+0.1217	−0.1224	+0.05501	+0.00539	+0.02779	+3.624	+0.169	+0.0851	+0.0378	−0.1135	+0.1348	+0.01418	+0.837
0.1	+15.393	−1.575	+0.933	+0.1301	−0.3353	+0.03740	+0.00163	+0.01407	+5.200	+0.515	+0.0589	+0.0227	−0.7959	+0.1008	+0.00452	+0.913
0.0	+24.846	0	+1.000	0	−0.6254	0	0	0	+7.129	+1.000	0	0	−1.8212	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.006:																
3.2	− 0.153	−0.209	+0.047	+0.1550	+0.0179	+0.00877	−0.00034	−0.00493	+0.017	−0.029	+0.0122	+0.0265	+0.0692	+0.0134	+0.00536	−0.002
1.6	− 0.103	+0.827	−0.230	−0.9042	−0.0591	−0.03918	+0.00239	+0.03457	−0.202	+0.094	−0.0522	−0.1554	−0.2359	−0.0467	−0.03216	+0.050
0.8	− 5.182	−1.161	−0.344	−0.8634	+0.1807	−0.00480	+0.02822	+0.07956	−0.481	−0.263	−0.0089	−0.0585	+0.3234	−0.0780	+0.03503	+0.417
0.4	− 1.030	−2.556	+0.347	−0.0900	+0.1227	+0.05977	+0.01810	+0.05372	+1.253	−0.197	+0.0890	+0.0380	+0.4651	+0.0860	+0.03538	+0.664
0.2	+ 6.371	−2.158	+0.778	+0.1355	−0.1270	+0.06253	+0.00677	+0.02870	+3.240	+0.182	+0.0955	+0.0382	−0.0872	+0.1294	+0.01514	+0.814
0.1	+12.071	−1.363	+0.936	+0.1232	−0.3444	+0.04246	+0.00205	+0.01463	+4.628	+0.523	+0.0655	+0.0224	−0.6882	+0.0975	+0.00484	+0.901
0.0	+19.407	0	+1.000	0	−0.6412	0	0	0	+6.328	+1.000	0	0	−1.6010	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.008:																
3.2	− 0.086	−0.178	+0.050	+0.1271	+0.0163	+0.00949	−0.00072	−0.00511	+0.022	−0.025	+0.0132	+0.0227	+0.0605	+0.0132	+0.00522	−0.002
1.6	− 0.131	+0.719	−0.240	−0.7409	−0.0562	−0.04265	+0.00383	+0.03459	−0.199	+0.084	−0.0567	−0.1360	−0.2087	−0.0432	−0.03372	+0.043
0.8	− 4.278	−1.094	−0.313	−0.6617	+0.1813	−0.00397	+0.03329	+0.07719	−0.414	−0.263	−0.0042	−0.0422	+0.2814	−0.0763	+0.03497	+0.385
0.4	− 0.770	−2.316	+0.367	−0.0315	+0.1217	+0.06531	+0.02116	+0.05188	+1.177	−0.187	+0.0988	+0.0410	+0.4211	+0.0803	+0.03618	+0.637

TABLE 3B.—Edge Displacements of Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas			
	Tangential Displacement v (Inward Positive)— $T_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{Et^2} \times$ Col. (10) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Radial Displacement w (Outward Positive)— $T_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (2) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^3}{Et^3} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l^2}{Et^3} \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Rotation θ (Counter Clockwise Positive)— $T_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{EI} \times$ Col. (6) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{EI} \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$

$\frac{rt}{l^2}$	v (1)	w (2)	θ (3)	v (4)	w (5)	θ (6)	v (7)	w (8)	θ (9)	v (10)	w (11)	θ (12)
	(b) $n = 1$											
0.002	−77.30	−1.495	0.5712	1.495	0.03568	−0.01782	−11.91	−0.1861	0.05752	6.854	0.2138	−0.1710
0.003	−54.76	−1.409	0.4742	1.409	0.04535	−0.02027	− 9.393	−0.1943	0.05227	5.691	0.2433	−0.1795
0.004	−42.58	−1.342	0.4118	1.342	0.05332	−0.02206	− 7.909	−0.1990	0.04830	4.942	0.2648	−0.1851
0.006	−29.98	−1.243	0.3329	1.243	0.06635	−0.02459	− 6.176	−0.2041	0.04246	3.995	0.2951	−0.1920
0.008	−23.24	−1.169	0.2830	1.169	0.07690	−0.02634	− 5.164	−0.2062	0.03819	3.396	0.3161	−0.1962
0.010	−19.03	−1.110	0.2477	1.110	0.08582	−0.02764	− 4.485	−0.2069	0.03484	2.973	0.3317	−0.1990
0.015	−13.18	−1.000	0.1911	1.000	0.1036	−0.02983	− 3.452	−0.2058	0.02878	2.293	0.3580	−0.2032
0.020	−10.13	−0.9204	0.1565	0.9204	0.1174	−0.03120	− 2.853	−0.2029	0.02457	1.878	0.3744	−0.2055
0.025	− 8.241	−0.8582	0.1327	0.8582	0.1286	−0.03213	− 2.455	−0.1994	0.02142	1.593	0.3855	−0.2069
0.030	− 6.958	−0.8074	0.1152	0.8074	0.1381	−0.03279	− 2.168	−0.1956	0.01894	1.383	0.3935	−0.2078

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

An explanation of the reason for using a sinusoidal load instead of the actual uniform load on the shell is necessary. Although the membrane analysis could be made for a uniform load, the second principal step in shell analysis involving the application of corrective edge loads cannot be accomplished unless these edge loads are sinusoidal in shape. Therefore, to achieve compatibility of stresses produced by both edge and surface loads, the surface load is also assumed sinusoidal. While this sinusoidal load is different from the actual load, it can be made to approximate the effect of the uniform load.

To illustrate the similarity of flexural effects of both types of loads, a comparison is made of a simple beam supporting first a sinusoidal load (see Fig. 6) and then a uniform load.

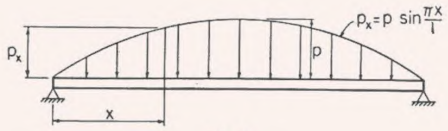


FIG. 6

Expressions for shear, moment, slope and deflection based on the sinusoidal loading of $p = 1$ are:

$$p_x = p \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

$$V = \int p_x dx = p \int \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{2}$$

$$M = \int V dx = p \int -\frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

$$\theta = \int \frac{M dx}{EI} = \frac{p}{EI} \int -\frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = +\frac{pl^3}{EI\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

$$\Delta = \int \theta dx = \frac{p}{EI} \int \frac{l^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{p}{EI} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

Using these expressions, the following comparison is made with the uniform load condition:

℄ Moment (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^2} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.128$
℄ Moment (uniform)	$\sim \frac{1}{8}$	$= 0.125$
℄ Deflection (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^4} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.0130$
℄ Deflection (uniform)	$\sim \frac{5}{384}$	$= 0.0130$
Support Shear (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.405$
Support Shear (uniform)	$\sim \frac{1}{2}$	$= 0.500$

In this comparison, the centerline or maximum ordinate of the sinusoidal load equals $1.0 \times \frac{4}{\pi}$ while the uniform load has an intensity of 1.0. The maximum ordinate of the sinusoidal load must be of greater intensity than the uniform load if the stresses produced by the two loads are to be similar, and the factor $\frac{4}{\pi}$ used for this purpose is derived from a Fourier Analysis. Results of this comparison indicate that good agreement is obtained for moment and deflection of beams with only the first term of the Fourier Series. This same trend holds for the shell.

Several terms of the Fourier Series may be added to approximate the uniform longitudinal load. Each of these terms represents a partial load having an intensity varying as $\frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}$ where $n = 1, 3, 5$, etc. Figs. 7a, 7b and 7c illustrate graphically the first three terms. Fig. 7d shows

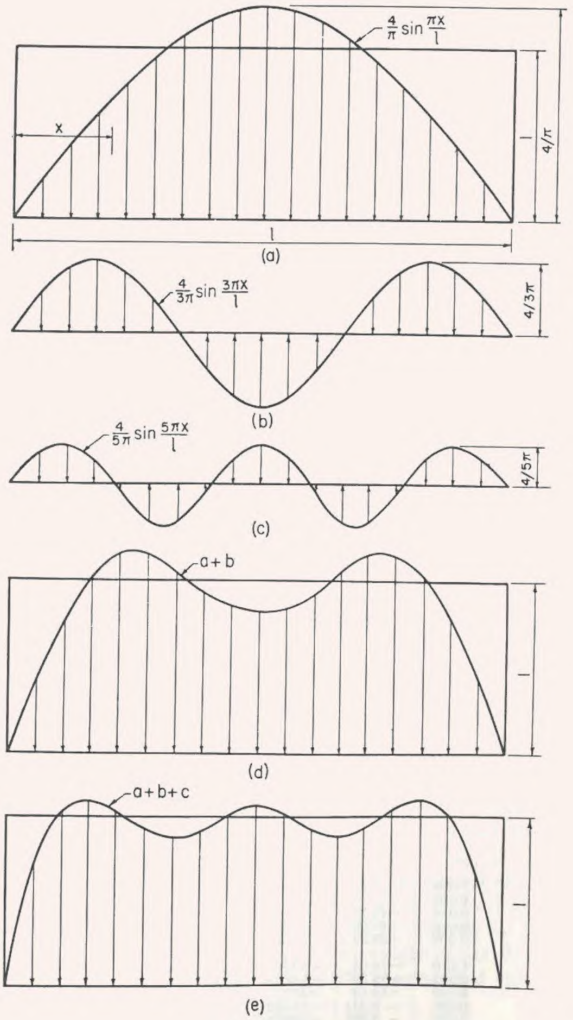


FIG. 7

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

the load resulting from the addition of the first two terms while Fig. 7e is the combination of the first three terms. The sum of all terms of the series would closely approximate the straight line $p = 1$. However, the preceding comparison indicates that the use of many terms is unnecessary and for clarity the computations for this example will be made in detail for only the first term where $n = 1$, as given in Table 1B.

Internal forces and displacements are defined as follows:

T_ϕ = Direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile.
T_x = Direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile.
S = Longitudinal shearing force, considered positive when creating tension in the direction of increasing values of x and ϕ.
$\triangle_V$ = Vertical displacement, considered positive when downward.
$\triangle_H$ = Horizontal displacement, considered positive when inward.

Transverse and longitudinal distribution of membrane forces created by a unit uniform transverse load or a unit dead load may be determined from Table 1B. Internal forces T_x, T_ϕ and S are obtained by means of formulas listed in the table heading in conjunction with tabulated coefficients. The transverse distribution of internal forces is given according to the column headed $\phi_k - \phi$, the central angle measured from the crown of the shell. ϕ_k is equal to one-half the angle subtended by the barrel while the angle ϕ is measured from the bottom edge as shown in Fig. 5. The angle $\phi_k - \phi$ is, therefore, the angle from the crown to any point designated by ϕ. For example, coefficients for values at the crown are taken at $\phi_k - \phi = 0°$.

The distribution of internal forces in the longitudinal direction varies according to trigonometric functions in formulas in the heading of Table 1B. For the sinusoidal surface load, forces T_ϕ and T_x vary as $\sin \frac{\pi x}{l}$ in which $\frac{\pi x}{l}$ is measured in radians. When $x = \frac{l}{2}$, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$. When $x = 0$ or l, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin 0°$ or $180°$ and is equal to zero. Values at intermediate points can be obtained from any trigonometric table, but values at $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$ are easily determined since they correspond to sin 30°, 45° and 60°, respectively, which have values of 0.50, 0.707 and 0.866.

As in a beam, shear is maximum at the support and zero at midspan, the shearing force varying as $\cos \frac{\pi x}{l}$. This function equals $+1$ and -1 at the supports and zero at midspan.

Two sets of coefficients and formulas are given in Table 1B, one for use with uniform live load p_u and one for dead load p_d. To obtain the magnitude of various membrane forces due to either load, coefficients must be multiplied by factors given in the formulas. For example, the coefficient of T_x selected for a specific value of $\phi_k - \phi$ must be multiplied by the load p_u or p_d, the constant $\left(\frac{l}{r}\right)^2$, the shell radius r, and the factor $\frac{4}{\pi}$. Coefficients in Table 1B are applicable to any shell irrespective of its proportions.

Coefficients for determining internal forces and moments due to line loads applied along one edge of a shell are given in Tables 3A and 3B, which are reproduced in part here. These tables are applicable to shells having a ratio $\frac{r}{l}$ exceeding 0.6 and are therefore appropriate for this example where $\frac{r}{l}$ equals 0.9. Another set of tables, 2A and 2B, presented in ASCE Manual No. 31 but not reproduced here, gives effects of symmetrical edge loads on barrel shells having $\frac{r}{l}$ less than 0.6.

This arbitrary division is one of convenience but does have a reasonable basis. It is only when $\frac{r}{l}$ is approximately 0.6 or less that line loads applied along one edge create significant stresses and displacements at the opposite edge. In this case, the arc length of the shell has an important influence on stress distribution but when $\frac{r}{l}$ is 0.6 or more, stresses are independent of arc length. For this reason coefficients of Tables 2A and 2B are given in terms of the subtended angle while those of Tables 3A and 3B are not.

When $\frac{r}{l}$ is less than 0.6, forces and displacements at the far edge of the shell produced by line loads at the near edge must be made to agree with actual boundary conditions. This could be done by applying another set of loads at the far edge, these loads in turn creating inconsistent forces at the near edge. However, the operation involving successive correction of these diminishing forces can be replaced by a single step if symmetrical loads are applied simultaneously at both longitudinal edges. Tables 2A and 2B are developed for this type of loading.

As $\frac{r}{l}$ increases beyond 0.6, the negligible far edge effects do not require correction and analysis requires only one application of line loads at each edge with final superposition of forces resulting from both loadings. For a symmetrically loaded shell computations are required for only one edge since results are applicable in reverse order for loads at the opposite edge. While Tables 3A and 3B covering the case of $\frac{r}{l} \geq 0.6$ could have been prepared for simultaneous application of symmetrical edge loads as in Tables 2A and 2B, their range or usefulness would have been limited by such an arrangement. These tables are therefore developed for loads applied at only one edge of the shell.

Coefficients in Table 3A are tabulated for the four different types of unit edge loads indicated by sketches in the table heading and give four effects of each load. These effects, which may be evaluated at the transverse locations indicated by the term $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, include the bending moment M_ϕ and the three forces T_x, T_ϕ and S. A large range of shell proportions is included by means of the

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

term $\frac{rt}{l^2}$ varying from 0.002 to 0.1. Small values are applicable to shells with proportions in the vicinity of $\frac{r}{t} = 200$ and $\frac{r}{l} = 0.6$, i.e., $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \frac{t}{r} = \frac{rt}{l^2} = 0.0018$, while large values correspond to short shells having a radius several times the longitudinal span. It should be noted that Tables 3A and 3B include two sinusoidal loadings, one with $n=1$ and one with $n=3$, since the second loading term becomes more important with increasing values of $\frac{r}{l}$.

Table 3B provides data for evaluating radial, tangential and rotational displacements due to four different edge loads. This and previously mentioned tables will be used in the design example that follows.

TABLE I—Internal Forces in an Interior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$ / $\frac{s}{\phi}$ / $\phi_k - \phi$	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′	Multipliers	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′
Load	Coefficients								Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.9970	−0.9551	−0.8930	−0.8460	− 0.8214	− 0.8017	1,720		− 1,720	− 1,640	− 1,540	− 1,460	− 1,410	− 1,380
② p_d		−0.9985	−0.9772	−0.9449	−0.9196	− 0.9063	− 0.8952	2,860		− 2,860	− 2,790	− 2,700	− 2,630	− 2,590	− 2,560
③ Σ										− 4,580	− 4,430	− 4,240	− 4,090	− 4,000	− 3,940
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	5,760	+ 270	− 1,330	− 1,980	+ 2,000	+ 4,480	+ 5,390	+ 5,760
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	135,400	− 50	+ 320	+ 3,820	+ 2,450	+ 920	+ 280	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	1,620	+ 20	− 80	− 10	+ 140	+ 150	+ 110	0
⑦ M_L	+0.00536	−0.03216	+0.03503	+0.03538	+0.01514	+ 0.00484	0	−7,000	− 40	+ 220	− 250	− 250	− 110	− 30	0
⑧ Σ									+ 200	− 870	+ 1,580	+ 4,340	+ 5,440	+ 5,750	+ 5,760
⑨ Forces due to line loads at far edge									+ 5,760	− 760	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨										− 6,210	− 3,210	+ 150	+ 1,500	+ 1,940	+ 2,020
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.0332	−0.1935	−0.2933	−0.3422	− 0.3658	− 0.3791	1,910		− 60	− 370	− 560	− 650	− 700	− 720
② p_d		−0.0222	−0.1322	−0.2072	−0.2485	− 0.2690	− 0.2826	3,170		− 70	− 420	− 660	− 790	− 850	− 900
③ Σ										− 130	− 790	− 1,220	− 1,440	− 1,550	− 1,620
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	5,760	− 1,200	+ 4,760	− 6,690	−14,700	−12,400	− 7,850	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	135,400	+ 1,190	− 5,310	− 650	+ 8,100	+ 8,470	+ 5,750	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	1,620	− 50	+ 150	− 430	− 320	+ 290	+ 850	+ 1,620
⑦ M_L	+0.0134	−0.0467	−0.0780	+0.0860	+0.1294	+ 0.0975	0	−7,000	− 90	+ 330	+ 550	− 600	− 910	− 680	0
⑧ Σ									− 150	− 70	− 7,210	− 7,520	− 4,550	− 1,930	+ 1,620
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 1,620	+ 1,800	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨										+ 1,600	− 9,400	− 9,540	− 6,410	− 3,730	0
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.3021	−0.2763	−0.2387	−0.2104	− 0.1954	− 0.1867	2,120		− 640	− 590	− 510	− 450	− 430	− 400
② p_d		−0.2023	−0.1987	−0.1918	−0.1863	− 0.1837	− 0.1771	3,520		− 710	− 700	− 680	− 660	− 650	− 620
③ Σ										− 1,350	− 1,290	− 1,190	− 1,110	− 1,080	− 1,020
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	5,760	− 880	− 590	−29,800	− 5,930	+36,700	+69,500	+112,000
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	135,400	+ 2,420	− 8,000	+24,500	+16,600	−17,200	−46,600	− 86,800
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	1,620	+ 30	− 330	− 780	+ 2,030	+ 5,250	+ 7,500	+ 10,300
⑦ M_L	+0.0692	−0.2359	+0.3234	+0.4651	−0.0872	− 0.6882	− 1.6010	−7,000	− 480	+ 1,650	− 2,260	− 3,260	− 610	+ 4,820	+ 11,200
⑧ Σ									+ 1,080	− 7,270	− 8,340	+ 9,440	+25,360	+35,220	+ 46,700
⑨ Forces due to line loads at far edge									+46,700	−10,400	+ 200	+ 1,900	+ 2,000	+ 2,000	+ 1,500
⑩=③+⑧+⑨										−19,020	− 9,430	+10,150	+26,250	+36,140	+ 47,180
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,920	+ 300	− 1,740	− 1,660	− 170	+ 260	+ 240	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	45,200	− 220	+ 1,560	+ 3,600	+ 2,430	+ 1,300	+ 660	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	540	+ 10	− 80	− 30	+ 20	+ 20	+ 10	0
⑦ M_L	−0.002	+0.050	+0.417	+0.664	+0.814	+ 0.901	+ 1.000	−2,330	+ 50	− 120	− 970	− 1,550	− 1,900	− 2,100	− 2,330
⑧ Σ									+ 90	− 380	+ 940	+ 730	− 320	− 1,190	− 2,330
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 2,330	− 50	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨										− 430	+ 550	+ 590	− 355	− 1,175	− 2,280

①②③ Surface loads
④⑤⑥⑦⑧ Line loads applied at near edge

PAGE 8

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Analysis of Simply Supported Interior Barrel Shell

A—Membrane Analysis

Data necessary for this analysis are:

Live load p_u = 30 psf
Dead load p_d = 50 psf
Radius r = 45 ft.
$\frac{l}{r} = \frac{50}{45}$ = 1.11
$\left(\frac{l}{r}\right)^2$ = 1.238

In the membrane analysis external surface loads, dead and live, induce three forces throughout the shell: T_x, the force in the longitudinal direction; T_ϕ, the force in the transverse direction; and S, the tangential shearing force. For maximum values, T_x and T_ϕ are found at mid-span or at $x = \frac{l}{2}$, while S is found at the supports where $x = 0$ or $x = l$.

The magnitude of these internal forces is given in Table I (Roman numerals are used for the computed tables to differentiate them from Manual tables) at various transverse points, each location being expressed in four different terms. The first, $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, is one of the parameters of Table 3A and values are selected to agree with those listed in Table 3A. Values of the other three terms s, ϕ and $\phi_k - \phi$ agree accordingly. For example, if $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.1$,

$$s = 0.1\sqrt[4]{rtl^2} = 0.1\sqrt[4]{(45)(0.333)(50^2)}$$

or s = 1.391 ft.

Also $\phi = \frac{s}{r}$ (in radians)

$$\phi = \frac{1.391}{45} \times \frac{180}{\pi} = 1.77°$$

The point indicated in Table I by s = 44.5 ft. and $\phi = 56°40'$ lies slightly beyond the far edge of the shell. Although forces determined at this point are meaningless for the shell under consideration, they are used for interpolation of forces at the far edge.

Membrane forces are determined by means of equations in the heading of Table 1B. The combination of all terms in any one equation with the exception of the coefficient is called the multiplier. Multipliers for this example are:

For live load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.238 = 2120$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.11 = 1910$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 = 1720$

For dead load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.238 = 3520$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.11 = 3170$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 = 2860$

Coefficients for these multipliers are taken from columns (1), (2), (3) and (7), (8), (9) for live and dead loads, respectively. For example, to find the live load coefficient for the force T_x at $\phi = 7°\,5'$ or $\phi_k - \phi = 19°\,18'$, enter column (1) of Table 1B. Sufficient accuracy is achieved by interpolating for an angle $\phi_k - \phi = 19°$ giving the coefficient -0.2387. Multiplying this coefficient by the multiplier 2120 gives a force T_x of 510 lb. per ft.

The same procedure is repeated at various locations across the shell to determine the forces T_ϕ, T_x and S induced by both dead and live loads. Results are tabulated in rows ① and ② of Table I, while rows ③ give a summation of ① and ②. Slide rule accuracy is sufficient in these computations.

B—Correction for Edge Loads

Complete shell analysis requires that final forces and displacements along all edges be consistent with actual boundary conditions. Since the membrane analysis assumes the existence of imaginary edge supports, membrane forces must be corrected. This correction constitutes the second principal step of shell analysis.

The sequence of operations involved in the second step requires determination of magnitude and direction of corrective line loads applied at the edges and then evaluation of the internal forces which they produce. For a single barrel shell without edge beams—that is, one in which longitudinal edges are free—the only condition to be satisfied is that the algebraic sum of corrective line loads and membrane forces at the edges equal zero. In other words, final corrective line loads T_L and S_L are equal and opposite to membrane forces T_ϕ and S and therefore are known upon completion of the membrane analysis.

In contrast to this simple analysis for a single barrel, determination of line loads for a multiple barrel roof is more complicated. Not only must membrane forces be satisfied but, in addition, displacements of common edges of adjacent barrels must coincide. For this reason final corrective line loads seldom equal membrane forces and a special notation T_{LM} and S_{LM} is introduced for line loads which satisfy only the edge forces of the membrane analysis. Final line loads T_L and S_L include T_{LM} and S_{LM} as well as loads effecting coincident edge displacements.

There are various ways of evaluating line loads for the multiple barrel roof and although the method presented here is not the most direct, it is considered the least complicated. Initially, each barrel is assumed separated from the rest of the structure and is treated as a single barrel. Following a membrane analysis, corrective line loads T_{LM} and S_{LM} producing zero reactions are applied along the longitudinal edges of each barrel. As previously mentioned, determination of these line loads does not require a separate computation and in this example values of 3940 lb. per ft. for T_{LM} and 1620 lb. per ft. for S_{LM} are taken directly from rows ③ of Table I at $\phi = 0°$. The interior barrel is in static equilibrium when these loads are applied. However, individual barrels still must be brought together in the multiple barrel system by additional line loads applied to each barrel. Internal forces produced by these additional loads then are super-

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

imposed on the effects of T_{LM} and S_{LM}.

Consistency in displacements of adjacent edges is achieved by making longitudinal, vertical, horizontal and angular displacements of one edge equal to those of the other. Generally, longitudinal stresses T_x/t at common edges are made equal to each other instead of longitudinal displacements since edge displacements agree if corresponding stresses are identical. The remaining three displacement equations are established for each edge in terms of the unknown line loads T_L, R_L, S_L and M_L, coefficients taken from Table 2B or 3B and specified physical properties of the shell.

Equating like displacements of adjoining barrel edges yields four equations containing eight unknowns, these unknowns including four line loads applied to each adjacent edge. The eight unknowns can be reduced to four by statics. Because these line loads are internal, the algebraic sum of their components in any direction must equal zero. Moment and tangential shear acting on one edge must be equal and opposite to similar forces acting on the adjoining edge, and the sum of the vertical and horizontal components of radial and tangential line loads R_L and T_L applied to adjacent edges must equal zero. By inserting these conditions, the four equations can be expressed in terms of four unknowns and a simultaneous solution gives numerical values for the line loads.

The general procedure of establishing four displacement equations to determine the unknowns R_L, T_L, S_L and M_L is not always necessary. When adjacent barrels are symmetrical in shape and loading as in this design example, analysis can be simplified to a consideration of only one barrel. It should be understood that line loads applied to one barrel are applied in an opposite sense to the adjacent barrel. Agreement in displacement of common edges is obtained from four known conditions: that no horizontal or angular displacement of the edges takes place and that tangential and vertical shears along common edges are equal to zero.

The first two conditions are evident from symmetry in shape and loading. The latter two conditions also can be deduced from physical aspects of the problem. With adjacent barrels identical and equally loaded, variation of longitudinal stress is symmetrical about the common edge and tangential shear at the edge must equal zero. Vertical shear equal to the sum of the vertical components of line loads R_L and T_L, must also equal zero since its presence would indicate that load on one shell was being carried in part by the adjoining barrel, an impossible condition because of symmetry.

The four known conditions can be summarized as:

$$\begin{aligned} \triangle_H &= 0 \\ \theta &= 0 \\ S &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \end{aligned}$$

Numerical expressions are derived for the design example from these conditions.

Expressing $\triangle_H = 0$ in terms of displacements given in Table 3B gives:

$$\triangle_H = 0 = v \cos \phi_k - w \sin \phi_k \qquad (6)$$

where v is the tangential displacement of the shell considered positive in the direction of increasing values of ϕ, and w the radial displacement considered positive when outward. Sign convention for this equation arbitrarily defines displacement to the left as positive. The trigonometric relationship is shown in Fig. 8.

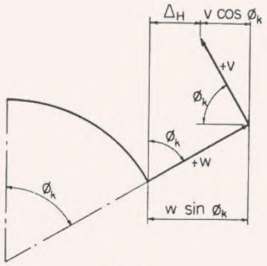


FIG. 8

Evaluation of v and w is made by combining displacement contributions of T_{LM} and S_{LM} with those of the four line loads which unite displaced edges of adjoining barrels. T_{LM} and S_{LM} are part of the final edge loads T_L and S_L, respectively, and are combined with them in equation (7). Tangential and radial displacements due to the four line loads T_L, R_L, S_L and M_L are given in the heading of Table 3B. Equation (7) is given at $x = \frac{l}{2}$ and for convenience is divided by the factor $\frac{l}{Et}$.

$$\begin{aligned} \triangle_H = 0 = \Big[&(T_L + 3940) \times \text{Col. (1)} + R_L \times \tfrac{l}{t} \times \\ &\text{Col. (4)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (7)} + M_L \times \tfrac{1}{t} \times \\ &\text{Col. (10)} \Big] \cos \phi_k - \Big[(T_L + 3940) \times \text{Col. (2)} + \\ &R_L \times \tfrac{l}{t} \times \text{Col. (5)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (8)} + \\ &M_L \times \tfrac{1}{t} \times \text{Col. (11)} \Big] \tfrac{l}{t} \sin \phi_k \end{aligned} \qquad (7)$$

Substituting coefficients of Table 3B given for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ and for the first sine loading ($n = 1$) together with dimensional and trigonometric values gives:

$$\begin{aligned} 0 = \Big[&(T_L + 3940)(-29.98) + (R_L)(150)(1.243) + \\ &(S_L + 1620)(-6.176) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(3.995) \Big] 0.8958 - \\ \Big[&(T_L + 3940)(-1.243) + (R_L)(150)(0.06635) + \\ &(S_L + 1620)(-0.2041) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(0.2951) \Big] (150)(0.4444) \end{aligned} \qquad (7a)$$

which reduces to:

$$0 = 233{,}700 + 56.00\, T_L - 496.4\, R_L + 8.073\, S_L - 16.09 \frac{M_L}{t} \qquad (7b)$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

The term $\frac{M_L}{t}$ is kept separate for convenience in the use of Table 3A.

The condition of zero edge rotation for the interior barrel ($\theta = 0$) is expressed by combining rotational effects of edge loads T_L, R_L, S_L and M_L taken from the heading of Table 3B. Rotation is determined at midspan where $x = \frac{l}{2}$ and the entire equation is divided by $\frac{lt}{EI}$.

$$\theta = 0 = (T_L + 3940) \times \text{Col. (3)} + R_L \times \frac{l}{t} \times \text{Col. (6)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (9)} + M_L \times \frac{1}{t} \times \text{Col. (12)} \quad (8)$$

Substituting dimensions and coefficients from Table 3B gives:

$$0 = (T_L + 3940)(0.3329) + (R_L \times 150)(-0.02459) + (S_L + 1620) \times 0.04246 + \left(\frac{M_L}{t}\right)(-0.1920) \quad (8a)$$

which simplifies to:

$$1380 + 0.3329\,T_L - 3.689\,R_L + 0.04246\,S_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0 \quad (8b)$$

Static equilibrium of the interior barrel was satisfied by application of loads T_{LM} and S_{LM}. To maintain this stability the summation of vertical components of line loads R_L and T_L must equal zero. The expression for $\Sigma V = 0$ at one edge is developed from the sketch of Fig. 9.

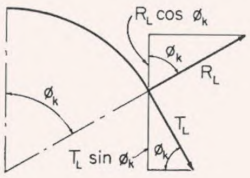


FIG. 9

Assuming the downward direction positive gives:

$$-R_L \cos \phi_k + T_L \sin \phi_k = 0 \quad (9)$$

$$-R_L \times 0.8958 + T_L \times 0.4444 = 0 \quad (9a)$$

$$T_L = 2.016\,R_L \quad (9b)$$

As previously discussed, shear is zero at the edges of the interior barrel in this example. Since shear equilibrium is produced by the load S_{LM} of 1620 lb. per ft. which resists shear resulting from the membrane analysis, the only other shearing force involved, line load S_L, along these edges must equal zero.

Substituting the value of T_L from equation (9b) and setting $S_L = 0$, equations (7b) and (8b) become:

$$233{,}700 - 383.5\,R_L - 16.09\,\frac{M_L}{t} = 0$$

$$1380 - 3.017\,R_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0$$

Solving these simultaneously gives:

$$R_L = +903 \text{ lb. per ft.}$$

$$\frac{M_L}{t} = -7000 \text{ ft. lb. per ft.}^2$$

and from equation (9b):

$$T_L = 1820 \text{ lb. per ft.}$$

These line loads satisfy requirements of transverse continuity along longitudinal edges of the interior barrel. Since T_{LM} acts in the same direction as the force T_L these two forces are combined to form a final T_L of $+1820 + 3940 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the value of S_L is added to S_{LM} to give a final S_L of $0 + 1620 = +1620$ lb. per ft. The sign convention for T_L and S_L is the same as that for T_ϕ and S, respectively. Positive R_L is in the outward direction while positive M_L produces compression at the upper surface of the shell.

Internal forces resulting from edge loads are determined by equations in the heading of Table 3A. In these equations the terms $\sin \frac{\pi x}{l}$ and $\cos \frac{\pi x}{l}$ equal 1.0 at $x = \frac{l}{2}$ and $x = 0$, respectively. As previously discussed, the multiplier is the combination of all terms in one equation with the exception of the coefficient. For example, the multiplier for computing internal forces T_ϕ, S and T_x resulting from line load T_L equals $T_L \times 1.0 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the multiplier for these same forces due to R_L equals $R_L \times \frac{l}{t} \times 1.0 = +903 \times \frac{50}{0.333} \times 1.0 = +135{,}400$ lb. per ft., while the multiplier for moment M_ϕ due to the edge moment M_L is $M_L \times 1.0 = \frac{M_L}{t} \times t \times 1.0 = -7000 \times 0.333 \times 1.0 = -2330$ lb. per ft. All multipliers are tabulated in the center column of Table I.

Coefficients taken from Table 3A for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ are listed in rows ④ through ⑦ at the left side of Table I. These coefficients times appropriate multipliers give the forces T_ϕ, T_x, S and M_ϕ at the points indicated by $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$. These forces are listed at the right side of the table.

For illustration, the internal force T_ϕ produced by line load T_L at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is obtained by multiplying the coefficient $+0.347$ by the multiplier $+5760$ to give $+2000$ lb. per ft. Other values of T_ϕ at this location due to line loads R_L, S_L and M_L are determined in a similar manner and all are added algebraically in row ⑧ and plotted in Fig. 10 to show the variation of T_ϕ across the shell. Similar curves for T_x, S and M_ϕ are also included. Although values are not available for plotting between $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.6$ and 3.2, curves can be estimated with a satisfactory degree of accuracy since the magnitude of forces between these values becomes smaller and curvatures diminish.

PAGE 11

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

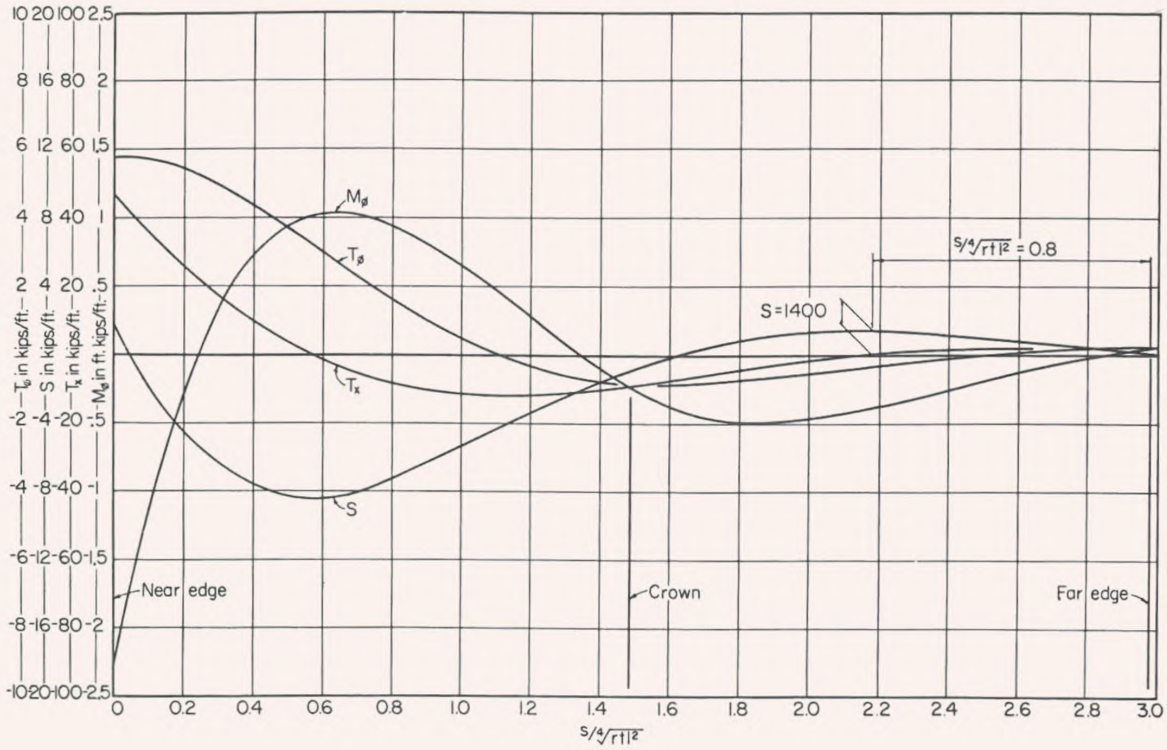


FIG. 10

The curves of Fig. 10 involve line loads applied only at the near edge. Symmetry of structure and loading allows the use of these same curves for determining forces resulting from line loads acting at the far edge. This is done by reversing the abscissa scale of Fig. 10 so that the right edge represents the near edge of the shell and then scaling directly from the curves. For example, the magnitude of force S at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.8$ (measured on the reversed scale) due to line loads at the far edge is scaled as 1400 lb. per ft. Forces determined in this manner are tabulated in rows ⑨ of Table I.

Although algebraic signs tabulated for shear in row ⑧ of Table I agree with those of the S curve in Fig. 10, signs in row ⑨ are opposite to those indicated by this curve. This is due to the fact that the shear sign convention defined on page 9 is related to the origin of the coordinate axes. The signs of coefficients for line loads are based on a coordinate system originating at the loaded edge. Therefore, line loads applied at near and far edges have different referent axes, and positive shears due to these two loads will be opposite in direction.

The difference between positive shear directions can be seen by reference to Fig. 11 in which face BB' is assumed to be parallel to and facing the near edge of the shell. Shear resulting from line loads acting at the near edge is referenced to the coordinate origin at the right and is positive as shown in conformance with the definition that it produce tension in the direction of increasing values of ϕ and x, or along diagonal AB. For this condition positive shear on face BB' acts toward the origin of x.

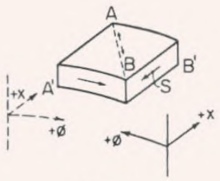


FIG. 11

Similarly, shear produced by line loads acting at the far edge is referenced to the origin at the left and when positive is directed toward the origin of x on face AA' which is nearest to the loaded edge. In this case shear on face BB' is opposite to that shown. Consequently, on a face such as BB', positive shear due to line loads at the far edge is opposite in direction to positive shear caused by line loads at the near edge. Direction is made consistent by changing signs.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Rows ⑩ of Table I give final internal forces in the simply supported interior barrel. These are obtained by summation of membrane forces and effects of line loads applied at both longitudinal edges. Variation of these forces is shown graphically in Fig. 12.

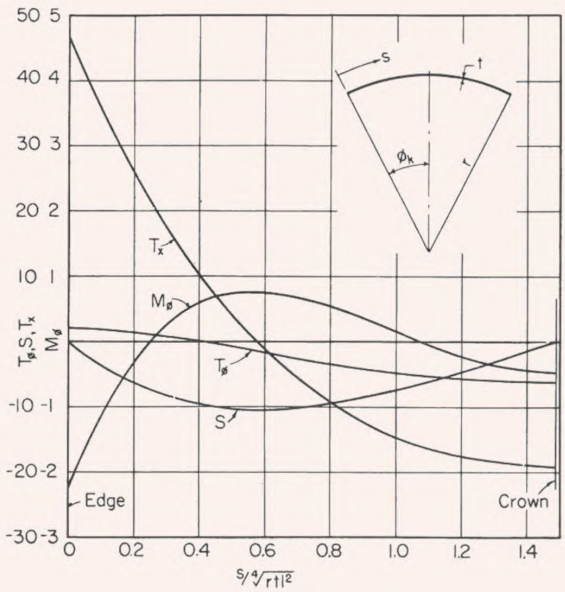


FIG. 12

Statical Check of Forces in Interior Barrel

A statical check of internal forces should be made as a precautionary measure against numerical errors. The sum of horizontal T_x-forces across a transverse section of the barrel must equal zero, the sum of vertical components of the shearing force S at each support must equal one-half the total load on the shell, and the total internal longitudinal moment at midspan due to the T_x-forces must equal the external moment.

The summation of horizontal forces at midspan is made by means of Simpson's rule. This method, useful in integrating non-linear functions, expresses area as:

$$\frac{\triangle L}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + y_n)$$

in which y_o to y_n are equally spaced ordinates of the curve enclosing the area, n is an even number, and $\triangle L$ the distance between ordinates. In this example, the arc distance from shell edge to crown is divided into four equal parts. The angle ϕ_k was shown to be 26°23′ (26.38°) and its value in radians is obtained by multiplying by $\frac{\pi}{180}$.

Hence:

$$\triangle L = \frac{s}{4} = \frac{r\phi_k}{4} = \frac{45 \times 26.38 \times \pi}{4 \times 180} = 5.18 \text{ ft.}$$

The value of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ corresponding to this interval equals:

$$\frac{5.18}{\sqrt[4]{45 \times 0.333 \times 50^2}} = 0.372$$

Because values of internal forces tabulated in rows ⑩ of Table I occur at locations different from those required for ordinates in Simpson's rule, scaled values from Fig. 12 are used. With scaled values, the summation of longitudinal forces is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[47{,}180 + 4 \times 13{,}800 + 2 \times (-7{,}200) + 4 \times (-16{,}300) + (-19{,}400)]$$

$$\Sigma H = +177{,}000 - 171{,}000 = +6000 \text{ lb.}$$

The difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetic sum.

The internal moment produced by T_x-forces at any section is always the same regardless of where the axis is chosen. Here moment is computed about the bottom edge of the shell and Simpson's rule takes the form:

$$\text{Moment} = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o h_o + 4\,y_1 h_1 + 2\,y_2 h_2 + 4\,y_3 h_3 \ldots + y_n h_n]$$

where the ordinate y with its subscript is again the magnitude of the force T_x at the same locations specified for the summation of horizontal forces and h is the companion moment arm measured from the lower edge of the shell. The moment arm equals $r\,[\cos(\phi_k - \phi) - \cos\phi_k]$. The summation is multiplied by 2 to include the moment at either side of the crown.

To illustrate computations used in the moment summation, the ordinate y_1 at the point $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.372$ was scaled previously from Fig. 12 as 13,800 lb. per ft. The angle ϕ subtended by this point equals 6°36′ and $\phi_k - \phi$ is approximately 19°50′. The moment arm therefore equals $45(0.9407 - 0.8958) = 2.02$ ft. The complete expression for moment is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times 13{,}800 \times 2.02 + 2 \times (-7200) \times 3.51 + 4 \times (-16{,}300) \times 4.38 + (-19{,}400) \times 4.69]$$

from which:

$$M \text{ (internal)} = -1{,}077{,}000 \text{ ft. lb.}$$

Midspan moment due to external load is determined from equation (3), $M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}$, as developed on page 8. With shell arc length equal to $8\triangle L = 8 \times 5.18 = 41.4$ ft. and $p_u = 30$ psf and $p_d = 50$ psf, external moment is:

$$M = -\frac{50^2}{\pi^2}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right]$$
$$= -1{,}055{,}000 \text{ ft. lb.}$$

As previously discussed, dead and live loads are multiplied by $\frac{4}{\pi}$ in accordance with the Fourier Analysis. According to sign conventions adopted, both external and internal moments produce compression at the top of the shell and internal moment is only 2 per cent greater than the external.

Summation of vertical components of the shearing force S at one end of the barrel is:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

$$\Sigma V = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o \sin(\phi_k - \phi_o) + 4\,y_1 \sin(\phi_k - \phi_1) + 2\,y_2 \sin(\phi_k - \phi_2) + \ldots y_n \sin(\phi_k - \phi_n)]$$

where y now represents ordinates of the shear curve of Fig. 12. For example, y_1 scales -9000 lb. per ft. For $\phi_k - \phi_1 = 19°50'$, $\sin(\phi_k - \phi_1)$ equals 0.3393 and the vertical component at this point is -9000×0.3393. Values at other points are obtained in a similar manner. Total upward force acting at the support is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times (-9000) \times 0.3393 + 2 \times (-9750) \times 0.2278 + 4 \times (-5850) \times 0.1161 + 0]$$

$$\Sigma V = -66{,}800 \text{ lb.}$$

Equation (2) shows that total vertical shear due to a sinusoidal load is equal to $-p\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}$. At the support where $x = 0$, $\cos\frac{\pi x}{l} = 1$ and the reaction becomes $-p\frac{l}{\pi}$. Substituting for p the numerical values used in the moment expression, total shear is:

$$V = -\frac{50}{\pi}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right] = -66{,}300 \text{ lb.}$$

In this example, good agreement is obtained between the summation of internal and external forces with a maximum difference of less than 2 per cent. Such a favorable comparison cannot always be expected. Scaled ordinates, approximate integration given by Simpson's rule and, to a minor extent, the incomplete satisfaction of edge conditions may result in differences amounting to as much as 10 per cent in exceptional cases.

Analysis of Simply Supported Exterior Barrel Shell

Geometrical properties of exterior and interior barrels of the roof in this example are similar except that a beam 24 in. deep and 9 in. wide is added at the outside edge of exterior shells. This vertical extension, defined as an edge beam, acts integrally with the shell and should not be considered a separate member.

Analysis of the exterior barrel follows almost the same procedure outlined for the interior barrel. The first step involves determination of membrane forces created by surface loads. Since identical loading is applied to all barrels, membrane forces for exterior and interior barrels are the same and their summation is taken directly from Table I or computed from Table 1B and tabulated in rows ③ of Table III on page 20. Effects of line loads at the inside edge of the exterior barrel also are similar to those previously determined for the interior barrel and these values are tabulated in rows ⑨ of Table III.

Restraint at the outside edge of the exterior barrel is quite different from that at the interior edge since displacement is resisted only by the edge beam. As a result, investigation of the exterior barrel chiefly concerns conditions at the outside edge.

It is first assumed that the exterior shell is detached temporarily from the adjoining barrel and edge beam as illustrated in Fig. 13. Line loads which re-establish unity of beam and shell can be determined in the manner shown for the interior barrel. However, to emphasize the pronounced effect of the edge beam on deflection, longitudinal stress and vertical displacement of the shell are computed without taking the edge beam into account. The force T_x created in the single barrel is:

$$T_x = (-1020 + 3940 \times 19.407 + 1620 \times 6.328) \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\text{or } T_x = 85{,}700 \sin\frac{\pi x}{l} \text{ lb. per ft.}$$

In the equation above, -1020 is the longitudinal force due to membrane forces and is taken directly from row ③ of Table I, while the two products constitute effects of line loads which counteract tangential and shear reactions at the edge resulting from the membrane analysis.

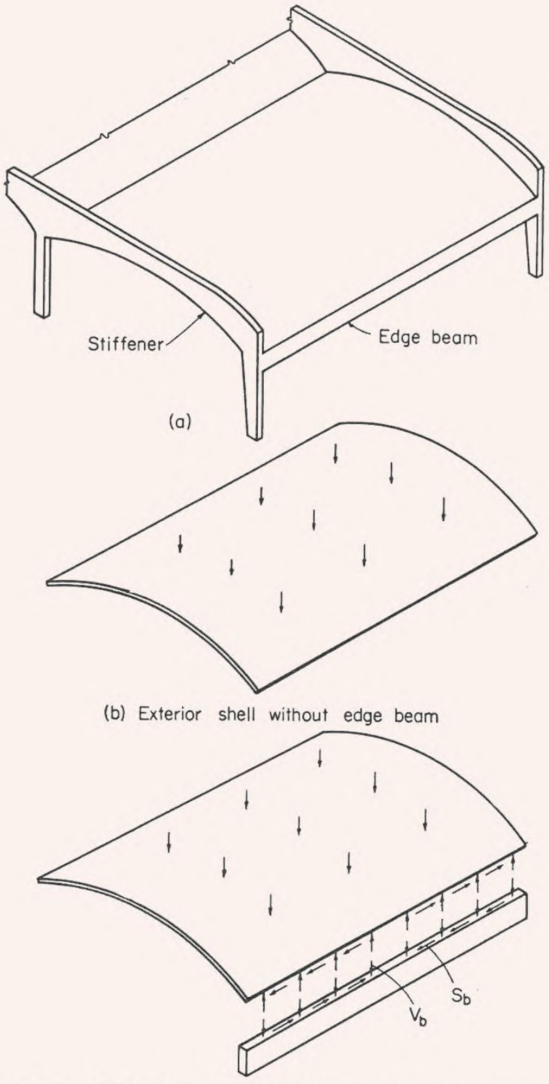


FIG. 13

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Coefficients are taken from Table 3A. The final value of $85{,}700 \sin \frac{\pi x}{l}$ lb. per ft. is the longitudinal edge force existing when the shell is independent of the edge beam.

Vertical displacement of the outside edge for this condition is computed by means of Table 3B by adding vertical components of tangential and radial displacements.

$$\Delta_V = \frac{l}{Et}\,[(-3940 \times 29.98 - 1620 \times 6.176)\ 0.4444 + 150 \times (-3940 \times 1.243 - 1620 \times 0.2041)\ 0.8958] \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta_V = -759{,}000\ \frac{l}{Et} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{114 \times 10^6}{E} \sin \frac{\pi x}{l}$$

If E is assumed equal to 3,000,000 psi, dead load taken as 5/8 of the total load and long-time deflection assumed 3.8* times the instantaneous deflection, then:

$$\Delta_V = \frac{5 \times 114 \times 10^6 \times 3\ 8}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} + \frac{3 \times 114 \times 10^6}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} = 0.73 \text{ ft. or } 8\tfrac{3}{4} \text{ in.}$$

Although actual deflection would be approximately 1/4 to 1/5 of 0.73 ft. because of longitudinal continuity, edge deflection still would be excessive without an edge beam. Because of the nonlinear variation of the T_x-forces in all shell roofs except those having very large $\frac{l}{r}$ ratios, it is probable that the creep will be considerably less than that prevailing in ordinary beams. The factor 3.8 is used here only to indicate the maximum value.

The next step is to reunite common edges of barrel and beam by making vertical displacement and longitudinal strain coincident throughout their length. The other two requirements of continuity, that horizontal displacement and angular rotation of common edges agree, can be neglected since horizontal and rotational stiffnesses of the beam are slight as compared with those of the shell.

*See *Deflection of Reinforced Concrete Members*, p. 16, available free in U.S. and Canada on request to Portland Cement Association.

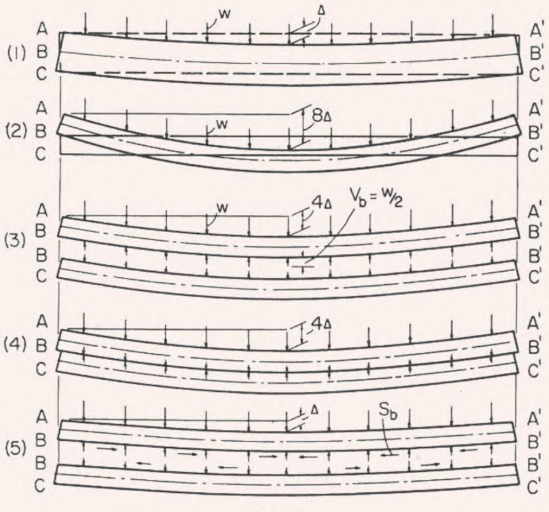


FIG. 14

Because two conditions of compatibility are to be satisfied, two types of forces must be applied at the junction of edge beam and shell. The necessity for considering two force conditions rather than one can be demonstrated easily for a simply supported rectangular beam carrying uniform load. As shown in Fig. 14 (1), deflection of the beam due to a uniform load w is designated as Δ. While impractical, analysis of this beam can be made by dividing it horizontally into two parts and then reuniting these parts by internal forces. In Fig. 14 (2), the beam is split and the entire load is assumed carried by the upper half, the deflection of this half becoming 8 Δ. The lower portion assumed unloaded remains in its undeflected position:

If equal and opposite loads of magnitude $\frac{w}{2}$ are added to both the upper and lower sections of the beam as shown in Fig. 14 (3), both parts are subjected to a net downward force of $\frac{w}{2}$ and the deflection of each becomes 4 Δ. However, strains of the common face BB' differ and can only be brought into agreement by equal and opposite shearing forces acting along this common surface. The shearing forces shorten bottom fibers of the upper beam and lengthen top fibers of the lower beam while maintaining the same relative deflection of both. Hence both displacement and strain requirements are satisfied. Final stresses and deflections obtained by this indirect procedure are identical to those obtained from a consideration of the beam as a unit.

As in this simple beam illustration, line loads acting on the edge of the exterior barrel must be equal and opposite to those carried by the edge beam. Since the edge beam is assumed to resist only vertical loads and horizontal shearing loads, forces acting on the shell must correspond to these two loads. Therefore, if forces acting on the beam are designated as V_b and S_b, shell line loads

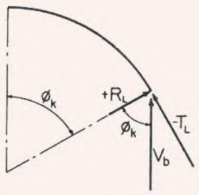


FIG. 15

are, from Fig. 15:

$$T_L = -V_b \sin \phi_k = -0.4444\ V_b \qquad (10a)$$

$$R_L = V_b \cos \phi_k = 0.8958\ V_b \qquad (10b)$$

$$S_L = S_b \qquad (10c)$$

The positive direction of V_b shown represents the reaction of the beam on the shell. The relationship expressed by equations (10a) and (10b) satisfies the condition that the horizontal edge force equals zero.

Longitudinal stress and vertical displacement at the edge are determined by superimposing effects of these line loads on those previously determined for the single barrel. With the influence of line loads applied at the far

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

edge neglected, $\frac{T_x}{t}$ and $\triangle_V$ are:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 + 19.407\,T_L - 150 \times 0.6412\,R_L + 6.328\,S_L)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\Big[-759{,}000 + (-29.98\,T_L + 150 \times 1.243\,R_L - 6.176\,S_L)\,0.4444 + 150\,(-1.243\,T_L + 150 \times 0.06635\,R_L - 0.2041\,S_L)\,0.8958\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11b}$$

Substituting in equations (11a) and (11b) the values of T_L, R_L, and S_L as expressed by equations (10) gives:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\,(-759{,}000 + 1352\,V_b - 30.17\,S_b)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12b}$$

Equations (12a) and (12b) express longitudinal stress and vertical displacement of the shell's edge in terms of internal forces acting on the beam. Numerical values of these unknown forces are determined by developing similar expressions for the beam based on its elastic behavior.

To maintain a constant relationship between T_L and V_b and between S_L and S_b over the entire length of shell, vertical loading V_b and shearing force S_b must vary respectively as $\sin\frac{\pi x}{l}$ and $\cos\frac{\pi x}{l}$. Effects of vertical and shear loads having these variations are obtained by the ordinary flexural theory for homogeneous beams. This theory is considered adequate because of the large length-to-depth ratio.

Expressions for moment and vertical displacement produced by a vertical sine load are given by equations (3) and (5). A rectangular homogeneous beam carrying this type of load is subjected to flexural action only and its fiber stresses are symmetrical about the centroidal axis. In contrast, a similar beam carrying only a shear load applied along one surface is subjected to both direct and bending stresses and extreme fiber stresses are not of equal magnitude. Axial thrust at any section is equal to the summation of shear from that section to the end of the beam, moment is equal to this thrust times its eccentricity about the centroidal axis, and vertical displacement is determined by conventional means from this induced moment.

In spite of the fact that vertical and shear loads are dissimilar in direction and distribution, fiber stresses and displacements resulting from each have the same longitudinal variation expressed in terms of $\sin\frac{\pi x}{l}$. Coefficients for fiber stress and displacement in a beam due to these loads are taken from ASCE Manual No. 31, page 59, equations (9f) and (10c).

Extreme fiber stress at the top of the beam is:

$$f = -\frac{l}{bh}\Big[0.60793 \times \frac{l}{h}(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

in which the sign convention for fiber stress conforms to that used in shell analysis; i.e., positive indicates tension. Positive directions of loads are as shown in Fig. 16. In equation (13), the value 286 accounts for the dead weight of the beam and is obtained by multiplying the actual weight of the beam, 225 lb. per ft., by $\frac{4}{\pi}$.

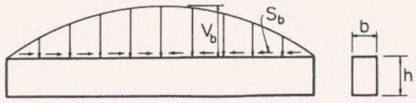


FIG. 16

From equations (9d) and (10e) of ASCE Manual No. 31, vertical displacement of the beam is:

$$\triangle_V = \frac{l^3}{bh^2E}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{14}$$

Equating stresses and deflections given by equations (12) to those of equations (13) and (14) and multiplying by t and $\frac{Et}{l}$ respectively gives:

$$+85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b = -\frac{lt}{hb}\Big[0.60793\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big] \tag{15a}$$

$$+759{,}000 - 1352\,V_b + 30.17\,S_b = \frac{l^2t}{h^2b}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big] \tag{15b}$$

Substituting values of:

$$\frac{l}{h} \times \frac{t}{b} = \frac{50}{2} \times \frac{4}{9} = 11.11$$

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^2 \times \frac{t}{b} = 11.11 \times \frac{50}{2} = 277.7$$

and

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^3 \times \frac{t}{b} = 277.7 \times 25 = 6944$$

in equations (15) and simplifying gives:

$$74.04\,V_b + 20.47\,S_b = -134{,}000$$
$$-2207\,V_b - 23.57\,S_b = -514{,}000$$

from which a simultaneous solution results in:

$$V_b = +315 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_b = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Substitution of these values in equations (10) gives line loads which reunite common edges of barrel and beam:

$$T_L = -0.4444 \times 315 = -140 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +0.8958 \times 315 = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Total line loads must include T_{LM} and S_{LM}, the reactions to membrane forces created by surface loads. Final line loads then are:

$$T_L = -140 + 3940 = +3800 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 + 1620 = -6060 \text{ lb. per ft.}$$

Effects of these three line loads on internal forces T_x, S, T_ϕ and M_ϕ are determined from formulas given at the

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

TABLE II—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof Due to Line Loads at Outside Edge

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$	3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0		3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0
s	44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0		44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0
ϕ	56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°		56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°
$\phi_k - \phi$		−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′			−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′
Load	Coefficients							Multipliers	Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	3,800	+ 180	− 870	− 1,310	+ 1,320	+ 2,960	+ 3,560	+ 3,800
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	42,000	− 10	+ 100	+ 1,190	+ 760	+ 280	+ 90	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	−6,060	− 70	+ 320	+ 50	− 540	− 580	− 400	0
⑧ Σ									+ 100	− 450	− 70	+ 1,540	+ 2,660	+ 3,250	+ 3,800
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	3,800	− 790	+ 3,140	− 4,410	− 9,710	− 8,200	− 5,180	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	42,000	+ 370	− 1,650	− 200	+ 2,510	+ 2,630	+ 1,780	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	−6,060	+ 180	− 570	+ 1,590	+ 1,190	− 1,100	− 3,170	− 6,060
⑧ Σ									− 240	+ 920	− 3,020	− 6,010	− 6,670	− 6,570	− 6,060
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	3,800	− 580	− 390	−19,700	− 3,910	+24,200	+45,900	+ 73,700
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	42,000	+ 750	− 2,480	+ 7,590	+ 5,150	− 5,330	−14,500	− 26,900
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	−6,060	− 110	+ 1,220	+ 2,910	− 7,590	−19,600	−28,000	− 38,300
⑧ Σ									+ 60	− 1,650	− 9,200	− 6,350	− 730	+ 3,400	+ 8,500
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,260	+ 200	− 1,140	− 1,090	− 110	+ 170	+ 160	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	14,000	− 70	+ 480	+ 1,110	+ 750	+ 400	+ 200	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	−2,020	− 50	+ 310	+ 120	− 80	− 80	− 50	0
⑧ Σ									+ 80	− 350	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0

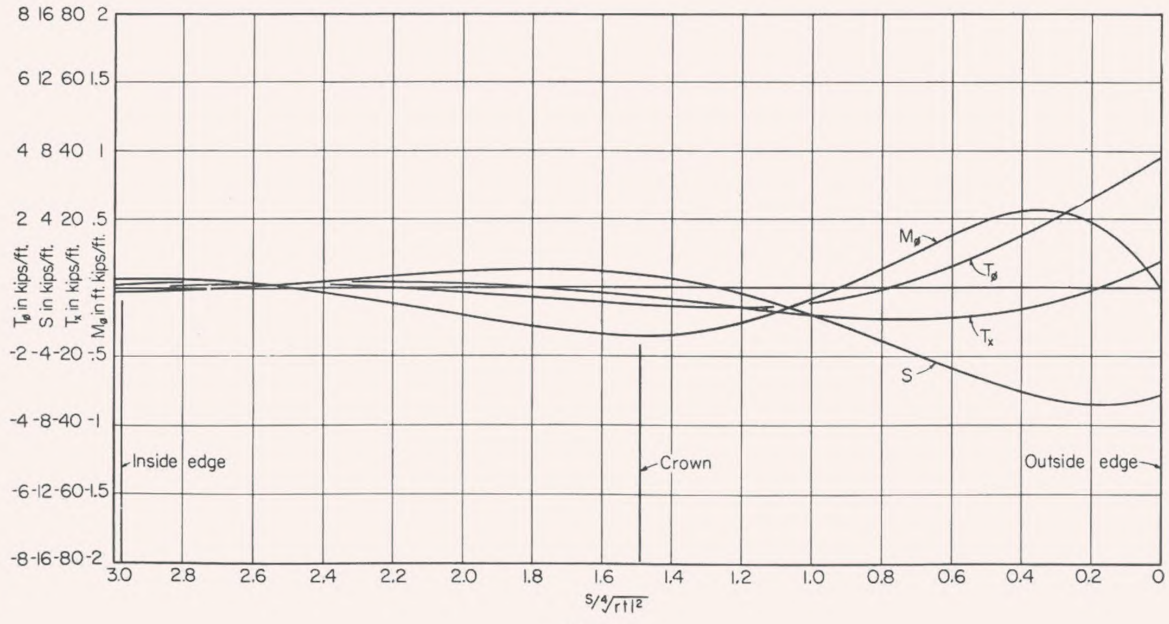


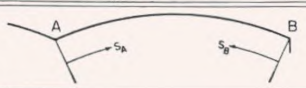
FIG. 17

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

TABLE III—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof



$\frac{s_B}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	2.98	2.88	2.78	2.58	2.18	1.78	1.49 Crown	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1	0
$\frac{s_A}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.49	1.78	2.18	2.58	2.78	2.88	2.98
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 3,940	− 4,000	− 4,090	−4,240	−4,430	− 4,500	− 4,580	− 4,500	− 4,430	−4,240	−4,090	−4,000	−3,940
⑧ Line loads at B	+ 140	+ 150	+ 160	+ 150	0	− 300	− 520	− 610	− 70	+1,540	+2,660	+3,250	+3,800
⑨ Line loads at A	+ 5,760	+ 5,750	+ 5,440	+4,340	+1,580	− 310	− 880	− 750	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨	+ 1,960	+ 1,900	+ 1,510	+ 250	−2,850	− 5,110	− 5,980	− 5,860	− 4,860	−2,650	−1,280	− 560	+ 60
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	+ 1,620	+ 1,550	+ 1,440	+1,220	+ 790	+ 460	0	− 460	− 790	−1,220	−1,440	−1,550	−1,620
⑧ Line loads at B	− 200	− 150	− 50	+ 100	+ 700	+ 1,050	+ 750	− 310	− 3,020	−6,010	−6,670	−6,570	−6,060
⑨ Line loads at A	− 1,620	+ 1,930	+ 4,550	+7,520	+7,210	+ 3,400	+ 900	− 750	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨	− 200	+ 3,330	+ 5,940	+8,840	+8,700	+ 4,910	+ 1,650	− 1,520	− 5,210	−8,030	−8,530	−8,370	−7,680
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 1,020	− 1,080	− 1,110	−1,190	−1,290	− 1,320	− 1,350	− 1,320	− 1,290	−1,190	−1,110	−1,080	−1,020
⑧ Line loads at B	+ 300	+ 800	+ 900	+1,200	+1,500	− 300	− 2,500	− 5,770	− 9,200	−6,350	− 730	+3,400	+8,500
⑨ Line loads at A	+46,700	+35,220	+25,360	+9,440	−8,340	−11,400	− 9,000	− 4,800	+ 200	+1,900	+2,000	+2,000	+1,500
⑩=③+⑧+⑨	+45,980	+34,940	+25,150	+9,450	−8,130	−13,020	−12,850	−11,890	−10,290	−5,640	+ 160	+4,320	+8,980
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)													
⑧ Line loads at B	+ 70	+ 70	+ 60	+ 30	− 120	− 290	− 360	− 270	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0
⑨ Line loads at A	− 2,330	− 1,190	− 320	+ 730	+ 940	+ 290	− 240	− 480	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨	− 2,260	− 1,120	− 260	+ 760	+ 820	0	− 600	− 750	− 250	+ 420	+ 455	+ 325	+ 50

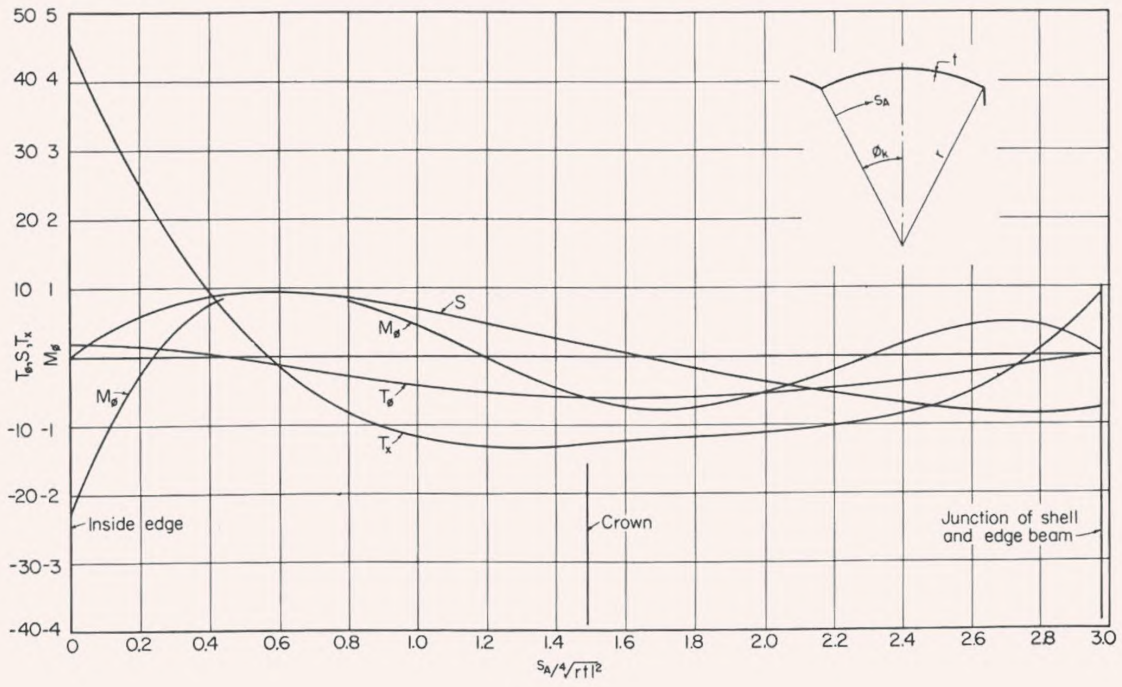


FIG. 18

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

top of Table 3A. The combination of all terms in one formula with the exception of the coefficient indicated by column number constitutes the multiplier. For example, the multipliers of the tangential and shear edge loads for forces T_x, S and T_ϕ are merely T_L and S_L while the multiplier of the radial edge load for these forces is $R_L \times \frac{l}{t}$ $= +280 \times 150 = 42{,}000$ lb. per ft. Multipliers for tangential, radial and shear edge loads for the transverse moment M_ϕ are respectively:

$$T_L \times t = +3800 \times \tfrac{1}{3} = +1260 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$R_L \times l = +280 \times 50 = +14{,}000 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$S_L \times t = -6060 \times \tfrac{1}{3} = -2020 \text{ ft. lb. per ft.}$$

Internal forces produced by line loads acting at the exterior edge are obtained as the products of coefficients and multipliers. These operations are given in rows ④, ⑤ and ⑥ of Table II. Since the curved shell portions of interior and exterior barrels are identical, coefficients in Table II are the same as those listed in Table I. Effects of the various line loads are combined in rows ⑧ of Table II and are plotted in Fig. 17.

Because restraint differs at the two longitudinal edges of the exterior barrel, internal forces are not symmetrical about the crown. Consequently, values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ in Table III are extended from one edge to the other with subscripts A and B designating the edge from which s is measured. The exterior edge is considered the near edge.

As in Table I, rows ③ in Table III represent membrane forces, and values given are taken directly from rows ③ of Table I or computed from Table 1B. Values in rows ⑧, Table III, from $\frac{s_B}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0$ to 0.8 are copied from rows ⑧ of Table II while values from 1.2 to 2.98 are scaled from curves in Fig. 17. Values in rows ⑨ represent effects of line loads at the interior edge and are obtained from rows ⑧ and ⑨ of Table I with the exception of values at $\frac{s_A}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.2$, 1.49 and 1.78 which are scaled from Fig. 10.

Algebraic sums of these individual effects are tabulated in rows ⑩ of Table III and are shown graphically in Fig. 18. Inspection of the curves indicates that the neutral axis is not horizontal but sloped and that shear is not zero at the crown.

Statical Check of Forces in Exterior Barrel

The accuracy of numerical calculations for the exterior barrel is checked in a manner similar to that used for the interior barrel with the provision that internal forces acting in the edge beam must be added to those in the shell. Internal stress at the top, midspan fibers of the edge beam is by equation (13):

$$f \text{ (top)} = -\frac{50}{0.75 \times 2}\left[0.60793 \times \frac{50}{2} \times (315+286) + 1.2732 \times (-7680)\right] = -304{,}500 + 325{,}900 = +21{,}400 \text{ psf.} \quad (16)$$

Equation (16) includes effects of vertical and shear loads. Top and bottom fiber stresses due to the vertical load are equal and opposite. Inspection of formulas (10c) and (10d) of ASCE Manual No. 31 indicates that bottom fiber stress resulting from a shear load acting at the top of the beam is one-half that at the top. Therefore, midspan bottom fiber stress in the edge beam is expressed simply as:

$$f \text{ (bottom)} = +304{,}500 - \frac{325{,}900}{2} = 141{,}500 \text{ psf} \quad (17)$$

The force per foot at top and bottom of beam is:

T_x (top) $= 21{,}400 \times 0.75 = 16{,}000$ lb. per ft.
T_x (bottom) $= 141{,}500 \times 0.75 = 106{,}000$ lb. per ft.

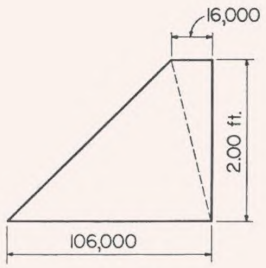


FIG. 19

The assumed straight line variation results in the T_x-force diagram of Fig. 19. Total horizontal force in the beam is $(106{,}000 + 16{,}000)\ 0.5 \times 2 = 122{,}000$ lb. and the moment of this force about the top of the beam is:

$$0.5 \times 2\left[16{,}000 \times \tfrac{2}{3} + 106{,}000 \times \tfrac{4}{3}\right] = 152{,}000 \text{ ft. lb.}$$

The complete summation of horizontal forces including those in the edge beam is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[+45{,}980 + (4)(+11{,}200) + (2)(-6{,}500) + (4)(-12{,}600) + (2)(-12{,}850) + (4)(-11{,}550) + (2)(-10{,}000) + (4)(-5000) + 8980] + 122{,}000$$

from which $\Sigma H = -302{,}000 + 294{,}300 = -7{,}700$ lb.

In theory this summation should equal zero. Here the difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetical sum.

In computing internal moment due to T_x, forces taken at points symmetrical about the crown have equal moment arms and therefore are grouped in parentheses. The resulting expression is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3}[0 + 4\ (11{,}200-5{,}000)\ 2.02 + 2(-6{,}500-10{,}000) \times 3.51 + 4\ (-12{,}600-11{,}550)\ 4.38 + 2(-12{,}850)\ 4.69 + 0]\ -152{,}000$$

from which $\Sigma M = -1{,}204{,}000$ ft. lb.

External moment equals the sum of that already computed for the interior barrel (page 15) and the moment resulting from the weight of the edge beam. Though the

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

edge beam is of uniform cross-section throughout its length, its weight is expressed as a sinusoidal load for reasons discussed on page 8. This is done by multiplying the weight per foot by $\frac{4}{\pi}$ giving 286 lb. per ft. Midspan moment developed by this load is given by equation (3) as:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2} = -286 \times \frac{50^2}{\pi^2} = -72{,}500 \text{ ft. lb.}$$

Total external moment then equals:

$$\Sigma M = -1{,}055{,}000 - 72{,}500 = -1{,}127{,}500 \text{ ft. lb.}$$

The difference between computed internal and external moments is 1,204,000 − 1,127,500 = 76,500. Internal moment is approximately 7 per cent greater than the external.

As previously explained, a percentage difference of this magnitude is not excessive but this discrepancy could be reduced by correcting for the residual T_ϕ edge forces of +140 and +200 lb. per ft. indicated in Table III. Line loads T_L of −140 and −200 lb. per ft. applied at the respective edges would decrease the internal moment. The effect of this correction can be estimated by computing the external moment which the residual forces produce. Edge forces of +140 and +200 lb. per ft. represent an additional downward load of (140+200) 0.4444 = 150 lb. per ft. assumed acting on the shell. The moment created by this load is equal to $\frac{150}{286} \times 72{,}500 = 38{,}000$ ft. lb. If this correction is applied to the internal moment, the corrected value would be −1,204,000 + 38,000 = −1,166,000 ft. lb., which exceeds the external moment by only 3.5 per cent.

A comparison of internal and external shear at the support must include forces within the edge beam which is subjected to its own dead weight and to forces V_b and S_b shown in Fig. 16. It should be noted that although the horizontal shearing force S_b produces vertical shearing stresses at any cross-section, a summation of these stresses equals zero. This is evident from the fact that S_b alone does not create external reactions. Hence, shear in the edge beam at the support is determined from equation (2) as:

$$V = -p\frac{l}{\pi}$$

where p is the sum of V_b and the dead weight of the beam or 315 + 286 = 601 lb. per ft. From this

$$V = -601 \times \frac{50}{\pi} = -9570 \text{ lb.}$$

The complete expression for internal shear is similar to that given on page 16 for the interior barrel. For values of ϕ greater than ϕ_k, sin $(\phi_k - \phi)$ is negative. Shear ordinates which are multiplied by common values of sin $(\phi_k - \phi)$ are combined in parentheses. The expression is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3}[(-7680 + 200)\,0.4444 + 4(-8150 - 8550)\,0.3393 + 2(-5600 - 9000)\,0.2278 + 4(-2500 - 5700)\,0.1161] - 9570 = 72{,}600 \text{ lb.}$$

Reaction at the support is equal to the sum of that previously determined for the interior barrel and that due to the weight of the beam.

$$\Sigma V \text{ (external)} = -66{,}300 - 286 \times \frac{50}{\pi} = -70{,}850 \text{ lb.}$$

The percentage difference of 2.5 per cent can be reduced if the 150 lb. per ft. vertical load due to uncompensated T_ϕ forces is taken into account.

Modification of Internal Forces for Continuity

In preceding discussions force distribution has been obtained in terms of a simply supported barrel although the roof structure in Fig. 4 consists of two equal spans continuous over a center support. This force distribution now must be modified for continuity. As discussed in ASCE Manual No. 31, the effect of continuity on shells and conventional beams is similar since it affects only longitudinal variation of stress. Manual No. 31 points out that while forces in the continuous structure can be obtained by a rigorous satisfaction of boundary conditions, force distribution also may be determined by proportioning on the basis of the ratio of moments in a continuous beam to moment in a simply supported span. The second procedure is used in this design example. In order to evaluate the change in force distribution, the fixed end moment in a beam subject to sinusoidal loading is determined first.

Slopes of tangents at the ends of a simply supported beam carrying a sinusoidal load are given by equation (4) as:

$$\theta = \frac{pl^3}{EI\pi^3}$$

To produce a fixed end condition, end moments must be applied which rotate both ends of the beam through this angle. It is known that an end moment of $\frac{4EI}{l}$ will rotate the near end of a beam through a unit angle when the far end is fixed. Therefore, applying a moment of $\frac{4EI}{l} \times \frac{pl^3}{EI\pi^3}$ at each end and including the carryover moment, final fixed end moment is equal to:

$$M = \frac{pl^3}{EI\pi^3} \times \frac{4EI}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2pl^2}{\pi^3} \qquad (18)$$

If one end of the beam is hinged, moment at the fixed end by moment distribution is:

$$M = \frac{2pl^2}{\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3pl^2}{\pi^3} \qquad (19)$$

Final moment at any point in a beam having one end fixed and the other hinged is found by adding algebraically the simple span moment given by equation (3) and the effect of the end moment indicated by equation (19). These two moments are shown in Fig. 20. After superposition the resulting moment is:

$$M = \frac{3pl^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{pl^2}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{l}$$

Expressed in terms of the midspan moment $-\frac{pl^2}{\pi^2}$ of the

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

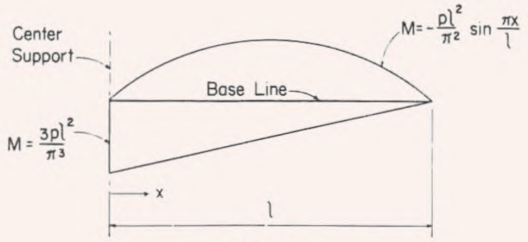


FIG. 20

simply supported span this becomes:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right]$$

Conditions of support for this beam are similar to those in the design example where, due to symmetry of structure and loading, a fixed end exists at the center cross frame with hinged supports at the far ends. A beam bearing such similarity to a shell structure may be used to proportion internal forces for continuity. For example, in a continuous shell of two equal spans l, longitudinal T_x-forces at any section are approximately equal to the midspan T_x-forces in a simply supported shell of span l times the ratio of moment at the same section in a continuous beam of two equal spans to the midspan moment of one simply supported span of the beam. From this, longitudinal force at any section in the continuous shell roof of this example is:

$$T_x \text{ (continuous)} = T_x^*\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right] \quad (20)$$

Shear determined for the simply supported single span shell also is modified by the condition of continuity. Shear due to end restraint is equal to the fixed-end moment divided by span length while that due to the simply supported sinusoidal load is given by equation (2). The complete expression for shear is the sum of these effects or:

$$S = -\frac{3pl}{\pi^3} - \frac{pl}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} \quad (21)$$

Expressed in terms of $-\frac{pl}{\pi}$, the shear at the support of the simple span, shear in the continuous structure is found from:

$$S = -\frac{pl}{\pi}\left[\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}\right] \quad (21a)$$

Modification of transverse moment M_ϕ for continuity is given by formula (236b) of ASCE Manual No. 31 as follows:

$$M_\phi \text{ (continuous)} = M_\phi^*\left\{\sin\frac{\pi x}{l} - 3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]\right\} \quad (22)$$

The effect of end restraint on T_ϕ-forces calculated previously for the simply supported shell is negligible.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

TABLE IV—INTERNAL FORCES IN THE INTERIOR BARREL OF THE CONTINUOUS SHELL ROOF

T_ϕ in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = sin $\frac{\pi x}{l}$				
			0	0.707	0.953	0.707	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−6,300	0	−4,450	−6,000	−4,450	0
16.8	1.2	−5,600	0	−3,960	−5,340	−3,960	0
11.1	0.8	−3,210	0	−2,270	−3,060	−2,270	0
5.6	0.4	+ 150	0	+ 110	+ 140	+ 110	0
2.8	0.2	+1,500	0	+1,060	+1,430	+1,060	0
1.4	0.1	+1,940	0	+1,370	+1,850	+1,370	0
0	0	+2,020	0	+1,430	+1,930	+1,430	0

S in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Forces at supports in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}$				
			+1.304	+1.011	0	−0.403	−0.696
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	0	0	0	0	0	0
16.8	1.2	−4,600	− 6,000	−4,700	0	+1,900	+3,200
11.1	0.8	−9,400	−12,300	−9,500	0	+3,800	+6,600
5.6	0.4	−9,540	−12,500	−9,700	0	+3,900	+6,700
2.8	0.2	−6,410	− 8,400	−6,500	0	+2,600	+4,500
1.4	0.1	−3,730	− 4,900	−3,800	0	+1,500	+2,600
0	0	0	0	0	0	0	0

T_x in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}$				
			−0.955	−0.009	+0.571	+0.468	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−19,400	+18,500	+170	−11,100	− 9,100	0
16.8	1.2	−17,500	+16,700	+160	−10,000	− 8,200	0
11.1	0.8	− 9,430	+ 9,000	+ 80	− 5,400	− 4,400	0
5.6	0.4	+10,150	− 9,700	− 90	+ 5,800	+ 4,800	0
2.8	0.2	+26,250	−25,100	−240	+15,000	+12,300	0
1.4	0.1	+36,140	−34,500	−330	+20,600	+16,900	0
0	0	+47,180	−45,000	−420	+26,900	+22,100	0

M_ϕ in ft. lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l} - 3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]$				
			0	0.192	0.425	0.339	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	− 480	0	− 90	−200	−160	0
16.8	1.2	− 190	0	− 40	− 80	− 60	0
11.1	0.8	+ 550	0	+110	+230	+190	0
5.6	0.4	+ 590	0	+110	+250	+200	0
2.8	0.2	− 355	0	− 70	−150	−120	0
1.4	0.1	−1,175	0	−230	−500	−400	0
0	0	−2,280	0	−440	−970	−770	0

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Table IV deals with evaluation of internal forces in the continuous interior barrel, these forces being symmetrical about the crown. Forces in the exterior barrel would be computed in a similar manner but are not symmetrical about the crown.

Since the longitudinal T_x-force is of considerable importance in determining reinforcement, it is desirable to compute maximum values. For this purpose equation (20) expressing the variation of T_x is differentiated with respect to x and set equal to zero to determine the location of maximum force. The first derivative of equation (20) is:

$$\frac{dT_x}{d_x} = T_x{}^* \left[\frac{3}{\pi} + \pi \cos \frac{\pi x}{l}\right] = 0$$

from which:

$$\cos \frac{\pi x}{l} = -\frac{3}{\pi^2} = -0.3039$$

and:

$$\frac{\pi x}{l} = 107° 42' \text{ or } 1.88 \text{ radians}$$

The negative sign indicates a second quadrant angle. Solving for $\frac{x}{l}$, the location of maximum T_x-force, gives:

$$\frac{x}{l} = \frac{1.88}{\pi} = 0.60$$

The four internal forces are computed at five sections: at supports where $\frac{x}{l} = 0$ and 1.0, and at $\frac{x}{l}$ equal to 0.25, 0.60 and 0.75. At each section forces are determined for the seven points indicated in columns ① and ② of Table IV.

Forces occurring in the simply supported interior barrel are tabulated in columns ③ of Table IV. Values given for T_ϕ, T_x and M_ϕ occur at midspan while those for shear S are at the support. For values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ from 0 through 0.8, these forces are taken directly from rows ⑩ of Table I while at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 1.2 and at the crown forces are scaled from Fig. 12.

Multipliers are listed at the top of each table for various values of $\frac{x}{l}$. For forces M_ϕ, T_x and S these multipliers include corrections for continuity and are equal to the bracketed terms of equations (22), (20) and (21a), respectively. The multiplier for T_ϕ is equal merely to sin $\frac{\pi x}{l}$.

Values in columns ④ through ⑧ are final forces obtained by multiplying forces in columns ③ by appropriate multipliers. For example, force T_x at $\frac{x}{l}$ equal to 0.60 and $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is found by multiplying +10,150 found in column ③ by multiplier +0.571 to give +5,800 lb. per ft. It should be noted that since T_x-forces are maximum at $\frac{x}{l} = 0.6$, the moment they produce at this section is also maximum and, as with an ordinary beam, shear is zero.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

PAGE 22

The horizontal neutral axis falls between values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 0.4 and 0.8 and is approximately 3 ft. above the lower edge of the shell.

Shell Reinforcement

Design of reinforcement for the interior barrel is based on final forces summarized in Table IV. In general, shell reinforcement is provided for three force conditions: tensile T_x-forces are resisted by horizontal steel; moment M_ϕ combined with the direct force T_ϕ is resisted by transverse reinforcement while shearing forces S are resisted primarily by diagonal reinforcement.

A major question arising in the design of shells is whether the stress assigned to the steel shall vary according to n times the computed concrete stress or whether an arbitrarily designated value of f_s such as 20,000 psi can be assumed disregarding concrete stress. Shell analysis has been based on the assumption of homogeneity of material. In other words, strains in the structure are proportional to induced concrete stresses. To be consistent, steel stresses should be based on steel strains that are equal to concrete strains. This condition requires the use of a constant percentage of steel throughout the tensile zone.

The same problem exists in detailing indeterminate structures such as rigid frames and arches. In this case it is customary to analyze the structure on the basis of the constant elastic property of the members and then determine required steel area on the assumption that reinforcement is stressed to an allowable design value. This same practice will be followed in shell design.

There are several methods of proportioning horizontal or longitudinal reinforcing steel. One method is to divide the external moment by the product of the allowable steel stress and the distance between centroids of reinforcement and compressive T_x-forces. A minimum amount of reinforcement is provided by this method since the bars generally are concentrated as far from the neutral axis as possible.

According to the method proposed in ASCE Manual No. 31, longitudinal steel stresses vary linearly from a maximum at the edge of the shell to zero at the neutral axis. Tensile reinforcement is distributed over the entire tension zone.

A third procedure is suggested in which the required steel area at any point is given by T_x at that point divided by a constant allowable stress. For example, from Table IV at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$ with $T_x = +26{,}900$ lb. per ft.,



FIG. 21

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

required reinforcement is:

$$A_s = \frac{26{,}900}{20{,}000} = 1.4 \text{ sq. in. per ft.}$$

Five #5 bars providing an area of 1.55 sq. in. are placed as shown in Fig. 21 within the first foot at either side of the valley formed by the junction of adjacent barrels. At $s = 1.4$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, a required steel area of $\frac{20{,}600}{20{,}000} =$ 1.03 sq. in. per ft. is supplied by #5 bars spaced at 3½ in., this spacing being continued to $s = 2.8$ ft. The procedure is repeated up to the neutral axis. In the compression zone reinforcement is theoretically unnecessary but minimum reinforcement equal to approximately 0.4 per cent is provided either by welded wire fabric or small diameter bars spaced at about 1-ft. intervals.

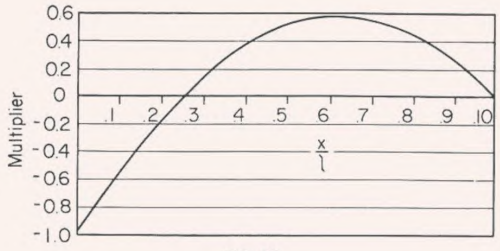


FIG. 22

Cut-off points for longitudinal bars are determined by means of Fig. 22, which shows a curve representing the multiplier in Table IV: $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sin\frac{\pi x}{l}$. For illustration note in Fig. 22 that multipliers are -0.955 at $\frac{x}{l} = 0$ and $+0.571$ at $\frac{x}{l} = 0.6$. The use of this curve is illustrated by determining cut-off points for one of the five longitudinal #5 bars provided at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$. Four #5 bars resist a tensile force of $4 \times 0.31 \times 20{,}000 = 24{,}800$ lb. per ft. To obtain a force of 24,800 lb. per ft., the midspan T_x-force of 47,180 lb. per ft. in the simply supported shell must be multiplied by the factor:

$$\frac{24{,}800}{47{,}180} = 0.526$$

In Fig. 22 the multiplier 0.526 occurs at $\frac{x}{l}$ equal to 0.52 and 0.67, these being the points at which four #5 bars are sufficient. This illustration applies to all horizontal reinforcement.

Transverse reinforcement is computed for moment M_ϕ and direct force T_ϕ. The procedure is similar to that used for ordinary reinforced concrete beams subjected to combined stresses. In this example design is based on a rectangular section 12 in. wide and 4 in. deep except at the junction of adjacent barrels where depth is increased to provide a smooth transition from one barrel to the other.

Consider selecting transverse reinforcement at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, where $M_\phi = -0.97$ ft. kips per ft. producing tension at the top surface and $T_\phi = 1.93$ kips per ft. in tension. A total depth of 8 in. is scaled from Fig. 21 and effective depth is taken as 7 in. Steel area is 0.15 sq. in. per ft. as determined according to Example 8 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*.* For an allowable concrete stress of 1350 psi., compression reinforcement is not required. As shown in Fig. 21, transverse reinforcement at this location is placed near the top of the shell and is continuous from one barrel to the next. Transverse reinforcement required throughout the interior barrel is nominal in amount and may be evenly spaced as shown in Fig. 23.

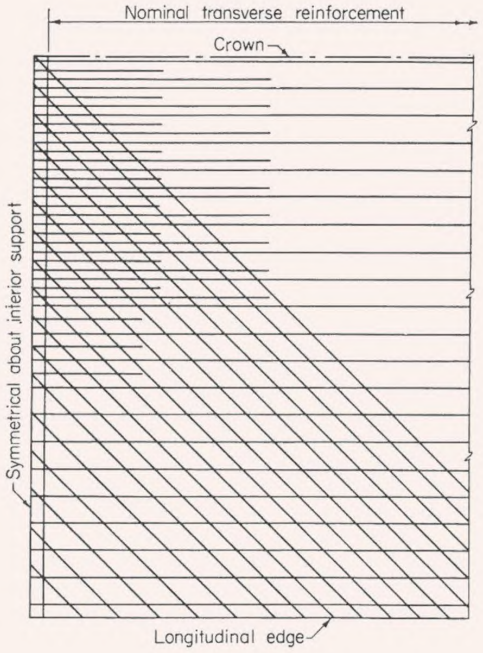


FIG. 23

Diagonal reinforcement shown in Fig. 23 may be designed by several methods. Reinforcement may be provided on the basis of principal stresses computed at various points. Such an approach implies the placement of bars parallel to stress trajectories.

In this example diagonal reinforcement is designed as for conventional reinforced concrete beams and is provided to resist shear in excess of $0.3 f'_c$. For example, from Table IV at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.25$, $S = -9700$ lb. per ft.

*Published by the American Concrete Institute, Detroit, Mich.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

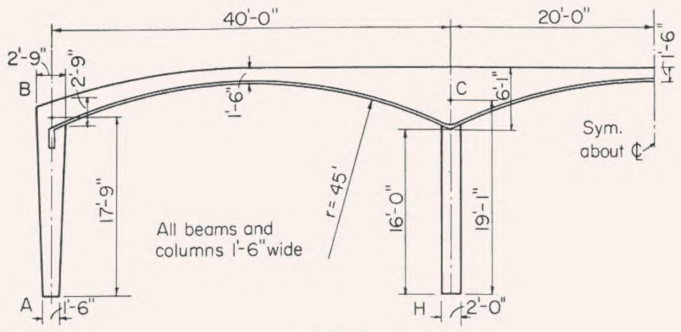


FIG. 24

Assuming 3000-lb. concrete, required diagonal steel is:

$$A_s = (9700 - 90 \times 4 \times 12) \div 20{,}000$$
$$= (9700 - 4300) \div 20{,}000 = 0.27 \text{ sq. in. per ft.}$$

Critical shear stress which determines spacing of diagonal bars does not necessarily occur at the supports and it may be desirable to compute shear at intermediate points.

Longitudinal and transverse reinforcement also may be used to resist diagonal tension if these bars are only lightly stressed by their primary loads. However, horizontal and vertical bars make an angle of 45° with the axis of diagonal tension and, as pointed out by formula (6d) of ASCE Manual No. 31, their effectiveness in the 45° direction is only one-half its normal value.

Shear is investigated at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.125$ to illustrate the distribution of diagonal tension over reinforcement extending in more than one direction. Since Table IV gives no values at $\frac{x}{l} = 0.125$, shear at this point must be computed. Substituting in the expression for the shear multiplier $\frac{3}{\pi^2} + \cos\frac{\pi x}{l}$ gives $+1.228$ which, when multiplied by -9540, the support shear in the simply supported barrel at $s = 5.6$, gives a total shear of $-11{,}700$ lb. per ft. This value then is reduced by 4300 lb. per ft., the previously determined allowable shear strength of the concrete, leaving 7400 lb. per ft. to be resisted by reinforcement. Required steel area is $\frac{7400}{20{,}000}$ or 0.37 sq. in. per ft.

Inspection of Table IV indicates that T_x-forces at $s = 5.6$ are compressive from the support to $\frac{x}{l} = 0.25$. Therefore, longitudinal steel at $\frac{x}{l} = 0.125$ carries no tensile stress and may be used to resist some diagonal tension. Effective area of these #5 bars spaced at 12 in. is reduced from 0.31 to 0.15 sq. in. per ft. because of the 45° displacement. Diagonal reinforcement is then supplied for 0.37 less 0.15 or 0.22 sq. in. per ft. Similar advantage can be taken of transverse steel when the stress produced by T_ϕ and M_ϕ is small.

Although not discussed here, design of reinforcement for the exterior barrel follows a procedure similar to that outlined for the interior barrel. The total tensile longitudinal force at midspan in the edge beam is found on page 21 to be 122,000 lb. To determine the companion force in the continuous structure at $\frac{x}{l} = 0.6$, this value is multiplied by the multiplier 0.571 in Table IV giving a final tensile force of 69,600 lb. The required steel area of 3.48 sq. in. should be located with its center of gravity at or below the center of gravity of the 122,000 lb. longitudinal force.

Frame Design

The analysis of any frame supporting a shell is similar to the analysis of a continuous bent supporting a conventional slab except that the shell induces a direct force in the frame. As explained in ASCE Manual No. 31, frames are designed for their own dead weight plus live and dead loads on the shell.

The 18-in. wide frame shown in Fig. 24 is selected to illustrate steps involved in the analysis of a frame. The choice of this shape with the shell at the bottom edge does not imply that this is the best or only solution. Under certain circumstances it may be desirable to have the shell at the top of the frame with the soffit straight. Also, economic considerations may favor the use of an arch following the curve of the shell.

The frame in Fig. 24 is the center frame of the roof unit shown in Fig. 4. It is symmetrical about the centerline of the interior bay and has a depth varying from 33 in. at the inner face of the exterior column to 18 in. at midspan. Depth at interior columns is 73 in. with the top surface of the frame horizontal between centerlines of exterior bays. Although depth at midspan may seem excessively shallow, it is shown subsequently that in this area the frame carries a large axial tensile force.

ASCE Manual No. 31 points out that the shell acts as a flange of the frame, the effective flange overhang at either side of a supporting rib in a shell roof continuous over its supports being $0.76\sqrt{rt}$. The overhang in this example is $0.76\sqrt{45 \times 0.33} = 2.94$ ft. Total overall flange width is $2 \times 2.94 + 1.50 = 7.38$ ft. In the analysis, cross sections are assumed T-shaped.

Frame analysis for loads is made by moment distribution with carry-over factors, distribution factors and fixed-end moments for horizontal members determined on the basis of parabolic haunches. (The use of parabolic haunches to approximate the circular curve of the soffit is considered sufficiently accurate.) These factors are extrapolated from values given in the *Handbook of Frame Constants.** It should be recognized that the use of these constants involves a slight inaccuracy since a horizontal centroidal axis is assumed while in reality this axis is curved. However, the effect of curvatures as large as

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

those encountered in this example may be neglected since the small error introduced is conservative.

To avoid lengthy computations in determining the moment of inertia I of the T-section, use is made of Fig. 5 in *Continuity in Concrete Building Frames** which gives I of a T-section as the I of its web times a coefficient C. This coefficient is a function of A, the ratio of flange to web widths and B, the ratio of flange to web depths. At interior columns these are:

$$A = \frac{7.38}{1.50} = 4.9$$

$$B = \frac{0.33}{6.10} = 0.054$$

From Fig. 5, $C = 1.50$. At midspan of each bay A has the same value but $B = \frac{0.33}{1.50} = 0.220$ and hence $C = 1.85$.

At exterior columns $C = 1.70$ since $B = \frac{0.33}{2.75} = 0.120$.

Constants in the *Handbook* are for rectangular sections and are given in terms of the ratio of centerline to haunch depths. Therefore, the I of the T-section must be expressed in terms of the depth of a rectangular section possessing the same moment of inertia as the T. Since $I = CI_{web}$, this equivalent depth is $d\sqrt[3]{C}$. Hence equivalent depths are:

at B $\quad h_B = 2.75\ \sqrt[3]{1.70} = 3.27$ ft.
at midspan $\quad h_{\mathfrak{L}} = 1.50\ \sqrt[3]{1.85} = 1.85$ ft.
at C $\quad h_C = 6.10\ \sqrt[3]{1.50} = 7.06$ ft.

The various coefficients are tabulated in Table V for the exterior bay with:

$$r_B = \frac{3.27 - 1.85}{1.85} = 0.77$$

$$r_C = \frac{7.06 - 1.85}{1.85} = 2.81$$

and for the interior bay having:

$$r_C = r_D = 2.81$$

Carry-over and stiffness factors for the exterior column, assumed to have a straight haunch, are taken from Table 52 of the *Handbook* for $r_B = \frac{2.75 - 1.50}{1.50} = 0.833$:

$$C_{AB} = -0.78$$
$$C_{BA} = -0.32$$
$$k_{BA} = 16.20$$

Assuming columns to be hinged at the base, stiffnesses of members at various points are:

$$K_{BA} = \frac{16.20 \times 1.5^3\ (1 - 0.78 \times 0.32)}{17.75} = 2.31$$

$$K_{BC} = \frac{13.20 \times 1.85^3}{40} = 2.09$$

$$K_{CB} = \frac{21.7 \times 1.85^3}{40} = 3.43$$

$$K_{CH} = \frac{4 \times 2^3\ (1 - 0.5^2)}{19.1} = 1.26$$

$$K_{CD} = \frac{32.3 \times 1.85^3}{40} = 5.11$$

Distribution factors are therefore:

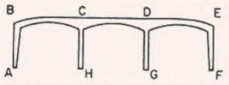
$$d_{BC} = \frac{2.09}{2.31 + 2.09} = 0.48$$

$$d_{CB} = \frac{3.43}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.35$$

$$d_{CD} = \frac{5.11}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.52$$

These values are tabulated in Table V to simplify the computations.

TABLE V—Moment Distribution For Dead and Live Loads



	B	C		D
Carry-over factor	− 0.95	− 0.58	− 0.82	− 0.82
Stiffness factor	13.2	21.7	32.3	32.3
M^F Uniform	− 0.0730	− 0.1470	− 0.1130	− 0.1130
M^F Right haunch	− 0.0012	− 0.0190	− 0.0018	− 0.0184
M^F Left haunch	− 0.0147	− 0.0050	− 0.0184	− 0.0018
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−629	−1280	−993	−993
1st Distribution	+302	+ 100	−149	−149
Carry over	− 58	− 287	+122	+122
2nd Distribution	+ 28	+ 143	−213	−213
Carry over	− 83	− 27	+175	+175
3rd Distribution	+ 40	+ 71	−105	−105
Carry over	− 41	− 38	+ 86	+ 86
4th Distribution	+ 20	+ 43	− 65	− 65
End moment	−421	−1275	−1142	−1142

The load on the frame consists of its own weight and the shell reactions. As discussed in Manual No. 31, the effect of these reactions can be simulated by applying the shell load on the frame. Since the rise is small, dead weight of the shell can be assumed to be uniform in the transverse as well as the longitudinal direction. Uniform load carried by the center frame is:

Dead wt. of shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.050 = 3.1$ kips per ft.
Live load on shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.030 = 1.9$ kips per ft.
Partial wt. of frame: $1.5 \times 1.17 \times 0.150 = 0.3$ kips per ft.
Total uniform load $= \overline{5.3}$ kips per ft.

The value 0.625×50 gives the position of zero shear on either side of the center support in a uniformly loaded continuous beam of two 50-ft. spans. The load on this portion of each shell span is carried by the center frame. Haunch loads are:

at B: $\quad 1.5\ (2.75 - 1.5) \times 0.150 = 0.28$ kips per ft.
at C: $\quad 1.5\ (6.10 - 1.5) \times 0.150 = 1.04$ kips per ft.

Utilizing coefficients in Table V, the fixed-end moments are:

$$M^F_{BC} = -(5.3 \times 0.073 + 0.28 \times 0.0147 + 1.04 \times 0.0012)\ 40^2 = -629 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CB} = -(5.3 \times 0.147 + 0.28 \times 0.0050 + 1.04 \times 0.0190)\ 40^2 = -1280 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CD} = -[5.3 \times 0.1130 + 1.04\ (0.0184 + 0.0018)]\ 40^2 = -993 \text{ ft. kips}$$

Final moments as determined by moment distribution are tabulated in the last row of Table V.

In addition to these moments, there is induced in the frame a horizontal tensile force T which equals the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero shear as shown in Fig. 26. This force results from the satisfaction of internal equilibrium re-

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

quirements and should not be confused with thrust created by foundation restraint

To prove the existence of the force T, reference is made to Figs. 25 and 26. Internal forces in the typical rigid frame of Fig. 25(a) are equal to the sum of those present when the frame is made statically determinate by rollers at A' and those due to the final horizontal reaction $H_{A'}$. In the statically determinate condition there are no external horizontal reactions and as a result no thrust exists in member $B'C'$. However, in the indeterminate condition a thrust is induced in $B'C'$ equal to $H_{A'}$.

In a similar manner the frame of Fig. 25(b), assumed to support a thin shell roof, has no horizontal reaction at A when in the statically determinate state. However, an examination of part of the frame as the free body shown in Fig. 26 indicates that resistance must be given to the horizontal components of the T_ϕ-forces. Since there is no horizontal reaction, this resistance is supplied by the frame itself in the form of the internal force T acting in the same plane as the T_ϕ-forces. Since any indeterminate structure can be analyzed by first considering it to be statically determinate, it follows that all cross frames are subject to an internal force equal and opposite to the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces. This force, of course, is superimposed on the thrust produced by the external reactions in the final indeterminate condition.

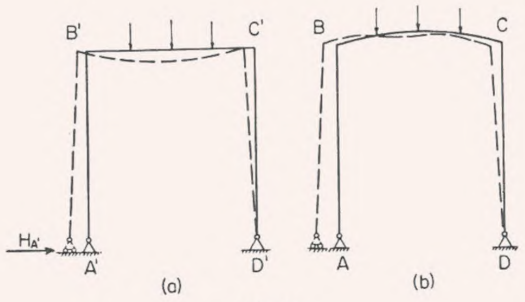


FIG. 25

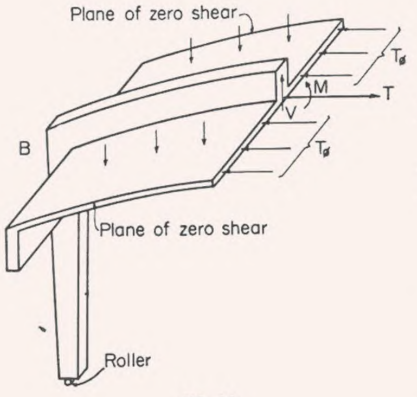


FIG. 26

When the force T acts with an eccentricity e from the centroidal axis of a member, a moment Te is produced in addition to the moment calculated for external loads. If the member is statically indeterminate the angular rotation caused by moment Te produces external reactions.

Computations for fixed-end moments in member BC resulting from the moment Te are tabulated in Table VI. The procedure is based on the method of elastic weights explained in *Analysis of Arches, Rigid Frames and Sewer Sections.** In Table VI, slide rule accuracy is sufficient since end moments produced by the T-force are small when compared with total moments. For practical purposes, fixed-end moments can be taken as being equal to the value of Te at midspan since at this point Te is relatively large and the member BC most flexible. Generally, fixed-end moments due to Te can be approximated in this manner. Table VI is included here only for completeness and as evidence of the validity of this suggested approximation. In the case of an arch rib having constant moment of inertia, fixed-end moments would be equal to the average value of the moment Te. The advisability of estimating fixed-end moments in this manner will depend upon the ratio of Te to the moment due to loads.

In Table VI depths h, Col. (1), of the frame at distances x, Col. (3), from point B are scaled from a drawing having a scale of approximately 1 in. = 3 ft. Col. (2) contains values of coefficient C interpolated linearly in proportion to the x distance from the centerline between 1.70 at B and 1.85 at centerline of span BC and between 1.85 and 1.50 at C. This coefficient when multiplied by I of the rectangular web gives the moment of inertia of the T-section. Instead of the absolute value of a, which is taken as $\frac{ds}{EI}$, Col. (4) gives relative values of $\frac{1}{Ch^3}$. Since ds is equal to zero at B, ℄ and C, no values are listed at these points.

Eccentricity e of the force T with respect to the centroidal axis is listed in Col. (7). With a frame width of 1.50 ft., overhanging flange width of 2.94 ft. and shell thickness of 0.33 ft., the distance y from bottom surface

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

TABLE VI—Determination of Fixed-End Moments Due to Moment Te in Exterior Bay

	h	C	x	$a=\frac{1}{Ch^3}$	ax	ax^2	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$	ma	max
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
B	2.75	1.70	0	—	—	—	0.82	—	0.90	—	—	—	—
1	2.5	1.71	2.0	0.037	0.07	0.2	0.71	−0.9	0.92	− 35	+ 25	+ 0.9	+ 2
2	2.1	1.74	6.0	0.062	0.37	2.2	0.55	−3.0	0.95	−120	+ 66	+ 4.1	+ 24
3	1.8	1.77	10.0	0.097	0.97	9.7	0.43	−4.6	0.98	−189	+ 81	+ 7.9	+ 79
4	1.6	1.80	14.0	0.136	1.90	26.7	0.35	−5.6	0.99	−233	+ 82	+11.1	+156
5	1.5	1.83	18.0	0.162	2.92	52.5	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	+12.6	+228
℄	1.50	1.85	20.0	—	—	—	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	—	—
6	1.5	1.81	22.0	0.164	3.61	79.4	0.31	−5.7	1.0	−239	+ 74	+12.1	+267
7	1.9	1.74	26.0	0.084	2.18	56.8	0.47	−4.4	0.99	−183	+ 86	+ 7.2	+187
8	2.6	1.67	30.0	0.034	1.02	30.6	0.76	−2.4	0.98	− 99	+ 75	+ 2.5	+ 77
9	3.8	1.60	34.0	0.011	0.37	12.7	1.29	−0.1	0.95	+ 4	− 5	− 0.1	− 2
10	5.3	1.53	38.0	0.004	0.15	5.7	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132	− 0.5	− 20
C	6.1	1.50	40.0	—	—	—	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181	—	—
			Σ	0.791	13.56	276.5						57.8	998

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

to centroidal axis is:

$$y = \frac{0.75h^2 + 2(2.94\times0.33\times0.167)}{1.5h + 2\times2.94\times0.33} = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h+1.94}$$

Since T is assumed to act at mid-depth of the flange:

$$e = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h+1.94} - 0.17$$

Values of T_ϕ in Col. (8) are scaled from Fig. 18. Total tension T is equal to the summation of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero tangential shear previously found to be at $\frac{x}{l} = 0.6$. Integrating T_ϕ on both sides of the frame gives:

$$T = 2T_\phi \cos(\phi_k-\phi)\int_0^{30} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{131}{\pi} T_\phi \cos(\phi_k-\phi) = 42\,T_\phi\cos(\phi_k-\phi)$$

Moment produced by this tensile force is equal to the product of T and $-e$ and is tabulated in Col. (11). Values in Cols. (12) and (13) are the products of those in Col. (11) and Cols. (4) and (5) respectively. The summation of these columns times $\frac{12\,ds}{E}$ represents the angular rotation and vertical displacement of joint B with respect to joint C, assuming that the member is free at B and fixed at C. Applying a moment M^F_{BC} and a vertical reaction V_B and setting angular rotation and vertical displacement at B equal to zero gives respectively:

$$0.791\,M^F_{BC} + 13.56\,V_B + 57.8 = 0$$
$$13.56\,M^F_{BC} + 276.5\,V_B + 998 = 0$$

The solution of these simultaneous equations gives:

$$M^F_{BC} = -70 \text{ ft. kips}$$
$$V_B = -0.17 \text{ kips}$$

and by statics:

$$M^F_{CB} = -70-(40\times0.17) = -77 \text{ ft. kips}$$

As stated earlier, an approximate value of -74 ft. kips, the midspan moment, could have been used. Therefore, for the interior bay fixed-end moments are taken as -82 ft. kips, the value of midspan moment given in Table VII. Thrust, eccentricity and moment of the force T at various points between joint C and the centerline of span CD are tabulated in Table VII. Eccentricity is taken directly from Table VI while values of T_ϕ are scaled from Fig. 12.

End moments resulting from the T-forces are computed by moment distribution as shown in Table VIII. Total moments equal to the sum of end moments due to vertical loads and T-forces are likewise included in Table VIII.

TABLE VII—T-FORCE IN INTERIOR BAY

x	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181
2	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132
6	1.29	−0.3	0.95	− 12	+ 16
10	0.76	−2.8	0.98	−115	+ 87
14	0.47	−4.9	0.99	−204	+ 96
18	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78
20	0.31	−6.3	1.0	−265	+ 82

TABLE VIII—MOMENT DISTRIBUTION DUE TO ECCENTRICITY OF T_ϕ-FORCES

	B	C		D
Carry-over factor	−0.95	−0.58	−0.82	−0.82
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−70	−77	−82	−82
1st Distribution	+34	—	—	—
Carry over	—	−32	—	—
2nd Distribution		+11	−17	−17
End moment	− 36	− 98	− 99	− 99
End moment—Table V	−421	−1275	−1142	−1142
Total moment	−457	−1373	−1241	−1241

With end moments determined, moment at any other point in the frame is found by statics. For example, moment at midspan of the interior bay is:

$$M = -1241 + (5.3\times0.125 + 1.04\times0.0208)40^2 + 82$$
$$= -64 \text{ ft. kips}$$

in which 0.0208 is the simple beam centerline moment coefficient for parabolic haunch loads. In the above expression the moment +82 ft. kips due to the eccentric T-force is included. Because the distance center to center of columns is used, midspan moment should be modified to take into account the width of columns. Vertical reactions at columns CH and DG are equal to $\left(5.3 + \frac{1.04}{3}\right) \times 20 = 113$ kips. In accordance with recommendations in Section 13 of *Continuity in Concrete Building Frames* the modified moment is:

$$M = -64 - \frac{113\times2}{6} = -102 \text{ ft. kips}$$

Tensile thrust at the section is:

$$N = -265 + \frac{457}{17.8} + \frac{1373-1241}{19.1} = -232 \text{ kips}$$

Because of this large thrust, tension can be assumed to exist over the entire cross section and total required steel area is:

$$\frac{232{,}000}{20{,}000} = 11.6 \text{ sq.in.}$$

This total area is apportioned between top and bottom bars by making the centroid of reinforcement coincide with the line of action of thrust. Distance from bottom of the beam to lower reinforcement is assumed to be 1¼ in. or 0.10 ft. and to top reinforcement 1.22 ft. As shown in Fig. 27, eccentricity of thrust N measured from the centroid of bottom reinforcement is:

$$0.31 + 0.17 - 0.10 + \frac{102}{232} = 0.82 \text{ ft.}$$

Top reinforcement A^t_s is determined by taking moments of internal forces about the bottom layer:

$$0.82\,N = A^t_s \times 1.12 \times 20{,}000$$

from which:

$$A^t_s = \frac{11.6\times0.82}{1.12} = 8.5 \text{ sq.in.}$$
$$A^b_s = 11.6 - 8.5 = 3.1 \text{ sq.in.}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

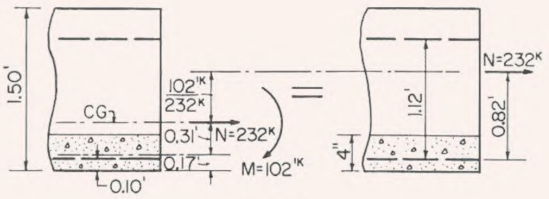


FIG. 27

In the exterior bay, vertical reaction at the face of column *CH* is:

$$V_C = \left(5.3+1.04\times\frac{7}{24}+0.28\times\frac{1}{24}\right)20+\frac{1373-457}{40}$$
$$= 112+23 = 135 \text{ kips}$$

In the above expression, reactions of the haunch loads of member *BC* are equal to $\frac{7}{24}$ and $\frac{1}{24}$ of $W\times\frac{l}{2}$. Taking into account the *T*-force and the reduction because of the use of the clear span, moment at the column face is:

$$M = -1373-157+\frac{135\times 2}{3} = -1440 \text{ ft. kips}$$

Interpolating for the value of T at $x = 39$ ft., thrust at the section is:

$$N = 71+26 = 97 \text{ kips}$$

Reinforcement is determined for this moment and thrust as illustrated in Example 7 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*. At midspan of exterior bay:

$$M = -(1373+457)0.5+[5.3\times 0.125 + 0.0104(1.04+0.28)]40^2+78-\frac{135\times 2}{6}$$
$$= +200 \text{ ft. kips}$$
$$N = -252+26 = -226 \text{ kips}$$

Example 8 of the *Handbook* may be followed for design of reinforcement. The small amount of compression reinforcement required at midspan can be supplied by extending a few bars from the top negative reinforcement. It is desirable to have some of these bars continuous in any case since a large tensile force exists throughout most of the frame.

Moment and thrust at joint *B* are obtained in a conventional manner since *T* is zero at this point.

As pointed out in ASCE Manual No. 31, strains in a frame over which a shell is continuous induce a longitudinal moment M_x at the junction of shell and frame equal to:

$$M_x = -\frac{t^2}{3.56}f_c \qquad (23)$$

in which f_c is the stress in the frame considered to be a homogeneous section. For example, at midspan of the interior bay:

$h = 18$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.85$
$b-b' = 2.94\times 2\times 12 = 70.6$ in.
$M = -102$ ft. kips
$N = -232$ kips

The distance y_b from centroid of section to middle of shell equals 0.31 ft. or 3.7 in. Therefore:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{18^4\times 1.85}{12\times(-3.7)} = -4380 \text{ in.}^3$$
$$A = 18^2+4\times 70.6 = 606 \text{ in.}^2$$

and at mid-depth of the shell:

$$f_c = -\left(\frac{-102\times 12000}{-4380}-\frac{232\times 1000}{606}\right)$$
$$= +103 \text{ psi (tension)}$$

From equation (23):

$$M_x = -\frac{4^2\times 103}{3.56} = -460 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At the face of column *CH* with:

$h = 68$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.50$
$b-b' = 70.6$ in.
$y_b = 2.17$ ft. or 26.0 in.
$M = -1440$ ft. kips
$N = +97$ kips

then:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{68^3\times 18\times 1.50}{12\times(-26.0)} = -27{,}200 \text{ in.}^3$$
$$A = 68\times 18+70.6\times 4 = 1506 \text{ in.}^2$$
$$f_c = -\left(\frac{-1440\times 12000}{-27{,}200}+\frac{97\times 1000}{1506}\right)$$
$$= -700 \text{ psi}$$

and:

$$M_x = -\frac{4^2\times(-700)}{3.56} = +3{,}100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At crown of exterior bay:

$$\frac{I}{y_b} = -4{,}380 \text{ in.}^3$$
$A = 606$ in.^{2}
$M = +200$ ft. kips
$N = -226$ kips

Therefore:

$$f_c = -\left(\frac{200\times 12000}{-4380}-\frac{226\times 1000}{606}\right)$$
$$= +921 \text{ psi}$$

from which:

$$M_x = -\frac{4^2\times 921}{3.56} = -4100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

M_x is computed in a similar manner at other points.

M_x is a local moment and decreases rapidly. At a distance of $\frac{2.94}{2}$ ft. or about 1.5 ft. from the junction of shell and frame its value is reduced by 76 per cent and practically diminishes to zero at 4 ft. As a result, only short bars are needed to handle the induced stresses. In providing the required steel area it may be advantageous in some cases to utilize previously provided longitudinal reinforcement if it is not already stressed to its maximum value. Relatively large values of M_x at the crown of the exterior bay and at the face of interior columns indicate that the shell should be thickened to about 6 in. at the frame, tapering to 4 in. within a distance of 3 ft.

Portland Cement Association · 33 West Grand Avenue, Chicago, Illinois 60610

Printed in U.S.A.

R/C 30

ST 77

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Apêndice G

Data Set da Ponte de Alamillo

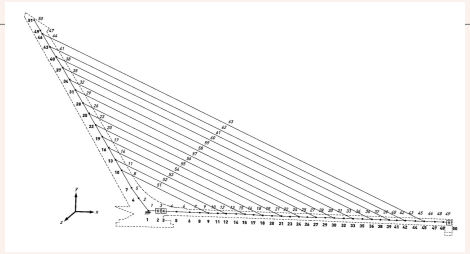
Abstract

Pollalis, 1999 publicou um excelente livro detalhando a construção da ponte Alamillo por Calatrava (§15.6.1.3). Nele o autor publicou o conjunto de dados necessários para uma análise elemento finito da ponte, mais especificamente: Coordenadas nodais, conectividade de elementos e propriedades, condições de contorno, e carregamento.

Estes são reproduzidos aqui para o leitor que gostaria de modelar a ponte com um código simples escrito (como o listado em §I.2.7).

A lista das condições de carga (Tabela) G.4) é também de particular interesse, pois o leitor pode não estar plenamente ciente dos vários tipos de cargas que uma estrutura deve resistir.





CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela G.1: As coordenadas nodais de Alamillo (Pollalis, 1999)

#	X	y	z	Nó	x	y	z
1	1.00	13.50	0.00	27	113.60	12.12	0.00
2	7.61	13.30	0.00	28	-44.95	84.33	0.00
3	11.65	13.18	0.00	29	119.57	12.06	0.00
4	-5.58	21.57	0.00	30	125.54	12.00	0.00
5	19.72	12.94	0.00	31	-49.47	91.73	0.00
6	28.43	12.68	0.00	32	131.53	11.93	0.00
7	-10.28	28.29	0.00	33	137.52	11.87	0.00
8	35.64	12.50	0.00	34	-54.00	99.12	0.00
9	42.85	12.32	0.00	35	143.49	11.80	0.00
10	-17.55	39.82	0.00	36	149.45	11.74	0.00
11	48.99	12.20	0.00	37	-58.52	106.52	0.00
12	55.15	12.09	0.00	38	155.41	11.68	0.00
13	-22.10	47.23	0.00	39	161.37	11.62	0.00
14	60.86	12.15	0.00	40	-63.04	113.92	0.00
15	66.58	12.22	0.00	41	167.33	11.56	0.00
16	-26.65	54.65	0.00	42	173.30	11.49	0.00
17	72.21	12.33	0.00	43	-67.56	121.32	0.00
18	77.83	12.43	0.00	44	179.30	11.43	0.00
19	-31.19	62.04	0.00	45	185.31	11.36	0.00
20	83.79	12.38	0.00	46	-72.10	128.76	0.00
21	89.75	12.33	0.00	47	191.70	11.29	0.00
22	-35.75	69.46	0.00	48	197.70	11.23	0.00
23	95.71	12.28	0.00	49	-73.43	130.94	0.00
24	101.67	12.22	0.00	50	201.00	11.20	0.00
25	-40.34	76.89	0.00	51	-78.21	138.75	0.00
26	107.64	12.17	0.00				

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela G.2: Propriedades dos membros de Alamillo (Pollalis, 1999)

#	i	j	A mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4	#	i	j	A mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4
Pylon							Deck						
2	1	4	86.06	1048.40	524.44	721.30	1	1	2	82.24	672.00	946.30	92.90
5	4	7	68.33	625.90	423.43	424.70	3	2	3	60.99	327.80	724.50	92.90
8	7	10	62.90	512.70	374.38	321.83	4	3	5	40.30	95.92	572.90	92.90
11	10	13	56.80	428.90	354.31	293.87	6	5	6	33.29	61.03	449.80	89.93
14	13	16	54.15	393.20	334.82	267.32	7	6	8	33.37	68.44	371.83	69.83
17	16	19	51.71	361.73	315.92	242.20	9	8	9	26.22	61.60	304.29	49.74
20	19	22	48.95	327.90	297.58	218.45	10	9	11	17.02	41.47	248.56	39.64
23	22	25	46.57	300.05	279.78	196.11	12	11	12	14.22	33.91	233.18	34.90
26	25	28	53.29	278.64	268.43	175.12	13	12	14	12.84	31.61	232.17	32.50
29	28	31	50.96	253.40	257.61	155.49	15	14	15	11.70	29.69	220.82	31.60
32	31	34	48.65	229.90	241.41	137.19	16	15	17	10.70	26.91	219.00	31.60
35	34	37	46.04	205.01	225.72	120.20	18	17	18	9.46	21.67	217.51	31.60
38	37	40	43.78	184.90	210.54	104.51	19	18	20	9.46	21.67	217.51	31.60
41	40	43	41.23	163.75	195.85	90.07	21	20	21	9.13	21.12	216.04	28.80
44	43	46	39.02	146.72	181.63	76.89	22	21	23	8.79	20.57	214.57	26.10
47	46	49	37.46	135.37	167.89	64.91	24	23	24	8.79	20.57	214.57	26.10
50	49	51	37.46	135.37	167.89	64.91	25	24	26	8.93	21.04	214.70	26.50
Cabos							27	26	27	8.93	21.04	214.70	26.50
51	9	10	0.00	0.00	0.00	0.00	28	27	29	8.93	21.04	214.70	26.50
52	12	13	0.00	0.00	0.00	0.00	30	29	30	8.93	21.04	214.70	26.50
53	15	16	0.00	0.00	0.00	0.00	31	30	32	8.93	21.04	214.70	26.50
54	18	19	0.00	0.00	0.00	0.00	33	32	33	9.26	21.63	216.17	29.30
55	21	22	0.00	0.00	0.00	0.00	34	33	35	9.60	22.15	217.64	32.20
56	24	25	0.00	0.00	0.00	0.00	36	35	36	9.60	22.15	217.64	32.20
57	27	28	0.00	0.00	0.00	0.00	37	36	38	9.60	22.15	217.64	32.20
58	30	31	0.00	0.00	0.00	0.00	39	38	39	9.60	22.15	217.64	32.20
59	33	34	0.00	0.00	0.00	0.00	40	39	41	9.60	22.15	217.64	32.20
60	36	37	0.00	0.00	0.00	0.00	42	41	42	9.60	22.15	217.64	32.20
61	39	40	0.00	0.00	0.00	0.00	43	42	44	9.46	21.67	217.51	31.60
62	42	43	0.00	0.00	0.00	0.00	45	44	45	9.46	21.67	217.51	31.60
63	45	46	0.00	0.00	0.00	0.00	46	45	47	9.46	21.67	217.51	31.60
							48	47	48	9.46	21.67	217.51	31.60
							49	48	50	9.46	21.67	217.51	31.60

Tabela G.3: Alamillo's condições de contorno (Pollalis, 1999)

	Deslocamento			Rotação		
#	X	Y	Z	X	Y	Z
1	Consertado	Consertado	Consertado	Consertado	Consertado	Consertado
2	Livre	Consertado	Consertado	Consertado	Livre	Livre
3	Livre	Consertado	Consertado	Consertado	Livre	Livre
50	Livre	Consertado	Consertado	Consertado	Livre	Livre

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Tabela G.4: Combinações de carga de Alamillo (Pollalis, 1999)

	Um. Cargas mortas e permanentes
1.1	Mortos e permanentes cargas do pilão, W_{pylon}
1.2	Mortos e permanentes, W_{deck}
1.3	Após a tensão do cabo fica, T_{cable}
	2. Cargas vivas
2.1	Carga uniforme 4 KPa em todo o convés e a passarela pedestre
2.2	Carga uniforme 4 KPa em metade do convés e metade da passarela pedestre Ito produzir torção máxima na caixa de aço)
2.3	600 kN carga do caminhão no nó 6 [eixo 44; 172 m do pilar leste], excentricidade 13.30 m
2.4	600 kN carga do caminhão no nó 9 [Eixo 41; 160 m do pilar leste], excentricidade 13.30 m
2.5	600 kN carga do caminhão no nó 15 [eixo 35; 136 m do pilar leste], excentricidade 13.30 m
2.6	600 kN carga do caminhão no nó 21 [Eixo 29; 104 m do pilar leste], excentricidade 13.30 m
2.7	600 kN carga do caminhão no nó 27 [Eixo 23; 88 m do pilar leste]Excentricidade 13,30 m
2.8	600 kN carga do caminhão no nó 33 [Eixo 17; 64 m do pilar leste]Excentricidade 13,30 m
2.9	600 kN carga do caminhão no nó 39 [Eixo 11; 40 m do pilar leste], excentricidade 13.30 m
2.10	600 kN carga do caminhão no nó 45 [Eixo 5; 16 metros do pilar leste], excentricidade 13.30 m
	3. Cargas térmicas
3.1	Mudança uniforme na temperatura dos cabos por 26°C
3.2	Mudança uniforme na temperatura do pilão em 13.5°C
3.3	Mudança uniforme na temperatura do convés em 23.3°C
3.4	Variação linear da temperatura dentro do convés [de baixo para a superfície superior] Por 21°C
3.5	Variação linear longitudinal da temperatura dentro do pilão em 4,5°C
3.6	Variação linear da temperatura dentro do pilar por 5,1°C
	4. Vento estático carregado
4.1	Carga de vento longitudinal
4.2	Carga de vento transversal
	Cinco. Rotação da fundação do pilar
5.1	0.25% (0.225°) rotação na direção longitudinal; Rotação máxima prevista 0,06°
5.2	0.10% (0.090°) rotação na direção transversal; Rotação máxima prevista 0.026°
	Seis. Carga sísmica estática
6.1	Carga sísmica longitudinal no pilar (3% de carga morta)
6.2	Carga sísmica transversa no pilar (3% de carga morta)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Apêndice H

Identicons: hash visual

Este apêndice, e o correspondente MATLAB®(§I.8.1O código foi inteiramente gerado por uma ferramenta de IA (Anthropic, 2025).

Abstract

Este documento fornece uma explicação abrangente de identidades, representações visuais de valores de hash que criam padrões únicos e reconhecíveis. Abrange tanto as bases teóricas de algoritmos de geração identicon quanto os detalhes específicos da implementação do nosso programa MATLAB. O documento explica como os identicons podem ser usados para representar visualmente capítulos de livros, criando "impressões digitais"visuais distintas que servem como marcadores ou identificadores de capítulos. Ambos os princípios matemáticos e aspectos práticos de implementação são discutidos, proporcionando uma compreensão completa do processo de geração identicon.

H.1 Introdução aos Identicons 2553
H.2 Algoritmos da Geração de Identicons 2554
H.3 GitHub vs. Implantações de Identicon da Bolsa Stack 2555
H.4 Nossa implementação MATLAB . . 2556
H.5 Segmentos do Código Central 2558
H.6 Usando o Programa 2559
H.7 Vantagens e Aplicações 2560
H.8 Conclusão 2561

Parte 3: Implementações de Código

CÓPIA PARA REVISÃO

H.1 Introdução aos Identicons

Identicons são representações visuais de valores de haxixe, normalmente usados para criar imagens únicas e reconhecíveis sem precisar de criação ou armazenamento manual de imagem. Originalmente desenvolvido para avatares de usuários em comunidades on-line, identificantes encontraram aplicação em vários contextos onde uma "impressão digital"visual de dados textuais é útil.

As principais características dos identicons incluem:

- **Geração determinística**:. O mesmo texto de entrada sempre produz o mesmo padrão
- **Distintividade visual**:. Diferentes entradas produzem padrões visualmente diferentes
- **Criação automática**:. Nenhuma intervenção humana necessária
- **Armazenagem mínima**:. Só o texto de origem precisa ser armazenado, não a imagem em si

Implementações populares incluem os avatares de usuários do GitHub e identificadores de usuário do Stack Exchange, que geram padrões distintos baseados em nomes de usuário ou endereços de email.

Aplicações em Editora de Livros

No contexto da publicação de livros, os identicons podem servir como:

- Marcadores de capítulos visuais
- Impressões digitais de conteúdo que visualmente distinguem tópicos similares
- Elementos decorativos que sutilmente indicam conteúdo
- Ajudas de navegação que ajudam os leitores a reconhecer capítulos visualmente

Gerando um identícono de cada título do capítulo, criamos uma assinatura visual única que corresponde ao conteúdo desse capítulo, aumentando o reconhecimento e navegação enquanto adicionamos interesse visual ao livro.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

H.2 Algoritmos da Geração de Identicons

Visão geral do algoritmo principal

O processo fundamental de geração de identicons envolve converter a entrada do texto em um padrão visual através de uma série de passos determinísticos:

Algorithm 1 Algoritmo da Geração de Identicons

Require: Texto, título, identificador
Ensure: Padrão visual (identicon)
1: Gere um hash criptográfico do texto de entrada
2: Defina uma grade (tipicamente 5)×5)
3: Use segmentos do haxixe para determinar padrões celulares:
4: A. Quais células contêm formas (on/off state)
5: B. Que formas usar em células ativas
6: C. Que cores aplicar às formas
7: Aplique simetria (geralmente espelhando metade da grade)
8: Render o padrão resultante como uma imagem

Função hash

A função haxixe é a base da geração do identícono, convertendo texto de comprimento variável em uma sequência fixa de valores. Uma função de haxixe eficaz para os identificantes deve fornecer:

- **Determinação**:. A mesma entrada sempre produz a mesma saída
- **Efeito Avalanche**:. Pequenas mudanças na entrada causam grandes mudanças na saída
- **Distribuição uniforme**:. Os valores de saída são distribuídos uniformemente pelo alcance possível

Enquanto o hash criptográfico funciona como MD5, SHA-1 ou SHA-256 são comumente usados em implementações profissionais, nosso programa MATLAB usa uma função de hash personalizada mais simples para fins educacionais:

```
function hash_values = simpleHash(str)
    % Sum ASCII values with position weighting
    hash_values = zeros(1, 32);
    for i = 1:length(str)
        char_code = double(str(i));
        for j = 1:min(32, length(str))
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            position_factor = mod(i*j, 32) + 1;
            hash_values(position_factor) = mod(hash_values(position_factor) +
    char_code * i, 256);
        end
    end
end
```

Listing H.1: Simple Hash Function

Esta função cria uma matriz de 32 elementos de valores entre 0 e 255, incorporando códigos de caracteres e informações de posição da string de entrada.

Mapeamento de padrões

O processo de mapeamento de padrões transforma os valores do haxixe em uma grade visual, tipicamente 5×Cinco. Isso envolve:

1. **Inicialização da grade**:. Crie uma grade vazia do tamanho desejado
2. **Células de valor**:. Mapear valores de haxixe para valores de célula da grade
3. **Aplicação de simetria**:. Espelho parte da grade para o equilíbrio visual

Em implementações como a de GitHub, cada célula é "on"ou "off"(binário). Em versões mais sofisticadas como as nossas, cada célula pode conter diferentes formas baseadas no valor correspondente do haxixe.

Renderização Visual

O passo final converte o padrão abstrato em uma representação visual:

- **Selecção da forma**:. Converta valores celulares em formas específicas
- **Aplicação de cores**:. Aplique cores derivadas do haxixe
- **Escala e estofamento**:. Ajuste as propriedades visuais para clareza

H.3 GitHub vs. Implantações de Identicon da Bolsa Stack

Diferentes plataformas implementam identificadores com variações sutis:

Implementação de GitHub

GitHub usa uma abordagem simples, mas eficaz:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- 5×5 grades (25 células)
- Padrão binário (cada célula está cheia ou vazia)
- Simetria horizontal (espelhos da esquerda para a direita)
- Uma única cor derivada do haxixe, além de fundo branco

Isso requer apenas 15 bits de informação (meia grade + meio pilar) mais dados de cor.

Implantação do Stack Exchange

O Stack Exchange (incluindo o Stack Overflow) usa uma abordagem mais variada:

- Múltiplas formas possíveis por célula (quadrados, triângulos)
- Esquema de cor única
- Fundo claro com formas coloridas
- Simetria horizontal

Nossa implementação inspira-se em ambas as abordagens enquanto adicionamos recursos adicionais.

H.4 Nossa implementação MATLAB

Nosso programa MATLAB gera identificadores com as seguintes características:

Visão geral do programa

O programa tem duas entradas:

- Um nome para o PDF de saída
- Um título de capítulo usado para gerar o reconhecimento

Ele produz uma imagem de dupla tela mostrando:

- O identificador renderizado com formas coloridas (lado esquerdo)
- A matriz numérica mostrando os valores subjacentes (lado direito)

O título exibe tanto o título do capítulo como uma parte de seu haxixe, proporcionando rastreabilidade do processo de geração.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Principais recursos do programa

1. **Múltiplos tipos de forma**:. Ao contrário de implementações mais simples, nosso programa usa cinco estados diferentes para cada célula:
   - 0: Célula vazia (sem forma)
   - 1: Quadrado arredondado
   - 2: Triângulo (de cima para a esquerda para baixo para a direita)
   - Três. Triângulo (de cima para baixo para a esquerda)
   - 4: Círculo
2. **Esquema de cor complementar**:. Ao invés de usar uma única cor, geramos várias cores complementares baseadas no haxixe, criando padrões mais atraentes e distintos visualmente.
3. **Fundo transparente**:. A saída usa um fundo transparente, tornando-o adequado para integração com vários estilos de documentos.
4. **Visualização dupla**:. A exibição lado a lado do reconhecimento visual e sua representação numérica fornece valor educacional, tornando o processo de mapeamento transparente.
5. **Saída em PDF**:. O programa salva o identificador diretamente em um arquivo PDF chamado de acordo com o primeiro parâmetro.

Processo de implementação detalhado

Geração de Hash e mapeamento de padrões

A correlação entre o haxixe e os valores da grade segue este processo específico:

1. **Criação de Hash**:
   - O `SimplesHash` A função converte o título do capítulo em uma matriz de 32 elementos
   - Os valores variam de 0 a 255, baseado em códigos de caracteres e posições
2. **Criação de Matriz Padrão**:
   - A 5×5 matriz é inicializada com zeros
   - Para cada célula na metade esquerda (mais meio pilar se de tamanho estranho):

     ```
     hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1
     pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5)
     ```

   - Cada valor é mapeado para o intervalo 0-4 usando módulo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- A metade direita é espelhada da esquerda

Exemplo de mapeamento de células

Para uma célula específica na posição (i,j):

1. Calcule um índice de haxixe:
   $hash_idx = mod((i-1) \times size_matrix + j, 32) + 1$
2. Por exemplo, com a célula (2,3) em um 5×Grelha 5:
   $hash_idx = mod((2-1) \times 5 + 3, 32) + 1 = 8$
3. Obter o valor do haxixe nesse índice:
   $hash_value = hash_values(hash_idx)$
4. If $hash_values(8) = 173$Nós usamos 173
5. Mapa para um tipo de forma usando módulo:
   $pattern(i, j) = mod(hash_value, 5) = mod(173, 5) = 3$
6. Célula (2,3) recebe forma tipo 3 (triângulo de cima para baixo para a esquerda)

Geração de Cores

As cores também são derivadas do haxixe:

1. Calcule uma tonalidade base dos primeiros valores de hash:
   $base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360)/360$
2. Gerar cores complementares mudando o tom:

```
colors = [
    hsv2rgb([mod(base_hue, 1), 0.8, 0.9]);          % Primary
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]);  % Complement 1
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.5, 1), 0.8, 0.8]);   % Complement 2
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85])  % Complement 3
];
```

3. Atribua cores às células com base na posição e valor:
   $color_idx = mod(i \times j + value, 4) + 1$

H.5 Segmentos do Código Central

Os seguintes segmentos de código ilustram as partes-chave da nossa implementação:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Geração de padrões

```
% Fill half the pattern with values from the hash
for i = 1:size_matrix
    for j = 1:floor(size_matrix/2)
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);

        % Mirror for symmetry
        pattern(i, size_matrix-j+1) = pattern(i,j);
    end

    % Middle column for odd-sized grid
    if mod(size_matrix, 2) == 1
        j = ceil(size_matrix/2);
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end
```

Listing H.2: Pattern Generation from Hash

Renderização de Formas

```
case 4 % Circle
    center_r = (row_start + row_end) / 2;
    center_c = (col_start + col_end) / 2;
    radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9; % 90% of half cell size

    for r = row_start:row_end
        for c = col_start:col_end
            distance = sqrt((r - center_r)^2 + (c - center_c)^2);
            if distance <= radius
                identicon(r, c, :) = color;
            end
        end
    end
```

Listing H.3: Shape Rendering Example (Circle)

H.6 Usando o Programa

Executando o script

Para usar o programa:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Salve o script MATLAB como `Gerar Identicon`
2. Abra MATLAB e navegue até o diretório contendo o script
3. Execute o script digitando `Gerar Identicon` na janela de comando MATLAB
4. Quando solicitado, digite o nome de arquivo desejado (por exemplo, "C-14")
5. Quando solicitado, digite o título do capítulo (por exemplo, "Engenharia sísmica baseada em desempenho]")
6. O programa irá gerar o idencicon e salvá-lo como um PDF (por exemplo, "C-14.pdf")

Entendendo a saída

O PDF gerado contém:

- Um título mostrando o nome do capítulo e parte de seu valor
- Painel esquerdo: O identificador visual com formas coloridas
- Painel direito: A matriz numérica (0-4) mostrando quais valores geraram que formas

Esta representação dupla ajuda a entender como o título do capítulo é transformado em um padrão visual único.

H.7 Vantagens e Aplicações

Vantagens de Identicons

- **Unicidade**:. Títulos diferentes produzem padrões visualmente distintos
- **Reprodutibilidade**:. O mesmo título sempre produz o mesmo padrão
- **Eficiência**:. Não há necessidade de criar ou armazenar imagens manualmente
- **Escalabilidade**:. Pode gerar identificadores únicos para qualquer número de capítulos

Aplicações em Editora de Livros

Identicons podem melhorar os livros de várias maneiras:

- **Identificação do capítulo**:. Marcadores visuais que ajudam os leitores a reconhecer e lembrar capítulos
- **Ajudas de navegação**:. Visões visuais que suportam navegação rápida através do livro
- **Consistência do projeto**:. Uma linguagem visual unificada ao longo do livro

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **Impressões digitais de conteúdo**:. Representação visual da "essência"do conteúdo

H.8 Conclusão

Identicons fornecem uma solução elegante para criar representações visuais únicas de conteúdo de texto. Gerando padrões distintos dos títulos de capítulos, eles servem como auxiliares funcionais de navegação e elementos estéticos no design de livros.

Nossa implementação MATLAB combina características de várias abordagens identicon, produzindo padrões visualmente atraentes com múltiplas formas e cores, mantendo as propriedades essenciais do determinismo e singularidade. A dupla exibição do padrão visual e seus valores numéricos subjacentes fornece uma visão educacional sobre o processo de geração.

Esta abordagem da identificação de capítulos demonstra como as técnicas algorítmicas podem melhorar o design tradicional do livro, criando uma ponte entre conteúdo textual e reconhecimento visual que beneficia os leitores através de uma melhor navegação e memorizabilidade.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice I

MATLAB®, Matemática Códigos

O MATLAB®Os códigos apresentados neste apêndice foram originalmente escritos pelo autor. Eles foram posteriormente refacionados por Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) para clareza, documentação e acessibilidade pedagógica - com melhoria da nomeação variável, explicações em linha da teoria subjacente, e correção de pequenos bugs onde identificado. Os algoritmos e a lógica numérica são inteiramente os do autor original; A contribuição de Claude foi estritamente editorial. Por esta razão, e para evitar qualquer risco de corromper o código durante a tradução automatizada, este apêndice é apresentado apenas em inglês.

Códigos Les MATLAB®Présentés dans cette anexo ont été ecrits à l'origine par l'auteur. É um grande sucesso para os jovens Correção de bogues mineurs identifiés au fil du travail. Os algoritmos e a logique numérique sont entièrement ceux de l'auteur original; A contribuição de Claude a été strictement éditoriale. Pour cette raison, et afin d'éviter tout risque d'altération du code lors d'une traduction automaticique, cette Annexe est présentée en anglais uniquement.

Los códigos de MATLAB®Apresentados em este apêndice fueron escrito originalmente por el autor. Posteriormente fueron refatorizados por Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) con el fin de mejorar la claridad, la documentación y la accesibilidad pedagógica — con una nomenclatura de variáveis más descritivas, explicaciones integradas de la teoria Subyacente, y la corrección de errores menores identificados durante el proceso. Los Algoritmos y la lógica numérica son integramente los del autor original; A contribuição de Claude fue estrictamente editorial. Por esta razão, y para evitar cualquier riesgo de alteración del código durante una traducción automática, este apéndice se apresenta únicamente em inglês.

Abstract

Este apêndice apresenta uma coleção abrangente de códigos MATLAB e Mathematica implementando os métodos computacionais fundamentais e avançados descritos ao longo do livro. Os códigos cobrem as técnicas de análise fundacional mecânica estrutural (estática, métodos matriciais para treliças e vigas, clássicas e avançadas (métodos variáveis, isoparamétrico elementos finitos), e algoritmos de simulação numérica (amostragem de Monte Carlo,

CÓPIA PARA REVISÃO

propagação da incerteza). Cada código é documentado com convenções de nomenclatura variável, explicações teóricas em linha e exemplos trabalhados para apoiar tanto a aprendizagem quanto a aplicação prática. As implementações de software traduzem os frameworks matemáticos e algoritmos apresentados nos capítulos principais em ferramentas computacionais executáveis adequadas para análise estrutural, identificação de parâmetros e avaliação da confiabilidade. Este apêndice é apresentado em inglês apenas para preservar a integridade do código através de edições.

I.1 Parte I: Métodos de Análise Fundamental e Computacional 2564
I.1.1 Matriz estática de um treliça B 2564
I.1.2 Forma de arco St Louis . . . 2566
I.1.3 Arbitrário três arcos circulares articulados; Mathematica 2568
I.1.4 Recolher arcos de alvenaria . 2579
I.1.5 Principal 2579
I.1.6 Grande desvio de uma viga . 2590
I.2 Parte II: Projeto estrutural e Análise 2595
I.2.1 Desenho de cilíndrico cascas 2595
I.2.2 Análise aproximada pórtico; método cantilever 2607
I.2.3 Torção não uniforme 2619
I.2.4 Ortogonal pórtico 2621
I.2.5 Ortogonal híbrido pórtico . . 2625
I.2.6 Pórtico; Conectado 2628
I.2.7 Método da rigidez direta; pórtico 2632
I.2.8 Código principal 2632
I.2.9 Matriz de rigidez de membros não prismáticos 2644
I.2.10 Linhas isostáticas 2650
I.2.11 Desenho evolucionário . . . 2656
I.2.12 Principal 2656
I.2.13 Pilar diagrama de interação . 2662
I.2.14 Métodos variados; Mathematica 2665
I.2.15 Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral . . 2676
I.2.16 Isoparamétrico elementos . . 2678
I.3 Parte III: Modelagem material e comportamento constitutivo 2689
I.3.1 Plástica incremental 2689
I.3.2 Modelos constitutivos 2693
I.3.3 Modelo bilinear 2694
I.3.4 Endurecimento 2698
I.3.5 Histerese 2701
I.3.6 Giuffre monegotto pinto modificado 2720
I.3.7 Parque Kent modificado . . . 2725
I.3.8 Ibarra 2730
I.3.9 Estado limite cisalhamento . 2771
I.4 Parte IV: Métodos e identificação de parâmetros 2792
I.4.1 Programa de Identificação do Parâmetro 2792
I.4.2 Programa principal e orquestração central 2793
I.4.3 Integração de dados I/O e planilha 2802
I.4.4 Otimização fluxo de trabalho e funções auxiliares 2814
I.5 Parte V: Fundamentos numéricos e estatísticos 2827
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . . 2827
I.5.2 Técnicas numéricas 2828
I.5.3 FFT e filtros Butterworth . . 2828
I.5.4 Decomposição em valores singulares 2831
I.5.5 Pré-condicionamento . . . 2833
I.5.6 Consenso de amostragem aleatória (RANSAC) . . . 2835
I.5.7 Hipercubo latino 2839
I.5.8 Regressão bayesiana com base quadrática 2844
I.5.9 Simulação de Monte Carlo via cadeias de Markov . . 2851
I.6 Parte VI: Otimização e ajuste de parâmetros 2853
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . . 2853
I.6.2 Implementação personalizada 2853
I.6.3 Uso da função incorporada . 2856
I.7 Parte VII: Confiabilidade sísmica e incerteza 2858
I.7.1 Análise de perigo sísmico 2858
I.7.2 Engenharia sísmica baseada em desempenho 2861
I.8 Parte VIII: Utilidade 2866
I.8.1 Identicon 2866

Parte 4: Métodos Numéricos e Estatísticos

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

I.1 Parte I: Métodos de Análise Fundamental e Computacional

Esta seção abrange tanto as técnicas computacionais fundamentais mecânica estrutural e avançadas para análise, incluindo estática, arcos, métodos variacionais, simulação de Monte Carlo, e elementos isoparamétrico.

I.1.1 Matriz estática de um treliça B

Como discutido em

```
%  Initialize the statics matrix
% ========================================================================
% STATICS MATRIX OF A TRUSS
% ========================================================================
% Builds the statics matrix B, which relates internal bar forces (and
% support reactions) to external nodal loads via:
%
%                         B * q = f
%
% where:
%   B  : statics matrix          [2*npoin x (nelem + nbc)]
%   q  : generalized forces      [bar forces | reaction forces]
%   f  : external nodal loads    [Fx1, Fy1, Fx2, Fy2, ...]
%
% Each bar contributes two columns (its direction cosines) to B.
% Each restrained DOF contributes one additional column (a unit reaction).
%
% Inputs assumed to exist in the workspace:
%   npoin        : number of nodes
%   nelem        : number of bar elements
%   coord(i,1:2) : x,y coordinates of node i
%   lnods(e,1:2) : global node numbers of element e  [node_i, node_j]
%   id(i,1:2)    : boundary condition flag for node i, DOF 1(x) and 2(y)
%                  id = 1 means the DOF is restrained (support reaction)
% ========================================================================

%------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Allocate the statics matrix
%------------------------------------------------------------------------
% The matrix has one row per DOF (2 per node: x and y)
% and one column per unknown force (bar forces + support reactions).
% We don't know nbc yet, so we allocate a square upper-bound and trim later.

nDOF = 2 * npoin;                  % total degrees of freedom
```

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
B    = zeros(nDOF, nDOF);          % over-allocated; will trim after BCs

%----------------------------------------------------------------------
% Step 2 -- Fill columns corresponding to bar forces (direction cosines)
%----------------------------------------------------------------------
% For each bar element, project the unit bar force onto the global x and y
% axes at both end nodes.  For bar e connecting nodes i and j:
%
%   At node i:  contribution is [ cos(theta);  sin(theta) ]   (tension +ve)
%   At node j:  contribution is [-cos(theta); -sin(theta) ]   (equal &
   opposite)
%
% where theta is the angle the bar makes with the global x-axis, and
%   cos(theta) = lx / L,   sin(theta) = ly / L
%
% These are stored in rows (2*node-1) and (2*node) of column e.

l_elem = zeros(nelem, 1);          % pre-allocate element length vector

for e = 1:nelem

    % --- Retrieve the two end nodes of this element ---
    node_i = lnods(e, 1);
    node_j = lnods(e, 2);

    % --- Compute the projection of the bar onto x and y ---
    lx = coord(node_j, 1) - coord(node_i, 1);   % x-component of bar vector
    ly = coord(node_j, 2) - coord(node_i, 2);   % y-component of bar vector

    % --- Bar length (Pythagorean theorem) ---
    l_elem(e) = sqrt(lx^2 + ly^2);

    % --- Direction cosines (unit vector along the bar) ---
    cos_theta =  lx / l_elem(e);   % = cos(theta)
    sin_theta =  ly / l_elem(e);   % = sin(theta)

    % --- Insert at node i (rows 2*node_i-1 and 2*node_i, column e) ---
    % A tensile force in the bar pulls node i toward node j
    B(2*node_i - 1, e) =  cos_theta;   % x-equilibrium at node i
    B(2*node_i,     e) =  sin_theta;   % y-equilibrium at node i

    % --- Insert at node j (equal and opposite by Newton's third law) ---
    B(2*node_j - 1, e) = -cos_theta;   % x-equilibrium at node j
    B(2*node_j,     e) = -sin_theta;   % y-equilibrium at node j

end

%----------------------------------------------------------------------
% Step 3 -- Append columns corresponding to support reactions
%----------------------------------------------------------------------
% Each restrained DOF introduces one unknown reaction force.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Its contribution to equilibrium is simply +1 in the corresponding row
% (a unit force in the restrained direction).
% These reactions occupy columns (nelem+1) through (nelem+nbc) of B.

nbc = 0;   % reaction counter (incremented each time a restrained DOF is found
    )

for inode = 1:npoin
    for iDOF = 1:2            % iDOF = 1 -> x-direction,  iDOF = 2 -> y-
    direction

        if id(inode, iDOF) == 1    % this DOF is restrained -> there is a
    reaction

            nbc = nbc + 1;         % one more reaction unknown

            % Global row index for this DOF
            row = 2*(inode - 1) + iDOF;

            % Place a unit entry in the next available reaction column
            B(row, nelem + nbc) = 1.0;

        end
    end
end

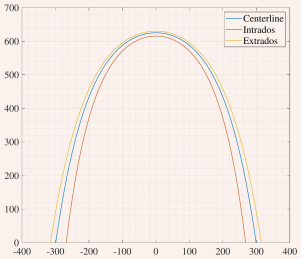
%---------------------------------------------------------------------------
% Step 4 -- Trim B to its actual size
%---------------------------------------------------------------------------
% Now that we know nbc, discard the unused trailing columns.

B = B(:, 1 : nelem + nbc);

% B is now [2*npoin  x  (nelem + nbc)] -- ready for use.
```

I.1.2 Forma de arco St Louis

Este código, baseado na geometria real do arco, gera fig. 1. 15.30b




```
clear;close;clc;opengl software
% From http://www.jug.net/wt/archcgs.htm
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
%=================
% Graphics stuff
%=================
scrsz = get(0,'ScreenSize');GS = 'gswin64.exe';opengl software
fs=18;
font='Times New Roman';
%===============
% Initialize
%===============
L=299.2239;% half widdth
Ab=1262.6651;% max x section bottom ft^2
At=125.1406;% max x section top ft^2
x=(299.2239:-0.001:0);
%=================
% Some Constants
%=================
C=acosh(Ab/At);
h=625.0925;% maximum height
A=h/((Ab/At)-1);
%============
% centroid
%============
y=693.8597-A*(cosh(C*x/L));% CHECKED
yp=interp1(x,y,118.4123);
%======================
% slope of the normal
%======================
m=1.44935529./sinh(0.0100333*x);% CHECKED
mp=interp1(x,m,118.4123);
%======================
% Cross sectional area
%======================
Q=((At-Ab)/h).*y+Ab;%cross section linearly varying
%======================
% height of section
%======================
h=sqrt(cotd(30)*Q);
hi=2*h/3;ho=h/3;
%==============================
% Intrados and extrados curves
%==============================
xi=x-hi./sqrt(1+m.^2);yi=y-m.*hi./sqrt(1+m.^2);
ypi=interp1(xi,yi,108.9984);
xo=x+ho./sqrt(1+m.^2);yo=y+m.*ho./sqrt(1+m.^2);
ypo=interp1(xo,yo,123.1192);
%======================================
% take mirrors for the -ve side & merge
%======================================
rx=-flip(x);xx=cat(2,x,rx);
rxi=-flip(xi);xxi=cat(2,xi,rxi);
rxo=-flip(xo);xxo=cat(2,xo,rxo);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
ry=flip(y);yy=cat(2,y,ry);
ryi=flip(yi);yyi=cat(2,yi,ryi);
ryo=flip(yo);yyo=cat(2,yo,ryo);
%===============
% plot curves
%===============
hf1 = figure('Position',[1 scrsz(4)/4.5 scrsz(3)/3 scrsz(4)/2]);
plot(xx,yy,xxi,yyi,xxo,yyo,'linewidth',1);
lgd=legend('Centerline','Intrados','Extrados','location','NorthEast');
lgd.FontSize=fs;
grid minor; grid;
ylim([0 700]);daspect([1 1 1]);
```

I.1.3 Arbitrário três arcos circulares articulados; Mathematica

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Circular Three Hinged Arch self weight

Determine Reactions

In[1]:=
```
Sol1 = Solve[-2 R Cy +
      Integrate[w R^2 (1 + Cos[theta]), {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2 + alpha}] == 0, Cy][[1]];
```

In[2]:=
```
Cy = Cy /. Sol1
```

Out[2]=
```
alpha R w
```

In[3]:=
```
Sol2 =
  Simplify[Solve[-R Cx + R Cy - Integrate[w R^2 Cos[theta], {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2}] ==
      0, Cx]][[1]] /. Sol1;
```

In[4]:=
```
Cx = Cx /. Sol2
```

Out[4]=
```
R w (-1 + alpha + Cos[alpha])
```

In[5]:=
```
alpha = 2 ArcTan[2 h / s]
```

Out[5]=
$$2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]$$

In[6]:=
```
w = 1;
```

In[7]:=
```
Cxs = FullSimplify[Cx / s]
```

Out[7]=
$$\frac{R\left(-1+2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)}{s}$$

In[8]:=
```
TeXForm[Cxs]
```

Out[8]//TeXForm=
```
\frac{R \left(2 \tan ^{-1}\left(\frac{2 h}{s}\right)+\cos \left(2 \tan ^{-1}\left(\fr
   h}{s}\right)\right)-1\right)}{s}
```

In[9]:=
```
Cxs = Cx / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

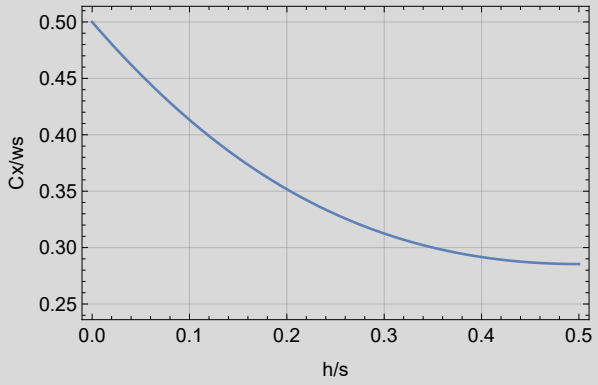
Out[9]=
$$\frac{1}{2}\times(-1+2\,\text{ArcTan}[2\,hs]+\text{Cos}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]])\,\text{Csc}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]]$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

In[10]:=
```
CxsPlot =
 Plot[Cxs, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.25}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cx/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[10]=



In[11]:=
```
Export["CxsPlot.pdf", CxsPlot]
```

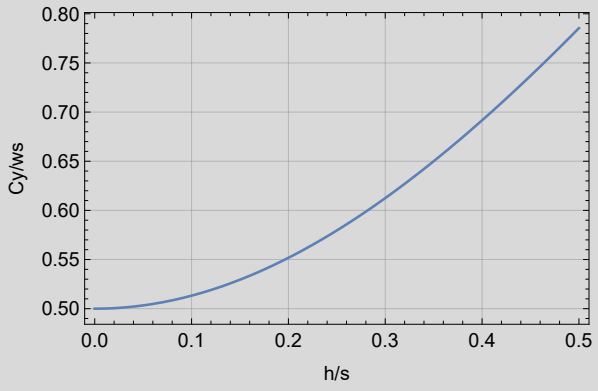
Out[11]=
```
CxsPlot.pdf
```

In[12]:=
```
Cys = Cy / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[12]=
```
ArcTan[2 hs] Csc[2 ArcTan[2 hs]]
```

In[13]:=
```
CysPlot =
 Plot[Cys, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.5}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cy/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[13]=



CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

In[14]:=
```
Export["CysPlot.pdf", CysPlot]
```

Out[14]=
```
CysPlot.pdf
```

Determine Internal Forces Arbitrary Case

Shear

In[15]:=
```
Sol6 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
      Integrate[w R Sin [theta], {beta, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[15]=

$$\left\{V \to R \left(\text{Cos}[\text{theta}] \left(-1+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)+ 2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]-\text{Sin}[\text{theta}])+\text{theta}\,\text{Sin}[\text{theta}]\right)\right\}$$

In[16]:=
```
V[theta_] := R (Cos[theta] (-1 + Cos[2 ArcTan[2 h / s]]) +
    2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] - Sin[theta]) + theta Sin[theta])
```

Axial

In[17]:=
```
Sol7 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
      Integrate[w R Cos [theta], {beta, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[17]=

$$\left\{NN \to R \left(\text{theta}\,\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}]- \text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\text{Sin}[\text{theta}]-2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[18]:=
```
NN[theta_] := R (theta Cos[theta] + Sin[theta] - Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] -
    2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] + Sin[theta])) /. h / s → 1 / 2;
```

In[19]:=
```
NN[x]
```

Out[19]=

$$R\left(x\,\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x]-\frac{1}{2}\pi\,(\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x])\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Moment

In[20]:=
```
Sol8 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
      Integrate[w R R (Cos[beta] - Cos[theta]), {beta, 0, theta}] + M == 0, M][[1]]]
```

Out[20]=
$$\left\{M \to R^2 \left(\text{theta} \cos[\text{theta}] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[\text{theta}] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[\text{theta}] + \sin[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[21]:=
```
M[theta_] := R^2 (theta Cos[theta] -
    Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] - 2 ArcTan[2 h / s] (-1 + Cos[theta] + Sin[theta]))
```

In[22]:=
```
NN[x]
```

Out[22]=
$$R\left(x \cos[x] + \sin[x] - \frac{1}{2}\pi (\cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[23]:=
```
V[x]
```

Out[23]=
$$R\left(\cos[x]\left(-1 + \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\right) + 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (\cos[x] - \sin[x]) + x \sin[x]\right)$$

In[24]:=
```
M[x]
```

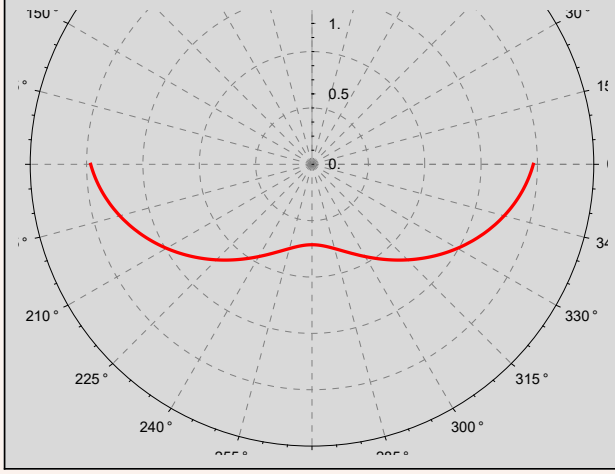
Out[24]=
$$R^2\left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

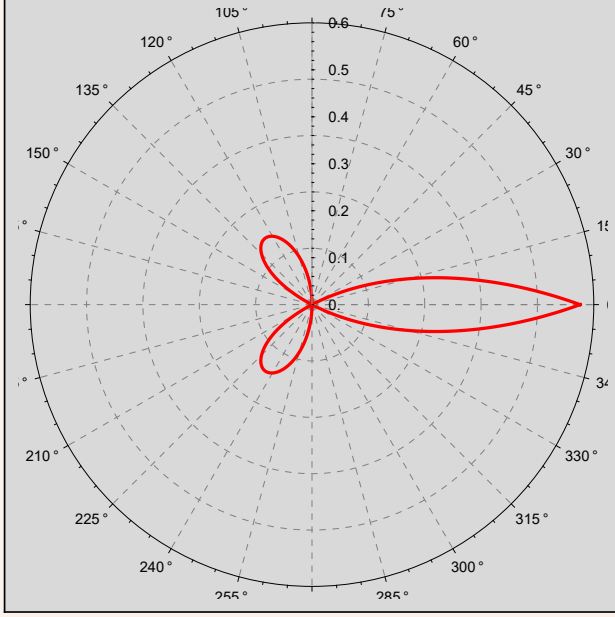
In[25]:=
```
P1 = PolarPlot[NN[x] / R, {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[25]=



In[26]:=
```
P2 = PolarPlot[V[x] / R /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[26]=



CÓPIA PARA REVISÃO

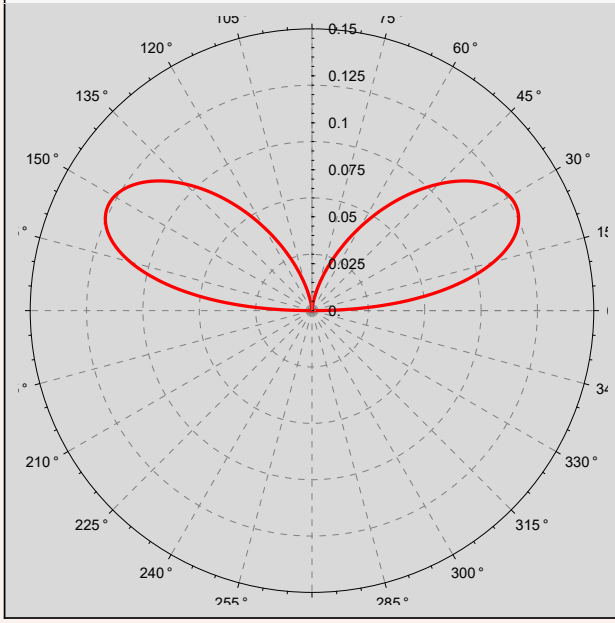
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

In[27]:=
```
M[x]
```

Out[27]=
$$R^2 \left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[28]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x] / R^2 /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[28]=



Determine Internal Forces Semi-Circular Case

In[29]:=
```
Clear[alpha];
```

Shear

In[30]:=
```
Sol3 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {alpha, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[30]=
$$\{V \to R\,((-1 + \text{alpha} + \cos[\text{alpha}])\cos[\text{theta}] + (-\text{alpha} + \text{theta})\sin[\text{theta}])\}$$

In[31]:=
```
V[theta_] := 1/2 R w ((-2 + π) Cos[theta] - (π - 2 theta) Sin[theta])
```

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Axial

In[32]:=
```
Sol4 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {alpha, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[32]=
```
{NN → R ((-alpha + theta) Cos[theta] - (-1 + alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[33]:=
```
NN[theta_] := -1/2 R w ((π - 2 theta) Cos[theta] + (-2 + π) Sin[theta]);
```

Moment

In[34]:=
```
Sol5 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
       Integrate[w R R (Cos[alpha] - Cos[theta]), {alpha, 0, theta}] + M == 0, M]][[1]]
```

Out[34]=
```
{M → R^2 (alpha + (-alpha + theta) Cos[theta] - (alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[35]:=
```
M[theta_] := -1/2 R^2 w ((π - 2 theta) Cos[theta] + π (-1 + Sin[theta]))
```

Plot Internal Forces

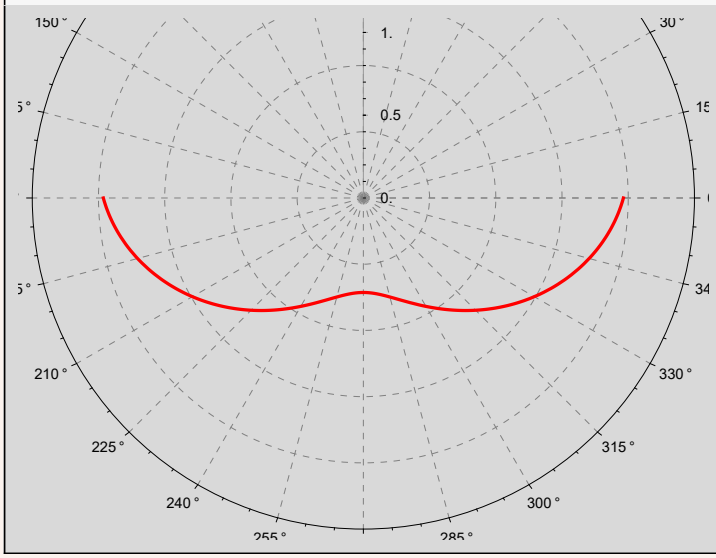
In[36]:=
```
w = 1; R = 1;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

In[37]:=
```
P4 = PolarPlot[NN[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[37]=



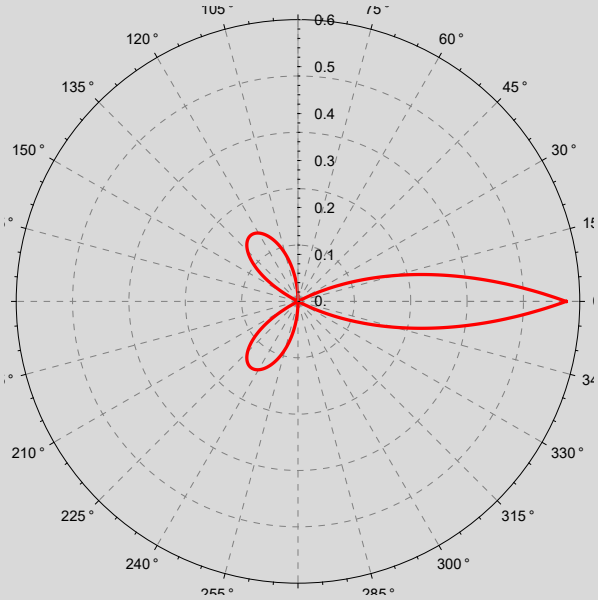
In[38]:=
```
Export["NxPlot.pdf", P1]
```

Out[38]=
```
NxPlot.pdf
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

In[39]:=
```
P5 = PolarPlot[V[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[39]=



In[40]:=
```
Export["VxPlot.pdf", P2]
```

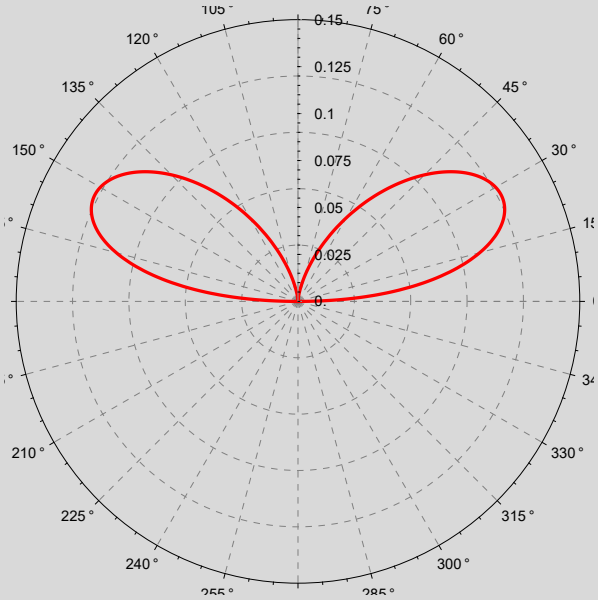
Out[40]=
```
VxPlot.pdf
```

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

In[41]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[41]=



In[42]:=
```
Export["MxPlot.pdf", P6]
```

Out[42]=
```
MxPlot.pdf
```

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

I.1.4 Recolher arcos de alvenaria

Código escrito por Pierre Mars em Octave, reprogramado em MATLAB®pelo autor.

I.1.5 Principal

```
% ========================================================================
% COLLAPSE ANALYSIS OF A MASONRY ARCH -- THRUST LINE METHOD
% ========================================================================
% This code determines the minimum and maximum thrust states of a circular
% masonry arch using the "line of resistance" (thrust line) approach.
%
% THEORY:
%   A masonry arch can carry load as long as the thrust line -- the locus
%   of the resultant compressive force -- remains within the arch thickness
%   at every cross-section.  Collapse occurs when the thrust line touches
%   the boundary (intrados or extrados) at enough sections to form a
%   mechanism (typically 4 hinges for a symmetric arch).
%
%   The thrust line position is controlled by three "points of passage":
%   sections n1, n2, n3 where the normalised eccentricities e1, e2, e3
%   are prescribed.  The algorithm iteratively relocates these points
%   until the thrust line just touches the arch boundary -- the limit state.
%
% SIGN CONVENTION FOR ECCENTRICITY:
%   e = +1  ->  point on extrados  (outer face)
%   e = -1  ->  point on intrados  (inner face)
%   e =  0  ->  centroid of section (centerline)
%
% TWO LIMIT STATES COMPUTED:
%   Minimum thrust : thrust line hugs intrados at supports, extrados at crown
%   Maximum thrust : opposite -- extrados at supports, intrados at crown
%
% FILE STRUCTURE (all functions at bottom, MATLAB convention):
%   Part 1  --  Main script: parameters, calls min_thrust then max_thrust
%   Part 2  --  min_thrust  : iterative minimum thrust algorithm
%   Part 3  --  max_thrust  : iterative maximum thrust algorithm
%   Part 4  --  resistance_line : plots thrust line, voussoirs, N and V
    diagrams
%   Part 5  --  face_points : (x,y) of a point at given eccentricity on each
    face
%   Part 6  --  faces_wrenches : self-weight wrench at each section face  ***
    STUB ***
%   Part 7  --  faces_efforts : internal N, V, eccentricity at every face
%   Part 8  --  three_points : force on first face to pass thrust line through
     3 points
%
% Original code: Pierre Smars (smars@yuntech.edu.tw), ver. 2022-12-02
% License: GNU GPL v2 or later -- https://www.gnu.org/licenses/
% Reprogrammed in MATLAB from Octave by V.E. Saouma
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ========================================================================

% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN SCRIPT
% ========================================================================
% Sets all parameters, runs both limit-state analyses, then cleans up.
%
% NOTE ON GLOBAL VARIABLES:
%   All geometry and state are stored in globals so that helper functions
%   can access them without long argument lists.  For a production code
%   one would pass a parameter struct instead, but globals are clearer
%   for a teaching context of this size.

clear; close all; clc;

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       maximum_eccentricity small x y xe ye xi yi density angles radius ...
       thickness iter fn LimitState

% --- Execution control ---
% iWait = 1 : pause at every iteration with a dialog box  (useful for demos)
% iWait = 0 : run silently to completion                  (normal use)
iWait = 0;

% --- Output file base name (used in figure titles and saved EPS/PDF) ---
fn = 'arch-1';

% --- Arch geometry ---
n             = 40;    % number of voussoir blocks
radius_cst    = 5;     % centerline radius of the arch           [m]
thickness_cst = 1;     % uniform voussoir thickness              [m]
aperture      = 90;    % half-opening angle                      [deg]
                       % 90 deg -> semicircular arch

% --- Material and physical constants ---
density_cst = 2500;    % masonry density                         [kg/m^3]
g           = 9.81;    % gravitational acceleration              [m/s^2]

% --- Algorithm parameters ---
maximum_eccentricity = 1;      % |e| <= 1 defines the admissible zone
small                = 1e-6;   % convergence tolerance on eccentricity

% --- Run both limit-state analyses ---
if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Starting with Minimum thrust'));
    close;
end
min_thrust;

if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Next: Maximum thrust'));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    close;
end
max_thrust;

% Clean up EPS files generated during iterations
delete('*.eps');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: min_thrust
% ========================================================================
% Finds the minimum thrust state by iteratively adjusting the three points
% of passage until the thrust line just fits inside the arch.
%
% MINIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the intrados at both supports (e = -1)
%   and the extrados at the crown (e = +1).
%
% ALGORITHM (iterative heuristic):
%   1. Start with passage points at supports (n1, n3) and crown (n2).
%   2. Compute internal forces and eccentricity profile.
%   3. Find the section r0 with the largest eccentricity violation.
%   4. Move the nearest passage point to r0.
%   5. Repeat until max|ex| <= maximum_eccentricity + small.
%
% WARNING: the while condition  (ok==0)||(iter>10)  is logically
%   questionable -- the ||iter>10 clause keeps looping even after
%   convergence when iter>10.  Preserved faithfully from the original.

function min_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess for the three passage points ---
e1 = -maximum_eccentricity;   % intrados at left support
e2 =  maximum_eccentricity;   % extrados at crown
e3 = -maximum_eccentricity;   % intrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;          % section closest to the crown
n3 = n + 1;

iter           = 0;
LimitState     = 'min';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING above

    iter = iter + 1;

    % Compute internal forces N, V and eccentricity profile ex
    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
143
144     % Plot the current thrust line at this iteration
145     Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
146
147     if iWait == 1
148         waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
149         close;
150     end
151
152     % --- Find the most violated section ---
153     % r0 is the index of the section where |eccentricity| is maximum
154     [~, r0] = max(abs(ex));
155
156     % --- Relocate the nearest passage point to the offending section ---
157     % Intrados violation (ex < 0): move whichever support point is closer
158     % Extrados violation (ex > 0): move the crown point
159     if ex(r0) < 0
160         if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
161             n1 = r0;
162         else
163             n3 = r0;
164         end
165     else
166         n2 = r0;
167     end
168
169     % --- Check convergence ---
170     if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
171         ok_eccentricity = 1;
172     else
173         ok_eccentricity = 0;
174     end
175
176 end
177
178 % Plot the final (converged or last-iteration) thrust line
179 Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
180
181 end   % min_thrust
182
183
184 % ========================================================================
185 % PART 3 -- FUNCTION: max_thrust
186 % ========================================================================
187 % Finds the maximum thrust state.  Mirror image of min_thrust:
188 %
189 % MAXIMUM THRUST PATTERN:
190 %   The thrust line touches the extrados at both supports (e = +1)
191 %   and the intrados at the crown (e = -1).
192 %
193 % The relocation logic is the reverse of min_thrust:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   Extrados violation -> move a support point
%   Intrados violation -> move the crown point

function max_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess (reversed signs relative to min_thrust) ---
e1 =  maximum_eccentricity;   % extrados at left support
e2 = -maximum_eccentricity;   % intrados at crown
e3 =  maximum_eccentricity;   % extrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;
n3 = n + 1;

iter           = 0;
LimitState     = 'max';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING in min_thrust

    iter = iter + 1;

    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    [~, r0] = max(abs(ex));

    % Reversed logic relative to min_thrust
    if ex(r0) < 0
        % Intrados violation: move the crown point
        n2 = r0;
    else
        % Extrados violation: move the nearer support point
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
        end
    end

    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
245
246 end
247
248 Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
249
250 end   % max_thrust
251
252
253 % ========================================================================
254 % PART 4 -- FUNCTION: resistance_line
255 % ========================================================================
256 % Produces the final result figure for a converged limit state showing:
257 %
258 %   (a) Arch geometry: voussoir blocks drawn as alternating grey/white
259 %       patches ("Alhambra style"), with centroids marked
260 %   (b) Thrust line: dashed red curve
261 %   (c) Three passage points: filled red circles
262 %   (d) Internal force diagrams: axial N (red sticks) and shear V (blue sticks
    )
263 %       drawn as scaled arrows at each section face
264 %
265 % Output: EPS file, converted to PDF via Ghostscript (eps2pdf).
266
267 function resistance_line(n1, e1, n2, e2, n3, e3)
268
269 global n x y xe ye xi yi angles radius thickness iter fn LimitState
270
271 fs   = 16;
272 font = 'Times New Roman';
273 GS   = 'gswin64.exe';    % path to Ghostscript executable
274
275 % --- Compute converged internal forces ---
276 [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
277
278 % --- Thrust line coordinates ---
279 % The thrust line at section i is offset from the centerline by
280 %   ex(i) * thickness(i)/2  in the radial direction
281 xz = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
282 yz = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
283
284 % --- Draw voussoir blocks ---
285 for i = 1:n
286
287     % Four corners of voussoir i (two intrados + two extrados nodes)
288     xp = [xi(i), xi(i+1), xe(i+1), xe(i)];
289     yp = [yi(i), yi(i+1), ye(i+1), ye(i)];
290
291     % Alternating grey / white shading
292     if rem(i, 2) == 1
293         C = [0.5, 0.5, 0.5];   % grey
294     else
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        C = 'White';
    end

    patch(xp, yp, C);
    hold on;

    % Centroid of each voussoir (for verification)
    poly_i        = polyshape(xp, yp);
    [x0(i), y0(i)] = centroid(poly_i);

end

plot(x0, y0, 'k.');   % centroid markers

% --- Thrust line and passage points ---
plot(xz, yz, '--r', 'LineWidth', 2);
xzz = [xz(n1), xz(n2), xz(n3)];
yzz = [yz(n1), yz(n2), yz(n3)];
scatter(xzz, yzz, 80, 'red', 'filled');

axis('equal', 'tight');
grid minor; grid on;
title([fn ' - ' LimitState ' - iter ' num2str(iter)]);

% --- Axial (N) and shear (V) force diagrams ---
% Each stick starts at the thrust line point and extends in the direction
% normal (N) or tangential (V) to the section face.
% Scale: alpha chosen so the largest N fills 80% of the arch thickness.
alpha = 0.8 * thickness(1) / max(N);

for i = 1:n

    % Base point at the thrust line location for section i
    xBase = x(i) + ex(i) * thickness(i) * cosd(90 - angles(i)) / 2;
    yBase = y(i) + ex(i) * thickness(i) * sind(90 + angles(i)) / 2;

    % Axial force stick (red) -- along the arch axis
    xN = [xBase,  xBase + alpha * N(i) * sind(90 - angles(i))];
    yN = [yBase,  yBase - alpha * N(i) * cosd(90 - angles(i))];
    plot(xN, yN, '-r', 'LineWidth', 1);

    % Shear force stick (blue) -- perpendicular to arch axis
    xV = [xBase,  xBase + alpha * V(i) * cosd(90 - angles(i))];
    yV = [yBase,  yBase + alpha * V(i) * sind(90 - angles(i))];
    plot(xV, yV, '-b', 'LineWidth', 1);

end

% --- Export ---
FileName = [fn '-' LimitState '-Iter-' num2str(iter) '.eps'];
set(gca, 'FontSize', 0.8*fs, 'FontName', font);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
close all;

end   % resistance_line


% ========================================================================
% PART 5 -- FUNCTION: face_points
% ========================================================================
% Returns the (x,y) coordinates of the point on each section face at a
% prescribed normalised eccentricity.
%
%   eccentricity = +1  ->  extrados
%   eccentricity = -1  ->  intrados
%   eccentricity =  0  ->  centroid (centerline)
%
% NOTE: this function calls angles() and radius(), thickness() as
% functions -- in the original Octave code these were functions returning
% the global arrays.  In MATLAB with globals they resolve to the global
% variables directly; the call syntax is preserved from the original.

function [x, y] = face_points(eccentricity)

global n aperture

a = angles();

x = sin(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);
y = cos(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);

end   % face_points


% ========================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: faces_wrenches  *** STUB -- BODY NOT PROVIDED ***
% ========================================================================
% PURPOSE:
%   Computes the resultant force wrench (Fx, Fy, M) acting on each section
%   face due to the cumulative self-weight of all voussoirs above that face.
%
% EXPECTED OUTPUTS  (each an (n+1) x 1 vector):
%   Fx(i) : horizontal force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   Fy(i) : vertical   force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   M(i)  : moment resultant at face i about the centerline point      [N.m]
%
% EXPECTED ALGORITHM (not provided in original source):
%   For each block j above face i:
%     weight_j = density(j) * g * volume_j
%     volume_j = area of trapezoidal block j * thickness_cst  (unit depth)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%     Add weight_j to Fy(i) and compute its moment arm about x(i),y(i)
%
% *** This function must be completed before the code will run. ***

function [Fx, Fy, M] = faces_wrenches

global n x y density g angles radius thickness  %#ok<NUSED>

% TODO: implement self-weight accumulation loop here
error('faces_wrenches: function body not provided in original source -- must
    be implemented.');

end   % faces_wrenches


% ========================================================================
% PART 7 -- FUNCTION: faces_efforts
% ========================================================================
% Computes the internal stress resultants at every section face:
%
%   N(i)  : normal (axial compressive) force at face i        [N]
%   V(i)  : shear force at face i                             [N]
%   ex(i) : normalised eccentricity of thrust line at face i  [-1 .. +1]
%
% ALGORITHM:
%   1. Find the boundary force (Fx1,Fy1,M1) on the first face that makes
%      the thrust line pass through the three prescribed points
%      -> calls three_points()
%   2. Get the self-weight wrench at every face
%      -> calls faces_wrenches()
%   3. Superpose: total wrench = self-weight + boundary force
%      (the boundary force contributes a linearly growing moment)
%   4. Rotate from global (x,y) axes to local (normal, tangential) frame
%      using the section face angle
%   5. Compute eccentricity from bending moment and axial force

function [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global x y angles thickness

% Step 1 -- Boundary force on the first face
[Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

% Step 2 -- Self-weight wrench at every face
[Fx, Fy, M] = faces_wrenches();

% Step 3 -- Superpose contributions
% The moment arm of (Fx1,Fy1) grows linearly from the first face
Fx = Fx + Fx1;
Fy = Fy + Fy1;
M  = M  + M1 + (x - x(1)) .* Fy1 - (y - y(1)) .* Fx1;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
447
448 % Step 4 -- Rotate to local section frame
449 % angles(i) is measured from the vertical [deg]
450 % Convention: N positive in compression (masonry standard)
451 N  = -cosd(angles) .* Fx + sind(angles) .* Fy;
452 V  =  sind(angles) .* Fx + cosd(angles) .* Fy;
453
454 % Step 5 -- Eccentricity: e = M / (N * t/2)
455 % Normalised by half-thickness so |e| = 1 at the face boundary
456 ex = -2 .* M ./ (N .* thickness);
457
458 end   % faces_efforts
459
460
461 % ========================================================================
462 % PART 8 -- FUNCTION: three_points
463 % ========================================================================
464 % Determines the force (Fx1, Fy1, M1) that must act on the FIRST section
465 % face in order to make the thrust line pass through three prescribed points.
466 %
467 % METHOD -- moment equilibrium at each passage point:
468 %   For the thrust line to pass through point (xa,ya) on face n1, the
469 %   total moment about that point must be zero.  This gives one linear
470 %   equation in (Fx1, Fy1, M1).  Writing it for all three points:
471 %
472 %       A * [Fx1; Fy1; M1] = Mp
473 %
474 %   where A is 3x3 and Mp contains the self-weight moments at the
475 %   passage points.  Solved by Gaussian elimination (A\Mp).
476 %
477 % SIDE EFFECT: this function also initialises all arch geometry globals
478 %   (angles, thickness, radius, x, y, xe, ye, xi, yi, density)
479 %   because it is the deepest call in the chain.
480
481 function [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3)
482
483 global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
484        x y xe ye xi yi density angles radius thickness
485
486 % --- Build arch geometry ---
487 % Section face angles uniformly distributed over the full arch opening
488 a      = aperture;
489 da     = 2*a / n;
490 angles = (-a : da : a)';          % (n+1) x 1  [deg]
491
492 % Constant thickness and radius for all faces (could be made variable)
493 thickness = ones(n+1, 1) * thickness_cst;
494 radius    = ones(n+1, 1) * radius_cst;
495
496 % --- Extrados coordinates  (e = +1) ---
497 xe = sind(angles) .* (radius + thickness/2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
ye = cosd(angles) .* (radius + thickness/2);

% --- Intrados coordinates  (e = -1) ---
xi = sind(angles) .* (radius - thickness/2);
yi = cosd(angles) .* (radius - thickness/2);

% --- Voussoir density (one value per block, not per face) ---
density = ones(n, 1) * density_cst;

% --- Centerline coordinates  (e = 0) ---
x = sind(angles) .* radius;
y = cosd(angles) .* radius;

% Reference point: centre of the first section face
xr = x(1);
yr = y(1);

% --- Coordinates of the three passage points ---
% Each lies at its prescribed eccentricity on its respective face
x1 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
y1 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);

x2 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
y2 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);

x3 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
y3 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);

xa = x1(n1);  ya = y1(n1);
xb = x2(n2);  yb = y2(n2);
xc = x3(n3);  yc = y3(n3);

% --- Moment-equilibrium matrix A ---
% Row i: moment of (Fx1,Fy1,M1) about passage point i = 0
%   (y_pt - yr)*Fx1 - (x_pt - xr)*Fy1 - M1 = -M_selfweight(ni)
A = [ ya-yr,  -(xa-xr),  -1 ;
      yb-yr,  -(xb-xr),  -1 ;
      yc-yr,  -(xc-xr),  -1 ];

% --- Self-weight wrench ---
[Fx, Fy, M] = faces_wrenches();

% --- Shift moment to the passage points ---
% Subtract lever arm from section centroid to passage point
xa = xa - x(n1);  ya = ya - y(n1);
xb = xb - x(n2);  yb = yb - y(n2);
xc = xc - x(n3);  yc = yc - y(n3);

% Moment at each passage point = face moment + transport term
Ma = M(n1) - Fx(n1)*ya + Fy(n1)*xa;
Mb = M(n2) - Fx(n2)*yb + Fy(n2)*xb;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

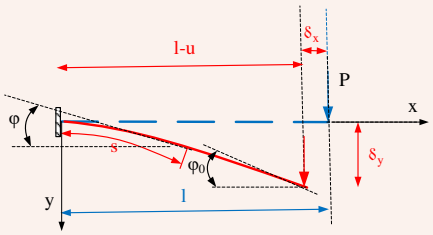
```
Mc = M(n3) - Fx(n3)*yc + Fy(n3)*xc;

Mp = [Ma; Mb; Mc];

% --- Solve for the unknown boundary force ---
W   = A \ Mp;
Fx1 = W(1);
Fy1 = W(2);
M1  = W(3);

end   % three_points
```

I.1.6 Grande desvio de uma viga



Solução do problema em §29.2.3

Nota: Apenas `Sol=1` Funciona, os outros dois falham em dar a resposta certa. Até o leitor para depurar.

```
% ========================================================================
% LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF A CANTILEVER BEAM UNDER END LOAD
% ========================================================================
% A cantilever beam of length L carries a tip load P (vertical).
% For large deflections, the classical Euler-Bernoulli linear theory
% (delta = PL^3/3EI) is no longer accurate. The exact solution requires
% solving a nonlinear boundary value problem based on the elastica equation:
%
%         d^2 phi / ds^2 = -P*cos(phi) / EI
%
% where phi(s) is the rotation at arc-length s from the fixed end.
%
% This script compares three solution methods for the tip displacement:
%   Sol = 1 : Direct numerical integration (RECOMMENDED -- others are buggy)
%   Sol = 2 : Elliptic integral form (incomplete -- currently incorrect)
%   Sol = 3 : Complete elliptic integral of the 2nd kind
%
% Outputs: plot of phi_0 and normalised displacements vs load parameter PL^2/
    EI
% ========================================================================

clear; clc; close all;

```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Beam properties
% ------------------------------------------------------------------------
L  = 4;                  % Length [m]
A  = 50e-6;              % Cross-sectional area [m^2]  (not used here)
I  = 1e7 * 1e-12;        % Second moment of area [m^4]
E  = 800e9;              % Young's modulus [Pa]
EI = E * I;              % Bending stiffness [N.m^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Load stepping
% ------------------------------------------------------------------------
% We sweep P from dP to P_max in equal increments.
% The load parameter x = P*L^2/EI is dimensionless -- it is the natural
% variable for the elastica problem.

dP     = 1000;                   % Load increment [N]
P_max  = 5000000;                % Maximum load   [N]
nSteps = P_max / dP;             % Number of load steps

% Pre-allocate result arrays (faster than growing inside the loop)
PP      = zeros(1, nSteps);      % Applied load at each step
x       = zeros(1, nSteps);      % Dimensionless load PL^2/EI
y0      = zeros(1, nSteps);      % Linear (small-deflection) tip displacement
   / L
phi     = zeros(1, nSteps);      % Tip rotation phi_0 [rad]
yv      = zeros(1, nSteps);      % Vertical tip displacement / L  (nonlinear)
yh      = zeros(1, nSteps);      % Horizontal tip displacement / L (nonlinear)

% Choose solution method (only Sol=1 is currently verified)
sol = 1;

% fsolve options -- suppress iteration output; tight tolerance
fsolve_opts = optimset('TolFun', 1e-6, 'Display', 'off');

% Initial guess for phi_0 (tip rotation).
% pi/4 works well for moderate loads; may need adjustment at very large P.
phi0_guess = pi / 4;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Main loop over load steps
% ------------------------------------------------------------------------
for i = 1 : nSteps

    % Current load and dimensionless load parameter
    P     = i * dP;
    PP(i) = P;
    x(i)  = P * L^2 / EI;          % PL^2/EI  (horizontal axis of final plot)

    % Linear (Euler-Bernoulli) tip deflection, normalised by L
    % Valid only for small deflections; included for comparison
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    y0(i) = (P * L^3 / (3*EI)) / L;

    % alpha appears repeatedly: alpha = sqrt(P/EI)  [1/m]
    alpha = sqrt(P / EI);

    % ------------------------------------------------------------------
    % Step 3a -- Solve for phi_0 (rotation at the free tip)
    % ------------------------------------------------------------------
    % The exact arc-length condition gives an implicit equation for phi_0:
    %
    %   (1/sqrt(2)*alpha) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
    %
    % We solve this numerically with fsolve.
    % FuncPhi0 (defined at the bottom) returns the residual of this equation.

    [phi0, ~, exitflag] = fsolve( ...
        @(phi0) FuncPhi0(phi0, alpha, L), ...
        phi0_guess, fsolve_opts);

    if exitflag <= 0
        warning('Step %d: fsolve did not converge. phi0 may be unreliable.', i);
    end

    phi(i) = phi0;    % Store converged tip rotation

    % ------------------------------------------------------------------
    % Step 3b -- Compute tip displacements using the chosen method
    % ------------------------------------------------------------------

    beta = alpha * L;    % dimensionless load parameter (= sqrt(PL^2/EI))

    if sol == 1
        % --- Method 1: Direct numerical integration ---
        % Vertical displacement (normalised by L):
        %   delta_y/L = (sqrt(2)/(2*beta)) * integral_0^phi0 [ sin(phi)/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi
        %
        % Horizontal shortening (normalised by L):
        %   delta_x/L = (sqrt(2)/(alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1

        integrand_v = @(phi) sin(phi) ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, phi0);

        yv(i) = (sqrt(2) / (2*beta)) * integral_v;
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    elseif sol == 2
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
        % --- Method 2: Elliptic integral formulation (CURRENTLY INCORRECT)
    ---
        % The substitution k = sqrt((1+sin(phi0))/2) transforms the integral
        % into a standard elliptic form.  This branch has a known bug -- left
        % as an exercise for the reader.

        k = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );

        integrand_v = @(theta) (2*k^2*sin(theta).^2 - 1) ...
                               ./ sqrt(1 - k^2*sin(theta).^2);
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, pi/2);

        yv(i) = (1 / beta) * integral_v;
        % yh not computed in this branch

    elseif sol == 3
        % --- Method 3: Complete and incomplete elliptic integrals of 2nd kind
     ---
        % Uses MATLAB's built-in ellipticE.
        % delta_y/L = 1 - (2/beta) * [ E(k) - E(phi0, k) ]
        % where E(k) is the complete and E(phi0,k) the incomplete elliptic
    integral.

        k        = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );
        E_k      = ellipticE(k);                        % complete
        E_k_phi0 = ellipticE(asin(sin(phi0)), k);       % incomplete

        yv(i) = 1 - (2/beta) * (E_k - E_k_phi0);
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    end

end   % end load-step loop

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot results
% -------------------------------------------------------------------------
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;   % font size

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

% --- Upper panel: tip rotation vs load parameter ---
subplot(2, 1, 1)
plot(x, phi, 'k', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [0 1.6], 'YTick', 0:0.2:1.6)
grid on
xlabel('PL^2 / EI',  'FontSize', fs)
ylabel('\phi_0  [rad]', 'FontSize', fs)
title('Tip rotation', 'FontSize', fs)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

% --- Lower panel: normalised tip displacements vs load parameter ---
subplot(2, 1, 2)
plot(x, yv, 'r', x, yh, 'b', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [-0.6 1.0], 'YTick', -0.6:0.2:1.0)
grid on
xlabel('PL^2 / EI', 'FontSize', fs)
ylabel('Normalised displacement', 'FontSize', fs)
title('Tip displacements (normalised by L)', 'FontSize', fs)
lgnd = legend('\delta_y / L', '\delta_x / L', 'Location', 'best');
set(lgnd, 'Color', 'none')
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

exportgraphics(hf1, 'Displ-Load-Anal.pdf', 'BackgroundColor', 'none')

% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: FuncPhi0
% ========================================================================
function residual = FuncPhi0(phi0, alpha, L)
% FuncPhi0  Residual of the arc-length constraint for the elastica problem.
%
%   The exact arc-length condition for a cantilever under tip load P is:
%
%     (1 / (sqrt(2)*alpha)) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
%
%   Rearranging, the residual (which fsolve drives to zero) is:
%
%     residual = (1/(sqrt(2)*alpha)) * integral(...) - L
%
%   Inputs:
%     phi0     : current guess for tip rotation [rad]
%     alpha    : sqrt(P/EI)  [1/m]
%     L        : beam length [m]
%
%   Output:
%     residual : how far the arc-length condition is from being satisfied

    % The integrand has a square-root singularity at phi = phi0.
    % max(eps, ...) prevents division by exactly zero at the upper limit.
    integrand = @(phi) 1 ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );

    % Numerical integration from 0 to phi0
    integralValue = integral(integrand, 0, phi0, 'RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-9);

    % Residual: left-hand side minus right-hand side of the arc-length equation
    residual = (1 / (sqrt(2) * alpha)) * integralValue - L;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
215
216 end
```

I.2 Parte II: Projeto estrutural e Análise

Esta seção aborda detalhadamente projeto estrutural e análise pórtico, incluindo projeto casca, métodos de análise, torção e otimização.

I.2.1 Desenho de cilíndrico cascas

Código escrito por Georg, R., 2014; Precisa de verificação.

O seguinte código é desenvolvido para o projeto da porção casca do cilíndrico biapoiado. O código segue o procedimento de projeto descrito pela teoria da rasa cascas e é discutido em §34.2.3.2.2.. O objetivo da ferramenta de projeto é determinar o esforços internos e deslocamentos dentro do casca.O código de projeto casca consiste nas entradas básicas e formulações do casca dimensionamento. A função do coeficiente casca produz as equações simultâneas necessárias para resolver as constantes arbitrárias. Com valores constantes conhecidos, a função das forças casca determina o esforços internos e deslocamento do casca. O código é apresentado da seguinte forma:

```
1  % ========================================================================
2  % DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
3  % ========================================================================
4  % Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
5  % method, which decomposes the shell response into:
6  %
7  %   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
8  %       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
9  %       Valid in the interior, away from edges.
10 %
11 %   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
12 %       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
13 %       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
14 %       mixed trig/hyperbolic functions.
15 %
16 %   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
17 %       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
18 %       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
19 %
20 % GEOMETRY (single barrel vault):
21 %   x  : longitudinal axis  (0 to L)
22 %   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   r  : radius of curvature
%   h  : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)             [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                   [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)      [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge    [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                  [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)      [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete            [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                      [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;      Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;      Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;  Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;   Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;

% Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
% ------------------------------------------------------------------------
% The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
% We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
% shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
% stress resultant type SC evaluated at the edge.
%
% SC index map:
%   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
%   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip

F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi

F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix

ShellCoef.M_phi  = F1;
ShellCoef.N_phi  = F2;
ShellCoef.Qp_phi = F3;
ShellCoef.N_xphi = F4;

% Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
% ------------------------------------------------------------------------
% Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
phi  = 0;
phit = phi - phi_k;
x    = L/2;

% --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) *
    sin(k*x);

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;    Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;      Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;        Displacement.v = v;    Displacement.w = w;
Displacement.up = up;      Displacement.vp = vp;  Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                       [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                       [ft]
L     = 66.5;           % span                                  [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                          [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                      [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge            [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                    [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                  [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                       [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip
    /ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2)
    ...
              + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force      [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                          [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement          [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in
   shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal
   steel

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r           * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);

end   % shell_coefficients


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
% ========================================================================
% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2            * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma      * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                   * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.2 Análise aproximada pórtico; método cantilever

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x  : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
%   r  : radius of curvature
%   h  : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)             [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                   [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)      [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge    [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                  [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)      [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete            [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                      [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;      Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;      Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;  Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;   Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;

% Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
% ------------------------------------------------------------------------
% The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
% We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
% shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
% stress resultant type SC evaluated at the edge.
%
% SC index map:
%   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
%   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip

F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi

F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix

ShellCoef.M_phi  = F1;
ShellCoef.N_phi  = F2;
ShellCoef.Qp_phi = F3;
ShellCoef.N_xphi = F4;

% Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
% ------------------------------------------------------------------------
% Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
phi  = 0;
phit = phi - phi_k;
x    = L/2;

% --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) *
    sin(k*x);

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) +
   Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;    Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;      Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;        Displacement.v = v;    Displacement.w = w;
Displacement.up = up;      Displacement.vp = vp;  Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                        [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                        [ft]
L     = 66.5;           % span                                   [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                           [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                        [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                       [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge             [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                     [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                   [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                        [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip
    /ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2)
    ...
              + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force      [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                          [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement          [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in
   shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal
   steel

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r           * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);

end   % shell_coefficients


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
% ========================================================================
% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2            * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma      * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                   * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.3 Torção não uniforme

```
% ========================================================================
% NON-UNIFORM (WARPING) TORSION -- DISTRIBUTION OF TORQUE COMPONENTS
% ========================================================================
% When a thin-walled open section (e.g. I-beam, channel) is twisted, the
% total applied torque T is resisted by TWO mechanisms:
%
%   1. ST. VENANT TORSION (T_SV):
%      Pure shear flow around the cross-section.  Dominates in short
%      members and near free ends where warping is unrestrained.
%
%   2. WARPING TORSION (T_V):
%      Bending of the flanges in opposite directions (bimoment).
%      Dominates near fixed ends where warping is fully restrained.
%
% The governing ODE for a member fixed at the base (x=0) and free at
% the top (x=L), carrying a concentrated torque T at the free end, gives:
%
%   T_V(x)  = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
%   T_SV(x) = T * [ 1 - cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda) ]
%
% where:
%   lambda = sqrt(E*C_w / G*J)   [length]  -- torsional characteristic length
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
% For this W-section example lambda = 65.9 in (= 5.49 ft).
%
% AT THE FIXED END (x=0):
%   T_V   = T / cosh(L/lambda)   -> small for long members (SV dominates)
%   T_SV  = T * [1 - 1/cosh(L/lambda)]
%
% AT THE FREE END (x=L):
%   T_V   = T   (all torque is warping torsion at the point of application)
%   T_SV  = 0
%
% This script plots the distribution of both torque components over the
% member height for four different member lengths, illustrating how the
% relative importance of warping vs. St. Venant torsion varies with L/lambda.
%
% REFERENCE SECTION: W-shape with lambda = 65.9 in
% Units: inches for internal calculation, feet for plotting
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Display settings
% ------------------------------------------------------------------------
fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/1.5, scrsz(4)/2]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
T      = 1;               % applied torque (normalised)         [kip.in]
lambda = 65.9;            % torsional characteristic length     [in]
                          % lambda = sqrt(E*Cw / G*J) for the section

L_ft   = [10, 20, 25, 30]; % member lengths to compare          [ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Plot torque distributions for each member length
% ------------------------------------------------------------------------
% Four subplots, one per length.
% x runs from 0 (fixed base) to L (free top where torque is applied).
% Torques are normalised by T so the plots show fractions [0..1].
% Height axis is plotted in feet (x/12) for readability.

for i = 1 : 4

    L_in = L_ft(i) * 12;          % member length in inches
    x    = (0 : L_in);            % position vector, inch increments
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

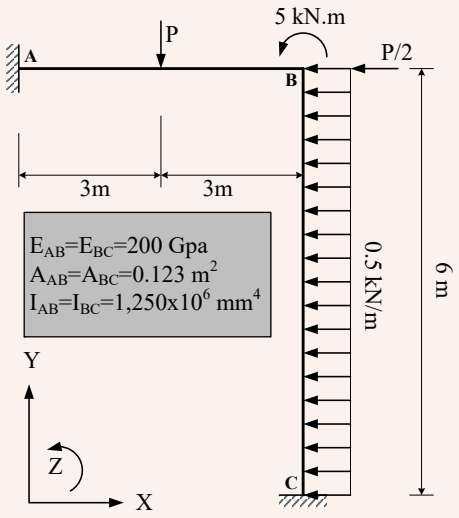
```
74
75      % --- Warping torsion component ---
76      % T_V = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
77      % Maximum at the free end (x=L), minimum at the fixed end (x=0)
78      T_V  = T * cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda);
79
80      % --- St. Venant torsion component ---
81      % T_SV = T - T_V  (the two must sum to T at every section)
82      % Maximum at the fixed end, zero at the free end
83      T_SV = T * (1 - cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda));
84
85      % --- Plot: torque on horizontal axis, height on vertical axis ---
86      % (vertical axis matches the physical orientation of the member)
87      subplot(2, 2, i);
88      plot(T_V,  x/12, 'b', ...
89           T_SV, x/12, 'r', ...
90           'LineWidth', 1.5);
91
92      % Axes: normalised torque 0->1, height 0->30 ft
93      xlim([0 1]);
94      ylim([0 30]);
95      set(gca, 'XTick', 0 : 0.2 : 1.0);
96      set(gca, 'YTick', 0 : 5  : 30  );
97
98      grid on;
99      xlabel('T / T_{total}  (normalised)',        'FontSize', fs);
100     ylabel('Height  [ft]',                       'FontSize', fs);
101     title( ['Member length  L = ' num2str(L_ft(i)) ' ft  '  ...
102             '(L/\lambda = ' num2str(L_in/lambda,'%.1f') ')'], ...
103            'FontSize', fs);
104
105     lgd = legend('T_V  (warping)', 'T_{SV}  (St. Venant)', ...
106                  'Location', 'North');
107     lgd.FontSize = fs - 2;
108
109     set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);
110
111 end
112
113 sgtitle(['Non-Uniform Torsion:  \lambda = ' num2str(lambda) ' in'], ...
114         'FontSize', fs + 2);
```

I.2.4 Ortogonal pórtico

Análise do seguinte ortogonal pórtico, §42.3.2

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.




```
% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- ORTHOGONAL FRAME (L-SHAPED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element frame with members oriented perpendicular to each
% other (one horizontal, one vertical), meeting at a common node B.
%
% GEOMETRY:
%
%        C (pin -- vertical reaction only)
%        |
%        | Element BC (vertical, length L2)
%        |
%   A ---B   (B = free node: DOFs u_B, v_B, theta_B)
%   Element AB (horizontal, length L1)
%   A is fully fixed.
%
% Both elements are aligned with global axes -> no coordinate transform needed
    .
%
% FREE DOFs AT NODE B:
%   DOF 1: horizontal displacement u_B
%   DOF 2: vertical displacement   v_B
%   DOF 3: rotation                theta_B
%
% Original code courtesy of Xiao Fu.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Element properties  (SI: kN, m)
% ------------------------------------------------------------------------
L = [6.0;  6.0];         % element lengths            [m]      index: (AB, BC)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
A = [0.123; 0.123];      % cross-sectional areas      [m^2]
E = [200e6; 200e6];      % Young's moduli             [kN/m^2]
I = [1250e-6; 1250e-6];  % second moments of area     [m^4]

EA = E .* A;             % axial stiffnesses          [kN]
EI = E .* I;             % bending stiffnesses        [kN.m^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Applied loads
% ------------------------------------------------------------------------
P = 1;    % concentrated horizontal force at B    [kN]
M = 5;    % concentrated moment at B              [kN.m]
w = 0.5;  % uniform distributed load on BC        [kN/m]  (transverse on BC)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix K (free DOFs at B)
% ------------------------------------------------------------------------
% Assembled by superposing contributions from AB and BC:
%
%   K(1,1): axial  AB  +  bending BC  (u_B direction)
%   K(2,2): bending AB +  axial  BC   (v_B direction)
%   K(3,3): bending AB +  bending BC  (theta_B)
%   K(1,3): coupling from BC (6EI2/L2^2)
%   K(2,3): coupling from AB (-6EI1/L1^2)

K = [ EA(1)/L(1) + 12*EI(2)/L(2)^3,                          0,    6*EI(2)/L
   (2)^2              ;
                              0,   EA(2)/L(2) + 12*EI(1)/L(1)^3,  -6*EI(1)/L
   (1)^2              ;
             6*EI(2)/L(2)^2,              -6*EI(1)/L(1)^2,    4*EI(1)/L(1)
   + 4*EI(2)/L(2)  ]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Equivalent nodal load vector
% ------------------------------------------------------------------------
% Distributed and element loads -> fixed-end reactions (sign-reversed at B)
% plus directly applied nodal loads.
%
%   AB carries midpoint load P (vertical):
%     fixed-end shear = P/2, fixed-end moment = +/-P*L1/8
%
%   BC carries uniform load w (transverse = horizontal on vertical member):
%     fixed-end shear = w*L2/2, fixed-end moment = +/-w*L2^2/12

NEL = [ -w*L(2)/2                 ;   % DOF 1: fixed-end shear from BC
        -P/2                      ;   % DOF 2: fixed-end shear from AB
         P*L(1)/8 - w*L(2)^2/12   ];  % DOF 3: fixed-end moments from AB and
   BC

F   = [ -P/2 ;   % DOF 1: applied horizontal force (half at B)
         0   ;   % DOF 2: no direct vertical force
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
         M   ];  % DOF 3: applied moment

F_ext = NEL + F;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Solve for displacements at B
% ------------------------------------------------------------------------
Disp = K \ F_ext

% Disp = [u_B [m];  v_B [m];  theta_B [rad]]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element AB
% ------------------------------------------------------------------------
% End A fixed (zero displacements); end B has solved Disp values.
% F_int = k * d - NEL_elem

k_AB   = stiff(E(1), I(1), L(1), A(1));
NEL_AB = [0; -P/2; -P*L(1)/8; 0; -P/2; P*L(1)/8];
d_AB   = [0; 0; 0; Disp(1); Disp(2); Disp(3)];

F_AB = k_AB * d_AB - NEL_AB   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B] in LCS

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element BC
% ------------------------------------------------------------------------
% BC is vertical: local axial = global y, local transverse = global x.
% LCS displacements at B:  u_local = -v_B,  v_local = +u_B

k_BC   = stiff(E(2), I(2), L(2), A(2));
NEL_BC = [0; -w*L(2)/2; -w*L(2)^2/12; 0; -w*L(2)/2; w*L(2)^2/12];
d_BC   = [-Disp(2); Disp(1); Disp(3); 0; 0; 0];

F_BC = k_BC * d_BC - NEL_BC   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C] in LCS


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
%
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]
%   u     : axial displacement
%   v     : transverse displacement
%   theta : rotation
%   1, 2  : near and far end nodes

function k = stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;
```

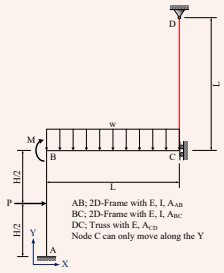
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
131
132 k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
133           0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
134           0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
135      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
136           0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
137           0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];
138
139 end
```

I.2.5 Ortogonal híbrido pórtico

Ortogonal pórtico resolvido em §42.3.4




```
% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- HYBRID ORTHOGONAL FRAME
% ========================================================================
% Three-element frame: vertical beam-column AB, horizontal beam BC,
% and a vertical axial bar DC connecting node C to a fixed support D.
%
% GEOMETRY:
%   A (fixed wall)
%   |
%   | AB (vertical beam-column, length Lab)
%   |
%   B ------------------------- C (roller: horizontal DOF only)
%         BC (horizontal beam, length Lbc)
%                   |
%                   | DC (axial bar only, length Ldc)
%                   |
%                   D (fixed)
%
% FREE DOFs (4 total at nodes B and C):
%   DOF 1: horizontal displacement of B  (Delta_1)
%   DOF 2: vertical   displacement of B  (Delta_2)
%   DOF 3: rotation at B                 (theta_3)
%   DOF 4: horizontal displacement of C  (Delta_4)
%
% LOADING:
%   P : concentrated transverse load at midspan of AB
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   w : uniform distributed load along BC (transverse = vertical)
%   Applied moment -P*Lbc at node B (in NF vector)
%
% UNITS: GPa, kN, mm (consistent throughout)
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Structural properties
% ------------------------------------------------------------------------
E   = 200;          % Young's modulus                    [kN/mm^2 = GPa]
I   = 200e6;        % second moment of area (beams)      [mm^4]

Lab = 8000;         % length of AB                       [mm]
Lbc = 10000;        % length of BC                       [mm]
Ldc = 10000;        % length of DC                       [mm]

Aab = 5000;         % area of AB                         [mm^2]
Abc = 5000;         % area of BC                         [mm^2]
Adc = 100;          % area of DC (axial bar only)        [mm^2]

P   = 10;           % midspan load on AB                 [kN]
w   = 1e-3;         % uniform load on BC                 [kN/mm]

EI   = E * I;
EAab = E * Aab;
EAbc = E * Abc;
EAdc = E * Adc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Nodal force vectors
% ------------------------------------------------------------------------
% NF : forces/moments applied directly at free DOFs
NF = [  0      ;   % DOF 1
        0      ;   % DOF 2
       -P*Lbc  ;   % DOF 3: applied moment at B
        0      ];  % DOF 4

% NEF : equivalent nodal forces from element loads (fixed-end reactions
%       carried to the free DOFs, sign reversed)
%   AB: midpoint load P -> shear P/2 at B, moment P*Lab/8 at B
%   BC: uniform load w  -> shear w*Lbc/2 at B and C, moment w*Lbc^2/12 at B
NEF = [  P/2                    ;   % DOF 1: from AB
        -w*Lbc/2                ;   % DOF 2: from BC
         P*Lab/8 - w*Lbc^2/12   ;   % DOF 3: from AB and BC
        -w*Lbc/2                ];  % DOF 4: from BC at C

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix (4 x 4)
% ------------------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Superposition of AB (vertical beam), BC (horizontal beam), DC (axial bar)
Ktt = [ 12*EI/Lab^3 + EAbc/Lbc,                    0,         6*EI/Lab^2,
             0        ;
                              0,  EAab/Lab + 12*EI/Lbc^3,  6*EI/Lbc^2,
   -12*EI/Lbc^3         ;
                 6*EI/Lab^2,            6*EI/Lbc^2,  4*EI/Lab + 4*EI/Lbc,
   -6*EI/Lbc^2         ;
                              0,          -12*EI/Lbc^3,     -6*EI/Lbc^2,   12*
   EI/Lbc^3 + EAdc/Ldc ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Solve for displacements
% ------------------------------------------------------------------------
Delta = Ktt \ (NF + NEF);

Delta_1 = Delta(1);   % horizontal displacement of B   [mm]
Delta_2 = Delta(2);   % vertical   displacement of B   [mm]
theta_3 = Delta(3);   % rotation at B                  [rad]
Delta_4 = Delta(4);   % horizontal displacement of C   [mm]

fprintf('Node B:  u = %+.6f mm   v = %+.6f mm   theta = %+.4e rad\n', ...
        Delta_1, Delta_2, theta_3);
fprintf('Node C:  u = %+.6f mm\n', Delta_4);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Internal forces in element AB (vertical beam-column)
% ------------------------------------------------------------------------
% LCS: local x points up (A->B).
%   Local axial at B  =  global vertical  =  Delta_2
%   Local transverse  = -global horizontal = -Delta_1

k_ab   = beam_stiff(E, I, Lab, Aab);
nef_ab = [0; -P/2; -P*Lab/8; 0; -P/2; P*Lab/8];
d_ab   = [0; 0; 0; Delta_2; -Delta_1; theta_3];

F_int_ab = k_ab * d_ab - nef_ab   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element BC (horizontal beam)
% ------------------------------------------------------------------------
% LCS = GCS (BC is horizontal, no transformation needed).
% C: roller -> v_C = 0, pin -> theta_C = 0; only u_C = Delta_4 is free.

k_bc   = beam_stiff(E, I, Lbc, Abc);
nef_bc = [0; -w*Lbc/2; -w*Lbc^2/12; 0; -w*Lbc/2; w*Lbc^2/12];
d_bc   = [Delta_1; Delta_2; theta_3; 0; Delta_4; 0];

F_int_bc = k_bc * d_bc - nef_bc   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element DC (axial bar)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Pin-ended bar: 2x2 stiffness, axial only.
% D is fixed; C moves horizontally by Delta_4.
% DC is vertical so local axial of C = -Delta_4.

k_dc  = EAdc/Ldc * [1, -1; -1, 1];
d_dc  = [0; -Delta_4];

F_int_dc = k_dc * d_dc   % [N_D, N_C] axial forces


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: beam_stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]

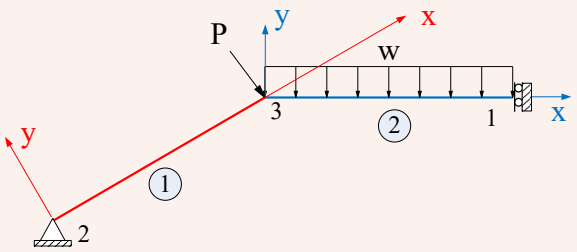
function k = beam_stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
         0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

end
```

I.2.6 Pórtico; Conectado




```
clc; clear;

% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- INCLINED FRAME (HARD-WIRED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element plane frame where both elements are inclined,
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% requiring coordinate transformation between LCS and GCS.
%
% GEOMETRY (coordinates in meters):
%   Node 1: (0,     0)     fixed support  (restrained DOFs 4, 5, 6)
%   Node 2: (7.416, 3)     free node      (free DOFs 1, 2, 3)
%   Node 3: (15.416,3)     fixed support  (restrained DOFs 7, 8, 9)
%
%   Element 1: Node 1 to Node 2  (inclined)
%   Element 2: Node 2 to Node 3  (horizontal at y = 3 m)
%
% FREE DOFs AT NODE 2:
%   DOF 1: horizontal displacement u
%   DOF 2: vertical   displacement v
%   DOF 3: rotation theta
%
% LOADING:
%   Element 2: uniform distributed load 4 kN/m (transverse)
%   Node 2:    concentrated 50 kN load (components resolved into DOFs 1,2,3)
%
% KEY STEPS:
%   1. stiff() builds k (LCS), K (GCS), Gamma for each inclined element
%   2. Augmented 9x9 stiffness matrix assembled via LM connectivity
%   3. Ktt (3x3 free-DOF block) solved for Node 2 displacements
%   4. Reactions recovered from Kut partition + fixed-end corrections
%   5. Internal forces recovered in LCS for each element
%
% UNITS: kN, m, kPa  (converted from mm^2, mm^4, GPa at input)
% ========================================================================

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Structural properties (input in mm/GPa, converted to m/kPa)
% ------------------------------------------------------------------------
A  = 6000  / 1e6;    % cross-sectional area  [mm^2 -> m^2]
II = 200e6 / 1e12;   % second moment         [mm^4 -> m^4]
EE = 200   * 1e6;    % Young's modulus       [GPa  -> kPa]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Element stiffness matrices
% ------------------------------------------------------------------------
k_loc = zeros(6,6,2);   % LCS stiffness
K_glo = zeros(6,6,2);   % GCS stiffness
Gamma = zeros(6,6,2);   % rotation matrices

% Element 1: Node1(0,0) to Node2(7.416,3)
[k_loc(:,:,1), K_glo(:,:,1), Gamma(:,:,1)] = stiff(EE, II, A, [0,0],
    [7.416,3]);

% Element 2: Node2(7.416,3) to Node3(15.416,3)
[k_loc(:,:,2), K_glo(:,:,2), Gamma(:,:,2)] = stiff(EE, II, A, [7.416,3],
    [15.416,3]);

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Location matrix (connectivity)
% ------------------------------------------------------------------------
% LM(elem, 1:6) maps local DOFs 1-6 to global DOF numbers.
% Rows = elements; columns = [near-end DOFs, far-end DOFs].
%
%   Element 1: near=Node1 (global 4,5,6), far=Node2 (global 1,2,3)
%   Element 2: near=Node2 (global 1,2,3), far=Node3 (global 7,8,9)

LM = [ 4, 5, 6, 1, 2, 3 ;
       1, 2, 3, 7, 8, 9 ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Assemble augmented global stiffness matrix (9x9)
% ------------------------------------------------------------------------
Kaug = zeros(9);
for elem = 1:2
    for r = 1:6
        lr = abs(LM(elem,r));
        for c = 1:6
            lc = abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc) = Kaug(lr,lc) + K_glo(r,c,elem);
        end
    end
end

Ktt = Kaug(1:3, 1:3);   % free-DOF partition (Node 2)
Kut = Kaug(4:9, 1:3);   % restrained-free coupling (for reactions)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Fixed-end actions (FEA) from distributed load on Element 2
% ------------------------------------------------------------------------
% Element 2 carries w = 4 kN/m uniform transverse load.
% Fixed-end reactions in LCS (Euler-Bernoulli, both ends clamped):
%   Shear at each end:    w*L/2
%   Moment at near end:  +w*L^2/12
%   Moment at far  end:  -w*L^2/12

w   = 4;     % distributed load on element 2   [kN/m]
L2  = sqrt((15.416-7.416)^2 + (3-3)^2);        % = 8 m

fea = zeros(6,2);
fea(:,2) = [0; w*L2/2; w*L2^2/12; 0; w*L2/2; -w*L2^2/12];

% Transform FEA to GCS
FEA_glo = zeros(6,2);
for elem = 1:2
    FEA_glo(:,elem) = Gamma(:,:,elem) * fea(:,elem);
end

% Fixed-end actions at restrained DOFs (for reaction correction)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
FEA_Rest = [0, 0, 0, FEA_glo(4:6,2)'];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Applied load vector at free DOFs
% ------------------------------------------------------------------------
% 50 kN concentrated load on element 2; position gives reaction fractions.
% Negative of near-end FEA is added to account for element loading.

P = zeros(3,1);
P(1) =  50 * 3/8;
P(2) = -50 * 7.416/8 - fea(2,2);
P(3) = -fea(3,2);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 - Solve for displacements at Node 2
% ------------------------------------------------------------------------
Displacements = Ktt \ P

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 8 - Support reactions
% ------------------------------------------------------------------------
Reactions = Kut * Displacements + FEA_Rest'

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 9 - Internal forces in LCS for each element
% ------------------------------------------------------------------------
d_global        = zeros(6,1,2);
d_global(:,:,1) = [0;0;0; Displacements(1:3)];
d_global(:,:,2) = [Displacements(1:3); 0;0;0];

fprintf('\n--- Internal Forces in LCS ---\n');
fprintf('%-12s %8s %8s %8s %8s %8s %8s\n', 'Element','N_i','V_i','M_i','N_j','
    V_j','M_j');
for elem = 1:2
    d_local = Gamma(:,:,elem) * d_global(:,:,elem);
    f_int   = k_loc(:,:,elem) * d_local + fea(:,elem);
    fprintf('Element %-4d %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f\n', ...
            elem, f_int(1),f_int(2),f_int(3),f_int(4),f_int(5),f_int(6));
end


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Computes LCS stiffness k, GCS stiffness K, and rotation matrix Gamma
% for an inclined 2D Euler-Bernoulli beam-column.
%
% alpha = atan2(dy,dx) is the element inclination angle.
% Gamma rotates a GCS 6-DOF vector into LCS.
% K = Gamma' * k * Gamma

```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, i, j)

dx    = j(1) - i(1);
dy    = j(2) - i(2);
L     = sqrt(dx^2 + dy^2);
alpha = atan2(dy, dx);
c     = cos(alpha);
s     = sin(alpha);

Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

EI = EE * II;
EA = EE * A;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
         0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end
```

I.2.7 Método da rigidez direta; pórtico

I.2.8 Código principal

```
% ========================================================================
% GENERAL 2D FRAME ANALYSIS -- DIRECT STIFFNESS METHOD
% ========================================================================
% A general-purpose program for linear elastic analysis of 2D frames
% (beam-columns with axial, shear, and bending DOFs).
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- Input data (problem definition): prob_1 (inline)
%   Part 3  -- function stiff        : element k, K, Gamma
%   Part 4  -- function plot_frame   : geometry and support visualisation
%   Part 5  -- function print1       : echo input to output file
%   Part 6  -- function print2       : write results to output file
%
% THEORY SUMMARY:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%   Each 2D beam-column element has 6 DOFs: [u_i, v_i, theta_i, u_j, v_j,
    theta_j]
%   The element stiffness is formed in the Local Coordinate System (LCS)
%   and rotated to the Global Coordinate System (GCS) via:
%       K_global = Gamma^T * k_local * Gamma
%
%   The augmented system (free + restrained DOFs) is assembled and
%   partitioned:
%       [ K_tt  K_tu ] { Delta_t }   { P_t }
%       [ K_ut  K_uu ] { Delta_u } = { R   }
%   where t = free (unknown) DOFs, u = restrained (known = 0) DOFs.
%   Solving the top partition: Delta_t = K_tt^-1 * P_t
%   Reactions from the bottom: R = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
%
% ID MATRIX CONVENTION:
%   ID(node, dof) = 0 -> DOF is FREE    (will be numbered first)
%   ID(node, dof) = 1 -> DOF is FIXED   (will be numbered after free DOFs)
%   After renumbering, ID holds the global equation number for each DOF.
%
% INPUT DATA ARRAYS (defined in prob_1 section below):
%   coord(n,2)          : nodal x,y coordinates
%   lnods(e,2)          : element connectivity [near_node, far_node]
%   ID(n,3)             : boundary condition flags (0=free, 1=fixed)
%   E(e), A(e), Iz(e)   : element material and section properties
%   NodalLoad(i,4)      : [node, Fx, Fy, Mz] for each applied nodal load
%   ElementLoad(e,2)    : [element, w] for each distributed load
%
% OUTPUT: text file 'my_output.dat' with full analysis results
% ========================================================================

clear;
fid = fopen('my_output.dat', 'w');
ndofpn = 3;   % degrees of freedom per node (u, v, theta)

% ========================================================================
% PART 1 -- PROBLEM DEFINITION  (inline replacement for prob_1.m)
% ========================================================================
% 5-node, 5-element portal frame with two fixed supports.
% Units: mm, kN  (E in kN/mm^2, A in mm^2, Iz in mm^4)
%
% NODE LAYOUT:
%   Node 1: (0,    0)     fixed base left
%   Node 2: (9000, 0)     fixed base right
%   Node 3: (0,    6000)  left knee (free)
%   Node 4: (9000, 6000)  right knee (free)
%   Node 5: (0,   12000)  top left (free)
%
% ELEMENT CONNECTIVITY:
%   Elem 1: Node 1 -> Node 3  (left column, lower)
%   Elem 2: Node 2 -> Node 4  (right column)
%   Elem 3: Node 3 -> Node 5  (left column, upper)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   Elem 4: Node 3 -> Node 4  (beam at mid-height)
%   Elem 5: Node 4 -> Node 5  (diagonal or upper beam)

Nnodes = 5;
Nelem  = 5;

% ID matrix: 0 = free DOF, 1 = restrained DOF
% Rows = nodes, columns = [u, v, theta]
ID = [ 1, 1, 1 ;    % Node 1: fully fixed
       1, 1, 1 ;    % Node 2: fully fixed
       0, 0, 0 ;    % Node 3: free
       0, 0, 0 ;    % Node 4: free
       0, 0, 0 ];   % Node 5: free

coord = [      0,     0 ;
          9000,     0 ;
             0,  6000 ;
          9000,  6000 ;
             0, 12000 ];

lnods = [ 1, 3 ;
          2, 4 ;
          3, 5 ;
          3, 4 ;
          4, 5 ];

% Section and material properties (uniform for all elements)
E  = 30e6  * ones(1, Nelem);   % Young's modulus     [kN/mm^2]
A  = 75000 * ones(1, Nelem);   % cross-section area  [mm^2]
Iz = 4.8e8 * ones(1, Nelem);   % second moment       [mm^4]

% Nodal loads: [node, Fx, Fy, Mz]
Nnodal_load = 2;
NodalLoad = [ 3,  80,  0,  0 ;   % 80 kN horizontal at Node 3
              5,  40,  0,  0 ];   % 40 kN horizontal at Node 5

% Element loads: [element, w (transverse distributed load)]
Nelement_load = 1;
ElementLoad   = [ 4,  1e-3 ];    % w = 0.001 kN/mm on element 4

% ========================================================================
% PART 2 -- VISUALISE FRAME GEOMETRY
% ========================================================================
plot_frame(coord, lnods, ID);

% ========================================================================
% PART 3 -- ELEMENT STIFFNESS MATRICES
% ========================================================================
% For each element, compute:
%   k_loc : stiffness in Local Coordinate System  (6x6)
%   K_glo : stiffness in Global Coordinate System (6x6) = Gamma^T k Gamma
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   Gamma : rotation matrix from GCS to LCS       (6x6)

k_loc = zeros(6, 6, Nelem);
K_glo = zeros(6, 6, Nelem);
Gamma = zeros(6, 6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    n1 = lnods(e,1);
    n2 = lnods(e,2);
    xy1 = coord(n1, :);
    xy2 = coord(n2, :);
    [k_loc(:,:,e), K_glo(:,:,e), Gamma(:,:,e)] = stiff(E(e), Iz(e), A(e), xy1,
     xy2);
end

% ========================================================================
% PART 4 -- DOF NUMBERING: update ID matrix
% ========================================================================
% Free DOFs are numbered first (1 .. size_K_tt),
% then restrained DOFs (size_K_tt+1 .. size_K_aug).
% This ensures the free-DOF partition occupies the top-left of K_aug.

orig_ID = ID;
eq_num  = 0;

% Pass 1: number free DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 0
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_tt = eq_num;   % number of free DOFs (= size of K_tt)

% Pass 2: number restrained DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 1
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_aug = eq_num;  % total DOFs (free + restrained)

print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, lnods, E, A, Iz);

% ========================================================================
% PART 5 -- LOCATION MATRIX (LM)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ========================================================================
% LM(e, 1:6) maps local DOF indices 1..6 of element e
% to global equation numbers using the updated ID matrix.
% Local DOFs 1-3 = near-end node; 4-6 = far-end node.

LM = zeros(Nelem, 6);
for e = 1 : Nelem
    LM(e,:) = [ ID(lnods(e,1), :),  ID(lnods(e,2), :) ];
end

% ========================================================================
% PART 6 -- ASSEMBLE AUGMENTED GLOBAL STIFFNESS MATRIX
% ========================================================================
% The augmented matrix K_aug includes all DOFs (free + restrained).
% Each element's GCS stiffness is scattered into K_aug via LM.

K_aug = zeros(size_K_aug);

for e = 1 : Nelem
    for r = 1 : 6
        lr = LM(e, r);      % global row
        for c = 1 : 6
            lc = LM(e, c);  % global column
            K_aug(lr, lc) = K_aug(lr, lc) + K_glo(r, c, e);
        end
    end
end

% Extract the free-DOF partition (top-left block)
K_tt = K_aug(1:size_K_tt, 1:size_K_tt);

% Extract the coupling partition (needed for reaction recovery)
K_ut = K_aug(size_K_tt+1 : size_K_aug,  1:size_K_tt);

% ========================================================================
% PART 7 -- LOAD VECTOR ASSEMBLY
% ========================================================================
% The total load vector P_tt combines:
%   (a) Directly applied nodal forces/moments
%   (b) Equivalent nodal forces (fixed-end reactions) from element loads,
%       transformed to GCS and added at the free DOFs with reversed sign

P_tt = zeros(size_K_tt, 1);

% --- (a) Directly applied nodal loads ---
for i = 1 : Nnodal_load
    node = NodalLoad(i, 1);
    for j = 1 : ndofpn
        eq = ID(node, j);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NodalLoad(i, j+1);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        end
    end
end

% --- (b) Equivalent nodal forces from distributed element loads ---
% Fixed-end reactions in LCS for uniform transverse load w over length L:
%   Near end: [ 0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12 ]
%
% These are transformed to GCS and subtracted from the load vector
% at free DOFs (and stored for reaction correction at restrained DOFs).

NEF_local  = zeros(Nelement_load, 6);
NEF_global = zeros(Nelement_load, 6);
R_nef      = zeros(size_K_aug - size_K_tt, 1);  % FEA at restrained DOFs

for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    w    = ElementLoad(e, 2);
    n1   = lnods(elem, 1);
    n2   = lnods(elem, 2);
    xy1  = coord(n1, :);
    xy2  = coord(n2, :);
    L    = sqrt((xy2(2)-xy1(2))^2 + (xy2(1)-xy1(1))^2);

    % Fixed-end reactions in LCS (uniform transverse load, both ends fixed)
    NEF_local(e,:)  = [0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12];

    % Transform to GCS using Gamma^T (Gamma maps GCS->LCS, so Gamma^T maps LCS
    ->GCS)
    NEF_global(e,:) = (Gamma(:,:,elem)' * NEF_local(e,:)')';
end

% Scatter NEF into load vector (free DOFs) or reaction correction (fixed DOFs)
for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(elem, i);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NEF_global(e, i);
        else
            R_nef(eq - size_K_tt) = R_nef(eq - size_K_tt) + NEF_global(e, i);
        end
    end
end

% ========================================================================
% PART 8 -- SOLVE FOR DISPLACEMENTS
% ========================================================================
Displacements = K_tt \ P_tt;

% ========================================================================
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% PART 9 -- RECOVER SUPPORT REACTIONS
% =========================================================================
% Reactions = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
% The FEA term corrects for the equivalent loads that were applied at
% restrained nodes due to element distributed loads.

Reactions = K_ut * Displacements - R_nef;

% =========================================================================
% PART 10 -- RECOVER ELEMENT INTERNAL FORCES (in LCS)
% =========================================================================
% For each element:
%   1. Extract global displacements at both end nodes from Displacements
%      (restrained DOFs have zero displacement)
%   2. Rotate to LCS:  d_local = Gamma * d_global
%   3. Compute internal forces:  f = k_loc * d_local
%   4. Subtract fixed-end actions for loaded elements (equilibrium correction)

int_forces = zeros(6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    % Assemble the 6x1 global displacement vector for this element
    d_global = zeros(6, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(e, i);
        if eq <= size_K_tt
            d_global(i) = Displacements(eq);
        else
            d_global(i) = 0;   % restrained DOF
        end
    end

    % Rotate to LCS and compute internal forces
    d_local        = Gamma(:,:,e) * d_global;
    int_forces(:,e) = k_loc(:,:,e) * d_local;

    % Subtract fixed-end actions for distributed loads on this element
    for j = 1 : Nelement_load
        if ElementLoad(j,1) == e
            int_forces(:,e) = int_forces(:,e) - NEF_local(j,:)';
        end
    end
end

% Write all results to output file
print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
       Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
       Nelement_load, ElementLoad);

fclose(fid);
fprintf('Analysis complete. Results written to my_output.dat\n');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
319
320
321 % ========================================================================
322 % FUNCTION: stiff
323 % ========================================================================
324 % Computes element stiffness for an arbitrarily inclined 2D beam-column.
325 %
326 % INPUTS:
327 %   EE, II, A  : Young's modulus, second moment, cross-section area
328 %   xy_1, xy_2 : [x,y] coordinates of near and far end nodes
329 %
330 % OUTPUTS:
331 %   k     : 6x6 stiffness matrix in LCS
332 %   K     : 6x6 stiffness matrix in GCS  (= Gamma^T k Gamma)
333 %   Gamma : 6x6 rotation matrix (GCS vector -> LCS vector)
334 %
335 % SPECIAL CASE: vertical elements (dx approx 0) are detected explicitly
336 % to avoid numerical issues with atan2 near +/-pi/2.
337
338 function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, xy_1, xy_2)
339
340 dx = xy_2(1) - xy_1(1);
341 dy = xy_2(2) - xy_1(2);
342 L  = sqrt(dx^2 + dy^2);
343
344 % Inclination angle -- handle near-vertical elements explicitly
345 if abs(dx) > max(abs(xy_2(1)), abs(xy_1(1))) * 1e-6
346     alpha = atan2(dy, dx);
347 else
348     alpha = (dy > 0) * pi/2 + (dy <= 0) * (-pi/2);
349 end
350
351 c = cos(alpha);
352 s = sin(alpha);
353
354 % Rotation matrix: transforms a GCS 6-DOF vector to LCS
355 Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
356          -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
357           0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
358           0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
359           0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
360           0,  0,  0,  0,  0,  1 ];
361
362 % Element stiffness in LCS (Euler-Bernoulli beam-column)
363 EI = EE * II;
364 EA = EE * A;
365
366 k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
367          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
368          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
369      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end   % stiff


% ======================================================================
% FUNCTION: plot_frame
% ======================================================================
% Draws the frame geometry: elements (blue), free nodes (magenta circles),
% support symbols (red), element numbers, and node numbers.
%
% Support type is inferred from the ID row for each node:
%   [1,1,1] -> fixed wall     (hatched bar)
%   [1,1,0] -> pin support    (triangle)
%   [0,1,0] -> horizontal roller
%   [1,0,0] -> vertical roller
%   [0,1,1] -> horizontal roller with rotation fixed
%   [1,0,1] -> vertical roller with rotation fixed

function plot_frame(coord, lnods, ID)

x = coord(:,1);
y = coord(:,2);

figure;
margin      = max(max(x)-min(x), max(y)-min(y)) / 10;
ax          = [min(x)-margin, max(x)+margin, min(y)-margin, max(y)+margin];
axis(ax);  axis('equal');  hold on;

n_nodes    = size(coord,  1);
n_elements = size(lnods,  1);
n_nodes_id = size(ID,     1);   % may differ from n_nodes if ID is larger
axlim      = axis;
cs         = max(axlim(2)-axlim(1), axlim(4)-axlim(3)) / 40;  % circle size

% --- Draw support symbols ---
for i = 1 : n_nodes_id
    bc = ID(i,:);
    xi = x(i);  yi = y(i);
    theta_circle = 0 : 0.1 : 2*pi;

    % Roller symbols (circles)
    if isequal(bc, [0,1,0]) || isequal(bc, [1,1,0]) || isequal(bc, [0,1,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi, ...
             cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
    end
    if isequal(bc, [1,0,0]) || isequal(bc, [1,0,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
            cos(theta_circle)*cs/2, 'r');
    end

    % Triangle for pin
    if isequal(bc, [1,1,0])
        plot([xi, xi-cs, xi+cs, xi], [yi, yi-cs, yi-cs, yi], 'r');
    end

    % Horizontal platform (hatching) -- for horizontal rollers, pins, fixed
    if any([isequal(bc,[0,1,0]), isequal(bc,[1,1,0]), isequal(bc,[0,1,1]),
   isequal(bc,[1,1,1])])
        ybase = yi - cs + cs * isequal(bc,[1,1,1]);
        plot([xi-2*cs, xi+2*cs], [ybase, ybase], 'r');
        for hx = -2:0.5:2
            plot([xi+hx*cs, xi+(hx-0.5)*cs], [ybase, ybase-cs*0.5], 'r');
        end
    end

    % Vertical platform -- for vertical rollers
    if any([isequal(bc,[1,0,0]), isequal(bc,[1,0,1])])
        xbase = xi - cs;
        plot([xbase, xbase], [yi-2*cs, yi+2*cs], 'r');
        for vy = -1.5:0.5:2
            plot([xbase, xbase-cs], [yi+vy*cs, yi+(vy-0.5)*cs], 'r');
        end
    end

    % Extra rollers for multi-roller supports
    if isequal(bc, [0,1,1])
        for dx = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi + dx*cs, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
        end
    end
    if isequal(bc, [1,0,1])
        for dy = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 + dy*cs, 'r');
        end
    end
end

% --- Draw elements ---
for i = 1 : n_elements
    plot([x(lnods(i,1)), x(lnods(i,2))], ...
         [y(lnods(i,1)), y(lnods(i,2))], 'b', 'LineWidth', 1.5);
end

% --- Draw free nodes ---
for i = 1 : n_nodes
    if ~max(ID(i,:))
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        plot(x(i), y(i), 'mo', 'MarkerSize', 6);
    end
end

% --- Element numbers (blue, at midpoint) ---
set(gca, 'DefaultTextColor', 'blue');
for i = 1 : n_elements
    xm = (x(lnods(i,1)) + x(lnods(i,2)))/2 + cs;
    ym = (y(lnods(i,1)) + y(lnods(i,2)))/2 + cs;
    text(xm, ym, int2str(i), 'Color', 'blue');
end

% --- Node numbers (magenta, offset) ---
for i = 1 : n_nodes
    text(x(i)+cs, y(i)+cs, int2str(i), 'Color', 'magenta');
end

hold off;  grid on;
title('Frame Geometry');

end   % plot_frame


% ========================================================================
% FUNCTION: print1  (echo input data to output file)
% ========================================================================
function print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, ...
                lnods, E, A, Iz)

fprintf(fid, '      *****************************************\n');
fprintf(fid, '      *  Computer Program for 2D Frame Analysis  *\n');
fprintf(fid, '      *****************************************\n');
fprintf(fid, '\nNumber of Nodes:              %d\n', Nnodes);
fprintf(fid, 'Number of Elements:          %d\n', Nelem);
fprintf(fid, 'Number of Free DOFs:         %d\n', size_K_tt);
fprintf(fid, 'Number of Restrained DOFs:   %d\n', size_K_aug - size_K_tt);

fprintf(fid, '\nNodal Information:\n');
for inode = 1 : Nnodes
    fprintf(fid, '  Node %d  (x=%9.3e, y=%9.3e)\n', ...
            inode, coord(inode,1), coord(inode,2));
    dof_str = '';
    labels  = {'  u (X)', '  v (Y)', '  theta'};
    for j = 1 : 3
        if ID(inode,j) <= size_K_tt && ID(inode,j) > 0
            dof_str = [dof_str, labels{j}];
        end
    end
    if isempty(dof_str)
        dof_str = '  none (fully fixed)';
    end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    fprintf(fid, '    Free DOFs:%s\n', dof_str);
end

fprintf(fid, '\nElement Information:\n');
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '  Element %d  (%d -> %d)', ielem, lnods(ielem,1), lnods(
   ielem,2));
    fprintf(fid, '   E=%9.3e  A=%9.3e  Iz=%9.3e\n', E(ielem), A(ielem), Iz(
   ielem));
end

end   % print1


% ======================================================================
% FUNCTION: print2  (write results to output file)
% ======================================================================
function print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
                Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
                Nelement_load, ElementLoad)

dof_names = {'delta_X', 'delta_Y', 'rot_Z  '};

% --- Applied loads ---
fprintf(fid, '\n\nApplied Nodal Loads:\n');
for i = 1 : Nnodal_load
    fprintf(fid, '  Node %d:  Fx=%9.3e  Fy=%9.3e  Mz=%9.3e\n', ...
            NodalLoad(i,1), NodalLoad(i,2), NodalLoad(i,3), NodalLoad(i,4));
end

fprintf(fid, '\nApplied Element Loads:\n');
for i = 1 : Nelement_load
    fprintf(fid, '  Element %d:  distributed w = %9.3e\n', ...
            ElementLoad(i,1), ElementLoad(i,2));
end

% --- Displacements ---
fprintf(fid, '\n\nNodal Displacements:\n');
for eq = 1 : size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Displacements(eq));
end

% --- Reactions ---
fprintf(fid, '\n\nSupport Reactions:\n');
for eq = 1 : size_K_aug - size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == size_K_tt + eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Reactions(eq));
end
```

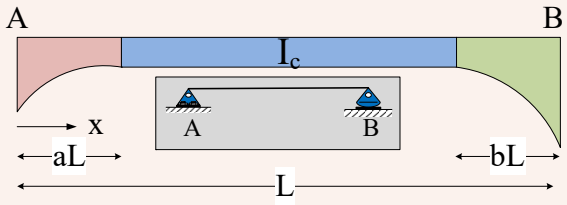
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
571
572 % --- Internal forces ---
573 fprintf(fid, '\n\nElement Internal Forces (Local Coordinate System):\n');
574 force_labels = {'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)', ...
575                 'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)'};
576 for ielem = 1 : Nelem
577     fprintf(fid, '\n  Element %d\n', ielem);
578     for idof = 1 : 6
579         if idof == 1
580             fprintf(fid, '    Near-end node %d:\n', lnods(ielem,1));
581         end
582         if idof == 4
583             fprintf(fid, '    Far-end  node %d:\n', lnods(ielem,2));
584         end
585         fprintf(fid, '      %-12s  %+12.5e\n', ...
586                 force_labels{idof}, int_forces(idof,ielem));
587     end
588 end
589
590 end   % print2
```

I.2.9 Matriz de rigidez de membros não prismáticos

Listando o código Matlab que gera parcelas na Fig. 46.11, e gerar o matriz de rigidez de membros não prismáticos. Isso é baseado em (Portland Cement Association, 1947).




```
1  % ========================================================================
2  % STIFFNESS MATRIX AND FIXED-END MOMENTS FOR NON-PRISMATIC BEAM MEMBERS
3  % ========================================================================
4  % Computes the exact stiffness matrix and fixed-end moments (FEM) for a
5  % beam with variable cross-section -- specifically a member with haunches
6  % (tapered ends) and a prismatic central segment.
7  %
8  % MEMBER PROFILE:
9  %
10 %   |<-- a*L -->|<------ (1-a-b)*L ------>|<-- b*L -->|
11 %   A           |                          |           B
12 %   [left haunch]   [prismatic centre]      [right haunch]
13 %
14 %   Moment of inertia profile:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%     Left haunch  (0 <= x <= a*L):        I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
%     Centre segment (a*L <= x <= (1-b)*L): I(x) = Ic  (constant)
%     Right haunch ((1-b)*L <= x <= L):    I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
%
%   where ra, rb are the haunch depth ratios (0 = no haunch, prismatic)
%   and n is the haunch shape exponent (n=1: linear, n=2: parabolic).
%
% METHOD -- FLEXIBILITY APPROACH:
%   The 2x2 flexibility matrix d is built by numerical integration of the
%   virtual work integrals (unit moment diagrams x 1/EI).
%   The stiffness matrix is then obtained by inversion and static
%   condensation, following the force method:
%       k_tt = d^-1
%       k = B^T * d^-1 * B  (after condensation and permutation)
%
% FIXED-END MOMENTS (FEM) for uniform transverse load w:
%   Computed from the compatibility equations for a fixed-fixed beam,
%   integrating the particular solution against the flexibility kernel.
%   Output FEM = [M_A; M_B] normalised so that w=1 gives actual moments.
%
% DOF ORDER IN OUTPUT STIFFNESS MATRIX k (4x4):
%   [v_A, theta_A, v_B, theta_B]   (transverse displacements and rotations)
%
% PARAMETRIC STUDY (driver script below):
%   Plots surfaces of k(2,2) and FEM(1) as functions of haunch geometry
%   to visualise sensitivity of stiffness and fixed-end moments to
%   haunch length (a,b) and depth ratio (r).
%
% INPUTS TO NonPrismatic():
%   a   : left  haunch length as fraction of L    [0..0.5]
%   b   : right haunch length as fraction of L    [0..0.5]  (a+b <= 1)
%   L   : member length                           [any consistent unit]
%   Ic  : moment of inertia of prismatic centre   [length^4]
%   ra  : left  haunch depth ratio                [>= 0]
%   rb  : right haunch depth ratio                [>= 0]
%   n   : haunch shape exponent (1=linear,2=parabolic)
%
% OUTPUTS:
%   k   : 4x4 stiffness matrix  [force/length units consistent with input]
%   FEM : [M_A; M_B] fixed-end moments for w=1 uniform load
% ========================================================================


% ========================================================================
% DRIVER SCRIPT -- parametric surfaces
% ========================================================================

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
font  = 'Times New Roman';

% Fixed parameters for the parametric study
Ic = 1;    % normalised (results are per unit Ic)
n  = 2;    % parabolic haunches
L  = 1;    % normalised length

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.5]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Plot 1 & 3: symmetric haunches (a=b, ra=rb)
% Vary haunch length a in [0.2, 0.4] and depth ratio r in [0, 4]
% ------------------------------------------------------------------------
[A_grid, R_grid] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0:0.2:4);
K_surf   = zeros(size(A_grid));
FEM_surf = zeros(size(A_grid));

for i = 1 : size(A_grid, 1)
    for j = 1 : size(A_grid, 2)
        a = A_grid(i,j);
        r = R_grid(i,j);
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, a, L, Ic, r, r, n);
        K_surf(i,j)   = k_ij(2,2) / 4;    % normalised bending stiffness
        FEM_surf(i,j) = fem_ij(1) * 12;   % normalised fixed-end moment
    end
end

subplot(2,2,1);
surf(A_grid, R_grid, K_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('k_{22}/4');
title('Stiffness: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([0 2 4 6 8]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,3);
surf(A_grid, R_grid, FEM_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('FEM');
title('Fixed-End Moment: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([1 1.1 1.2 1.3 1.4]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% ------------------------------------------------------------------------
% Plot 2 & 4: asymmetric haunches (a ~= b, fixed r=0.2)
% Vary both haunch lengths independently
% ------------------------------------------------------------------------
r_fixed = 0.2;
[A_grid2, B_grid2] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0.1:0.01:0.4);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
K_ratio   = zeros(size(A_grid2));
FEM_ratio = zeros(size(A_grid2));

for i = 1 : size(A_grid2, 1)
    for j = 1 : size(A_grid2, 2)
        a = A_grid2(i,j);
        b = B_grid2(i,j);
        % WARNING: no check that a+b <= 1; caller must ensure valid geometry
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, r_fixed, r_fixed, n);
        K_ratio(i,j)   = k_ij(2,2) / k_ij(4,4);   % ratio of end stiffnesses
        FEM_ratio(i,j) = fem_ij(1) / fem_ij(2);    % ratio of end moments
    end
end

subplot(2,2,2);
surf(A_grid2, B_grid2, K_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('k_{11}/k_{12}');
title('Stiffness ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,4);
surf(A_grid2, B_grid2, FEM_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('FEM_A / FEM_B');
title('FEM ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% Export figure
if n == 2
    FileName = 'Haunches-Parab.eps';
else
    FileName = 'Haunches-Straight.eps';
end
% print(FileName, '-depsc');   % uncomment to save


% ========================================================================
% FUNCTION: NonPrismatic
% ========================================================================
% Computes the 4x4 stiffness matrix and fixed-end moments for a
% non-prismatic beam with left and right haunches and a prismatic centre.
%
% The flexibility approach is used:
%   Step 1: Build 2x2 flexibility matrix d by numerical integration
%   Step 2: Invert to get the 2x2 rotational stiffness k_tt
%   Step 3: Expand to 4x4 using statics matrix B (static condensation)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   Step 4: Permute rows/columns to standard DOF order
%   Step 5: Integrate compatibility equations for FEM under uniform load

function [k, FEM] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, ra, rb, n)

% ------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Build the 2x2 flexibility matrix d
% ------------------------------------------------------------------------
% d(i,j) = integral of (m_i(x) * m_j(x) / (E*I(x))) dx   over [0, L]
%
% where m_1(x) = (x/L - 1) and m_2(x) = (x/L) are the unit moment
% diagrams for unit end moments at A and B respectively.
%
% The integral is split into three segments matching the I(x) profile.
% Each segment uses MATLAB's adaptive quadrature (integral()).

% --- Left haunch  (0 <= x <= a*L) ---
% I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
I_L  = @(x) Ic .* (1 + ra .* (1 - x./(a*L)).^n).^3;

d11_L = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d12_L = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d22_L = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_L(x), 0,   a*L);

% --- Prismatic centre  (a*L <= x <= (1-b)*L) ---
d11_C = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);
d12_C = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ Ic, a*L, (1-b)*L);
d22_C = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);

% --- Right haunch  ((1-b)*L <= x <= L) ---
% I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
I_R  = @(x) Ic .* (1 + rb .* (1 - (L-x)./(b*L)).^n).^3;

d11_R = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d12_R = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d22_R = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L);

% Assemble full 2x2 flexibility matrix (sum of three segments)
d = [ d11_L+d11_C+d11_R,  d12_L+d12_C+d12_R ;
      d12_L+d12_C+d12_R,  d22_L+d22_C+d22_R ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Step 2 -- Build stiffness sub-matrices via inversion
% ------------------------------------------------------------------------
% The statics matrix B relates the two redundant moments (M_A, M_B)
% to the four end forces via equilibrium:
%   B = [1/L, 1/L; -1/L, -1/L]  (shear equilibrium)

B_stat = [1, 1; -1, -1] / L;

d_inv = inv(d);              % 2x2 rotational stiffness
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
217
218 k_tt  = d_inv;               % rotational DOFs (2x2)
219 k_ut  = B_stat * d_inv;      % coupling: translational from rotational (2x2)
220 k_tu  = d_inv * B_stat';     % coupling: rotational from translational (2x2)
221 k_uu  = B_stat * d_inv * B_stat';  % translational stiffness (2x2)
222
223 % Assemble full 4x4 in order [theta_A, theta_B, v_A, v_B]
224 k_full = [ k_tt,  k_tu ;
225            k_ut,  k_uu ];
226
227 % ------------------------------------------------------------------------
228 % Step 3 -- Permute to standard DOF order [v_A, theta_A, v_B, theta_B]
229 % ------------------------------------------------------------------------
230 idx = [3, 2, 4, 1];
231 k   = k_full(idx, idx);
232
233 % ------------------------------------------------------------------------
234 % Step 4 -- Fixed-end moments for uniform transverse load (w = 1)
235 % ------------------------------------------------------------------------
236 % For a fixed-fixed beam under uniform load w, the FEM are found by
237 % solving the compatibility equations:
238 %
239 %   [d11, d12] [M_A]   [integral of x^2*(L-x)/I dx / 2     ]
240 %   [d21, d22] [M_B] = [integral of x*(L-x)^2/I dx / 2     ]
241 %
242 % (These are the particular-solution integrals for w=1.)
243 % The factor /2 comes from the parabolic bending moment diagram m_p(x)
244 % for a simply-supported beam under uniform load: m_p = w*x*(L-x)/2.
245
246 % Numerator integral 1: integral of x^2 * m_unit_1 / I dx  = integral of x^2*(
    L-x) / (2*I) dx
247 % Split into three segments as before
248
249 eq11_L = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_L(x), 0,       a*L    );
250 eq11_C = integral(@(x) (x.^2)        ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
251 eq11_R = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
252 eq11   = eq11_L + eq11_C + eq11_R;
253
254 eq12_L = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
255 eq12_C = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
256 eq12_R = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
257 eq12   = eq12_L + eq12_C + eq12_R;
258
259 % Right-hand side: particular moment integral for m_1 = (x/L - 1)
260 eq13_L = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
261 eq13_C = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
262 eq13_R = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
263 eq13   = eq13_L + eq13_C + eq13_R;
264
265 % Numerator integral 2: for m_unit_2 = (x/L)
266 eq22_L = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
eq22_C = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq22_R = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq22   = eq22_L + eq22_C + eq22_R;

% Right-hand side: particular moment integral for m_2 = (x/L)
eq23_L = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq23_C = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq23_R = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq23   = eq23_L + eq23_C + eq23_R;

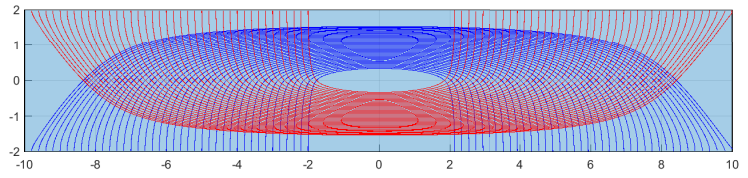
% Solve the 2x2 compatibility system for the unknown FEM
% NOTE: eq21 = eq12 by symmetry of the flexibility matrix (Maxwell's theorem)
A_fem = [ eq11,  eq12 ;
          eq12,  eq22 ];    % eq21 == eq12 by reciprocity
B_fem = [ eq13 ;
          eq23 ] / 2;       % divide by 2 for the w*x*(L-x)/2 moment diagram

FEM = A_fem \ B_fem;        % [M_A; M_B]

end   % NonPrismatic
```

I.2.10 Linhas isostáticas

Código para traçar linhas isostáticas como mostrado em §15.4.7




```
% ========================================================================
% ISOSTATIC LINES (STRESS TRAJECTORIES) IN A SIMPLY-SUPPORTED BEAM
% ========================================================================
% Isostatic lines (also called stress trajectories or principal stress
% lines) are curves that are everywhere tangent to a principal stress
% direction.  They reveal the internal "flow" of compression and tension
% through a structural member.
%
% THEORY:
%   At any point (x,y) in the beam, the stress state under bending and
%   shear is:
%       [sigma,  tau ]
%       [tau,    0   ]
%
%   where sigma = -M(x)*y/I  (bending stress, zero at neutral axis)
%   and   tau   = V(x)*(h^2/4 - y^2)*A_eff  (parabolic shear stress)
%
%   The principal stress directions are the eigenvectors of this tensor.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%   Two families of isostatic lines exist:
%     Family 1 (blue):  major principal stress direction (compression or tension)
%     Family 2 (red):   minor principal stress direction (orthogonal to family 1)
%
% TRACING ALGORITHM:
%   Each isostatic line is traced by a simple Euler integration:
%     x(k+1) = x(k) +/- step * eigenvector_component_x
%     y(k+1) = y(k) +/- step * eigenvector_component_y
%
%   The sign of the step is chosen based on the quadrant of (x,y) to
%   keep the tracing moving in a consistent direction (see inline notes).
%
%   WARNING: the sign logic in both tracing loops is heuristic and was
%   tuned for this specific beam geometry.  It may not generalise to
%   other load cases or starting points without adjustment.
%
% LOADS SUPPORTED:
%   Load = 1 : uniformly distributed load w on a simply-supported beam
%   Load = 2 : midspan point load W on a simply-supported beam
%
% BEAM GEOMETRY:
%   Origin at the beam centroid (x=0, y=0 at mid-span, mid-height).
%   x in [-L/2, L/2],  y in [-h/2, h/2]
%
% OUTPUT:
%   Figure with beam outline, blue compression trajectories (Family 1),
%   and red tension trajectories (Family 2).
%   Exported to EPS and converted to PDF via Ghostscript.
% ========================================================================

clear; clc; close all;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 16;
font  = 'Times New Roman';
GS    = 'gswin64.exe';   % Ghostscript executable for EPS->PDF

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Load   = 1;      % 1 = uniform load;  2 = midspan point load
nlines = 40;     % number of isostatic lines per family
delta  = 100;    % spacing denominator: starting x = -L/2 + i*L/delta

w    = 1;        % load intensity (normalised)
L    = 20;       % beam span                          [length units]
h    = L/5;      % beam depth                         [length units]
B    = 1;        % beam width                         [length units]
A    = 4;        % cross-sectional area               [length^2]
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Inrt = B*h^3/12; % second moment of area              [length^4]

% Reference stress values (for context, not used in tracing)
Mmax   = w*L^2/8;
sigmax = Mmax * (h/2) / Inrt;     % maximum bending stress at extreme fibre
taumax = 1.5 * w*L / (2*A);       % maximum shear stress at neutral axis

step = h/100;    % integration step size for Euler tracing

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Draw beam outline
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/4]);

pgon = polyshape([-L/2, L/2, L/2, -L/2], [-h/2, -h/2, h/2, h/2]);
plot(pgon);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Family 1: traces along the FIRST eigenvector (column 1)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: bottom fibre (y approx -h/2), evenly spaced along the span.
% Traces upward through the beam following the compression arch.
%
% Sign convention for step direction (heuristic, tuned for this geometry):
%   y > 0 (upper half):  move right in x, downward in y
%   y < 0 & x < 0:       move left  in x, upward   in y
%   y < 0 & x > 0:       move right in x, downward in y
%
% WARNING: this quadrant-based sign logic is geometry-specific.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;   % starting x position
    y0 = -0.99 * h/2;          % start near (but inside) bottom fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        % Compute stress tensor at current point
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        % Eigenvectors give principal stress directions
        [Ve, D]    = eig(T);
        [~, idx]   = sort(diag(D));   % sort by ascending eigenvalue
        Vect       = Ve(:, idx);
        Vect       = -Vect / norm(Vect);   % normalise (sign absorbed below)

        % Step in the direction of eigenvector 1 (column 1 after sorting)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        if yv(k) > 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,1);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        end

        % Terminate if the line exits through the bottom fibre
        if yv(k+1) < -h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'b-');
    hold on;
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Family 2: traces along the SECOND eigenvector (column 2)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: top fibre (y approx +h/2), same x spacing.
% Traces downward following the tension arch (orthogonal to Family 1).
%
% Sign convention (heuristic):
%   y > 0 & x < 0:  move right, downward
%   y > 0 & x > 0:  move left,  upward    (note: reversed direction)
%   y < 0:          move right, downward  (both half-planes)
%
% WARNING: the y>0 & x>0 branch has a two-step logic in the original
% that sets (x,y) to the current value then immediately overwrites it.
% The first assignment is dead code -- preserved here as a no-op comment.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;
    y0 =  0.99 * h/2;   % start near (but inside) top fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        [Ve, D]  = eig(T);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        [~, idx] = sort(diag(D));
        Vect     = Ve(:, idx);
        Vect     = -Vect / norm(Vect);

        % Step in the direction of eigenvector 2 (column 2 after sorting)
        if yv(k) > 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) > 0 && xv(k) >= 0
            % BUG FIX: original had a dead assignment (x,y)=(x,y) before
            % this step -- removed; only the active step is kept.
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        end

        % Terminate if the line exits through the top fibre
        if yv(k+1) > h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'r-');
    hold on;
end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Formatting and export
% -------------------------------------------------------------------------
grid on;
daspect([1 1 1]);
xlim([-L/2, L/2]);
ylim([-h/2,  h/2]);
xlabel('x', 'FontSize', fs);
ylabel('y', 'FontSize', fs);
title(['Isostatic Lines -- Load type ' num2str(Load) ...
       '  (blue = Family 1,  red = Family 2)'], 'FontSize', fs);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

FileName = ['Stress-Flow-' num2str(Load) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ========================================================================
% FUNCTION: Tau  -- shear stress at point (x,y)
% ========================================================================
% Parabolic shear stress distribution (Jourawski formula):
%   tau(y) = V(x) * (h^2/4 - y^2) * (B/2) / I
%          = V(x) * (1.5/A) * (1 - (2y/h)^2)
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   A     : cross-sectional area
%   h     : section depth
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   tau   : shear stress at (x,y)

function tau = Tau(x, y, w, A, h, Load)

% Shear force at section x
if Load == 1   % uniform load: V(x) = -w*x  (reactions at +/-L/2 = +w*L/2)
    V = -w * x;
else           % midspan point load W=w: V = +/-w/2
    if x > 0
        V = -w/2;
    else
        V =  w/2;
    end
end

% Parabolic distribution (zero at extreme fibres, max at neutral axis)
tau = -6*V*y^2 / (A*h^2) + 1.5*V/A;

end   % Tau


% ========================================================================
% FUNCTION: Sigma  -- bending stress at point (x,y)
% ========================================================================
% Linear bending stress (Navier formula):
%   sigma(x,y) = -M(x) * y / I
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   L     : beam span
%   Inrt  : second moment of area
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   sigma : bending stress at (x,y)

function sigma = Sigma(x, y, w, L, Inrt, Load)

% Bending moment at section x
if Load == 1   % uniform load: M(x) = w*L^2/8 - w*x^2/2
    M = -w*x^2/2 + w*L^2/8;
else           % midspan point load W=w
    if x >= 0
        M = w*L/2 - w*x/2;   % right half
    else
        M = w*L/2 + w*x/2;   % left half (x is negative here)
    end
end

sigma = -M * y / Inrt;

end   % Sigma
```

I.2.11 Desenho evolucionário

I.2.12 Principal

```
% ========================================================================
% EVOLUTIONARY STRUCTURAL DESIGN -- RANDOM ELEMENT REMOVAL
% ========================================================================
% Demonstrates the concept of evolutionary structural optimization (ESO):
% a fully-connected 3D truss is progressively simplified by removing one
% element at a time, while checking that no node becomes under-connected.
%
% CONCEPT:
%   In a real ESO implementation, elements are removed based on a stress
%   or strain energy criterion (least-stressed elements removed first).
%   Here, removal is RANDOM -- this is a demonstration scaffold showing
%   the bookkeeping, visualization, and termination logic that a full
%   optimizer would use.
%
% ALGORITHM:
%   1. Generate a node grid (regular or random)
%   2. Connect ALL pairs of nodes -> fully-connected truss (Hankel indexing)
%   3. Loop:
%      a. Select an element to remove (here: random; replace with criterion)
%      b. Highlight it, remove it from the connectivity list
%      c. Check that both end nodes still have >= min_elem connections
%      d. If a node drops below the minimum, stop and report
%      e. Re-plot the updated mesh and write a video frame
%   4. Stop after MaxSteps or if a termination condition is met
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- function Node_Generation   : create node coordinates
%   Part 3  -- function Check_Lonely      : verify node connectivity
%   Part 4  -- function PlotMesh          : draw 3D truss and export frame
%
% NOTE: In a production ESO code, the line:
%   ElemOut = randi([1 nelem], 1, 1);
% would be replaced by a finite element analysis call that returns the
% index of the least-stressed (or lowest strain-energy) element.
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN DRIVER
% ========================================================================

clear; close all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Control parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Random   = 1;      % 0 = 8 random nodes;  1 = regular grid of nodes
MaxSteps = 30;     % maximum number of element removals

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Generate nodes
% ------------------------------------------------------------------------
[x, y, z, N] = Node_Generation(Random);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Generate fully-connected element list
% ------------------------------------------------------------------------
% Every unique pair of nodes (i,j) with i < j forms one element.
% The Hankel matrix trick generates all such pairs without duplication.
%
% hankel(2:N) produces a matrix whose (r,c) entry is r+c (shifted),
% and find() returns the row/column indices of all non-zero entries.
% The result is a 2 x nelem matrix of [node_i; node_j] pairs.

[r, c, ~]  = find(hankel(2:N));
index      = [c, r]';        % each column is one element: [near_node;
   far_node]
nelem      = size(index, 2);
lnods      = index';         % nelem x 2: each row = [node_i, node_j]

step = 0;
OK   = 0;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Set up video writer
% ------------------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
vid           = VideoWriter('Design_Opti.avi');
vid.FrameRate = 1;   % 1 frame per second (slow enough to follow visually)
open(vid);

% Draw and record the initial fully-connected mesh
PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);
frame = getframe(gcf);
writeVideo(vid, frame);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Evolutionary removal loop
% -------------------------------------------------------------------------
while OK == 0 && step < MaxSteps

    % --- Select element to remove ---
    % NOTE: in a real ESO, replace this random selection with:
    %   ElemOut = index_of_least_stressed_element_from_FEA;
    ElemOut = randi([1, nelem], 1, 1);

    % --- Highlight the element being removed (red, thick) ---
    X  = [x(lnods(ElemOut,1)),  x(lnods(ElemOut,2))];
    Y  = [y(lnods(ElemOut,1)),  y(lnods(ElemOut,2))];
    Z  = [z(lnods(ElemOut,1)),  z(lnods(ElemOut,2))];
    plot3(X, Y, Z, 'LineWidth', 3, 'Color', 'r');
    hold on;
    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(vid, frame);

    % --- Record which nodes this element connected ---
    NodesOut = lnods(ElemOut, 1:2);

    % --- Remove element from connectivity list ---
    % Compact the lnods array by shifting rows up from ElemOut onward.
    % WARNING: for large meshes this in-place shift is O(nelem) per step.
    %          A more efficient approach would use logical indexing:
    %          lnods = lnods([1:ElemOut-1, ElemOut+1:end], :);
    for i = ElemOut : nelem-1
        lnods(i, 1:2) = lnods(i+1, 1:2);
    end
    lnods = lnods(1:nelem-1, :);   % trim the now-redundant last row
    nelem = nelem - 1;
    step  = step  + 1;

    % --- Re-plot the updated mesh ---
    PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);

    % --- Check that neither end node has become under-connected ---
    min_elem = 2;   % minimum number of elements required at any node
    Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, vid);

    frame = getframe(gcf);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    writeVideo(vid, frame);

end   % evolutionary loop

close(vid);
fprintf('Evolutionary design complete after %d steps.\n', step);


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: Node_Generation
% ========================================================================
% Generates the node coordinate arrays x, y, z.
%
% If Random == 0: generates 8 nodes at random positions in [0,1]^3.
%                 (despite the name 'Random==0', these ARE random -- the
%                 flag controls grid vs random, but the naming is inverted
%                 from what one would expect)
%
% If Random == 1: generates a regular rectangular grid of nodes with
%                 specified range and spacing in each direction.
%
% WARNING: the grid generation uses Rx/Deltaz (not Rz/Deltaz) for nz.
%          This is preserved from the original -- verify if Rz was intended.
%
% OUTPUTS:
%   x, y, z : 1 x N coordinate arrays
%   N       : total number of nodes

function [x, y, z, N] = Node_Generation(Random)

if Random == 0
    % 8 random nodes in the unit cube
    N = 8;
    x = rand(1, N);
    y = rand(1, N);
    z = rand(1, N);

else
    % Regular grid
    Rx = 20;  Ry = 20;  RZ = 60;    % grid extents in x, y, z   [units]
    Dx = 20;  Dy = 20;  Dz = 30;    % grid spacing in x, y, z   [units]

    xmin = 0;  ymin = 0;  zmin = 0;

    nx = round(Rx/Dx) + 1;   % number of nodes in x
    ny = round(Ry/Dy) + 1;   % number of nodes in y
    % WARNING: original uses Rx/Dz (not RZ/Dz) for nz -- may be a typo.
    %          If the z-extent should be RZ=60 with spacing Dz=30, nz=3.
    %          Currently nz = round(Rx/Dz)+1 = round(20/30)+1 = 2.
    nz = round(Rx/Dz) + 1;

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    N = 0;
    x = zeros(1, nx*ny*nz);
    y = zeros(1, nx*ny*nz);
    z = zeros(1, nx*ny*nz);

    for ix = 1 : nx
        for iy = 1 : ny
            for iz = 1 : nz
                N      = N + 1;
                x(N)   = xmin + (ix-1) * Dx;
                y(N)   = ymin + (iy-1) * Dy;
                z(N)   = zmin + (iz-1) * Dz;
            end
        end
    end

    % Trim to actual size
    x = x(1:N);
    y = y(1:N);
    z = z(1:N);
end

end   % Node_Generation


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: Check_Lonely
% ========================================================================
% After removing an element, checks that both of its end nodes still have
% at least min_elem elements connected to them.  If either node drops
% below the minimum, an error dialog is shown and execution stops.
%
% INPUTS:
%   NodesOut : 1x2 vector of the two node indices of the removed element
%   lnods    : current (reduced) connectivity array  [nelem x 2]
%   min_elem : minimum acceptable element count per node
%   v        : VideoWriter object (passed in but not used -- legacy arg)
%
% OUTPUT:
%   Del_Nodes : 0 if both nodes are adequately connected;
%               otherwise the count of the under-connected node

function Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, v) %#ok<INUSD>

Del_Nodes = 0;

for i = 1 : 2
    % Count how many rows in lnods contain this node number
    % (checking both columns: lnods(:,1) and lnods(:,2))
    matches  = (lnods == NodesOut(i));   % logical array, same size as lnods
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
    n_connected = sum(matches(:));       % total occurrences = number of
   connected elements

    if n_connected < min_elem
        msg = ['Number of elements connected to node ' num2str(NodesOut(i))
   ...
               ' dropped below minimum (' num2str(min_elem) ')'];
        errordlg(msg, 'END EXECUTION');
        Del_Nodes = n_connected;
        error('Evolutionary design terminated: node %d under-connected.',
   NodesOut(i));
    end
end

end   % Check_Lonely


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: PlotMesh
% ========================================================================
% Draws the current 3D truss in a new figure window:
%   - node positions as red asterisks with node number labels
%   - elements as lines with element number labels at midpoints
%   - title showing the current step number
% Exports to EPS and converts to PDF.
%
% INPUTS:
%   x, y, z  : node coordinate arrays
%   lnods    : connectivity array  [nelem x 2]
%   nelem    : number of active elements
%   step     : current removal step (used in title and filename)

function PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step)

figure;
plot3(x, y, z, '*');
hold on;

N = length(x);

% Node labels (red numbers at node positions)
for i = 1 : N
    text(x(i), y(i), z(i), num2str(i), 'Color', 'red', 'FontSize', 14);
end

% Elements (lines with element number at midpoint)
for ie = 1 : nelem
    X  = [x(lnods(ie,1)),  x(lnods(ie,2))];
    Y  = [y(lnods(ie,1)),  y(lnods(ie,2))];
    Z  = [z(lnods(ie,1)),  z(lnods(ie,2))];
    Xc = mean(X);  Yc = mean(Y);  Zc = mean(Z);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
277
278     plot3(X, Y, Z);
279     text(Xc, Yc, Zc, num2str(ie), 'FontSize', 10);
280 end
281
282 title(['Step: ' num2str(step)]);
283 pbaspect([1 1 1]);
284 grid minor;
285 view(-36, 24);
286
287 % Export frame
288 GS       = 'c:/Program Files/gs/gs9.10/bin/gswin64.exe';
289 FileName = ['./Figs/Mesh-No-' num2str(step) '.eps'];
290 set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
291 print(FileName, '-depsc');
292 eps2pdf(FileName, GS, 0);
293
294 end   % PlotMesh
```

I.2.13 Pilar diagrama de interação

```
1  % ========================================================================
2  % RECTANGULAR RC COLUMN -- NOMINAL INTERACTION DIAGRAM (P-M)
3  % ========================================================================
4  % Constructs the nominal axial force - bending moment (P_n vs M_n)
5  % interaction diagram for a doubly-reinforced rectangular concrete column
6  % using ACI 318 rectangular stress block assumptions.
7  %
8  % THEORY:
9  %   The interaction diagram is the locus of (M_n, P_n) pairs at which the
10 %   column reaches its nominal strength.  Each point corresponds to a
11 %   specific neutral axis depth c (measured from the compression face).
12 %
13 %   ACI rectangular stress block:
14 %     Compression force in concrete: C_c = 0.85 * f'c * a * b
15 %     where  a = Beta1 * c  (depth of equivalent stress block)
16 %     Beta1 = 0.85 for f'c <= 4 ksi, reduced 0.05 per 1 ksi above 4,
17 %     minimum Beta1 = 0.65
18 %
19 %   Steel strains (linear strain compatibility):
20 %     eps_s  = eps_cu * (d  - c) / c   (tension steel at depth d)
21 %     eps_s' = eps_cu * (c  - d') / c  (compression steel at depth d')
22 %
23 %   Steel stresses capped at f_y (elastic-perfectly-plastic model).
24 %
25 % TWO BRANCHES:
26 %   Tension failure  (c < c_b): steel yields before concrete crushes
27 %   Compression failure (c > c_b): concrete crushes before steel yields
28 %   Balanced point  (c = c_b): both occur simultaneously
29 %
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% UNITS: kips, inches (moments converted to k-ft for output)
% =========================================================================

close all; clear; clc;

fss    = 24;
scrsz  = get(0, 'ScreenSize');
figpos = [2, 2, scrsz(3)/3, scrsz(4)/2];

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Material properties
% -------------------------------------------------------------------------
E_s    = 29000;   % steel Young's modulus          [ksi]
eps_cu = 0.003;   % ACI ultimate concrete strain   [in/in]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Section geometry and reinforcement
% -------------------------------------------------------------------------
h    = 20;     % section depth (in bending direction)  [in]
b    = 12;     % section width                          [in]
dp   = 2.5;    % cover to compression steel centroid   [in]
d    = h - dp; % effective depth to tension steel      [in]

f_y  = 50;     % steel yield strength                  [ksi]
f_c  = 3.5;    % concrete compressive strength         [ksi]
A_s  = 2;      % tension steel area                    [in^2]
Ap_s = 2;      % compression steel area                [in^2]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - ACI Beta1 factor
% -------------------------------------------------------------------------
if f_c <= 4
    Beta1 = 0.85;
else
    Beta1 = max(0.85 - 0.05*(f_c - 4), 0.65);
end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Balanced failure point
% -------------------------------------------------------------------------
% Strain compatibility at balanced condition:
%   c_b/d = eps_cu / (eps_cu + eps_y)

eps_y  = f_y / E_s;
c_b    = eps_cu * d / (eps_cu + eps_y);
a_b    = Beta1 * c_b;

fp_s_b = min(E_s * eps_cu * (c_b - dp) / c_b, f_y);
C_c_b  = 0.85 * f_c * a_b * b;
Pn_b   = C_c_b + Ap_s * fp_s_b - A_s * f_y;
Mn_b   = C_c_b * (d - a_b/2) + Ap_s * fp_s_b * (d - dp);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
e_b    = Mn_b / Pn_b;   % balanced eccentricity [in]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Tension failure branch  (c_min to c_b)
% ------------------------------------------------------------------------
% Tension steel has yielded (f_s = f_y).
% Compression steel stress varies with c; capped at f_y.

n     = 400;
cmin  = h / n;   % avoid c=0 singularity
c_vec = linspace(cmin, c_b, n+1);
PT    = zeros(1, n+1);
MT    = zeros(1, n+1);

for i = 1 : n+1
    c     = c_vec(i);
    a     = Beta1 * c;
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PT(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_y;
    MT(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

figure('Position', figpos);
set(gca, 'FontSize', fss);
plot(MT, PT, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Compression failure branch  (c_b to c_max)
% ------------------------------------------------------------------------
% Both steel stresses vary with c; each capped at f_y.

cmax    = 50;
c_vec2  = linspace(c_b, cmax, n);
PC      = zeros(1, n);
MC      = zeros(1, n);

for i = 1 : n
    c     = c_vec2(i);
    a     = Beta1 * c;
    f_s   = min(E_s * eps_cu * (d  - c) / c, f_y);
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c  - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PC(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_s;
    MC(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

plot(MC, PC, 'r', 'LineWidth', 2);

% ------------------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Section 7 - Format and export
% ------------------------------------------------------------------------
lgd = legend('Tension Failure', 'Compression Failure');
set(lgd, 'Color', 'none');
xlim([0, inf]);  ylim([0, inf]);
grid on;
xlabel('Nominal Moment  M_n  [k-ft]', 'FontSize', fss);
ylabel('Nominal Load  P_n  [kips]',   'FontSize', fss);
title('RC Column P-M Interaction Diagram', 'FontSize', fss);
set(gca, 'FontSize', fss, 'Color', 'none');
exportgraphics(gca, 'Interaction-Diagram-Matlab.pdf', 'BackgroundColor', 'none
    ');
```

I.2.14 Métodos variados; Mathematica

Embora o Mathematica possa salvar um arquivo como `.tex`, um roteiro foi escrito para converter esse arquivo em um mais legível que quase-emula o sentimento do caderno.

Esta é a solução do problema resolvido em §48.6.1.2.

Virtual Deslocamento

Defina a função v

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

Resolva a e.. b em termos de v_2 e.. v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1}\to -\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to -\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Atualizar expressão de v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

```
delv=v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{delv2}+\text{delv3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{delv2}-\text{delv3})x^3}{L^3}\right\}$$

Segunda derivada de v

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

d2v=*D*[*v*,{*x*,2}]

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

Segunda derivada do virtual deslocamento

d2delv=d2v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}

$$\left\{-\frac{2(-8\text{delv2}+\text{delv3})}{L^2}-\frac{12(4\text{delv2}-\text{delv3})x}{L^3}\right\}$$

Energia virtual deformação

delU=Integrate[d2vd2delvEI,{*x*,0,*L*},Assumptions → *L* > 0]

$$\left\{\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

Trabalho virtual externo

delW=Integrate[q0(1 − *x*/*L*)delv,{*x*,0,*L*},Assumptions → *L* > 0]

$$\left\{\frac{4\text{delv2}L\text{q0}}{15}+\frac{\text{delv3}L\text{q0}}{60}\right\}$$

Preparar $\delta U - \delta W = 0$

UW=delU − delW

$$\left\{-\frac{4}{15}\text{delv2}L\text{q0}-\frac{\text{delv3}L\text{q0}}{60}+\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

A=Coefficient[UW,delv2]

$$\left\{-\frac{4L\text{q0}}{15}+\frac{256\text{EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

B=Coefficient[UW,delv3]

$$\left\{-\frac{L\text{q0}}{60}-\frac{80\text{EIv2}}{L^3}+\frac{28\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

solution2=Solve[{*A*==0,*B*==0},{v2,v3}]

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{11L^4\text{q0}}{960\text{EI}},\text{v3}\to\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

v2=*N*[v2/.solution2]

$$\left\{\frac{0.0114583L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

v3=*N*[v3/.solution2]

$$\left\{\frac{0.0333333L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

Determine o momento do campo deslocamento

M=Simplify[d2vEI]

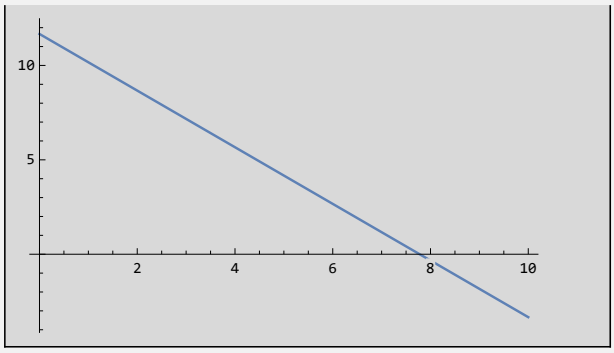
$$\{\{L\text{q0}(0.116667L - 0.15x)\}\}$$

Determine o cisalhamento como derivatve do momento

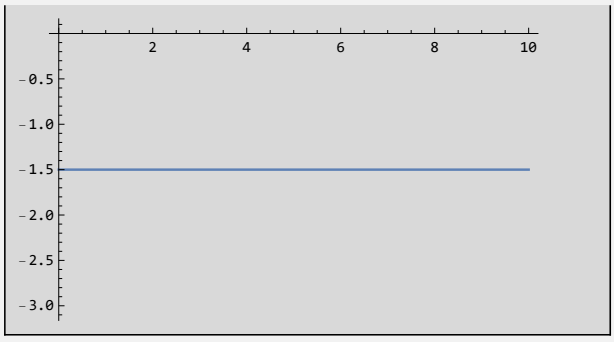
V=*D*[*M*,{*x*,1}]

$$\{\{-0.15L\text{q0}\}\}$$

q0=1; *L*=10; Plot[*M*,{*x*,0,10}]



Plot[*V*,{*x*,0,10}]



Exatamente cisalhamento e diagramas de momento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Clear[L,q0];
```

```
w[x_]:=q0(1 - x/L)
```

```
Vsup= - Integrate[w[x],{x,0,L}]
```

$$-\frac{Lq0}{2}$$

```
Msup=Integrate[w[x]x,{x,0,L}]
```

$$\frac{L^2q0}{6}$$

```
Vexact=Integrate[w[x],x] + Vsup
```

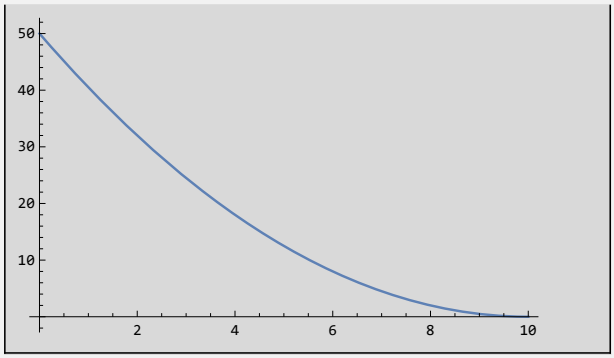
$$-\frac{Lq0}{2} + q0x - \frac{q0x^2}{2L}$$

```
Mexact=Integrate[Vexact,x] + Msup
```

$$\frac{L^2q0}{6} - \frac{Lq0x}{2} + \frac{q0x^2}{2} - \frac{q0x^3}{6L}$$

```
q0= - 10; L=10;
```

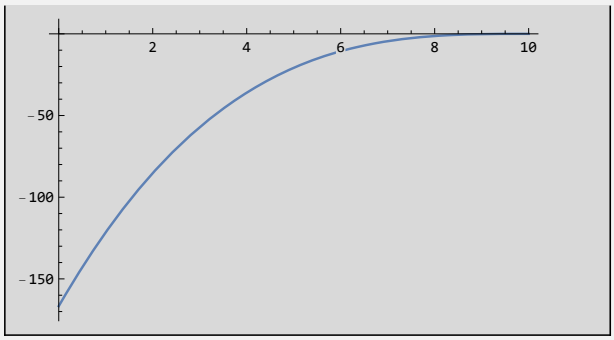
```
Plot[Vexact,{x,0,L}]
```



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Plot[Mexact,{x,0,L}]



Clear[L,q0,v,V,M,v2,v3,solution,v,delv,del2v,d2v,d2delv,delU,delW,UW,A,B,solution2]

Força Virtual

Defina carga distribuída x eixo)

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Momento devido à carga real

M=Integrate[q(x − x1),{x1,0,x}]

$$\frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Momento devido à carga virtual

delM=x

$$x$$

Energia virtual interna e externa

delU=Integrate[MdelM/EI,{x,0,L}]

$$\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}$$

delW=1v

$$v$$

Resolva $\delta U - \delta W = 0$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Solve[delU==delW,v]
```

$$\left\{\left\{v \to \frac{L^4 \text{q0}}{30 \text{EI}}\right\}\right\}$$

```
Clear[v,q,M,delV,delU,delM]
```

Energia Potencial

Defina a função v e carregar q

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

```
q=qo(1 - x/L)
```

$$\text{qo}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Resolva a e.. b em termos de v_2 e.. v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1} \to -\frac{-8\text{v2} + \text{v3}}{L^2}, \text{a2} \to -\frac{2(4\text{v2} - \text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Atualizar expressão de v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2} + \text{v3})x^2}{L^2} - \frac{2(4\text{v2} - \text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

Energia interna deformação

```
d2v=Simplify[D[v,{x,2}]]
```

$$\left\{\frac{2(L(8\text{v2} - \text{v3}) + 6(-4\text{v2} + \text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

```
M=EId2v
```

$$\left\{\frac{2\text{EI}(L(8\text{v2} - \text{v3}) + 6(-4\text{v2} + \text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L}]
```

$$\left\{\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

Trabalho externo potencial

```
W=Integrate[qv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{4L\text{qov2}}{15}+\frac{L\text{qov3}}{60}\right\}$$

Energia potencial

```
PE=Simplify[U − W]
```

$$\left\{-\frac{1}{60}L\text{qo}(16\text{v2}+\text{v3})+\frac{2\text{EI}\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)}{L^3}\right\}$$

```
eq1=D[PE,v2]
```

$$\left\{-\frac{4L\text{qo}}{15}+\frac{2\text{EI}(128\text{v2}-40\text{v3})}{L^3}\right\}$$

```
eq2=D[PE,v3]
```

$$\left\{-\frac{L\text{qo}}{60}+\frac{2\text{EI}(-40\text{v2}+14\text{v3})}{L^3}\right\}$$

```
solution=N[Solve[{eq1==0,eq2==0},{v2,v3}]]
```

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{0.0114583L^4\text{qo}}{\text{EI}},\text{v3}\to\frac{0.0333333L^4\text{qo}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

```
Clear[solution,eq2,eq1,PE,W,U,M,d2v,v1,v,solution,q]
```

Método de Rayleigh Ritz

Defina o deslocamento

```
v=a1x^2 + a2x^3
```

$$\text{a1}x^2+\text{a2}x^3$$

Pegue a segunda derivada e determine o momento

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$2\text{a1}+6\text{a2}x$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

***M*=Simplify[d2vEI]**

$$2\text{EI}(\text{a1} + 3\text{a2}x)$$

Deformação energia, trabalho e energia potencial

***U*=1/(2EI)Integrate[*M*^2,{*x*,0,*L*}]**

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L + 12\text{a1a2EI}^2L^2 + 12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}}$$

***W*=Integrate[q0(1 − *x*/*L*)*v*,{*x*,0,*L*}]**

$$\frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0} + \frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

PE=***U* − *W***

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L + 12\text{a1a2EI}^2L^2 + 12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}} - \frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0} - \frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

Derivado parcial do potencial de energia wrt a_1 e.. a_2

***A*=*D*[PE,a1]**

$$\frac{8\text{a1EI}^2L + 12\text{a2EI}^2L^2}{2\text{EI}} - \frac{L^3\text{q0}}{12}$$

***B*=*D*[PE,a2]**

$$\frac{12\text{a1EI}^2L^2 + 24\text{a2EI}^2L^3}{2\text{EI}} - \frac{L^4\text{q0}}{20}$$

solution=Solve[{*A*==0,*B*==0},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1} \to \frac{7L^2\text{q0}}{120\text{EI}}, \text{a2} \to -\frac{L\text{q0}}{40\text{EI}}\right\}\right\}$$

***N*[%]**

$$\left\{\left\{\text{a1} \to \frac{0.0583333L^2\text{q0}}{\text{EI}}, \text{a2} \to -\frac{0.025L\text{q0}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

v/.solution

$$\left\{\frac{7L^2\text{q0}x^2}{120\text{EI}} - \frac{L\text{q0}x^3}{40\text{EI}}\right\}$$

Máximo deslocamento

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

v/.solution/.$x \to L$

$$\left\{\frac{L^4 \text{q0}}{30\text{EI}}\right\}$$

Clear[v,d2v,M,U,W,PE,A,B,solution]

Energia Potencial Complementar

Carga distribuída

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Momento é causado por carga real mais fictícia carga concentrada P no fim de Cantilever

M=Integrate[$q(x-$x1),{x1,0,x}] + Px

$$Px + \frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Energia interna deformação

U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3\text{EI}} + \frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}} + \frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)$$

Deslocamento

solution=DSolve[{$v''[x]$==M/EI,$v'[L]$==0,$v[L]$==0},$v[x]$,x]

$$\left\{\left\{v[x] \to \frac{40L^4P + 4L^5\text{q0} - 60L^3Px - 5L^4\text{q0}x + 20LPx^3 + \text{q0}x^5}{120\text{EI}L}\right\}\right\}$$

vmax=$v[x]$/.solution/.$x \to 0$

$$\left\{\frac{40L^4P + 4L^5\text{q0}}{120\text{EI}L}\right\}$$

Potencial de trabalho externo

q=q0x/L

$$\frac{\text{q0}x}{L}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

W=Pvmax + Integrate[**q**v[**x**],{**x**,**0**,**L**}]/.solution

$$\left\{\left\{\frac{L^4 Pq0}{30EI}+\frac{L^5 q0^2}{252EI}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5q0\right)}{120EIL}\right\}\right\}$$

CPE=**W − U**

$$\left\{\left\{\frac{L^4 Pq0}{30EI}+\frac{L^5 q0^2}{252EI}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5q0\right)}{120EIL}+\frac{1}{2}\left(-\frac{L^3P^2}{3EI}-\frac{L^4 Pq0}{15EI}-\frac{L^5 q0^2}{252EI}\right)\right\}\right\}$$

D[CPE,**P**]/.**P->0**

$$\left\{\left\{\frac{L^4 q0}{30EI}\right\}\right\}$$

Clear[**U**,**W**,**M**,**q**,CPE,vmax,solution]

Castigliano Segundo Teorema

Carga distribuída

q=q0x1/**L**

$$\frac{q0x1}{L}$$

Momento é causado por carga real mais um fictício carga concentrada P no fim de Cantilever

M=Integrate[**q**(**x** − x1),{x1,**0**,**x**}] + **Px**

$$Px+\frac{q0x^3}{6L}$$

Energia interna deformação

U=1/2 Integrate[**M^2**/EI,{**x**,**0**,**L**}]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3EI}+\frac{L^4 Pq0}{15EI}+\frac{L^5 q0^2}{252EI}\right)$$

Tire a energia da mancha

v=D[**U**,**P**]/.**P → 0**

$$\frac{L^4 q0}{30EI}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Clear[U,M,q,v]
```

Primeiro Teorema de Castigliano

Defina a função v e.. q

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

```
q=qo(1 - x/L)
```

$$\text{qo}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

Resolva a e.. b em termos de v_2 e.. v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1}\to-\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Atualizar expressão de v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

```
vmax=v1[L]
```

$$\text{a1}L^2+\text{a2}L^3$$

Energia interna deformação

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

```
M=EId2v + Pvmax
```

$$\left\{\left(\text{a1}L^2+\text{a2}L^3\right)P+\text{EI}\left(-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right)\right\}$$

```
U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Simplify[U]

$$\left\{\frac{a1^2L^8P^2+a2^2L^{10}P^2+8a2EIL^5P(-2v2+v3)+4EI^2\left(64v2^2-40v2v3+7v3^2\right)+2a1L^4P\left(a2L^5P+4EI(-2v2+v3)\right)}{2EIL^3}\right\}$$

D[U,vmax]

$$\partial_{a1L^2+a2L^3}\left\{\frac{a1^2L^5P^2}{2EI}+\frac{a1a2L^6P^2}{EI}+\frac{a2^2L^7P^2}{2EI}-8a1LPv2-8a2L^2Pv2+\frac{128EIv2^2}{L^3}+4a1LPv3+4a2L^2Pv3-\frac{80EIv2v3}{L^3}+\frac{14EIv3}{L^3}\right.$$

I.2.15 Simulação de Monte Carlo da resposta elástica linear do edifício à carga lateral

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Listando para Exemplo em §53.2.2.1.

```
% ========================================================================
% MONTE CARLO SIMULATION -- LATERAL DRIFT OF A 4-STORY SHEAR BUILDING
% ========================================================================
% Estimates the probability of exceeding a drift limit for a linear
% elastic shear-frame building under random lateral loads and random
% member stiffnesses.
%
% STRUCTURAL MODEL:
%   A 4-story shear building where each story lateral drift is:
%       delta_i = V_i / k_i = V_i * H^3 / (12 * sum(EI_i))
%   where V_i = cumulative shear at story i (sum of loads above),
%   k_i = 12*EI/H^3 = lateral stiffness (fixed-fixed column formula),
%   and two columns contribute per story.
%
%   Total roof drift = u1 + u2 + u3 + u4.
%
% RANDOM VARIABLES (all independent Gaussian):
%   F1..F4   : lateral floor loads       mean=Fbar,  CoV=40%
%   EI1..EI8 : column bending stiffness  mean=EIbar, CoV=20%
%
% NOTE: Normal distributions can produce negative F and EI values
%   (~0.6% probability at CoV=0.4). For a rigorous study use lognormal.
%
% UNITS: any consistent set (e.g. kN,m or kip,in).
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
Fbar    = 20;            % mean lateral floor load      [force]
sigmaF  = Fbar * 0.4;    % std dev of load  (CoV=40%)

EIbar   = 10000;         % mean column bending stiffness [force.length^2]
sigmaEI = EIbar * 0.2;   % std dev of EI    (CoV=20%)

H    = 4;      % story height                    [length]
ULIM = 0.1;    % drift limit (failure threshold) [length]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Monte Carlo sampling
% ------------------------------------------------------------------------
NSIM = 1000000;   % 1e6 simulations: reliable for PF down to ~1e-4

F1 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F2 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F3 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F4 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);

EI1 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 1 columns
EI2 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI3 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 2 columns
EI4 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI5 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 3 columns
EI6 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI7 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 4 columns
EI8 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Story drifts (vectorised over all simulations)
% ------------------------------------------------------------------------
u4 =  F4                 ./ (EI7 + EI8) / 12 * H^3;
u3 = (F3 + F4)           ./ (EI5 + EI6) / 12 * H^3;
u2 = (F2 + F3 + F4)      ./ (EI3 + EI4) / 12 * H^3;
u1 = (F1 + F2 + F3 + F4) ./ (EI1 + EI2) / 12 * H^3;

u = u1 + u2 + u3 + u4;   % total roof drift

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Statistics and failure probability
% ------------------------------------------------------------------------
UM  = mean(u);
US  = std(u);
COV = US / UM;

indic = (u > ULIM);   % 1 = failure (drift exceeds limit), 0 = safe
PF    = mean(indic);  % fraction of simulations in failure = P(u > ULIM)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Report
% ------------------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
fprintf('=== Monte Carlo Results (%d simulations) ===\n', NSIM);
fprintf('  Mean drift          UM  = %.5f\n', UM);
fprintf('  Std deviation       US  = %.5f\n', US);
fprintf('  Coeff of variation  COV = %.4f  (%.1f%%)\n', COV, COV*100);
fprintf('  Drift limit        ULIM = %.4f\n', ULIM);
fprintf('  Failure probability  PF = %.2e\n', PF);
fprintf('  Std error on PF        = %.2e\n', sqrt(PF*(1-PF)/NSIM));
```

I.2.16 Isoparamétrico elementos

A seção seguinte é reproduzida de Hinton e Owen, 1977 Finite Element Programming.

A implementação de um computador integrado numericamente isoparamétrico O elemento é resumido como segue.

Mas primeiro, supõe-se que esta operação deve ser realizada em uma função Chamado `Endurecido` E leva como argumentos de entrada `elcod, jovem, poiss, Tipo, ndime, ndofon, ngaus`.. Por sua vez, ele irá calcular o matriz de rigidez `KELEM` de elemento `Ielem`.

1. Recupere geometria de elementos e propriedades materiais para o elemento atual
2. Zero o matriz de rigidez
3. Função de chamada `dmat` Para definir a matriz constitutiva $\mathbf{D}^e$ do elemento
4. Introduza (nested) loop cobrindo todos os pontos de integração
   (a) Procure a posição de amostragem do ponto atual (ξ_p, η_q) (`S, t`) e seus pesos (`Weigp`)
   (b) Chamada de rotina função de forma `Sfr` dado ξ_p, η_q Que voltará O função de forma N_i^e (`Sfr`) e os derivados $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ e.. $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ (`derivar`) no momento ξ_p, η_q
   (c) Chame outra subrotina`Jacob`), dado N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ e.. $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ no ponto ξ_p, η_q devolverá derivados cartesianos função de forma $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ e.. $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ (`Carteiro`), A matriz Jacobiana $\mathbf{J}^e$ (`Jacm`), o seu Inverso $\mathbf{J}^{e-1}$ (`Jaci`), seu det determinante $\mathbf{J}^e$ (`Djac`) e o x e.. y coordenadas todas no ponto ξ_p, η_q
   (d) Chame a matriz deformação (`bmatps`) rotina, dado N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$, em ξ_p, η_q Voltará a matriz deformação $\mathbf{B}_i^e$ (`bmat`)
   (e) Chame uma rotina`Dbmat`) para avaliar $\mathbf{D}^e\mathbf{B}_i^e$ (`Dbmat`)
   (f) Avaliar $\mathbf{B}_i^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}_j^e \det\mathbf{J}^e \times$ integração Pesos e montá-los no elemento matriz de rigidez $\mathbf{K}_{ij}^e$
   (g) Reúnam-se $\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e$ (`Smat` em uma matriz tensão para avaliação posterior de tensões do nodal deslocamentos.
5. Escreva Matriz de rigidez

Lista sugerida de variáveis:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

`idime, ndime`	Índice, número de dimensões (2 para 2D)
`Idofn, endofn`	Índice, Número de grau de liberdade por nó
`Ielem,nelem`	Índice, número de elementos
`igaus, jgaus,ngaus`	Índice, índice, número de regras de Gauss adotadas
`Inode, nnode`	Índice, número de nós por elemento
`-Kamasp, ngasp`	Kounter, número de pontos Gauss usados
`Tipo`	1 para o avião tensão; 2 para o avião deformação
`Poiss`	Coeficiente de Poisson
`Jovem`	Módulo de Young
`elcod (ndime, nonode)`	Um conjunto local de coordenadas cartesianas nodais do elemento atualmente em consideração $\begin{bmatrix} x(\xi_1,\eta_1) & \cdots & x(\xi_8,\eta_8) \\ y(\xi_1,\eta_1) & \cdots & y(\xi_8,\eta_8) \end{bmatrix}$
`s`	ξ coordenadas do ponto de amostragem
`t`	η coordenadas do ponto de amostragem
`Gpcod (ndime, ngasp)`	Uma série local de coordenadas cartesianas do Gauss aponta para o elemento atualmente em consideração $\begin{bmatrix} x(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & x(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \\ y(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & y(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \end{bmatrix}$
`Posgp (mgaus)`	ξ coordenadas do ponto Gauss
`Weigp (mgaus)`	Fator de peso para o ponto Gauss
`Forma (node)`	Função de forma associado a cada nó de corrente Elemento em (ξ_p,η_p) $\begin{bmatrix} N_1(\xi_p,\eta_p) \\ \vdots N_8(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`(ndime, nonode)`	Função de forma derivado na amostragem Ponto (ξ_p,η_p) dentro do elemento $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`Cardd (ndime, nonode)`	Derivados cartesianos associados com os nós do elemento atual amostrado em qualquer ponto (ξ_p,η_p) dentro do elemento $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`Djacb`	Determinante da matriz Jacobiana amostrada em qualquer ponto (ξ_p,η_p) dentro do elemento
`Jacm (ndime,ndime)`	Matriz Jacobiana no ponto de amostragem
`Jaci (ndime,ndime)`	Inverso da matriz Jacobiana na amostragem Ponto
`Bmat (nstre, nevab)`	Elemento deformação matriz em qualquer ponto dentro do elemento $\mathbf{B} = [\ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_8\ ]$ Onde $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$
`DBMAT (ievab)`	Lojas **DB**

```
% ========================================================================
% ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS -- Q4, Q8, Q9 PLANE ELEMENTS
% ========================================================================
% A library of functions implementing Gaussian quadrature-based stiffness
% matrix assembly for 2D isoparametric elements under plane stress or
% plane strain conditions.
%
% SUPPORTED ELEMENT TYPES:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   Q4  : 4-node bilinear quadrilateral        (nnode = 4)
%   Q8  : 8-node serendipity quadrilateral      (nnode = 8)
%   Q9  : 9-node Lagrangian quadrilateral       (nnode = 9)
%
% ISOPARAMETRIC CONCEPT:
%   The same shape functions N_i(s,t) are used to interpolate both the
%   geometry and the displacement field:
%
%     x(s,t) = sum_i N_i(s,t) * x_i    (geometry mapping)
%     u(s,t) = sum_i N_i(s,t) * u_i    (displacement interpolation)
%
%   where (s,t) are natural coordinates in [-1,1]^2.
%
% STIFFNESS MATRIX:
%   K_e = integral_(-1)^(1) integral_(-1)^(1) B^T * D * B * |J| ds dt
%
%   approximated by Gauss quadrature:
%   K_e approx sum_i sum_j w_i * w_j * B^T(s_i,t_j) * D * B(s_i,t_j) * |J(s_i,
    t_j)|
%
% NATURAL COORDINATE NODE ORDERING (counter-clockwise):
%
%   Q4:           Q8/Q9:
%   4---3         4--7--3
%   |   |         8  9  6
%   1---2         1--5--2
%
%   (s increases right, t increases upward)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Script: plot Q8/Q9 shape functions over the reference element
%   Part 2  -- function stiff    : assemble element stiffness matrices
%   Part 3  -- function dmat     : constitutive matrix D (plane stress/strain)
%   Part 4  -- function sfr      : shape functions and derivatives N, dN/ds,
    dN/dt
%   Part 5  -- function jacob    : Jacobian J, J^-1, |J|, Cartesian
    derivatives
%   Part 6  -- function bmatps   : strain-displacement matrix B and D*B
%
% LNODS ARRAY FORMAT (input to stiff):
%   lnods(e, 1)       : element number
%   lnods(e, 2)       : Young's modulus E for element e
%   lnods(e, 3)       : Poisson's ratio nu for element e
%   lnods(e, 4:3+nnode): global node numbers of element e
%
% COORD ARRAY FORMAT:
%   coord(n, 1)       : global node number
%   coord(n, 2:3)     : x, y coordinates of node n
% ========================================================================


```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ========================================================================
% PART 1 -- SCRIPT: Plot Q8 and Q9 shape functions
% ========================================================================
% Plots surface and contour views of selected shape functions over the
% reference element [-1,1]^2 for visual verification.
%
% Node 1 (corner) and Node 8 (midside) are shown for both Q8 and Q9
% to illustrate how the bubble function N9 modifies the corner shapes.

xi  = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate xi  (horizontal)
eta = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate eta (vertical)

% Column vectors for outer products
XI  = xi';
ETA = eta';

% --- Q8/Q9 intermediate (midside/bubble) shape functions ---
% These are computed first because the corner functions depend on them.
N9 = (1 - ETA.^2) * (1 - xi.^2);             % bubble (centre node, Q9 only)
N8 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 - xi);            % midside: left edge
N7 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 + eta);           % midside: top edge
N6 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 + xi);            % midside: right edge
N5 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 - eta);           % midside: bottom edge

% --- Q8 corner shape functions (no bubble term) ---
N4_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 + eta) - 0.5*(N7 + N8);
N3_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 + eta) - 0.5*(N6 + N7);
N2_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 - eta) - 0.5*(N5 + N6);
N1_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 - eta) - 0.5*(N8 + N5);

% Plot Q8 corner node 1
figure('Name', 'Q8 Shape Functions');
subplot(2,2,1);
meshc(xi, eta, N1_Q8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q8 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,2,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q8);
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 1 (corner): contour');

% Plot Q8 midside node 8
subplot(2,2,3);
meshc(xi, eta, N8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q8 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,2,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 8 (midside): contour');

% --- Q9 shape functions: subtract bubble contribution from Q8 shapes ---
N1_Q9 = N1_Q8 - 0.25*N9;
N8_Q9 = N8    - 0.50*N9;

figure('Name', 'Q9 Shape Functions');
subplot(2,3,1);
meshc(xi, eta, N1_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q9 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,3,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 1 (corner): contour');

subplot(2,3,3);
meshc(xi, eta, N8_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q9 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,3,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 8 (midside): contour');

subplot(2,3,5);
meshc(xi, eta, N9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_9');
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): surface');

subplot(2,3,6);
[C, h] = contour(xi, eta, N9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): contour');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Assembles element stiffness matrices for all elements using Gauss
% quadrature.  Returns all element matrices stacked in a single array.
%
% INPUTS:
%   ngaus  : number of Gauss points per direction
%   posgp  : Gauss point positions  (1 x ngaus)
%   weigp  : Gauss point weights    (1 x ngaus)
%   type   : problem type  (1 = plane stress,  2 = plane strain)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   nelem  : number of elements
%   lnods  : connectivity + material array  [nelem x (3+nnode)]
%   coord  : node coordinates  [nnodes x 3]  (col1=node#, col2=x, col3=y)
%   nnode  : nodes per element  (4, 8, or 9)
%
% OUTPUT:
%   KELEM  : stacked element stiffness matrices  [nelem*2*nnode x 2*nnode]
%            Row block ielem: KELEM(2*nnode*(ielem-1)+1 : 2*nnode*ielem, :)

function KELEM = stiff(ngaus, posgp, weigp, type, nelem, lnods, coord, nnode)

fprintf('Assembling element stiffness matrices...\n');
tic;

stifsize  = 2 * nnode;        % DOFs per element (2 per node: u and v)
KELEM     = zeros(stifsize * nelem, stifsize);

for ielem = 1 : nelem

    % --- Extract material properties from lnods ---
    young = lnods(ielem, 2);
    poiss = lnods(ielem, 3);

    % --- Extract element node coordinates ---
    % elcod: 2 x nnode matrix  [x; y] for each node in order
    elcod = zeros(2, nnode);
    for inode = 1 : nnode
        global_node = lnods(ielem, inode+3);
        row         = find(coord(:,1) == global_node);
        elcod(:, inode) = coord(row, 2:3)';
    end

    % --- Constitutive matrix ---
    D = dmat(young, poiss, type);

    % --- Gauss quadrature over the reference element ---
    kelem = zeros(stifsize);
    for igaus = 1 : ngaus
        for jgaus = 1 : ngaus
            s = posgp(igaus);
            t = posgp(jgaus);
            W = weigp(igaus) * weigp(jgaus);

            [shape, deriv]            = sfr(s, t, nnode);
            [cartd, ~, ~, djac, ~]    = jacob(shape, deriv, elcod);
            [bmat, dbmat]             = bmatps(shape, cartd, D);

            % Accumulate:  K += w * B^T * D * B * |J|
            kelem = kelem + W * bmat' * dbmat * djac;
        end
    end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
210
211     % --- Store in stacked output array ---
212     startrow = stifsize * (ielem-1) + 1;
213     endrow   = stifsize * ielem;
214     KELEM(startrow:endrow, :) = kelem;
215
216 end
217
218 fprintf('Done. Elapsed: %.4f sec\n\n', toc);
219
220 end   % stiff
221
222
223 % ========================================================================
224 % PART 3 -- FUNCTION: dmat
225 % ========================================================================
226 % Returns the 3x3 constitutive matrix D for isotropic linear elasticity
227 % under either plane stress or plane strain assumptions.
228 %
229 % PLANE STRESS (type=1): thin plate, sigma_zz = 0
230 %   D = E/(1-v^2) * [1, v,      0     ]
231 %                   [v, 1,      0     ]
232 %                   [0, 0, (1-v)/2    ]
233 %
234 % PLANE STRAIN (type=2): thick body constrained in z, eps_zz = 0
235 %   D = E/((1+v)(1-2v)) * [1-v,  v,       0    ]
236 %                         [ v,  1-v,      0    ]
237 %                         [ 0,   0,  (1-2v)/2  ]
238 %
239 % Strain vector convention: [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
240
241 function D = dmat(young, poiss, type)
242
243 E = young;
244 v = poiss;
245
246 if type == 1
247     % Plane stress
248     D = E/(1-v^2) * [ 1,    v,       0    ;
249                       v,    1,       0    ;
250                       0,    0,  (1-v)/2   ];
251 else
252     % Plane strain
253     D = E/((1+v)*(1-2*v)) * [ 1-v,   v,       0      ;
254                               v,   1-v,       0      ;
255                               0,    0,   (1-2*v)/2   ];
256 end
257
258 end   % dmat
259
260
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: sfr  (Shape Function Routine)
% ========================================================================
% Computes shape functions N_i(s,t) and their natural-coordinate
% derivatives dN_i/ds, dN_i/dt at a single Gauss point (s,t).
%
% The Q8 and Q9 shape functions are built hierarchically:
%   - Midside nodes are constructed from bilinear products
%   - Corner nodes are the bilinear shapes minus contributions of
%     adjacent midside nodes (to enforce partition of unity)
%   - Q9 adds the bubble function N9 and subtracts its contribution
%     from all other nodes
%
% INPUTS:
%   s, t   : natural coordinates of the evaluation point  [-1,1]
%   nnode  : 4 (Q4), 8 (Q8), or 9 (Q9)
%
% OUTPUTS:
%   shape  : nnode x 1 vector of shape function values
%   deriv  : 2 x nnode matrix of derivatives  [dN/ds; dN/dt]

function [shape, deriv] = sfr(s, t, nnode)

if nnode == 9
    % --- Q9: 9-node Lagrangian element ---
    % Node 9 is the interior bubble: N9 = (1-s^2)*(1-t^2)
    N9 = (1-s^2)*(1-t^2);

    % Midside nodes (edges)
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % left midside
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t) - 0.5*N9;    % top midside
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % right midside
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t) - 0.5*N9;    % bottom midside

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8 - 0.25*N9;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7 - 0.25*N9;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6 - 0.25*N9;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8 - 0.25*N9;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8; N9];

    % Derivatives of N9
    dN9ds = -2*s*(1-t^2);
    dN9dt = -2*t*(1-s^2);

    % Derivatives of midside nodes
    dN8ds = -0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN8dt = -t*(1-s)     - 0.5*dN9dt;
    dN7ds = -s*(1+t)     - 0.5*dN9ds;
    dN7dt =  0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    dN6ds =  0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN6dt = -t*(1+s)     - 0.5*dN9dt;
    dN5ds = -s*(1-t)     - 0.5*dN9ds;
    dN5dt = -0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;

    % Derivatives of corner nodes
    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds - 0.25*dN9ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt - 0.25*dN9dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds - 0.25*dN9ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt - 0.25*dN9dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds, dN9ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt, dN9dt ];

elseif nnode == 8
    % --- Q8: 8-node serendipity element (no interior node) ---

    % Midside nodes
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2);
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t);
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2);
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t);

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8];

    dN8ds = -0.5*(1-t^2);   dN8dt = -t*(1-s);
    dN7ds = -s*(1+t);        dN7dt =  0.5*(1-s^2);
    dN6ds =  0.5*(1-t^2);   dN6dt = -t*(1+s);
    dN5ds = -s*(1-t);        dN5dt = -0.5*(1-s^2);

    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt ];
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
363
364 else
365     % --- Q4: 4-node bilinear element ---
366     N4 = 0.25*(1-s)*(1+t);
367     N3 = 0.25*(1+s)*(1+t);
368     N2 = 0.25*(1+s)*(1-t);
369     N1 = 0.25*(1-s)*(1-t);
370
371     shape = [N1; N2; N3; N4];
372
373     dN4ds = -0.25*(1+t);  dN4dt =  0.25*(1-s);
374     dN3ds =  0.25*(1+t);  dN3dt =  0.25*(1+s);
375     dN2ds =  0.25*(1-t);  dN2dt = -0.25*(1+s);
376     dN1ds = -0.25*(1-t);  dN1dt = -0.25*(1-s);
377
378     deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds ;
379              dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt ];
380 end
381
382 end   % sfr
383
384
385 % ==========================================================================
386 % PART 5 -- FUNCTION: jacob
387 % ==========================================================================
388 % Computes the Jacobian matrix and related quantities needed to transform
389 % shape function derivatives from natural to Cartesian coordinates.
390 %
391 % JACOBIAN MATRIX:
392 %   J = deriv * elcod^T    (2x2 matrix)
393 %
394 %   [dX/ds  dY/ds]   [dN/ds] * [x_1 y_1]
395 %   [dX/dt  dY/dt] = [dN/dt]   [x_2 y_2]
396 %                              [  ...   ]
397 %
398 % CARTESIAN DERIVATIVES:
399 %   [dN/dx]        [dN/ds]
400 %   [dN/dy] = J^-1 [dN/dt]
401 %
402 % WARNING: if |J| <= 0 the element is distorted (inverted or collapsed).
403 %   This function does not check for this condition -- the caller should
404 %   verify djac > 0 for all Gauss points.
405 %
406 % INPUTS:
407 %   shape  : nnode x 1 shape function values (used for xy interpolation)
408 %   deriv  : 2 x nnode natural-coordinate derivatives
409 %   elcod  : 2 x nnode element node coordinates  [x; y]
410 %
411 % OUTPUTS:
412 %   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
413 %   jacm   : 2x2 Jacobian matrix J
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   jaci   : 2x2 Jacobian inverse J^-1
%   djac   : scalar determinant |J|
%   xy     : 2x1 physical coordinates at the Gauss point

function [cartd, jacm, jaci, djac, xy] = jacob(shape, deriv, elcod)

jacm  = deriv * elcod';   % J = dN/ds * [x; y]^T
jaci  = inv(jacm);        % J^-1
djac  = det(jacm);        % |J| (must be > 0 for valid element)
cartd = jaci * deriv;     % Cartesian derivatives: J^-1 * dN/d(s,t)
xy    = elcod * shape;    % Physical coordinates at Gauss point

end   % jacob


% ========================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: bmatps  (B matrix for plane stress/strain)
% ========================================================================
% Assembles the strain-displacement matrix B and the product D*B.
%
% For 2D plane problems the strain vector is:
%   eps = [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
%
% The B matrix maps nodal displacements to strains:
%   eps = B * u_e
%
% For node i the 3x2 sub-block of B is:
%   [dN_i/dx,      0    ]
%   [    0,    dN_i/dy  ]
%   [dN_i/dy,  dN_i/dx  ]
%
% These sub-blocks are assembled column-pair by column-pair.
%
% INPUTS:
%   shape  : shape function values (not used directly here but available)
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   D      : 3x3 constitutive matrix
%
% OUTPUTS:
%   bmat   : 3 x 2*nnode strain-displacement matrix B
%   dbmat  : 3 x 2*nnode product D*B

function [bmat, dbmat] = bmatps(shape, cartd, D) %#ok<INUSL>

nnode   = size(cartd, 2);
numcols = 2 * nnode;          % total DOF columns (u and v for each node)
bmat    = zeros(3, numcols);

for inode = 1 : nnode
    col = 2*inode - 1;        % column pair: [col, col+1] for node inode
    bmat(:, col:col+1) = [ cartd(1,inode),       0          ;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                                    0,          cartd(2,inode)  ;
                               cartd(2,inode),  cartd(1,inode)  ];
end

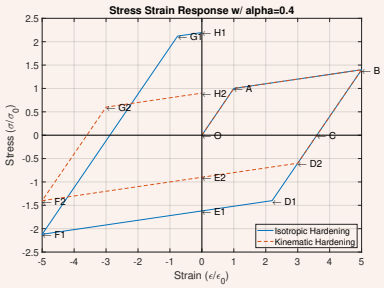
dbmat = D * bmat;

end   % bmatps
```

I.3 Parte III: Modelagem material e comportamento constitutivo

Esta seção aborda o comportamento material, incluindo plasticidade, e modelos constitutivos não lineares para diferentes tipos de materiais.

I.3.1 Plástica incremental



Escrito por Ben Gallagher

```
% ========================================================================
% INCREMENTAL PLASTICITY -- STRESS-STRAIN RESPONSE COMPARISON
% ========================================================================
% Plots the normalised stress-strain response of an elastic-plastic
% material under cyclic loading for two hardening rules:
%
%   1. ISOTROPIC HARDENING:
%      The yield surface expands uniformly in all directions as plastic
%      strain accumulates.  Both tensile and compressive yield stresses
%      increase equally.  This captures strain hardening but not the
%      Bauschinger effect.
%
%   2. KINEMATIC HARDENING (Prager):
%      The yield surface translates in stress space without changing size.
%      After tensile yielding, the compressive yield stress decreases by
%      the same amount as the tensile yield stress increased.  This
%      captures the Bauschinger effect observed in metals.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
% NORMALISATION:
%   All stresses normalised by the initial yield stress sigma_0 (s_not).
%   All strains normalised by the initial yield strain epsilon_0 (e_not).
%
% LOADING PATH (points A through H):
%   O -> A : elastic loading to initial yield
%   A -> B : plastic loading (hardening)
%   B -> C : elastic unloading, zero stress
%   C -> D : continued unloading to reverse yield
%   D -> E : reverse plastic flow, zero strain
%   E -> F : continued reverse plastic loading
%   F -> G : elastic reloading
%   G -> H : plastic reloading, zero strain
%
% HARDENING PARAMETER:
%   alpha (a) controls the plastic modulus relative to elastic modulus.
%   For a = 0: perfectly plastic (no hardening).
%   For a = 0.4: moderate hardening (used here).
%
% The two hardening rules give identical paths O->A->B->C but diverge
% from point D onward, reflecting their different treatment of the
% back-stress and yield surface evolution.
% ========================================================================

close all; clear; clc;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 18;
GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Material parameters
% ------------------------------------------------------------------------
s_not = 1;    % initial yield stress    (normalised: sigma_0 = 1)
e_not = 1;    % initial yield strain    (normalised: epsilon_0 = 1)
a     = 0.4;  % hardening parameter     (plastic modulus ratio)

% ========================================================================
% Section 2 -- Isotropic hardening: key points
% ========================================================================
% Under isotropic hardening the current yield stress after loading to
% point B is (1+a)*s_not.  On reverse loading, yielding occurs when
% the stress has decreased by 2*(1+a)*s_not from the peak.
%
% The slope of each loading segment is E (elastic) or E*a/(1+a) (plastic).
% All coordinates are derived analytically from these assumptions.

% Point A: initial yield (start of plastic flow)
sa = s_not;
ea = e_not;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
69
70 % Point B: end of forward plastic loading
71 sb = (1 + a) * s_not;
72 eb = (1 + 10*a) * e_not;
73
74 % Point C: elastic unload to zero stress
75 sc = 0;
76 ec = 9*a * e_not;
77
78 % Point D: reverse yield (isotropic -- yield surface has expanded)
79 sd = -(1 + a) * s_not;
80 ed = (8*a - 1) * e_not;
81
82 % Point E: reverse plastic flow to zero strain
83 se = -9/10 * (1 + 2*a) * s_not;
84 ee = 0;
85
86 % Point F: end of reverse plastic loading
87 sf = -(1 + 14/5*a) * s_not;
88 ef = -(1 + 10*a) * e_not;
89
90 % Point G: re-load to forward yield
91 sg = (1 + 14/5*a) * s_not;
92 eg = (1 - 22/5*a) * e_not;
93
94 % Point H: re-load to zero strain
95 sh = (9/10 + 81/25*a) * s_not;
96 eh = 0;
97
98 % ========================================================================
99 % Section 3 -- Kinematic hardening: key points
100 % ========================================================================
101 % Under kinematic hardening the yield surface translates but does not
102 % grow.  The yield surface half-width remains s_not throughout.
103 % Reverse yielding occurs at a lower stress than under isotropic hardening,
104 % capturing the Bauschinger effect.
105
106 % Points A and B: same as isotropic (first loading)
107 sak = s_not;          eak = e_not;
108 sbk = (1 + a) * s_not; ebk = (1 + 10*a) * e_not;
109
110 % Point C: elastic unload to zero stress
111 sck = 0;
112 eck = 9*a * e_not;
113
114 % Point D: reverse yield (kinematic -- yield surface has only translated)
115 sdk = (a - 1) * s_not;
116 edk = (10*a - 1) * e_not;
117
118 % Point E: reverse plastic flow to zero strain
119 sek = -9/10 * s_not;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
eek = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sfk = -(a + 1) * s_not;
efk = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sgk = (1 - a) * s_not;
egk = (1 - 10*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
shk = 9/10 * s_not;
ehk = 0;

% ========================================================================
% Section 4 -- Assemble path vectors (origin + A through H)
% ========================================================================
x_iso  = [0; ea;  eb;  ec;  ed;  ee;  ef;  eg;  eh ];
y_iso  = [0; sa;  sb;  sc;  sd;  se;  sf;  sg;  sh ];

x_kin  = [0; eak; ebk; eck; edk; eek; efk; egk; ehk];
y_kin  = [0; sak; sbk; sck; sdk; sek; sfk; sgk; shk];

% Axes lines
x_axis = [-5, 5];   y_zero = [0,  0];
y_axis = [0,  0];   x_zero = [-2.5, 2.5];

% ========================================================================
% Section 5 -- Plot
% ========================================================================
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);
set(gca, 'FontSize', fs);

plot(x_iso, y_iso,  'b-',  'LineWidth', 1.5);   hold on;
plot(x_kin, y_kin,  'r--', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_axis, y_zero, 'k');
plot(y_axis, x_zero, 'k');

% --- Point labels ---
% Subscript 1 = isotropic,  subscript 2 = kinematic
lbl = @(x,y,s) text(x, y, ['\leftarrow ' s], ...
                    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', fs);

lbl(0,   0,    'O');
lbl(ea,  sa,   'A');
lbl(eb,  sb,   'B');
lbl(ec,  sc,   'C');

% Isotropic points (suffix 1)
lbl(ed,  sd,   'D_1');
lbl(ee,  se,   'E_1');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
lbl(ef,  sf,   'F_1');
lbl(eg,  sg,   'G_1');
lbl(eh,  sh,   'H_1');

% Kinematic points (suffix 2)
lbl(edk, sdk,  'D_2');
lbl(eek, sek,  'E_2');
lbl(efk, sfk,  'F_2');
lbl(egk, sgk,  'G_2');
lbl(ehk, shk,  'H_2');

% --- Formatting ---
title(['Stress-Strain Response  (\alpha = ' num2str(a) ')'], 'FontSize', fs);
xlabel('Strain  (\epsilon / \epsilon_0)',  'FontSize', fs);
ylabel('Stress  (\sigma / \sigma_0)',      'FontSize', fs);
legend('Isotropic Hardening', 'Kinematic Hardening', 'Location', 'southeast');
grid on;
axis on;
set(gca, 'FontSize', fs);

% ========================================================================
% Section 6 -- Export
% ========================================================================
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
FileName = 'Prob-1.eps';
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
```

I.3.2 Modelos constitutivos

Por cinco anos, a Universidade de Colorado Boulder fez parte do consórcio NEES e focou em simulação híbrida em tempo real (Saouma e Sivaselvan, 2014).

Como o site estava sendo fechado (prematurmente) devido a uma falta de interesse em pesquisa pela comunidade em geral (RTHS são notoriamente desafiadores, muito mais do que "mundane" 'shake table tests'), o autor decidiu desenvolver seu próprio software como OpenSees não era Particularmente adequado para tal empreendimento.

O software desenvolvido (aptamente chamado) Mercúrio (Saouma, Kang e Haussmann, 2012) foi escrito pela primeira vez em objeto orientado MATLAB®por Kang, 2010 e depois reescrito em C++ pelo Dr. Gary Haussman.

Até hoje, e até o melhor do conhecimento do autor (e viés) a simulação híbrida em tempo real dos 400+ graus de liberdade em um altamente não linear concreto armado pórtico (antes testado em uma mesa de balanço) não só não foi superada, mas é possivelmente um dos testes estruturais mais complexos já realizados (Saouma et al., 2013).

Mais tarde, um motorista foi escrito por Segura, 2011 que adicionou o modelo de Ibarra

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

para plasticidade grudada, bem como o modelo estado limite cisalhamento. Isso veio a ser chamado de Mercúrio++.

Note que o código está escrito no Matlab Orientado por Objetos.

Esta seção irá listar os condutores constitutivos disponíveis em Mercúrio++.

Da tese de doutorado "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" por Kang, 2010 E a esclerose múltipla. Teses "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code" por Segura, 2011.

I.3.3 Modelo bilinear

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Bilinear < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect
   an increase of the compression yield envelope through a fraction of the
   yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect
   to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect
   an increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield
   strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect
   to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comShift_Pos;           % committed Shift_Pos from previous step
        comShift_Neg;           % committed Shift_Neg from previous step
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive
    model
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive
    model
        Shift_Pos;              % positive shift for isotropic hardening
        Shift_Neg;              % negative shift for isotropic hardening
        flag;                   % flag for load status
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Bilinear(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Strain_min = 0;
            mat.Strain_max = 0;
            mat.Shift_Pos  = 1;
            mat.Shift_Neg  = 1;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.comShift_Pos  = mat.Shift_Pos;
            mat.comShift_Neg  = mat.Shift_Neg;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                Esh  = mat.b * mat.InitialE;
                epsy = mat.sy0/mat.InitialE;
                c1   = Esh * mat.Strain;
                c2   = mat.Shift_Neg * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c3   = mat.Shift_Pos * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c    = mat.comStress + mat.InitialE * del_eps;
                mat.Stress = max( (c1-c2), min( (c1+c3), c ) );
                if ( abs(mat.Stress - c) < 2.2204460492503131e-016 )
                    mat.TangentE = mat.InitialE;
                else
                    mat.TangentE = Esh;
                end

                if (mat.flag == 0)
                    if (del_eps > 0.0)
                        mat.flag = 1;
                    else
                        mat.flag = -1;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
                    end
                end

                if ( (mat.flag == 1) && (del_eps < 0.0) )
                    % loading reverstal( + -> - )
                    mat.flag = -1;
                    mat.Strain_max = max(mat.comStrain, mat.Strain_max);
                    mat.Shift_Neg  = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.
    Strain_min) / (2.0 * mat.a2 * epsy) )^0.8;
                end

                if ( (mat.flag == -1) && (del_eps > 0.0) )
                    % loading reverstal( - -> + )
                    mat.flag = 1;
                    mat.Strain_min = min(mat.comStrain, mat.Strain_min);
                    mat.Shift_Pos  = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max - mat.
    Strain_min) / (2.0 * mat.a4 * epsy) )^0.8;
                end
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.4 Endurecimento

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hardening < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        Hiso;                   % isotropic hardening modulus
        Hkin;                   % kinematic hardening modulus
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comPlasticStrain;       % committed PlasticStrain from previous step
        comBackStress;          % committed BackStress from previous step
        comsy;                  % committed sy from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        PlasticStrain;          % uniaxial plastic strain
        BackStress;             % uniaxial back stress
        sy;                     % yield stress
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hardening(material)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.Hiso     = material.Hiso;
            mat.Hkin     = material.Hkin;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress           = 0;
            mat.TangentE         = mat.InitialE;
            mat.Strain           = 0;
            mat.PlasticStrain    = 0;
            mat.BackStress       = 0;
            mat.sy               = mat.sy0;
            mat.comPlasticStrain = 0;
            mat.comBackStress    = 0;
            mat.comsy            = mat.sy0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress        = mat.Stress;
            mat.comTangentE      = mat.TangentE;
            mat.comStrain        = mat.Strain;
            mat.comPlasticStrain = mat.PlasticStrain;
            mat.comBackStress    = mat.BackStress;
            mat.comsy            = mat.sy;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress        = mat.comStress;
            mat.TangentE      = mat.comTangentE;
            mat.Strain        = mat.comStrain;
            mat.PlasticStrain = mat.comPlasticStrain;
            mat.BackStress    = mat.comBackStress;
            mat.sy            = mat.comsy;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            % Material constitutive law
            eps_p_tr     = mat.comPlasticStrain;   % trial plastic strain
            back_sig_tr  = mat.comBackStress;      % trial back stress
            sy_tr        = mat.comsy;              % trial evoluted yielding
    stress
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            sig_tr       = mat.InitialE * ( mat.Strain - eps_p_tr);  % trial
    stress
            %
    ------------------------------------------------------------------------
            Mark = sig_tr - back_sig_tr;        % Sign operator
            %
    ------------------------------------------------------------------------
            func = abs(Mark) - sy_tr;           % Yielding function
            %
    ------------------------------------------------------------------------
            if (func <= 0)                      % Elastic
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr;        % updated plastic strain
                mat.BackStress    = back_sig_tr;     % updated back stress
                mat.sy            = sy_tr;           % evoluted yielding
    stress
                mat.Stress        = sig_tr;          % updated uniaxial stress
                mat.TangentE      = mat.InitialE;    % updated tangent modulus
            elseif (func > 0)                   % Plastic
                del_gamma  = func / ( mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr + del_gamma * sign(Mark);
                mat.BackStress    = back_sig_tr + del_gamma * mat.Hkin * sign(
    Mark);
                mat.sy            = sy_tr + mat.Hiso * del_gamma;
                mat.Stress        = sig_tr - del_gamma * mat.InitialE * sign(
    Mark);
                mat.TangentE      = mat.InitialE * ( mat.Hiso + mat.Hkin ) / (
     mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.5 Histerese

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;        % material Tag
        Type;       % material Type
        sy_pos0;    % positive yield Stress
        epsy_pos0;  % positive yield Strain
        sy_neg0;    % negative yield Stress
        epsy_neg0;  % negative yield Strain
        cap_pos0;   % positive capping Stress
        ecap_pos0;  % positive capping Strain
        cap_neg0;   % negative capping Stress
        ecap_neg0;  % negative capping Strain
        res_pos;    % positive residual Stress
        eres_pos0;  % positive residual Strain
        res_neg;    % negative residual Stress
        eres_neg0;  % negative residual Strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density
        %% commit variables
        comStress;     % committed Stress from previous step
        comInitialE;       % committed InitialE from previous step
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        comStrain;     % committed Strain from previous step
        comsy_pos;     % committed yeild Stress
        comsy_neg;     % committed yeild Stress
        comcap_pos;
        comcap_neg;
        comepsy_pos;   % positive yield Strain
        comepsy_neg;   % negative yield Strain
        comecap_pos;   % positive cap Strain
        comecap_neg;   % negative cap Strain
        comeres_pos;   % positive residual Strain
        comeres_neg;   % negative residual Strain
        comhys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        coms_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        coms_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        coms_tar_pos;   % positive target Stress
        comeps_tar_pos; % positive target Strain
        coms_tar_neg;   % negative target Stress
        comeps_tar_neg; % negative target Strain
        comstate_flag;  % loading branch
        comupdate_flag; % update loading branch
        comreversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        comenrgy_step;  % step i energy dissipated
        comenrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        comE_unld;      % unloading stiffness
        comE_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        comE_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        comeps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        comeps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        comBeta;
        comBeta_Unld;
        comnorm_hys;
        comn_exc;
        %% update variables
        Stress;     % uniaxial Stress
        InitialE;       % tangent modulus
        Strain;     % uniaxial Strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield Stress
        sy_neg;     % negative yield Stress
        cap_pos;    % positive capping Stress
        cap_neg;    % negative capping Stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield Strain
        epsy_neg;   % negative yield Strain
        ecap_pos;   % positive cap Strain
        ecap_neg;   % negative cap Strain
        eres_pos;   % positive residual Strain
        eres_neg;   % negative residual Strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        s_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target Stress
        eps_tar_pos; % positive target Strain
        s_tar_neg;   % negative target Stress
        eps_tar_neg; % negative target Strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        Beta;        % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;    % normalized hysteretic energy
        n_exc;       % number excursions/cycles

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hysteresis(material)
            mat.Tag         = material.Tag;
            mat.Type        = material.Type;
            mat.sy_pos0     = material.sy_pos0;
            mat.epsy_pos0   = material.epsy_pos0;
            mat.sy_neg0     = material.sy_neg0;
            mat.epsy_neg0   = material.epsy_neg0;
            mat.cap_pos0    = material.cap_pos0;
            mat.ecap_pos0   = material.ecap_pos0;
            mat.cap_neg0    = material.cap_neg0;
            mat.ecap_neg0   = material.ecap_neg0;
            mat.res_pos     = material.res_pos;
            mat.eres_pos0   = material.eres_pos0;
            mat.res_neg     = material.res_neg;
            mat.eres_neg0   = material.eres_neg0;
            mat.lamda_hys   = material.lamda_hys;
            mat.det_rate    = material.det_rate;
            mat.rho         = material.rho;
        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.Stress     = 0;
            mat.Strain     = 0;
            mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.InitialE       = mat.iniE;
            mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat
    .epsy_pos0);
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat
    .ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i
    -1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5   = 0;
            mat.eps_pt10  = 0;
            mat.norm_hys  = 0;
            mat.n_exc     = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress      = mat.Stress;
            mat.comInitialE        = mat.InitialE;
            mat.comStrain      = mat.Strain;
            mat.comsy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.comsy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.comcap_pos     = mat.cap_pos;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.comcap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.comepsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.comepsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.comecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.comecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.comeres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.comeres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.comhys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.coms_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.coms_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.coms_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.comeps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.coms_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.comeps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.comstate_flag  = mat.state_flag;
            mat.comupdate_flag = mat.update_flag;
            mat.comreversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.comenrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.comenrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.comE_unld      = mat.E_unld;
            mat.comE_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.comE_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.comeps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.comeps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.comnorm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.comn_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress      = mat.comStress;
            mat.InitialE        = mat.comInitialE;
            mat.Strain      = mat.comStrain;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.comhys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.state_flag  = mat.comstate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
        end % function revert

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
%             mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.InitialE       = mat.comInitialE;
            mat.state_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
            %-----------------------------------------------------------------
        if (del_eps >= 0) && (mat.Stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.Stress > 0) % positive unloading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.Stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.Stress < 0) % negative loading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.Stress = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);

            if (mat.comStress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.comStress/mat.Stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.
    comStress));
                else % reloading
                    if (mat.Stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt10)*mat.Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt5)*mat.Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.
    comStress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.Strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_Stress = mat.sy_neg;
                    ref_Strain = mat.epsy_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_Strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain > 0)
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
%             elseif (mat.state_flag == 4)
%                 mat.update_flag = 4;
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.comStress;
                    end
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                case -1
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_Stress = mat.sy_pos;
                    ref_Strain = mat.epsy_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt5;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 4) && (mat.update_flag ~= 9)
                % estimate energy in step
                Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
    ref_Strain);
                enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress +
     0.5*(Stress_new - mat.comStress)));
                if (mat.comreversal_flag == 1)
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
530                     mat.reversal_flag = -1;
531                     mat.update_flag = 12; %unloading
532                 else
533                     mat.reversal_flag = 1;
534                     % update cyclic parameters on negative side
535                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
536                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
537                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
538                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
539                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
540                     mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
541                     mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
542                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
543                     mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
544                     Stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
545                     if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
546                         mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
547                     else
548                         mat.s_tar_neg = Stress_tar_chk;
549                     end
550                     if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
551                         mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
552                         mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
553                     end
554 
555                     if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
556                         mat.update_flag = 12; %unloading
557                     elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
558                         mat.update_flag = 13; % reloading to target
559                     else
560                         if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
561                             mat.update_flag = 7; % neg hardening
562                         elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
563                             mat.update_flag = 8; % neg softening
564                         else
565                             mat.update_flag = 9; % neg residual
566                         end
567                     end
568 
569                     if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
570                         mat.update_flag = 13; % reloading to target
571                     else
572                         if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
573                             mat.update_flag = 7; % neg hardening
574                         elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
575                             mat.update_flag = 8; % neg softening
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_Stress = mat.cap_neg;
                        ref_Strain = mat.ecap_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_Stress = mat.res_neg;
                        ref_Strain = mat.eres_neg;
                        mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_Stress = mat.comStress;
                        ref_Strain = mat.comStrain;
                        mat.InitialE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_Stress = 0;
                        ref_Strain = mat.eps_pt5;
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
626                     elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
627                         mat.update_flag = 8;
628                     else
629                         mat.update_flag = 9;
630                     end
631                 case 4
632                     mat.update_flag = 4;
633                 case 7
634                     if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
635                         mat.update_flag = 7;
636                     elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
637                         mat.update_flag = 8;
638                     else
639                         mat.update_flag = 9;
640                     end
641                 case 8
642                     if (mat.Strain > mat.eres_neg)
643                         mat.update_flag = 8;
644                     else
645                         mat.update_flag = 9;
646                     end
647                 case 9
648                     mat.update_flag = 9;
649 
650                 otherwise
651                     if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
652                         mat.update_flag = 13;
653                     else
654                         if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
655                             mat.update_flag = 7;
656                         elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
657                             mat.update_flag = 8;
658                         else
659                             mat.update_flag = 9;
660                         end
661                     end
662             end
663 
664             switch mat.update_flag
665                 case -1
666                     ref_Stress = 0;
667                     ref_Strain = 0;
668                     mat.InitialE   = mat.iniE;
669                 case 4
670                     ref_Stress = mat.res_pos;
671                     ref_Strain = mat.eres_pos;
672                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
673                 case 7
674                     ref_Stress = mat.s_tar_neg;
675                     ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
676                     mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.Strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
%             elseif (mat.state_flag == 9)
%                 mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.comStress;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                end
            end
            % determine Strain at pt 10
            mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

            if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                mat.update_flag = 10; % unloading
            else
                if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11;
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = mat.sy_neg;
                ref_Strain = mat.epsy_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_Stress = 0;
                ref_Strain = 0;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 2
                ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
            case 3
                ref_Stress = mat.cap_pos;
                ref_Strain = mat.ecap_pos;
                mat.InitialE   = mat.E_sof;
            case 4
                ref_Stress = mat.res_pos;
                ref_Strain = mat.eres_pos;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 9
                ref_Stress = mat.res_neg;
                ref_Strain = mat.eres_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 10
                ref_Stress = mat.comStress;
                ref_Strain = mat.comStrain;
                mat.InitialE   = mat.E_unld;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
778                 case 11
779                     ref_Stress = 0;
780                     ref_Strain = mat.eps_pt10;
781                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_Strain);
782 
783             end
784 
785             % update unloading modulus
786             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 4) && (mat.update_flag ~= 9)
787                 % estimate energy in step
788                 Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
    ref_Strain);
789                 enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress +
     0.5*(Stress_new - mat.comStress)));
790                 if (mat.comreversal_flag == 1)
791                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
792                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
793                 end
794                 % determine Strain at pt 10
795                 mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;
796 
797                 if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
798                     mat.reversal_flag = -1;
799                     mat.update_flag = 10; % unloading
800                 else
801                     mat.reversal_flag = 1;
802                     % update cyclic parameters on positive side
803                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
804                     mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
805                     mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
806                     mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
807                     mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
808                     mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
    sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
809                     mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.
    E_sof*mat.ecap_pos);
810                     mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
811                     mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.
    s_ref_pos)/mat.E_sof);
812                     Stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_pos;
813                     if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
814                         mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
    eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
815                     else
816                         mat.s_tar_pos = Stress_tar_chk;
817                     end
818                     if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
819                         mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
                    mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                end

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                elseif (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2; % hardening
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end

                if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2; % hardening
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case 2
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt10;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_Strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
920
921         function write2mat(mat, fid)
922              uni_e_s = mat.uni_e_s;
923              save(fid, 'uni_e_s');
924          end
925
926         function getPlot(mat,num)
927             figure(num);
928             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
929             hold on;grid on;box on;
930             xlabel('Strain');
931             ylabel('Stress');
932         end
933
934         function finalPlot(mat,num)
935             figure(num);
936             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
937             grid on;box on;
938             title('Strain-Stress relationship');
939             xlabel('Strain');
940             ylabel('Stress');
941         end
942
943     end % methods
944
945 end % classdef
```

I.3.6 Giuffre monegotto pinto modificado

```
1  %% ---------------------------------------------------------------
2  % Copyright 2010 All rights reserved.
3  % Program    : Mercury v.2.01
4  % Email      : kkd0724@hanafos.com
5  % Revision   : November 16, 2010
6  % Written by : Dae-Hung Kang
7  %% ---------------------------------------------------------------
8  classdef ModifiedGiuffreMonegottoPinto < handle
9
10     properties (SetAccess=private)
11         % Input variables
12         Tag;                    % material tag
13         Type;                   % material type
14         InitialE;               % initial moduous
15         sy0;                    % initial yielding stress
16         b;                      % strain-hardening coefficient
17         R0;                     % during first loading, R0 is the value of the
       parameter R which is dependent on the absolute strain
18         cR1;                    % Experimentally determined parameters to be
      defined together with R0
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
        cR2;                    % Experimentally determined parameters to be
    defined together with R0
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect
    an increase of the compression yield envelope through a fraction of the
    yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect
    to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect
    an increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield
    strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect
    to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStress_r;            % committed Stress_r from previous step
        comStrain_r;            % committed Strain_r from previous step
        comStress_o;            % committed Stress_o from previous step
        comStrain_o;            % committed Strain_o from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_m;            % committed Strain_p from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Stress_r;               % stress at the point of strain reversal
        Strain_r;               % strain at the point of strain reversal
        Stress_o;               % stress at the point of intersection of the
    two asymptotes
        Strain_o;               % strain at the point of intersection of the
    two asymptotes
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive
    model
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive
    model
        Strain_m;               % strain at the previous maximum or minimum
    strain reversal point
        flag;                   %
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedGiuffreMonegottoPinto(material)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.R0       = material.R0;
            mat.cR1      = material.cR1;
            mat.cR2      = material.cR2;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Stress_r   = 0;
            mat.Strain_r   = 0;
            mat.Stress_o   = 0;
            mat.Strain_o   = 0;
            mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_min = -mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_m   = 0;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStress_r   = mat.Stress_r;
            mat.comStrain_r   = mat.Strain_r;
            mat.comStress_o   = mat.Stress_o;
            mat.comStrain_o   = mat.Strain_o;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_m   = mat.Strain_m;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
            mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
            mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
            mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
            mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
            mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
            mat.flag       = mat.comflag;

            Esh   = mat.b * mat.InitialE;
            eps_y = mat.sy0/mat.InitialE;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if (mat.flag == 0)
                if ( del_eps == 0 ) mat.flag  = 0;
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_max;
                    mat.Stress_o   =  mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_min;
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == 1)
                if ( del_eps > 0 )
                    mat.flag = 1;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    % reversal ( + -> - )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_max = max(mat.Strain_max, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.
Strain_min)/(2.0*mat.a2*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (-mat.sy0 * shift + Esh * eps_y * shift -
 mat.Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o +
eps_y * shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == -1)
                if ( del_eps < 0 )
                    mat.flag = -1;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_min = min(mat.Strain_min, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max-mat.
Strain_min)/(2.0*mat.a4*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (mat.sy0 * shift - Esh * eps_y * shift -
mat.Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o -
eps_y * shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                end
            end
        end

        function common(mat,eps_y)
            xi     = abs( (mat.Strain_m - mat.Strain_o)/ eps_y );
            R      = mat.R0 - mat.R0*mat.cR1*xi/(mat.cR2+xi);
            e_rate = (mat.Strain - mat.Strain_r)/(mat.Strain_o - mat.Strain_r)
;
            dummy1 = 1.0 + abs(e_rate)^R;
            dummy2 = dummy1^(1/R);
            mat.Stress   = mat.b * e_rate + (1.0 - mat.b) * e_rate/dummy2;
            mat.Stress   = mat.Stress * (mat.Stress_o - mat.Stress_r) + mat.
Stress_r;
            mat.TangentE = mat.b + (1.0 - mat.b)/(dummy1 * dummy2);
            mat.TangentE = mat.TangentE * (mat.Stress_o - mat.Stress_r)/(mat.
Strain_o - mat.Strain_r);
        end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
200
201         function getStress(mat)
202             mat.Stress = mat.Stress;
203         end
204
205         function allocateMemory(mat,totStep)
206             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
207         end
208
209         function write2file(mat, fid)
210             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
211         end
212
213          function write2mat(mat, fid)
214              uni_e_s = mat.uni_e_s;
215              save(fid, 'uni_e_s');
216          end
217
218         function getPlot(mat,num)
219             figure(num);
220             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
221             hold on;grid on;box on;
222             xlabel('Strain');
223             ylabel('Stress');
224         end
225
226         function finalPlot(mat,num)
227             figure(num);
228             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
229             grid on;box on;
230             title('Strain-Stress relationship');
231             xlabel('Strain');
232             ylabel('Stress');
233         end
234
235     end
236 end
```

I.3.7 Parque Kent modificado

```
1  %% ---------------------------------------------------------------
2  % Copyright 2010 All rights reserved.
3  % Program    : Mercury v.2.01
4  % Email      : kkd0724@hanafos.com
5  % Revision   : November 16, 2010
6  % Written by : Dae-Hung Kang
7  %% ---------------------------------------------------------------
8  classdef ModifiedKentPark < handle
9
10     properties (SetAccess=private)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        sc;                     % maximum compressive concrete stress
        ec;                     % compressive strain when compressive stress
    reaches maximum compressive one
        scu;                    % compressive stress at 20 % of maximum
    compressive one
        ecu;                    % compressive strain with respect to
    compressive stress at 20 % of maximum compressive stress
        lambda;                 % historical factor
        st;                     % maximum tensile concrete stress
        Ets;                    % tensile concrete modulus
        rho;                    % density
        % Computed variable with input variables
        InitialEc;              % Initial compressive concrete modulus
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comdelta_Strain_pt;     % committed delta_Strain_pt from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial stress
        Strain_min;             % minimum stress in analysis of constitutive
    model
        delta_Strain_pt;        % strain with respect to incremental strain at
     previous step
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedKentPark(material)
            mat.Tag    = material.Tag;
            mat.Type   = material.Type;
            mat.sc     = material.sc;
            mat.ec     = material.ec;
            mat.scu    = material.scu;
            mat.ecu    = material.ecu;
            mat.lambda = material.lambda;
            mat.st     = material.st;
            mat.Ets    = material.Ets;
            mat.rho    = material.rho;
        end

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
57          function Initialization(mat)
58              mat.Stress          = 0;
59              mat.InitialEc       = 2*mat.sc/mat.ec;
60              mat.TangentE        = mat.InitialEc;
61              mat.Strain          = 0;
62              mat.Strain_min      = 0;
63              mat.delta_Strain_pt = 0;
64          end
65
66          function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
67              mat.comStress          = mat.Stress;
68              mat.comTangentE        = mat.TangentE;
69              mat.comStrain          = mat.Strain;
70              mat.comStrain_min      = mat.Strain_min;
71              mat.comdelta_Strain_pt = mat.delta_Strain_pt;
72          end
73
74          function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
75              mat.Stress          = mat.comStress;
76              mat.TangentE        = mat.comTangentE;
77              mat.Strain          = mat.comStrain;
78              mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
79              mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
80          end
81
82          function getStrain(mat, TrialStrain)
83              mat.Strain = TrialStrain;
84          end
85
86          function getTangentE(mat)
87              mat.Stress          = mat.comStress;
88              mat.TangentE        = mat.TangentE;
89              mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
90              mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
91
92              del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
93
94              if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
95                  if (mat.Strain < mat.Strain_min)
96                      [mat.Stress,mat.TangentE] = mat.compression(mat.Strain);
97                      mat.Strain_min = mat.Strain;
98                  else
99                      eps_R = (mat.scu-mat.lambda*mat.InitialEc*mat.ecu)/(mat.
    InitialEc*(1.0-mat.lambda));
100                     sig_R = mat.InitialEc * eps_R;
101                     [sig_p_min, dummy] = mat.compression(mat.Strain_min);
102                     E_R    = (sig_p_min - sig_R)/(mat.Strain_min - eps_R);
103                     eps_pt = mat.Strain_min - sig_p_min/E_R;
104                     if (mat.Strain < eps_pt)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        sig_min      = sig_p_min + E_R * (mat.Strain - mat.
    Strain_min);
                        sig_max      = E_R * 0.5 * (mat.Strain - eps_pt);
                        mat.Stress   = mat.comStress + mat.InitialEc * del_eps
    ;
                        mat.TangentE = mat.InitialEc;
                        if (mat.Stress < sig_min)
                            mat.Stress   = sig_min;
                            mat.TangentE = E_R;
                        end
                        if (mat.Stress >= sig_max)
                            mat.Stress = sig_max;
                            mat.TangentE = 0.5*E_R;
                        end
                    else
                        eps_pn = eps_pt + mat.delta_Strain_pt;
                        if (mat.Strain <= eps_pn)
                            [sig_cn, mat.TangentE] = mat.tension(mat.
    delta_Strain_pt);
                            if (mat.delta_Strain_pt ~= 0.0)
                                mat.TangentE = sig_cn/mat.delta_Strain_pt;
                            else
                                mat.TangentE = mat.InitialEc;
                            end
                            mat.Stress = mat.TangentE * (mat.Strain - eps_pt);
                        else
                            del_eps = mat.Strain - eps_pt;
                            [mat.Stress, mat.TangentE] = mat.tension(del_eps);
                            mat.delta_Strain_pt = del_eps;
                        end
                    end
                end
            end
        end

        function [sigma, modulus]=compression(mat, epsilon)
            ratLocal = epsilon/mat.ec;
            if (epsilon >= mat.ec)
                sigma   = mat.sc * ratLocal * (2.0 - ratLocal);
                modulus = mat.InitialEc * (1.0 - ratLocal);
            else
                if (epsilon > mat.ecu)
                    sigma   = (mat.scu - mat.sc) * (epsilon - mat.ec) / (mat.
    ecu - mat.ec) + mat.sc;
                    modulus = (mat.scu - mat.sc) / (mat.ecu - mat.ec);
                else
                    sigma   = mat.scu;
                    modulus = 2.2204460492503131e-016;
                end
            end
        end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
152
153         function [sigma, modulus]=tension(mat, delta_epsilon)
154             eps0 = mat.st/mat.InitialEc;
155             epsu = mat.st * (1.0/mat.Ets + 1.0/mat.InitialEc);
156             if (delta_epsilon <= eps0)
157                 sigma = delta_epsilon * mat.InitialEc;
158                 modulus = mat.InitialEc;
159             else
160                 if (delta_epsilon<=epsu)
161                     sigma   = mat.st - mat.Ets * (delta_epsilon-eps0);
162                     modulus = -mat.Ets;
163                 else
164                     sigma   = 0.0;
165                     modulus = 2.2204460492503131e-016;
166                 end
167             end
168         end
169
170         function getStress(mat)
171             mat.Stress = mat.Stress;
172         end
173
174         function allocateMemory(mat,totStep)
175             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
176         end
177
178         function write2file(mat, fid)
179             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
180         end
181
182          function write2mat(mat, fid)
183              uni_e_s = mat.uni_e_s;
184              save(fid, 'uni_e_s');
185          end
186
187         function getPlot(mat,num)
188             figure(num);
189             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
190             hold on;grid on;box on;
191             title('Strain-Stress relationship');
192             xlabel('Strain');
193             ylabel('Stress');
194         end
195
196         function finalPlot(mat,num)
197             figure(num);
198             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
199             grid on;box on;
200             title('Strain-Stress relationship');
201             xlabel('Strain');
202             ylabel('Stress');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        end

    end
end
```

I.3.8 Ibarra

I.3.8.1 Histerese

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;        % material tag
        type;       % material type
        sy_pos0;    % positive yield stress
        epsy_pos0;  % positive yield strain
        sy_neg0;    % negative yield stress
        epsy_neg0;  % negative yield strain
        cap_pos0;   % positive capping stress
        ecap_pos0;  % positive capping strain
        cap_neg0;   % negative capping stress
        ecap_neg0;  % negative capping strain
        res_pos;    % positive residual stress
        eres_pos0;  % positive residual strain
        res_neg;    % negative residual stress
        eres_neg0;  % negative residual strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;     % uniaxial stress
        tanE;       % tangent modulus
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        strain;     % uniaxial strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield stress
        sy_neg;     % negative yield stress
        cap_pos;    % positive capping stress
        cap_neg;    % negative capping stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield strain
        epsy_neg;   % negative yield strain
        ecap_pos;   % positive cap strain
        ecap_neg;   % negative cap strain
        eres_pos;   % positive residual strain
        eres_neg;   % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target stress
        eps_tar_pos; % positive target strain
        s_tar_neg;   % negative target stress
        eps_tar_neg; % negative target strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        Beta;        % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;    % normalized hysteretic energy
        n_exc;       % number excursions/cycles

        %% commit variables
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;

    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = Hysteresis(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.rho         = info{17};
            mat.Initialization();

        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.stress     = 0;
            mat.strain     = 0;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE       = mat.iniE;
            mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat
    .epsy_pos0);
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat
    .ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i
    -1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5   = 0;
            mat.eps_pt10  = 0;
            mat.norm_hys  = 0;
            mat.n_exc     = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.com_stress      = mat.stress;
            mat.com_tanE        = mat.tanE;
            mat.com_strain      = mat.strain;
            mat.com_sy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos    = mat.epsy_pos;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.com_epsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag  = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld      = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain     = TrialStrain;
            mat.stress     = mat.com_stress;
            mat.tanE       = mat.com_tanE;
            mat.state_flag = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-----------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            end
        elseif (mat.state_flag == -1)
            if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                mat.update_flag = -1;
            elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                mat.update_flag = 7;
            elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                mat.update_flag = 8;
            else
                mat.update_flag = 9;
            end
        elseif (mat.state_flag == 9)
            mat.update_flag = 9;
        else
            % update target state
            if (mat.reversal_flag == 1)
                if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                    mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                    mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                end
            end
            % determine strain at pt 5
            mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

            if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                mat.update_flag = 12; % unloading
            elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                mat.update_flag = 13; % reloading to target
            else
                if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7; % neg hardening
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8; % neg softening
                else
                    mat.update_flag = 9; % neg residual
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_stress = 0;
                ref_strain = 0;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_stress = mat.sy_pos;
                ref_strain = mat.epsy_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_stress = mat.res_pos;
                ref_strain = mat.eres_pos;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
 - ref_strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
update_flag ~= 9)

                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                        mat.update_flag = 12; %unloading
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);

            end

            % update unloading modulus
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
784             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 4)
785                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
786                     % estimate energy in step
787                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
788                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
789                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
790                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
791                 end
792                 % determine strain at pt 10
793                 mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
794 
795                 if (mat.strain < mat.eps_pt10)
796                     mat.reversal_flag = -1;
797                     mat.update_flag = 10; % unloading
798                 else
799                     mat.reversal_flag = 1;
800                     % update cyclic parameters on positive side
801                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
802                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
803                     mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
804                     mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
805                     mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
806                     mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
807                     mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
    sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
808                     mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.
    E_sof*mat.ecap_pos);
809                     mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
810                     mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.
    s_ref_pos)/mat.E_sof);
811                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_pos;
812                     if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
813                         mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
    eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
814                     else
815                         mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
816                     end
817                     if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
818                         mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
819                         mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
820                     end
821 
822                     if (mat.strain < mat.eps_pt10)
823                         mat.update_flag = 10; % unloading
824                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
825                         mat.update_flag = 11; % reloading to target
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
826                     else
827                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
828                             mat.update_flag = 2; % hardening
829                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
830                             mat.update_flag = 3; % softening
831                         else
832                             mat.update_flag = 4; % residual
833                         end
834                     end
835 
836                     if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
837                         mat.update_flag = 11; % reloading to target
838                     else
839                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
840                             mat.update_flag = 2; % hardening
841                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
842                             mat.update_flag = 3; % softening
843                         else
844                             mat.update_flag = 4; % residual
845                         end
846                     end
847                 end
848 
849                 switch mat.update_flag
850                     case 2
851                         ref_stress = mat.s_tar_pos;
852                         ref_strain = mat.eps_tar_pos;
853                         mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
854                     case 3
855                         ref_stress = mat.cap_pos;
856                         ref_strain = mat.ecap_pos;
857                         mat.tanE   = mat.E_sof;
858                     case 4
859                         ref_stress = mat.res_pos;
860                         ref_strain = mat.eres_pos;
861                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
862                     case 10
863                         ref_stress = mat.com_stress;
864                         ref_strain = mat.com_strain;
865                         mat.tanE   = mat.E_unld;
866                     case 11
867                         ref_stress = 0;
868                         ref_strain = mat.eps_pt10;
869                         mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
870                 end
871             end
872         end % function NegUnloading
873 
874 
875         function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
876
877             % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
878             E_t     = mat.hys_dis_cap;
879             E_step  = enrgy_step;
880             c       = mat.det_rate;
881             E_pre   = mat.enrgy_prvs;
882
883             mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
884             mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;
885
886             if (mat.Beta > 1)
887                 mat.Beta = 0.999;
888                 display('***************************')
889                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
890                 display('***************************')
891             elseif (mat.Beta < 0)
892                 mat.Beta = 0.999;
893                 display('***************************')
894                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
895                 display('***************************')
896             end
897             if (mat.Beta_Unld > 1)
898                 mat.Beta_Unld = 0.999;
899                 display('***************************')
900                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
901                 display('***************************')
902             elseif (mat.Beta_Unld < 0)
903                 mat.Beta_Unld = 0.999;
904                 display('***************************')
905                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
906                 display('***************************')
907             end
908
909         end % function BetaFunc
910
911
912         function allocateMemory(mat,totStep)
913             mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
914         end % function allocateMemory
915
916         function write2storage(mat,istep)
917             mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
918         end % function write2storage
919
920         function write2file(mat, fid)
921             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
922         end % function write2file
923
924         function write2mat(mat, fid)
925             uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
926             save(fid, 'uni_strain_stress');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.8.2 Histerese belisca

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refenerence stress
        s_ref_neg;      % negative refenerence stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
        update_flag;    % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;     % positive break point strain
        eps_bp_neg;     % negative break point strain
        s_bp_pos;       % positive break point stress
        s_bp_neg;       % negative break point stress
        norm_hys;       % normalized hysteretic energy
        n_exc;          % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
127     end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
128 
129     methods (Access=public)
130         function mat = HysteresisPinch(info)
131             mat.tag         = info{1};
132             mat.type        = info{2};
133             mat.sy_pos0     = info{3};
134             mat.epsy_pos0   = info{4};
135             mat.sy_neg0     = info{5};
136             mat.epsy_neg0   = info{6};
137             mat.cap_pos0    = info{7};
138             mat.ecap_pos0   = info{8};
139             mat.cap_neg0    = info{9};
140             mat.ecap_neg0   = info{10};
141             mat.res_pos     = info{11};
142             mat.eres_pos0   = info{12};
143             mat.res_neg     = info{13};
144             mat.eres_neg0   = info{14};
145             mat.lamda_hys   = info{15};
146             mat.det_rate    = info{16};
147             mat.kappa_f     = info{17};
148             mat.kappa_d     = info{18};
149             mat.rho         = info{19};
150             mat.Initialization();
151 
152         end % function HysteresisPinch
153 
154         function Initialization(mat)
155             mat.stress      = 0;
156             mat.strain      = 0;
157             mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
158             mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
159             mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
160             mat.tanE        = mat.iniE;
161             mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
162             mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
163             mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
164             mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
165             mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 -
    mat.epsy_pos0);
166             mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
167             mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
168             mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
169             mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
170             mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 -
    mat.ecap_pos0);
171             mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
172             mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
173             mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
174             % initialize variables
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag      = 1;
            mat.update_flag     = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag   = 1;
            mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0
    to (i-1)
            mat.E_unld          = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5         = 0;
            mat.eps_pt10        = 0;
            mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
            mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
            mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
            mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
            mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
            mat.norm_hys        = 0;
            mat.n_exc           = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
            mat.com_stress          = mat.stress;
            mat.com_tanE            = mat.tanE;
            mat.com_strain          = mat.strain;
            mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
            end
            % update energy in excursions
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
372             mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
373             mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
374             % normalized hysteretic energy
375             mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;
376 
377         end % function materialStateDetermination
378 
379 
380         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
381 
382             switch mat.state_flag
383                 case -1
384                     if (mat.strain < 0)
385                         mat.update_flag = -1;
386                     elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
387                         mat.update_flag = 1;
388                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
389                         mat.update_flag = 2;
390                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
391                         mat.update_flag = 3;
392                     else
393                         mat.update_flag = 4;
394                     end
395                 case 1
396                     if (mat.strain < mat.epsy_pos)
397                         mat.update_flag = 1;
398                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
399                         mat.update_flag = 2;
400                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
401                         mat.update_flag = 3;
402                     else
403                         mat.update_flag = 4;
404                     end
405                 case 2
406                     if (mat.strain < mat.ecap_pos)
407                         mat.update_flag = 2;
408                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
409                         mat.update_flag = 3;
410                     else
411                         mat.update_flag = 4;
412                     end
413                 case 3
414                     if (mat.strain < mat.eres_pos)
415                         mat.update_flag = 3;
416                     else
417                         mat.update_flag = 4;
418                     end
419                 case 4
420                     mat.update_flag = 4;
421                 case 9
422                     mat.update_flag = 9;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
423
424                 otherwise
425                     if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
426                         mat.update_flag = 21;
427                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
428                         mat.update_flag = 11;
429                     else
430                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
431                             mat.update_flag = 2;
432                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
433                             mat.update_flag = 3;
434                         else
435                             mat.update_flag = 4;
436                         end
437                     end
438             end
439
440             switch mat.update_flag
441                 case -1 % elastic
442                     ref_stress = mat.sy_neg;
443                     ref_strain = mat.epsy_neg;
444                     mat.tanE   = mat.iniE;
445                 case 1 % elastic
446                     ref_stress = 0;
447                     ref_strain = 0;
448                     mat.tanE   = mat.iniE;
449                 case 2 % hardening
450                     ref_stress = mat.s_tar_pos;
451                     ref_strain = mat.eps_tar_pos;
452                     mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
453                 case 3 % softening
454                     ref_stress = mat.cap_pos;
455                     ref_strain = mat.ecap_pos;
456                     mat.tanE   = mat.E_sof;
457                 case 4 % residual
458                     ref_stress = mat.res_pos;
459                     ref_strain = mat.eres_pos;
460                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
461                 case 9 % residual
462                     ref_stress = mat.res_neg;
463                     ref_strain = mat.eres_neg;
464                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
465                 case 11 % loading to target state
466                     ref_stress = mat.com_stress;
467                     ref_strain = mat.com_strain;
468                     mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
469                 case 21 % loading to break point
470                     ref_stress = mat.com_stress;
471                     ref_strain = mat.com_strain;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
570             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 9)
571                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
572                     % estimate energy in step
573                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
574                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
575                     % update unloading modulus
576                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
577                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
578                 end
579                 % determine strain at pt 5
580                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
581 
582                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
583                     % update flag
584                     mat.reversal_flag = -1;
585                     mat.update_flag = 12; %unloading
586                 else
587                     % update reversal flag
588                     mat.reversal_flag = 1;
589                     % update flag to signal initial directional loadin
590                     if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
591                        targ_flag = 1;
592                     else
593                         targ_flag = 0;
594                     end
595                     % update cyclic parameters on negative side
596                     % Note: values must remain negative although exhaustion
597                     % of hysteretic energy may make them positive
598                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
599                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
600                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
601                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
602                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
603                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
604                     mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
605                     mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
606                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
607                     mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
608                     % adjust target values if necessary
609                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
610                     if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
611                         mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat
    .eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
     - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
                case 21
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
 ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.
E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.
s_ref_pos)/mat.E_sof);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
    eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(
    mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_pos - ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

I.3.9 Estado limite cisalhamento

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        cap_pos;         % positive capping stress
        cap_neg;         % negative capping stress
        epsy_pos;        % positive yield strain
        epsy_neg;        % negative yield strain
        ecap_pos;        % positive cap strain
        ecap_neg;        % negative cap strain
        eres_pos;        % positive residual strain
        eres_neg;        % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;       % positive refenerence stress
        s_ref_neg;       % negative refenerence stress
        s_tar_pos;       % positive target stress
        eps_tar_pos;     % positive target strain
        s_tar_neg;       % negative target stress
        eps_tar_neg;     % negative target strain
        state_flag;      % loading branch
        update_flag;     % update loading branch
        reversal_flag;   % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;      % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;      % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;          % unloading stiffness
        E_hrd_pos;       % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;       % negative hardening stiffness
        eps_pt5;         % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;        % negative unloading inflection strain
        Beta;            % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;       % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;     % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;     % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;      % positive break point strain
        eps_bp_neg;      % negative break point strain
        s_bp_pos;        % positive break point stress
        s_bp_neg;        % negative break point stress
        norm_hys;        % normalized hysteretic energy
        n_exc;           % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;      % committed stress from previous step
        com_tanE;        % committed tanE from previous step
        com_strain;      % committed strain from previous step
        com_sy_pos;      % committed yeild stress
        com_sy_neg;      % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;    % positive yield strain
        com_epsy_neg;    % negative yield strain
        com_ecap_pos;    % positive cap strain
        com_ecap_neg;    % negative cap strain
        com_eres_pos;    % positive residual strain
        com_eres_neg;    % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.kappa_f     = info{17};
            mat.kappa_d     = info{18};
            mat.rho         = info{19};
            mat.Initialization();

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
152         end % function HysteresisPinch
153 
154         function Initialization(mat)
155             mat.stress      = 0;
156             mat.strain      = 0;
157             mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
158             mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
159             mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
160             mat.tanE        = mat.iniE;
161             mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
162             mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
163             mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
164             mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
165             mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 -
    mat.epsy_pos0);
166             mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
167             mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
168             mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
169             mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
170             mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 -
    mat.ecap_pos0);
171             mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
172             mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
173             mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
174             % initialize variables
175             mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
176             mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
177             mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
178             mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
179             mat.state_flag      = 1;
180             mat.update_flag     = mat.state_flag;
181             mat.reversal_flag   = 1;
182             mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
183             mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0
    to (i-1)
184             mat.E_unld          = mat.iniE;
185             mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
186             mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
187             mat.eps_pt5         = 0;
188             mat.eps_pt10        = 0;
189             mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
190             mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
191             mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
192             mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
193             mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
194             mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
195             mat.norm_hys        = 0;
196             mat.n_exc           = 0;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
197
198         end % function Initialization
199
200         function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use
    in constitutive model
201             mat.com_stress          = mat.stress;
202             mat.com_tanE            = mat.tanE;
203             mat.com_strain          = mat.strain;
204             mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
205             mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
206             mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
207             mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
208             mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
209             mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
210             mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
211             mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
212             mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
213             mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
214             mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
215             mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
216             mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
217             mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
218             mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
219             mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
220             mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
221             mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
222             mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
223             mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
224             mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
225             mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
226             mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
227             mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
228             mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
229             mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
230             mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
231             mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
232             mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
233             mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
234             mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
235             mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
236             mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
237             mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
238             mat.com_n_exc       = mat.n_exc;
239
240         end % function commit
241
242         function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert
    all values when failing at current step
243             mat.stress      = mat.com_stress;
244             mat.tanE        = mat.com_tanE;
245             mat.strain      = mat.com_strain;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
348                 [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
349 
350             end
351 
352             mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
353 
354             if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
355                 if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
356                     step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
    com_stress));
357                 else % reloading
358                     if (mat.stress >= 0)
359                         mat.enrgy_step = 0;
360                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
361                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
362                     else
363                         mat.enrgy_step = 0;
364                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
365                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
366                     end
367                 end
368             else
369                 step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
    com_stress));
370             end
371             % update energy in excursions
372             mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
373             mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
374             % normalized hysteretic energy
375             mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;
376 
377         end % function materialStateDetermination
378 
379 
380         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
381 
382             switch mat.state_flag
383                 case -1
384                     if (mat.strain < 0)
385                         mat.update_flag = -1;
386                     elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
387                         mat.update_flag = 1;
388                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
389                         mat.update_flag = 2;
390                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
391                         mat.update_flag = 3;
392                     else
393                         mat.update_flag = 4;
394                     end
395                 case 1
396                     if (mat.strain < mat.epsy_pos)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
    - ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
546                     ref_strain = mat.eps_tar_neg;
547                     mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
548                 case 8
549                     ref_stress = mat.cap_neg;
550                     ref_strain = mat.ecap_neg;
551                     mat.tanE   = mat.E_sof;
552                 case 9
553                     ref_stress = mat.res_neg;
554                     ref_strain = mat.eres_neg;
555                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
556                 case 12
557                     ref_stress = mat.com_stress;
558                     ref_strain = mat.com_strain;
559                     mat.tanE   = mat.E_unld;
560                 case 13
561                     ref_stress = mat.s_bp_neg;
562                     ref_strain = mat.eps_bp_neg;
563                     mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
564                 case 23
565                     ref_stress = 0;
566                     ref_strain = mat.eps_pt5;
567                     mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
568             end
569 
570             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 9)
571                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
572                     % estimate energy in step
573                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
574                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
575                     % update unloading modulus
576                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
577                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
578                 end
579                 % determine strain at pt 5
580                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
581 
582                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
583                     % update flag
584                     mat.reversal_flag = -1;
585                     mat.update_flag = 12; %unloading
586                 else
587                     % update reversal flag
588                     mat.reversal_flag = 1;
589                     % update flag to signal initial directional loadin
590                     if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
591                        targ_flag = 1;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
592                     else
593                         targ_flag = 0;
594                     end
595                     % update cyclic parameters on negative side
596                     % Note: values must remain negative although exhaustion
597                     % of hysteretic energy may make them positive
598                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
599                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
600                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
601                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
602                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
603                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
604                     mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.
    sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
605                     mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.
    E_sof*mat.ecap_neg);
606                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
607                     mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.
    s_ref_neg)/mat.E_sof);
608                     % adjust target values if necessary
609                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
610                     if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
611                         mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
    eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
612                     else
613                         mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
614                     end
615                     if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
616                         mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
617                         mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
618                     end
619                     % determine break-point
620                     mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
621                     if (targ_flag == 1)
622                         mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
623                     end
624                     mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
625                     mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat
    .eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
626 
627                     if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
628                         mat.update_flag = 23; % reloading to break point
629                     elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
630                         mat.update_flag = 13; % reloading to target
631                     else
632                         if (mat.strain > mat.ecap_neg)
633                             mat.update_flag = 7; % neg hardening
634                         elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.
    eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg
    - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
833                     ref_stress = mat.cap_pos;
834                     ref_strain = mat.ecap_pos;
835                     mat.tanE   = mat.E_sof;
836                 case 4
837                     ref_stress = mat.res_pos;
838                     ref_strain = mat.eres_pos;
839                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
840                 case 9
841                     ref_stress = mat.res_neg;
842                     ref_strain = mat.eres_neg;
843                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
844                 case 10
845                     ref_stress = mat.com_stress;
846                     ref_strain = mat.com_strain;
847                     mat.tanE   = mat.E_unld;
848                 case 11
849                     if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
850                         ref_stress = mat.s_bp_pos;
851                         ref_strain = mat.eps_bp_pos;
852                     else
853                         ref_stress = 0;
854                         ref_strain = mat.eps_pt10;
855                     end
856                     mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos
     - ref_strain);
857                 case 21
858                     ref_stress = 0;
859                     ref_strain = mat.eps_pt10;
860                     mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
     ref_strain);
861 
862             end
863 
864             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.
    update_flag ~= 4)
865                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
866                     % estimate energy in step
867                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
868                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
869                     % update unloading modulus
870                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
871                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
872                 end
873                 % determine strain at pt 10
874                 mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
875 
876                 if (mat.strain < mat.eps_pt10)
877                     mat.reversal_flag = -1;
878                     mat.update_flag = 10; % unloading
```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
879                 else
880                     mat.reversal_flag = 1;
881                     % set flag to signal initial directional loading for bp
882                     if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
883                        targ_flag = 1;
884                     else
885                         targ_flag = 0;
886                     end
887                     % update cyclic parameters on positive side
888                     % Note: values must remain positive althought they may
889                     % become negative as hysteretic energy is exhausted
890                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
891                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
892                     mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
893                     mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
894                     mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
895                     mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
896                     mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.
    sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
897                     mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.
    E_sof*mat.ecap_pos);
898                     mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
899                     mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.
    s_ref_pos)/mat.E_sof);
900                     % adjust target values if necessary
901                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_pos;
902                     if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
903                         mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
    eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
904                     else
905                         mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
906                     end
907                     if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
908                         mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
909                         mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
910                     end
911                     % determine break-point
912                     mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
913                     if (targ_flag == 1)
914                         mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
915                     end
916                     mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
917                     mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(
    mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
918
919                     if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.
    eps_bp_pos)
920                         mat.update_flag = 21;
921                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_pos - ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

```


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
1022
1023        function getPlot(mat, unit, num)
1024            figure(num);
1025            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
1026            hold on;grid on;box on;
1027            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
1028            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
1029            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
1030        end % function getPlot
1031
1032        function finalPlot(mat, unit, num)
1033            figure(num);
1034            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
1035            grid on;box on;
1036            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
1037            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
1038            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
1039        end % function finalPlot
1040
1041    end % methods
1042
1043 end % classdef
```

I.4 Parte IV: Métodos e identificação de parâmetros

Esta seção abrange técnicas automatizadas de identificação de parâmetros e calibração de modelos por meio de otimização e análise de dados no MATLAB.

I.4.1 Programa de Identificação do Parâmetro

Este apêndice lista o código fonte completo MATLAB descrito em §65.6Para um programa de identificação não linear dos parâmetros menos quadrados que combina MATLAB `Isqnonlin` Otimizador com um solucionador externo elemento finito (ATENA). O programa é baseado em dados. toda configuração é lida de uma planilha do Excel (`Log.xlsx`), permitindo que o problema de otimização seja alterado sem modificar o código. O programa executa em cada função avaliação por (1) atualizando parâmetros de modelo em um arquivo temporário, (2) lançando o solucionador externo, (3) leitura e agregação das previsões do solucionador, (4) Computando resíduos, e (5) atualizando um painel em tempo real. Um registro persistente registra todas as iterações no arquivo Excel.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

I.4.2 Programa principal e orquestração central

A orquestração começa no ponto de entrada `Main.m`, que simplesmente adiciona a pasta de funções para o caminho e chamadas `ParIdentification()`.. A função principal `ParIdentificação` lê a configuração da planilha, inicializa todas as estruturas de dados, executa um diagnóstico seco no palpite inicial x_0, e então lança o `Isqnonlin` Otimizador. A função aninhada `Minfunc` é chamado em cada avaliação de função e implementa a cadeia completa: atualização de parâmetros, lançamento do solucionador, análise de saída, computação residual e atualização do painel. O ajudante local funciona como um arquivo CSV e gerencia uma pequena janela de progresso.

```
clear;close all;clc
addpath(fullfile(fileparts(mfilename('fullpath')), 'functions'));

ParIdentification();
```

Listing I.1: Main.m – Entry point

```
function ParIdentification()
%PARIDENTIFICATION Main function for parameter identification using lsqnonlin.
%
%   Reads control data from Log.xlsx, initializes the optimization,
%   and runs lsqnonlin with ATENA as the external solver.
%   minfunc is a nested function with direct access to all shared variables.

%-------------------------------------------
% Read control data from spreadsheet
%-------------------------------------------
S = readInputSheet('Log.xlsx', 'Input');

%-------------------------------------------------------
% Read initial values, lower and upper bounds
%-------------------------------------------------------
[x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
S.lb = lb;
S.ub = ub;

%-------------------------------------------------------
% Create temp file for optimization
%-------------------------------------------------------
inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);

%-------------------------------------------------------
% Initialize PI sheet in log file (row-wise)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%------------------------------------------------------------
piSheetName = initPISheet('Log.xlsx', S, x0);

%------------------------------------------------------------
% Initialize counters and dashboard handles
%------------------------------------------------------------
nFnEval      = 0;
nIter        = 0;
X            = x0;
hDashboard   = [];
hProgress    = [];
isDryRunCall = false;
lastIterTic  = tic;

%------------------------------------------------------------
% Keep last successful dry-run results
%------------------------------------------------------------
predictedLast = [];
resLast       = [];

%------------------------------------------------------------
% Open persistent CSV log for all evaluations
%------------------------------------------------------------
logFID = fopen('minfunc_log.csv', 'w');
fprintf(logFID, 'call,%s,residual_norm,status\n', strjoin(S.modelPar,
    ','));

%============================================================
% PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS
%============================================================
fprintf('\n=== PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS ===\n');
fprintf('x0 : '); fprintf('%10.4f ', x0);   fprintf('\n');
fprintf('lb : '); fprintf('%10.4f ', S.lb); fprintf('\n');
fprintf('ub : '); fprintf('%10.4f ', S.ub); fprintf('\n');

inBounds = all(x0 >= S.lb & x0 <= S.ub);
fprintf('x0 within bounds: %s\n', mat2str(inBounds));
if ~inBounds
    fclose(logFID);
    error('ParIdentification:boundsViolation', ...
          'x0 violates bounds - fix extractEvaluateValues before
    continuing.');
end

fprintf('\nCalling minfunc(x0) as dry run...\n');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
isDryRunCall = true;
try
    r_test = minfunc(x0);
    fprintf('Residuals : '); fprintf('%12.6f ', r_test); fprintf('\n');
    fprintf('Any NaN   : %d\n', any(isnan(r_test)));
    fprintf('Any Inf   : %d\n', any(isinf(r_test)));
catch ME
    fprintf('minfunc THREW AN ERROR:\n  %s\n', ME.message);
    fclose(logFID);
    rethrow(ME);
end
isDryRunCall = false;
fprintf('====================================\n\n');

%-------------------------------------------------------------------------
% Keep the existing dashboard windows, but clear the dry-run
% history so it does not count as part of the optimization.
% Then replot the dry run as iteration 0 at Fn eval = 0.
%-------------------------------------------------------------------------
if ~isempty(hDashboard) && isstruct(hDashboard) && ...
   isfield(hDashboard, 'res') && ishghandle(hDashboard.res)

    ud = get(hDashboard.res, 'UserData');
    if isstruct(ud)
        if isfield(ud, 'relErrHist'), ud.relErrHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'absResHist'), ud.absResHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'xHist'),      ud.xHist(:)      = nan; end
        if isfield(ud, 'fEvalVec'),   ud.fEvalVec(:)   = nan; end
        ud.nE = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end
end

% Reset counters so the dry run does not count
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Replot dry run as iteration 0 at function evaluation 0
if ~isempty(predictedLast) && ~isempty(resLast)
    hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x0, predictedLast, ...
   resLast, ...
                             0, false, true);
end

```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% Reset again so the actual optimization starts clean
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Start timing from the first true iteration of the real run
lastIterTic = tic;

% Save checkpoint for crash recovery / re-diagnostics
save('debug_checkpoint.mat', 'S', 'x0');
fprintf('Checkpoint saved to debug_checkpoint.mat\n\n');

%==========================================================
% RUN OPTIMIZATION
%==========================================================
[x, resnorm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, @minfunc);

%----------------------------------------------------------
% Close log and report results
%----------------------------------------------------------
fclose(logFID);

fprintf('\n=== Optimization completed ===\n');
fprintf('Exit flag : %d\n',   exitflag);
fprintf('Iterations: %d\n',   output.iterations);
fprintf('Func evals: %d\n',   output.funcCount);
fprintf('Norm resid: %.6e\n', resnorm);
fprintf('Identified parameters:\n');
for k = 1:numel(S.modelPar)
    fprintf('  %s = %.6g\n', S.modelPar{k}, x(k));
end

% Timestamped save of final result
resultFile = sprintf('result_%s.mat', datestr(now, 'yyyymmdd_HHMMSS'));
save(resultFile, 'x', 'resnorm', 'res', 'exitflag', 'output', 'S',
   'x0');
fprintf('Results saved to %s\n', resultFile);
```

Listing I.2: ParIdentification.m – Main function and nested objective function (part 1 of 2)

```
%==========================================================
% NESTED OBJECTIVE FUNCTION
%==========================================================
    function res = minfunc(x)
    %MINFUNC Objective function called by lsqnonlin at every function
   evaluation.
```

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

```
159
160         nFnEval = nFnEval + 1;
161         nPar    = numel(S.modelPar);
162
163         %--------------------------------------------------
164         % Determine if this is a true optimization iteration.
165         % Important: the diagnostic dry run must NOT be logged
166         % as a real iteration.
167         %--------------------------------------------------
168         isIteration = ~isDryRunCall && ...
169                       ((mod(nFnEval, nPar + 1) == 0) || (nFnEval ==
    1));
170
171         %--------------------------------------------------
172         % Update progress window
173         %--------------------------------------------------
174         hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar);
175         fprintf('   Function evaluation #%d\n', nFnEval);
176
177         %--------------------------------------------------
178         % Write current parameters to temp input file
179         %--------------------------------------------------
180         updateEvaluateValues(inpFileTemp, S.modelPar, x,
    ~isDryRunCall);
181
182         %--------------------------------------------------
183         % Run ATENA
184         %--------------------------------------------------
185         fprintf('%s  Launching ATENA...\n', datestr(now));
186         [status, cmdout] = runAnalysis(S.exeName, inpFileTemp, ...
187                                        S.AtenaOut, S.AtenaMsg,
    S.AtenaErr);
188
189         if status ~= 0
190             warning('ATENA failed at evaluation #%d:\n%s', nFnEval,
    cmdout);
191             res = ones(size(S.fieldAggValues));
192             predictedLast = nan(size(S.fieldAggValues));
193             resLast       = res;
194
195             if ~isDryRunCall
196                 logEval(logFID, nFnEval, x, NaN, 'ATENA_FAIL');
197             end
198
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            return
        end

        %------------------------------------------------------
        % Preserve a copy of the ATENA output file
        % after each successful true optimization run.
        % The dry run is deliberately skipped to avoid
        % overwriting out-1.out before the real run starts.
        %------------------------------------------------------
        if ~isDryRunCall
            [pth, nam, ext] = fileparts(S.outFile);
            outCopy = fullfile(pth, sprintf('%s-%d%s', nam, nFnEval,
    ext));

            if isfile(S.outFile)
                [copyOK, copyMsg] = copyfile(S.outFile, outCopy);
                if ~copyOK
                    warning('Could not copy ATENA output file at
    evaluation #%d:\n%s', ...
                            nFnEval, copyMsg);
                else
                    fprintf('   Copied ATENA output to %s\n', outCopy);
                end
            else
                warning('Expected ATENA output file not found at
    evaluation #%d:\n%s', ...
                        nFnEval, S.outFile);
            end
        end

        %------------------------------------------------------
        % Read model predictions
        %------------------------------------------------------
        ModelPredValues = readModelPredValues(S.outFile, S.modelPred);

        %------------------------------------------------------
        % Compute aggregated predictions
        %------------------------------------------------------
        predicted = cellfun(@(f) f(ModelPredValues), S.fieldAggFcn);

        %------------------------------------------------------
        % Compute residuals
        %------------------------------------------------------
        res      = predicted - S.fieldAggValues;
        norm_res = norm(res);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
241
242         predictedLast = predicted;
243         resLast       = res;
244
245         %--------------------------------------------------
246         % Guard against NaN/Inf from bad ATENA output
247         %--------------------------------------------------
248         if any(~isfinite(res))
249             warning('NaN/Inf in residuals at eval #%d - substituting
    1e6', nFnEval);
250             res(~isfinite(res)) = 1e6;
251             norm_res = norm(res);
252             resLast  = res;
253
254             if ~isDryRunCall
255                 logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'NAN_IN_RES');
256             end
257         else
258             if ~isDryRunCall
259                 logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'OK');
260             end
261         end
262
263         fprintf('   Norm of residual: %.6e\n', norm_res);
264
265         %--------------------------------------------------
266         % Update progress window with norm
267         %--------------------------------------------------
268         hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar, norm_res);
269
270         %--------------------------------------------------
271         % Update dashboard
272         %--------------------------------------------------
273         hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x, predictedLast,
    resLast, ...
274                                  nFnEval, isIteration, isDryRunCall);
275
276         %--------------------------------------------------
277         % Log true iterations to Excel and save snapshot
278         %--------------------------------------------------
279         if isIteration
280             nIter = nIter + 1;
281             fprintf('   === Iteration #%d completed, norm = %.6e
    ===\n', nIter, norm_res);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
282
283             X = [X; x(:)'];
284
285             iterTime_hr = toc(lastIterTic) / 3600;
286             lastIterTic = tic;
287
288             predOverTarget = nan(size(predictedLast));
289             mask = isfinite(predictedLast) & ...
290                    isfinite(S.fieldAggValues) & ...
291                    (S.fieldAggValues ~= 0);
292
293             predOverTarget(mask) = predictedLast(mask) ./
    S.fieldAggValues(mask);
294
295             logIterationToSheet('Log.xlsx', piSheetName, nIter, x, ...
296                                 predOverTarget, resLast, iterTime_hr);
297
298             save(sprintf('iter_%03d.mat', nIter), ...
299                  'x', 'norm_res', 'res', 'nIter', 'nFnEval', ...
300                  'predictedLast', 'predOverTarget', 'iterTime_hr');
301         end
302
303     end % minfunc
304
305 end % ParIdentification
306
307
308 %=========================================================
309 % LOCAL HELPER: write one line to the CSV evaluation log
310 %=========================================================
311 function logEval(fid, callNum, x, normVal, status)
312     if isnan(normVal)
313         normStr = 'NaN';
314     else
315         normStr = sprintf('%.8f', normVal);
316     end
317     xStr = strjoin(arrayfun(@(v) sprintf('%.6f', v), x(:)',
    'UniformOutput', false), ',');
318     fprintf(fid, '%d,%s,%s,%s\n', callNum, xStr, normStr, status);
319 end
320
321
322 %=========================================================
323 % LOCAL FUNCTION: progress window
324 %=========================================================
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
function hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x, parNames, normRes)
%UPDATEPROGRESSWINDOW Create or update a small progress window.

    if isempty(hProgress) || ~ishandle(hProgress)
        hProgress = figure('Name',        'Optimization Progress', ...
                           'NumberTitle', 'off', ...
                           'MenuBar',     'none', ...
                           'ToolBar',     'none', ...
                           'Resize',      'off', ...
                           'Position',    [20 20 320 400], ...
                           'Color',       [0.95 0.95 0.95]);

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblFnEval', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 360 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblIter', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 330 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblNorm', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 300 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        nPar = numel(parNames);
        for k = 1:nPar
            yPos = 270 - (k - 1) * 25;
            uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', ...
                'Tag', sprintf('lblPar%d', k), ...
                'Units', 'pixels', ...
                'Position', [10 yPos 300 22], ...
                'FontSize', 9, ...
                'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
                'HorizontalAlignment', 'left');
        end
    end

```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
    setfield_text(hProgress, 'lblFnEval', sprintf('Function evaluations: %d', nFnEval));
    setfield_text(hProgress, 'lblIter',   sprintf('Iterations completed: %d', nIter));

    if nargin >= 6 && ~isempty(normRes)
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', sprintf('Norm of residual: %.4e', normRes));
    else
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', 'Norm of residual: ...');
    end

    for k = 1:numel(x)
        setfield_text(hProgress, sprintf('lblPar%d', k), ...
            sprintf('  %s = %.6g', parNames{k}, x(k)));
    end

    drawnow;
end


function setfield_text(hFig, tag, str)
    h = findobj(hFig, 'Tag', tag);
    if ~isempty(h)
        set(h, 'String', str);
    end
end
```

Listing I.3: ParIdentification.m – Nested objective function and local helpers (part 2 of 2)

I.4.3 Integração de dados I/O e planilha

Esta subseção contém todas as funções responsáveis pela leitura da configuração da planilha de controle do Excel, extraindo parâmetros do modelo e limites do arquivo de entrada ATENA, e gerenciando o registro de iteração. O `LeiaInputsheet` A função lê todas as opções do solucionador, nomes de parâmetros, nomes da previsão e expressões de agregação da planilha usando um padrão de busca baseado em palavras-chave. O `ExtrairValores de Avaliação` e.. `AVALIAR VALUES` funções respectivamente analisar e modificar linhas AVALUATE no arquivo de entrada. A previsão de saída do modelo é analisada por `Tradução`, que bloqueia os dados do arquivo de saída ATENA e extrai o valor final monitorado para cada quantidade solicitada. Finalmente, o `InitPISheet` e.. `LogIterationToSheet` As funções gerenciam o registro de iteração em linha no arquivo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Excel, registrando o número de iteração, o tempo decorrido, os valores dos parâmetros, as razões predição-alvo e os resíduos.

```
function S = readInputSheet(filename, sheetName)
%READINPUTSHEET Read optimization input data from Excel sheet.
if nargin < 1 || isempty(filename);  filename  = 'Log.xlsx'; end
if nargin < 2 || isempty(sheetName); sheetName = 'Input';    end
    raw = readcell(filename, 'Sheet', sheetName);
    S.exeName        = readScalarByKey(raw, 'exeName');
    S.inpFile        = readScalarByKey(raw, 'inpFile');
    S.outFile        = readScalarByKey(raw, 'outFile');
    S.modelPar       = readTextVectorByKey(raw, 'modelPar');
    S.modelPred      = readTextVectorByKey(raw, 'modelPred');
    S.fieldAggExpr   = readTextVectorByKey(raw, 'fieldAggExp');
    S.fieldAggValues = readNumericVectorByKey(raw, 'fieldAggValues');
    S.fieldAggFcn    = buildFieldAggFunctions(S.fieldAggExpr,
   S.modelPred);
    S.maxFunEval     = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxFunEval'));
    S.maxIter        = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxIter'));
    S.tolFun         = str2double(readScalarByKey(raw, 'tolFun'));
    S.tolX = str2double(readScalarByKey(raw, 'StepTol'));
    S.algorithm      = readScalarByKey(raw, 'algorithm');
    S.display        = readScalarByKey(raw, 'display');
    S.fdStepSize     = str2double(readScalarByKey(raw,
   'FiniteDifferenceStepSize'));
    S.fdType         = readScalarByKey(raw, 'FiniteDifferenceType');

    S.AtenaOut=[S.inpFile '.out'];
    S.AtenaErr=[S.inpFile '.err'];
    S.AtenaMsg=[S.inpFile '.msg'];
    S.inpFile=[S.inpFile '.inp'];
end
```

Listing I.4: readInputSheet.m – Read all configuration from Excel

```
function [x, lb, ub] = extractEvaluateValues(filename, names)
%EXTRACTEVALUATEVALUES Extract EVALUATE values and bounds from input
   file.
%
%  Reads each EVALUATE line of the form:
%      EVALUATE "Name = /*# Name */ value"   // Recommended range lb
   - ub
%  and returns the current values, lower bounds, and upper bounds for
   the
%  requested parameter names. Bounds are set to NaN if not present on
   the line.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
%   Inputs:
%       filename - path to the input file (e.g. S.inpFile)
%       names    - cell array of parameter names (e.g. S.modelPar)
%
%   Outputs:
%       x  - current parameter values  [1 x n]
%       lb - lower bounds              [1 x n]
%       ub - upper bounds              [1 x n]
%
%   Example:
%       [x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
    if ischar(names) || isstring(names); names = cellstr(names); end
    txt   = fileread(filename);
    lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');
    lookupX  = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupLB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupUB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    numPat = '([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][+-]?\d+)?)';
    for i = 1:numel(lines)
        line = strtrim(lines{i});
        if ~strncmpi(line, 'EVALUATE', 8); continue; end
        tok = regexp(line, ...
    ['EVALUATE\s+"([A-Za-z0-9_]+)\s*=\s*/\*#\s*[A-Za-z0-9_]+\s*\*/\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if isempty(tok); continue; end
        varName = strtrim(tok{1});
        varVal  = str2double(tok{2});
        lookupX(varName) = varVal;
        tokBounds = regexp(line, ...
            ['Recommended\s+range\s+' numPat '\s*-\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if ~isempty(tokBounds)
            lookupLB(varName) = str2double(tokBounds{1});
            lookupUB(varName) = str2double(tokBounds{2});
        else
            lookupLB(varName) = NaN;
            lookupUB(varName) = NaN;
        end
    end
    x  = NaN(1, numel(names));
    lb = NaN(1, numel(names));
    ub = NaN(1, numel(names));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    for i = 1:numel(names)
        key = char(names{i});
        if isKey(lookupX,  key); x(i)  = lookupX(key);  end
        if isKey(lookupLB, key); lb(i) = lookupLB(key); end
        if isKey(lookupUB, key); ub(i) = lookupUB(key); end
    end
end
```

Listing I.5: extractEvaluateValues.m – Parse EVALUATE lines from input file

```
function inpFileTemp = createTempInputFile(inpFile)
%CREATETEMPINPUTFILE Create a temporary copy of the input file for
    optimization.
%
%   Creates a working copy of the input file that will be continuously
%   overwritten during the optimization iterations, leaving the
    original
%   input file untouched.
%
%   Input:
%       inpFile     - path to the original input file (e.g. S.inpFile)
%
%   Output:
%       inpFileTemp - path to the temporary copy (e.g.
    'input_temp.dat')
%
%   Example:
%       inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);
    [folder, name, ext] = fileparts(inpFile);
    inpFileTemp = fullfile(folder, [name '_temp' ext]);
    [ok, msg]   = copyfile(inpFile, inpFileTemp);
    if ~ok; error('Could not copy %s to %s: %s', inpFile, inpFileTemp,
    msg); end
end
```

Listing I.6: createTempInputFile.m – Create working copy of input file

```
function updateEvaluateValues(filename, names, Xnew, verbose)
    if nargin < 4
        verbose = true;
    end
%UPDATEEVALUATEVALUES Overwrite EVALUATE values in input file with new
    values.
%
%   Reopens the input file and replaces the numeric values associated
    with
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%   each parameter name in 'names' with the corresponding new values in
%   Xnew. The file format expected is:
%       EVALUATE "ParName = /*# ParName */ oldvalue"

    if numel(names) ~= numel(Xnew)
        error('names and Xnew must have the same number of elements.');
    end

    txt = fileread(filename);

    for k = 1:numel(names)
        name     = char(names{k});
        valueStr = num2str(Xnew(k), '%.15g');

        pattern = ['(EVALUATE\s+"', regexptranslate('escape', name),
    ...
                   '\s*=\s*/\*#\s*', regexptranslate('escape', name),
    ...

    '\s*\*/\s*)([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][-+]?\d+)?)(\")'];

        % Check whether the parameter line is found
        tok = regexp(txt, pattern, 'tokens', 'once');

        if isempty(tok)
            warning('Parameter %s not found in file %s.', name,
    filename);
            continue
        end

        oldValueStr = tok{2};

        repl   = ['$1' valueStr '$3'];
        txtNew = regexprep(txt, pattern, repl, 'once');

        if strcmp(strtrim(oldValueStr), strtrim(valueStr))
            if verbose
                fprintf('Parameter %s matched; value unchanged
    (%s)\n', name, valueStr);
            end
        else
            if verbose
                fprintf('Parameter %s updated: %s -> %s\n', name,
    oldValueStr, valueStr);
            end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        end

        txt = txtNew;
    end

    fid = fopen(filename, 'w');
    if fid == -1
        error('Could not open %s for writing.', filename);
    end
    cleaner = onCleanup(@() fclose(fid));
    fwrite(fid, txt, 'char');
end
```

Listing I.7: updateEvaluateValues.m – Overwrite parameters in input file

```
function ModelPredValues = readModelPredValues(outFile, modelPred)
%READMODELPREDVALUES  Read the last monitored value for each modelPred string
%                     from an ATENA output file (monitors.csv / output.dat).
%
%  Each block in the file has the structure:
%
%    Output data for request ; MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000 ;
%    Data for the monitored output: ...
%    ; Step ; 5 ; Iteration ; 60 ; at Time ; 5 ;
%    ----...---- ;
%    Id ;  Time ;  Step ;  X(1) ;            <- header  (skipped)
%    Units ;  day ;  None ;  m ;             <- units   (skipped)
%    1 ;  0. ;  0. ;  0. ;                   <- data rows
%    ...
%    6 ;  5. ;  5. ;  0.0013112 ;           <- LAST data row -> value kept
%
%  The value of interest is the LAST numeric token on the LAST data row
%  (i.e. the last non-empty field before the trailing ";").  This handles
%  blocks with 1 output column (X(1) only) as well as blocks with 3 columns
%  (X(1), X(2), X(3)), where the relevant displacement has been pre-selected
%  by the monitor definition.
%
%  Matching is case-insensitive: modelPred = 'SAB_86m_X' matches
%  'MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000'.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
%  INPUT
%    outFile   - path to the ATENA output file
%    modelPred - char, string, or cell array of strings to look up
%
%  OUTPUT
%    ModelPredValues - 1 x numel(modelPred) double (NaN if not found)

%-- normalise modelPred to a cell array of char ---------------------
if ischar(modelPred) || isstring(modelPred)
    modelPred = cellstr(modelPred);
end
nPred = numel(modelPred);

%-- read file -------------------------------------------------------
txt   = fileread(outFile);
lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');

%-- initialise state machine ----------------------------------------
lookup     = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
currentKey = '';   % modelPred entry currently being accumulated
lastVal    = NaN;  % last valid numeric value seen in current block

%-- pattern for the block-header line -------------------------------
headerPat = 'Output\s+data\s+for\s+request\s*;\s*([^;]+)\s*;';

for i = 1:numel(lines)
    line = strtrim(lines{i});

    %-- detect a new block header -----------------------------------
    tok = regexp(line, headerPat, 'tokens', 'once');
    if ~isempty(tok)
        % save whatever we accumulated for the previous block
        if ~isempty(currentKey)
            lookup(currentKey) = lastVal;
        end

        requestName = upper(strtrim(tok{1}));
        currentKey  = '';
        lastVal     = NaN;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
65
66          % find which modelPred (if any) this block belongs to
67          for j = 1:nPred
68              candidate = char(modelPred{j});
69              if contains(requestName, upper(candidate))
70                  currentKey = candidate;   % keep original spelling as
    key
71                  break
72              end
73          end
74          continue
75      end
76
77      % ---- only process data lines when inside a matching block --------
78      if isempty(currentKey)
79          continue
80      end
81
82      % skip separator, header, and units lines
83      if isempty(line) ...
84              || startsWith(line, '-') ...
85              || startsWith(line, 'Id') ...
86              || startsWith(line, 'Units') ...
87              || startsWith(line, 'Data') ...
88              || startsWith(line, ';')          % summary line "  ; Step
    ; 5 ..."
89          continue
90      end
91
92      % ---- parse a data row
    ------------------------------------------------
93      % Data rows look like:  "    6 ;         5. ;         5. ;
    0.0013112 ;"
94      % Split on ";", strip whitespace, drop empty tokens.
95      cols = strsplit(line, ';');
96      cols = strtrim(cols);
97      cols = cols(~cellfun(@isempty, cols));   % remove trailing empty
    field
98
99      % A valid data row must start with an integer Id (first field is a
100     % non-negative integer or a number with a trailing dot like "6.").
101     if isempty(cols)
102         continue
103     end
104     firstNum = str2double(cols{1});
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    if isnan(firstNum) || firstNum < 0 || firstNum ~= floor(firstNum)
        % not a numeric data row (e.g. a stray text line)
        % allow "6." style (floor(6.) == 6)
        if ~(~isnan(firstNum) && firstNum == floor(firstNum))
            continue
        end
    end

    % The value of interest is the LAST numeric token in the row.
    % (For a 3-component block the monitor definition selects one direction,
    %  which happens to be the last populated column.)
    v = NaN;
    for k = numel(cols):-1:1
        candidate_v = str2double(cols{k});
        if ~isnan(candidate_v)
            v = candidate_v;
            break
        end
    end
    if ~isnan(v)
        lastVal = v;   % keep updating; loop ends on the last row
    end
end

% ---- save the final block ----------------------------------------
if ~isempty(currentKey)
    lookup(currentKey) = lastVal;
end

% ---- assemble output vector --------------------------------------
ModelPredValues = NaN(1, nPred);
for i = 1:nPred
    key = char(modelPred{i});
    if isKey(lookup, key)
        ModelPredValues(i) = lookup(key);
    end
end

end
```

Listing I.8: readModelPredValues.m – Extract monitored outputs from ATENA output

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
function piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%INITPISHEET Create a new PI #n sheet in row-wise format.
%
%   piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%
%   Creates the next available sheet named PI #1, PI #2, ...
%   and writes:
%     - row 1: headers
%     - row 2: iteration 0 (initial guess x0)
%
%   Columns are:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
    <Pred/Target...> | <Residual...>

    %-----------------------------------------------------------------
    % Determine next available PI sheet name
    %-----------------------------------------------------------------
    [~, sheetNames] = xlsfinfo(logFile);
    if isempty(sheetNames)
        sheetNames = {};
    end

    n = 1;
    while any(strcmp(sheetNames, sprintf('PI #%d', n)))
        n = n + 1;
    end
    piSheetName = sprintf('PI #%d', n);

    nPar = numel(S.modelPar);
    nAgg = numel(S.fieldAggExpr);

    %-----------------------------------------------------------------
    % Build header row
    %-----------------------------------------------------------------
    headers = cell(1, 3 + nPar + nAgg + nAgg);
    c = 1;

    headers{c} = 'Iter';          c = c + 1;
    headers{c} = 'Timestamp';     c = c + 1;
    headers{c} = 'IterTime_hr';   c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        headers{c} = S.modelPar{k};
        c = c + 1;
    end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
45
46      for k = 1:nAgg
47          headers{c} = sprintf('PredTarget_%02d', k);
48          c = c + 1;
49      end
50
51      for k = 1:nAgg
52          headers{c} = sprintf('Residual_%02d', k);
53          c = c + 1;
54      end
55
56      %-------------------------------------------------------------------------
57      % Build iteration-0 row
58      %-------------------------------------------------------------------------
59      row0 = cell(1, numel(headers));
60      c = 1;
61
62      row0{c} = 0;                                          c = c + 1;
63      row0{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS'); c = c + 1;
64      row0{c} = 0;                                          c = c + 1;
65
66      for k = 1:nPar
67          row0{c} = x0(k);
68          c = c + 1;
69      end
70
71      % Leave blank for Pred/Target and Residual columns
72      for k = 1:(2*nAgg)
73          row0{c} = [];
74          c = c + 1;
75      end
76
77      %-------------------------------------------------------------------------
78      % Write to Excel
79      %-------------------------------------------------------------------------
80      warning('off', 'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
81      xlswrite(logFile, headers, piSheetName, 'A1');
82      xlswrite(logFile, row0,    piSheetName, 'A2');
83      warning('on',  'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
84  end
```

Listing I.9: initPISheet.m – Create new PI log sheet with headers

```
1  function logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x,
       predOverTarget, res, iterTime_hr)
2  %LOGITERATIONTOSHEET Append one iteration as one row to the PI sheet.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
%   logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x, predOverTarget, res, iterTime_hr)
%
%   Appends a new row with:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> | <Pred/Target...> | <Residual...>

    if nargin < 7
        error('logIterationToSheet requires 7 inputs.');
    end

    x = x(:).';
    predOverTarget = predOverTarget(:).';
    res = res(:).';

    [~, ~, raw] = xlsread(logFile, sheetName);

    if isempty(raw)
        nextRow = 1;
    else
        nextRow = size(raw, 1) + 1;
    end

    row = cell(1, 3 + numel(x) + numel(predOverTarget) + numel(res));
    c = 1;

    row{c} = nIter;                                  c = c + 1;
    row{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS');   c = c + 1;
    row{c} = iterTime_hr;                            c = c + 1;

    for k = 1:numel(x)
        row{c} = x(k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:numel(predOverTarget)
        if isfinite(predOverTarget(k))
            row{c} = predOverTarget(k);
        elseif isnan(predOverTarget(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
    end

    for k = 1:numel(res)
        if isfinite(res(k))
            row{c} = res(k);
        elseif isnan(res(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
    end

    range = sprintf('A%d', nextRow);
    xlswrite(logFile, row, sheetName, range);
end
```

Listing I.10: logIterationToSheet.m – Append iteration row to PI log

I.4.4 Otimização fluxo de trabalho e funções auxiliares

Esta subseção contém as restantes funções públicas que implementam o loop de otimização e painel em tempo real, juntamente com todas as funções auxiliares privadas. O `Correr a Análise` A função lança o resolvedor externo ATENA como um processo de fundo e captura sua saída do console. O `RunLSQnonlin` A função envolve o nativo de MATLAB `Isqnonlin` Otimizador, aplicando as opções de resolução lidas da folha de controle e computando tolerâncias adaptativas baseadas nos limites dos parâmetros. O `updatePlots` A função mantém duas figuras de painel ao vivo: Um mostrando resíduos (previstos vs. Alvo e resíduo absoluto em uma escala de log) e o outro parâmetro de rastreamento evolução através de todas as avaliações de função, com distinção entre avaliações sonda e iterações verdadeiras. Os ajudantes privados na `funções/privadas/` A pasta fornece utilitários de baixo nível para ler dados de configuração da planilha, construir funções de agregação a partir de expressões definidas pelo usuário e normalizar texto durante as buscas.

```
function [status, cmdout] = runAnalysis(exeName, inpFile, outFile,
    msgFile, errFile)
    % Kill any lingering ATENA processes before starting
    [~, exeOnly, ext] = fileparts(exeName);
    system(sprintf('taskkill /F /IM "%s%s" /T 2>nul', exeOnly, ext));
    pause(3); % give OS time to release file locks

    cmd = sprintf('"%s" /O "%s" "%s" "%s" "%s" /num_unused_threads=2',
    ...
        exeName, inpFile, outFile, msgFile, errFile);
    [status, cmdout] = system(cmd, '-echo');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
end
```

Listing I.11: runAnalysis.m – Launch external ATENA solver

```
function [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0,
    minfunc)
%RUNLSQNONLIN Set up and run lsqnonlin using solver options from
    Log.xlsx.
%
%   Tunable options (read from Excel):  Display, MaxFunEvals, MaxIter,
%                                       TolFun, TolX (dimensionless,
%                                       scaled internally by
    mean(lb+ub)/2),
%                                       Algorithm,
    FiniteDifferenceStepSize,
%                                       FiniteDifferenceType
%   Hardwired options:                  TypicalX=mean(lb,ub)
%
%   Example:
%       [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, lb, ub,
    @minfunc);
    lb       = S.lb;
    ub       = S.ub;
    typicalX = (ub - lb) ./ 2;
    TolX     = S.tolX .* mean(typicalX);

    options = optimoptions('lsqnonlin', ...
        'Algorithm',                S.algorithm, ...
        'Display',                  S.display, ...
        'MaxFunctionEvaluations',   S.maxFunEval, ...
        'MaxIterations',            S.maxIter, ...
        'FunctionTolerance',        S.tolFun, ...
        'StepTolerance',            TolX, ...
        'FiniteDifferenceStepSize', S.fdStepSize, ...
        'FiniteDifferenceType',     S.fdType, ...
        'TypicalX',                 typicalX)

    [x, norm, res, exitflag, output] = lsqnonlin(minfunc, x0, lb, ub,
    options);
end
```

Listing I.12: runLSQnonlin.m – Configure and run optimizer

```
function hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, xCur, predicted,
    res, nFnEval, isIteration, isIterZero)
%UPDATEPLOTS  Real-time dashboard, two separate figures.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
%  Figure 1 "Residuals" -- 2 rows x nAgg cols
%    Row 1 : predicted / target  (reference line at 1)
%    Row 2 : |residual| on log scale
%
%  Figure 2 "Parameters" -- 2 rows x ceil(nPar/2) cols
%    Row 1 : first  half of modelPar
%    Row 2 : second half of modelPar
%    Both  : grey probe dots (every fnEval), filled blue at true iterations,
%            dashed red lb / green ub lines.
%
%  X-axis everywhere: function-evaluation number.
%  True iterations fall at eval numbers nPar+1, 2*(nPar+1), ...
%
%  hDashboard is a struct with fields .res and .par; pass [] on first call.

    if nargin < 9
        isIterZero = false;
    end

    nAgg   = numel(S.fieldAggExpr);
    nPar   = numel(S.modelPar);
    nHalf  = ceil(nPar / 2);
    nHalf2 = nPar - nHalf;

    % ---------------------------------------------------------------
    % Build compact aggregate labels for titles
    % ---------------------------------------------------------------
    aggLabels = S.fieldAggExpr;
    for k = 1:nAgg
        lbl = aggLabels{k};
        lbl = regexprep(lbl, '^S([A-Z]{2}_)', '$1');
        aggLabels{k} = lbl;
    end

    % ---------------------------------------------------------------
    % Create figures on first call
    % ---------------------------------------------------------------
    needCreate = isempty(hDashboard) || ~isstruct(hDashboard) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'res') || ~ishandle(hDashboard.res) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'par') || ~ishandle(hDashboard.par);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
44
45      if ~needCreate
46          ud_check = get(hDashboard.res, 'UserData');
47          if ~isstruct(ud_check) || ~isfield(ud_check, 'relErrHist') ||
    ...
48              ~isfield(ud_check, 'xHist') || ...
49              size(ud_check.relErrHist, 2) ~= nAgg || ...
50              size(ud_check.xHist, 2) ~= nPar
51               try, close(hDashboard.res); end %#ok<TRYNC>
52               try, close(hDashboard.par); end %#ok<TRYNC>
53               needCreate = true;
54          end
55      end
56
57      if needCreate
58          scr = get(0, 'ScreenSize');
59
60          % Figure 1: residuals — upper half of screen
61          fw1 = min(scr(3) * 0.98, nAgg * 220 + 120);
62          fh1 = min(scr(4) * 0.48, 520);
63          hDashboard.res = figure( ...
64              'Name',        'Optimization — Residuals', ...
65              'NumberTitle', 'off', ...
66              'Position',    [4, scr(4)*0.48, fw1, fh1]);
67
68          % Figure 2: parameters — lower half of screen
69          parCols = max(nHalf, nHalf2);
70          fw2 = min(scr(3) * 0.60, parCols * 230 + 100);
71          fh2 = min(scr(4) * 0.44, 460);
72          hDashboard.par = figure( ...
73              'Name',        'Optimization — Parameters', ...
74              'NumberTitle', 'off', ...
75              'Position',    [4, 30, fw2, fh2]);
76
77          % History stored in Figure 1 UserData
78          MAXEVAL = 10000;
79          ud.relErrHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
80          ud.absResHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
81          ud.xHist      = nan(MAXEVAL, nPar);
82          ud.fEvalVec   = nan(1, MAXEVAL);
83          ud.nE         = 0;
84          set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
85      end
86
87      % ──────────────────────────────────────────────────────────────
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    % Append current evaluation to history
    % ------------------------------------------------------------------
    ud     = get(hDashboard.res, 'UserData');
    nE     = ud.nE + 1;
    ud.nE = nE;

    if nE > size(ud.relErrHist, 1)
        growBy = 10000;
        ud.relErrHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.absResHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.xHist(end+growBy, nPar)      = nan;
        ud.fEvalVec(end+growBy)         = nan;
    end

    ud.fEvalVec(nE) = nFnEval;
    ud.xHist(nE, :) = xCur(:)';

    for k = 1:nAgg
        if S.fieldAggValues(k) == 0
            ud.relErrHist(nE, k) = nan;
        else
            ud.relErrHist(nE, k) = predicted(k) / S.fieldAggValues(k);
        end
        ud.absResHist(nE, k) = abs(res(k));
    end
    set(hDashboard.res, 'UserData', ud);

    ev = ud.fEvalVec(1:nE);

    % True-iteration eval numbers
    nIterSoFar  = size(X, 1);
    iterEvalNos = (nPar + 1) * (1:nIterSoFar);
    iterEvalNos(iterEvalNos > nFnEval) = [];
    nIterPlot   = numel(iterEvalNos);

    % Keep eval 0 visible when present
    xMin = min([0 ev]);
    xMax = max([5 nFnEval + ceil(0.05 * max(nFnEval,1) + 1)]);
    xlimVec = [xMin, xMax];

    % ------------------------------------------------------------------
    % Global y-limits for residual row on log scale
    % ------------------------------------------------------------------
    absRaw   = ud.absResHist(1:nE, :);
    absClean = absRaw(~isnan(absRaw) & isfinite(absRaw) & absRaw > 0);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
133
134     if isempty(absClean)
135         absMin = 1e-12;
136         absMax = 1;
137     else
138         absMin = min(absClean);
139         absMax = max(absClean);
140
141         if absMin <= 0 || ~isfinite(absMin)
142             absMin = 1e-12;
143         end
144         if absMax <= absMin || ~isfinite(absMax)
145             absMax = 10 * absMin;
146         end
147
148         absMin = 10^(floor(log10(absMin)));
149         absMax = 10^(ceil(log10(absMax)));
150     end
```

Listing I.13: updatePlots.m – Real-time dashboard figures (part 1 of 4)

```
153     % ================================================================
154     % FIGURE 1 — Residuals
155     % ================================================================
156     figure(hDashboard.res);
157
158     for k = 1:nAgg
159
160         % ——— Row 1: relative error ———
161         ax = subplot(2, nAgg, k);
162         cla(ax); hold(ax, 'on');
163         grid(ax, 'on');
164         set(ax, 'GridAlpha', 0.20);
165
166         plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), '-', ...
167             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
168         plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), 'o', ...
169             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.30 0.30 0.30], ...
170             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);
171         yline(ax, 1, '—r', 'LineWidth', 1.4);
172
173         if isIterZero && nE > 0
174             scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 44, 's', ...
175                 'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
176         elseif isIteration && nE > 0
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 36, 'r',
    'filled');
        end

        title(ax, makeTwoLineTitle(aggLabels{k}), ...
              'Interpreter', 'none', ...
              'FontSize', 8, 'FontWeight', 'normal');

        if k == 1
            ylabel(ax, 'Pred / Target');
        end

        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);

        ydata = ud.relErrHist(1:nE, k);
        ydata = ydata(~isnan(ydata) & isfinite(ydata));
        if isempty(ydata)
            ylim(ax, [0, 2]);
        elseif all(ydata >= 0) && all(ydata <= 2)
            ylim(ax, [0, 2]);
        else
            yMin = min(ydata);
            yMax = max(ydata);
            if yMin == yMax
                pad = max(0.1 * max(abs(yMax),1), 0.1);
            else
                pad = 0.10 * (yMax - yMin);
            end
            ylim(ax, [yMin - pad, yMax + pad]);
        end

        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');

        % ---- Row 2: absolute residual on log scale ----
        ax = subplot(2, nAgg, nAgg + k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        absPlot = ud.absResHist(1:nE, k);
        absPlot(~isfinite(absPlot)) = nan;
        absPlot(absPlot <= 0) = 1e-12;

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        plot(ax, ev, absPlot, '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, absPlot, 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.15 0.15 0.15], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

        if isIterZero && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 36, 'r', 'filled');
        end

        if k == 1
            ylabel(ax, '|Residual|');
        end
        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);
        set(ax, 'YScale', 'log');
        ylim(ax, [absMin, absMax]);
        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');
    end
```

Listing I.14: updatePlots.m – Residuals figure (part 2 of 4)

```
    % ================================================================
    % FIGURE 2 — Parameters
    % ================================================================
    figure(hDashboard.par);

    parCols = max(nHalf, nHalf2);

    for row = 1:2
        if row == 1
            idxList = 1:nHalf;
        else
            idxList = nHalf + (1:nHalf2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
        end

        for col = 1:numel(idxList)
            k  = idxList(col);
            ax = subplot(2, parCols, (row - 1) * parCols + col);
            cla(ax); hold(ax, 'on');
            grid(ax, 'on');
            set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

            % All probes — grey line + open circles
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), '-', ...
                 'Color', [0.78 0.78 0.78], 'LineWidth', 0.7);
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 4, 'Color', [0.50 0.50 0.50], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

            % True iterations — filled blue
            if nIterPlot > 0
                scatter(ax, iterEvalNos(1:nIterPlot), X(1:nIterPlot,
k)', ...
                        50, [0.12 0.47 0.71], 'filled', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'none');
            end

            % Iteration 0 — filled black square
            if isIterZero && nE > 0
                scatter(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 48, 's', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor',
'k');
            end

            % Current probe — bold open black circle
            plot(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 7, 'Color', [0 0 0], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 1.3);

            % Bounds
            yline(ax, S.lb(k), '--r', 'LineWidth', 1.1, ...
                  'Label', 'lb', 'LabelHorizontalAlignment', 'left',
...
                  'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');
            yline(ax, S.ub(k), '--', 'Color', [0.13 0.55 0.13], ...
                  'LineWidth', 1.1, ...
                  'Label', 'ub', 'LabelHorizontalAlignment', 'left',
...
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
                    'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');

            title(ax, S.modelPar{k}, 'Interpreter', 'none', ...
                  'FontSize', 9, 'FontWeight', 'bold');
            xlabel(ax, 'Fn eval');
            if col == 1
                ylabel(ax, 'Value');
            end
            xlim(ax, xlimVec);
            applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);

            span = S.ub(k) - S.lb(k);
            if span <= 0
                span = max(abs(S.ub(k)), 1);
            end
            margin = 0.12 * span;
            ylim(ax, [S.lb(k) - margin, S.ub(k) + margin]);

            hold(ax, 'off');
        end
    end

    drawnow limitrate;
end
```

Listing I.15: updatePlots.m – Parameters figure (part 3 of 4)

```
% ========================================================================
function out = makeTwoLineTitle(in)
% Try to insert one sensible line break for long aggregate expressions.

    out = strtrim(in);

    if numel(out) <= 16
        return
    end

    % Prefer to break after the last '+' before midpoint
    mid = floor(numel(out) / 2);
    idx = find(out(1:mid) == '+', 1, 'last');

    % If none, break after the first '+' after midpoint
    if isempty(idx)
        idx2 = find(out(mid+1:end) == '+', 1, 'first');
        if ~isempty(idx2)
            idx = mid + idx2;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
        end
    end

    % If still none, try '/'
    if isempty(idx)
        idx = find(out(1:mid) == '/', 1, 'last');
        if isempty(idx)
            idx2 = find(out(mid+1:end) == '/', 1, 'first');
            if ~isempty(idx2)
                idx = mid + idx2;
            end
        end
    end

    % If still none, try a blank near midpoint
    if isempty(idx)
        leftBlank  = find(out(1:mid) == ' ', 1, 'last');
        rightBlank = find(out(mid+1:end) == ' ', 1, 'first');
        if ~isempty(leftBlank)
            idx = leftBlank;
        elseif ~isempty(rightBlank)
            idx = mid + rightBlank;
        end
    end

    if isempty(idx)
        return
    end

    if idx < numel(out)
        out = [strtrim(out(1:idx)) sprintf('\n')
   strtrim(out(idx+1:end))];
    end
end

% ========================================================================
function applyIntegerXTicks(ax, xlimVec)
% Use integer ticks when the range is small, otherwise use a
   reasonable set.

    x0 = floor(xlimVec(1));
    x1 = ceil(xlimVec(2));
    span = x1 - x0;

    if span <= 10
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        xticks(ax, x0:x1);
    elseif span <= 20
        xticks(ax, x0:2:x1);
    else
        step = max(5, ceil(span / 6));
        xticks(ax, x0:step:x1);
    end
end
```

Listing I.16: updatePlots.m – Local helper functions (part 4 of 4)

```
function fcns = buildFieldAggFunctions(exprs, predNames)
    fcns = cell(size(exprs));
    for i = 1:numel(exprs)
        expr = exprs{i};
        [~,idx] = sort(cellfun(@length, predNames), 'descend');
        predNamesSorted = predNames(idx);
        for k = 1:numel(predNamesSorted)
            name = predNamesSorted{k};
            j    = find(strcmp(predNames, name), 1, 'first');
            pattern = ['(?<![A-Za-z0-9_])' regexptranslate('escape',
   name) '(?![A-Za-z0-9_])'];
            expr = regexprep(expr, pattern, sprintf('x(%d)', j));
        end
        fcns{i} = str2func(sprintf('@(x) (%s)', expr));
    end
end
```

Listing I.17: Private helpers – buildFieldAggFunctions.m

```
function [r,c] = findKey(raw, key)
    r   = [];
    c   = [];
    key = normalizeText(key);
    for i = 1:size(raw,1)
        x = raw{i,2};
        if isMissingLike(x); continue; end
        if strcmpi(normalizeText(x), key); r = i; c = 2; return; end
    end
end

function tf = isMissingLike(x)
    tf = false;
    if isempty(x);                                  tf = true; return; end
    if iscell(x);                                   tf = true; return; end
    if isnumeric(x) && isscalar(x) && isnan(x); tf = true; return; end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
    if ischar(x) && isempty(strtrim(x));          tf = true; return; end
    try; if any(ismissing(x)); tf = true; return; end; catch; end
end

function s = normalizeText(x)
    s = toText(x);
    s = strrep(s, char(160), ' ');
    s = strtrim(s);
end
```

Listing I.18: Private helpers – findKey.m, isMissingLike.m, normalizeText.m

```
function val = readScalarByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    val = '';
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); val = toText(x); return; end
    end
end

function vals = readTextVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = {};
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); vals{end+1} = toText(x); end %#ok<AGROW>
    end
end

function vals = readNumericVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = [];
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x)
            if isnumeric(x); vals(end+1) = x; %#ok<AGROW>
            else;            vals(end+1) = str2double(toText(x)); end
    %#ok<AGROW>
        end
    end
end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Listing I.19: Private helpers – read*ByKey functions

```
function s = toText(x)
    if isempty(x); s = ''; return; end
    try; if any(ismissing(x)); s = ''; return; end; catch; end
    if isstring(x);      s = char(x);
    elseif ischar(x);    s = x;
    elseif isnumeric(x); s = num2str(x);
    else;                s = char(x);
    end
    s = strtrim(s);
end

function letter = xlsColLetter(n)
%XLSCOLLETTER Convert column number to Excel column letter (1=A, 2=B,
    ...).
    letter = '';
    while n > 0
        rem    = mod(n-1, 26);
        letter = [char(65+rem) letter];
        n      = floor((n-1) / 26);
    end
end
```

Listing I.20: Private helpers – toText.m, xlsColLetter.m

I.5 Parte V: Fundamentos numéricos e estatísticos

Esta seção aborda técnicas numéricas fundamentais e métodos de amostragem estatística para a quantificação de chap:trustregion e a estimação robusta de modelos.

I.5.1 Levenberg-Marquardt

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Este script dá suporte ao exemplo numérico da Seção 65.6. Ele reproduz a tabela de iterações e usa a mesma convenção de resíduos, matriz de escalonamento e regra de amortecimento da dedução anterior.

```
x = (0:4)';
y = 6 ./ (2 + x);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```

theta  = [4; 1];
lambda = 1.0e-2;

phi = @(th) 0.5 * sum((th(1) ./ (th(2) + x) - y).^2);
fprintf('%2d  %11s  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
        0, '--', theta(1), theta(2), phi(theta));

accepted = 0;
while accepted < 5
    a = theta(1);
    b = theta(2);

    g = a ./ (b + x);
    r = g - y;
    J = [1 ./ (b + x), -a ./ (b + x).^2];

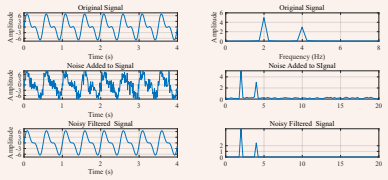
    A = J' * J;
    D = diag(diag(A));
    delta = (A + lambda * D) \ (-J' * r);

    trial = theta + delta;
    phiCurrent = 0.5 * (r' * r);
    phiTrial   = phi(trial);

    if phiTrial < phiCurrent
        theta = trial;
        accepted = accepted + 1;
        fprintf('%2d  %11.1e  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
                accepted, lambda, theta(1), theta(2), phiTrial);
        lambda = lambda / 10;
    else
        lambda = lambda * 10;
    end
end
```

I.5.2 Técnicas numéricas

I.5.3 FFT e filtros Butterworth




```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)
% ========================================================================
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% Demonstrates the DFT/FFT for signal analysis and noise filtering.
%
% THEORY:
%   The Discrete Fourier Transform decomposes a time-domain signal into
%   its constituent frequency components.  For a signal sampled at rate
%   fs = 1/dt over N samples, the DFT output Y = fft(y) gives:
%     Y(k)      : complex amplitude at frequency k/(N*dt)  [Hz]
%     |Y(k)|/N  : one-sided amplitude spectrum (for k = 0..N/2)
%   The second half of Y (k > N/2) are complex conjugates of the first.
%
% FILTERING APPROACH (hard threshold):
%   Fourier coefficients with |Y(k)| < threshold are zeroed out.
%   fix(Y/500)*500 rounds each coefficient down to the nearest multiple
%   of 500, effectively zeroing those with |Y| < 500.
%   This removes broadband noise while preserving dominant frequency peaks.
%   The threshold (500) is chosen empirically -- examine the amplitude
%   spectrum to select an appropriate value for a given signal.
%
% SIGNAL:  y(t) = 3*sin(4*2pi*t) + 5*sin(2*2pi*t)
%   Two sinusoids: 4 Hz (amplitude 3) and 2 Hz (amplitude 5).
%   Both peaks should be clearly visible in the amplitude spectrum.
% ========================================================================

clear; close all; clc;

GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Verify FFT round-trip on a random signal
% ------------------------------------------------------------------------
x_rand  = rand(1, 10);
Y_rand  = fft(x_rand);
x_recov = real(ifft(Y_rand));   % imaginary part is ~machine epsilon
fprintf('FFT round-trip error (should be ~0): %.2e\n', norm(x_rand - x_recov))
    ;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Construct the test signal
% ------------------------------------------------------------------------
dt = 1/100;          % sampling interval [s]  (sampling rate = 100 Hz)
et = 4;              % signal duration   [s]
t  = 0 : dt : et;   % time vector
N  = length(t);

y = 3*sin(4*2*pi*t) + 5*sin(2*2*pi*t);   % two-frequency signal

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- FFT of the clean signal
% ------------------------------------------------------------------------
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
Y        = fft(y);
n_half   = floor(N/2);
amp_spec = abs(Y) / n_half;

freq = (0:79) / (2 * n_half * dt);   % frequency axis for first 80 bins [Hz]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Add noise and compute spectrum
% ------------------------------------------------------------------------
noise = randn(1, N);
ey    = y + 2*noise;       % corrupted signal (noise amplitude = 2)
eY    = fft(ey);
e_amp = abs(eY) / n_half;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Filter: zero Fourier coefficients below threshold
% ------------------------------------------------------------------------
threshold = 500;
fY        = fix(eY / threshold) * threshold;   % zero small coefficients
cy        = real(ifft(fY));                     % filtered time-domain signal
cY        = fft(cy);
c_amp     = abs(cY) / n_half;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Plot: 3 rows x 2 columns (time | frequency domain)
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

subplot(3,2,1);
plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,2);
plot(freq, amp_spec(1:80), 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,3);
plot(t, ey, 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,4);
plot(freq, e_amp(1:80), 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,5);
plot(t, cy, 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,6);
plot(freq, c_amp(1:80), 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print('fft-example.eps', '-depsc');
eps2pdf('fft-example.eps', GS, 0);
```

I.5.4 Decomposição em valores singulares

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- SVD FOR ILL-CONDITIONED SYSTEMS
% ========================================================================
% Demonstrates the use of Singular Value Decomposition to solve a severely
% ill-conditioned linear system where the standard backslash operator
% gives unreliable results due to near-singularity.
%
% THEORY:
%   Any mxn matrix A decomposes as  A = U * S * V^T
%   where U (mxm) and V (nxn) are orthogonal, and S (mxn) is diagonal
%   with non-negative singular values sigma_1 >= sigma_2 >= ... >= 0.
%
%   The Moore-Penrose pseudo-inverse is:
%       A^+ = V * S^+ * U^T
%   where  S^+(i,i) = 1/sigma_i  if sigma_i > threshold,  else 0.
%
%   Setting near-zero singular values to zero (Tikhonov regularisation)
%   prevents amplification of numerical noise in near-null directions.
%
% ILL-CONDITIONING:
%   The matrix A below has one near-zero singular value (~1e-15).
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%   Condition number kappa(A) = sigma_max/sigma_min approx 1e15, meaning round-off errors
%   of order epsilon_machine approx 1e-16 are amplified to O(1) in the solution.
%   The SVD solution discards the near-zero singular value and returns
%   the minimum-norm least-squares solution instead.
% ========================================================================

clc; clear;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Define the ill-conditioned system
% ------------------------------------------------------------------------
% Rows of A are nearly identical -> A is nearly singular.
A = [1,  1        ;
     1,  1 + 1e-15];
b = [2;  2 + 1e-15];

fprintf('Condition number of A: %.2e\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Direct solution (unreliable for near-singular systems)
% ------------------------------------------------------------------------
direct_solution = A \ b;
fprintf('\nDirect solution (A \\ b):\n');
disp(direct_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*direct_solution - b));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- SVD decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
[U, S, V] = svd(A);

fprintf('\nSingular values:\n');
disp(diag(S)');

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Regularised pseudo-inverse
% ------------------------------------------------------------------------
% Threshold: singular values below this are treated as zero.
% Choosing threshold = 1e-6 discards the ~1e-15 singular value
% while keeping the O(1) singular value intact.
threshold = 1e-6;

S_plus = zeros(size(S'));       % pseudo-inverse of S (note: transposed size)
for i = 1 : min(size(S))
    if S(i,i) > threshold
        S_plus(i,i) = 1 / S(i,i);
    end
    % values below threshold remain zero (regularised)
end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```

A_plus       = V * S_plus * U';    % Moore-Penrose pseudo-inverse
svd_solution = A_plus * b;

fprintf('SVD regularised solution:\n');
disp(svd_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*svd_solution - b));
```

I.5.5 Pré-condicionamento

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- CHOLESKY PRECONDITIONING
% ========================================================================
% Demonstrates how preconditioning reduces the condition number of a
% symmetric positive definite (SPD) linear system, which accelerates
% convergence of iterative solvers such as PCG (preconditioned conjugate
% gradient).
%
% THEORY:
%   For an SPD matrix A, the Cholesky decomposition gives A = L * L^T.
%   Using M = L * L^T (= A) as the preconditioner:
%
%   LEFT preconditioning:   solve  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
%   RIGHT preconditioning:  solve  (A M^{-1}) y = b,  then x = M^{-1} y
%
%   When M = A exactly, M^{-1}A = I and the condition number drops to 1.
%   This is pedagogically illustrative but practically useless -- the cost
%   of applying M^{-1} = A^{-1} is the same as solving the original system.
%
%   In practice, an INCOMPLETE Cholesky factorisation (ichol in MATLAB)
%   is used as a cheaper approximation to A, giving a useful preconditioner.
%
% NOTE ON inv():
%   Using inv(M) explicitly is numerically inferior to the backslash
%   operator (M\b).  Here inv() is replaced by M\ for correctness.
%   The original used inv(M)*A -- replaced with M\A throughout.
%
% MATRIX CONSTRUCTION:
%   A = Q * D * Q^T  where D = diag([1, 0.1, 0.01]) and Q is orthogonal.
%   This guarantees A is SPD with eigenvalues {1, 0.1, 0.01} and
%   condition number kappa(A) = 1/0.01 = 100.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Construct a symmetric positive definite matrix
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% ------------------------------------------------------------------------
D = diag([1, 0.1, 0.01]);    % prescribed eigenvalues -> kappa(A) = 100

rng(1, 'twister');            % fixed seed for reproducibility
[Q, ~] = qr(rand(3));         % random orthogonal matrix via QR
A = Q * D * Q';               % SPD matrix with known eigenstructure
b = ones(3, 1);

fprintf('Matrix A:\n');  disp(A);
fprintf('Eigenvalues of A:    ');  fprintf('%.4f  ', eig(A)');  fprintf('\n');
fprintf('Condition number of A: %.4e\n\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Cholesky decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
L = chol(A, 'lower');   % A = L * L^T  (lower triangular factor)
M = L * L';             % preconditioning matrix (= A here)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Left preconditioning:  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
% ------------------------------------------------------------------------
A_left = (M\A + (M\A)') / 2;   % enforce symmetry after solve
b_left = M \ b;
x_left = A_left \ b_left;

kappa_left = cond(A_left);
fprintf('Left preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       ');  fprintf('%.4f  ', eig(A_left)');  fprintf('
   \n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_left);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Right preconditioning:  (A M^{-1}) y = b
% ------------------------------------------------------------------------
A_right = (A/M + (A/M)') / 2;
x_right = A_right \ b;

kappa_right = cond(A_right);
fprintf('Right preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       ');  fprintf('%.4f  ', eig(A_right)');  fprintf(
   '\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_right);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Summary
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('--- Summary ---\n');
fprintf('  Original matrix:            kappa = %.4e\n', cond(A));
fprintf('  Left  preconditioned:       kappa = %.4e\n', kappa_left);
```

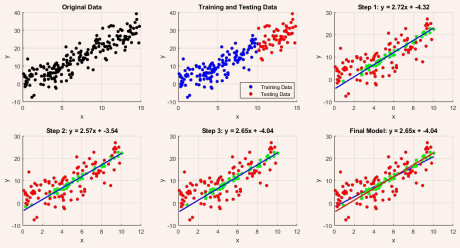
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
fprintf('  Right preconditioned:        kappa = %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  (kappa = 1 is expected when M = A exactly)\n');
fprintf('  In practice use ichol() for an approximate, cheaper M.\n');
```

I.5.6 Consenso de amostragem aleatória (RANSAC)

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.



Program to perform random sampling consensus, §65.3.2.

```
% ========================================================================
% RANDOM SAMPLE CONSENSUS (RANSAC) -- ROBUST LINE FITTING
% ========================================================================
% RANSAC is a robust estimation algorithm that fits a model to data
% containing a large fraction of outliers.  Unlike least squares, which
% minimises the sum of all residuals (making it sensitive to outliers),
% RANSAC iteratively finds the model supported by the most inliers.
%
% ALGORITHM:
%   Repeat n_iterations times:
%     1. Randomly select the minimum number of points needed to define
%        the model (2 points for a line).
%     2. Fit the model to these points.
%     3. Count how many other data points are within distance threshold
%        of the fitted model -> these are the "inliers".
%     4. If this inlier count is the best so far, save this model.
%   Return the model with the most inliers.
%
% DISTANCE METRIC:
%   For a line  y = m*x + c  (or equivalently  m*x - y + c = 0),
%   the perpendicular distance from point (x_i, y_i) to the line is:
%       d_i = |m*x_i - y_i + c| / sqrt(m^2 + 1)
%   A point is an inlier if d_i < threshold.
%
% NUMBER OF ITERATIONS:
%   The theoretical number of iterations needed to find at least one
%   outlier-free sample with probability p is:
%       n_iter = log(1-p) / log(1 - (1-e)^s)
%   where e = outlier ratio, s = sample size (2 for a line), p = 0.99.
%   For e=0.4, s=2: n_iter approx 11.  Using 1000 iterations is very
   conservative.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
% STRUCTURE:
%   The script runs RANSAC 'visualize_steps' independent times on the
%   training set, showing the best model found at each run.  The final
%   panel shows the best model across all runs.
%
% UNITS: dimensionless (synthetic data).
% ========================================================================

clear; close all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
n_points       = 200;     % total number of data points
outlier_ratio  = 0.4;     % fraction of points that are outliers
threshold      = 0.5;     % inlier distance threshold (perpendicular)
n_iterations   = 1000;    % RANSAC iterations per run
visualize_steps = 4;      % number of independent RANSAC runs to display

rng('shuffle');            % non-reproducible seed (use rng(42) for
    reproducibility)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
% True model: y = true_slope * x + true_intercept + Gaussian noise
% Outliers are added by shifting a random subset by a large random amount.

x              = sort(rand(1, n_points) * 15);   % x values in [0, 15]
true_slope     = 2.0;
true_intercept = 0.5;

y = true_slope * x + true_intercept + randn(1, n_points) * 3;  % noisy inliers

% Add outliers: shift selected points by up to +/-10 in y
n_outliers      = round(outlier_ratio * n_points);
outlier_indices = randperm(n_points, n_outliers);
y(outlier_indices) = y(outlier_indices) + (rand(1, n_outliers) - 0.5) * 20;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Train / test split
% ------------------------------------------------------------------------
% RANSAC is applied only to the training set.
% The test set is shown for visual reference but not used in fitting.

train_ratio = 0.7;
n_train     = round(train_ratio * n_points);
x_train     = x(1 : n_train);
y_train     = y(1 : n_train);
x_test      = x(n_train+1 : end);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
y_test      = y(n_train+1 : end);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot original data and train/test split
% -------------------------------------------------------------------------
figure('Position', [100, 100, 1200, 600]);

subplot(2, 3, 1);
scatter(x, y, 30, 'k', 'filled');
title('Original Data  (inliers + outliers)');
xlabel('x');  ylabel('y');
grid on;

subplot(2, 3, 2);
scatter(x_train, y_train, 30, 'b', 'filled');
hold on;
scatter(x_test,  y_test,  30, 'r', 'filled');
title('Train / Test Split');
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('Training (70%)', 'Testing (30%)', 'Location', 'best');
grid on;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- RANSAC: run visualize_steps independent trials
% -------------------------------------------------------------------------
% Each trial runs the full RANSAC loop and finds the best model for that run.
% Results are stored for comparison and final selection.

models         = cell(1, visualize_steps);   % best [slope, intercept] per run
inliers_count  = zeros(1, visualize_steps);  % number of inliers per run

for step = 1 : visualize_steps

    best_inliers = [];
    best_model   = [];

    for iter = 1 : n_iterations

        % --- Sample 2 points at random ---
        idx      = randperm(length(x_train), 2);
        x_samp   = x_train(idx);
        y_samp   = y_train(idx);

        % Skip degenerate case (two identical x values -> vertical line)
        if x_samp(1) == x_samp(2)
            continue;
        end

        % --- Fit line through the 2 sample points ---
        slope     = diff(y_samp) / diff(x_samp);
        intercept = y_samp(1) - slope * x_samp(1);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
132
133         % --- Compute perpendicular distances from all training points ---
134         % Line equation:  slope*x - y + intercept = 0
135         distances = abs(slope * x_train - y_train + intercept) / sqrt(slope^2
    + 1);
136
137         % --- Count inliers (points within distance threshold) ---
138         inliers = find(distances < threshold);
139
140         % --- Update best model if this has more inliers ---
141         if length(inliers) > length(best_inliers)
142             best_inliers = inliers;
143             best_model   = [slope, intercept];
144         end
145
146     end   % RANSAC iteration loop
147
148     % Store results for this run
149     models{step}        = best_model;
150     inliers_count(step) = length(best_inliers);
151
152     % --- Plot this run ---
153     outlier_idx = setdiff(1:length(x_train), best_inliers);
154
155     subplot(2, 3, step + 2);
156     scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');   % all points (
    grey)
157     hold on;
158     scatter(x_train(best_inliers), y_train(best_inliers), 30, 'g', 'filled');
     % inliers
159     scatter(x_train(outlier_idx),  y_train(outlier_idx),  30, 'r', 'filled');
     % outliers
160
161     plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
162     plot(plot_x, best_model(1)*plot_x + best_model(2), 'b-', 'LineWidth', 2);
163
164     title(sprintf('Run %d:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
165                   step, best_model(1), best_model(2), length(best_inliers)));
166     xlabel('x');  ylabel('y');
167     legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Model', 'Location', 'best');
168     grid on;
169
170 end   % step loop
171
172 % -------------------------------------------------------------------------
173 % Section 6 -- Final model: best across all runs
174 % -------------------------------------------------------------------------
175 [~, best_step]  = max(inliers_count);
176 final_model     = models{best_step};
177
178 % Re-identify inliers for the final model
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
final_distances = abs(final_model(1)*x_train - y_train + final_model(2)) ...
                  / sqrt(final_model(1)^2 + 1);
final_inliers   = find(final_distances < threshold);
final_outliers  = setdiff(1:length(x_train), final_inliers);

subplot(2, 3, 6);
scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');
hold on;
scatter(x_train(final_inliers), y_train(final_inliers), 30, 'g', 'filled');
scatter(x_train(final_outliers), y_train(final_outliers), 30, 'r', 'filled');

plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
plot(plot_x, final_model(1)*plot_x + final_model(2), 'r-', 'LineWidth', 2);

title(sprintf('Best Model:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
              final_model(1), final_model(2), length(final_inliers)));
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Best Model', 'Location', 'best');
grid on;

fprintf('\n--- RANSAC Results ---\n');
fprintf('True model:  slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', true_slope,
   true_intercept);
fprintf('RANSAC best: slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', final_model(1),
   final_model(2));
fprintf('Inliers: %d / %d training points\n', length(final_inliers), n_train);
```

I.5.7 Hipercubo latino

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Covered in §64.3.3.2.

```
%% Latin Hypercube Sampling (LHS) vs. Monte Carlo Sampling
% Demonstration and comparison of LHS with classical Monte Carlo sampling.
% The code uses only ASCII characters so that it is safe inside lstlisting.
% It also avoids norminv, so no Statistics and Machine Learning Toolbox
% is required.

clearvars; close all; clc;

%% Parameters
N = 100;          % Number of samples used in the main comparison
n_vars = 2;       % Number of input variables
seed = 42;        % Random seed for reproducibility
n_rep = 200;      % Replications used for the convergence comparison

rng(seed, 'twister');

```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%% 1. LATIN HYPERCUBE SAMPLING (LHS)
% ==================================

% Generate an N-by-n_vars Latin hypercube design in [0,1].
lhs_samples = lhs_design(N, n_vars);

% Transform the two columns to the desired marginal distributions.
% Variable 1: Uniform [10,20]
lhs_var1 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 1);

% Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)
lhs_var2 = normal_icdf(lhs_samples(:, 2), 15, 3);

lhs_all = [lhs_var1, lhs_var2];

%% 2. MONTE CARLO SAMPLING (MCS)
% ==============================

% Mixed-distribution Monte Carlo sample.
mcs_var1 = 10 + 10 * rand(N, 1);     % Uniform [10,20]
mcs_var2 = 15 + 3 * randn(N, 1);     % Normal (mu=15, sigma=3)

mcs_all = [mcs_var1, mcs_var2];

% A second uniform variable is needed for the uniform-uniform comparison.
mcs_uniform_var2 = 10 + 10 * rand(N, 1);
lhs_uniform_var2 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 2);

%% 3. VISUALIZATION: TWO-DIMENSIONAL COMPARISON
% =============================================

figure('Position', [100, 100, 1200, 500]);

% Uniform distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 1);
scatter(mcs_var1, mcs_uniform_var2, 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Monte Carlo Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Uniform distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 2);
scatter(lhs_var1, lhs_uniform_var2, 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Latin Hypercube Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% Mixed distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 3);
scatter(mcs_all(:, 1), mcs_all(:, 2), 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Monte Carlo Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

% Mixed distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 4);
scatter(lhs_all(:, 1), lhs_all(:, 2), 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Latin Hypercube Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

sgtitle(sprintf('LHS vs. MCS Comparison (N = %d)', N), ...
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 4. STATISTICAL COMPARISON OF MEAN ESTIMATION
% ================================================

% Model response:
%     Y = X1 + 0.5*X2
%
% The theoretical mean is:
%     E[Y] = E[X1] + 0.5*E[X2] = 15 + 0.5*15 = 22.5

true_mean = 22.5;
sample_sizes = 10:5:N;

mean_lhs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
mean_mcs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_lhs = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_mcs = zeros(length(sample_sizes), 1);

for i = 1:length(sample_sizes)
n_samp = sample_sizes(i);

lhs_estimates = zeros(n_rep, 1);
mcs_estimates = zeros(n_rep, 1);

for rep = 1:n_rep
% Fresh LHS design of size n_samp.
u_lhs = lhs_design(n_samp, n_vars);
x1_lhs = 10 + 10 * u_lhs(:, 1);
x2_lhs = normal_icdf(u_lhs(:, 2), 15, 3);
y_lhs_rep = x1_lhs + 0.5 * x2_lhs;
lhs_estimates(rep) = mean(y_lhs_rep);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
119
120   % Fresh classical Monte Carlo sample of the same size.
121   x1_mcs = 10 + 10 * rand(n_samp, 1);
122   x2_mcs = 15 + 3 * randn(n_samp, 1);
123   y_mcs_rep = x1_mcs + 0.5 * x2_mcs;
124   mcs_estimates(rep) = mean(y_mcs_rep);
125   end
126
127   mean_lhs_conv(i) = mean(lhs_estimates);
128   mean_mcs_conv(i) = mean(mcs_estimates);
129
130   rmse_lhs(i) = sqrt(mean((lhs_estimates - true_mean).^2));
131   rmse_mcs(i) = sqrt(mean((mcs_estimates - true_mean).^2));
132   end
133
134   figure('Position', [100, 100, 1000, 400]);
135
136   % Average estimated mean over repeated designs
137   subplot(1, 2, 1);
138   plot(sample_sizes, mean_lhs_conv, 'o-', ...
139   'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
140   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
141   hold on;
142   plot(sample_sizes, mean_mcs_conv, 's-', ...
143   'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
144   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
145   plot([min(sample_sizes), max(sample_sizes)], ...
146   [true_mean, true_mean], '--k', ...
147   'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'True Mean');
148   xlabel('Number of Samples');
149   ylabel('Mean of Estimated Means');
150   title(sprintf('Mean Estimate over %d Replications', n_rep));
151   legend('Location', 'best');
152   grid on;
153
154   % Root-mean-square error of the mean estimator
155   subplot(1, 2, 2);
156   semilogy(sample_sizes, rmse_lhs, 'o-', ...
157   'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
158   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
159   hold on;
160   semilogy(sample_sizes, rmse_mcs, 's-', ...
161   'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
162   'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
163   xlabel('Number of Samples');
164   ylabel('RMSE of Estimated Mean');
165   title('Convergence of Mean-Estimation Error');
166   legend('Location', 'best');
167   grid on;
168
169   sgtitle('Convergence Analysis: LHS vs. MCS', ...
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 5. SUMMARY STATISTICS FOR THE MAIN N-SAMPLE DESIGNS
% ====================================================

y_lhs = lhs_all(:, 1) + 0.5 * lhs_all(:, 2);
y_mcs = mcs_all(:, 1) + 0.5 * mcs_all(:, 2);

lhs_error = abs(mean(y_lhs) - true_mean);
mcs_error = abs(mean(y_mcs) - true_mean);

fprintf('\n========== SUMMARY (N = %d) ==========\n\n', N);
fprintf('TRUE MEAN: %.4f\n\n', true_mean);

fprintf('LHS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_lhs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_lhs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', lhs_error);

fprintf('MCS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_mcs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_mcs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', mcs_error);

fprintf('REPLICATED CONVERGENCE RESULTS AT N = %d:\n', N);
fprintf('  LHS RMSE: %.6f\n', rmse_lhs(end));
fprintf('  MCS RMSE: %.6f\n', rmse_mcs(end));

if rmse_mcs(end) > 0
fprintf('  LHS RMSE is %.2f%% of MCS RMSE.\n', ...
100 * rmse_lhs(end) / rmse_mcs(end));
end

%% LOCAL FUNCTIONS
% ================

function samples = lhs_design(n_samples, n_variables)
%LHS_DESIGN Generate an n_samples-by-n_variables LHS design in [0,1].

samples = zeros(n_samples, n_variables);

for j = 1:n_variables
% One random point inside each of the n_samples strata.
within_stratum = rand(n_samples, 1);

% Randomly permute the strata independently for each variable.
ranks = randperm(n_samples)';

samples(:, j) = ...
(ranks - 1 + within_stratum) / n_samples;
end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
  end

  function x = normal_icdf(u, mu, sigma)
  %NORMAL_ICDF Inverse CDF of a normal distribution without norminv.

  % Guard against exact endpoints before applying erfinv.
  u = min(max(u, eps), 1 - eps);

  x = mu + sigma * sqrt(2) .* erfinv(2 .* u - 1);
  end
```

I.5.8 Regressão bayesiana com base quadrática

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Code for the example in § 65.5.4.

```
%% Bayesian Regression with a Quadratic Basis
% Metropolis--Hastings sampling for
%   y = theta_1*x1^2 + theta_2*x2 + epsilon,
%   epsilon ~ N(0,sigma^2).
%
% The model is quadratic in predictor x1 but linear in the unknown
% parameters theta_1 and theta_2. With Gaussian priors and known sigma,
% the posterior is Gaussian and can be computed analytically. This provides
% an independent audit of the MCMC results.

clear; close all; clc;

%% 1. Generate synthetic data

rng(42,'twister');

n = 50;
x1 = rand(n,1);
x2 = rand(n,1);
theta_true = [2;3];
sigma = 1;

X = [x1.^2, x2];
y = X*theta_true + sigma*randn(n,1);

fprintf('\n=== Synthetic Data Generated ===\n');
fprintf('Number of observations: %d\n',n);
fprintf('True theta_1 (coefficient of x1^2): %.4f\n',theta_true(1));
fprintf('True theta_2 (coefficient of x2):   %.4f\n',theta_true(2));
fprintf('Known noise standard deviation:     %.4f\n',sigma);

%% 2. Define independent Gaussian priors
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
mu_prior = [0;0];
sigma_prior = [10;10];
prior_precision = diag(1./sigma_prior.^2);

fprintf('\n=== Prior Distributions ===\n');
fprintf('theta_j ~ N(0,10^2), j = 1,2\n');

%% 3. Exact posterior for independent verification
% For this linear-Gaussian example,
%   Sigma_post^{-1} = X''X/sigma^2 + Sigma_prior^{-1},
%   mu_post = Sigma_post*(X''y/sigma^2 + Sigma_prior^{-1}*mu_prior).

post_precision = (X.'*X)/sigma^2 + prior_precision;
post_cov_exact = post_precision\eye(2);
post_mean_exact = post_precision\((X.'*y)/sigma^2 + ...
    prior_precision*mu_prior);
post_sd_exact = sqrt(diag(post_cov_exact));

fprintf('\n=== Exact Gaussian Posterior ===\n');
fprintf('Exact posterior mean theta_1: %.6f\n',post_mean_exact(1));
fprintf('Exact posterior mean theta_2: %.6f\n',post_mean_exact(2));
fprintf('Exact posterior SD theta_1:   %.6f\n',post_sd_exact(1));
fprintf('Exact posterior SD theta_2:   %.6f\n',post_sd_exact(2));

%% 4. Metropolis--Hastings MCMC
% A symmetric Gaussian random-walk proposal is used, so proposal-density
% terms cancel from the Metropolis--Hastings acceptance ratio.

fprintf('\n=== Metropolis--Hastings MCMC Sampling ===\n');

n_iterations = 10000;
burn_in = 2000;
proposal_sd = [0.5;0.5];

theta_samples = zeros(n_iterations,2);
theta_current = [0;0];
logposterior_current = compute_logposterior( ...
    y,X,theta_current,sigma,mu_prior,sigma_prior);
n_accepted = 0;

fprintf('Running %d MCMC iterations...\n',n_iterations);
fprintf('Proposal standard deviations: [%.3f, %.3f]\n', ...
    proposal_sd(1),proposal_sd(2));

for iter = 1:n_iterations
    theta_proposal = theta_current + proposal_sd.*randn(2,1);
    logposterior_proposal = compute_logposterior( ...
        y,X,theta_proposal,sigma,mu_prior,sigma_prior);

    log_alpha = logposterior_proposal - logposterior_current;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
84
85      if log(rand) < min(0,log_alpha)
86          theta_current = theta_proposal;
87          logposterior_current = logposterior_proposal;
88          n_accepted = n_accepted + 1;
89      end
90
91      theta_samples(iter,:) = theta_current.';
92
93      if mod(iter,1000) == 0
94          fprintf('Iteration %d/%d (acceptance rate: %.1f%%)\n', ...
95              iter,n_iterations,100*n_accepted/iter);
96      end
97  end
98
99  acceptance_rate = n_accepted/n_iterations;
100 fprintf('\nFinal acceptance rate: %.1f%%\n',100*acceptance_rate);
101
102 %% 5. Remove burn-in and compute posterior summaries
103
104 theta_samples_post = theta_samples(burn_in+1:end,:);
105 n_samples_final = size(theta_samples_post,1);
106
107 theta1_samples = theta_samples_post(:,1);
108 theta2_samples = theta_samples_post(:,2);
109
110 theta_mean = mean(theta_samples_post,1).';
111 theta_sd = std(theta_samples_post,0,1).';
112 theta1_ci = empirical_percentile(theta1_samples,[2.5,97.5]);
113 theta2_ci = empirical_percentile(theta2_samples,[2.5,97.5]);
114
115 C = corrcoef(theta1_samples,theta2_samples);
116 posterior_correlation = C(1,2);
117
118 fprintf('\n=== MCMC Posterior Summary ===\n');
119 fprintf('Post-burn-in samples: %d\n',n_samples_final);
120 fprintf('Burn-in:              %d\n',burn_in);
121
122 fprintf('\nParameter theta_1:\n');
123 fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(1));
124 fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(1));
125 fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(1));
126 fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(1));
127 fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(1));
128 fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
129     theta1_ci(1),theta1_ci(2));
130
131 fprintf('\nParameter theta_2:\n');
132 fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(2));
133 fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(2));
134 fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(2));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(2));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(2));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta2_ci(1),theta2_ci(2));

fprintf('\nPosterior correlation theta_1/theta_2: %.6f\n', ...
    posterior_correlation);

%% 6. Least-squares comparison

theta_ls = X\y;

fprintf('\n=== Least-Squares Comparison ===\n');
fprintf('Least-squares theta_1: %.6f\n',theta_ls(1));
fprintf('Least-squares theta_2: %.6f\n',theta_ls(2));
fprintf('Difference LS - MCMC mean: [%.6f, %.6f]\n', ...
    theta_ls(1)-theta_mean(1),theta_ls(2)-theta_mean(2));

%% 7. Elementary single-chain diagnostics
% This compact example uses one chain. For production analyses, use multiple
% dispersed chains and report R-hat and effective sample size.

max_lag = 50;
acf_theta1 = compute_acf_manual(theta1_samples,max_lag);
acf_theta2 = compute_acf_manual(theta2_samples,max_lag);
acf_bound = 1.96/sqrt(n_samples_final);

thin_factor = 10;
iter_post = (burn_in+1):n_iterations;
iter_thin = iter_post(1:thin_factor:end);
theta1_thin = theta1_samples(1:thin_factor:end);
theta2_thin = theta2_samples(1:thin_factor:end);

%% 8. Posterior-predictive samples
% Future observation noise is included. If the noise term is omitted, the
% band represents uncertainty in the posterior mean response, not the full
% posterior-predictive distribution.

x1_pred = linspace(0,1,20).';
x2_pred = 0.5*ones(size(x1_pred));
X_pred = [x1_pred.^2,x2_pred];

n_samples_pred = 1000;
y_pred_samples = zeros(numel(x1_pred),n_samples_pred);

for i = 1:n_samples_pred
    idx = randi(n_samples_final);
    theta_draw = theta_samples_post(idx,:).';
    y_pred_samples(:,i) = X_pred*theta_draw + ...
        sigma*randn(size(x1_pred));
end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
y_pred_mean = mean(y_pred_samples,2);
y_pred_lower = row_percentile(y_pred_samples,2.5);
y_pred_upper = row_percentile(y_pred_samples,97.5);

%% 9. Visualization

fig = figure('Position',[100,100,1350,900],'Color','w');

% Panel 1: trace plot theta_1
subplot(3,3,1);
plot(iter_thin,theta1_thin,'b-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_1');
title('Trace plot: \theta_1');
grid on;

% Panel 2: trace plot theta_2
subplot(3,3,2);
plot(iter_thin,theta2_thin,'r-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_2');
title('Trace plot: \theta_2');
grid on;

% Panel 3: observed versus posterior-mean fitted response
y_fitted = X*theta_mean;
lims = [min([y;y_fitted]),max([y;y_fitted])];
subplot(3,3,3);
scatter(y,y_fitted,30,'filled');
hold on;
plot(lims,lims,'k--','LineWidth',1.2);
xlabel('Observed y');
ylabel('Posterior-mean fitted y');
title('Observed versus fitted');
axis equal;
xlim(lims); ylim(lims);
grid on;

% Panel 4: posterior density theta_1
subplot(3,3,4);
histogram(theta1_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','b','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(1),theta_true(1)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(1),theta_mean(1)],ylims,'r-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_1: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(1),theta_sd(1)));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
grid on;

% Panel 5: posterior density theta_2
subplot(3,3,5);
histogram(theta2_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','r','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(2),theta_true(2)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(2),theta_mean(2)],ylims,'b-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_2');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_2: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(2),theta_sd(2)));
grid on;

% Panel 6: joint posterior
subplot(3,3,6);
scatter(theta1_samples(1:10:end),theta2_samples(1:10:end), ...
    10,'b','filled');
hold on;
plot(theta_true(1),theta_true(2),'go','MarkerSize',10,'LineWidth',2);
plot(theta_mean(1),theta_mean(2),'r*','MarkerSize',12,'LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('\theta_2');
title(sprintf('Joint posterior (corr.=%.3f)',posterior_correlation));
grid on;

% Panel 7: ACF theta_1
subplot(3,3,7);
stem(0:max_lag,acf_theta1,'b','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'r--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'r--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_1');
grid on;

% Panel 8: ACF theta_2
subplot(3,3,8);
stem(0:max_lag,acf_theta2,'r','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'b--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'b--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_2');
grid on;

% Panel 9: posterior-predictive distribution
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
subplot(3,3,9);
fill([x1_pred;flipud(x1_pred)], ...
    [y_pred_upper;flipud(y_pred_lower)], ...
    'b','FaceAlpha',0.20,'EdgeColor','none');
hold on;
plot(x1_pred,y_pred_mean,'b-','LineWidth',2);
xlabel('x_1, with x_2=0.5');
ylabel('Future y');
title('Posterior-predictive distribution');
grid on;

sgtitle('Bayesian Regression with a Quadratic Basis: MCMC Results');

fprintf('\n=== Diagnostic Summary ===\n');
fprintf(['Acceptance rate: %.1f%% ', ...
    '(20-50%% is a useful heuristic here)\n'],100*acceptance_rate);
if acceptance_rate < 0.20
    fprintf('Acceptance is low: decrease proposal_sd.\n');
elseif acceptance_rate > 0.50
    fprintf('Acceptance is high: increase proposal_sd.\n');
else
    fprintf('Acceptance rate is in the intended heuristic range.\n');
end
fprintf('Inspect trace plots and ACF decay.\n');
fprintf(['This single-chain example does not compute R-hat; ', ...
    'use multiple chains for production work.\n']);
fprintf(['Credible intervals account for measurement noise and prior ', ...
    'information under the assumed model; they do not automatically ', ...
    'account for model discrepancy.\n']);

fprintf('\n=== ANALYSIS COMPLETE ===\n');

% Optional export:
% exportgraphics(fig,'Bayesian_quadratic_basis_MCMC.pdf', ...
%     'ContentType','vector');

%% Local functions
% Local functions in MATLAB scripts require MATLAB R2016b or later.

function loglik = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma)
    residuals = y-X*theta;
    n = numel(y);
    loglik = -0.5*(residuals.'*residuals)/sigma^2 ...
        - n*log(sigma) - 0.5*n*log(2*pi);
end

function logprior = compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior)
    z = (theta-mu_prior)./sigma_prior;
    logprior = -0.5*(z.'*z) ...
        - sum(log(sigma_prior)) ...
        - 0.5*numel(theta)*log(2*pi);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
end

function logposterior = compute_logposterior( ...
        y,X,theta,sigma,mu_prior,sigma_prior)
    logposterior = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma) ...
        + compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior);
end

function acf = compute_acf_manual(x,max_lag)
    x = x(:)-mean(x);
    denominator = sum(x.^2);
    acf = zeros(max_lag+1,1);
    acf(1) = 1;

    for lag = 1:max_lag
        acf(lag+1) = ...
            sum(x(1:end-lag).*x(1+lag:end))/denominator;
    end
end

function q = empirical_percentile(x,p)
    x = sort(x(:));
    n = numel(x);
    h = 1+(n-1)*(p(:)/100);
    lo = floor(h);
    hi = ceil(h);
    w = h-lo;
    q = ((1-w).*x(lo)+w.*x(hi)).';
end

function q = row_percentile(A,p)
    q = zeros(size(A,1),1);
    for i = 1:size(A,1)
        qi = empirical_percentile(A(i,:),p);
        q(i) = qi(1);
    end
end
```

I.5.9 Simulação de Monte Carlo via cadeias de Markov

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Código do exemplo apresentado na §65.5.4.

```
% Generate synthetic data
n = 50; % Number of data points
x1 = rand(n, 1); % Random values for x1
x2 = rand(n, 1); % Random values for x2
theta_true = [2; 3]; % True parameter values
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
sigma = 1; % Standard deviation of noise
y = theta_true(1) * x1.^2 + theta_true(2) * x2 + sigma * randn(n, 1); % Generate data with noise

% Define prior and likelihood
log_prior = @(theta) -0.5 * sum(theta.^2 / 10^2); % Gaussian prior with mean 0 and variance 10^2
log_likelihood = @(theta) -0.5 * sum((y - theta(1) * x1.^2 - theta(2) * x2).^2 / sigma^2); % Likelihood function

% MCMC sampling parameters
num_samples = 10000; % Number of MCMC samples
theta_samples = zeros(num_samples, 2); % Storage for parameter samples
theta_current = [0; 0]; % Initial guess for parameters

% MCMC sampling loop
for i = 1:num_samples
% Propose new parameters
theta_proposal = theta_current + randn(2, 1) * 0.1; % Gaussian proposal distribution

% Compute log acceptance ratio
log_acceptance_ratio = ...
log_likelihood(theta_proposal) + log_prior(theta_proposal) ...
- log_likelihood(theta_current) - log_prior(theta_current);

% Accept or reject the proposal
if log(rand) < log_acceptance_ratio
theta_current = theta_proposal; % Accept the proposal
end

% Store the current sample
theta_samples(i, :) = theta_current;
end

% Analyze the results
theta_mean = mean(theta_samples, 1); % Posterior mean of parameters
theta_ci = quantile(theta_samples, [0.025, 0.975]); % 95% credible intervals

% Display results
fprintf('Estimated theta: [%f, %f]\n', theta_mean(1), theta_mean(2));
fprintf('95%% CI for theta1: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 1), theta_ci(2, 1));
fprintf('95%% CI for theta2: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 2), theta_ci(2, 2));

% Plot posterior distributions
figure;
subplot(1, 2, 1);
histogram(theta_samples(:, 1), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_1 Posterior');
xlabel('\theta_1');
ylabel('Density');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
grid on;

subplot(1, 2, 2);
histogram(theta_samples(:, 2), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_2 Posterior');
xlabel('\theta_2');
ylabel('Density');
grid on;
```

I.6 Parte VI: Otimização e ajuste de parâmetros

Esta seção aborda a otimização não linear por mínimos quadrados e o ajuste de curvas pelo algoritmo de Levenberg–Marquardt.

I.6.1 Levenberg-Marquardt

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Refer to §65.4.

I.6.2 Implementação personalizada

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM -- CUSTOM IMPLEMENTATION
% ========================================================================
% Fits a nonlinear model to noisy data using the Levenberg-Marquardt (LM)
% algorithm, implemented from scratch (not using MATLAB's lsqnonlin).
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% ALGORITHM:
%   LM is a trust-region method that interpolates between two extremes:
%     - Gauss-Newton (lambda -> 0):  fast quadratic convergence near solution
%     - Gradient descent (lambda -> infinity): robust far from solution
%
%   At each iteration, the parameter update solves:
%       (J^T J + lambda * I) * delta = J^T * r
%
%   where:
%     J     : Jacobian matrix  [n x p]  (partial derivatives of residuals)
%     r     : residual vector  [n x 1]  (y_observed - y_model)
%     lambda: damping parameter (controls interpolation between GN and GD)
%     delta : parameter update  [p x 1]
%
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%   If the update reduces the cost, accept it and decrease lambda (-> GN).
%   If not, reject it and increase lambda (-> GD).
%
% JACOBIAN (analytical, for this model):
%   dr_i/d(beta_1) = -exp(beta_2 * x_i)
%   dr_i/d(beta_2) = -beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
%
%   NOTE: this code uses the Jacobian of the MODEL (not the residuals),
%   so J here has the opposite sign from the Jacobian of the residuals.
%   The normal equations J^T J delta = J^T r remain correct as written.
%
% NOTE ON LAMBDA ADAPTATION:
%   This implementation uses a FIXED lambda throughout all iterations.
%   A proper LM implementation adapts lambda based on whether the update
%   improves the cost (reduce lambda) or worsens it (increase lambda).
%   Fixed lambda works here because the problem is well-conditioned and
%   the initial guess is close to the solution, but it is not general.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % fixed seed for reproducibility

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);     % 20 equally spaced points in [0, 2]
true_params = [1.0; 1.0];             % true beta_1 and beta_2

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));   % add Gaussian noise (std =
    0.1)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and algorithm parameters
% ------------------------------------------------------------------------
model    = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta     = [0.5; 0.5];   % initial guess (deliberately away from truth)
lambda   = 0.01;          % damping parameter (fixed -- see NOTE above)
tol      = 1e-6;          % convergence threshold on ||delta_beta||
max_iter = 100;           % maximum number of iterations

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Levenberg-Marquardt iteration
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('%-8s  %-12s  %-10s  %-10s  %-12s\n', ...
        'Iter', 'Cost', 'beta_1', 'beta_2', '||delta||');

```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
for iter = 1 : max_iter

    % --- Model predictions at current parameters ---
    f = model(beta, x);

    % --- Residuals: r = y_observed - y_model  (column vector) ---
    r = (y - f)';

    % --- Jacobian of the model output w.r.t. parameters ---
    % J(i,1) = d(model)/d(beta_1) at x_i = exp(beta_2 * x_i)
    % J(i,2) = d(model)/d(beta_2) at x_i = beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
    J = [ exp(beta(2) * x)',  ...
          beta(1) * x' .* exp(beta(2) * x)' ];

    % --- Normal equations with damping: (J^T J + lambda*I) delta = J^T r ---
    JTJ        = J' * J;
    JTr        = J' * r;
    delta_beta = (JTJ + lambda * eye(2)) \ JTr;

    % --- Update parameters ---
    beta = beta + delta_beta;

    % --- Report progress ---
    cost = 0.5 * sum(r.^2);
    fprintf('%-8d  %-12.6f  %-10.6f  %-10.6f  %-12.2e\n', ...
            iter, cost, beta(1), beta(2), norm(delta_beta));

    % --- Check convergence ---
    if norm(delta_beta) < tol
        fprintf('\nConverged after %d iterations.\n', iter);
        break;
    end

    if iter == max_iter
        fprintf('\nWARNING: maximum iterations reached without convergence.\n'
    );
    end

end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results
% -------------------------------------------------------------------------
fprintf('\n--- Summary ---\n');
fprintf('True parameters:  beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1),
    true_params(2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta(1), beta(2)
    );

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit,   'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('Levenberg-Marquardt:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', beta(1),
   beta(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.6.3 Uso da função incorporada

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT FITTING -- MATLAB BUILT-IN (lsqcurvefit)
% ========================================================================
% Fits the same exponential model as the custom LM implementation using
% MATLAB's lsqcurvefit, which provides a production-quality Levenberg-
% Marquardt solver with adaptive damping, convergence diagnostics, and
% confidence interval estimation.
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% COMPARISON WITH CUSTOM IMPLEMENTATION:
%   The previous script (levenberg_marquardt.m) built LM from scratch
%   with a FIXED damping parameter lambda.  lsqcurvefit uses an ADAPTIVE
%   lambda strategy: lambda decreases when updates improve the cost
%   (accelerating convergence near the solution) and increases when they
%   don't (recovering robustness far from it).  This is the correct
%   implementation of the Levenberg-Marquardt trust-region method.
%
% lsqcurvefit INTERFACE:
%   [beta, resnorm, residual, exitflag, output, lambda, jacobian]
%       = lsqcurvefit(model, beta0, x, y, lb, ub, options)
%
%   model    : function handle @(beta,x) returning model predictions
%   beta0    : initial parameter guess
%   x, y     : observed data
%   lb, ub   : lower/upper bounds ([] = none)
%   resnorm  : sum of squared residuals at the solution
%   jacobian : Jacobian at the solution (used for confidence intervals)
%
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% CONFIDENCE INTERVALS:
%   nlparci(beta, residual, 'Jacobian', jacobian) returns approximate
%   95% confidence intervals based on the linearised model at the solution.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % same seed as custom implementation for direct comparison

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data  (identical to custom LM script)
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);
true_params = [1.0, 1.0];

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and solver setup
% ------------------------------------------------------------------------
model = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta0 = [0.5, 0.5];   % initial guess (same as custom implementation)

options = optimoptions('lsqcurvefit',              ...
    'Algorithm',    'levenberg-marquardt',          ...  % LM with adaptive lambda
    'Display',      'iter',                         ...  % show iteration history
    'TolFun',       1e-10,                          ...  % function tolerance
    'TolX',         1e-10,                          ...  % parameter tolerance
    'MaxIterations', 400);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Fit the model
% ------------------------------------------------------------------------
[beta_opt, resnorm, residual, exitflag, output, ~, jacobian] = ...
    lsqcurvefit(model, beta0, x, y, [], [], options);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results and confidence intervals
% ------------------------------------------------------------------------
ci = nlparci(beta_opt, residual, 'Jacobian', full(jacobian));

fprintf('\n--- Results ---\n');
fprintf('True parameters:   beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1),
    true_params(2));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta_opt(1),
    beta_opt(2));
fprintf('Residual norm (sum of squared residuals): %.6e\n', resnorm);
fprintf('\n95%% Confidence Intervals:\n');
fprintf('  beta_1: [%.4f, %.4f]\n', ci(1,1), ci(1,2));
fprintf('  beta_2: [%.4f, %.4f]\n', ci(2,1), ci(2,2));
fprintf('\nSolver exit flag: %d  (%s)\n', exitflag, output.message);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
% ------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta_opt, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('lsqcurvefit LM:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', ...
              beta_opt(1), beta_opt(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.7 Parte VII: Confiabilidade sísmica e incerteza

Esta seção aplica os métodos desenvolvidos anteriormente à engenharia sísmica, incluindo análise probabilística de ameaça e projeto baseado em desempenho.

I.7.1 Análise de perigo sísmico

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Code for §67.13.

```
% ========================================================================
% SEISMIC HAZARD ANALYSIS AND DEAGGREGATION
% ========================================================================
% Demonstrates two core products of Probabilistic Seismic Hazard Analysis
% (PSHA) for a site:
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%
% PART 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:
%   Plots the annual probability of exceeding a given ground motion
%   intensity level (here: Peak Ground Acceleration, PGA in units of g).
%
%   The hazard curve is the fundamental output of PSHA.  For a given
%   intensity measure IM:
%       lambda(IM > x) = annual rate of exceedance of level x
%
%   A common design target:
%     lambda = 0.002/year (2% probability in 50 years) -> "2/50" level
%     lambda = 0.02/year  (10% probability in 50 years) -> "10/50" level
%
%   Here the hazard curve is modelled by a simple exponential decay:
%       lambda(PGA) = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
%   This is synthetic -- a real hazard curve is computed by integrating
%   over all earthquake sources, magnitudes, and distances.
%
% PART 2 -- SEISMIC HAZARD DEAGGREGATION:
%   For a given hazard level (e.g. Sa(T=1s) = 0.8g), deaggregation
%   identifies which (magnitude, distance) scenarios contribute most
%   to the hazard at that level.
%
%   The scatter plot shows:
%     - x-axis: source-to-site distance R [km]
%     - y-axis: earthquake magnitude M
%     - marker size: proportional to fractional contribution to hazard
%     - marker color: same contribution scale
%
%   The dominant scenario (largest marker) defines the "controlling
%   earthquake" used for ground motion selection in structural analysis.
%
% NOTE: Both the hazard curve and deaggregation data here are SYNTHETIC.
%   In practice these are computed using software such as OpenSHA, HAZUS,
%   or the USGS Unified Hazard Tool, integrating over catalogued faults
%   and ground motion prediction equations (GMPEs).
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Seismic hazard curve
% ------------------------------------------------------------------------
% PGA levels at which the annual exceedance rate is evaluated
pga_values = linspace(0.05, 0.5, 10);   % PGA in units of g

% Synthetic hazard model: lambda = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
lambda_0   = 0.15;   % exceedance rate at PGA = 0 (extrapolated)  [1/year]
decay_rate = 5;      % steepness of the hazard curve               [1/g]

exceedance_probs = lambda_0 * exp(-decay_rate * pga_values);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
57
58 % Reference hazard levels (horizontal lines on the plot)
59 lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 years  approx 0.000404/year
60 lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 years approx 0.002107/year
61
62 figure;
63 semilogy(pga_values, exceedance_probs, 'b-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6)
       ;
64 hold on;
65 yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
66       'LabelHorizontalAlignment', 'left');
67 yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
68       'LabelHorizontalAlignment', 'left');
69
70 xlabel('Peak Ground Acceleration  (g)',           'FontSize', 12);
71 ylabel('Annual Probability of Exceedance',       'FontSize', 12);
72 title('Seismic Hazard Curve',                    'FontSize', 13);
73 grid on;
74 set(gca, 'YScale', 'log');
75 set(gca, 'YTick', [1e-3, 5e-3, 1e-2, 5e-2, 1e-1, 5e-1, 1]);
76 ylim([1e-3, 1]);
77
78 saveas(gcf, 'hazard_curve.png');
79
80 % -------------------------------------------------------------------------
81 % Section 2 -- Seismic hazard deaggregation
82 % -------------------------------------------------------------------------
83 % Each entry represents a (magnitude, distance) scenario and its
84 % fractional contribution to the hazard at Sa(T=1s) = 0.8g.
85 % Contributions must sum to 1.0 for a complete deaggregation.
86
87 magnitudes    = [6.0,  6.5,  7.0,  7.3,  7.5,  7.8];   % moment magnitude Mw
88 distances     = [15,   20,   30,   35,   40,   50  ];    % closest distance [
       km]
89 contributions = [0.10, 0.20, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05];   % fractional
       contributions
90
91 fprintf('Total contribution (should sum to 1.0): %.2f\n', sum(contributions));
92
93 % Identify the controlling (dominant) scenario
94 [~, ctrl_idx] = max(contributions);
95 fprintf('Controlling scenario: M=%.1f, R=%d km (contribution=%.0f%%)\n', ...
96         magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx), contributions(ctrl_idx)
       *100);
97
98 figure;
99 scatter(distances, magnitudes, 300 * contributions, contributions, 'filled');
100 hold on;
101 % Highlight the controlling earthquake
102 scatter(distances(ctrl_idx), magnitudes(ctrl_idx), ...
103         300 * contributions(ctrl_idx), 'k', 'LineWidth', 2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
text(distances(ctrl_idx)+1, magnitudes(ctrl_idx), ...
     sprintf('  Controlling\n  M=%.1f, R=%dkm', magnitudes(ctrl_idx),
    distances(ctrl_idx)), ...
     'FontSize', 10);

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Fractional contribution to hazard';
clim([0, 0.5]);

xlabel('Closest Source-to-Site Distance  (km)', 'FontSize', 12);
ylabel('Moment Magnitude  M_w',                 'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Deaggregation  at  S_a(T=1.0 s) = 0.8g', 'FontSize', 13)
    ;
grid on;
set(gca, 'YTick', [6.0, 6.2, 6.5, 6.8, 7.0, 7.2, 7.3, 7.5, 7.8]);
xlim([0, 60]);  ylim([5.5, 8.5]);

saveas(gcf, 'deaggregation_plot.png');
```

I.7.2 Engenharia sísmica baseada em desempenho

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Code corresponding to example in §72.4.

```
% ========================================================================
% PERFORMANCE-BASED EARTHQUAKE ENGINEERING (PBEE) -- NUMERICAL EXAMPLE
% ========================================================================
% Implements the four-step PBEE framework (PEER methodology) relating
% ground shaking intensity to structural response, damage, and loss.
%
% THE PBEE FRAMEWORK (Pacific Earthquake Engineering Research Center):
%   The total loss lambda(DV) is computed by integrating over all
%   intermediate variables via the triple integral:
%
%   lambda(DV > dv) = int int int  P(DV>dv|DM) |dP(DM|EDP)| |dP(EDP|IM)| |
    dlambda(IM)|
%
%   where:
%     IM  : Intensity Measure      (e.g. spectral acceleration Sa)
%     EDP : Engineering Demand Parameter  (e.g. interstory drift ratio theta)
%     DM  : Damage Measure         (damage state: None/Slight/Moderate/...)
%     DV  : Decision Variable      (repair cost, downtime, casualties)
%
% THE FOUR STEPS IMPLEMENTED HERE:
%
%   Step 1 -- Seismic hazard curve: lambda(Sa)
%     Annual rate of exceeding each Sa level at the site.
%     Synthetic exponential model; in practice from PSHA.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
%
%   Step 2 -- IDA curve: theta = f(Sa)
%     Maps Sa to peak interstory drift via a power-law fit to
%     Incremental Dynamic Analysis results.
%
%   Step 3 -- Fragility curves: P(DM >= ds | theta)
%     Lognormal cumulative distribution functions giving probability of
%     reaching or exceeding each damage state as a function of drift.
%     Parameters: median theta_m (drift at 50% probability) and dispersion
    beta.
%
%   Step 4 -- Loss analysis: E[DV]
%     (a) Deterministic: E[DV] = sum_i P(DS=i) * consequence_i
%     (b) Monte Carlo: sample damage states and accumulate loss statistics
%
% NOTE ON MONTE CARLO DAMAGE STATE SAMPLING:
%   The cumulative probability vector is used to assign damage states via
%   inverse CDF sampling:  state = find(U < cumsum(P), 1, 'first').
%   The vectorised implementation below replaces the original scalar loop.
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ========================================================================
% STEP 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:  lambda(Sa)
% ========================================================================
% Annual exceedance rate as a function of spectral acceleration.
% Model: lambda(Sa) = A * exp(-B * Sa)   (synthetic exponential decay)

A          = 0.5;   % rate at Sa=0  [exceedances/year]
B          = 2.0;   % decay rate    [1/g]
Sa_values  = linspace(0, 1.5, 100);   % Sa range  [g]

lambda_values = A * exp(-B * Sa_values);

% Reference hazard levels
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 yr  approx 4.0e-4 /yr
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 yr approx 2.1e-3 /yr

figure('Name', 'PBEE Step 1: Hazard Curve');
semilogy(Sa_values, lambda_values, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr',  'LabelHorizontalAlignment','left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LabelHorizontalAlignment','left');
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Annual Rate of Exceedance  \lambda');
title('Step 1 -- Seismic Hazard Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 2 -- IDA CURVE:  theta = f(Sa)
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
% ========================================================================
% Interstory drift ratio (EDP) as a function of Sa (IM).
% Power-law model fit to Incremental Dynamic Analysis:
%   theta(Sa) = C1 * Sa^C2

C1 = 0.02;   % scaling constant
C2 = 0.9;    % exponent (< 1: slightly concave, typical of ductile systems)

theta_values = C1 * Sa_values.^C2;

figure('Name', 'PBEE Step 2: IDA Curve');
plot(Sa_values, theta_values, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Interstory Drift Ratio  \theta');
title('Step 2 -- Incremental Dynamic Analysis (IDA) Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 3 -- FRAGILITY CURVES:  P(DS >= ds | theta)
% ========================================================================
% Lognormal fragility functions for four damage states.
% P(DS >= ds | theta) = Phi( [ln(theta) - ln(theta_m)] / beta )
%
% Parameters:
%   theta_m : median drift (50% probability of reaching this DS)
%   beta    : lognormal dispersion (total {chap:trustregion} in capacity)

beta              = 0.4;
fragility_medians = [0.005, 0.010, 0.020, 0.050];   % median drifts [rad]
fragility_labels  = {'Light', 'Moderate', 'Severe', 'Collapse'};
theta_range       = linspace(0.001, 0.1, 200);

figure('Name', 'PBEE Step 3: Fragility Curves');
hold on;
colors = {'b', 'g', 'r', 'k'};
for i = 1 : length(fragility_medians)
    P = normcdf((log(theta_range) - log(fragility_medians(i))) / beta);
    plot(theta_range, P, colors{i}, 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
   fragility_labels{i});
end
xlabel('Interstory Drift Ratio  \theta  (rad)');
ylabel('Probability  P(DS \geq ds | \theta)');
title('Step 3 -- Fragility Curves');
legend('Location', 'east');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 4a -- DETERMINISTIC LOSS ANALYSIS:  E[DV]
% ========================================================================
% Expected consequences given probabilities from fragility analysis
% at a specific hazard level.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
% NOTE: probabilities here are P(DS = ds_i) at a given drift level,
% not P(DS >= ds_i).  They should sum to 1.0 for a complete loss model.

ds_probs     = [0.9, 0.6, 0.1, 0.0];   % P(DS = ds_i) -- NOTE: sums to 1.6,
                                       % suggesting these are P(DS>=ds_i)
                                       % not exclusive probabilities.
                                       % Preserved from original.
repair_costs_det = [0.1,  0.5,   2.0,  10.0];   % repair cost  [$M]
downtime_det     = [2,    14,    60,   300 ];    % downtime     [days]
casualties_det   = [0.0,  0.01,  0.1,    5.0];  % casualties   [%]

E_loss       = sum(ds_probs .* repair_costs_det);
E_downtime   = sum(ds_probs .* downtime_det);
E_casualties = sum(ds_probs .* casualties_det);

fprintf('\n--- Step 4a: Deterministic Loss ---\n');
fprintf('Expected repair cost: $%.2f M\n',    E_loss);
fprintf('Expected downtime:    %.1f days\n',  E_downtime);
fprintf('Expected casualties:  %.3f%%\n',     E_casualties);

% =========================================================================
% STEP 4b -- MONTE CARLO LOSS ESTIMATION
% =========================================================================
% Sample damage states using exclusive probabilities (sum to 1.0) and
% accumulate repair cost, downtime, and casualty statistics.
%
% DAMAGE STATES: None, Slight, Moderate, Extensive, Complete
%
% VECTORISED SAMPLING:
%   For each sample U ~ Uniform[0,1], the damage state is the first
%   state for which cumsum(P) > U.  Equivalent to inverse CDF sampling.

num_samples = 100000;

% Exclusive probabilities (sum to 1.0)
ds_probs_mc  = [0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01];
cum_probs    = cumsum(ds_probs_mc);

% Consequences per damage state
rc_mc  = [0,    0.03,  0.15,  0.50,  2.00];   % repair cost [M$]
dt_mc  = [0,    1,     7,     21,    60  ];    % downtime    [days]
cas_mc = [0,    0.005, 0.02,  0.10,  0.50];   % casualties  [%]

% Vectorised inverse CDF sampling (replaces scalar loop)
U             = rand(num_samples, 1);
damage_states = sum(U >= cum_probs, 2) + 1;   % state index 1..5

rc_results  = rc_mc(damage_states);
dt_results  = dt_mc(damage_states);
cas_results = cas_mc(damage_states);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
175
176 % Statistics
177 E_rc   = mean(rc_results);   SD_rc  = std(rc_results);
178 E_dt   = mean(dt_results);   SD_dt  = std(dt_results);
179 E_cas  = mean(cas_results);  SD_cas = std(cas_results);
180
181 fprintf('\n--- Step 4b: Monte Carlo Loss (%d samples) ---\n', num_samples);
182 fprintf('Repair cost: $%.3f M  (SD: $%.3f M,  CV: %.2f)\n', E_rc,  SD_rc,
       SD_rc/E_rc);
183 fprintf('Downtime:    %.2f days (SD: %.2f days, CV: %.2f)\n', E_dt,  SD_dt,
       SD_dt/E_dt);
184 fprintf('Casualties:  %.4f%%  (SD: %.4f%%,   CV: %.2f)\n',   E_cas, SD_cas,
       SD_cas/E_cas);
185
186 % ========================================================================
187 % STEP 4b -- PLOTS: Loss distributions
188 % ========================================================================
189 figure('Name', 'PBEE Step 4b: Loss Distributions');
190
191 subplot(1,3,1);
192 histogram(rc_results,  'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'b');
193 xlabel('Repair Cost  ($M)');  ylabel('Probability');
194 title('Repair Cost Distribution');
195 xline(E_rc, 'r--', sprintf('E=\\$%.2fM', E_rc), 'LineWidth', 1.5);
196 grid on;
197
198 subplot(1,3,2);
199 histogram(dt_results,  'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'r');
200 xlabel('Downtime  (days)');  ylabel('Probability');
201 title('Downtime Distribution');
202 xline(E_dt, 'b--', sprintf('E=%.1f d', E_dt), 'LineWidth', 1.5);
203 grid on;
204
205 subplot(1,3,3);
206 histogram(cas_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'g');
207 xlabel('Casualties  (%)');  ylabel('Probability');
208 title('Casualty Distribution');
209 xline(E_cas, 'k--', sprintf('E=%.3f%%', E_cas), 'LineWidth', 1.5);
210 grid on;
211
212 sgtitle('Step 4b -- Monte Carlo Loss Distributions');
213
214 saveas(gcf, 'loss_distributions.png');
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

I.8 Parte VIII: Utilidade

Funções diversas de utilidade e ferramentas.

I.8.1 Identicon

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Código que cria identificadores como descrito em chapter H

```
% Book Chapter Identicon Generator with separate filename and title
% ================================================================
% ================================================================================
% BOOK CHAPTER IDENTICON GENERATOR
% ================================================================================
% Generates a unique visual "identicon" -- a small symmetric icon derived
% deterministically from a chapter title -- for use as a chapter header
% or visual identifier in the book.
%
% HOW IT WORKS:
%   1. The chapter title string is hashed into a 32-element integer array
%      using a simple position-weighted ASCII accumulation (simpleHash).
%   2. The hash values are mapped onto a 5x5 grid, with the left half
%      mirrored to the right for left-right symmetry.
%   3. Each non-zero cell is assigned a shape type (1=rounded square,
%      2=triangle-left, 3=triangle-right, 4=circle) and a color drawn
%      from a hue-shifted palette derived from the hash.
%   4. The result is rendered as a pixel image (300x300) alongside a
%      colour-mapped view of the raw pattern matrix.
%
% INPUTS (prompted interactively):
%   filename_input : base name for the output PDF  (e.g. 'C-14')
%   title_input    : chapter title string used to generate the hash
%
% OUTPUT:
%   <filename_input>.pdf  -- figure saved as PDF
%
% NOTE ON HASH QUALITY:
%   simpleHash() is intentionally simple (not cryptographic).  Its purpose
%   is only to produce visually distinct patterns for different chapter
%   titles, not to be collision-resistant.  Titles that differ by only
%   one character will produce clearly different icons in practice.
%
% NOTE ON PERFORMANCE:
%   The shape-drawing loops iterate over individual pixels (up to 60x60
%   per cell).  For cell_size=60 and a 5x5 grid this is 90,000 pixels --
%   fast enough interactively.  Increasing cell_size will slow rendering
%   quadratically.  Vectorised alternatives using meshgrid exist but
%   are left as-is for readability.
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- User inputs
% ------------------------------------------------------------------------
filename_input = input('Enter filename for PDF (e.g., C-14): ', 's');
if isempty(filename_input)
    filename_input = 'C-14';
end

title_input = input('Enter chapter title (e.g., Performance Based Earthquake
   Engineering): ', 's');
if isempty(title_input)
    title_input = 'Performance Based Earthquake Engineering';
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate hash from chapter title
% ------------------------------------------------------------------------
hash_values = simpleHash(title_input);
hash_str    = num2str(hash_values);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Build the 5x5 pattern matrix
% ------------------------------------------------------------------------
% Each cell is assigned an integer 0..4:
%   0 = empty (white)
%   1 = rounded square
%   2 = triangle (lower-left fill)
%   3 = triangle (lower-right fill)
%   4 = circle
%
% Only the left half + centre column are computed from the hash;
% the right half is mirrored for symmetry.

grid_size = 5;
pattern   = zeros(grid_size);

for i = 1 : grid_size
    % Left half (columns 1 .. floor(n/2))
    for j = 1 : floor(grid_size/2)
        hash_idx        = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) +
   1;
        pattern(i,j)    = mod(hash_values(hash_idx), 5);
        pattern(i, grid_size-j+1) = pattern(i,j);   % mirror
    end
    % Centre column (for odd grid size)
    if mod(grid_size, 2) == 1
        j        = ceil(grid_size/2);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
        hash_idx = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Build colour palette from hash
% ------------------------------------------------------------------------
% Base hue derived from first three hash values; four colours at 90-degree
% hue intervals for variety.

base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360) / 360;
colors   = [ hsv2rgb([mod(base_hue,        1), 0.8, 0.9]) ;   % primary
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]) ;   % complementary 1
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.50, 1), 0.8, 0.8]) ;   % complementary 2
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85]) ]; % complementary 3

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Render pixel image
% ------------------------------------------------------------------------
cell_size = 60;                                  % pixels per grid cell
img_size  = grid_size * cell_size;
identicon = ones(img_size, img_size, 3);         % white RGB background

for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size

        value = pattern(i,j);
        if value == 0, continue; end   % empty cell

        % Pixel bounding box for this cell (with padding)
        padding   = ceil(cell_size * 0.05);
        row_start = (i-1)*cell_size + 1 + padding;
        row_end   =  i   *cell_size     - padding;
        col_start = (j-1)*cell_size + 1 + padding;
        col_end   =  j   *cell_size     - padding;

        % Colour selection based on position and value
        color_idx = mod(i*j + value, 4) + 1;
        color     = colors(color_idx, :);

        switch value

            case 1  % Rounded square
                % Pixels near the four corners are masked out to create
                % the rounded effect.
                corner_r = ceil(cell_size * 0.15);
                for r = row_start : row_end
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

```
                    for c = col_start : col_end
                        tl = (r-row_start)^2 + (c-col_start)^2;
                        tr = (r-row_start)^2 + (c-col_end  )^2;
                        bl = (r-row_end  )^2 + (c-col_start)^2;
                        br = (r-row_end  )^2 + (c-col_end  )^2;
                        in_corner = ...
                            (r < row_start+corner_r && c < col_start+corner_r
    && tl > corner_r^2) || ...
                            (r < row_start+corner_r && c > col_end  -corner_r
    && tr > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c < col_start+corner_r
    && bl > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c > col_end  -corner_r
    && br > corner_r^2);
                        if ~in_corner
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 2  % Triangle: lower-left fill (hypotenuse from top-left to
    bottom-right)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        if row_start+r <= img_size && col_start+c <= img_size
                            identicon(row_start+r, col_start+c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 3  % Triangle: lower-right fill (hypotenuse from top-right to
     bottom-left)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        cc = col_end - c;
                        if row_start+r <= img_size && cc > 0 && cc <= img_size
                            identicon(row_start+r, cc, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 4  % Circle: filled disk within the padded cell
                cr     = (row_start + row_end) / 2;
                cc_ctr = (col_start + col_end) / 2;
                radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

```
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        if sqrt((r-cr)^2 + (c-cc_ctr)^2) <= radius
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

        end   % switch
    end
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Compose figure
% ------------------------------------------------------------------------
fig = figure('Position', [100, 100, 800, 400], 'Color', 'none');

% Left panel: rendered identicon with grid lines
subplot('Position', [0.05, 0.12, 0.45, 0.75]);
imshow(identicon);
hold on;
for k = 1 : grid_size-1
    line([0, img_size], [k*cell_size, k*cell_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], '
   LineWidth', 1);
    line([k*cell_size, k*cell_size], [0, img_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], '
   LineWidth', 1);
end
hold off;

% Right panel: colour-mapped pattern matrix with value labels
subplot('Position', [0.52, 0.12, 0.45, 0.75]);
imagesc(pattern);
colormap(hsv(5));
axis square;  grid on;
set(gca, 'Color', 'none');
for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size
        text(j, i, num2str(pattern(i,j)), ...
             'HorizontalAlignment', 'center', ...
             'Color', 'w', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 14, ...
             'EdgeColor', 'k', 'Margin', 1);
    end
end

% Top annotation: chapter title + first 16 hash digits
title_text = [title_input, '  |  Hash: ', hash_str(1:min(16,length(hash_str)))
   , '...'];
annotation('textbox', [0.1, 0.91, 0.8, 0.07], ...
           'String', title_text, 'EdgeColor', 'none', ...
           'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 14, ...
           'FontWeight', 'bold', 'Color', [0.2, 0.2, 0.2]);
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
230
231 % ------------------------------------------------------------------------
232 % Section 7 -- Export
233 % ------------------------------------------------------------------------
234 output_filename = [filename_input, '.pdf'];
235 print(fig, '-dpdf', output_filename);
236 fprintf('Saved to: %s\n', output_filename);
237
238
239 % ========================================================================
240 % LOCAL FUNCTION: simpleHash
241 % ========================================================================
242 % Produces a 32-element integer array from a string by accumulating
243 % position-weighted ASCII values modulo 256.
244 %
245 % This is NOT a cryptographic hash -- it is designed only to produce
246 % visually distinct patterns for different chapter titles.
247 %
248 % For each character str(i) and each output slot j:
249 %   hash(position_factor) += char_code(i) * i   (mod 256)
250 %
251 % where position_factor = mod(i*j, 32) + 1 distributes contributions
252 % across all 32 output slots.
253
254 function hash_values = simpleHash(str)
255
256 hash_values = zeros(1, 32);
257
258 for i = 1 : length(str)
259     char_code = double(str(i));
260     for j = 1 : min(32, length(str))
261         slot             = mod(i*j, 32) + 1;
262         hash_values(slot) = mod(hash_values(slot) + char_code * i, 256);
263     end
264 end
265
266 end   % simpleHash
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice J

Exemplos do MathCad

As páginas a seguir contêm trabalhos de casa trabalhados desde minha introdução ao curso Análise estrutural (3525). Muitos desses problemas também são apresentados como exemplos trabalhados no livro; no entanto, não foi possível criar hiperlinks entre as soluções do livro didático e as correspondentes soluções que se seguem.

Essas soluções, embora não necessariamente perfeitas ou ótimas, foram preparadas pelo Sr. Christopher Segura.

Todos os problemas foram resolvidos usando Mathcad, que eu esperava que os alunos usassem para todas as tarefas, pois é fácil aprender e fácil começar.

Mathcad é usado aqui como uma ajuda computacional ao invés de um substituto para o raciocínio analítico. Equações são inseridas em notação matemática natural e avaliadas como escritas; As unidades são tratadas de forma explícita e consistente; e mudanças se propagam automaticamente durante toda a planilha, permitindo suposições, cálculos e resultados coexistirem em um único documento. Ao mesmo tempo, sua limitada abstração simbólica e controle algorítmico significam que ele deve complementar - não substituir - derivações manuais e compreensão conceitual. Usado criteriosamente, pode esclarecer o raciocínio estrutural; usado acríticamente, pode obscurecê-lo. Ironicamente, as submissões de Mathcad também facilitaram a identificação de má conduta acadêmica, pois soluções copiadas tendem a reproduzir estruturas idênticas, notação e erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Structural Analysis Example Problems

Victor E. Saouma

Prepared by Christopher Segura
Summer 2011

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

List of Examples

2.1 Stress Vectors
2.2 Stress Vectors 2
2.3 Principal Stresses
2.4 Stress Tensor Operations
2.5 Stress Transformation
2.6 Stress Transformation 2
2.7 Strain Invariants & Principal Strains
2.8 Equilibrium Equation
2.9 Stress-Strain
2.10 Stress-Strain 2
3.1 Displacement by Double Integration
4.1 Live Load Reduction
4.2 Wind Load
4.3 Earthquake Load on a Frame
4.4 Earthquake Load on a Tall Building
4.5 Hysdrostatic Load
4.6 Thermal Expansion/Stress
5.1 Statically Indeterminate Cable Structure
5.2 Simply Supported Beam
5.3 Parabolic Load
5.4 Three Span Beam
5.5 Three Hinged Gable Frame
5.6 Inclined Supports
7.1 Truss, Method of Joints
7.2 3D Truss
7.3 Truss I, Matrix Method
7.4 Truss II, Matrix Method
7.5 Truss, Method of Sections
8.1 Funicular Cable Structure
8.2 Design of Suspension Bridge
10.1 Simple Shear and Moment Diagram
10.2 Frame Shear and Moment Diagram
10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load
10.4 Shear and Moment Diagrams for Frame
10.5 Shear and Moment Diagrams for Inclined Frame
10.6 3D Frame
11.1 Three Hinged Arch, Point Loads
11.2 Semi-Circular Arch
11.3 Statically Indeterminate Arch
11.4 Semi-circular Box Girder
11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load
11.6 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Uniform Load
12.1 Moment Area, Cantilevered Beam
12.2 Moment Area, Simply Supported Beam
12.3 Maximum Deflection
12.4 Frame Deflection
12.5 Frame Subjected to Temperature Loading
12.6 Conjugate Beam
12.7 Conjugate Beam 2
13.1 Deflection of a Cantilever Beam

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection
13.3 Deflection of a Frame
13.4 Rotation of a Frame

13.5 Truss Deflection
13.6 Torsional and Flexural Deformation
13.7 Flexural and Shear Deformation in a Beam
13.8 Thermal Effects in a Beam
13.9 Deflection of a Truss
13.10 Thermal Deflection of a Truss: I
13.11 Thermal Deflection of a Truss: II
13.12 Truss with Initial Camber
13.13 Prestressed Concrete Beam with Continuously Variable I
14.1 Steel Building Frame Analysis
14.2 Analysis of Irregular Building Frame
14.3 Redundant Truss Analysis
14.4 Truss with Two Redundants
14.5 Analysis of Nonprismatic Members
14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Beams
14.7 Rectangular Frame, External Load
14.8 Frame with Temperature and Support Displacements
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change
15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads
16.1 Propped Cantilever Beam
16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection
16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection
16.4 Frames, Slope Deflection
16.5 Box Culvert, Slope Deflection
16.6 Continuous Beam
16.7 Continuous Beam, Simplified Method
16.8 Continuous Beam, Inintial Settlement
16.9 Frame
16.10 Frame with Side Load
17.1 Beam
17.2 Frame

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.1 Stress Vectors

For the following stress tensor at point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} := \sigma = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the traction (or stress vector) **t** passing through P and parallel to the plane ABC where A(4,0,0), B(0,2,0) and C(0,0,6)

Solution:

The vector normal to the plane can be found by taking the cross products of vectors AB and AC

$$\mathbf{N} = AB \times AC = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12\,e_1 + 24\,e_2 + 8\,e_3$$

The unit normal of N is given by

$$\mathbf{n} = \frac{3}{7}e_1 + \frac{6}{7}e_2 + \frac{2}{7}e_3$$

$$n := \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Hence the stress vector traction will be

$$t := n \cdot \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\mathbf{t} = -\frac{9}{7}e_1 + \frac{5}{7}e_2 + \frac{10}{7}e_3$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.2 Stress Vectors 2

The state of stress through a continuum is given with respect to the cartesian axes by

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} 3\,x_1\,x_2 & 5\,(x_2)^2 & 0 \\ 5\,(x_2)^2 & 0 & 2\,x_3 \\ 0 & 2\,x_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \text{MPa}$$

Determine the stress vector at $P(1, 1, \sqrt{3})$ of the plane that is normal to the tangent to the cylindrical surface $(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4$ at P

Solution:

Vector Equation

$$v(x) := (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4$$

Gradient

$$\text{Vect1}(x) := \nabla_x v(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

For $x_2 := 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 := \sqrt{4 - (x_2)^2} = 1.732$

Normalized Vector

$$n := \frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x) \cdot n = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 1.732 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.3 Principal Stresses

The stress tensor is given at a point by point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine the principal stress values and the corresponding directions

Solution:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Simplifying the determinant

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ simplify } \rightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0$$

thus the roots are

$$\lambda := -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Note that those are the three eigenvalues of the stress vector. If we let the x_1 axis be the one corresponding to the direction of λ_2 and n_i^2 be the direction cosines of this axis, then we have

$$(3-\lambda_2)n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \rightarrow 5\cdot n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$$

$$n_1^2 + (0-\lambda_2)\cdot n_2^2 + 2n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0 \qquad n_1^2 = 0 \qquad n_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + (0-\lambda_2)n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0$$

Similarly, if we let x_2 be the one corresponding to the direction of λ_1 and n_i^1 be the direction cosines of this axis,

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\left(3-\lambda_1\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow 2\cdot n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_2^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_3^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-n_3^{\,2}=0$$

Finally, if we let x_3 be the one corresponding to the direction of λ_3 and n_i^3 be the direction cosines of this axis,

$$\left(3-\lambda_3\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow -n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-4\cdot n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,3}=-\frac{2}{\sqrt{6}} \quad n_2^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}} \quad n_3^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-4\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_{pd}:=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.4 Stress Tensor Operations

For the following stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Determine directly the three Invariants I_σ, II_σ and III_σ
b) Determine the principal stresses and principal stress directions
c) Show that the transformation tensor of direction cosines transforms the original stress tensor into the diaganol axes stress tensor
d) Recompute the three invariants from the principal stresses
e) Split the stress tensor into its spherical and deviator parts
f) Show that the first invariant of the deviator is zero

Solution:

a) $I_\sigma := \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} = 20$

$II_\sigma := \sigma_{1,1}\cdot\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\cdot\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\cdot\sigma_{1,1} - \sigma_{1,2}\cdot\sigma_{2,1} = 123$

$III_\sigma := |\sigma| = 216$

b) $\sigma_p := \text{eigenvals}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$n_p := \text{eigenvecs}(\sigma) = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $n_p^{\,T}\cdot\sigma\cdot n_p = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

d) $I_{\sigma pd} := \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} + \sigma_{p_3} = 20$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$II_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2} + \sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} + \sigma_{p_3}\cdot\sigma_{p_1} = 123$$

$$III_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} = 216$$

e) $\sigma_{mean} := \frac{I_{\sigma pd}}{3} = 6.667$

$$\sigma_{sperical} := \begin{pmatrix} \sigma_{mean} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{mean} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mean} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 6.667 \end{pmatrix}$$

f) $$\sigma_{deviator} := \sigma - \sigma_{sperical} = \begin{pmatrix} -0.667 & -3 & 0 \\ -3 & -0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

2.5 Stress Transformation

Show that the transformation tensor of direction cosines for the stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

transforms the original stress tensor into the diaganol principal axes stress tensor

Solution:

$$n_{pd} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} := n_{pd}\cdot\sigma\cdot n_{pd}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.6 Stress Transformation 2

The octahedral plane is the plane which makes equal angles with the principal stress directions. Show that the shear stress on this plane, the so-called octahedral shear stress, is given by

$$\sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2}$$

Solution:

$$v := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$n := \left(\frac{v}{|v|}\right)^T = (0.577 \quad 0.577 \quad 0.577)$$

$$\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}$$

$$t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \rightarrow (0.577\cdot\sigma_I \quad 0.577\cdot\sigma_{II} \quad 0.577\cdot\sigma_{III})$$

$$tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T \rightarrow 0.333\cdot\sigma_I + 0.333\cdot\sigma_{II} + 0.333\cdot\sigma_{III}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \sqrt{t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T - tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{0.222\cdot\sigma_I^2 - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{II} - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{II}^2 - 0.222\cdot\sigma_{II}\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{III}^2}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) - \sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) = 0$$

2.7 Strain Invariants & Principal Strains

Determine the planes of principal strains for the following strain tensor

$$E := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

The strain invariants are given by

$$I_E = E_{ii} = 2$$

$$II_E = \frac{1}{2}\cdot\left(E_{ij}\cdot E_{ij} - E_{ii}\cdot E_{jj}\right) = -1 + 3 = 2$$

$$III_E = \left|E_{ij}\right| = -3$$

The principal strains by

$$E_{ij} - \lambda\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$E_1 = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.3$$

$$E_2 = \lambda_2 = 1$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$E_3 = \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1.3$$

The eigenvectors for $E_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ give the principal directions n^1

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1}$$

$$n_{3,1} = 0$$

$$n^1 \cdot n^1 = 1$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{13}+13}{12}+1\right)\cdot\left(n_{2,1}\right)^2 = 1$$

$$n_{2,1} = 0.6$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot 0.6 = 0.8$$

$$n^1 = (0.8 \quad 0.6 \quad 0)$$

For the second eigenvector λ_2=1

$$\begin{pmatrix} 1-1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,2} \\ n_{2,2} \\ n_{3,2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -\left(n_{2,2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -(n_{2,2}) + \sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^2 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Finally, the third eigenvector can be obtained by the same manner, but more easily from

$$n^3 = n^1 \times n^2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.6e_1 - 0.8e_2$$

Therefore

$$a_i^j = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\cdot E\cdot a^T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3 \end{pmatrix}$$

2.8 Equilibrium Equations

In the absence of body forces, does the following stress distribution

$$T(x,\nu) = \begin{bmatrix} (x_2)^2 + \nu\left[(x_1)^2 - (x_2)^2\right] & -2\cdot\nu\cdot x_1\cdot x_2 & 0 \\ -2\nu\cdot x_1\cdot x_2 & (x_1)^2 + \nu\left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \nu\left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

where v is a constant, satisfy equilibrium?

Solution:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{1j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{13} = 2\cdot\nu\cdot x_1 - 2\cdot\nu\cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{2j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{23} = -2\cdot\nu\cdot x_2 + 2\cdot\nu\cdot x_2 = 0$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{3j} = \frac{\partial}{\partial x_1} T_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} T_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{33} = 0$$

Therefore, equilibrium is satisfied.

2.9 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Lagrangian strain tensor is given by

$$E := \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

and the material is steel with $\lambda := 119.2\text{GPa}$ and $\mu := 79.2\text{GPa}$

Solution:

$$C := \begin{pmatrix} \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} \end{pmatrix}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\gamma := \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,2} \\ E_{3,3} \\ E_{1,2} \\ E_{1,3} \\ E_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} \\ 3 \times 10^{-5} \\ 5 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$\sigma := C \cdot \gamma = \begin{pmatrix} 0.01667 \\ 0.01826 \\ 0.01667 \\ 0.00792 \\ 0.00317 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{GPa}$$

2.10 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Cauchy stress tensor is given by

$$\sigma := \begin{pmatrix} 100 & 42 & 6 \\ 42 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$$

with $E := 207\text{GPa}$, $\mu := 79.2\text{GPa}$, and $\nu := 0.3$

Solution:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{207 \cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207 \cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207 \cdot GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} \end{pmatrix}$$

$$s := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{2,2} \\ \sigma_{3,3} \\ \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 15 \\ 42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

$$\gamma := S \cdot s = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} \\ -1.763 \times 10^{-4} \\ -6.957 \times 10^{-5} \\ 5.303 \times 10^{-4} \\ 7.576 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \frac{\gamma_4}{2} & \frac{\gamma_5}{2} \\ \frac{\gamma_4}{2} & \gamma_2 & \frac{\gamma_6}{2} \\ \frac{\gamma_5}{2} & \frac{\gamma_6}{2} & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} & 2.652 \times 10^{-4} & 3.788 \times 10^{-5} \\ 2.652 \times 10^{-4} & -1.763 \times 10^{-4} & 0 \times 10^{0} \\ 3.788 \times 10^{-5} & 0 \times 10^{0} & -6.957 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3.1 Displacement by Double Integration

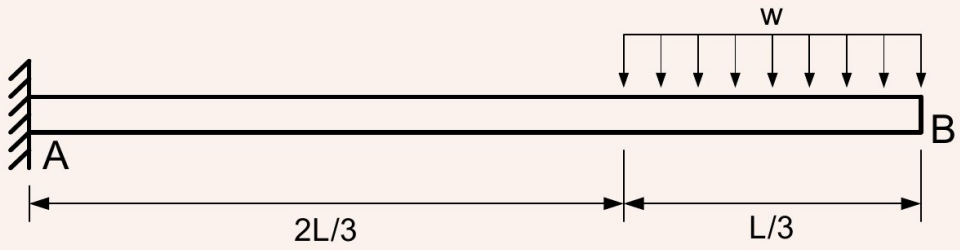
Determine the deflection at B for the following cantilevered beam.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

At $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x + C_1$$

However we have at x=0, dy/dx=0, C_1=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 + C_2$$

Again we have at x=0, y=0, C_2=0

At $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2 - w\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)\cdot\left(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2}\right)$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x - \frac{w}{6}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_3$$

Applying the boundary condition at $x = \frac{2L}{3}$, we must have $\frac{dy}{dx}$ equal to the value coming frmo the left C_3=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 - \frac{w}{24}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

Again following the same argument as above, C_4=0

Substituting for x=L we obtain

$$y = \frac{163}{1944}\cdot\frac{wL^4}{E\cdot I}$$

4.1 Live Load Reduction

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

A four storey office building has interior columns spaced 30ft apart in the two directions. If the flat roof loading is 50 lb/ft^2, determine the reduced live load supported by a typical interior column located on the ground level

Solution:

$L_0 := 50psf$

$A_T := 30ft \cdot 30ft = 900 \cdot ft^2$

$K_{LL} := 4$

$L_{floor}(L_0, A_T, K_{LL}) := L_0 \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} \cdot A_T}}\right) \cdot psf$

$L_{floor} := L_{floor}\left(\frac{L_0}{psf}, \frac{A_T}{ft^2}, K_{LL}\right) = 25 \cdot psf$

$Reduction := \frac{L_{floor}}{L_0} = 50 \cdot \%$

$L_{roof} := 0.6 \cdot L_0 = 30 \cdot psf$

$F_1 := \left(3 \cdot L_{floor} \cdot A_T + L_{roof} \cdot A_T\right) = 94.5 \cdot kip$

Note that without reduction the total load woul dhave been

$F_2 := 4 \cdot L_0 \cdot A_T = 180 \cdot kip$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

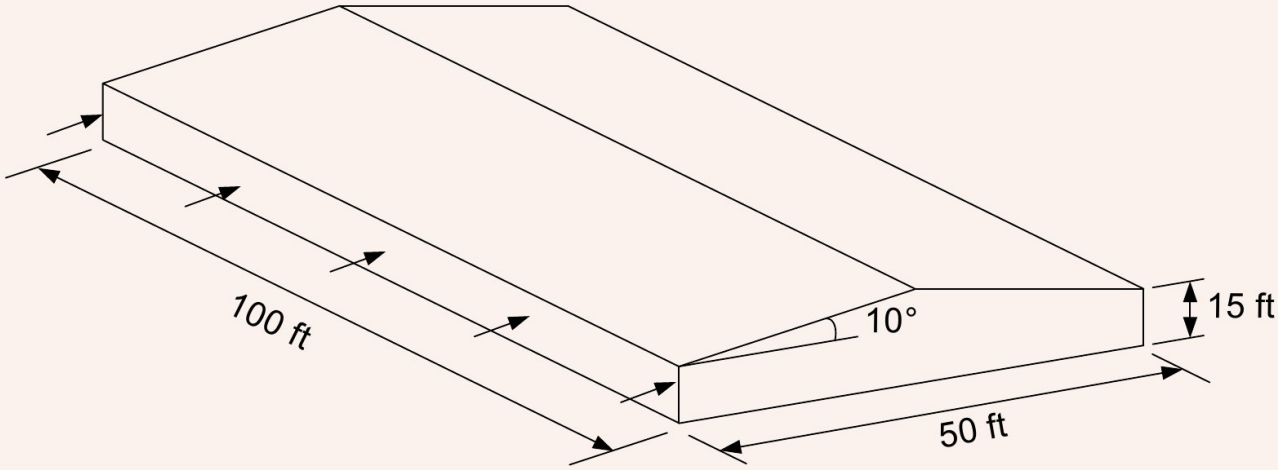
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.2 Wind Load

Wind blows on the side of the fully enclosed agricultural building located on open flat terrain in Oklahoma. Determine the external pressure acting on the roof. Also, what is the internal pressure in the building which acts on the roof? Use linear interpolation to determine q_h and C_p.



Solution:

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, V, I\right) := 0.00256 \cdot K_z \cdot K_{Zt} \cdot K_d \cdot V^2 \cdot I \cdot psf$$

$K_{Zt} := 1$

$K_d := 1$

$V := 90mph$

$I := 0.87$

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) \rightarrow 18.04 \cdot K_z \cdot psf$$

$K_{z15} := 0.85$

$$q_{z15} := q_z\left(K_{z15}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 15.334 \cdot psf$$

$K_{z20} := 0.9$

$$q_{z20} := q_z\left(K_{z20}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 16.236 \cdot psf$$

$$h := 15ft + \frac{1}{2} \cdot 25ft \cdot \tan(10deg) = 17.204 \cdot ft$$

$$\frac{q_h - q_{z15}}{h - 15ft} = \frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$q_h := \left(\frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}\right)\cdot(h - 15ft) + q_{z15}$$

$$q_h = 15.732\cdot psf$$

External pressure on windward side of roof

$$p(q_h, G, C_p) := q_h\cdot G\cdot C_p\cdot psf$$

$$G := 0.85$$

$$L := 50ft$$

$$\frac{h}{L} = 0.344$$

$$\frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.9 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.9 - \frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.775$$

$$p_{Windward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -10.367\cdot psf$$

External pressure on leeward side of roof

$$\frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.5 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.5 - \frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.375$$

$$p_{Leeward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -5.018\cdot psf$$

Internal pressure

$$p_{int}(q_h, G, C_{pi}) := -q_h\cdot G\cdot C_{pi}$$

$$C_{pi1} := 0.18$$

$$C_{pi2} := -0.18$$

$$p_{int1} := p_{int}(q_h, G, C_{pi1}) = -2.407\cdot psf$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

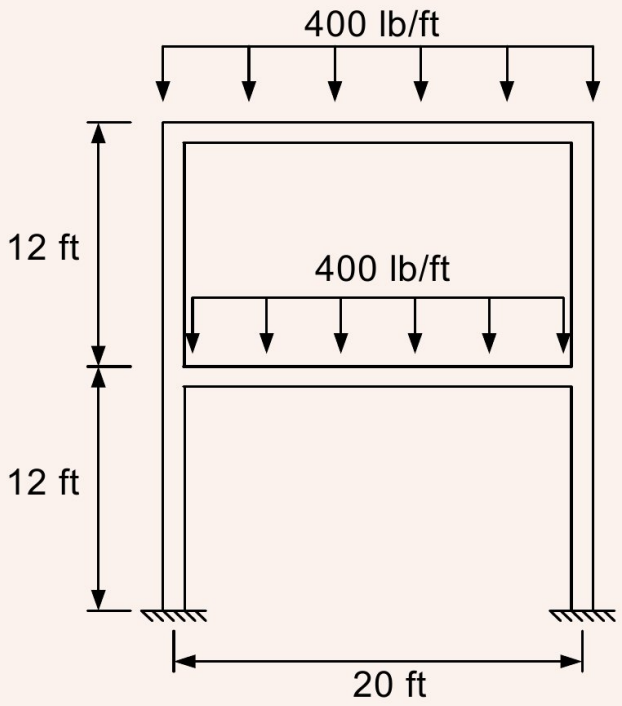
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$p_{int2} := p_{int}(q_h, G, C_{pi2}) = 2.407 \cdot psf$

4.3 Earthquake Load on a Frame

Determine the approximate earthquake forces for the ductile hospital frame structure shown below. The dead load for each floor is $DL := 200 \frac{lbf}{ft}$ and the live load is $LL := 400 \frac{lbf}{ft}$. The structure is built on soft clay. Use DL+0.5LL as the weight of each floor. The building is in seismic zone 3.



Solution:

1. The fundamental period of vibration is

$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot sec$

$C_t := 0.03$

$h := 24ft$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{ft}\right) = 0.325\ s$

2. The C coefficient is

$C(S,T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$S := 2.0$

$C := C\left(S, \frac{T}{sec}\right) = 5.286 > 2.75$

Use $C := 2.75$

3. The other coefficients are $Z := 0.3,\ I := 1.25,\ R_W := 12$

4. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075 \quad \text{OK!}$$

5. The total vertical load is

$L := 20ft$ frame width

$W := 2 \cdot (DL + 0.5 \cdot LL) \cdot L = 16000 \cdot lbf$

6. The total seismic base shear is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 1375 \cdot lbf$$

7. Since T < 0.7sec, there is no whiplash
8. The toal load on each floor is given by

$h_1 := 12ft$

$h_2 := 24ft$

$$F_2 := \frac{V \cdot h_2}{h_1 + h_2} = 916.7 \cdot lbf$$

$$F_1 := \frac{V \cdot h_1}{h_1 + h_2} = 458.3 \cdot lbf$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.4 Earthquake Load on a Tall Building

Determine the approximate critical lateral loading for a 25 storey, ductile, rigid space frame concrete structure in the short direction. The rigid frames are spaced 25 ft apart in the cross section and 20 ft in the longitudinal direction. The plan dimension of the building is 175x100 ft, and the structure is 25(12ft)=300 ft high. This office building is located in an urban environment with a wind velocity of $V := 70\text{mph}$ and in seismic zone 4. For this investigation, an average building total dead load of $DL := 192\text{psf}$ is used. Soil conditions are unknown.

Solution:

1. The total building weight is

$L := 100\text{ft}$

$B := 175\text{ft}$

$W := DL \cdot L \cdot B \cdot 25 = 84000 \cdot \text{kip}$

2. The fundamental period of vibration for a rigid frame is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot \text{sec}$$

$C_t := 0.03$

$h := 25 \cdot 12\text{ft} = 300 \cdot \text{ft}$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{\text{ft}}\right) = 2.16\,\text{s}$ > 0.7s OK!

3. The C coefficient is

$$C(S, T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

$S := 1.5$

$C := C\left(S, \frac{T}{\text{sec}}\right) = 1.12$ < 2.75

4. The other coefficients are $Z := 0.4$, $I := 1$, $R_W := 12$

5. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 > 0.075 \text{ OK!}$$

6. The total seismic base shear along the critical short direction is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 3139 \cdot \text{kip}$$

7. Since T > 0.7sec, the whiplash effect must be considered

$$F_t := 0.07 \cdot \frac{T}{\text{sec}} \cdot V = 475 \cdot \text{kip}$$

Hence the total triangular load is

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$F_{tot} := V - F_t = 2664 \cdot kip$

8. Let us check if wind load governs. From table xx we conservatively assume a uniform wind pressure of 29 psf resulting in a total lateral force of

$p := 29psf$

$P_w := p \cdot h \cdot B = 1522.5 \cdot kip < 3108\ kip$

The magnitude of the total seismic load is clearly larger than the totoal wind force

4.5 Hydrostatic Load

The basement of a building is 12 ft below grade. Ground water is located 9 ft below grade. What thickness concrete slab is required to exactly balance the hydrostatic uplift?

Solution:

The hydrostatic pressure must be countered by the pressure caused by the weight of the concrete. Since p=γh we equate the two pressures and solve for h, the height of the concrete slab.

$h := 12ft$

$h_{water} := 9ft$

$d := h - h_{water} = 3 \cdot ft$

$\gamma_{water} := 62.4 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{concrete} := 150 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{water} \cdot d = \gamma_{concrete} \cdot h$

$h := \frac{\gamma_{water} \cdot d}{\gamma_{concrete}} = 15 \cdot in$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.6 Thermal Expansion/Stress

A low-rise building is enclosed along one side by a 100 ft-long clay masonry ($\alpha := 3.6\cdot10^{-6}\frac{in}{in\cdot\Delta°F}$, $E := 2400000psi$)bearing wall.

The structure was built at a temperature of $T := 60\Delta°F$ and is located in the northern part of the United States where the temperature range is between $T_{low} := -20\cdot\Delta°F$ and $T_{high} := 120\cdot\Delta°F$.

Solution:

1. Assume that the wall can move freely with no restraint from cross-walls and foundations. The wall expansion and contraction (summer and winter) are given by

$$\Delta L = \alpha\cdot\Delta T\cdot L$$

$$\Delta L_{Summer} := \alpha\cdot\left(T_{high} - T\right)\cdot 100ft = 0.26\cdot in$$

$$\Delta L_{Winter} := \alpha\cdot\left(T_{low} - T\right)\cdot 100ft = -0.35\cdot in$$

2. We now assume (conservatively) that the free movement cannot occur (ΔL=0) hence the resulting stress would be equal to

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta L}{L} = E\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T\cdot L}{L} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma_{Summer} := E\cdot\alpha\cdot\left(T_{high} - T\right) = 518\cdot psi$$

$$\sigma_{Winter} := E\cdot\alpha\cdot\left(T_{low} - T\right) = -691\cdot psi$$

Note the tensile stress being beyond the masonry capacity. Cracking will occur.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

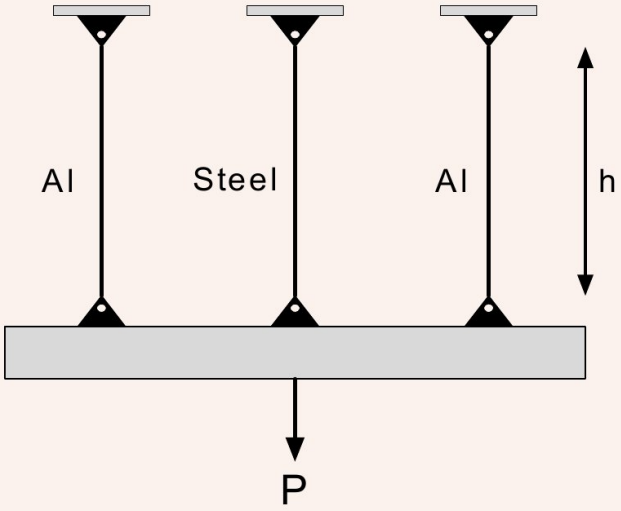
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.1 Statically Indeterminate Cable Structures

A rigid plate is supported by two aluminum cables and a steel one. Determine the force in each cable.



If the rigid plate supports a load P, determine the stress in each of the three cables.

Solution:

1. We have three unknowns and only two independent equations of equilibrium. Hence the problem is statically indeterminate to the first degree.

$$\sum M_z = 0 \quad P_{Al}^{left} = P_{Al}^{right}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2P_{Al} + P_{St} = P$$

Thus we effectively have two unknowns and one equation

2. We need to have a third equation to solve for the three unknowns. This will be derived from the compatability of the displacements in all three cables i.e. all three displacements must be equal:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

displacements in all three cables first all three displacements must be equal.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Combine to obtain

$$\Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\frac{P_{Al}\cdot L}{E_{Al}\cdot A_{Al}} = \frac{P_{St}\cdot L}{E_{St}\cdot A_{St}} \quad \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

or $-(EA)_{St}\cdot P_{Al} + (EA)_{Al}\cdot P_{St} = 0$

3. Solution of this system of two equations with two unknowns yield:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot(EA)_{Al} + (EA)_{St}} \cdot \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

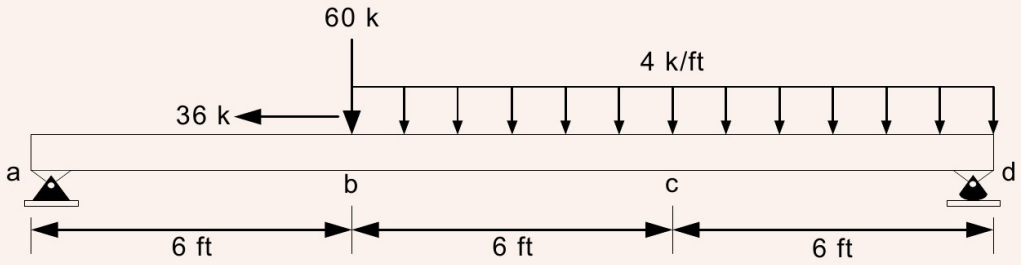
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.2 Simply Supported Beam

Determine the reactions of the simply supported beam shown below.



The beam has 3 reactions. We have 3 equations of static equilibrium. Hence it is statically determinate.

Solution:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0 \quad R_{ax} - 36\text{kip} = 0$

$\sum F_y = 0 \quad R_{ay} + R_{dy} - 60\text{kip} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} = 0$

$\sum M_z^{\,c} = 0 \quad 12\cdot R_{ay} - 6\cdot R_{dy} - 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} = 0$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 108\text{kip} \\ 360\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 56\text{kip} \\ 52\text{kip} \end{pmatrix}$$

Alternatively we could have used another set of equations:

$\sum M_z^{\,a} = 0 \quad 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} - R_{dy}\cdot 18\text{ft} = 0 \quad R_{dy} = 52\text{kip}$

$\sum M_z^{\,d} = 0 \quad R_{ay}\cdot 18\text{ft} - 60\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} = 0 \quad R_{ay} = 56\text{kip}$

Check:

$\sum F_y = 0 \quad 56\text{kip} + 52\text{kip} - 60\text{kip} - 48\text{kip} = -0\cdot\text{kip}$

5.3 Parabolic Load

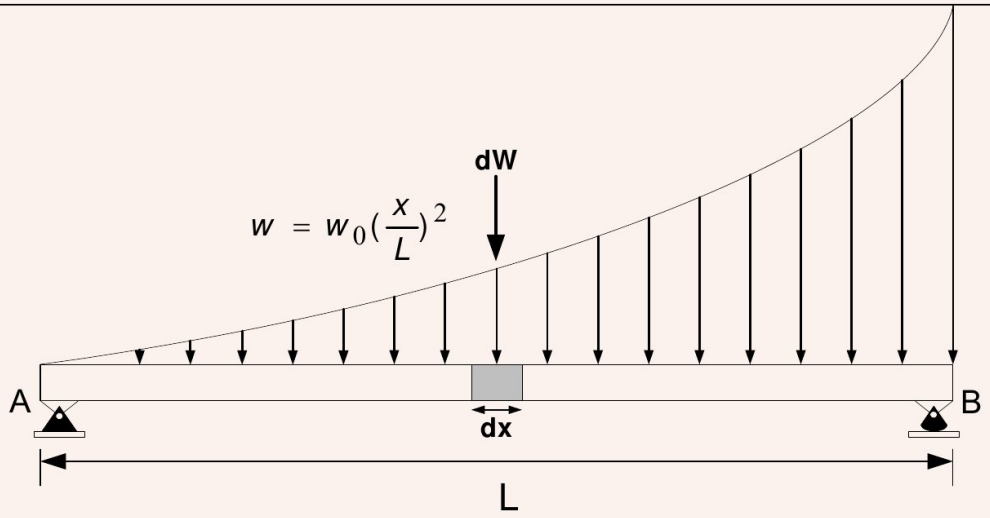
Determine the reactions of the simply supported beam of length L subjected to a parabolic load $w = w_0\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Since there are no axial forces, there are two unknowns and two equations of equilibrium. We have two equations of equilibrium ($\sum F_y$ and $\sum M$), we judiciously start with the second one, as it would directly give us the reaction at B. Considering an infinitesimal element of length dx, weight dW, an moment dM:

$$\sum M_z{}^A = 0 \qquad \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \times x - R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{L} \cdot w_0 \cdot \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L$$

With R_B determined, we solve for R_A from

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$R_A = \frac{w_0}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L = \frac{1}{12} \cdot w_0 \cdot L$$

5.4 Three Span Beam

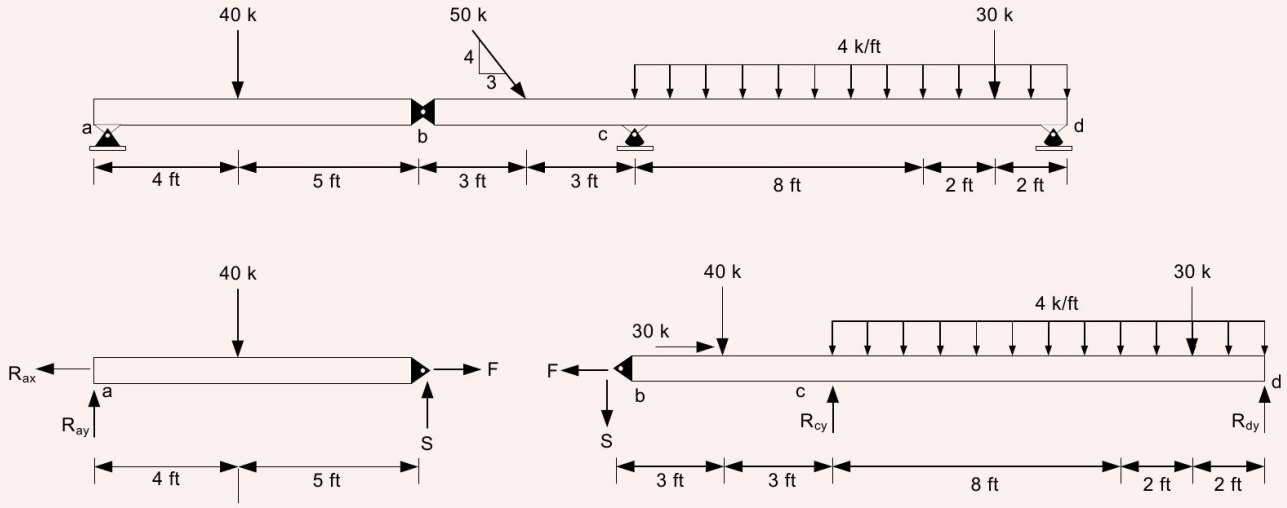
Determine the reactions of the following three span beam

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

We have 4 unknowns (R_{ax},R_{ay},R_{cy}, and R_{dy}), three equations of equilibrium and one equation of condition ($\sum M_b = 0$), thus the structure is statically determinate. Though there are many approaches to solve for those four unknowns (all of them correct), a few are simpler to pursue. In this case, it is easiest to "break" the structure into substructures and examine the free body diagram of each one of them separately.

1. Isolating ab:

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad 9\text{ft}\cdot R_{ay} - 40\text{kip}\cdot 5\text{ft} = 0 \qquad R_{ay} := \frac{40\text{kip}\cdot 5\text{ft}}{9\text{ft}} = 22.2\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 4\text{ft} - S\cdot 9\text{ft} = 0 \qquad S := \frac{40\text{kip}\cdot 4\text{ft}}{9\text{ft}} = 17.8\cdot\text{kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} := 30\text{kip}$$

2. Isolating bd:

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \qquad -S\cdot 18\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 2\text{ft} + R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{cy} := \frac{S\cdot 18\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 2\text{ft}}{12\text{ft}} = 105.7\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \qquad -S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft} - R_{dy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{dy} := \frac{-S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{12\text{ft}} = 30.1\cdot\text{kip}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Check

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 40\text{kip} + R_{cy} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip} + R_{dy} = -0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

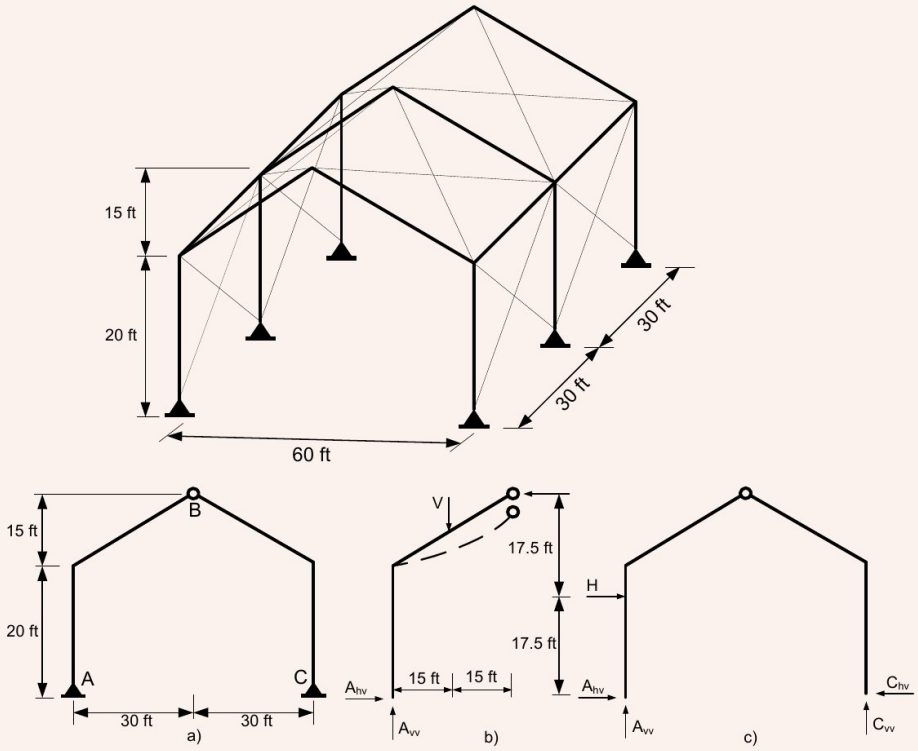
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.5 Three Hinged Gable Frame

The three-hinged gable frames are spaced at 30 ft on center. Determine the reactions components on the frame due to: 1) Roof dead load of 20 psf of roof area; 2) Snow load of 30 psf of horizontal projection; 3) Wind load of 15 psf of vertical projection. Determine the critical design values for the horizontal and vertical reactions.



Solution:

1. Due to smmetry, there is no vertical force transmitted by the hinge for snow and dead load, and thus we can consider only the left (or right) side of the frame.
2. Point equivalent loads:
   a) Roof dead load per one side of frame is

$$DL := 20psf \cdot 30ft \cdot \sqrt{(30ft)^2 + (15ft)^2} = 20.12 \cdot kip$$

   b) Snow load per one side of frame is

$$SL := 30psf \cdot 30ft \cdot 30ft = 27 \cdot kip$$

   c) Wind load per per frame (ignoring the suction) is

$$WL := 15psf \cdot 30ft \cdot 35ft = 15.75 \cdot kip$$

3. There are 4 reactions, 3 equations of equilibrium and one equation of condition; therefore, statically determinate. Alternatively, by symmetry there is no shear at the hinge, and we would have for the substructure two reactions at the support and one (horizontal) at the hinge.
4. The relationship between the horizontal and vertical reactions at A due to a centered vertical load, A_{hv} and A_{vv} respectively is determined by taking the moment with respect to the hinge (b):

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad 15\cdot V - 30\cdot A_{vv} + 35\cdot A_{hv} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad A_{vv} - V = 0$$

$$A_{hv} = \frac{15A_{vv}}{35}$$

Substituting for roof dead and snow load we obtain:

$$A_{vvDL} := DL = 20.12\cdot kip \qquad B_{vvDL} := A_{vvDL} = 20.12\cdot kip$$

$$A_{hvDL} := \frac{15A_{vvDL}}{35} = 8.62\cdot kip \qquad B_{hvDL} := A_{hvDL} = 8.62\cdot kip$$

$$A_{vvSL} := SL = 27\cdot kip \qquad B_{vvSL} := A_{vvSL} = 27\cdot kip$$

$$A_{hvSL} := \frac{15A_{vvSL}}{35} = 11.57\cdot kip \qquad B_{hvSL} := A_{hvSL} = 11.57\cdot kip$$

5. The reactions due to wind load (blowing from left) are determined as follows:
   a) Vertical reaction at A is determined by considering the entire structure and taking the moment with respect to C (c)

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad 15.75kip\cdot\left(\frac{20ft + 15ft}{2}\right) - 60ft\cdot A_{vh} = 0$$

$$A_{vh} := \frac{WL\cdot\left(\frac{20ft + 15ft}{2}\right)}{60ft} = 4.59\cdot kip$$

A_{vh} is the vertical reaction at A due to the horizontal load, and from equilibrium of forces in the y-direction, we have

$$C_{vh} := -A_{vh} = -4.59\cdot kip$$

(note that wind load does not have any vertical component)

   b) The horizontal reaction at B is determined by considering the right substructure and taking the moment with respect to the internal hinge at B

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad 35ft\cdot C_{hh} - C_{vh}\cdot 30ft = 0$$

$$C_{hh} := \frac{C_{vh}\cdot 30ft}{35ft} = -3.94\cdot kip$$

   c) Horizontal reactino at A is taken by considering the entire structure and summing forces in the x-direction

$$\sum F_x = 0 \qquad WL + C_{hh} - A_{hh} = 0$$

$$A_{hh} := WL + C_{hh} = 11.81\cdot kip$$

   and note that A carries most of the horizontal load.

6. Finally, the supports should be designed for the most critical (plausible) combination of reactions

$$H := A_{hvDL} + A_{hvSL} + A_{hh} = 32.01\cdot kip$$

$$V := A_{vvDL} + A_{vvSL} + A_{vh} = 51.72\cdot kip$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

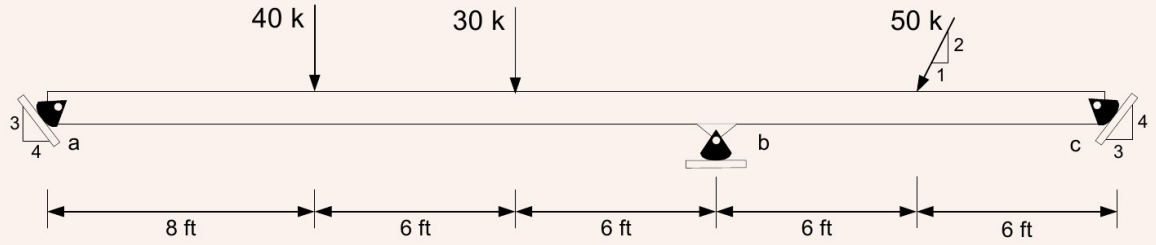
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.6 Inclined Supports

Determine the reactions of the following two span beam resting on inclined supports.



Solution:

A priori we would identify 5 reactions; however, we do have 2 equations of condition (one at each inclined support), thus with three equations of equilibrium, we have a statically determinate system.

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad R_{ay}\cdot 20\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{ay}\cdot 20\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) - \frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\right) = \frac{9}{16}\cdot R_{ay} - 16.77\text{kip}$$

$$\frac{9}{16}\cdot R_{ay} - R_{cy} = 16.77\text{kip}$$

Solving for those two equations:

$$\begin{pmatrix} 20 & -12 \\ \frac{9}{16} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 391.672\ \text{kip} \\ 16.77\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 14.37\text{kip} \\ -8.69\text{kip} \end{pmatrix}$$

The horizontal components of the reactions at a and c are

$$R_{ax} := \frac{3}{4}\cdot R_{ay} = 10.78\cdot\text{kip}$$

$$R_{cx} := -\frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 11.59\cdot\text{kip}$$

Finally, we solve for R...

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Finally, we solve for R_{by}

$$\sum M_z^{a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 8\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 14\text{ft} - R_{by}\cdot 20\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26\text{ft} - R_{cy}\cdot 32\text{ft} = 0$$

$$R_{by} := \frac{40\text{kip}\cdot 8\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 14\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26\text{ft} - R_{cy}\cdot 32\text{ft}}{20\text{ft}} = 109.04\cdot\text{kip}$$

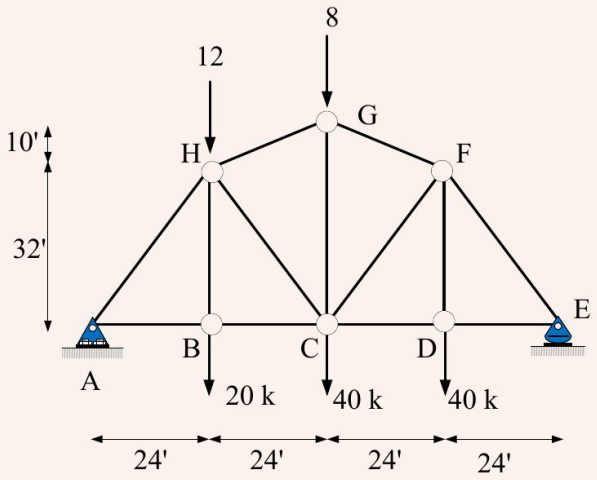
We check our results

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 30\text{kip} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{by} + R_{cy} = 0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{cx} = 0\cdot\text{kip} \quad \text{OK!}$$

7.1 Truss Method of Joints

Using the method of joints, analyze the following truss



Solution:

1. R=3, m=13, 2j=16, and m+R=2j
2. We compute the reactions

$$\sum M_z^{E} = 0 \qquad (20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 72\text{ft} + (40\text{kip} + 8\text{kip})\cdot 48\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 24\text{ft} - R_{Ay}\cdot 96\text{ft} = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{(20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 72\text{ft} + (40\text{kip} + 8\text{kip})\cdot 48\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 24\text{ft}}{96\text{ft}}$$

$$\boxed{R_{Ay} = 58\cdot\text{kip}}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 20\text{kip} + 12\text{kip} + 40\text{kip} + 8\text{kip} + 40\text{kip} - R_{Ay} - R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} := 20\text{kip} + 12\text{kip} + 40\text{kip} + 8\text{kip} + 40\text{kip} - R_{Ay}$$

$$\boxed{R_{Ey} = 62\cdot\text{kip}}$$

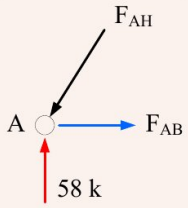
3. Consider each joint separately:
   Node A: Clearly AH is under compression and AB is under tension

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum F_y = 0$ $\quad -F_{AHy} + R_{Ay} = 0$

$F_{AHy} := -R_{Ay} = -58 \cdot kip$

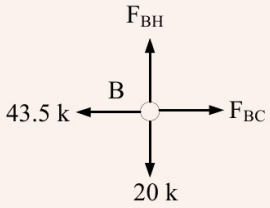
$L_y := 32ft \qquad L_x := 24ft \qquad L := \sqrt{L_y^2 + L_x^2} = 40 \cdot ft$

$F_{AH} := \frac{L}{L_y} \cdot F_{AHy} = -72.5 \cdot kip$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad -F_{AHx} + F_{AB} = 0$

$F_{AB} := \frac{L_x}{L_y} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot kip$ Tension

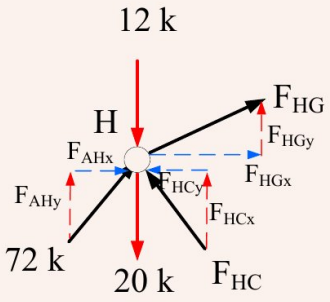
Node B:



$\sum F_x = 0$ $\quad \boxed{F_{BC} := 43.5kip}$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad \boxed{F_{BH} := 20kip}$ Tension

Node H:



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{AHx} - F_{HCx} - F_{HGx} = 0$

$$43.5\text{kip} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} = 0$$

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{AHy} + F_{HCy} - 12\text{kip} - F_{HGy} - 20\text{kip} = 0$:

$$58\text{kip} + \frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} - 12\text{kip} - 20\text{kip} = 0$$

This can be most conveniently written as

$$\begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix}$$

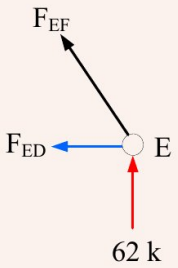
Solving we obtain

$$\begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 52 \end{pmatrix} \cdot \text{kip}$$

$\boxed{F_{HC} = -7.5 \cdot \text{kip}}$ Compression

$\boxed{F_{HG} = 52 \cdot \text{kip}}$ Tension

Node E:



$\sum F_y = 0$ $\quad F_{EFy} := 62\text{kip}$

$$\boxed{F_{EF} := \frac{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}}{32\text{ft}} \cdot 62\text{kip} = 77.5 \cdot \text{kip}} \text{ Compression}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

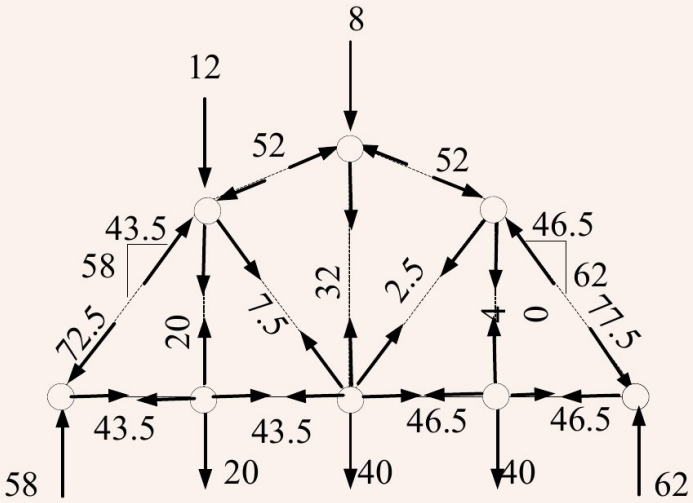
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0 \qquad F_{ED} = F_{EFx}$:

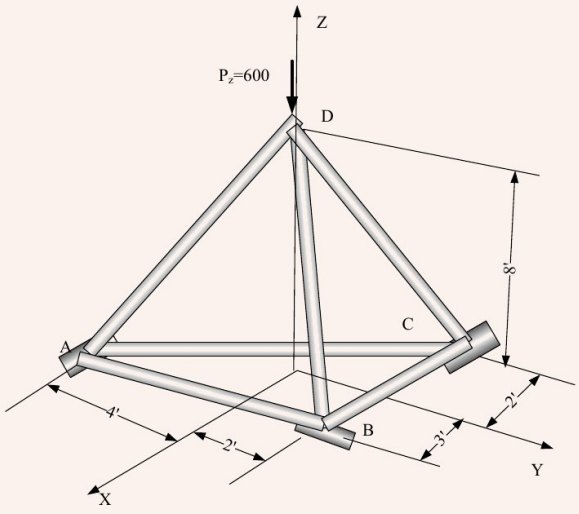
$$F_{ED} := 24\frac{ft}{32ft}\cdot 62kip = 46.5\cdot kip$$ Tension

The results of the analysis are summarized below



4. We would check our calculations by verifying equilibrium of forces at a node not previously used, such as *D*.

7.2 3D Truss



Solution:

1. Consider the free body diagram of the entire truss

$\sum M_{AB} = 0 \qquad C_z\cdot 5ft - 600\cdot 3ft = 0 \qquad C_z := \frac{600\cdot 3ft}{5ft}$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$C_z = 360$

$\sum M_{CB} = 0$ $\quad 600 \cdot 2\text{ft} - A_z \cdot 6\text{ft} = 0$ $\quad A_z := \frac{600 \cdot 2\text{ft}}{6\text{ft}}$

$A_z = 200$

$\sum F_z = 0$ $\quad B_z + 200 + 360 - 600 = 0$ $\quad B_z := 600 - 200 - 360$

$B_z = 40$

$\sum F_x = 0$ $\quad B_x := 0$

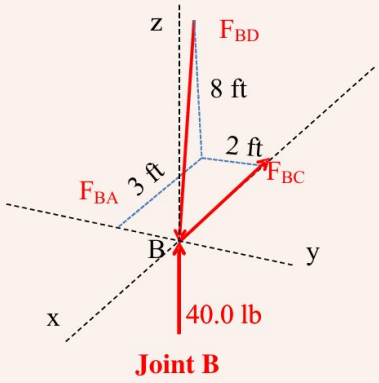
$\sum F_y = 0$ $\quad A_y - C_y = 0$

$\sum M_z = 0$ $\quad A_y \cdot 3\text{ft} + C_y \cdot 2\text{ft} = 0$ $\quad A_y = C_y = 0$

$A_y := 0$

$C_y := 0$

2. Consider the free body diagram of joint B



$L_{BD} := \sqrt{(2\text{ft})^2 + (3\text{ft})^2 + (8\text{ft})^2} = 8.775 \cdot \text{ft}$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\text{ft}}{L_{BD}} \cdot F_{BD} + 40 = 0$

$F_{BD} := 40 \cdot \frac{-L_{BD}}{8\text{ft}} = -43.875$ Compression

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

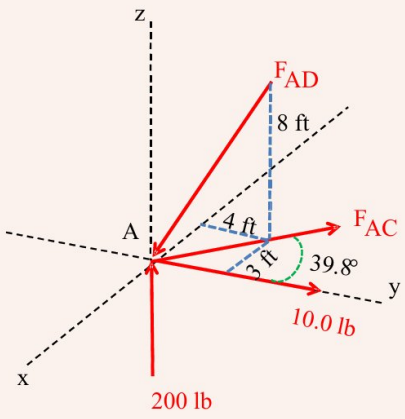
$\sum F_x = 0$ $\quad F_{BDx} - F_{BC} = 0$

$$F_{BDx} := \frac{-3\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 15$$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$$F_{BDy} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$$ Tension

3. FBD of joint A



$$L_{AD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (3\,ft)^2 + (4\,ft)^2} = 9.434\,ft$$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} + 200 = 0$

$$F_{AD} := 200 \cdot \frac{-L_{AD}}{8\,ft} = -235.85$$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{ADx} - F_{ACx} = 0$

$$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8\,deg$$

$$\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} - F_{AC} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot -F_{AD}}{\sin(39.8\,deg)} = 117.2$$ Tension

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

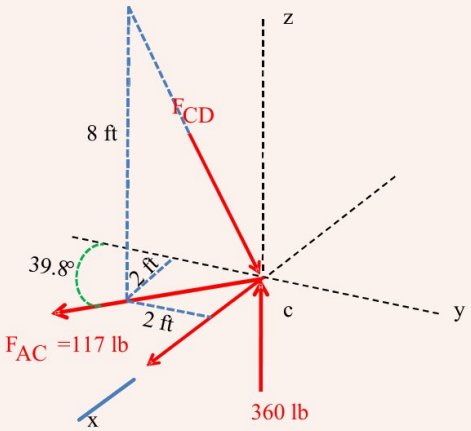
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_y = 0 \qquad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8 \cdot deg$

$F_{BA} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$ Tension

5. Joint C



$L_{CD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (2\,ft)^2 + (2\,ft)^2} = 8.485 \cdot ft$

$\sum F_z = 0 \qquad F_{CDz} + 360 = 0 \qquad \frac{-8\,ft}{L_{CD}} \cdot F_{CD} + 360 = 0$

$F_{CD} := -360 \cdot \frac{-L_{CD}}{-8\,ft} = -381.8$ Compression

7.3 Truss I, Matrix Method

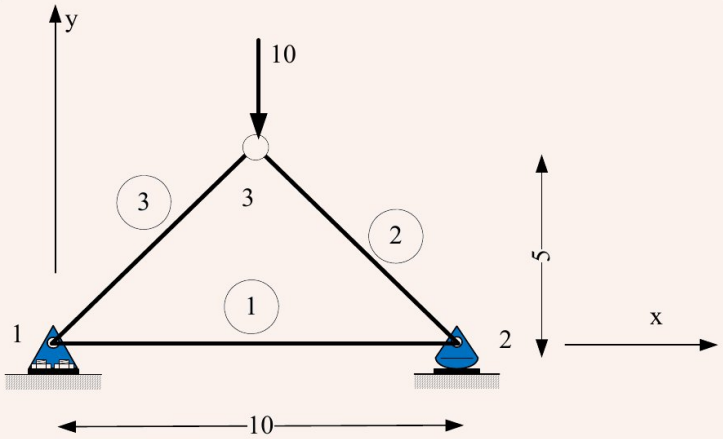
Determine all member forces for the following truss

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. We first determine the direction cosines

Member 1 (Nodes 1-2)

Node1: $\alpha_{11} := 1$ $\beta_{11} := 0$ Node2: $\alpha_{21} := -1$ $\beta_{21} := 0$

Member 2 (Nodes 2-3)

Node2: $\alpha_{22} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{22} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ Node3: $\alpha_{32} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{32} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$

Member 3 (Nodes 3-1)

Node2: $\alpha_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ Node3: $\alpha_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7.071 \\ -7.071 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7.4 Truss II, Matrix Method

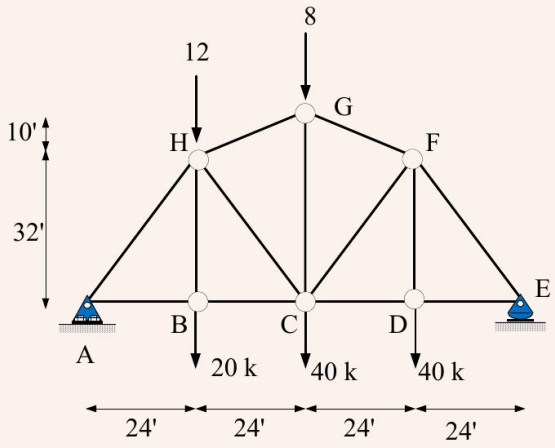
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

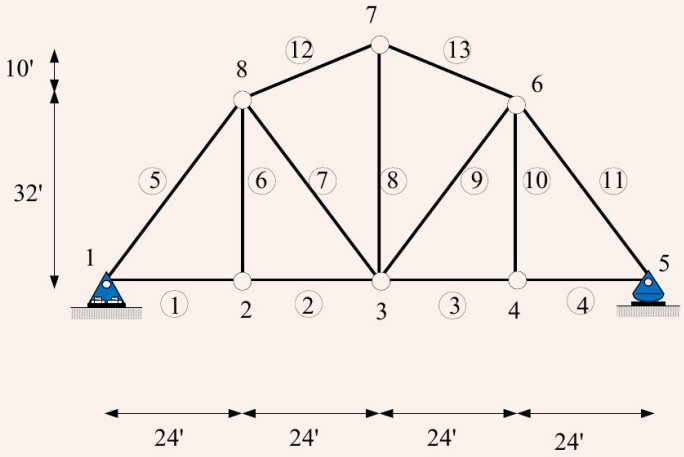
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Set up the statics matrix for the truss shown below



Solution:



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. We first determine the direction cosines

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}}=0.6$$

$$\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}}=0.8$$

$$\frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}}=0.385$$

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}}=0.923$$

2. Next we write the equations of equilibrium

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}
F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ F_6\\ F_7\\ F_8\\ F_9\\ F_{10}\\ F_{11}\\ F_{12}\\ F_{13}\\ R_{1x}\\ R_{1y}\\ R_{5y}
\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}
0\\0\\0\\-20\\0\\-40\\0\\-40\\0\\0\\0\\0\\0\\-8\\0\\-12
\end{pmatrix}=0$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

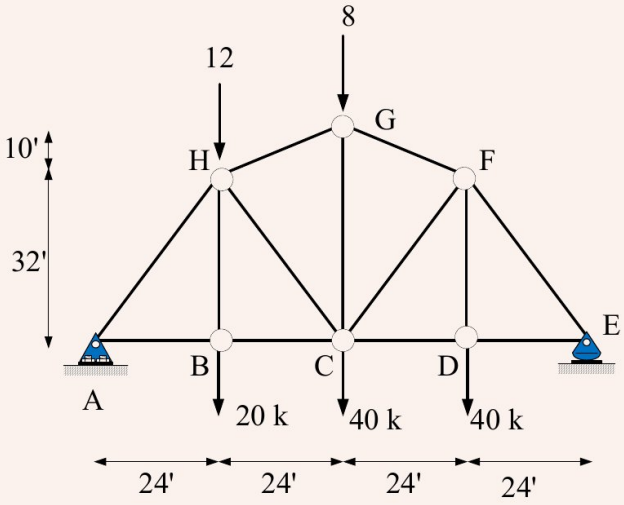
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|r|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 43.5 \\ 2 & 43.5 \\ 3 & 46.5 \\ 4 & 46.5 \\ 5 & -72.5 \\ 6 & 20 \\ 7 & 7.479 \\ 8 & 32.033 \\ 9 & 2.479 \\ 10 & 40 \\ 11 & -77.5 \\ 12 & -51.991 \\ 13 & -51.991 \\ 14 & 0 \\ 15 & 58 \\ 16 & 62 \\ \hline \end{array}$$

7.5 Truss, Method of Sections

Determine F_{BC} and F_{HG} in the truss below



Solution:

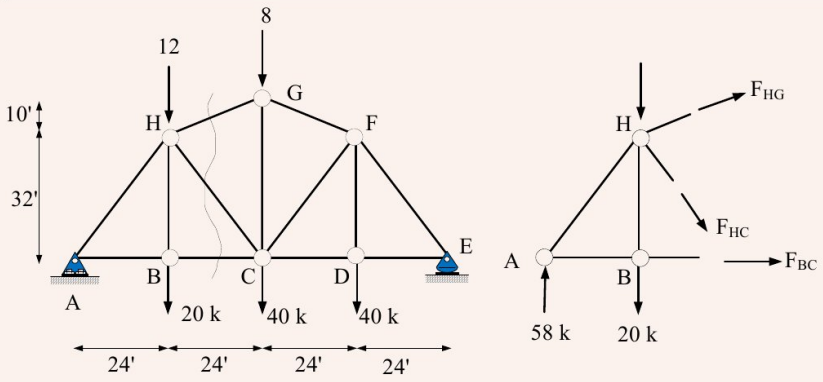
Cutting through members HG, HC, and BC, we first take the summation of forces with respect to H:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum M_z^H = 0$ $\quad R_{Ay}\cdot 24ft - F_{BC}\cdot 32ft = 0$

$R_{Ay} := 58kip$ (From previous example)

$F_{BC} := \frac{24ft}{32ft}\cdot R_{Ay} = 43.5\cdot kip$ Tension

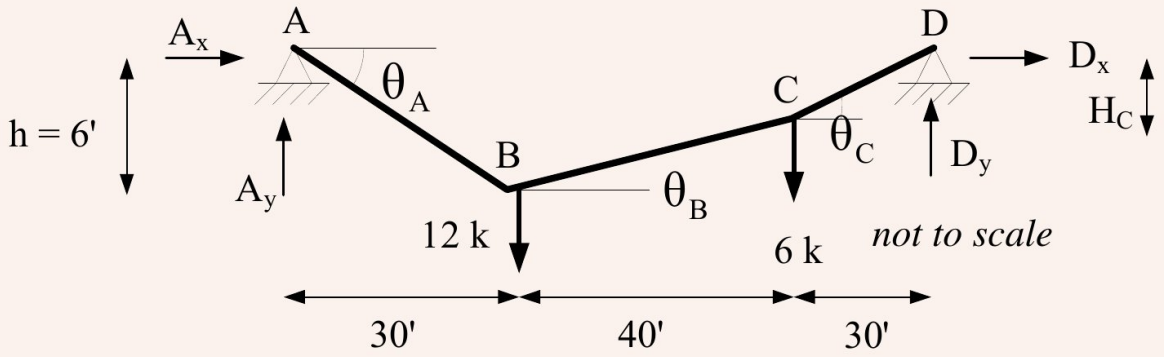
$\sum M_z^C = 0$ $\quad 58kip\cdot 48ft - (20kip + 12kip)\cdot 24ft - F_{HGx}\cdot 32ft - F_{HGy}\cdot 24ft = 0$

$$58kip\cdot 48ft - (20kip + 12kip)\cdot 24ft - 32ft\cdot F_{HG}\cdot\frac{24ft}{\sqrt{(24ft)^2 + (10ft)^2}} - 24ft\cdot F_{HG}\cdot\frac{10ft}{\sqrt{(24ft)^2 + (10ft)^2}} = 0$$

$F_{HG} := 52kip$ Compression

8.1 Funicular Cable Structures

Determine the reactions and the tensions for the cable structure shown below



Solution:

We have 4 external reactions, however the horizontal ones are equal and we can use any one of a number of equations of conditions in additiona to the three equations of equilibrium. First, we solve for the vertical reactions A_y, D_y and then for the horizontal ones (which are equal and opposite ($|H| = A_x = -D_x$). For this problem we could use the following 3 equations of static equilibrium $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, however since we do not have any force in the x direction, the first equation is of no avail. Instead, we will consider the following set $\Sigma F_{\circlearrowleft} = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Alternatively, we can consider the problem as one with 8

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

unknowns (A_x, A_y, D_x, D_y, θ_A, θ_B, θ_C, and h_C), to be solved through the 2 equations of equilibrium expressed at each of the four points of interesect.

1. Solve for D_y

$$\sum M_z^{A} = 0 \qquad 12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft} - D_y\cdot 100\text{ft} = 0$$

$$D_y := \frac{12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft}}{100\text{ft}} = 7.8\cdot\text{kip}$$

2. Solve for A_y

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 12\text{kip} - 6\text{kip} + D_y = 0$$

$$A_y := 12\text{kip} + 6\text{kip} - D_y = 10.2\cdot\text{kip}$$

3. Solve for the horizontal force by isolating the free body diagram AB

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad A_y\cdot 30\text{ft} - H\cdot 6\text{ft} = 0$$

$$H := \frac{A_y\cdot 30\text{ft}}{6\text{ft}} = 51\cdot\text{kip}$$

4. Solve for the sag at point C by isolating the free body diagram CD

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad -D_y\cdot 30\text{ft} + H\cdot h_c = 0$$

$$h_c := \frac{30\text{ft}\,D_y}{H} = 4.6\cdot\text{ft}$$

5. Solve for the cable internal forces or tractions in this case

$$\tan(\theta_A) = \frac{6\text{ft}}{30\text{ft}} \qquad \theta_A := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft}}{30\text{ft}}\right) = 11.31\cdot\text{deg}$$

$$T_{AB} := \frac{H}{\cos(\theta_A)} = 52.01\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_B) = \frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}} \qquad \theta_B := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}}\right) = 2.02\cdot\text{deg}$$

$$T_{BC} := \frac{H}{\cos(\theta_B)} = 51.03\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_C) = \frac{h_c}{30\text{ft}} \qquad \theta_C := \operatorname{atan}\left(\frac{h_c}{30\text{ft}}\right) = 8.7\cdot\text{deg}$$

$$T_{CD} := \frac{H}{\cos(\theta_C)} = 51.59\cdot\text{kip}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

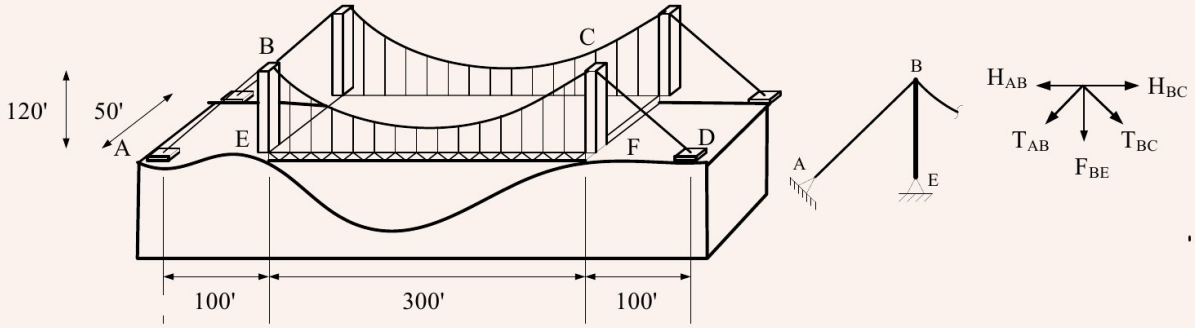
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8.2 Design of Suspension Bridge

Design the following 4 lane suspension bridge by selecting the cable diameters assuming an allowable cable strength of $\sigma_{all} := 190ksi.$. The bases of the tower are hinged in order to avoid large bending moments. The total dead load is estimated at 200 psf. Assume a sag to span ratio of 1/5.



Solution:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. The dead load is carried by each cable with one half the total deal load or $p_1 := \frac{1}{2}\cdot 200\text{psf}\cdot 50\text{ft} = 5\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$

2. Using the HS 20 truck (or its distributed equivalent load of 0.64kip/ft per lane), the uniform additional load per cable is

$$p_2 := 2\cdot 0.64\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}} = 1.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$$

Thus the total design load is

$$p := p_1 + p_2 = 6.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$$

3. The thrust H is determined by

$$L := 300\text{ft}$$
$$h := 60\text{ft}$$
$$H := \frac{p\cdot L^2}{8\cdot h} = 1177.5\cdot\text{kip}$$

4. The maximum tension is

$$r := \frac{1}{5} \quad \text{sag to span ratio}$$

$$T_{max} := H\cdot\sqrt{1 + 16r^2} = 1508\cdot\text{kip}$$

5. Note that if we used the approximate formula we woul dhave obtained

$$T_{maxApp} := H\cdot\left(1 + 8\cdot r^2\right) = 1554.3\cdot\text{kip}$$

6. The required cross sectional area of the cable along the main span should be equal to

$$A := \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = 7.94\cdot\text{in}^2$$

which corresponds to a diameter

$$d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.18\cdot\text{in}$$

7. We seek to determine the cable force in AB. Since the pylon cannot take any horizontal force, we should have the horizontal component of T_{max} equal and opposite to the horizontal component of T_{AB} or

$$T_{AB} := H\cdot\frac{\sqrt{(100\text{ft})^2 + (120\text{ft})^2}}{100\text{ft}} = 1839\cdot\text{kip}$$

The cable area should be

$$A := \frac{T_{AB}}{\sigma_{all}} = 9.68\cdot\text{in}^2$$

which corresponds to a diameter

$$d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.51\cdot\text{in}$$

8. To determine the vertical load acting on the pylon, we must add the vertical components of T_{max} and T_{AB} (V_{BC} and V_{AB} respectively). We can determine V_{BC} from H and T_{max}, thus

$$P := \frac{120\text{ft}}{100\text{ft}}\cdot H + \sqrt{T_{max}^2 - H^2} = 2355\cdot\text{kip}$$

Using A36 steel with an allowable stress of $\sigma_{A36} := 21\text{ksi}$, the cross sectional area of the tower should be

$$A := \frac{P}{\sigma_{A36}} = 112\cdot\text{in}^2$$

Note that buckling of such a tower might govern the final dimensions

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. If the cables were to be anchored to a concrete block, the volume of the block shoul dbe at least equal to

$$V := \frac{\frac{120\,ft}{100\,ft}\cdot H}{150\,\frac{lbf}{ft^3}} = 9420\cdot ft^3$$

10.1 Simple Shear and Moment Diagram

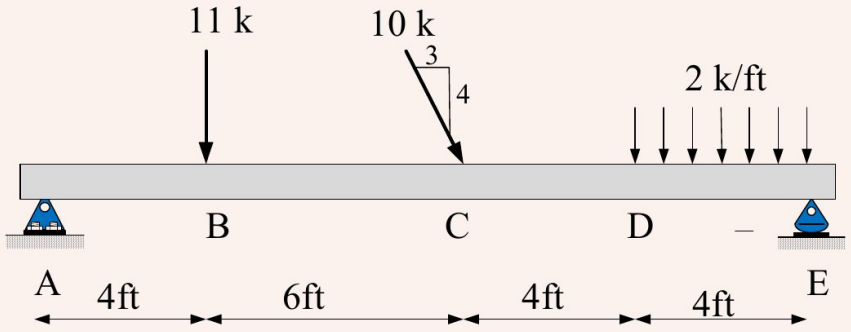
Draw the shear and moment diagram for the beam shown below.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

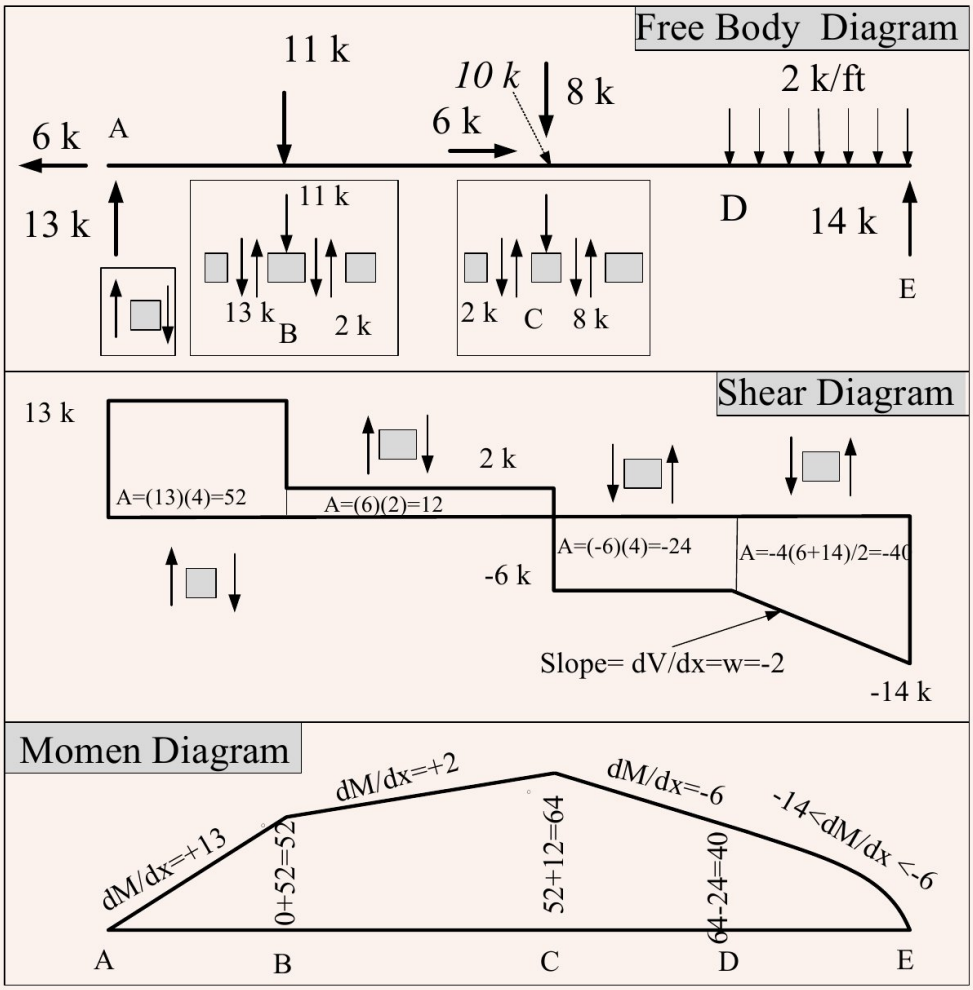
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

The free body diagram is drawn below



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Reactions are determined from the equilibrium equations

$$\sum F_x = 0 \qquad -A_x + 6kip = 0 \qquad A_x := 6kip$$

$$\sum M_A = 0 \qquad 11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{3}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft - E_y\cdot 18ft = 0$$

$$E_y := \frac{11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{4}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft}{18ft} = 14\cdot kip$$

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 11kip - 10kip\cdot\frac{4}{5} - 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft + E_y = 0$$

$$A_y := 11kip + 8kip + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft - E_y = 13\cdot kip$$

Shear are determined next

1. At A the shear is equal to the reaction and is positive.
2. At B the shear drops (negative load) by 11 k to 2 k
3. At C it drops again by 8 k to -6 k
4. It stays constant up to D and then it decreases (constant negative slope since the load is uniform and negative) by 2 k per linear foot up to -14 k
5. As a check, -14 k is also the reaction previously determined at E.

Moment is determined last

1. The moment at A is zero (hinge support)
2. The change in moment between A and B is equal to the area under the corresponding shear diagram, or
   $\Delta M_{BA} := 13kip\cdot 4ft = 52\cdot kip\cdot ft$
3. Changes between other points are determined the same by taking the area under the shear diagram

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

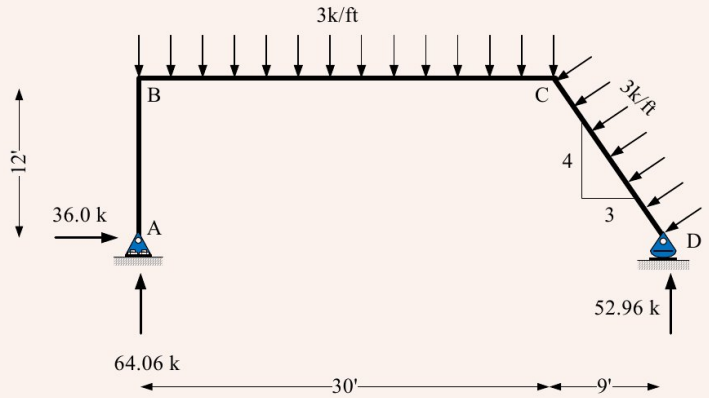
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

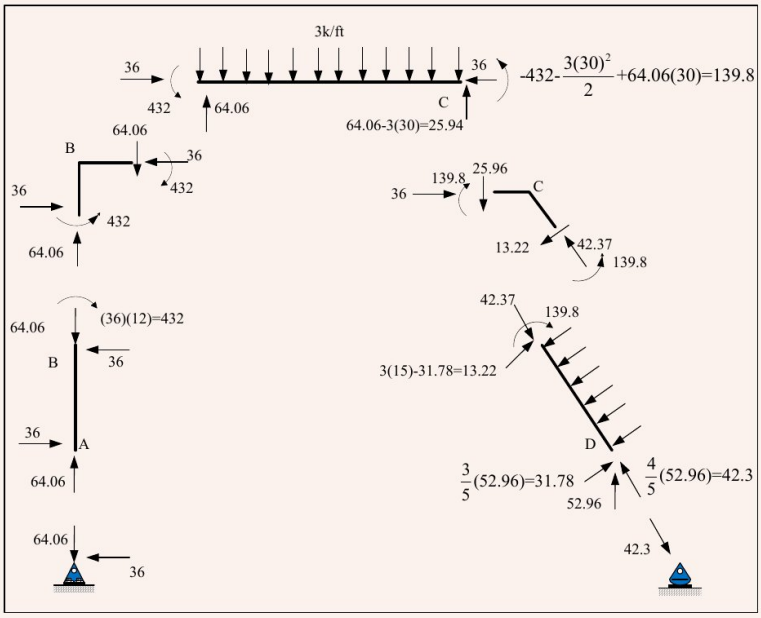
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

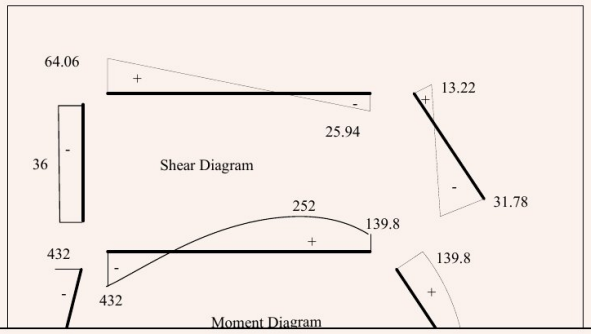
10.2 Frame Shear and Moment Diagram

Draw the shear and moment diagram of the following frame



Solution:



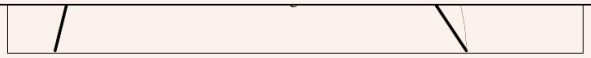


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Reactions are determined first

$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 0 \qquad \boxed{R_{Ax} := \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 36\cdot kip}$

$\sum M_A = 0 \qquad 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft - R_{Dy}\cdot 39ft = 0$

$$\boxed{R_{Dy} := \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft}{39ft} = 52.96\cdot kip}$$

$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft - \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft + R_{Dy} = 0$

$$\boxed{R_{Ay} := 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft - R_{Dy} = 64.04\cdot kip}$$

We isolate each member and draw its free body diagram for each force component.

Shear

1. For A-B the shear is constant, equal to the horizontal reaction at A and negative according to our previously defined sign convention, $V_A := -36kip$
2. For member B-C at B, the shear must be equal to the vertical force which was transmitted along A-B, and which is equal to the vertical reaction at A, $V_B := R_{Ay} = 64.04\cdot kip$
3. Since B-C is subjected to a uniform load, the shear along B-C will have a slope equal to -3 and in terms of x (measured from B to C) is equal to
   $V_{BC}(x) := R_{Ay} - 3x$
4. The shear along C-D is obtained by decomposing the vertical reaction at D into axial and shear components. Thus, at D the shear is equal to $\frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 31.78\cdot kip$ and is negative. Based on our sign convention for the load, the slope of the shear must be equal to -3 along C-D. Thus the shear at point C is such that $V_c - \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} = -\frac{3}{5}\cdot R_{Dy}$ or
   $V_c := \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} - \frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 13.22\cdot kip$. The equation for shear is given by (for x going from C to D)
   $V_{CD}(x) := V_c - 3x$

Moment

1. Along A-B, the moment is zero at A (since we have a hinge) and its slope is equal to the shear, thus at B the moment is equal to $-36kip\cdot 12ft = -432\cdot kip\cdot ft$
2. Along B-C, the moment is equal todx

$$M_{BC} = M_B + \int_0^x V_{BC}(x)\,dx = -432kip\cdot ft + \int_0^x \left(R_{Ay} - 3x\right)dx = -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot x - \frac{3x^2}{2}$$

which is a parabola. Substituting for x=30, we obtain at node C:

$$\boxed{M_C := -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot 30ft - \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot (30ft)^2}{2} = 139.2\cdot kip\cdot ft}$$

dM_{BC}

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. If we need to determine the maximum moment along B-C, we know that $\frac{dV_{BC}}{dx} = 0$ at the point where where V_{BC}=0, that is $V_{BC}(x) = R_{Ay} - 3x = 0, x_{max} := \frac{R_{Ay}}{3\frac{kip}{ft}} = 21.3 \cdot ft$. In other words, the maximum moment occurs where the shear is zero. Thus

$$M_{BCmax} := -432kip \cdot ft + R_{Ay} \cdot x_{max} - \frac{3\frac{kip}{ft} \cdot (x_{max})^2}{2} = 251.5 \cdot kip \cdot ft$$

4. Finally, along C-D the moment varies quadratically (since we had a linear shear), the moment first increases (positive shear), and then decreases (negative shear). The moment along C-D is given by $M_{CD} = M_C + \int_0^x V_{CD}(x)\,dx = M_C + \int_0^x (V_c - 3x)\,dx = M_C + V_c \cdot x - \frac{3x^2}{2}$ which is a parabola. Substituting for x =15ft, we obtain at node D

$$M_D := M_C + V_c \cdot 15ft - 3\frac{\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{2} = -0 \cdot kip \cdot ft \quad \text{OK!}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

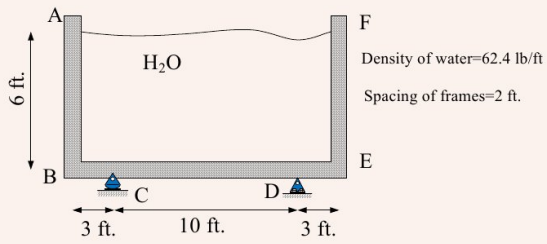
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load

The frame shown below is the structural support of a flume. Assuming that the frames are spaced 2 ft apart along the length of the flume,

1. Determine all internal member end actions
2. Draw the shear and moment diagrams
3. Locate and compute maximum internal bending moments
4. If this is a reinforced concrete frame, show the location of reinforcement

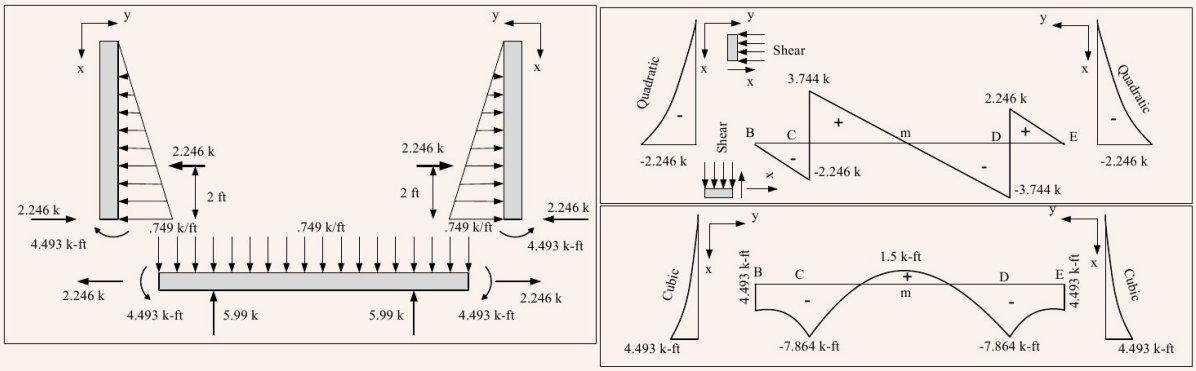


Solution:

The hydrostatic pressure causes lateral forces on the vertical members which can be treated as cantilevers fixed at the lower end. The pressure is linear and is given by $p(\gamma, h) := \gamma \cdot h$. Since each frame supports a 2 ft wide section of the flume, the equation for *w* (pounds/ft) is

$$w(h) := 2\text{ft} \cdot 62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \cdot h \rightarrow \frac{124.8 \cdot h \cdot \text{lbf}}{\text{ft}^2}$$

At the base $w_{base} := w(6\text{ft}) = 0.749 \cdot \frac{\text{kip}}{\text{ft}}$. Note that this is both the lateral pressure on the end walls as well as the uniform load on the horizontal members.



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

End Actions

1. Base force at B is $F_{Bx} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 6ft = 2.246 \cdot kip$
2. Base moment at B is $M_B := \frac{1}{3} F_{Bx} \cdot 6ft = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
3. End forces at B for member B-E are equal and opposite
4. Reaction at C is $R_{Cy} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 16ft = 5.99 \cdot kip$

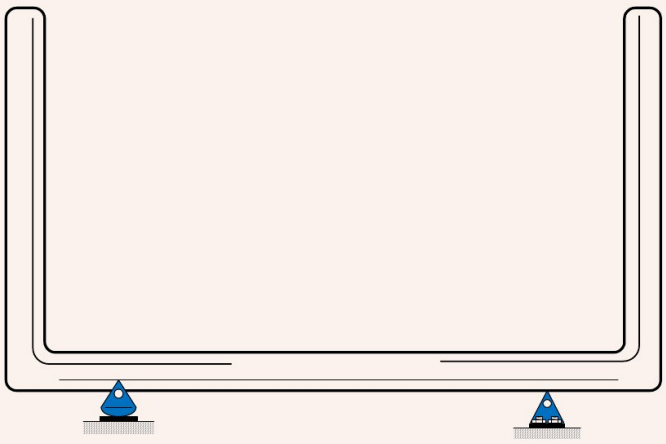
Shear forces

1. Base at B the shear force was determined eariler and was equal to $F_{Bx} = 2.246 \cdot kip$. Based on the orientation of the x-y axis, this is a negative shear.
2. The vertical shear at B is zero (neglecting the weight of A-B)
3. The shear to the left of C is $V_{Cleft} := 0 - w_{base} \cdot 3ft = -2.246 \cdot kip$
4. The shear to the right of C is $V_{Cright} := V_{Cleft} + R_{Cy} = 3.744 \cdot kip$

Moment diagrams

1. At the base: B $M_B = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
2. At the support C, $M_C := -M_B - w_{base} \cdot 3ft \cdot \frac{3ft}{2} = -7.862 \cdot kip \cdot ft$
3. The maximum moment is equal to $M_{max} := M_C + w_{base} \cdot 5ft \cdot \frac{5ft}{2} = 1.498 \cdot kip \cdot ft$

Design: Reinforcement should be placed along the fibers which are under tension, that is on the side of the negative moment. The figure below schematically illustrates the location of the flexural reinforcement.



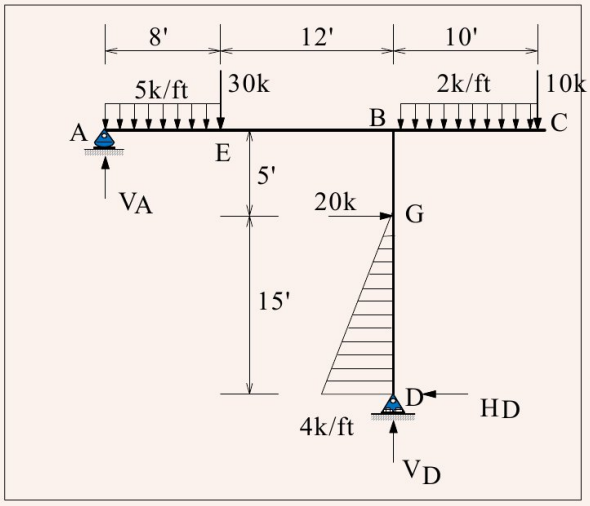
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

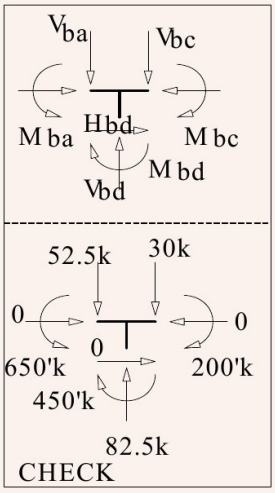
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

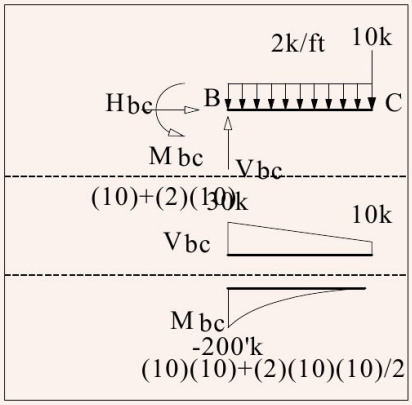
CÓPIA PARA REVISÃO

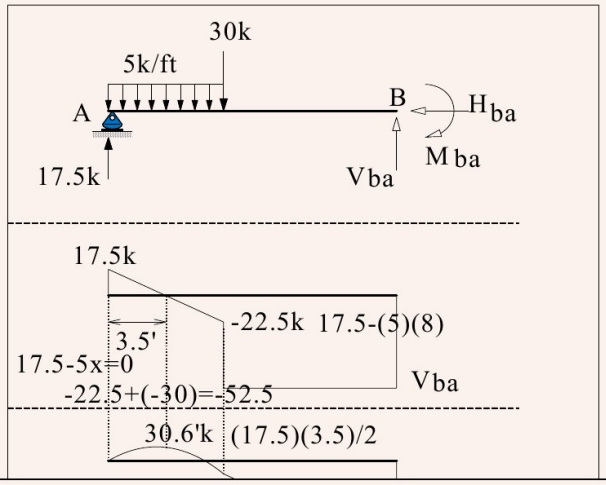
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

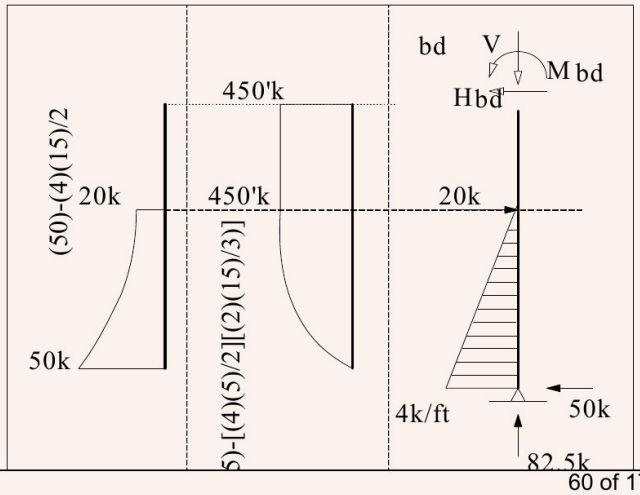
10.4 Shear Moment Diagrams for Frame









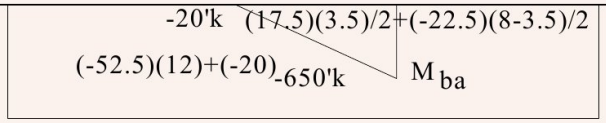


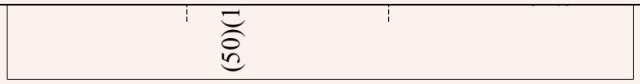
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

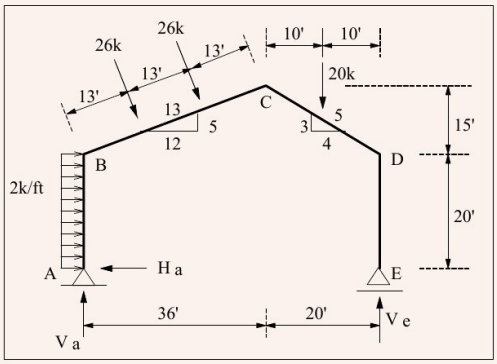
CÓPIA PARA REVISÃO

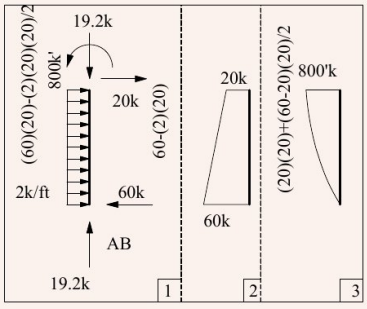
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

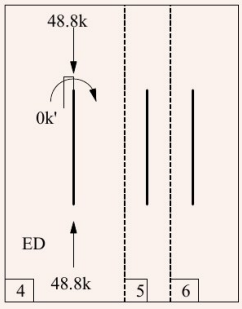


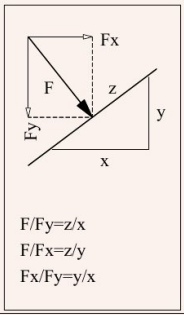


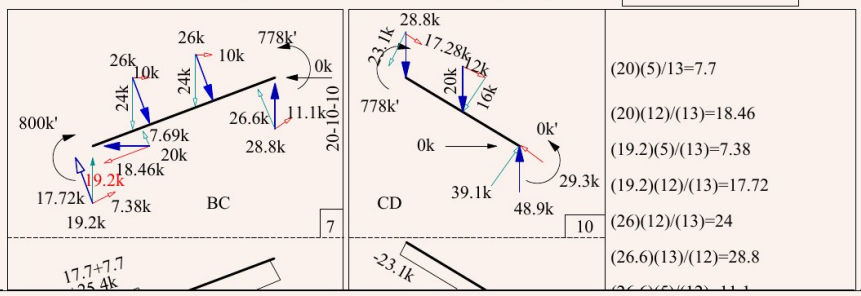
10.5 Shear Moment Diagrams for Inclined Frame









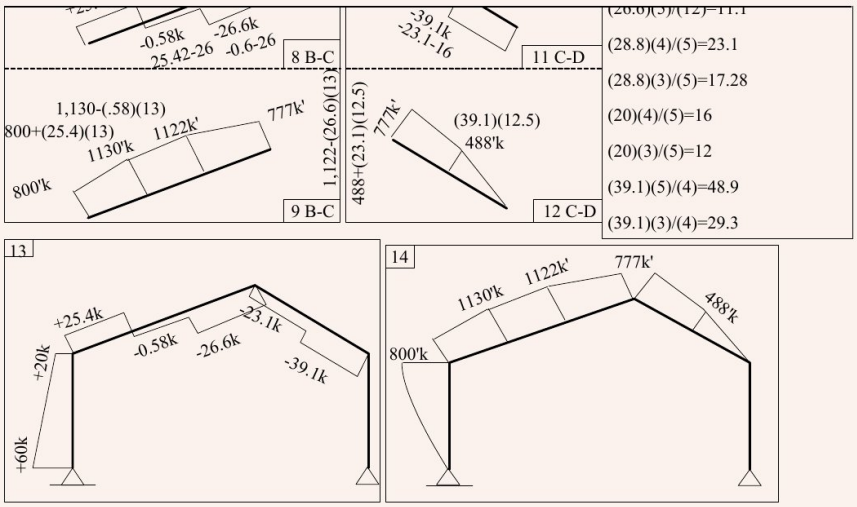


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

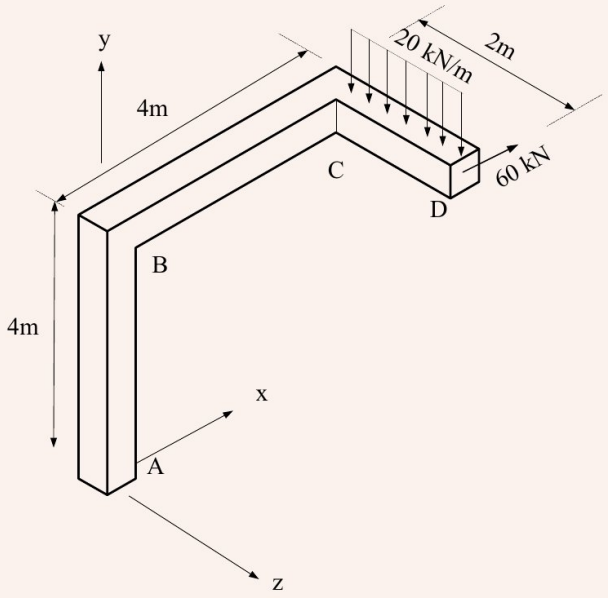
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



10.6 3D Frame



1. The frame has a total of 6 reactions (3 forces and 3 moments) at the support, and we have a total of 6 equations of equilibrium, thus it is statically determinate.
2. Each member has the following internal forces (defined in terms of the local coordinate system of each member x' - y'- z' such that x is along the member)

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

3. The numerical calculations for the analysis of the three dimensional frame are quite simple, however the main complexity stems from the difficulty in visualizing the inter-relations between internal forces of adjacent members.
4. In this particular problem, rather than starting by determining the reactions, it is easier to determined the internal forces at the end of each member starting with member C-D. Note that temporarily we adopt a sign convention which is compatible with the local coordinate systems.

C-D

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m = 40\cdot kN$$

$$\sum F_{z'} = 0 \qquad V_{z'C} := 60kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'C} := -60kN\cdot 2m = -120\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m\cdot\frac{2m}{2} = 40\cdot kN\cdot m$$

B-C

$$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'B} := V_{z'C} = 60\cdot kN$$

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'B} := V_{y'C} = 40\cdot kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'B} := M_{y'C} = -120\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'B} := V_{y'C}\cdot 4m = 160\cdot kN\cdot m$$

$$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'B} := -M_{z'C} = -40\cdot kN\cdot m$$

A-B

$$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'A} := V_{y'B} = 40\cdot kN$$

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'A} := N_{x'B} = 60\cdot kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'A} := -T_{x'B} = 40\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'A} := M_{z'B} + N_{x'B}\cdot 4m = 400\cdot kN\cdot m$$

$$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'A} := M_{y'B} = -120\cdot kN\cdot m$$

The interaction between axial forces N and shear V as well as between moments M and torsion T is clearly highlighted by this

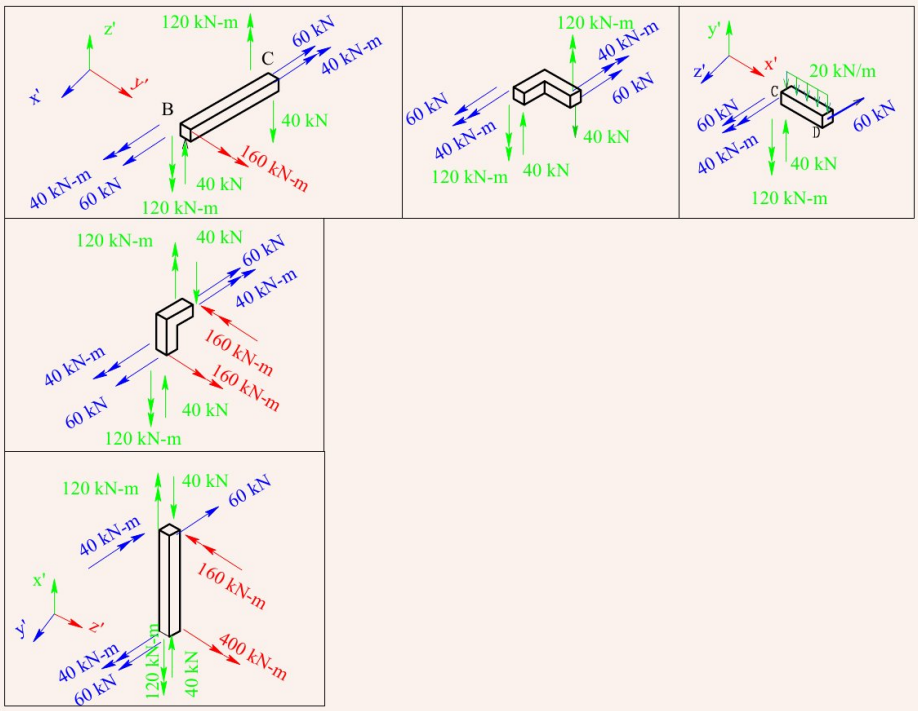
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

example.

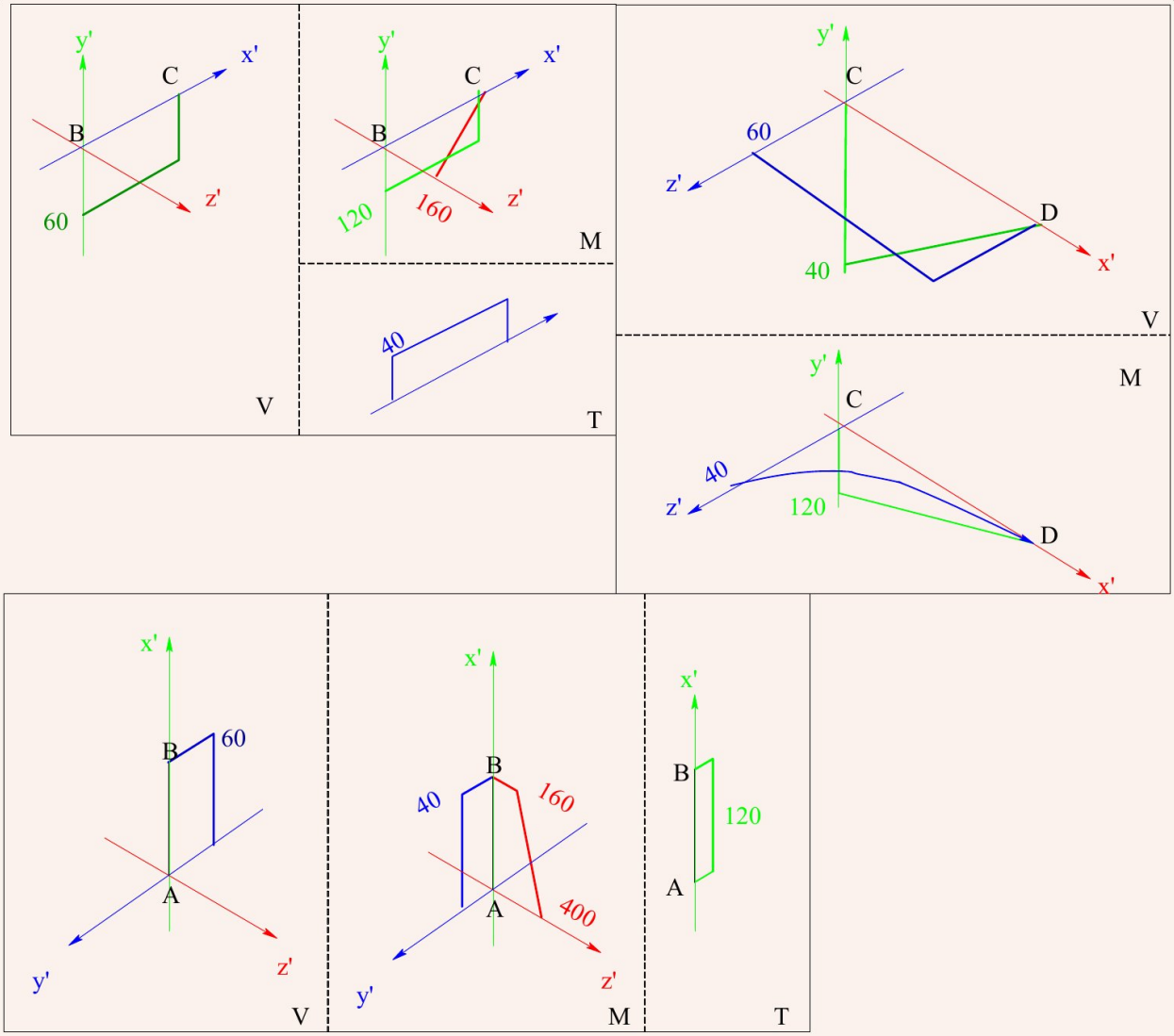


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

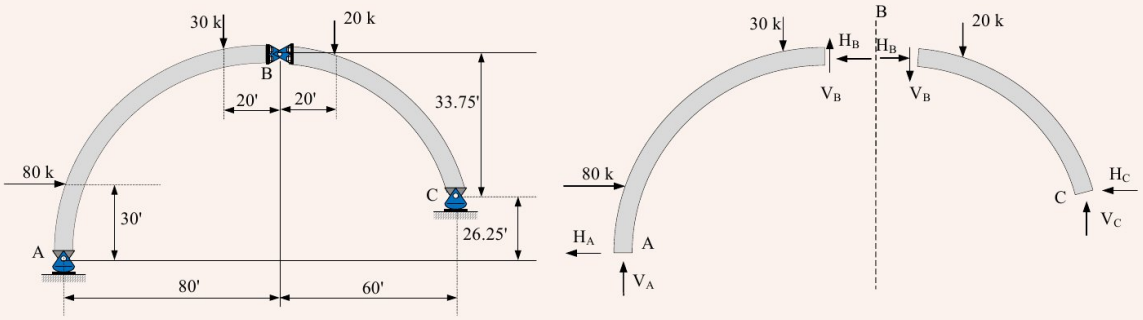
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.1 Three Hinged Arch, Point Loads

Determine the reactions of the three-hinged arch shown below



Solution:

Four unknowns, three equations of equilibrium, one equation of condition - staticall determinate

$$\sum M_z^C = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + 80\,kip\cdot(30\,ft - 26.25\,ft) - 30\,kip\cdot(60\,ft + 20\,ft) - 20\,kip\cdot(60\,ft - 20\,ft) + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 30\,kip\cdot 80\,ft + 20\,kip\cdot 40\,ft - 80\,kip\cdot 3.75\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 2900\,kip\cdot ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad 80\,kip - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$

$$\boxed{R_{Ax} + R_{Cx} = 80\,kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ay} + R_{Cy} - 30\,kip - 20\,kip = 0$$

$$\boxed{R_{Ay} + R_{Cy} = 50\,kip}$$

$$\sum M_z^B = 0 \qquad R_{Ax}\cdot 60\,ft - 80\,kip\cdot 30\,ft - 30\,kip\cdot 20\,ft + R_{Ay}\cdot 80\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 80\,kip\cdot 30\,ft + 30\,kip\cdot 20\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 3000\,kip\cdot ft}$$

Solving those four equations simultaneously we have:

$$\begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} \cdot kip = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix} \cdot kip$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

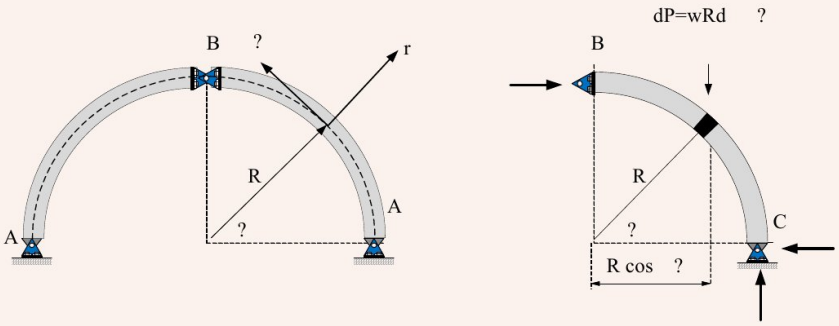
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We can check our results by considering the summation with respect to B from the right:

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad -20\text{kip}\cdot 20\text{ft} - R_{Cx}\cdot 33.75\text{ft} + R_{Cy}\cdot 60\text{ft} = -0\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

11.2 Semi-Circular Arch

Determine the reactions of the three-hinged staticall determinate semi-circular arch under its own dead weight *w* (per unit arc length s, where ds=rdθ



Solution:

Reactions The reactions can be determined by **integrating** the load over the entire structure

1. Vertical Reaction is determined first

$$\sum M_A = 0 \qquad -C_y\cdot 2R + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R(1+\cos(\theta)) = 0$$

$$C_y = \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos(\theta))\,d\theta = \frac{\pi\,wR}{2}$$

2. Horizontal Reactions are determined next

$$\sum M_B = 0 \qquad -C_x\cdot R + C_y\cdot R - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} wR\,d\theta\cdot R\cos(\theta) = 0$$

$$C_z = \frac{\pi\,wR}{2} - \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR$$

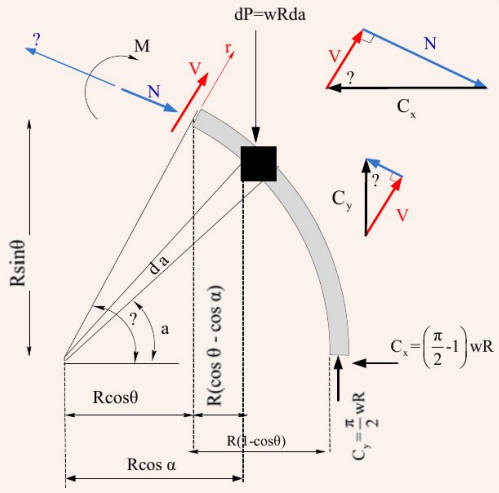
Internal Forces can now be determined

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



1. Shear Forces: Considering the free body diagram of the arch, and summing the forces in the radial direction ($\Sigma F_R=0$)

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cos(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\sin(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\sin(\theta)+V=0$$

$$V=wR\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\cos(\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Axial Forces: Similarly, if we consider the summation of forces in the axial direction ($\Sigma F_\theta=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cos(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\cos(\theta)+N=0$$

$$N=wR\cdot\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Moment: Now we can consider the third equation of equilibrium ($\Sigma M_z=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cdot R\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cdot R\cdot(1-\cos(\theta))+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos(\alpha)-\cos(\theta))+M=0$$

$$M=wR^2\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

Deflection are determined last

1. The real curvature ϕ is obtained by dividing the moment by EI

$$\phi=\frac{M}{EI}=\frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

2. The virtual force $\delta\cdot\bar{P}$ will be a unit vertical point load in the direction of the desired deflection, causing a virtual internal moment

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

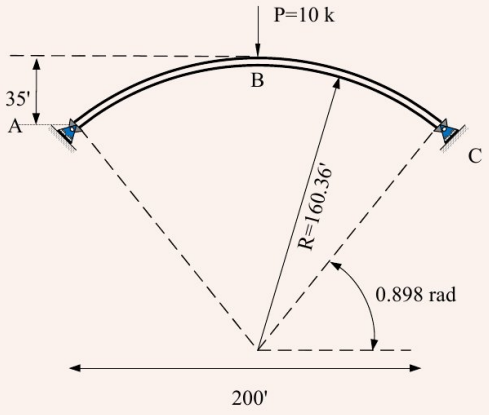
$$\delta\cdot\overline{M} = \frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

3. Hence, application of the virtual work equation yields:

$$1\cdot\Delta = 2\cdot\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1 - \sin(\theta)) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]\cdot\left[\frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta))\right]\cdot R\, d\theta = \frac{wR^4}{16EI}\cdot\left(7\cdot\pi^2 - 18\cdot\pi - 12\right)$$

11.3 Statically Indeterminate Arch

Determine the value of the horizontal reaction component of the indicated two-hinged solid rib arch, as caused by a concentrated vertical load of 10 k at the center line of the span. Consider shearing, axial, and flexural strains. Assume the rib is a W24x130 with a total area of 38.21 in^2, that it has a web area of 13.70 in^2, a moment of inertia equal to 4,000 in^4, E of 30,000 k/in^2, and a shearinf modulus of 13,000 k/in^2.



Solution:

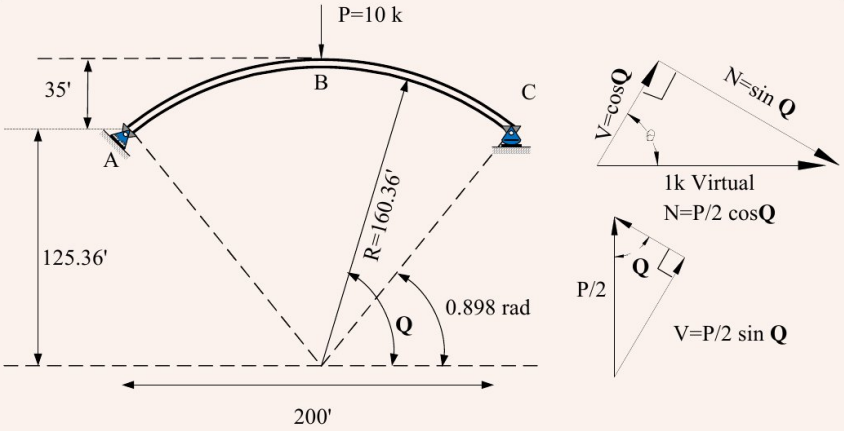
1. Consider that end C is placed on rollers, as shown below.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



A unit ficticious horizontal force is applied at C. The axial and shearinf components of this ficticious force and of the vertical reaction at C, acting on any section θ in the right half of the rib, are shown at the right end of the rib in the figure above.

2. The expression for the horizontal displacement of C is

$$1\cdot\Delta_{Ch} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{V}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{N}{AE}\,ds$$

3. From the figure above, for the rib from C to B

$$M = \frac{P}{2}\cdot(100 - R\cdot\cos\theta)$$

$$\delta\cdot\overline{M} = 1\cdot(R\cdot\sin\theta - 125.36\,ft)$$

$$V = \frac{P}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{V} = \cos\theta$$

$$N = \frac{P}{2}\cdot\cos\theta$$

$$\delta\cdot\overline{N} = -\sin\theta$$

$$ds = R\,d\theta$$

4. If the above values are substituted in the equation for the horizontal displacement of C and integrated between the limits of 0.898 and π/2, the result will be

$$\Delta_{Ch} = 22.55\,in + 0.023\,in - 0.003\,in$$

$$\Delta_{Ch} := 22.57\,in$$

5. The load P is now assumed to be removed fro mthe rib, and a real horizontal force of 1 k is assumed to act toward the right at C in conjunction with the ficticious force of 1 k acting to the right at the same point. The horizontal displacement of C will be given by

$$\delta_{ChCh} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{\overline{M}}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{\overline{V}}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{\overline{N}}{AE}\,ds = 2.309\,in + 0.002\,in + 0.002\,in$$

$\delta_{\sim\sim} := 2.313\,in$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\delta_{ChCh} := 2.309\,in$

6. The value of the horizontal reaction component will be

$$H_C := \frac{\Delta_{Ch}}{\delta_{ChCh}} \cdot kip = 9.76 \cdot kip$$

7. If only flexural strains are considered, the result would be

$$H_{C_{flex}} := \frac{22.55\,in}{2.309\,in} \cdot kip = 9.77 \cdot kip$$

Comments

1. For the given rib and the single concentrated load at the center of the span it is obvious that the effects of shearing and axial strains are insignificant and can be disregarded.
2. Eroneous conclusions as to the relative importance of shearing and axial strains in the usual solid rib may be drawn, however, from the values in the equation for Δ_{Ch}. These indicated that the effects of the shearing strains are much more significant thatn those of the axial strains. This is actually the case for the single concentrated load chosen for the demonstration, but only because the rib does not approximate the funicular polygon for the single load. As a result, the shearing components on most sections of the rib are more important than would otherwise be the case.
3. The usual arch encountered in practice, however, is subjected to a series of loads, and the axis of the rib will approximate the funicular polygon for these loads. In other words, the line of pressure is nearly perpindicular to the right section at all points along the rib. Consequently, the shearing components are so small that the shearing strains are insignificant and are neglected
4. Axial strains, resulting in rib shortening, become increasingly important as the rise-to-span ratio of the arch decreases. It is advisable to determine the effects of the rib by considering flexural strains only, and then to check for effects or rib shortening.

11.4 Semi-Circular Box Girder

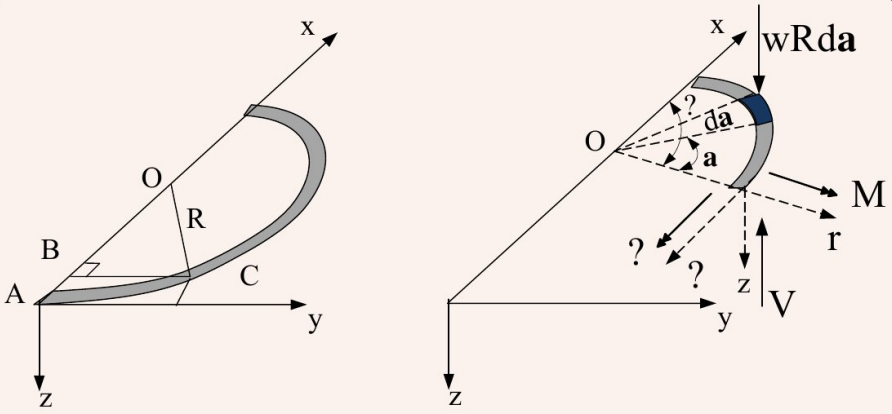
Determine the reactions of the semi-circular cantilevered box girder subjected to its own weight w.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Reactions are again determined first

From geometry we have OA=R, OB=Rcosθ, CD = BA = OA - OB = R - Rcosθ, EB = R(1+cosθ) and BC = Rsinθ. The moment arms for the moments with respect to the x and y axis are BC and EB respectively. Applying three equations of equilibrium we obtain

$$F_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta = 0 \qquad \boxed{F_z^A = wR\pi}$$

$$M_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot \sin\theta = 0 \qquad \boxed{M_z^A = 2 \cdot w \cdot R^2}$$

$$M_y^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot (1 + \cos\theta) = 0 \qquad \boxed{M_y^A = -w \cdot R^2 \cdot \pi}$$

Internal Forces are determined next

1. Shear Force:

$$\sum F_z = 0 \qquad V - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha = 0$$

$$\boxed{V = wR\theta}$$

2. Bending Moment:

$$\sum M_R = 0 \qquad M - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{M = wR^2 \cdot (1 - \cos\theta)}$$

3. Torsion:

$$\sum M_\theta = 0 \qquad T + \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha) = 0$$

$$\boxed{T = -wR^2 \cdot (\theta - \sin\theta)}$$

Deflection are determined last

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We assume a rectangular cross-section of width b and heigh d=2b and a Poisson's ratio of $\nu := 0.3$

1. Noting that the member will be subjected to both flexural and torsional deformations, we seek to determine the two stiffnesses.

2. The flexural stiffness EI is given by $EI = E\cdot\frac{b\cdot d^3}{12} = \frac{2Eb^4}{3}$

3. The torsional stiffness of solid rectangular sections $J = kb^3\cdot d$ where b is the shorter side of the section, d is the longer,

   and k is a factor equal to 0.229 for d/b=2. Hence $G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$, and $GJ = \frac{E}{2.6}\cdot 0.229\cdot b^4 = 0.176E\cdot b^4$.

4. Considering both flexural and torsional deformations, and replacing dx by rdθ:

$$\delta\cdot\overline{M}\cdot\Delta = \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI_z}\cdot R\,d\theta + \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{T}\cdot\frac{T}{GJ}\cdot R\,d\theta$$

   where the real moments were given above.

5. Assuming a virtual downward force $\delta\cdot\overline{P} = 1$, we have

$$\delta\cdot\overline{M} = R\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{T} = -R\cdot(1-\cos\theta)$$

6. Substituting these expressions into the equation for displacement (in 4)

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^2}{EI}\cdot\int_0^{\pi}(R\cdot\sin\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta + \frac{w\cdot R^2}{GJ}\cdot\int_0^{\pi}(\theta-\sin\theta)\cdot R\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta$$

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^4}{EI}\cdot\int_0^{\pi}\left[(\sin\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta) + \frac{1}{0.265}\cdot(\theta-\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta)\right]\,d\theta$$

$$\boxed{\Delta = 20.56\cdot\frac{w\cdot R^4}{EI}}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

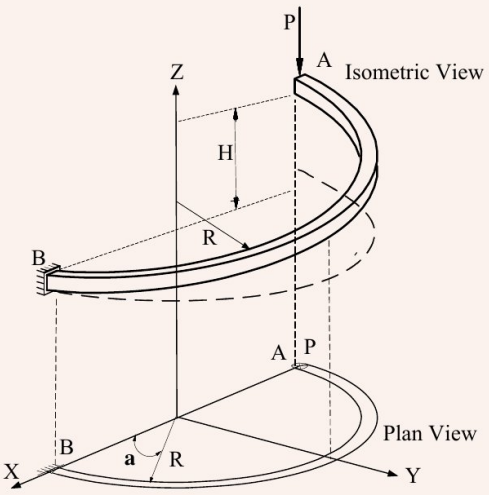
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load

Determine the internal forces N, V_s, and V_w and the internal moments T, M, and M_w along the helicoidal cantilevered girder.



Solution:

1. We first determine the geometry in terms of the angle θ

$$x(R,\theta) := R\cdot\cos(\theta) \qquad y(R,\theta) := R\cdot\sin(\theta) \qquad z(H,\theta) := \frac{H}{\pi}\cdot\theta$$

2. To determine the unit vector **n** at any point we need the derivatives

$$dx(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}x(R,\theta) \rightarrow -R\cdot\sin(\theta) \qquad dy(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}y(R,\theta) \rightarrow R\cdot\cos(\theta) \qquad dz(H,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}z(H,\theta) \rightarrow \frac{H}{\pi}$$

and then determine the unit vector

$$\mathbf{n} = \frac{-R\cdot\sin(\theta)\mathbf{i} + R\cdot\cos(\theta)\cdot\mathbf{j} + \frac{H}{\pi}\cdot\mathbf{k}}{\left[R^2\cdot(\sin\theta)^2 + R^2\cdot(\cos\theta)^2 + \left(\frac{H}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[-\sin\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\cdot\mathbf{j} + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)\cdot\mathbf{k}\right]$$

Since the denominator depends only on the geometry, it will be designated K.

3. The strong bending axis lies in a horizontal plane, and its unit vector can thus be determined

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi\cdot R}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{K}\cdot\left(\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j}\right)$$

and the absolute magnitude of this vector $\left|\mathbf{n}\times\mathbf{k}\right| = \frac{1}{K}$, and thus

$$\mathbf{s} = \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{i}$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The unit vector along the weak axis is determined

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{1}{K} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi \cdot R} \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \sin\theta \cdot \mathbf{i} - \frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

5. With the geometry definition completed, we now examine the equilibrium equations.

$$\sum F = 0 \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$

$$\sum M_b = 0 \qquad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P}$$

where

$$\mathbf{L} = (R - R \cdot \cos\theta) \cdot \mathbf{i} + (0 - R \cdot \sin\theta) \cdot \mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi} \cdot H\right) \cdot \mathbf{k}$$

and

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{P} = R \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \cos\theta & -\sin\theta & \frac{-\theta}{\pi} \cdot \frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = PR \cdot \left[-\sin\theta \cdot \mathbf{i} - (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

and

$$\mathbf{M} = PR \cdot \left[\sin\theta \cdot \mathbf{i} + (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

6. Finally, the components of the force $\mathbf{F} = -Pk$ and the moment $\mathbf{M}$ are obtained by appropriate dot products with the unit vectors

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{K} \cdot P \cdot \frac{H}{\pi \cdot R}$$

$$V_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

$$V_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{K} \cdot P$$

$$T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = -\frac{PR}{K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$M_s = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} = PR \cdot \sin\theta$$

$$M_w = \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} = -\frac{PH}{\pi \cdot K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

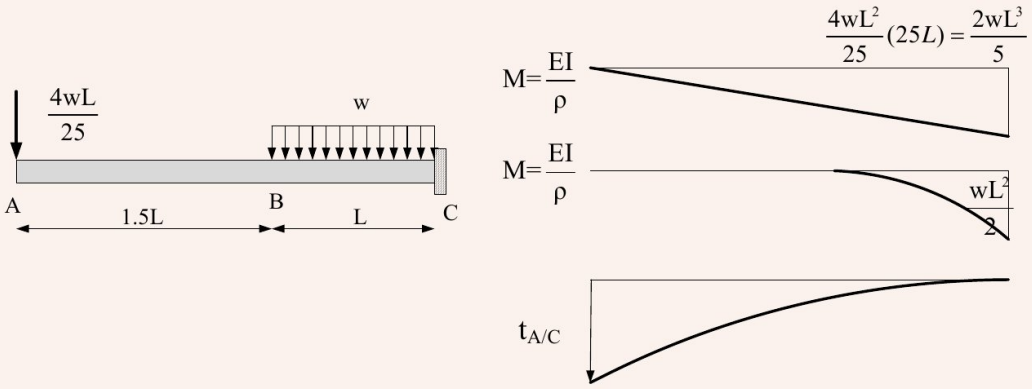
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.1 Moment Area, Cantilevered Beam

Determine the deflection at Point A



Solution:

$$EIt_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2w\cdot L^2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5L}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5L}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-w\cdot L^2}{2}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{9L}{4}\right) = \frac{-29w\cdot L^4}{24}$$

Thus,

$$\boxed{\Delta_A = \frac{-29w\cdot L^4}{24\cdot E\cdot I}}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

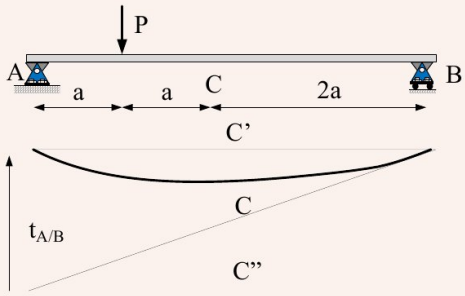
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

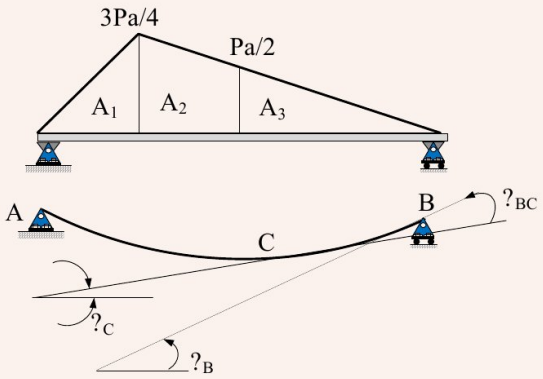
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.2 Moment Area, Simply Supported Beam

Determine Δ_C and θ_C for the following example





Solution:

Deflection Δ_C is determined from $\Delta_C = c'\cdot c = c'\cdot c'' - c''\cdot c$, $c''\cdot c = t_{CB}$, and $c'\cdot c'' = \frac{t_{AB}}{2}$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)\cdot\left(a + \frac{3a}{3}\right)\right] = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}$$

This is positive, thus above tangent from B

$$t_{CB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I}$$

Positive, thus above tangent from B. Finally,

$$\boxed{\Delta_C = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\right) - \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{11}{12}\cdot\frac{P\cdot a^3}{E\cdot I}}$$

Rotationa θ_C is

$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C \Rightarrow \theta_C = \theta_B - \theta_{BC}$$

$$\theta_{BC} = A_3$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{L}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

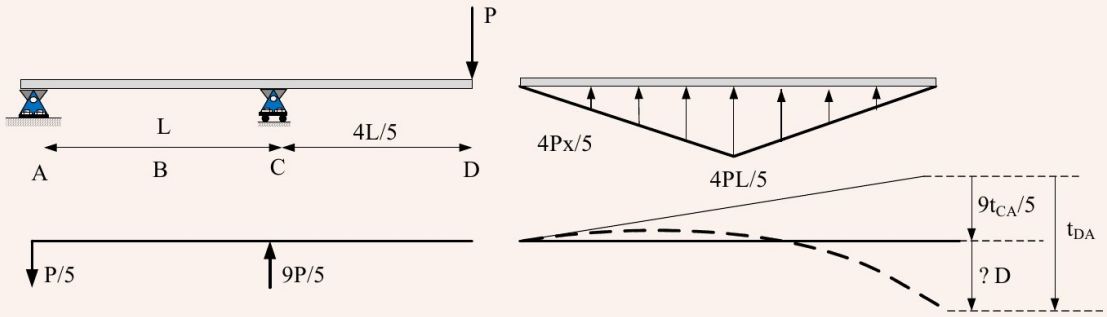
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\theta_C = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{4a} - \left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{P\cdot a^2}{8E\cdot I}$$

12.3 Maximum Deflection

Determine the deflection at D and the maximum deflection at B



Solution:

Deflection at D:

$$\Delta_D = t_{DA} - \frac{9}{5}\cdot t_{CA}$$

$$EIt_{CA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{-2P\cdot L^3}{15}$$

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$EIt_{DA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot\left(\frac{4L}{5}\right)\cdot\left(\frac{8L}{15}\right) = \frac{-234P\cdot L^3}{375}$$

$$t_{DA} = \frac{-234P\cdot L^3}{375E\cdot I}$$

Substituting we obtain

$$\Delta_D = \frac{-48}{125}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Maximum Deflection at B:

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{L} = \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4P\cdot x}{5}\right)\cdot x\right] = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I}$$

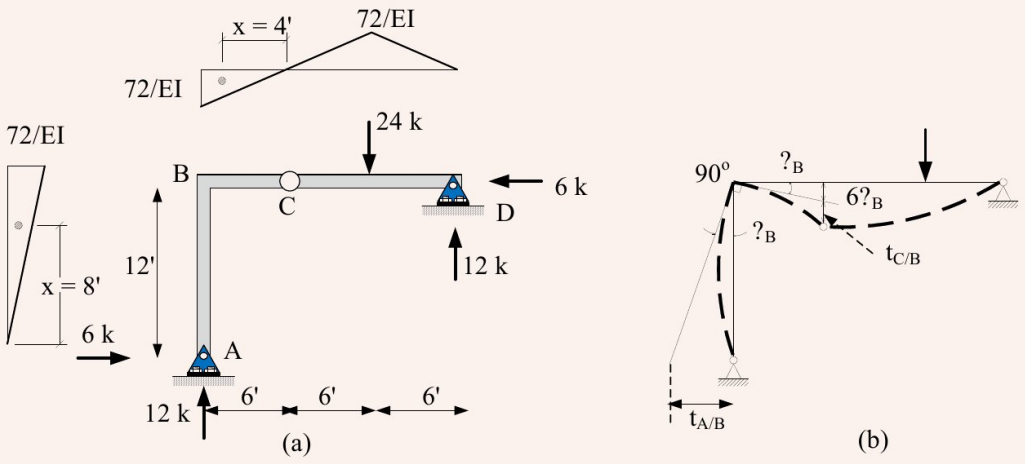
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta_{max} = \left(\frac{4P\cdot x}{5\cdot E\cdot I}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Delta_{max} = \frac{4\cdot P\cdot L^3}{45\cdot\sqrt{3}\cdot E\cdot I}}$$

12.4 Frame Deflection

Complete the following example problem

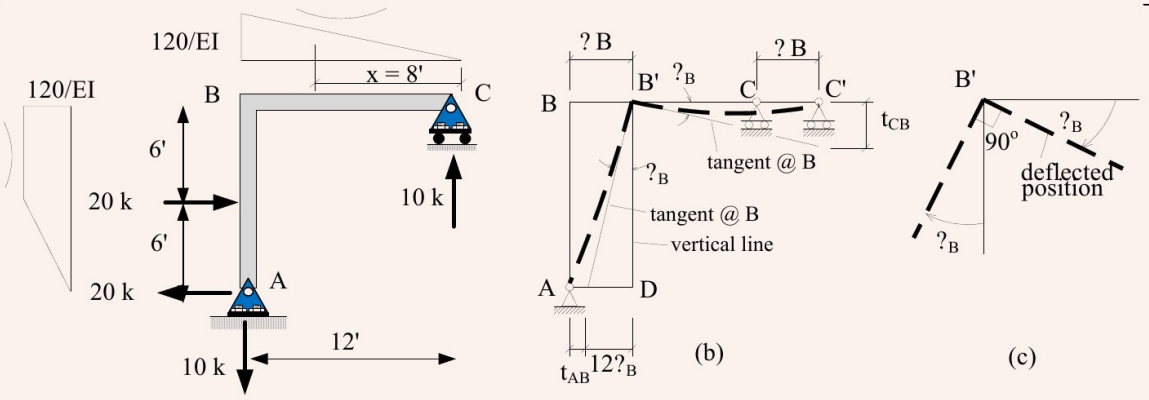


Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

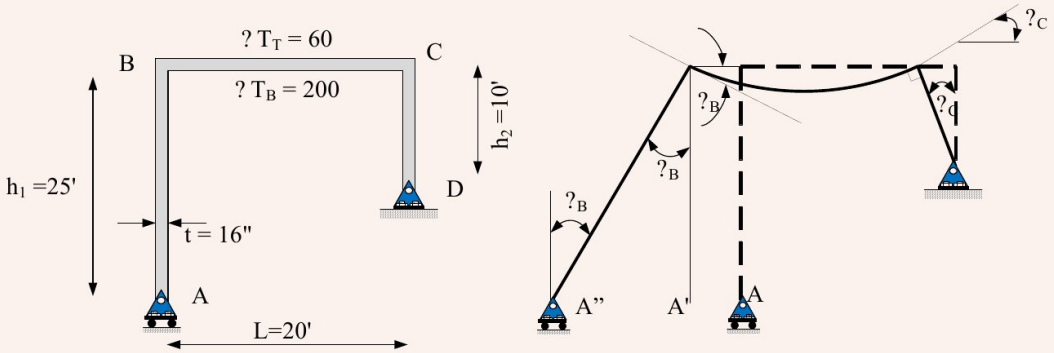
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



12.5 Frame Subjected to Temperature Loading

Neglecting axial deformation, compute displacement at A for the following frame



Solution:

1. First let us sketch the deformed shape

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2. BC flexes => $\theta_B = \theta_C \neq 0$
3. Rigid hinges at B and C with no load on AB and CD
4. Deflection at A

$$\Delta_A = A\cdot A'' = A\cdot A' + A'\cdot A''$$

$$A\cdot A' = \Delta_B = \Delta_C = \left|\theta_C\right|\cdot h_2$$

$$A'\cdot A'' = \left|\theta_B\right|\cdot h_1$$

5. We need to compute θ_B and θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \quad \text{OR} \quad \theta_C = \frac{t_{BC}}{L}$$

6. In order to apply the curvature area theorem, we need a curvature (or moment diagram)

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{E\cdot I}$$

7.

$$t_{CB} = A\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow \left|\theta_B\right| = A\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{A}{2} \quad \text{OR} \quad \theta_B = \frac{-A}{2}$$

8.

$$\theta_{CB} = A$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B$$

$$\theta_C = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

9. From above

$$\Delta_A = \left|\theta_C\right|\cdot h_2 + \left|\theta_B\right|\cdot h_1 = \frac{A}{2}\cdot h_2 + \frac{A}{2}\cdot h_1 = \frac{A}{2}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$A = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)\cdot L$$

$$\Delta_A = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(h_1 + h_2\right)$$

10. Substitute

$$\Delta_A := \left(6.5\cdot 10^{-6}\right)\cdot(200 - 60)\cdot\frac{20\text{ft}}{16\text{in}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 35\text{ft}$$

$$\boxed{\Delta_A = 2.867\cdot\text{in}}$$

11. Other numerical values

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2}$$

$$\theta_B := \frac{1}{2}\left(6.5\cdot 10^{-6}\right)\cdot\left(\frac{200 - 60}{16\text{in}}\right)\cdot 20\text{ft} = 0.006825\cdot\text{rad}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\theta_C := \theta_B = 0.006825$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)$$

$$\rho := \frac{1}{\left[\left(6.5\cdot10^{-6}\right)\cdot\left(\frac{200-60}{16in}\right)\right]} = 1465.2\cdot ft$$

12. In order to get M, we need E and I. Note the difference with other statically determinate structures; the stiffer the beam, the higher the moment; the higher the moment, the higher the stress? NO!!

13. $$\sigma = \frac{M\cdot y}{I} = \frac{E\cdot I}{\rho}\cdot\frac{y}{I} = \frac{E\cdot y}{\rho}$$

14. ρ is constant => BC is on arc of circle M is constant and $\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2}$ => $\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = c$ => $y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$

15. The slope is a parabola

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2\cdot y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Let us get curvature from the parabola slope and compare it with ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$

$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = c$$

at x=0, y=o, thus e=0

at x=0, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -0.006825rad$, thus $d = -0.006825rad$

at x=20 ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = 0.006825rad$, thus $c(20ft) - 0.006825 = 0.006825$, thus $c = 6.825\cdot10^{-4}$

$$y = 6.825\cdot10^{-4}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.825\cdot10^{-4}\cdot(x-10)$$

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = 6.825\cdot10^{-4}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\phi := 6.825 \cdot 10^{-4}$

$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.2 \cdot ft$ as expected!

If we were to use the exact curvature formula $\frac{\frac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$\phi := \frac{6.825 \cdot 10^{-4}}{\left[1 + (0.006825)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.000682$

$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.3 \cdot ft$

12.6 Conjugate Beam

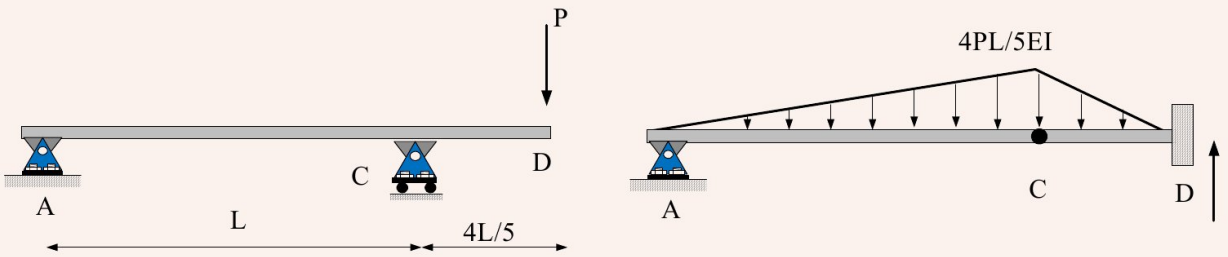
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Analyze the following beam



Solution:

3 equations of equilibrium and 1 equation of condition = 4 = number of reactions. Deflection at D = Shear at D of the corresponding conjugate beam (Reaction at D) Take AC and ΣM with respect to C

$$R_A \cdot (L) - \left(\frac{4P \cdot L}{5E \cdot I}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$R_A = \frac{2 \cdot P \cdot L^3}{15E \cdot I}$$

(Slope in real beam at A) As computed before. Let us dram the moment diagram for the conjugate beam

$$M = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{2}{15} \cdot L^2 \cdot x - \frac{2}{15} \cdot x^3\right) = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - x^3\right)$$

Point of maximum moment (Δ_{max}) occurs when $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

as previously determined

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left[L^2 \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right]$$

$$M = \frac{4P \cdot L^3}{45 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$ as before

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

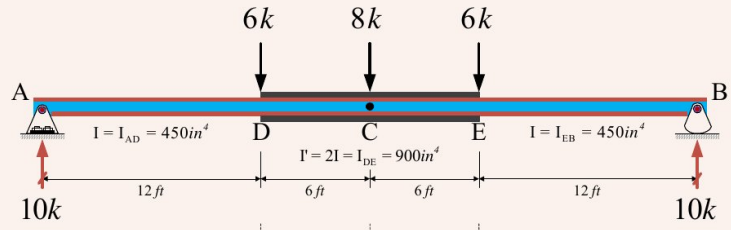
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

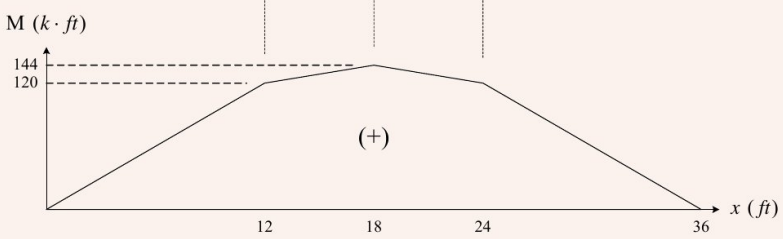
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.7 Conjugate Beam

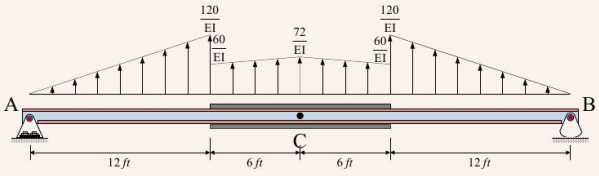
Analyze the following beam

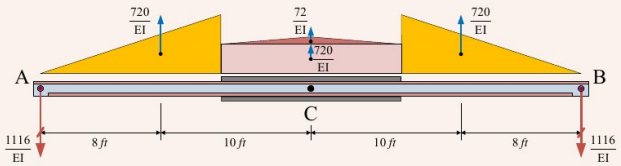


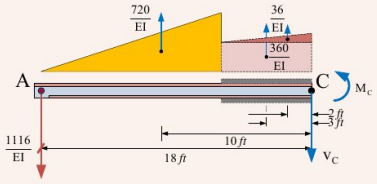


Solution:

From simple observation, the reactions at A and B are equal to 10 k. The elastic load on the conjugate beam is then shown below.







We next seek to determine the internal moment at C' in the conjugate beam. It is obtained from equilibrium:

$$\sum M_z^B = 0 \qquad \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft - \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft - \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft - \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft + M_{C'} = 0$$

$E := 29\cdot 10^3 ksi$

$I := 450in^4$

$\Delta_C = M_{C'}$

$$\Delta_{C'} := \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft + \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft + \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft - \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft = -1.554\cdot in$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

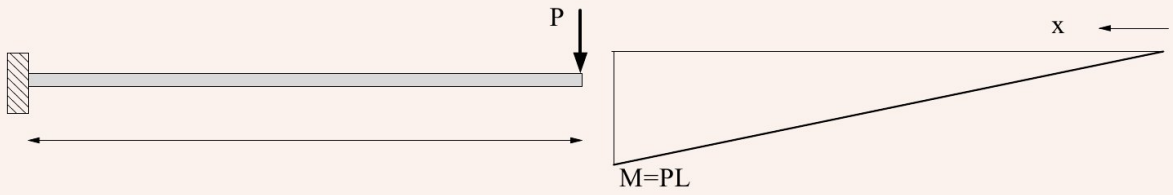
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.1 Deflection of a Cantilever Beam

Determine the deflection of the cantilever beam with span L under a point load P at its free end. Assume constant EI.



Solution:

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2\cdot E\cdot I}\,dx$$

$$M = -P\cdot x$$

$$U(P, L, EI) := \frac{P^2}{2\cdot EI}\cdot \int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f = \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\boxed{\Delta_f = \frac{P\cdot L^3}{3\cdot EI}}$$

Note that the solution of this problem was facilitated by the fact thatΔ_f is co-alligned with P.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

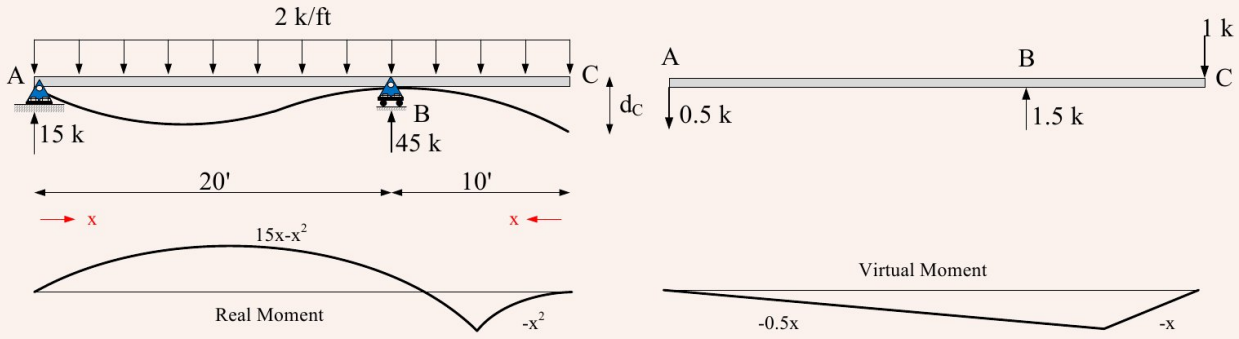
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection

Determine the deflection at point C. $E := 29000ksi$, $I := 100in^4$



Solution:

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	$15x - x^2$	- 0.5x
BC	C	$- x^2$	- x

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

$$\Delta_C \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta_C = \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx \rightarrow \frac{2500}{EI}$$

$$\Delta_C := \frac{2500kip \cdot ft^3}{E \cdot I} = 1.49 \cdot in$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

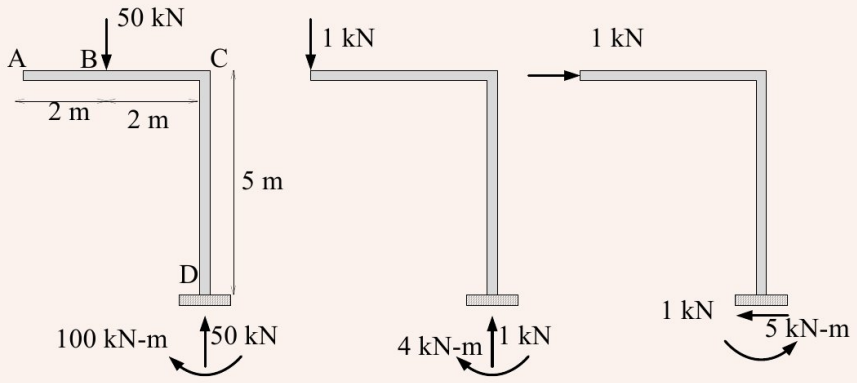
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

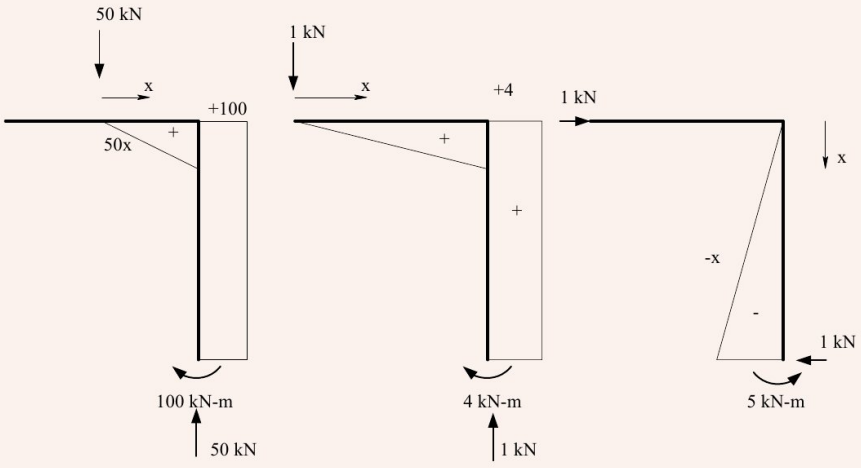
13.3 Deflection of a Frame

Determine both the vertical and horizontal deflection at A for the frame shown. $E := 200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$, $I := 200 \cdot 10^6 mm^4$



Solution:

To analyze the frame we must determine analytical expressions for the moments along each member for the real load and the two virtual ones. One virtual load is a unit horizontal load at A, and the other a unit vertical one at A



Element	x = 0	M	δM_v	δM_h
AB	A	0	- x	0
BC	B	- 50x	- 2 - x	0
CD	C	100	4	- x

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the inside of the frame. Substitution yields:

$$\Delta_v \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_v = \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_v(EI) := \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow \frac{7000}{3 \cdot EI}$$

$$\Delta_v := \frac{7000 kN \cdot m^3}{3 \cdot E \cdot I} = 5.833 \cdot cm$$

Similarly for the horizontal displacement

$$\Delta_h \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_h = \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_h(EI) := \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow -\frac{1250}{EI}$$

$$\Delta_h := \frac{-1250 kN \cdot m^3}{E \cdot I} = -3.125 \cdot cm$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

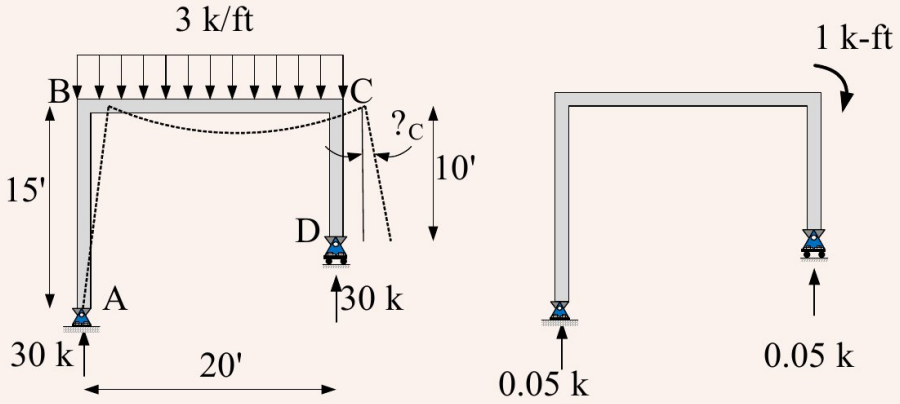
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.4 Rotation of a Frame

Determine the rotation of joint C for the frame shown. $E := 29000\text{ksi}$, $I := 240\text{in}^4$



Solution:

In this problem the virtual force is a unit moment applied at joint C, $\delta\cdot\overline{M_e}$. It will cause an internal moment $\delta\cdot\overline{M_i}$.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	- 0.05x
CD	D	0	0

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the outside of the frame. Substitution yields:

$$\theta_C \cdot \delta \cdot \overline{M_e} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

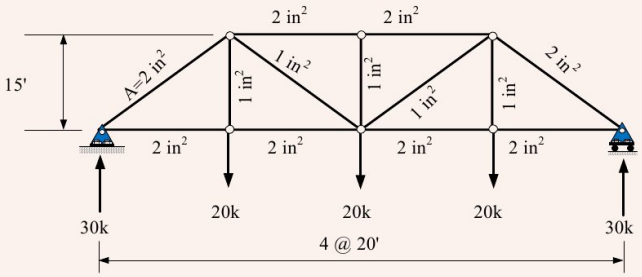
$$1 \cdot \theta_C = \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx$$

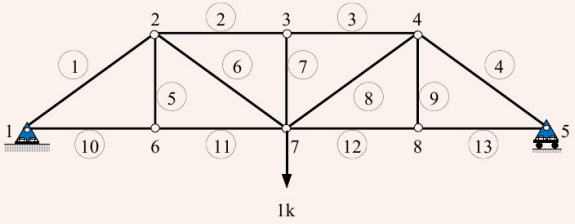
$$\theta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx \rightarrow -\frac{1000}{EI}$$

$$\theta_C := \frac{-1000\,kip \cdot ft^2}{E \cdot I} = -0.021 \cdot rad$$

13.5 Truss Deflection

Determine the vertical deflection of joint 7 in the truss shown $E := 30000ksi$





Solution:

Two analyses are required. One with the real load, and the other using a unit vertical load at joint 7. Results for those analyses are summarized below. Note that advantage was taken of the symmetric load and structure.

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8

Victor E. Saouma Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Total							4220.3

$$\Delta \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{A \cdot E}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta = \Sigma \delta \cdot \bar{P}_e \cdot \frac{P_e \cdot L}{A \cdot E}$$

$$\Delta := \frac{4220.3 \frac{kip \cdot ft}{in^2}}{E} = 1.688 \cdot in$$

13.6 Torsional and Flexural Deformation

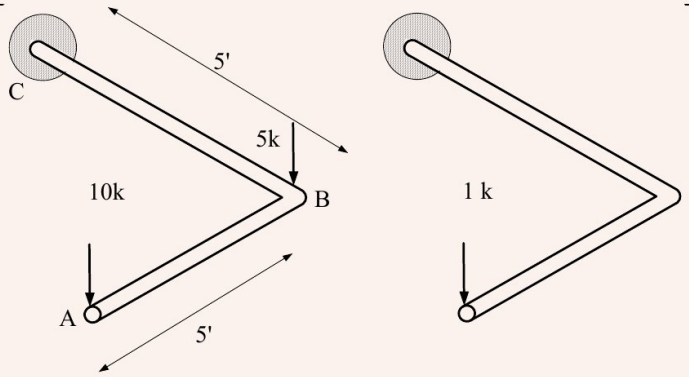
Determine the vertical deflection at A in the structure shown. $E := 30000ksi$, $I := 144in^4$, $G := 12000ksi$, $J := 288in^4$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. In this problem we have both flexural and torsional deformation. Hence we should determine the internal moment and torsion distribution for both the real and the unit virtual load.
2. Then we will use the following relation

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

3. The moment and torsion expressions are given by

Element	x = 0	M	δM	T	δT
AB	A	10x	x	0	0
BC	B	15x	x	50	5

4. Substituting

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

$$1\cdot\Delta_A = \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{EI}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{EI}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{GJ}\,dx$$

$$\Delta_A(E,I,G,J) := \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{G\cdot J}\,dx \rightarrow \frac{3125}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250}{G\cdot J}$$

$$\Delta_A := \frac{3125\,kip\cdot ft^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250\,kip\cdot ft^3}{G\cdot J} = 1.042\cdot in$$

13.7 Flexural and Shear Deformations in a Beam

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Determine the deflection of a cantilevered beam, of length L, subjected to an end force P due to both flexural and shear deformations. Assumed G=0.4E and a square solid beam cross section.

Solution:

1. The virtual work equation is

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot(x)\cdot d\phi(x)\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}\cdot(x)\cdot\gamma_{xy}(x)\,dx = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx$$

2. The first integral yields for M=Px, and $\bar{\delta}\cdot M = 1\cdot x$

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx$$

$$\frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{94280057135446.5\cdot N\cdot ft^3}{EI}$$

3. The second integral represents the contribution of the shearing action to the total internal virtual work and hence to the total displacement.

4. Both the real shear V and the virtual shear $\bar{\delta}\cdot\bar{V}$ are constant along the length of the member, hence

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx = \frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx$$

$$\frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx \rightarrow \frac{374606093684.841\cdot N\cdot GPa\cdot ft}{GA}$$

5. Since $\lambda := 1.2$ for a square beam; hence

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

then

$$\Delta = \frac{P\cdot L}{3\cdot E}\cdot\left(\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right) = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left(\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right)$$

6. Choosing $L := 20ft$ and $h := 1.5ft$ (L/h=13.3)

$$\Delta = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left[1.33\cdot\left(\frac{20ft}{1.5ft}\right)^2 + 1\right] = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot(237 + 1)$$

Thus the flexural deformation is 237 times the shear displacement. This comparison reveals why we normally neglect shearing deformation in beams. As the beam get shorter or deeper, or as L/h decreases, the flexural deformation decreases relative to the shear displacement. At L/h=5, the flexural deformation has reduced to $1.33\cdot 5^2 = 33.25$ times the shear displacement.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

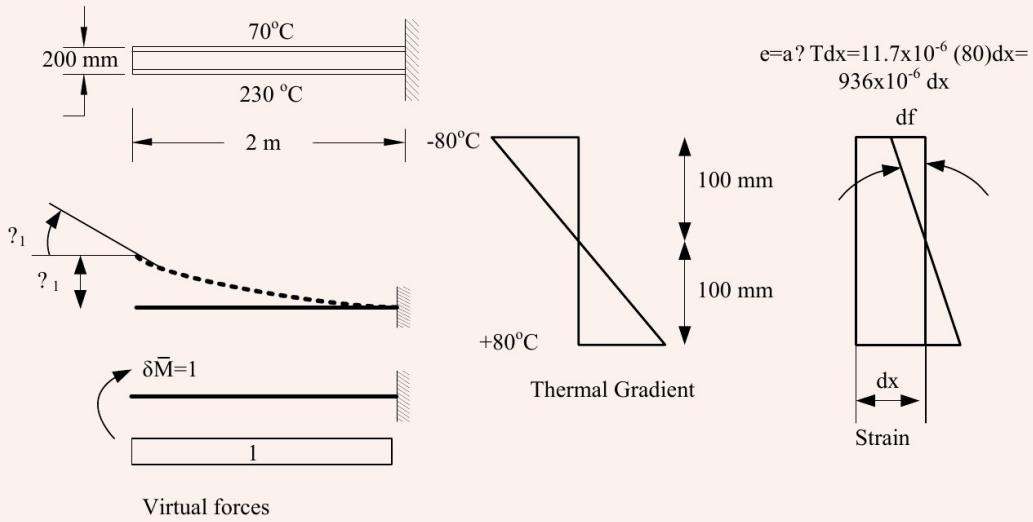
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.8 Thermal Effects in a Beam

Consider the cantilever beam shown. If the beam is a steel, wide flange section, 2 m long and 200 mm deep, what is the angle of rotation, θ_1, at the end of the beam caused by the temperature effect? The original uniform temperature of the beam was 40C.



Solution:

1. The external vurtual force conforming to the desired real displacement θ_1 is a moment $\delta\cdot\overline{M} = 1$ at the tip of the cantilever, producing an external work term of moment times rotation. The internal virtual force system for this cantilever beam is a uniform moment $\delta\cdot\overline{M_{int}} = 1$.
2. The real internal deformation results from (a) the average beam temperature of 150C, which is 110C above that of the original temperature, and (b) the temperature gradient of 160C across the depth of the beam.
3. The first part of the thermal effect produces only a lengthening of the beam and does not enter into the work equation since the virtual loading produces no axial force corresponding to an axial chnge in length of the beam.
4. The second effect (thermal gradient) produces rotation $d\phi$, and an internal virtual work term of $\int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$
5. We determine the value of $d\phi$ by considering an extreme fiber thermal strain as shown above. The angular rotation in the length dx is the extreme fiber thermal strain divided by half the beam depth.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon}{y} = \phi$$

$$1\cdot\theta_1 = \int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$$

$$\theta_1 = \int_0^L 1\cdot\frac{\alpha\cdot\left(T_B - T_T\right)}{h}\, dx$$

$$\theta_1 := \frac{11.7\cdot10^{-6}\,\frac{m}{m}\cdot(230 - 70)\cdot 2m}{0.2m} = 0.01872\cdot rad$$

6. This example raises the following points
   a) The value of θ_1 would be the same for any shape of 200 mm deep steel beam that has its neutal axis of bending at middepth

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

b) Curvature is produced only by thermal gradient and is independent of absolute temperature values.
c) The calculation of rotations by the method of virtual forces is simple and straightforward; the applied virtual force is a moment acting at a point where rotation is to be calculated.
d) Internal angular deformation $d\phi$ has been calculated for an effect other than load-induced stresses. This extension of the method of virtual forces to treat inelastic displacements is obvious - all we need to know is a method for determining the inelastic internal deformations.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

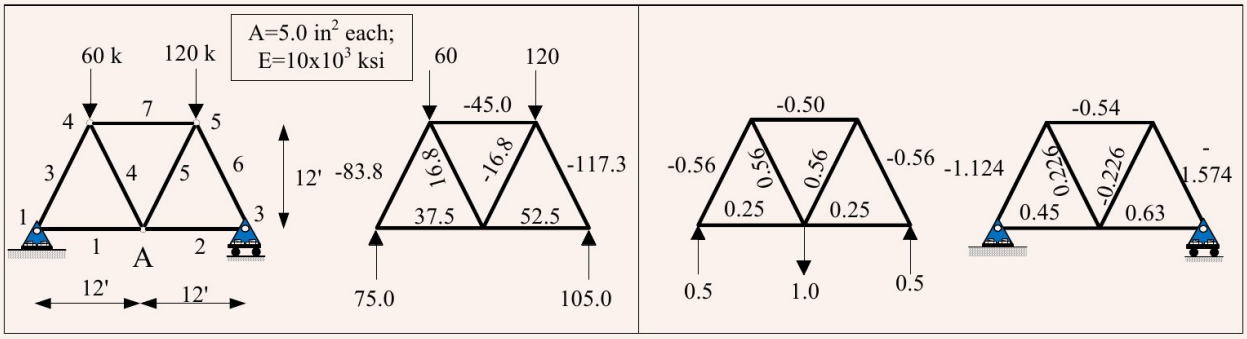
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.9 Deflection of a Truss

Determine the deflection at node 2 for the truss shown



Solution:

Member	δP kip	P^e kip	L ft	A in^2	E ksi	δPPL/AE
1	0.25	37.5	12	5	10×10^3	22.5×10^{-4}
2	0.25	52.5	12	5	10×10^3	31.5×10^{-4}
3	-0.56	-83.8	13.42	5	10×10^3	125.9×10^{-4}
4	0.56	16.8	13.42	5	10×10^3	25.3×10^{-4}
5	0.56	-16.8	13.42	5	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5	10×10^3	176.6×10^{-4}
7	-0.5	-45	12	5	10×10^3	54×10^{-4}
Total						410.5×10^{-4}

The deflection is thus given by

$$\delta \cdot \bar{P} \cdot \Delta = \sum_{n=1}^{7} \left(\delta \cdot \bar{P}_e \cdot \frac{PL}{AE} \right)$$

$$\Delta := 410.5 \cdot 10^{-4} \cdot ft = 0.493 \cdot in$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

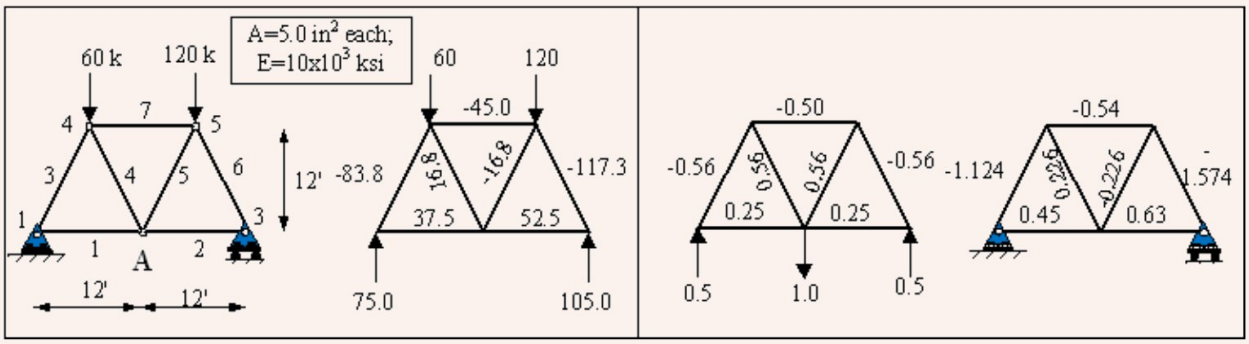
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.10 Thermal Deflection of a Truss; I

The truss shown is built such that the lower chords are shielded from the rays of the sun. On a summer day the lower chords are 30F cooler than the rest of the truss members. What is the magnitude of the vertical displacement at joint 2 as a result of this temperature difference?



Solution:

1. The virtual force system remains identical to that of the previous example because the desired displacement component is the same.
2. The real internal displacements are made up of the shortening of those members of the truss that are shielded from the sun.
3. Both the bottom chord members 1 and 2 thus shorten by

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\Delta L := \left(0.0000128 \frac{\text{in}}{\text{in} \cdot \Delta°\text{F}}\right)(30 \cdot \Delta°\text{F}) \cdot 12\text{ft} = 0.0553 \cdot \text{in}$$

4. Then,

$$1 \cdot \Delta = \sum \delta \cdot \bar{P} \cdot \Delta L$$

$$\Delta := 0.25(-\Delta L) + 0.25(-\Delta L)$$

$$\Delta = -0.0276 \cdot \text{in}$$

5. The negative sign n the displacement indicates that it is in opposite sense of the displacement; the assumed direction is always identical to the direction of the applied virtual force.
6. Note that the same result would be obtained if we had considered the internal displacements to be made up of lengthening of all truss members above the bottom chord.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

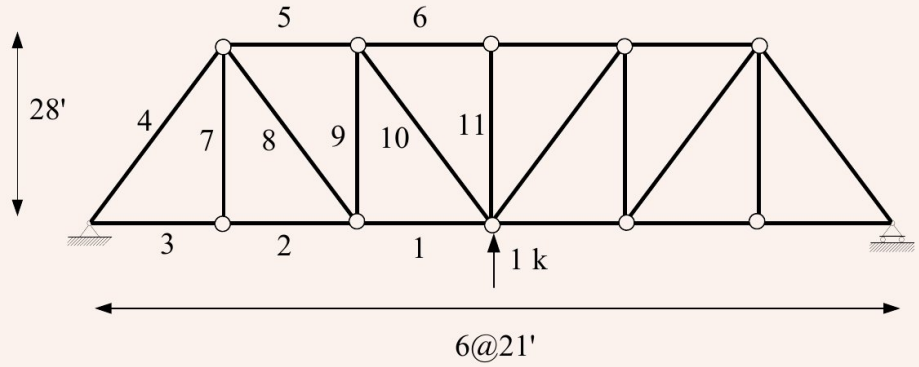
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.11 Thermal Deflection of a Truss; II

A six panel highway bridge is constructed with sidewalks outside the trusses so that the bottom chords are shaded. What will be the vertical deflection component of the bottom chord at the center of the bridge when the temperature of the bottom chord is 40F (ΔT) below that of the top chord, endposts, and webs? (coefficient of steel thermal expansion is $\alpha := 0.0000065 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$



Solution:

1. The deflection is given by

$$\Delta \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{AE}\, dx = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P}_i \cdot \frac{P_i \cdot L_i}{AE} = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P}_i \cdot \Delta L_i = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P}_i \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

where ΔL is the temperature change in length of each member, and $\bar{\delta} \cdot \bar{P}$ are the member virtual internal forces

2. Taking advantage of symmetry (Note that we ignor members 1-3 because we assumed that they had the reference temperature, and all other members are subjected to a relative temperature increase of 40F)

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
4	35	0.0091	0.625	0.00568
5	21	0.00546	0.75	0.00409
6	21	0.00546	1.13	0.00616
7	0	0	0	0
8	35	0.0091	-0.625	-0.00568
9	28	0.00728	0.5	0.00364
10	35	0.0091	-0.625	-0.00568
11	0	0	0	0
Total				0.00821

3. Hence the total deflection is

$$\Delta := 2 \cdot 0.00821\,ft = 0.197 \cdot in$$

4. A more efficient solution would have consisted in considering members 1, 2, and 3 only and applying ΔT=-40F, we would obtain

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

the same displacement.

5. Note that the forces in members 1, 2, and 3 (-0.75, -0.375, and -0.375 respectively) were not included in the table because the corresponding ΔT=0.

6. A simple solution would have $\Delta T := -40 \cdot \Delta°F$ in members 1, 2,and 3 thus

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
1	21	-0.00546	-0.75	0.004095
2	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
3	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
Total				0.00819

$\Delta := 2 \cdot 0.00819 ft = 0.197 \cdot in$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

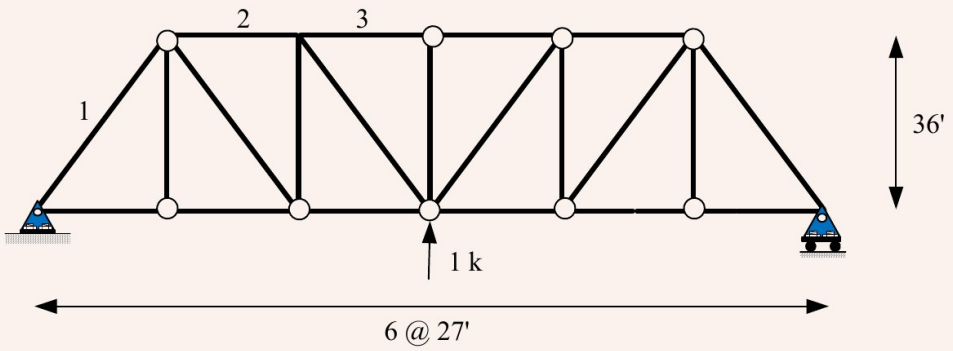
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.12 Truss with Initial Camber

It is desired to provide 3 in. of camber at the center of the truss shown below by fabricating the endposts and top chord members additionally long. How much should the length of each endpost and each panel of the top chord be increased?



Solution:

1. Assume that eachtop chord is increased 0.1 in.

Member	δP_{int} kip	ΔL in	$\delta P \Delta L$
1	0.625	0.1	0.0625
2	0.75	0.1	0.075
3	1.125	0.1	0.1125
Total			0.25

Thus,

$$2 \cdot 0.25\text{in} = 0.5 \cdot \text{in}$$

2. Since the structure is linear and elastic, the required increase of length for each section will be

$$\frac{3\text{in}}{0.5\text{in}} \cdot 0.1\text{in} = 0.6 \cdot \text{in}$$

3. If we use the practical value of 0.625in

$$\boxed{\frac{0.625\text{in} \cdot 0.5\text{in}}{0.1\text{in}} = 3.125 \cdot \text{in}}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

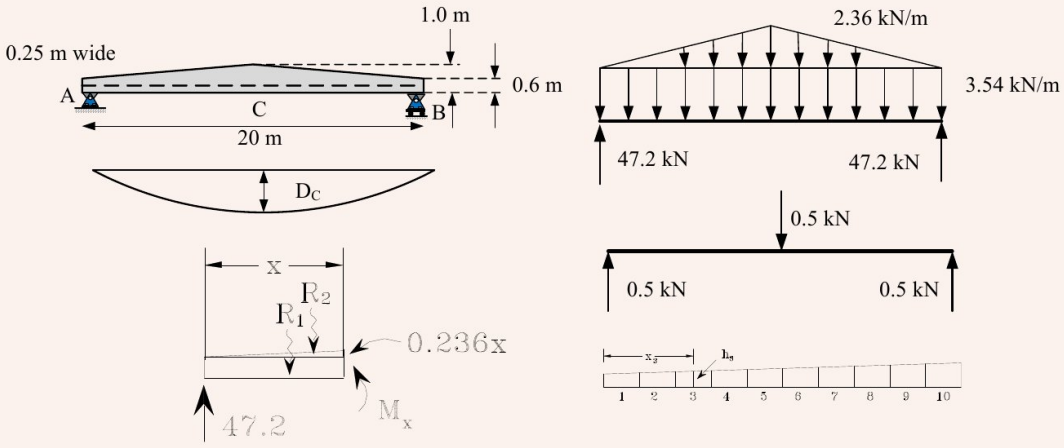
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.13 Prestressed Conrete Beam with Continuously Variable I

A prestressed concrete beam is made of variable depth for proper location of the straight pretensioning tendon. Determine the midspan displacement (point c) produced by the dead weight of the girder. The concrete weighs $w := 23.6\frac{kN}{m^3}$ and has $E := 25000MPa$. The beam is 0.25m wide.



Solution:

1. We seek an expression for the real moment M. This is accomplished by first determining the reactions and then considering the free body diagram.
2. We have the intermediary resultant forces

$$R_1(x) := 0.25m \cdot x \cdot 0.6m \cdot w \rightarrow \frac{3.54 \cdot kN \cdot x}{m}$$

$$R_2(x) := \frac{1}{2} \cdot 0.25m \cdot x \cdot \frac{0.4m}{10m} \cdot x \cdot w \rightarrow \frac{0.118 \cdot kN \cdot x^2}{m^2}$$

Hence,

$$M(x) := 47.2x - 3.54x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) - 0.118x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow 47.2 \cdot x + -0.039 \cdot x^3 + -1.77 \cdot x^2$$

3. The moment of inertia of the rectangular beam varies continuously and is given, for the left half of the beam, by

$$I(x) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$I(x) := \frac{1}{12}\cdot(0.25)\cdot(0.6 + 0.04x)^3 \rightarrow 0.021\cdot(0.04\cdot x + 0.6)^3$$

4. Thus, the real angle changes produced by the dead load bending are

$$d\phi = \frac{M}{EI}\cdot dx = \frac{47.2\cdot x + -0.039\cdot x^3 + -1.77\cdot x^2}{E\cdot\left(\frac{1}{48}\right)\cdot(0.6 + 0.04x)^3}$$

5. The virtual force system corresponding to the desired displacement is shown above with $\delta\cdot\overline{M} = \frac{1}{2}\cdot x$ for the left half of the span.

Since the beam is symmetrical, the virtual work equations can be evaluated for only one half of the beam and the final answer is then obtained by multiplying the half-beam result by two.

6. The direct evaluation of the integral $\int \delta\cdot\overline{M}\, d\phi$ is difficult beause of the expression for dϕ. Hence we shall use a numerical procedure, replacing the $\int \delta\cdot\overline{M}\cdot\left(\frac{M}{EI}\right) dx$ with the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$, where each quantity in the summation is evaluated at the center of the interval Δx and held constant over the interval length. As Δx becomes very short, the solution approaches the exact answer.

7. An interval length of 1 meter, giving 10 elements in the half length of the beam, is chosen to establish an accurate result.

8. The internal virtual work quantity is then

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\, dx \sim \sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\cdot\Delta x\right] = \sum\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{E\left(\frac{0.25}{12}\right)\cdot h^3}\cdot\Delta x = \frac{48}{E}\cdot\sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{h^3}\cdot\Delta x\right]$$

9. The summation for the 10 elements in the left half of the beam gives

Segment	x	h	h^3	M	δM	$M\delta M/h^3$
1	0.5	0.62	0.238	23.2	0.25	24
2	1.5	0.66	0.288	66.7	0.75	174
3	2.5	0.7	0.343	106.4	1.25	388
4	3.5	0.74	0.405	150	1.75	648
5	4.5	0.78	0.475	173	2.25	820
6	5.5	0.82	0.551	200	2.75	998
7	6.5	0.86	0.636	222	3.25	1134
8	7.5	0.9	0.729	238	3.75	1224
9	8.5	0.94	0.831	250	4.25	1279
10	9.5	0.98	0.941	256	4.75	1292
Total						7981

10. The SI units should be checked for consistency. Letting the virtual force carry the units of kN, the virtual moment has the

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

units of m-kN, and the units of the equation

$$\frac{1}{kN}\cdot\frac{(m\cdot kN)\cdot(m\cdot kN)}{\frac{MN}{m^2}\cdot m^4}\cdot m = \frac{m}{1000} = mm$$

11. Then

$$\int_0^L \frac{\delta\cdot\overline{M}\cdot M}{EI}\,dx$$

$$2\cdot\left(\frac{48}{25000}\right)\cdot 7981\cdot 1\cdot mm = 30.65\cdot mm$$

and the deflection at midspan is

$$\Delta_c := 30.65\ mm$$

12. Acceptably accurate results may be obtained with considerably fewer elements (longer intervals Δx). Using four elements with centers at 2, 5, 8, and 10, the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$ is

$$3(174) + 3\cdot(820) + 3\cdot(1224) + 1\cdot(1292) = 7946$$

which is only 0.4% lower than the 10 element solution. If we go to two elements, 3 and 8, we obtain a summation of $5\cdot 388 + 5\cdot 1224 = 8060$ which is 1% high. A one element solution, with x=5m and h=0.8m, gives a summation of 9136 which is 14.4% high and much less accurate than the 2 element solution.

13. Finally, it should be noted that the calculations involved in this example are essentially identical to those necessary in the moment area method.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.1 Steel Building Frame Analysis

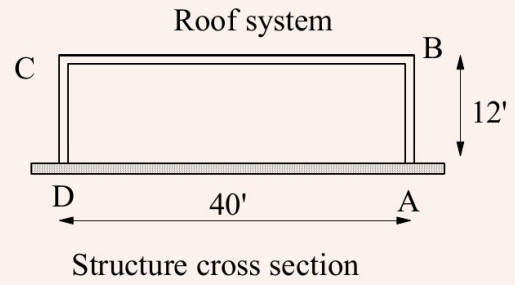
A small, mass-produced industrial building is to be framed in structural steel with a typical cross as shown below. The engineer is considering three different designs for the frame: (a) for poor or unknown soil conditions, the foundation for the frame may not be able to develop any dependable horizontal forces at its bases. In this case the idealized base conditions are a hinge at one of the bases and a roller at the other; (b) for excellent soil conditions with properly designed foundations, the base of the frame legs will have no tendency to move horizontally, and the idealized base condition is that of hinges at both points A and D; and (c) a design intermediate to the above cases, with a steel tie member capable of carrying only tension running between points A and D in the floor of the building. The foundations would not be expected to provide any horizontal restraint for this latter case, and the hinge-roller details at points A and D would apply. Critical design loads for a frame of this type are usually the gravity loads (deal load + snow load) and the combination of dead load and wind load. We will restrict our attention to the first condition, and will use a snow load of $S := 30\text{psf}$ and an estimated total dead load of $D := 20\text{psf}$. With frames spaced at $\text{spacing} := 15\text{ft}$ on centers along the length of the building, the design load is $w_{total} := \text{spacing}\cdot(S + D) = 750\cdot\frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$. If the frame is made of steel beam sections 21 in. deep and weight 62 lb/ft of length (W 21x62), and the member for design (c) is tentatively chosen as a 2 in^2 bar, determine the bending moment digrams for the three designs and discuss the alternate solutions

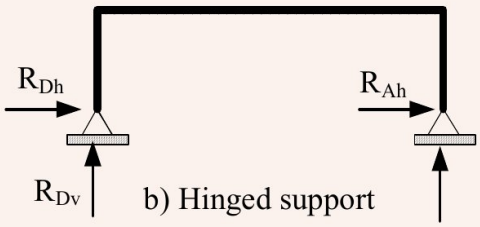
Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

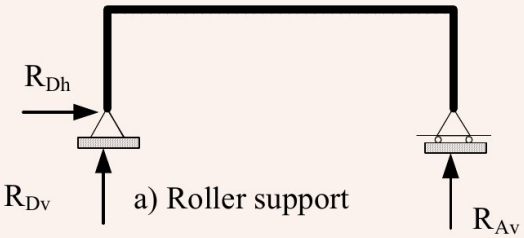
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

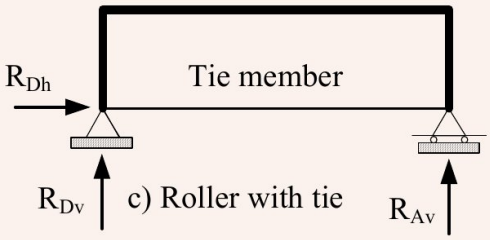
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



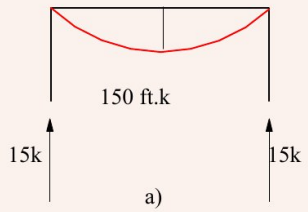


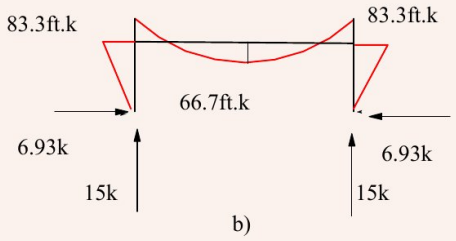


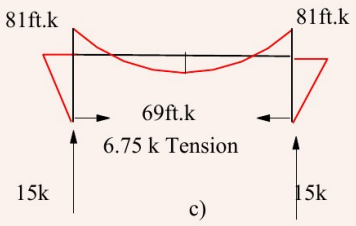


Solution:

Structure a This frame is statically determinate since it has three possible unknown external forces acting on it. Final bending moments are shown below.







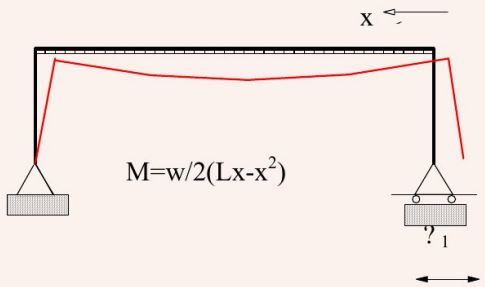
Structure b Hinging both legs of the frame results in another unknown force, making the structure statically indeterminate to the first degree (one redundant).
1. A lateral release at point A is chosen, with the redundant shearing force R1. The displacement Δ_1 in the primary structure, as a result of the real loading, shown in the figure below, is computed by virtual work.
2. The virtual force system produces virtual bending moment $\delta \cdot \overline{M}$, which is uniform across the top member of the frame.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

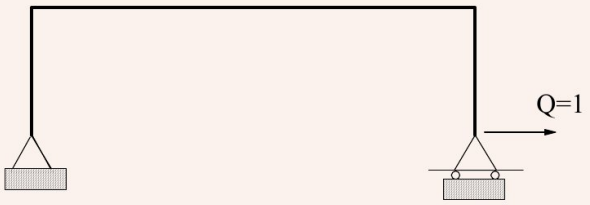
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

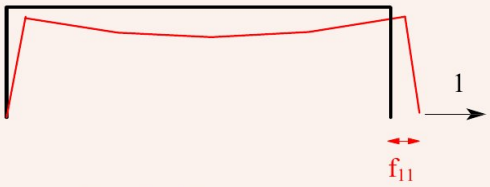
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



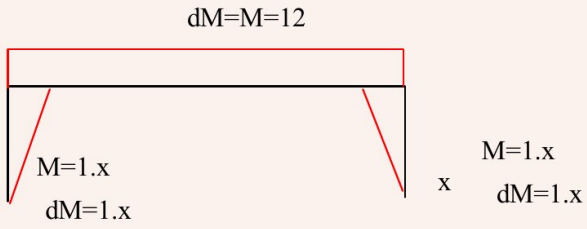
a) Moment caused by actual load on primary structure



b) Virtual forces



c) Real load for determining f_{11}



d) Moments produced by virtual forces and unit redundant

The virtual moment acting through the real angle changes given the internal work term

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

3. Equating this to the external virtual work of $1\cdot\Delta_1$, we have

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3$$

$$\Delta_1(EI) := \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3 \rightarrow \frac{48000\cdot ft^3\cdot kip}{EI}$$

4. The equation of consistent displacement is $\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$. The flexibility coefficient f_{11} is computed by applying a unit horizontal force at the release and determining the displacement at the same point.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5. It is seen that the real loading and the virtual loading are identical for the calculations, and

$$1 \cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right)$$

or

$$f_{11}(EI) := 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right) \cdot kip \cdot ft^3 \rightarrow \frac{6912 \cdot ft^3 \cdot kip}{EI}$$

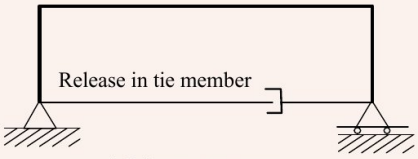
6. solving for R1

$$\frac{1}{EI} \cdot \left(48000 + 6912 R_1\right) = 0$$

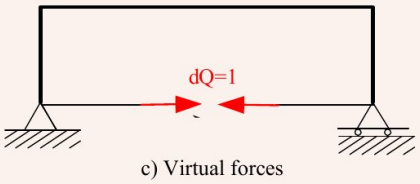
or

$$R_1 := \frac{48000}{6912} \cdot kip = 6.944 \cdot kip$$

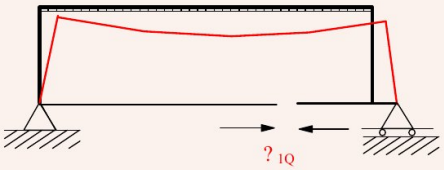
Structure c The frame with the horizontal tie between the points A and D has three unknown external forces. However, the structure is statically indeterminate to the first degree since the tie member provides one degree of internal redundancy.
1. The logical release to choose is a longintudinal release in the tie member, with the associated longitudinal displacement and axial force.
2. The primary structure is the frame with the tie member released.



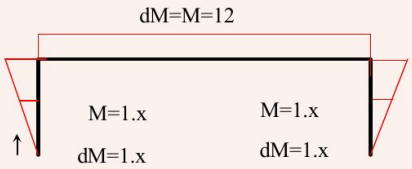
a) Primary structure



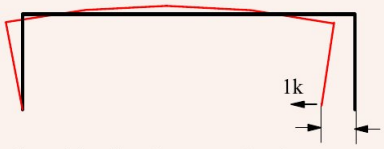
c) Virtual forces



b) Actual loading on primary structure



e) Moments produced by virtual forces and unit redundants



d) Real loading for computing f_{11} f_{11}

The compatability equation is based on the fact that the displacement at the release must be zero; that is, relative displacement of the two sections of the tie at the point of release must be zero, or

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

where

Δ_1 displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Δ_1 = displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

f_{11} = relative displacement at release 1 for a unit axial force in the member

R_1 = force in the tie member in the original structure

3. Virtual work is used to determine both displacement terms.
4. The value of Δ_1 is identical to the displacement for structure (b) because the tie member has no forces (and consequently no deformation) in the primary structure. Thus,

$$\Delta_1 := \frac{48000\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} = 2.083\cdot\text{in}$$

5. The flexibility coefficient f_{11} is composed of two separate effects: a flexural displacement due to the flexibility of the frame, and the axial displacement of the stressed tie member. The virtual and real loadins for this calculation are shown in the previous figure.

$$1\cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x\cdot\frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12\cdot\frac{12}{EI}\,dx\right) + \delta\cdot P\cdot\frac{PL}{EA}$$

$$1f_{11} = \frac{6912}{EI} + \frac{1\cdot 1\cdot 40}{EA}$$

$$f_{11} := \left(\frac{6912\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} + \frac{40\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}}{30000\text{ksi}\cdot 2\text{in}^2}\right)\cdot\frac{1}{\text{kip}} = 0.308\cdot\frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

6. The equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$$

or

$$R_1 := \frac{-\Delta_1}{f_{11}} = -6.764\cdot\text{kip}$$

7. The two displacement terms in the equation must carry opposite signs to account for their differences in direction.

Comments The bending moment in the frame differes only slightly from that of structure (b). In other words, the tie member has such high axial stiffness that it provides nearly as much restraint as the foundation of structure (b). Frames with tie members are used widely in industrial buildings. A lesson to be learned here is that it is easy to provide high stiffness through an axially loaded member.
The maximum moment in frames (b) and (c) is about 55% of the maximum moment in frame (a). This effect of continuity and redundancy is typical - the positive bending moments in the members are lowered while the joint moments are increased and a more economical design can be realized. Finally, we should notice that the vertical reactions at the bases of the columns do not change with the degree of horizontal restraint at the bases.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

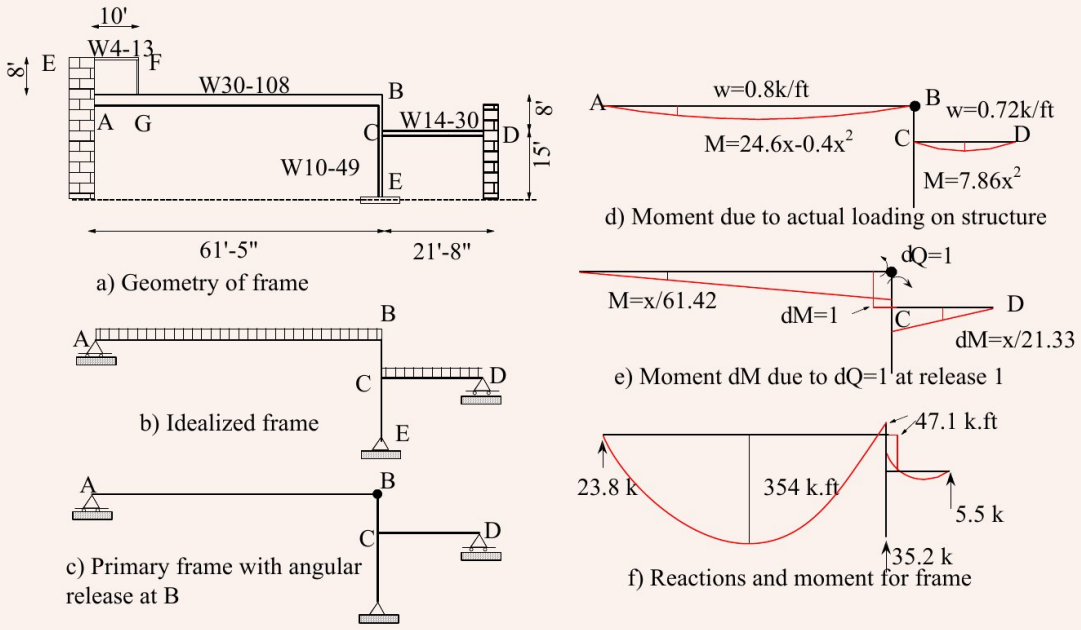
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.2 Analysis of Irregular Building Frame

The structural steel frame for the Church of the Holy Spirit, Penfield, New York is shown below. In this example we will discuss the idealization of the structure and then determine the forces and bending moments acting on the frame.



Solution:

1. The two main horizontal members of the frame are supported at points A and D by masonry walls.
2. The connection used at these points is not intended to transmit axial forces from the frame to the wall; accordingly, the axial forces in the horizontal members are assumed to be zero and the joints at A and D are idealized as rollers that transmit vertical forces only.
3. The base joint E is designed to resist both horizontal and vertical loads, but not moment, and is assumed to be a hinge.
4. Finally, joints B and C are designed to provide continuity and will be taken as rigid; that is, the angles of intersection of the members at the joint do not change with applied loading.
5. The frame is simplified for analysis by removing the small 4 in. wide flange members EF and FG and replacing their load effect by applying the roof load with acts on EF directly to the segment AG.
6. the idealized frame is shown above.
7. The dead load on the higher portion of the frame is $p_{AB} := 25\text{psf}$ times the frame spacing of $\text{spacing} := 13.33\text{ft}$, or

$w_{AB} := p_{AB} \cdot \text{spacing} = 333 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$ along the frame.

8. The dead load on CD is less beacuse the weight of the frame member is substantially smaller, and the dead load is about

$p_{CD} := 19\text{psf}$, or $w_{CD} := p_{CD} \cdot \text{spacing} = 253 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

9. Snow load is $S := 35\text{psf}$ over both areas, or $w_{Snow} := S \cdot \text{spacing} = 467 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

10. The total loads are then

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member AB: $w_{totAB} := w_{AB} + w_{Snow} = 0.8 \cdot \frac{kip}{ft}$

Member CD: $w_{totCd} := w_{CD} + w_{Snow} = 0.72 \cdot \frac{kip}{ft}$

11. the frame has four unknown reaction components and therefore has one redundant. Although several different releases are possible, we choose an angular (bending) release at point B.
12. The resulting primary structure is shown as (c) in the figure above, where the redundant quantitity R1 is the bending moment at point B.
13. The equation of compatability is

$$\theta_1 + f_{11} \cdot M_1 = 0$$

where θ_1 is the relative angular rotation corresponding to release 1 as produced by the actual loading, and f_{11} is the flexibility coefficient for a unit moment acting at the release.

14. From virtual work we have

$$1 \cdot \theta_1 = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

and

$$1 \cdot f_{11} = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

where $\delta\overline{M}$ and M are defined in (e) in the figure above.

15. Then

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) := \left[\frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \frac{x}{61.42} \cdot \left(24.6x - 0.4x^2\right) dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \frac{x}{21.33} \cdot \left(7.68x - 0.36x^2\right) dx \right]$$

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) \rightarrow \frac{291.31658667}{EI_{CD}} + \frac{7763.6329512000000002}{EI_{AB}}$$

16. With $I_{AB} := 4470in^4$ and $I_{CD} := 290in^4$

$$\theta_1(E) := \left(\frac{291}{E \cdot I_{CD}} + \frac{7764}{E \cdot I_{AB}} \right) \cdot in^4 \rightarrow \frac{118411}{43210 \cdot E}$$

17. Similarly

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) := \frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \left(\frac{x}{61.42}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \left(\frac{x}{21.33}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{BC}} \cdot \int_0^{8} (1)^2 dx$$

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) \rightarrow \frac{8}{EI_{BC}} + \frac{20.473}{EI_{AB}} + \frac{7.11}{EI_{CD}}$$

18. With $I_{BC} := 273in^4$

$$f_{11}(E) := \left(\frac{8}{E \cdot I_{BC}} + \frac{20.473}{E \cdot I_{AB}} + \frac{7.11}{E \cdot I_{CD}} \right) \cdot in^4 \text{ simplify } \rightarrow \frac{0.058}{E}$$

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $kip \cdot ft^2$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $\frac{}{in^4}$

19. Applying the compatability equation,

$$\frac{118411}{43210\cdot E}+\frac{0.058}{E}\cdot M_1 = 0$$

and the bending moment at point B is

$$M_1 := \frac{-\frac{118411}{43210\cdot E}}{\frac{0.058}{E}}\cdot kip\cdot ft = -47.248\cdot kip\cdot ft$$

The reactions and moments in the structure are given in (f) in the figure above.

20. Once we have M_1, the structure is by now statically determinate and from statics we can complete the shear and moment diagrams.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

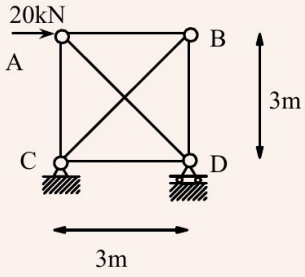
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.3 Redundant Truss Analysis

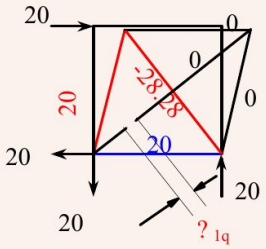
Determine the bar forces in the steel truss shown below using the flexibility method. The truss is part of a supporting tower for a tank, and the 20 kN horizontal load is produced by wind loading on the tank.



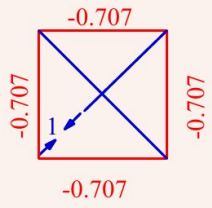
a) Original Structure



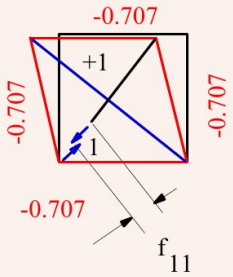
b) Primary structure



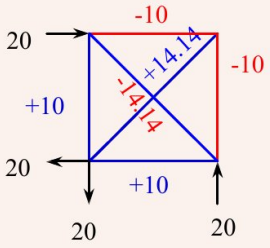
c) Primary structure subjected to real load



d) Virtual load on primary structure



e) Action of unit force corresponding to redundant R_1



f) Final results

Solution:

1. Applying the criteria for indeterminancy $2 \cdot 4 = 8$ equations, 6 members + 3 reactions => one degree of indeterminancy. A logitudnial release in any of the six bars may be chosen.
2. Because the truss members carry only axial load, the longitudinal release is identical to actually cutting the member and removing its axial force capability from the truss.
3. In analyzing the trusses with double diaganols it is both convenient and customary to select the release in one of the diganol members because the resulting primary structure will be the conventional truss to which we are accustomed.
4. Choosing the diagonal member BC for the release, we cut it and remove its axial stiffness from the structure. The primary structure is shown in (b) in the figure above.
5. The analysis problem reduces to applying an equation of compatability to the changes in length of the release member. The relative displacement Δ_1 of the two cut ends of member BC, as producued by the real loading, is shown in (d) in the figure above.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. The displacement is always measured along the length of the redundant member, and since the redundant is unstressed at this stage of the analysis, the displacement Δ_1 is equal to the relative displacement of joint B with respect to joint C.
7. This displacement must be eliminated by the relative displacements of the cut ends of member BC when the redundant force is acting on the member. The latter displacement is written in terms of the axial flexibility coefficient f_{11}, and the desired equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

8. The quantity Δ_1 is given by

$$1 \cdot \Delta_1 = \sum \delta \cdot \bar{P} \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

where $\delta \cdot \bar{P}$ and P are given in (d) and (e) in the figure above, respectively

9. Similarly,

$$f_{11} = \sum \delta \cdot \bar{P} \left(\frac{\bar{P} \cdot L}{AE} \right)$$

10. Evaluating these summations in tabular form:

Member	P kN	δP kN	L m	δPPL	δPPL
AB	0	-0.707	3	0	1.5
BD	0	-0.707	3	0	1.5
CD	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AC	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AD	-28.28	1	4.242	-119.96	4.242
BC	0	1	4.242	0	4.242
Total				-204.8	14.484

11. Since A = constant for each member

$$\Delta_1 = \sum \delta \cdot \bar{P} \left(\frac{PL}{AE} \right) = \frac{-204.8}{AE} \cdot kN^2 \cdot m \quad \text{and} \quad f_{11} = \frac{14.484}{AE} \cdot kN^2 \cdot m$$

then

$$\frac{1}{AE} \cdot \left(-204.8 + 14.484 \cdot R_1 \right) = 0$$

12. the solution for the redundant force value is $R_1 := \frac{204.8}{14.484} \cdot kN = 14.14 \cdot kN$
13. The final values for forces in each of the truss members are given by superimposing the forces due to the redundant and the forces due to the real loading.
14. The real loading forces are shown in (c) in the figure above, while the redundant force effect is computed by multiplying the member forces in (d) in the figure above by 2.83, the value of the redundant.

Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	28.28	14.14

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

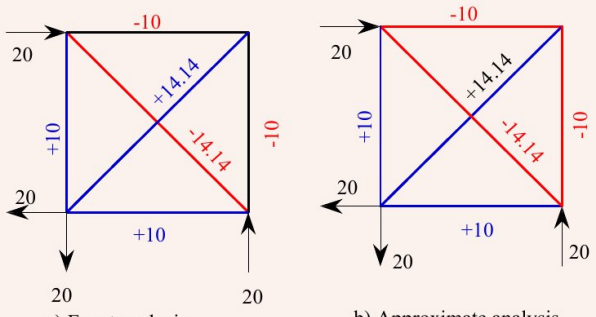
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14
BC	1	14.14	0	14.14

15. It is informative to compare the member forces from this solution to the approximate analysis obtained by assuming that the double diagonals each carry half the total shear in the panel. The comparison is given in the figure below



a) Exact analysis

b) Approximate analysis

It reveals that the approximate analysis is the same as the exact analysis for this particular truss. The reason for this is that the stiffness provided by each of the diagonal members (against "shear" deformation of the rectangular panel) is the same, and therefore they each carry an equal portion of the total shear accross the panel.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.4 Truss with Two Redundants

Another panel with a second redundant member is added to the truss of the preceeding example

Solution:

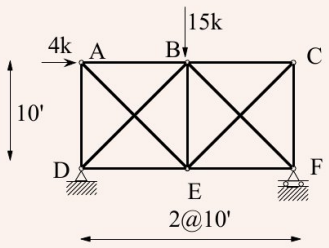
1. The twice redundant truss is converted to a determinate primary structure by releasing two members of the truss; we choose two diagonals (DB and BF).
2. Releasing both diagonals in a single panel, such as members AE and DB, is inadmissible since it leads to an unstable truss form.
3. The member forces and required displacements for the real loading and for the two redundant forces in members DB and BF are given in the figure below.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

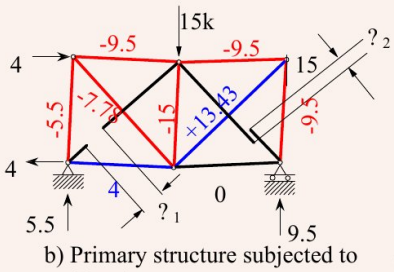
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

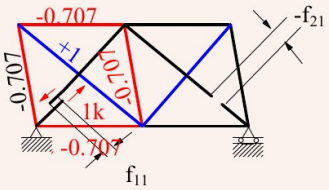
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



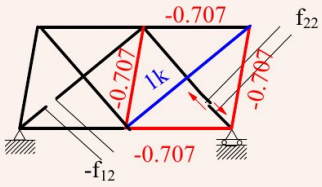
a) Original structure; all A=4 in^2



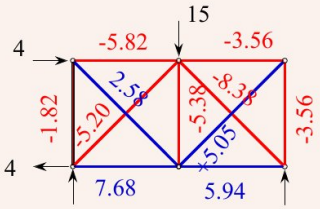
b) Primary structure subjected to real load



c) Action to unit force R_1=1



d) Action of unit force R2=1



e) Final results

4. Although the rela loading ordinarily stresses all members of the entire truss, we see that the unit forces corresponding to the redundant stress only those members in the panel that contain the redundant; all other bar forces are zero.
5. Recognizing this fact enables us to solve the double diagonal truss problem more rapidly than a frame with multiple redundants.
6. The virtual work equations for computing the six required displacements (two due to load and four flexibilities) are

$$1\cdot\Delta_1 = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot\Delta_2 = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{11} = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{21} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$f_{12} = f_{21}$ by reciporocal theorem

$$1\cdot f_{22} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_2\cdot L}{AE}\right)$$

7. If we assume tension in a truss member as positive, use tensile unit loads when computing the flexibility coeeficients corresponding to the redundants, and let all displacement terms carry their own signs, then in the for the redundants a positive value of force indicates tension while a negative value menas the member is in compression.
8. The calculation of f_{22} involves only the six members in the left panel of the truss; f_{21} invloves only member BE.
9. The simple used for performing the displacement analyses, as summarized in tabular form, leads one quickly to the compatability equations which state that the cut ends of both redundant members must match (there can be no gaps or overlaps of members in the actual structure).

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	0	0	0	0	60
DE	4	-0.707	0	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	466	0	60	0	0
AE	7.78	1	0	1322	0	170	0	0
BE	-15	-0.707	-0.707	1272	1272	60	60	60
CE	13.43	0	1	0	2280	0	0	170
BD	0	1	0	0	0	170	0	0
BF	0	0	1	0	0	0	0	170
Total				3528	5164	580	60	580

10. The equations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

or

$$\frac{1}{AE}\cdot\begin{pmatrix}580 & 60\\ 60 & 580\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix} = \frac{-1.}{AE}\cdot\begin{pmatrix}3528\\ 5164\end{pmatrix}$$

11. The final set of forces in the truss is obtained by adding up, for each member, the three separate effects. In terms of the forces shown in the figure above, the force in any member is given by $F = P + R_1\cdot\overline{P_1} + R_2\cdot\overline{P_2}$

Member	P	P_1	P_2	R_1P_1	R_2P_2	P_{total}
AB	-9.5	-0.707	0	3.676	0	-5.82
BC	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0	0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	4	-0.707	0	3.676	0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0	3.676	0	-1.82
AE	7.78	1	0	-5.2	0	2.58
BE	-15	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	13.43	0	1	0	-8.38	5.05
BD	0	1	0	-5.2	0	-5.2
BF	0	0	1	0	-8.38	-8.38

14.5 Analysis of Nonprismatic Members

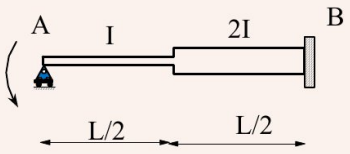
The nonprismatic beam is loaded with an end moment M_A at its hinged end A. Determine the moment induced at the fixed end B by this loading.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

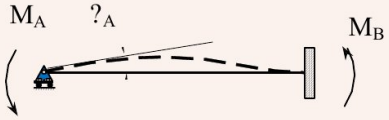
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



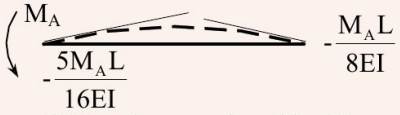
a) Beam with end B fixed



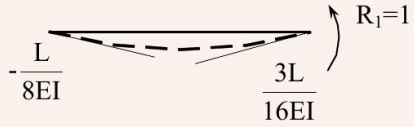
b) Elastic curve



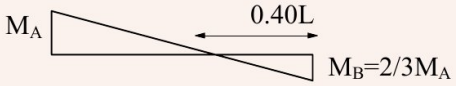
c) Primary structure



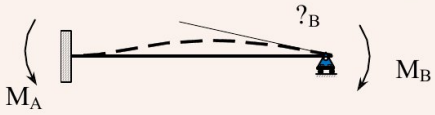
d) Rotations produced by M_A



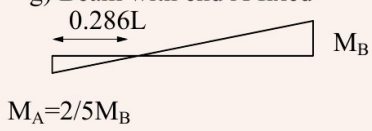
e) Rotations produced by a unit value of redundant R_1



f) Moment diagram for A hinged, B fixed



g) Beam with end A fixed



h) Moment diagram for A fixed, B hinged

Solution:

1. The beam has one redundant force; we select M_B as the redundant R_1, and obtain the primary structure shown in the figure above. It can be shown that the flexibility coefficients for unit moments applied at each end are those in (d) and (e) in the figure above, with a sing convention of counterclockwise as positive.
2. The equation of consistent displacement at B is

$$\frac{-M_A \cdot L}{8E \cdot I} + \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{E \cdot I} \cdot R_1 = 0$$

and the value of M_B is

$$M_B = R_1 = \frac{2}{3} \cdot M_A$$

3. The resulting moment diagram is given in (f). We note that the inflection point is 0.4L from the fixed end. If the beam had a uniform value of I across its span, the inflection point would be L/3 from the fixed end. Thus the inflection point shifts toward the section of reduced stiffness.
4. The end rotation θ_A is given by

$$\theta_A = \frac{5}{16} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot M_A \right) \cdot \frac{L}{E \cdot I} = \frac{11}{48} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I}$$

5. The ratio of the applied end moment to rotation $\frac{M_A}{\theta_A}$ is called the rotational stiffness and is

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{48}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

6. If we now reverse the boundary conditions, making A fixed and B hinged, and repeat the analysis for an applied moment M_B, the resulting moment diagram will be as given in (h) in the above figure. The moment induced at end A is only 40% of the applied end moment M_B. The inflection point is 0.286L from the fixed end A. The corresponding end rotation θ_B in (g) in the figure above is

$$\theta_B = \frac{11}{80}\cdot\frac{M_B\cdot L}{E\cdot I}$$

7. The rotational stiffness $\frac{M_B}{\theta_B}$ is

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{80}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

8. A careful comparison of the rotational stiffnesses, and of the moment diagrams in (f) and (h) in the figure above, illustrate the fact that flexural sections of increased stiffness attract more moment, and that inflection points always shift in the direction of decreased stiffness.
9. The approach illustrated here may be used to determine moments and end rotations in any type of non-prismatic member. The end rotations need in the force analysis may be calculated by either virtual work or moment area (or by other methods). Complex variations in EI are handles by numerical integration of the virtual work equation or by approximating the resultant M/EI area and their locations in the moment area method.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Members

The beam of the previous example

Solution:

1. The beam has two redundant forces and we select M_A and M_B. Releasing these redundants, R_1 and R_2, we obtain the primary sturcture.
2. The equations of consistent deformations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

where R_1 is M_A and R_2 is M_B.

3. The values of Δ_1 and Δ_2, the end rotations produced by the real loading on the primary structure, can be computed by the virtual work method.
4. The flexibility coefficients are also separately derived (not yet in these notes)
5. We define counterclockwise end moments and rotations as positive and obtain

$$\frac{L}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-1}{8} & \frac{3}{16}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_1\end{pmatrix} = \frac{w\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}-0.352\\ 0.0273\end{pmatrix}$$

from which

$$\boxed{R_1 = M_A = 0.0742 w\cdot L^2}$$

$$\boxed{R_2 = M_B = -0.0961 w\cdot L^2}$$

6. The stiffer end of the beam attracts 30% more than the flexible end.
7. For a prismatic beam with constant I, the fixed end moments are equal in magnitude ($M_A = -M_B = \frac{w\cdot L^2}{12}$) and intermediate in value between the two end moments determiend above.
8. Fixed end moments are an essential part of indeterminate analysis based on the displacement (stiffness) method and will be used exclusively in the Moment Distribution method.

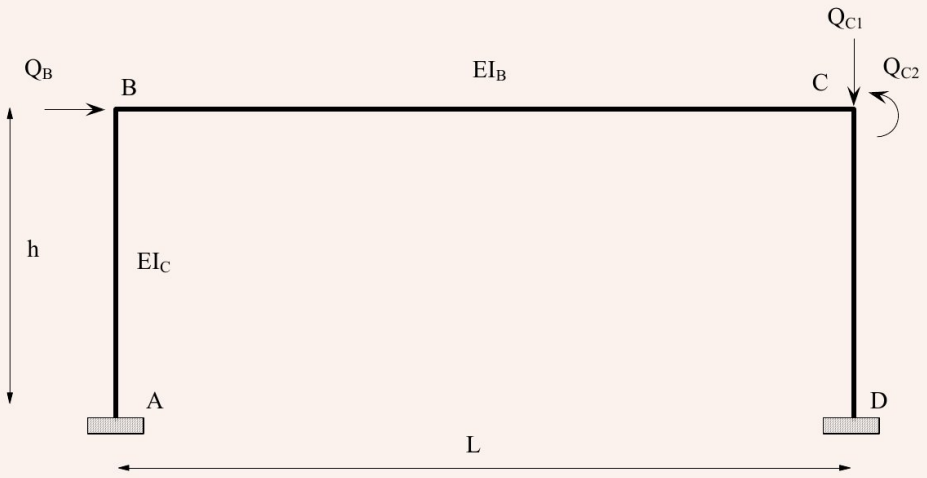
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

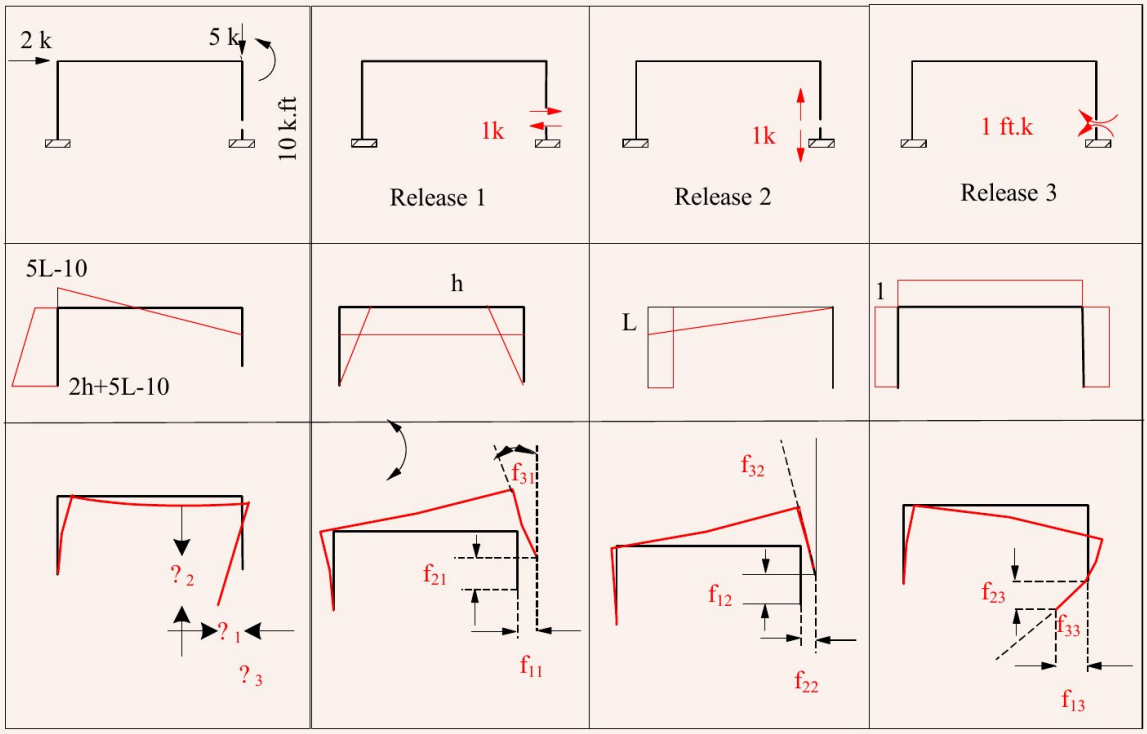
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.7 Rectangular Frame; External Load



Solution:

1. The structure is statically indeterminate to the third degree, and the displacements (flexibility terms) are shown in the figure above.
2. In order to evaluate the 9 flexibility terms, we refer tot he table.



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Substituting $h := 10ft$, $L := 20ft$, and $EI_B = EI_C = EI$, the flexibility matrix then becomes

$$f = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} 2667 & 3000 & -300 \\ 3000 & 6667 & -400 \\ -300 & -400 & 40 \end{pmatrix}$$

and the vector of displacements for the primary structure is

$$\Delta = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

where the units are kips and feet.

4. The inverse of the flexibility matrix is

$$f^{-1} = 10^{-3}\cdot EI\cdot\begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}$$

5. Hence the reactions are determined from

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := 10^{-3}\cdot EI\cdot\begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}\cdot\left[\frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} 1.601 \\ -5 \\ 7.007 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.8 Frame with Temperature and Support Displacements

The single bay frame, of the previous example, has a height $h := 10\text{ft}$ and span $L := 20\text{ft}$ and its two supportsrigidly connected and is constructed of reinforced concrete. It supports a roof and wall partitions in such a manner that linear temperature variation occurs across the depth of the frame members when inside and outside temperatures differ. Assume the member depth is constant at 1 ft, and that the structure was built with fixed bases A and D at a temperature of 85F. The temperature is now 70F inside and 20F outside. We wish to determine the reactions at D under these conditions. Assume that the coefficient of linear expansion of reinforced concrete is $\alpha := 0.0000055 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$.

Solution:

1. Our analysis proceeds as before, with the [D] vector interpreted appropriately. The three releases shown in the previous example, will be used.
2. The first stage in the analysis is the computation of the relative displacements $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, $\Delta_{3\Delta}$, of the primary structure caused by temperature effects. These diaplcements are caused by two effects: axial shortening of the members because of the drop in average temperature (a middepth of the members), and curvature of the members because of the temperature gradient.
3. In the following discussion the contributions to the displacements due to the axial strain are denoted with a single prime (') and those due to curvature by a double prime (").
4. Consider the axial strain first. A unit length of frame member shortens as a result of the temperature decrease from 85F to 45F at the midepth of the member. the strain is therefore

$$\alpha\Delta T := \alpha \cdot 40 \cdot \Delta°F = 0.00022$$

5. The effect of axial strain on the relative displacements needs little analysis. The horizontal member shortens by an amount $\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = 0.0044 \cdot \text{ft}$. The shortening of the vertical members results in no relative displacement in the vertical direction. No rotation occurs.
6. We therefore have $\Delta'_{1\Delta} := -\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = -0.0044 \cdot \text{ft}$, $\Delta'_{2\Delta} := 0\text{ft}$, and $\Delta'_{3\Delta} := 0\text{rad}$
7. The effect of curvature must also be considered. A frame element of length dx undergoes an angular strain as a result of the temperature gradient. The change in length at an extreme fiber is

$$\varepsilon(dx) := \alpha \cdot 25 \cdot \Delta°F \cdot dx \rightarrow 0.0001375 \cdot dx$$

8. With the resulting real rotation of the cross section

$$d\phi(dx) := \frac{\varepsilon(dx)}{0.5} \cdot \text{rad} \rightarrow 0.000275 \cdot dx \cdot \text{rad}$$

9. The relative displacements of the primary structure at D are found by the virtual force method.
10. A virtual force $\delta \cdot \overline{Q}$ is applied in the direction of the desired displacement and the resulting moment diagram $\delta \cdot \overline{M}$ determined.
11. The virtual work equation

$$\delta \cdot \overline{Q} \cdot \Delta = \int \delta \cdot \overline{M}\, d\phi$$

is used to obtain each of the desired displacements at D.
12. The results, which you should verify, are

$$\Delta''_1 := 0.0828\text{ft}$$

$$\Delta''_2 := 0.1104\text{ft}$$

$$\Delta''_3 := -0.01104\text{rad}$$

13. Combining the effects of axial and rotational strain, we have

$$\Delta_1 := \Delta'_{1\Delta} + \Delta''_1 = 0.0784 \cdot \text{ft}$$

$$\Delta_2 := \Delta'_{2\Delta} + \Delta''_2 = 0.1104 \cdot \text{ft}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\Delta_3 := \Delta'_{3\Delta} + \Delta''_3 = -0.01104 \cdot \text{rad}$$

14. We now compute the reduntants caused by temperature effects

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0784 \\ -0.1104 \\ 0.01104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0106 \\ 0.355 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

where the units are kips and feet.

15. You should construct the moment diagram for the structure using the values of the redundant found in the analysis.
16. Notice the stiffness term EI does not cancel out in this case. Internal forces and reactions in a statically indeterminate subject to effects other than loads (such as temperature) are dependent on the actual stiffnesses of the structure.
17. The effects of axial strain caused by forces in the members have been neglected in this analsis. This is usual for low frames where bending strain dominates behavior. To illustrate the significance of this assumption, consider member BC. We have found $R_1 = 10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$. The tension in BC has this same value, resulting in a strain for the member of $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$ .For a rectangular member, $\frac{I}{A} = \frac{b \cdot d^3}{12 \cdot bd} = \frac{d^2}{12}$. In our case d=1ft, therefore the axial strain is $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot (0.0833) = 8.83 \times 10^{-7}$, which is several orders of magnitude smaller than the temperature strain computed for the same member. We may therefore rest assured that neglecting axial strain caused by forces does not affect the values of the redundants in a significant manner for this structure.
18. Now considert the effects of foundation movement on the same structure. The intermediate frame behavior depends on a structure that we did not design: the earth. The earth is an essential part of nearly all structures, and we must understand the effects of foundation behavior on structural behavior. for the purposes of this example, assume that a foundation has revealed the possibility of a clockwise rotation of the support at D of 0.001 radians and a downward movement of the support at D of 0.12 ft. We wish to evaluate the redundants R_1, R_2, and R_3 caused by this foundation movement.
19. No analysis is needed to determine the values of $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, and $\Delta_{3\Delta}$ for the solution of the redundants. These displacements are found directly from the support movements, with proper consideration, of the originally chosen sign convention which defined the positive direction of the relative displacements. From the given support displacements, we find $\Delta_{1\Delta} := 0$, $\Delta_{2\Delta} := 0.12\text{ft}$, and $\Delta_{3\Delta} := 0.001\text{rad}$. Can you evaluate these quantities for a casr in which the displacements occured at A instead of D?
20. The values of the redundants is given by

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -252.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

with units in kips and feet.

21. A moment diagram may now be constructed, and other internal force quantities computed from the now known values of the redundants. The redundants have been evaluated separately for effects of temperature and foundation settlement. These effects may be combined with those due to loading using the principle of superposition.

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

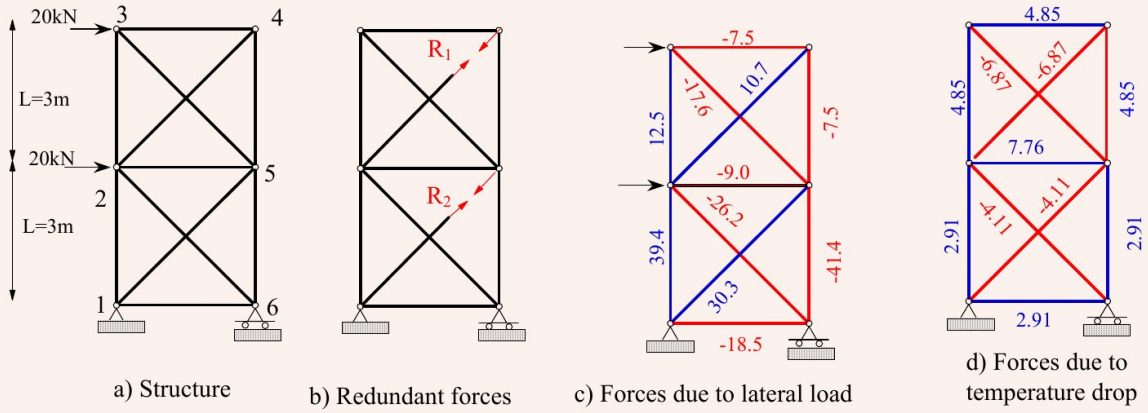
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change

The struss shown below represents an internal braced bent in an enclosed shed, with lateral loads of 20 kN at the panel points. A temperature drop of 30C may occur on the other members (members 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, and 5-6). We wish to analyze the truss for loading and for temperature effects.

Solution:

1. The first step in the analysis is the definition of the two redundants. The choice of forces in diagonals 2-4 and 1-5 as redundants facilitates the computations because some of the load effects are easy to analyze.
2. The computations are organized in tabular form in Table ??. The first column gives the force in each bar caused by a unit load (1 kN) corresponding to release 1. These are denoted p_i and also represent the bar force $\frac{\overline{q_1}}{\delta\cdot\overline{Q_1}}$ caused by a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ applied at the same location. Column 3 lists the same quantitiy for a unit load and for a virutal force $\delta\cdot\overline{Q_2}$ applied at release 2. These three columns constitute a record of the truss analysis needed for this problem.

Verticals: 500 mm^2 ; Webs: 250 mm^2; E=200,000 N/mm^2; a=1.0x10^{-5}/ °C



a) Structure b) Redundant forces c) Forces due to lateral load d) Forces due to temperature drop

3. Column 4 gives the value of L/EA for each bar in terms of L_c/EA_c of the vertical members. This is useful because the term L/EA cancels out in some of the calculations.
4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1p} and Δ_{2p} corresponding to the releases and

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1Q} and Δ_{2Q} corresponding to the releases and caused by the actual loads. Apply a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at release 1. The internal virtual forces $\overline{q_1}$ are found in column 2. The internal virtual work $\overline{q_1}\cdot\Delta l$ is found in column 5 as the product of columns 1, 2 and 4. The summation of column 5 is $\Delta_{1q} = -122.42\cdot\frac{L_c}{EA_c}$. Similarly, column 6 is the product of columns 1, 3, and 4, giving $\Delta_{2q} = -273.12\cdot\frac{L_c}{EA_c}$.

5. The same method is used to compute the flexibilities. In this case, the real loading is a unit load corresponding to release 1 leading to f_{11} and f_{21}, and then to release 2 leading to f_{12} and f_{22}. Column 7 shows the computation for f_{11}. It is the product of column 2, representing force due to the real unit load with column 2 representing force due to a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at the same location (release 1) multiplied by column 4 to include the L_c/EA_c term. Column 8 derives from columns 2, 3, and 4 and leads to f_{21}. Columns 9 and 10 are the computations for the remaining flexibilities.

6. We have assumed that a temperature drop of 30C occurs in the outer members. The corresponding length changes are found in column 11. Again using the virtual work method, column 12 tabulates the internal virtual work of th virtual forces through displacements Δl where for each bar, $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Column 12 is therefore the product of columsn 2 and 11. The summation of the elements of column 12 is the displacement Δl corresponding to release 1. Column 13 repeats this process for Δ_2 corresponding to release 2.

7. The tabulated information provides the necessary terms for a matrix solution of the problem. We have

$$f = \begin{pmatrix} 8.66 & 1 \\ 1 & 8.66 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta q = \begin{pmatrix} -122.42 \\ -273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta_\Delta = \begin{pmatrix} 6.36 \\ 4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c$$

therefore

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0.117 & -0.0134 \\ -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}$$

8. The redundant forces due to the applied load are

$$R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_Q\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} 122.42 \\ 273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c} = \begin{pmatrix} 10.66 \\ 30.32 \end{pmatrix}$$

9. Thus $R_1 = 10.66\text{kN},\ R_2 = 30.32\text{kN}$

10. The redundant forces due to the temperature drop are $R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_\Delta\right)$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} -6.36 \\ -4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c = \begin{pmatrix} -6.87 \\ -4.11 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}\cdot EA_c$$

11. Thus with $E := 200\frac{kN}{mm^2},\ A_c := 500mm^2$

$$R_1 := -6.87\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -6.87\cdot kN$$

$$R_2 := -4.11\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -4.11\cdot kN$$

12. Using the redundant forces from each of these analyses, the remainder of the bar forces are computed by simple equilibrium.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

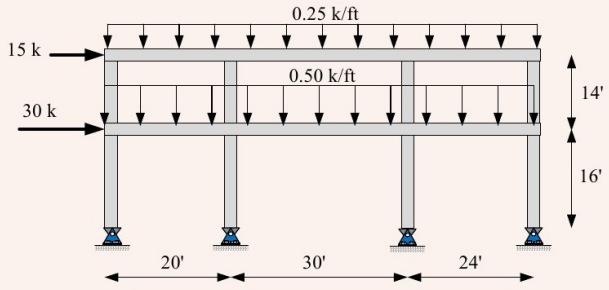
CÓPIA PARA REVISÃO

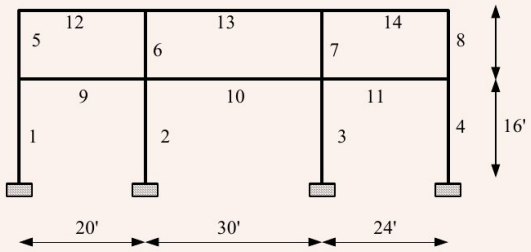
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Table ?? contains such computations. The bar forces in any bar is the force in column 1 added to that in column 2 multiplied by R_1 plus that is column 3 multiplied by R_2. This follows from the fact that columns 2 and 3 are bar forces caused by a force of unitiy corresponding to each of the redundants. The results of the calcultations are shown for the applied loading and for the temperature drop. The forces caused by the temperature drop are similar in magnitude to those caused by wind load in this example. Temperature differences, shrinkage, support settlement, or tolerance errors can cause important effects in statically indeterminate structures.

15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads

Draw the shear and moment diagrams for the following frame.





Solution:

The analysis should be conducted in conjunction with the free body diagram shown below.

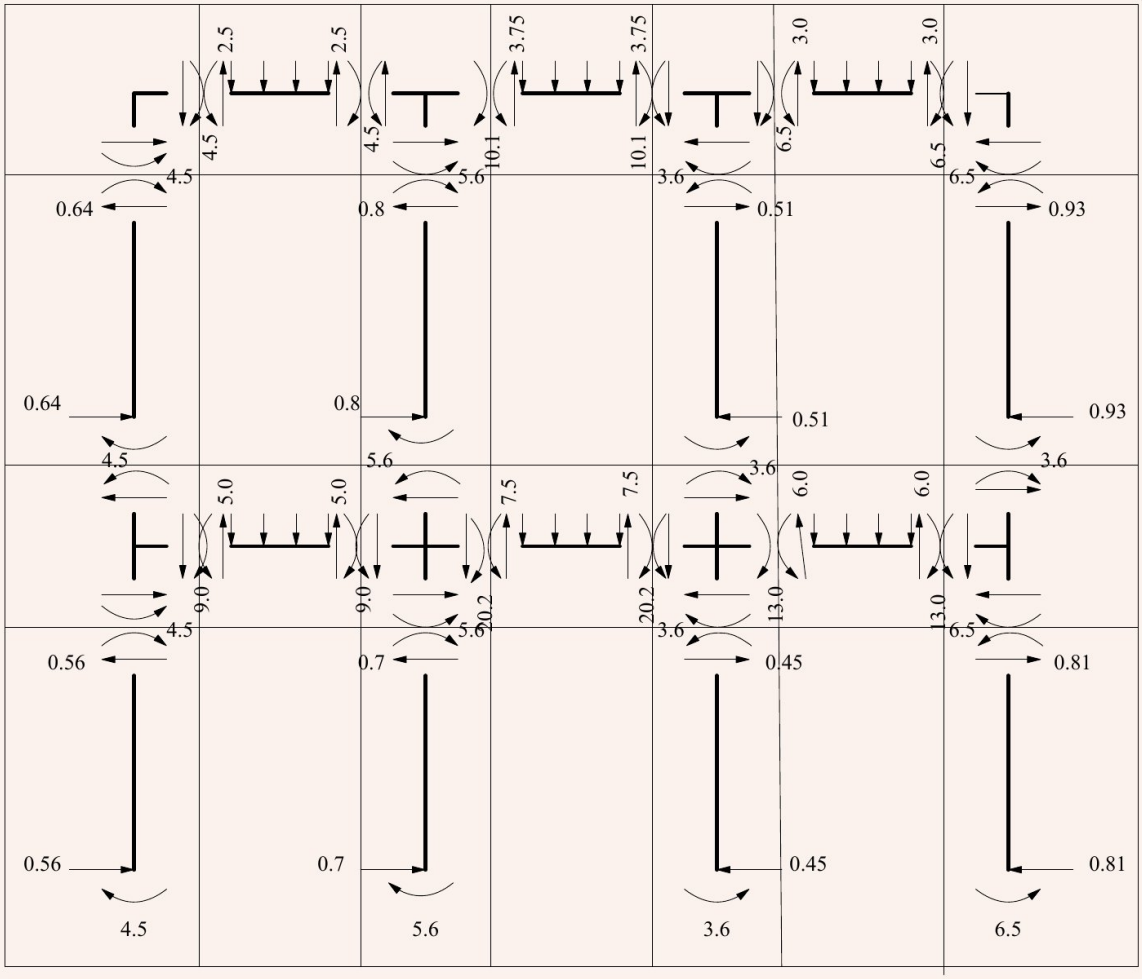
Vertical Loads

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Gravity Loads

$w_{12} := 0.25 \frac{kip}{ft}$ $w_{13} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{14} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$

$w_9 := 0.5 \frac{kip}{ft}$ $w_{10} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{11} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$

Approximate Equations

$M_{left}(w, L) := -0.045 \cdot w \cdot L^2$ Maximum negative moment at girder end

$M_{cent}(w, L) := 0.08 \cdot w \cdot L^2$ Maximum positive moment

1. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{left}(w_{12}, 20ft) = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12cnt} := M_{cent}(w_{12}, 20ft) = 8 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{13lft} := M_{left}(w_{13}, 30ft) = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13cnt} := M_{cent}(w_{13}, 30ft) = 18 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := M_{13lft} = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{left}(w_{14}, 24ft) = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14cnt} := M_{cent}(w_{14}, 24ft) = 11.52 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := M_{14lft} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

2. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{left}(w_9, 20ft) = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9cnt} := M_{cent}(w_9, 20ft) = 16 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9rgt} := M_{9lft} = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10lft} := M_{left}(w_{10}, 30ft) = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10cnt} := M_{cent}(w_{10}, 30ft) = 36 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10rgt} := M_{10lft} = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{left}(w_{11}, 24ft) = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11cnt} := M_{cent}(w_{11}, 24ft) = 23.04 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := M_{11lft} = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

3. Top Column Moments

$M_{5top} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := -M_{12rgt} + M_{13lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := -M_{13rgt} + M_{14lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := -M_{14rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

4. Bottom Column Moments

$M_{1top} := M_{5bot} + M_{9lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := M_{6bot} - M_{9rgt} + M_{10lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2bot} := -M_{2top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := M_{7bot} - M_{10rgt} + M_{11lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := M_{8bot} - M_{11rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

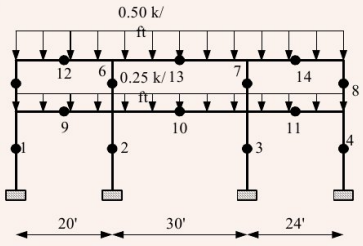
$M_{4bot} := -M_{4top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

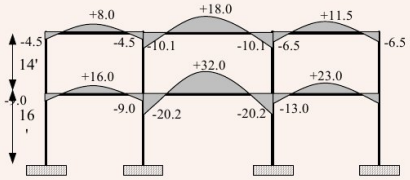
 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

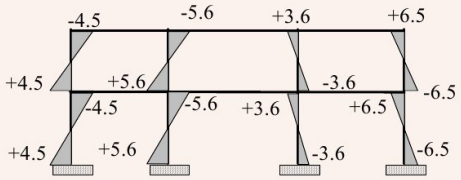
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura







5. Top Girder Shear

$$V_{12lft} := \frac{w_{12} \cdot 20ft}{2} = 2.5 \cdot kip$$

$$V_{12rgt} := -V_{12lft} = -2.5 \cdot kip$$

$$V_{13lft} := \frac{w_{13} \cdot 30ft}{2} = 3.75 \cdot kip$$

$$V_{13rgt} := -V_{13lft} = -3.75 \cdot kip$$

$$V_{14lft} := \frac{w_{14} \cdot 24ft}{2} = 3 \cdot kip$$

$$V_{14rgt} := -V_{14lft} = -3 \cdot kip$$

6. Bottom Girder Shear

$$V_{9lft} := \frac{w_{9} \cdot 20ft}{2} = 5 \cdot kip$$

$$V_{9rgt} := -V_{9lft} = -5 \cdot kip$$

$$V_{10lft} := \frac{w_{10} \cdot 30ft}{2} = 7.5 \cdot kip$$

$$V_{10rgt} := -V_{10lft} = -7.5 \cdot kip$$

$$V_{11lft} := \frac{w_{11} \cdot 24ft}{2} = 6 \cdot kip$$

$$V_{11rgt} := -V_{11lft} = -6 \cdot kip$$

7. Column Shears

$h_5 := 14ft$ $h_6 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_7 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_8 := h_5 = 14 \cdot ft$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$h_1 := 16ft$ $h_2 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_3 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_4 := h_1 = 16 \cdot ft$

$$V_5 := \frac{M_{5top}}{\frac{h_5}{2}} = -0.643 \cdot kip$$

$$V_6 := \frac{M_{6top}}{\frac{h_6}{2}} = -0.804 \cdot kip$$

$$V_7 := \frac{M_{7top}}{\frac{h_7}{2}} = 0.521 \cdot kip$$

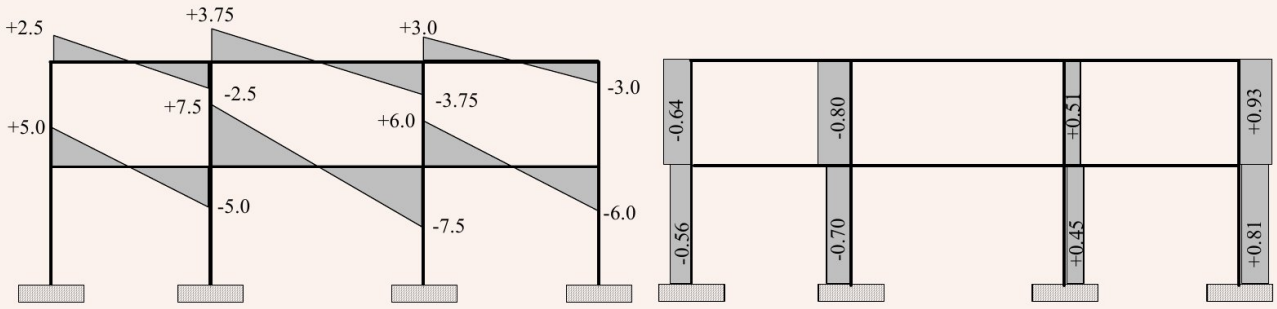
$$V_8 := \frac{M_{8top}}{\frac{h_8}{2}} = 0.926 \cdot kip$$

$$V_1 := \frac{M_{1top}}{\frac{h_1}{2}} = -0.563 \cdot kip$$

$$V_2 := \frac{M_{2top}}{\frac{h_2}{2}} = -0.703 \cdot kip$$

$$V_3 := \frac{M_{3top}}{\frac{h_3}{2}} = 0.456 \cdot kip$$

$$V_4 := \frac{M_{4top}}{\frac{h_4}{2}} = 0.81 \cdot kip$$



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8. Top Column Axial Forces

$P_5 := V_{12lft} = 2.5 \cdot kip$

$P_6 := -V_{12rgt} + V_{13lft} = 6.25 \cdot kip$

$P_7 := -V_{13rgt} + V_{14lft} = 6.75 \cdot kip$

$P_8 := -V_{14rgt} = 3 \cdot kip$

9. Bottom Chord Axial Forces

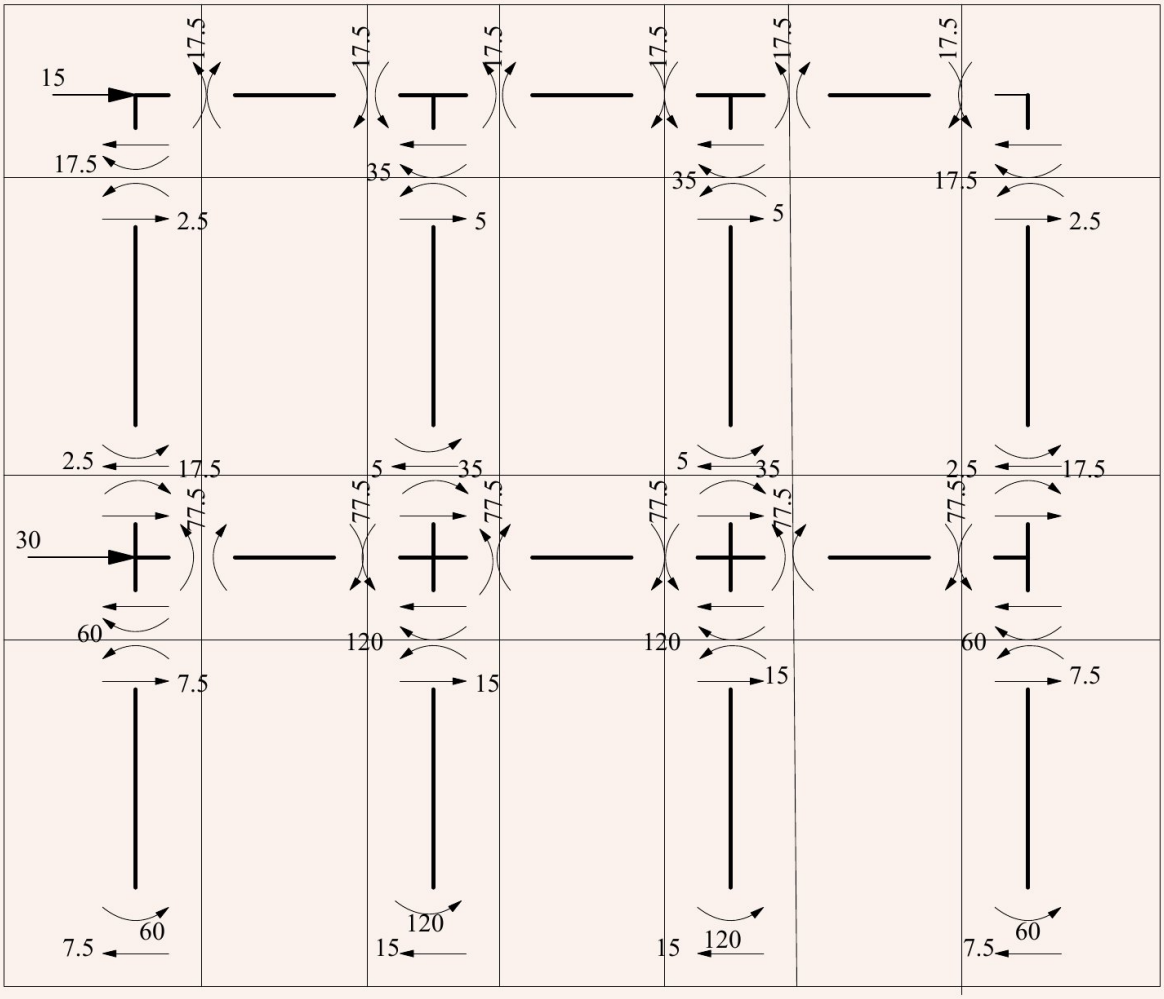
$P_1 := P_5 + V_{9lft} = 7.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = 18.75 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 20.25 \cdot kip$

$P_4 := P_8 - V_{11rgt} = 9 \cdot kip$

Horizontal Loads



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Horizontal Loads

$F_5 := 15kip$

$F_1 := 30kip$

Approximate Equations

$$V_{ext}(F,n) := \frac{F}{2 \cdot n}$$

$n_{bays} := 3$

1. Column Shears

$V_5 := V_{ext}(F_5, n_{bays}) = 2.5 \cdot kip$

$V_6 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_7 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_8 := V_5 = 2.5 \cdot kip$

$V_1 := V_{ext}(F_1 + F_5, n_{bays}) = 7.5 \cdot kip$

$V_2 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_3 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_4 := V_1 = 7.5 \cdot kip$

2. Top Column Moments

$$M_{5top} := \frac{V_5 \cdot h_5}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{5bot} := -M_{5top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{6top} := \frac{V_6 \cdot h_6}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{6bot} := -M_{6top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{7top} := \frac{V_7 \cdot h_7}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{8top} := \frac{V_8 \cdot h_8}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

3. Bottom Column Moments

$$M_{1top} := \frac{V_1 \cdot h_1}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{1bot} := -M_{1top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{2top} := \frac{V_2 \cdot h_2}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := \frac{V_3 \cdot h_3}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := \frac{V_4 \cdot h_4}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

4. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{5top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := -M_{12lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13lft} := M_{12rgt} + M_{6top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := -M_{13lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{13rgt} + M_{7top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := -M_{14lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

5. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{1top} - M_{5bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

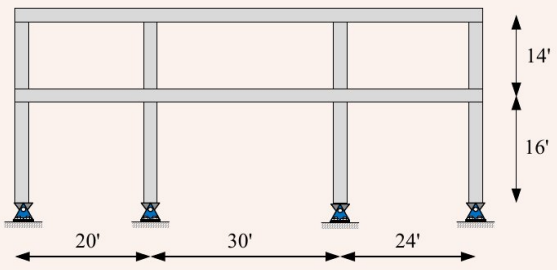
$M_{9rgt} := -M_{9lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

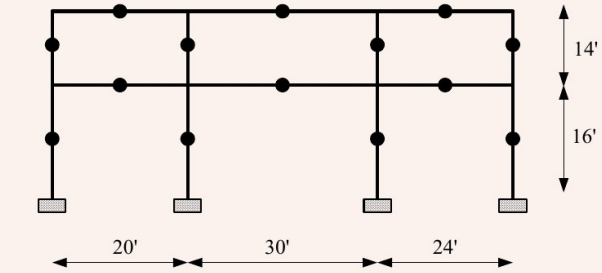
$M_{10lft} := M_{9rgt} + M_{2top} - M_{6bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

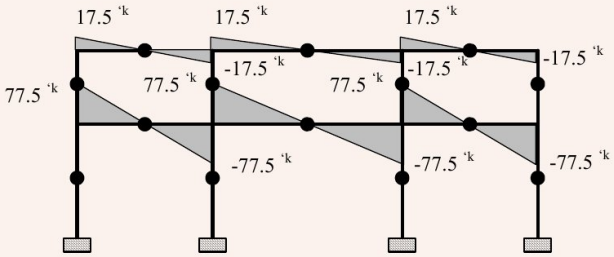
$M_{10rgt} := -M_{10lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

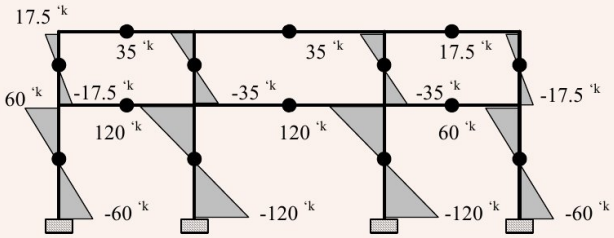
$M_{11lft} := M_{10rgt} + M_{3top} - M_{7bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := -M_{11lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$









Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. Top Girder Shear

$V_{12lft} := \frac{-2 \cdot M_{12lft}}{20ft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{12rgt} := V_{12lft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{13lft} := \frac{-2 \cdot M_{13lft}}{30ft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{13rgt} := V_{13lft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{14lft} := \frac{-2 \cdot M_{14lft}}{24ft} = -1.458 \cdot kip$

$V_{14rgt} := V_{14lft} = -1.458 \cdot kip$

7. Bottom Girder Shear

$V_{9lft} := \frac{-2 \cdot M_{9lft}}{20ft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{9rgt} := V_{9lft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{10lft} := \frac{-2 \cdot M_{10lft}}{30ft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{10rgt} := V_{10lft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{11lft} := \frac{-2 \cdot M_{11lft}}{24ft} = -6.458 \cdot kip$

$V_{11rgt} := V_{11lft} = -6.458 \cdot kip$

8. Top Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_5 := -V_{12lft} = 1.75 \cdot kip$

$P_6 := V_{12rgt} - V_{13lft} = -0.583 \cdot kip$

$P_7 := V_{13rgt} - V_{14lft} = 0.292 \cdot kip$

$P_8 := V_{14rgt} = -1.458 \cdot kip$

8. Bottom Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_1 := P_5 - V_{9lft} = 9.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = -3.167 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 1.583 \cdot kip$

$P_4 := P_8 + V_{11rgt} = -7.917 \cdot kip$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

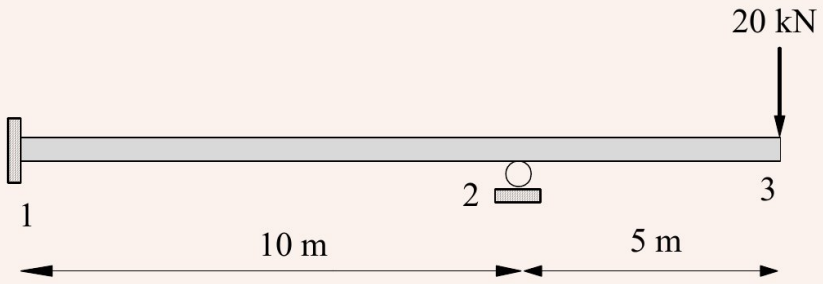
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.1 Propped Cantilever Beam

Find the end moments for the beam



Solution:

1. The beam is kinematicall indeterminate to the third degreee (θ_2, Δ_3, θ_3), however by replacing the overhang by a fixed end moment equal to 100 kN-m at support 2, we reduce the degreee of kinematic indeterminancy to one (θ_2).
2. The equilibrium relation is

$$M_{21} - 100\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

3. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\cdot\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{2}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_1 + 2\cdot\theta_2\right) = \frac{4}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

4. Substituting into the equilibrium equations

$$\theta_2 = \frac{10}{4E\cdot I}\cdot M_{21} = \frac{250}{EI}$$

or

$$\boxed{M_{12} = \frac{2}{10}\cdot EI\cdot\theta_2 = \frac{2\cdot EI}{10}\cdot\frac{250}{EI} = 50\text{kN}\cdot\text{m}}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

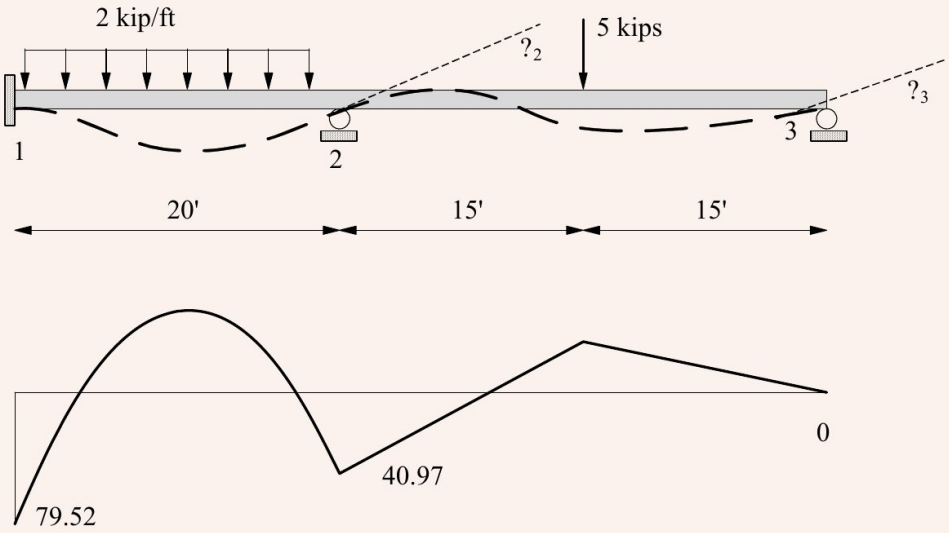
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection

Draw the moment diagram for the two span beam



Solution:

1. The unknows are θ_2 and θ_3
2. The equilibrium relations are

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{21} + M_{23} = 0$

$M_{32} = 0$

3. The fixed end moments are given by

$$M_{12F} = -M_{21F} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad M_{12F} := \frac{-\left(-2\,\frac{kip}{ft}\right)\cdot(20ft)^2}{12} = 66.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23F} = -M_{32F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{23F} := \frac{-(-5kip)(30ft)}{8} = 18.75 \cdot kip \cdot ft$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{2EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{EI}{10} \cdot \theta_2 + M_{12F}$$

$$M_{21} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot (2\theta_2) + M_{21F} = \frac{4EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{21F} = \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F}$$

$$M_{23} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F}$$

$$M_{32} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F}$$

5. Substituting in the equilibrium equations

$$\frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F} + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 = 47.917\ kip \cdot ft$$

$$\frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 = 18.75\ kip \cdot ft$$

or

$$EI \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EI\theta_2 \\ EI\theta_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128.473 \\ 76.388 \end{pmatrix}$$

6. Substituting for the moments

$$M_{12} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{10} + M_{12F} = 79.514 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{21} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{5} - M_{12F} = -40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{7.5} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{15} + M_{23F} = 40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{32} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{15} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{7.5} - M_{23F} = -0 \cdot kip \cdot ft$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection

Determine the end moments for the previous problem if the middle support settles by 6 in.

Solution:

1. Since we are performing a linear elastic analysis, we can separately analyze the beam for support settlement, and then add the moments to those due to the applied loads.
2. The unknowns are θ_2 and θ_3
3. The equilibrium relations are

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{10}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(2\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{5}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{15}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{15}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

5. Substituting into the equilibrium equations

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{3}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3=\frac{-13EI}{1200}$$

$$\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3=\frac{-EI}{300}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=EI\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{11}{360}\\ -\frac{7}{720}\end{pmatrix}$$

6. Thus the additional moments due to the settlement are

$$M_{12}(EI):=\frac{EI}{10}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{225}$$

$$M_{21}(EI):=\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{720}$$

$$M_{23}(EI):=\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -0.0013888888888888888889\cdot EI$$

$$M_{32}(EI):=\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -3.7037037037037037e\text{-}24\cdot EI$$

16.4 Frame, Slope Deflection

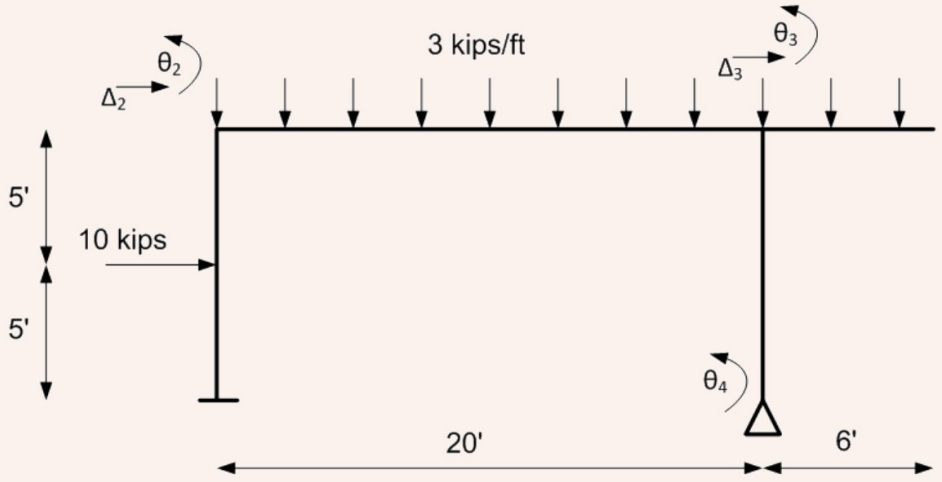
Determine the end moments for the frame

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The effect of the 35 cantilever can be included by replacing it with its end moment.

$$M_3 = -w \cdot L \cdot \frac{L}{2} \qquad M_3 := 3\frac{kip}{ft} \cdot 6ft \cdot 6\frac{ft}{2} = 54 \cdot kip \cdot ft$$

2. The unknown displacements and rotations are

   Δ_2 and θ_2 at joint 2

   θ_3 and θ_4 at joints 3 and 4

   We observe that due to the lack of symmetry, there will be a lateral displacement in the frame, and neglecting axial deformations, $\Delta_2 = \Delta_3$

3. The equilibrium relations are

$$M_{23} + M_{32} = 0$$

$$M_{32} + M_{34} = -54kip \cdot ft$$

$$M_{43} = 0$$

$$V_{12} + V_{43} - 10kip = 0$$

   Thus we have four unknown displacements and four equations. However, the last two equations are in terms of of the shear forces, and we need to have them in terms of the end moments. This can be achieved through the following equilibrium relations

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$

$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

   Hence, all four equations are now in terms of the moments.

4. The fixed end moments for member 23 are

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The fixed end moments for member 23 are

$$M_{21F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{21F} := \frac{-10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{8} = -12.5\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{23F} = \frac{-w\cdot L^2}{12} \qquad M_{21F} := \frac{-3\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot(20\text{ft})^2}{12} = -100\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

5. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12F} = 0.2EI\cdot\left(\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) + 12.5$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{21F} = 0.2EI\cdot\left(2\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) - 12.5$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + M_{23F} = 0.1EI\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + 100$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{32}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) + M_{32F} = 0.1EI\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) - 100$$

$$M_{34} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

$$M_{43} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

6. Substituting into the equilibrium equations and dividing by EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = \frac{-875}{EI}$$

$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$

$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

and the last equilibrium equation is obtained by substituting V_{12} and V_{43} and multiplying by 10/EI

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = \frac{-83.3}{EI}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1375.7 \end{pmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

7. Substituting into the slope deflection equations gives the end moments

$$\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.8 \\ 61.78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

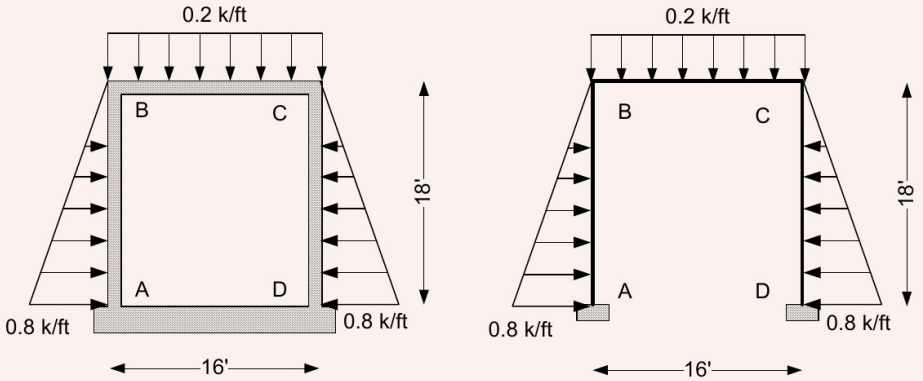
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.5 Box Culvert Slope Deflection

Draw the shear and moment diagram for the following box girder



Solution:

1. From symmetry $\theta_B = -\theta_C$, and at the base $\theta_A = \theta_D = 0$.
2. The fixed end moments are given by

$$FEM_{BC} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{BC} := \frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (16ft)^2}{12} = 4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{CB} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{CB} := -\frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (16ft)^2}{12} = -4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{20} \qquad FEM_{AB} := \frac{0.8\frac{kip}{ft} \cdot (18ft)^2}{20} = 12.96 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{BA} = \frac{-\left(w \cdot L^2\right)}{30} \qquad FEM_{BA} := -\frac{0.8\frac{kip}{ft} \cdot (18ft)^2}{30} = -8.64 \cdot kip \cdot ft$$

3. The moments are given by

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16} \cdot \left(2\theta_B + \theta_C\right) + FEM_{BC} = \frac{EI}{8} \cdot \theta_B + 4.267$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18} \cdot \left(2\theta_B + 0\right) + FEM_{BA} = \frac{2EI}{9} \cdot \theta_B - 8.64$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18} \cdot \left(2\theta_B\right) + FEM_{AB} = \frac{EI}{9} \cdot \theta_B + 12.96$$

4. Equilibrium at joint B

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$\frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64 + \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267 = 0$$

$$\theta_B(EI) := \frac{8.64 - 4.267}{\frac{2EI}{9} + \frac{EI}{8}} \rightarrow \frac{12.594}{EI}$$

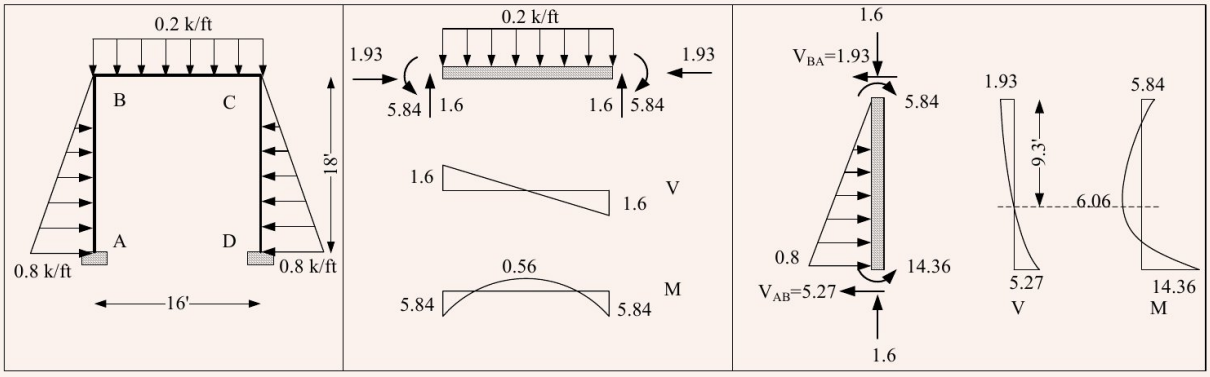
5. Substitute θ_B to get the moments

$$M_{BC} := \left[\frac{EI}{8}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 4.267\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 5.841\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{AB} := \left[\frac{EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 12.96\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 14.359\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{BA} := \left[\frac{2EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) - 8.64\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow -5.841\cdot ft\cdot kip$$

6. Member forces are determined from statics. Careful, the moment diagram is now based on the so-called "design" sign convention.



Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

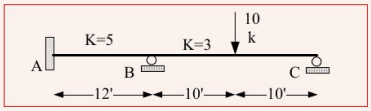
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

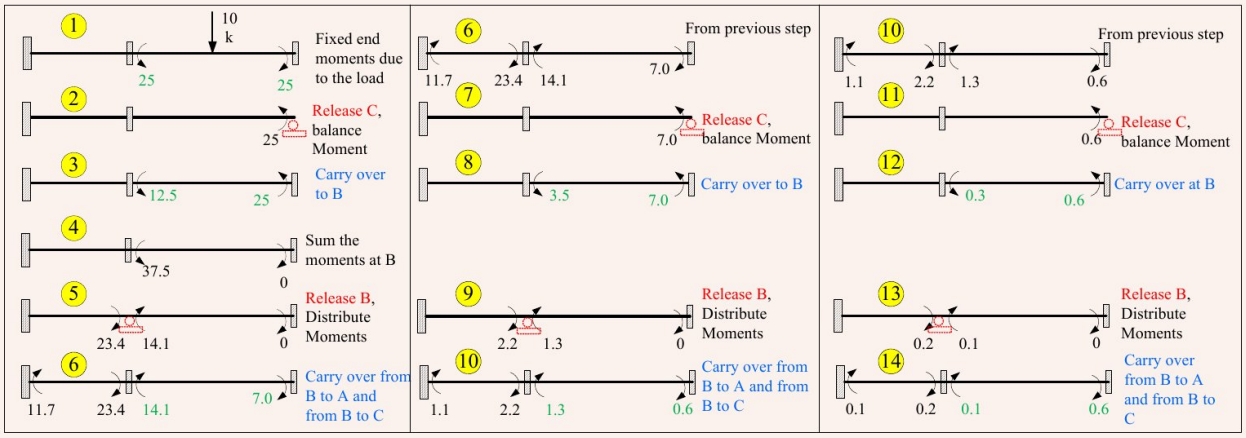
CÓPIA PARA REVISÃO

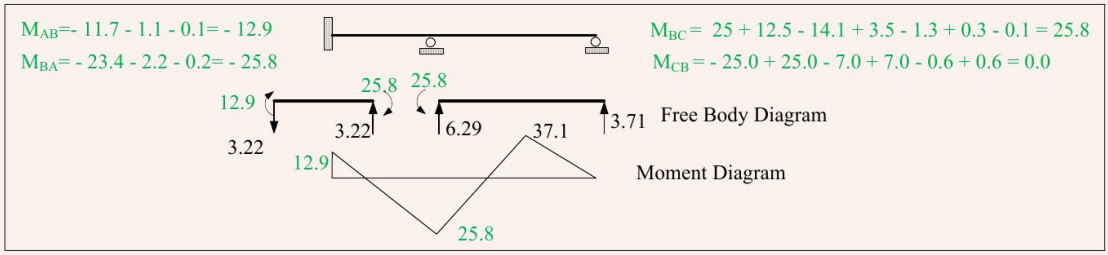
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.6 Continuous Beam

Solve for the moments at A and B by moment distribution, using (a) the ordinary method, and (b) the simplified method.







Solution:

For this example the fixed-end moments are computed as follows:

$$M_{BCF} = \frac{PL}{8} \qquad M_{BCF} := \frac{10\text{kip}\cdot 20\text{ft}}{8} = 25\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{CBF} := -M_{BCF} = -25 \cdot kip \cdot ft$

2. Since the relative stiffness is given in each span, the distribution factors are

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5 + 3} = 0.625$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5 + 3} = 0.375$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1$$

3. The balancing computations are shown below.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	3	3
DF	0	0.625	0.375	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-11.7	-23.4	-14.1	-7
			3.5	7
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6
			0.3	0.6
	-0.1	-0.2	-0.1	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

4. The above solution is that referred to as the ordinary method, so named to designate the manner of handling the balancing at the simple support at C. It is known, of course, that the final moment must be zero at this support because it is simple
5. Consequently, the first step is to balance the fixed-end moment at C to zero. The carry-over is then amde immediately to B. When B is balanced, however, a carry-over must be made back to C simply because the relative stiffness of BC is based on end C of this span being fixed. It is apparent, however, that the moment carried back to C (in this case -7.0) cannot exist at this joint. Accordingly, it is immediately balanced out, and a carry-over is again made to B, this carry-over being considerably smaller than the first. Now B is again balanced, and the process continues until the numbers involved become too small to have any practical value.
6. Alternatively, we can use the simplified method. It was previously shown that if the support at C is simple and a moment is applied at B, then the resistance of the span BC to this moment is reduced to three-fourths the value it would have had wit C fixed. Consequently, the relative stiffness of span BC is reduced to three-fourths of the value given, it will not be necessary to carry over to C.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

7. From the standpoint of work involved, the advantage of the simplified method is obvious. It should always be used when the external (terminal) end of a member rests on a simple support, but it does not apply when a structure is continuous at a simple support. Attention is called to the fact that when the opposite end of the member is simply supported, the reduction factor for the stiffness is always 3/4 for a prismatic member but a variable quantity for a nonprismatic member.
8. One valuable feature of the tabular arrangement is that of dropping down one line for each balancing operation and making the carry-over on the same line. The practice clearly indicates the order of balancing the joints, which in turn makes it possible to check back in the event of an error. Moreover, the placing of the carry-over on the same line with the balancing moments definitely decreases the chances of omitting a carry-over.
9. The correctness of the answers may ina sense be checked by verifying $\Sigma M = 0$ at each joint. However, even though the final answers satisfy this equation at every join, this is in no way a check on the inital fixed end moments. These fixed end moments, therefore, should be checked with great care before beginning the balancing operation. Moreover, it occasionally happens that conpensating errors are made in the balancing, and these errors will not be apparent when cheking $\Sigma M = 0$ at each joint.

10. To draw the final shear and moment diagram, we start by drawing the free body diagram of each beam segment with the computed moments, and then solve from statics for the reactions

$12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft} - 12\text{ft}\,V_A = 0$ $\quad V_A := \dfrac{12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft}}{12\text{ft}} = 3.225\cdot\text{kip}$

$V_A + V_{BL} = 0$ $\quad V_{BL} := -V_A = -3.225\cdot\text{kip}$

$25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft} - 20\text{ft}\cdot V_{BR} = 0$ $\quad V_{BR} := \dfrac{25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{20\text{ft}} = 6.29\cdot\text{kip}$

$6.29\text{kip} + V_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_C := 10\text{kip} - 6.29\text{kip} = 3.71\cdot\text{kip}$

$-V_{BL} - V_{BR} + R_B = 0$ $\quad R_B := V_{BL} + V_{BR} = 3.065\cdot\text{kip}$

Check: $R_A + R_B + R_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_A + R_B + V_C - 10\text{kip} = 0\cdot\text{kip}$

$M_{BC} := V_C\cdot 10\text{ft} = 37.1\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

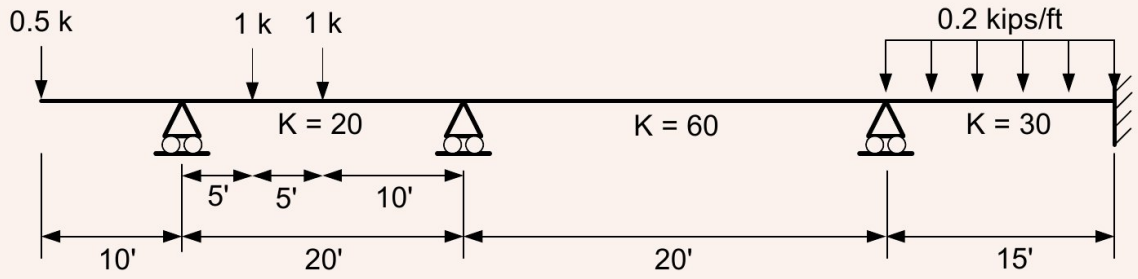
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.7 Continuous Beam

Using the simplified method of moment distribution, find the moments in the following continuous beam. The values of I as indicated by the various values of K, are different for the various spans. Determine the values of the reactions, draw the shear and bending moment diagrams, and sketch the deflected structure.



Solution:

1. Fixed-end moments

$$M_{AOF} := -0.5kip \cdot 10ft = -5 \cdot kip \cdot ft$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

For the 1 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} \qquad M_{ABF1} := \frac{1kip \cdot 5ft \cdot (15ft)^2}{(20ft)^2} = 2.812 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} \qquad M_{BAF1} := \frac{1kip \cdot (5ft)^2 \cdot 15ft}{(20ft)^2} = 0.938 \cdot kip \cdot ft$$

For the 4 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{ABF4} := \frac{4kip \cdot 20ft}{8} = 10 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF4} := -M_{ABF4} = -10 \cdot kip \cdot ft$$

For the uniform load:

$$M_{CDF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{CDF} := \frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{12} = 3.75 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -3.75 \cdot kip \cdot ft$$

2. The balancing operation is shown below

Joint	A		B		C		D
Member	AO	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	0	20	15	60	60	40	40
DF	0	1	0.2	0.8	0.6	0.4	0
FEM	-5	12.8	-10.9			3.8	-3.8
		-7.8	-3.9				
			2.9	11.9	5.9		
				-2.9	-5.8	-3.9	-1.9
			0.6	2.3	1.1		
				-0.3	-0.7	-0.4	-0.2
			0.1	0.2			
Total	-5	5	-11.2	11.2	0.5	-0.5	-5.9

3. The only new point in this example is the method of handling the overhanging end. It is obvious that the final internal moment at A must be 5 kip-ft and, accordingly, the first step is to balance out 7.8 kip-ft of the fixed end moment at AB, leaving the required 5

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

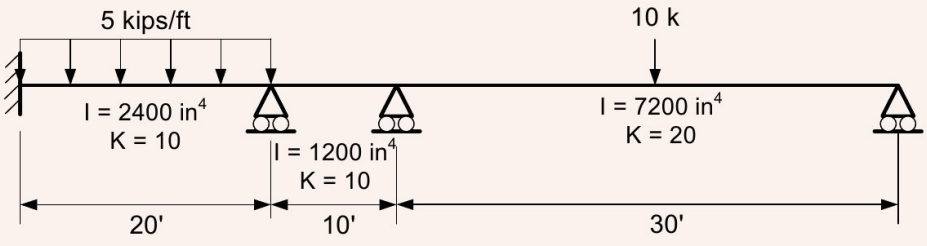
CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

kip-ft for the internal moment at AB. Since the relative stiffness of BA has been reduced to three-fourths of its original value, to permit considering the support at A as simple in balancing, no carry-over from B to A is required.
4. The easiest way to determine the reactions is to consider each span as a free body. End shears are first determined as caused by the loads alone on each span and, following this, the end shears caused by the end moments are computed. These two shears are added algebraically to obtain the net end shear for each span. An algebraic summation of the end shears at any support will give the total reaction.

16.8 Continuous Beam, Initial Settlement

For the following beam find the moments at A, B, and C by moment distribution. The support at C settles by 0.1 in. Use
$E := 30000ksi$



Solution:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. Fixed-end moments

Uniform load:

$$M_{ABF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{ABF} := \frac{5\,\frac{kip}{ft} \cdot (20ft)^2}{12} = 166.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} := -M_{ABF} = -166.667 \cdot kip \cdot ft$$

Concentrated load:

$$M_{CDF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{CDF} := \frac{10kip \cdot 30ft}{8} = 37.5 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -37.5 \cdot kip \cdot ft$$

Moments caused by deflection:

$$M_{BCF} = \frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{BCF} := \frac{6 \cdot E \cdot 1200in^4 \cdot 0.1in}{(10ft)^2} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CBF} := M_{BCF} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CDF} = -\frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{CDF} := -\frac{6 \cdot E \cdot 7200in^4 \cdot 0.1in}{(30ft)^2} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := M_{CDF} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

2. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	10	10	15	20
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	1
	167	-167			38	-38
			125	125	-83	-83
					60	121
FEM			-28	-56	-84	
	17	35	35	17		
			-3	-7	-10	
	1	2	1			
Total	185	-130	130	79	-79	0

The fixed-end moments caused by a settlement of supports have the same sign at both ends of each span adjacent to the settling support. The above computations have been carried to the nearest kip-ft, which for the moments of the magnitudes involved, would be significantly close for purposes of design.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.9 Frame

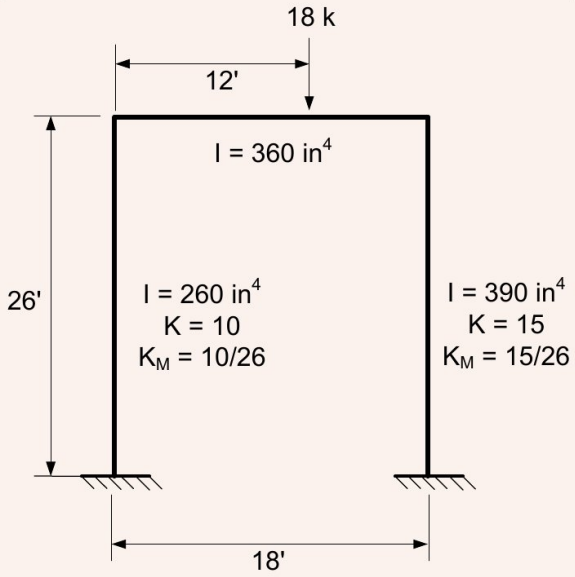
Find all moments by moment distribution for the following frame. Draw the bending moment diagram and the deflected structure.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The first step is to perform the usual moment distribution. The reader should fully understand that this balancing operation adjusts the internal moments at the ends of the members by a series of corrections as the joints are considered to rotate, until $\Sigma M = 0$ at each joint. The reader should also realize that during this balancing operation no translation of any joint is permitted.
2. The fixed-end moments are

$$M_{BCF} := \frac{18\text{kip}\cdot 12\text{ft}\cdot(6\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = 24\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CBF} := -\frac{18\text{kip}\cdot 6\text{ft}\cdot(12\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = -48\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

3. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM			24	-48		
			13.7	27.4	20.6	10.3
	-6.3	-12.6	-25.1	-12.5		
			3.6	7.1	5.4	2.7
	-0.6	-1.2	-2.4	-1.2		
			0.3	0.7	0.5	0.2
		-0.1	-0.2			
Total	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2

4. The final moments listed in the table are correct only if there is no translation of any joint. It is therefore necessary to determine

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

whether or not, with the above moments existing, there is any tendency for side lurch of the top of the frame.
5. If the frame is divided into three free bodies, the result will be as shown below.

Inspection of this sketch indicates that if the moments of the first balance exist in the frame, there is a net force of $1.53\text{kip} - 0.8\text{kip} = 0.73\cdot\text{kip}$ tending to sway the frame to the left. In order to prevent side-sway, and thus allow these moments to exist (temporarily for the purpose of the analysis), it is necessary that an imaginary horizontal force ce considered to act to the right at B or C. This force is designated as the artificial joint restraint (abbreviated as AJR) and is shown below.

6. This illustration shows the complete load system which would have to act on the structure if the final moments of the first balance are to be correct. The AJR, however, cannot be permitted to remain, and thus its effect must be cancelled. This may be accomplished by finding the moments in the frame resulting from a force equal but opposite to the AJR and applied at the top.
7. Although it is not possible to make a direct solution for the moments resulting from this force, they may be determined inddirectly. Assume some unknown force P acts on the frame, as shown below, and causes it to deflect laterally to the left, without joint rotation, through some distance Δ. Now, regardless of the value of P and the value of the resulting Δ, the fixed-end moments induced in the ends of the columns must be proprtional to the respective values of K_M.

Recalling that the fixed end moment is $M_F = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2} = 6EK_M\cdot\Delta$, where $K_M = \frac{1}{L^2} = \frac{K}{L}$ we can write

$$\Delta = \frac{M_{ABF}}{6E\cdot K_M} = \frac{M_{DCF}}{6E\cdot K_M}$$

$$\frac{M_{ABF}}{M_{DCF}} = \frac{K_{MAB}}{K_{MDC}} = \frac{10}{15}$$

These fixed-end moments could, for example, have values of -10 and -15 kip-ft, or -20 and -30, or -30 and -45, or any other combination so long as the above ratio is maintained. The proper procedure is to choose values for the fixed-end moments of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. This will result in the same accuracy for the results of the balance for the side-sway correction that was realized in the first balance for the real loads. Accordingly, it will be assumed that P, and the resulting Δ, are of such magnitude as to result in fixed-end moments shown below.
8. Obviously $\Sigma M = 0$ is not satisfied for joints B and C in this deflected frame. Therefore, these joints must rotate until equilibrium is reached. The effect of this rotation is determined in the distribution below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM	-30	-30			-45	-45
			12.9	25.8	19.2	9.6
	2.8	5.7	11.4	5.7		
			-1.6	-3.3	-2.4	-1.2
	0.2	0.5	1.1	0.5		
				-0.3	-0.2	-0.1
Total	-27	-23.8	23.8	28.4	-28.4	-36.7

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. During the rotation of joints B and C, as represented by the above distribution, the value of Δ has remained constant, with P varying in magnitude as required to maintain Δ.
10. It is now possible to determine the final value of P simply by adding the shears in the columns. The shear in any member, without external loads applied along its length, is obtained by adding the end moments algebraically and dividing by the length of the member. The final value of P is the force necessary to maintain the deflection of the frame after the joints have rotated. In other words, it is the force which will be consistent with the displacement and internal moments of the structure as determined by the second balancing operation. Hence this final value of P will be called the consistent joint force (abbreviated as CJF).
11. The consistent joint force is given by

$$CJF := \frac{27kip\cdot ft + 23.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{28.4kip\cdot ft + 36.7kip\cdot ft}{26ft} = 4.458\cdot kip$$

and inspection clearly indicates that the CJF must act to the left.
12. Obviously, then, the results of the last balance above are moments which will exist in the frame when a force of 4.45 kip acts to the left at the top level. It is necessary, however, to determine the moments resulting from a force of 0.73 kip acting to the left at the top level, and some as yet unknown factor "z" times 4.45 kip will be used to represent this force acting to the left.
13. The free body diagram for the member BC is shown above. $\Sigma H = 0$ must be satisfied for this figure, and if forces to the left are considered as positive, the result is $4.45z - 0.73 = 0$, and

$$z := \frac{0.73}{4.45} = 0.164$$

If this factor is applied to the moments obtained from the second balance, the result will be the moments caused by a force of 0.73 kip acting to the left at the top level. If these moments are then added to the moments obtained from the first balance, the result will be the final moments for the frame, the effect of the AJR having been cancelled. The combintaion of moments is shown below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2
z x M from 2nd balance	-4.4	-3.9	3.9	4.7	-4.7	-6
Final Moments	-11.3	-17.8	17.8	-21.8	21.8	7.2

14. If the moments are correct, the shears in the two columns of the frame shoul dbe equal and opposite to satisfy $\Sigma H = 0$ for the entire frame. This check is expressed

$$\frac{11.3kip\cdot ft + 17.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{-21.8kip\cdot ft + -7.2kip\cdot ft}{26ft} = 0\cdot kip$$

and

$$1.12kip - 1.11kip = 0.01\cdot kip \text{ (nearly)}$$

The signs of all moments taken from the previous table have been reversed to give the correct signs for the end moments external to the columns. It will be remembered that the moments considered in moment distribution are always internal for each member. However, the above check actually considers each column as a free body and so external moments must be used.
15. The moment under the 18 kip load is obtained by treating BC as a free body:

$$M_{18} := 5.77kip\cdot 12ft - 17.8kip\cdot ft = 51.44\cdot kip\cdot ft$$

16. The direction of side lurch may be determined from the obvious fact that the frame will always lurch in a direction opposite to the AJR. If required, the magnitude of this side lurch may be found. The procedure which follows will apply.

A force P of sufficient magnitude to result in the indicated column moments and the lurch Δ was applied to the frame. During the second balance this value of Δ was held constant as the joints B and C rotated, and the value of P was considered to vary as necessary. The final value of P was found to be 4.45 kip. Since Δ was held constant, however, its magnitude may be determined from the equation $M = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2}$, where M is the fixed-end moment for either column, I is the moment of inertia for that column, and L is the length. This Δ will be the lurch for 4.45 kip acting at the top level. For any other force acting horizontally, Δ would vary proportially and thus the final lurch of the frame would be the factor z multiplied by Δ determined above.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

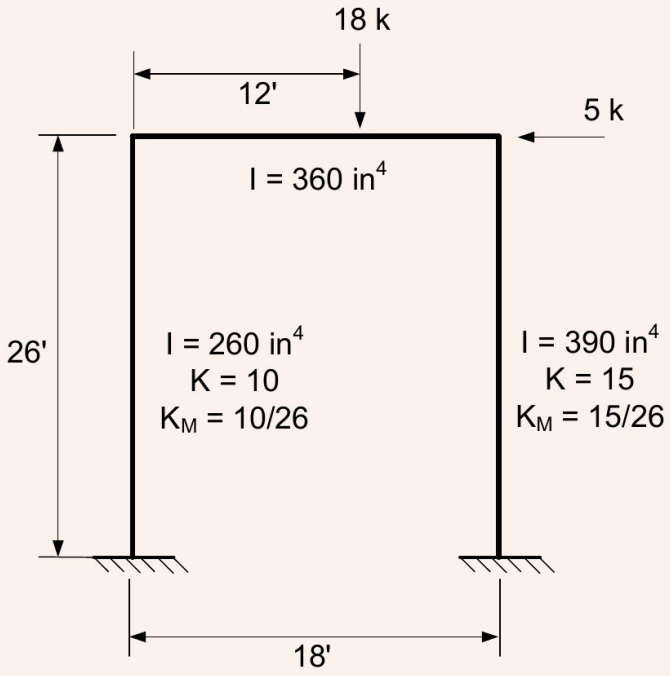
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.10 Frame with Side Load

Find by moment distribution the moments in the following frame



Solution:

The first balance will give the results shown

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0

A check of the member BC as a free body for $\Sigma H = 0$ will indicate that an AJR is necessary as follows:

$$AJR + 0.84kip - 0.87kip - 5kip = 0$$

from which

$$AJR := 5kip + 0.87kip - 0.84kip = 5.03 \cdot kip$$ in the direction assumed

The values of K_M for the two columns are shown, with K_M for column CD being K/2L because of the pin at the bottom. The horizontal displacement Δ of the top of the frame is assumed to cause the fixed-end moments shown there. These moments are proportional to the values of K_M and of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. The results of balancing out these moments are

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-34.4	-28.4	28.4	23.6	-23.6	0

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$CJF := \frac{34.4kip\cdot ft + 28.4kip\cdot ft + 23.6kip\cdot ft}{26ft} = 3.323\cdot kip$$

and

$$5.03 - 3.32z = 0$$

from which

$$z := \frac{5.03kip}{CJF} = 1.514$$

The final results are

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0
z x M 2nd balance	-52.1	-43	43	35.8	-35.8	0
Final moments	-59.3	-57.6	57.6	13.3	-13.3	0

If these final moments are correct, the sum of the column shears will be 5 kip

$$\Sigma V := \frac{59.3\cdot kip\cdot ft + 57.6kip\cdot ft + 13.3kip\cdot ft}{26ft} = 5.01\cdot kip$$

The 5 kip horizontal load acting at C enters into the problem only in connection withthe determination of the AJR. If this load had been applied to the column CD between the ends, it would have resulted in intial fixed-end moments in CD and these would be computed in the usual way. In addition, such a load would have enetered into the determination of the AJR, since the horizontal reaction of CD against the right end of BC would have been computed by treating CD as a free body.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

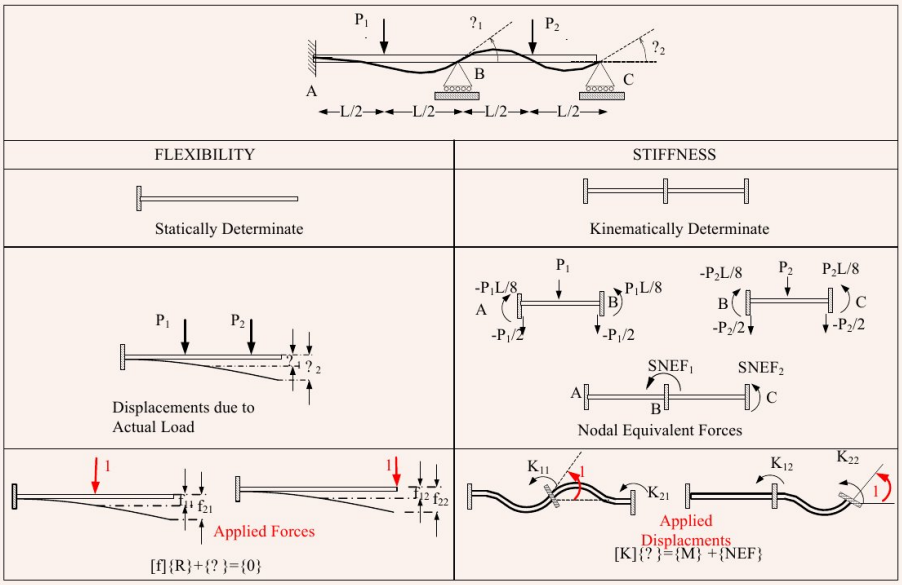
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

17.1 Beam

Considering the figure, let $P_1 = 2P$, $M = PL$, $P_2 = P$, and $P_2 = P$. Solve for the displacements.



Solution:

1. Using the previously defined sign convention (counterclockwise positive)

$$\Sigma NEF_1 = \frac{P_1 \cdot L}{8} - \frac{P_2 \cdot L}{8} = \frac{2P \cdot L}{8} - \frac{P \cdot L}{8} = \frac{P \cdot L}{8}$$

$$\Sigma NEF_2 = \frac{P \cdot L}{8}$$

2. If it takes 4EI/L (k_{44AB}) to rotate AB and 4EI/L (k_{22BC}) to rotate BC, it will take a total force of 8EI/L to simultaneously rotate AB and BC (Note that a rigid joint is assumed)

3. Hence, K_{11} which is the sum of the rotational stiffnesses at global d.o.f. 1, will be equal to $K_{11} = \frac{8EI}{L}$; similarly, $K_{21} = \frac{2EI}{L}$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

(k_{42BC})

4. If we rotate dof 2 by a unit angle, then we will have $K_{22} = \frac{4EI}{L}$ and $K_{12} = \frac{2EI}{L}$

5. The equilibrium relation can be written as

$$\begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

We note that the matrix corresponds to the structure's stiffness matrix, and not the augmented one.

6. The two by two matrix is next inverted

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ \frac{-5}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix}$$

7. Next we need to determine both the reactions and the internal forces.
8. Recall that for each element $\mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}$, and in this case $\mathbf{p} = \mathbf{P}$ and $\boldsymbol{\delta} = \Delta$ for element AB. The element stiffness matrix has been previously derived, and in the case of the global and local d.o.f. are the same.
9. hence, the equilibrium equation for element AB, at the element level, can be written as

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \\ \frac{2P}{2} \\ \frac{-2PL}{8} \end{pmatrix}$$

Solving

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{107}{56} \cdot P & \frac{31}{56} \cdot PL & \frac{5}{56} \cdot P & \frac{5}{14} \cdot PL \end{pmatrix}$$

10. Similarly, for element BC:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{-5}{} \cdot \frac{P \cdot L^2}{} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \end{pmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 112 & EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

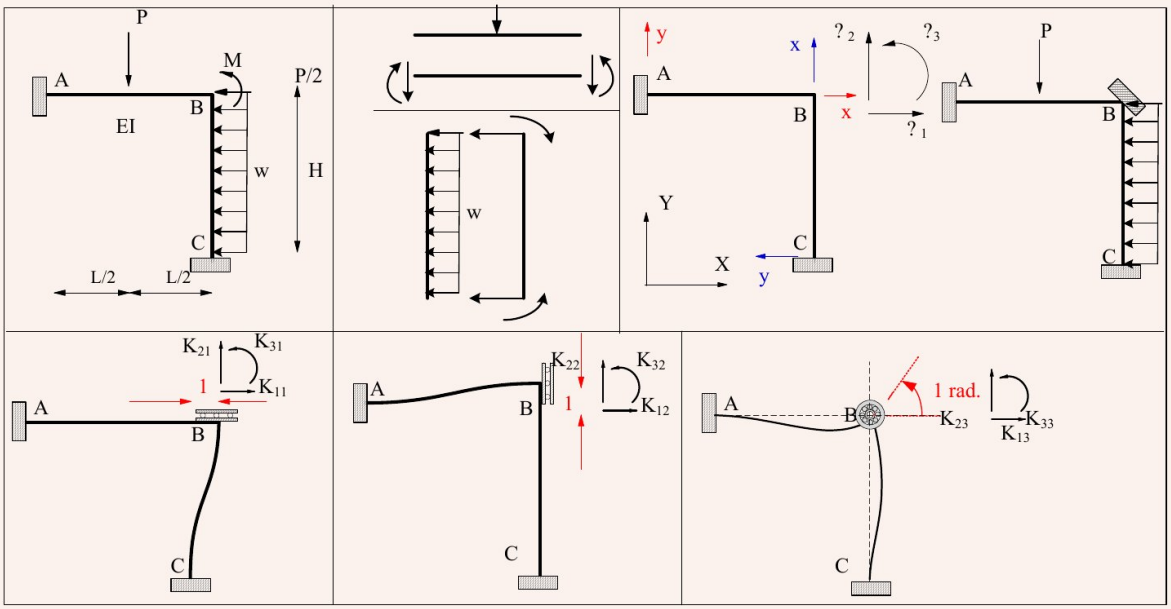
or

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\cdot P & \frac{9}{14}\cdot PL & \frac{-1}{7}\cdot P & 0 \end{pmatrix}$$

11. This simple example calls for the following observations:
    a) Node A has contributions from element AB only, while node B has contributions from both AB and BC
    b) We observe that $p_{3AB} \neq p_{1BC}$ even though they both correspond to a shear force at node B, the difference between them is equal to the reaction at B. Similarly, $p_{4AB} \neq p_{2BC}$ due to the externally applied moment at B
    c) From this analysis, we can draw the complete free body diagram and then the shear and moment diagrams which is what the engineer is most interested in for design purposes.

17.2 Frame

Whereas in the first example all local coordinate systems were identical to the global one, in this example we consider the orthogonal frame shown below.



Solution:

1. Assuming axial deformations, we do have three global degress of freedom Δ_1, Δ_2, and θ_3.
2. Constrain all degrees of freedom, and thus make the structure kineamatically determinate.
3. Determine the nodal equivalent forces for each element in its own local coordinate system (the first three values are associated with the first node, and the last three with the second node):

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

with the first node, and the last three with the second node):

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-P}{2} & \frac{-PL}{8} & 0 & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} \end{pmatrix} \quad \text{Member AB}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{-w\cdot H^2}{12} & 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix} \quad \text{Member BC}$$

4. Summing the nodal equivalent forces at node B in global coordinates we have

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-wH}{2} & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} - \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

5. Next, we apply a unit displacement in each of the three global degrees of freedom, and we seek to determine the structure global stiffness matrix. Each entry K_{ij} of the global stiffness matrix will correspond to the internal force in degreee of freedome i, due to a unit displacement in degree of freedom j.

6. Recalling the force displacement relations derived earlier, we can assemble the global stiffness matrix in terms of contributions from both AB and BC.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} Δ_3
K_{1j}	AB	EA/L	0	0
	BC	$12EI/H^3$	0	$6EI/H^2$
K_{2j}	AB	0	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
	BC	0	EA/H	0
K_{3j}	AB	0	$-6EI/L^2$	4EI/L
	BC	$6EI/H^2$	0	4EI/H

7. Summing up, the structure global stiffness matrix [**K**] is

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}$$

8. The global equation of equilibrium can now be written

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} \\ 0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{wH}{2} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{2} + \frac{w\cdot H^2}{2} \end{pmatrix}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} H^2 & L^2 & L & H \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Solve for the displacements

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} - \frac{wH}{2} \\ \frac{-P}{2} \\ M + \frac{PL}{8} - \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

10. To obtain the element internal forces, we will multiply each element stiffness matrix by the local displacements. For element AB, the local and global coordinates match, thus

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

11. For element BC, the local and global coordinates do not match, hence we will need to transform the dispalcements from their global to their local components. But since vector (displacement and load) and matrix transformation have not yet been covered, we not by inspection that the relationship between global and local coordinates for element BC is

Local	δ_1	δ_2	θ_3	δ_4	δ_5	θ_6
Global	0	0	0	Δ_2	$-\Delta_1$	θ_3

and we observe that there are no local or global displacements associated with dof 1-3; Hence, the internal forces for element BC are given by:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \\ -\Delta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ -\frac{w \cdot H^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

Note that the element is defined as going from C to B hence x,y,z correspond to Y, -X, Z.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Apêndice K

Filtragem de Registros Sísmicos (Transformações de Fourrier Rápido)

Abstract

Este apêndice explica a filtragem dos registros de aceleração sísmica usando métodos de filtro Transformada rápida de Fourier (FFT) e Butterworth. A teoria muda a representação do sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência, decompondo o sinal em componentes funções sine e cosseno de diferentes frequências. Manipulando o conteúdo de frequência, ruído indesejado e componentes de alta frequência podem ser removidos enquanto preservam as partes fisicamente significativas do registro. O apêndice cobre as bases matemáticas da série Fourier e transforma, algoritmos de filtragem práticos, e aplicações para registros sísmicos de forte movimento comumente usados em projeto estrutural e análise.

K.1 Como calcular a transformação de Fourier 3040

Pode ser necessário filtrar altas frequências de um registro sísmico (especialmente para registros de movimento forte). Esta seção explica o procedimento simples.

Estamos acostumados a considerar um sinal no domínio do tempo, ou seja, $f(t)$.. No entanto, há vantagens em considerá-los no domínio da frequência.

A série Fourier fornece uma forma alternativa de representar dados: Em vez de representar a amplitude do sinal em função do tempo, representamos o sinal pela quantidade de informação contida em diferentes frequências. Fig. K.1 mostra sinais harmônicos com ruído adicionado nos domínios tempo e frequência.

As transformadas de Fourier nos permitem transferir um sinal do domínio do tempo para

CÓPIA PARA REVISÃO

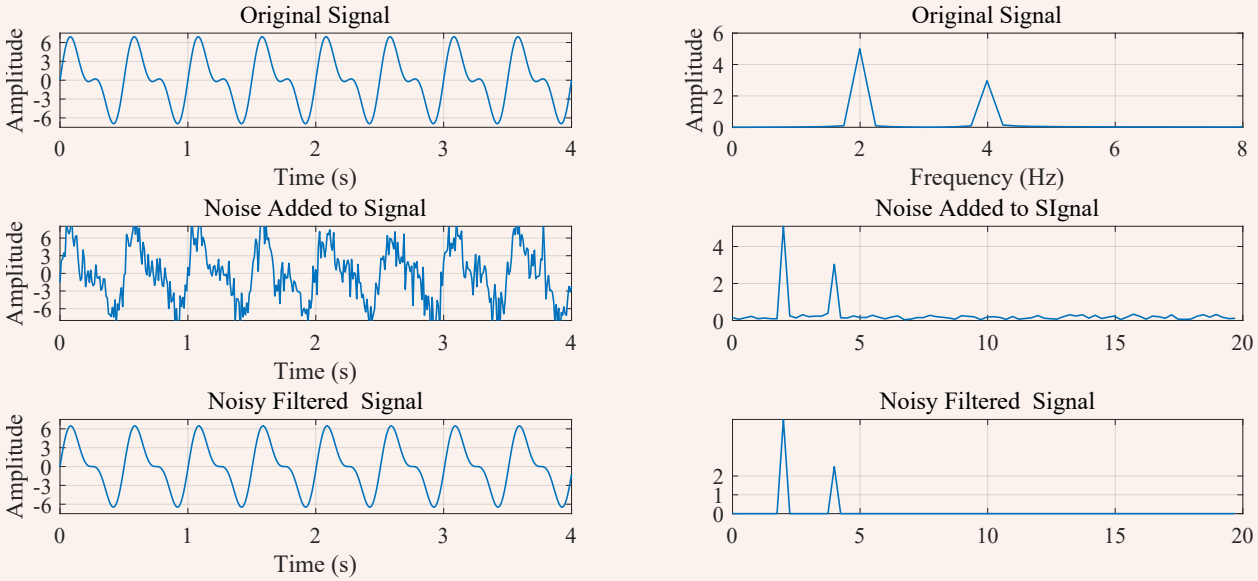


Figura K.1: Exemplos de sinais filtrados em Butterworth

o domínio da frequência, decompondo-o em uma soma de sines e cossenos de diferentes frequências,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi\omega t} \mathrm{d}t$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{FFT}} X(\omega)$$

Enquanto o FFT inverso nos leva de volta do domínio da frequência para o domínio do tempo através de:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2i\pi\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$X(\omega) \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} x(t)$$

Uma vez que estamos no domínio da frequência, filtros especiais (especialmente os

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

chamados Filtros Butterworth), podem ser usados antes de voltarmos ao domínio do tempo (com dados filtrados). Alguns dos filtros Butterworth mais comuns incluem, Figura K.2:

$$|H(j\omega)|^2 = \begin{cases} \text{Low pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \\ \text{High pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band stop} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_U}\right)^{2n}} \end{cases}$$

Onde ω, ω_L, ω_U, e n são a frequência, as frequências de filtro inferior e superior, e a ordem do filtro, respectivamente.

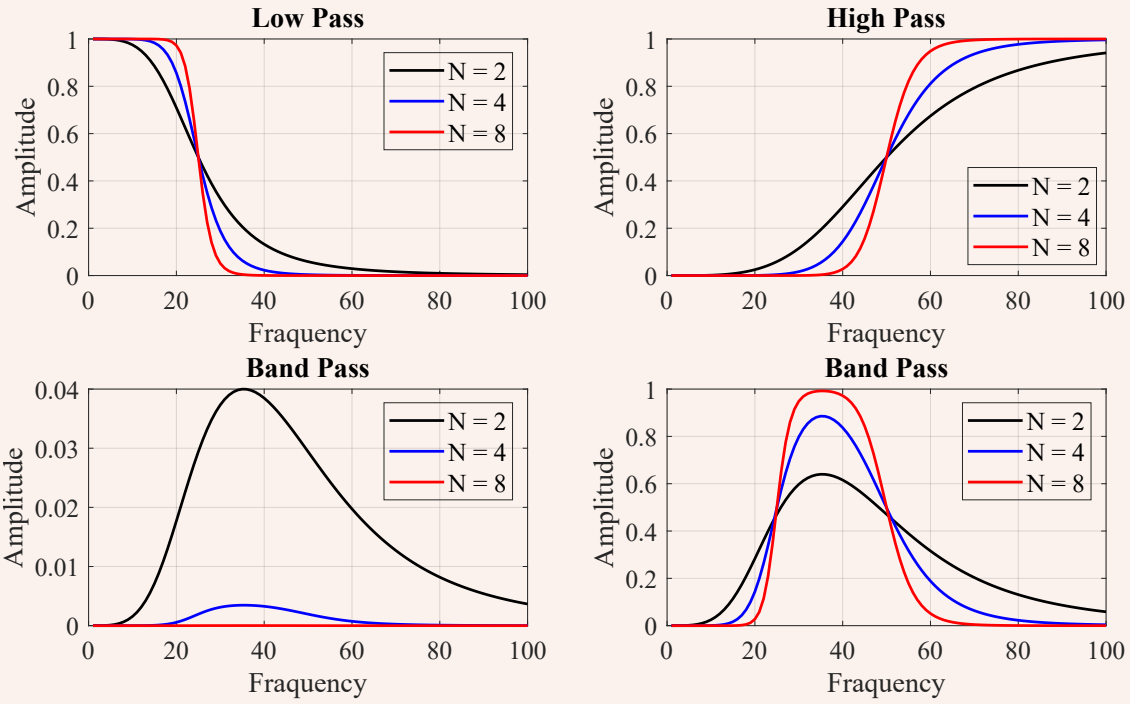


Figura K.2: Comparação de filtros Butterworth para vários n

K.1 Como calcular a transformação de Fourier

Na prática, duas situações distintas surgem:

(a) A transformação de uma função contínua $x(t)$ É necessário.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(b) A transformação de um conjunto finito de dados gravados é necessária (o caso usual na engenharia sísmica).

(a) Fourier Transformação de uma função contínua

Para uma função contínua $x(t)$ definido em $(-\infty, \infty)$A transformada de Fourier é definida como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

O procedimento é:

1. Defina a função $x(t)$ analiticamente.
2. Substitua-o na integral.
3. Avalie a integral (analiticamente, se possível).

Por exemplo, considere a função harmônica

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t).$$

Usando a identidade de Euler,

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right),$$

A transformação produz impulsos em $\omega = \pm\omega_0$, demonstrando que um harmônico puro contém energia em uma única frequência.

Em muitas aplicações estruturais, especialmente na análise de vibrações, as transformadas em forma fechada são usadas para entender o conteúdo da frequência, ressonância e comportamento de estabilidade.

(b) Transformação de Fourier de um conjunto de dados finitos (DFT e FFT)

Na engenharia sísmica não lidamos com funções contínuas, mas com dados amostrados:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$$

Amostrado em intervalos de tempo uniformes Δt.

A duração total é

$$T = N\Delta t,$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

E a frequência de amostragem é

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}.$$

A discreta transformada de Fourier é definida como

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

A transformada inversa é

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N}.$$

O Transformada rápida de Fourier (FFT) é simplesmente um algoritmo numérico eficiente para calcular o DFT em $O(N \log N)$ Operações ao invés de $O(N^2)$.

Resolução de Frequência e Frequência Nyquist

Duas quantidades importantes seguem diretamente da teoria de amostragem:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \tag{K.1}$$

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{K.2}$$

- Δf determina a resolução de frequência.
- f_{Nyquist} é a maior frequência que pode ser representada sem pseudônimos.

Assim, para registros sísmicos:

- Alta taxa de amostragem → maior frequência de Nyquist.
- Longa duração → Melhor resolução de frequência.

Procedimento Prático para Registros Sísmicos

Dado um registro de aceleração sísmica:

1. Remova a média (correção de base).
2. Opcionalmente aplique janelas (Hanning, Hamming).
3. Computar FFT.
4. Multiplique pela função de filtro escolhida $H(\omega)$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

5. Computar FFT inversa.
6. Tome parte real do resultado.

Isso produz o histórico de tempo filtrado.

7 O procedimento é ilustrado em um MATLAB®Código em §I.5.3.

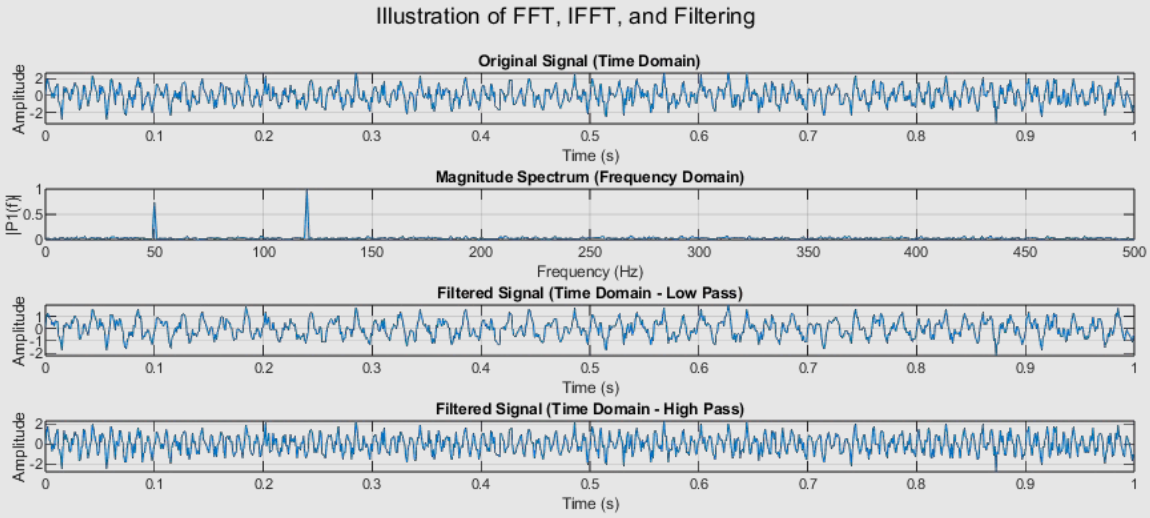
Ex K.1: FFT

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

Um sinal composto é criado combinando dois componentes senoidais com frequências $f_1 = 50$ Hz e.. $f_2 = 120$ Hz.. O ruído aleatório é adicionado ao sinal para simular um cenário mais realista.

O FFT é aplicado para transformar o sinal no domínio da frequência, revelando os componentes espectrais e suas magnitudes.

O IFFT reconstrói o sinal original de sua representação do domínio da frequência, demonstrando a natureza reversível da transformação.



- **Sinal original:** O sinal de domínio temporal mostra o efeito combinado dos componentes senoidais e som adicionado.
- **Espectro de Frequência:** O FFT revela os componentes de frequência dominantes (50 Hz e 120 Hz) no sinal.
- **Sinal Filtrado de Baixo Passo:** O filtro passa-baixo remove ruído de alta frequência, retendo componentes abaixo da freqüência de corte (100 Hz).
- **Sinal Filtrado de Alto Passo:** O filtro passa-alto remove componentes de baixa frequência, mantendo aqueles acima da freqüência de corte (100 Hz).
- **Sinal reconstruído:** O IFFT reconstrui com precisão os sinais filtrados e originais, demonstrando a reversibilidade da transformação.

CÓPIA PARA REVISÃO

Apêndice L

Revisão da Álgebra Linear

Abstract

Porque a discretização de uma estrutura em um número finito de nós, a solução será baseada na matriz. Em algum momento, uma matriz terá que ser "invertida"para resolver deslocamentos.

Portanto, este capítulo fornecerá ao leitor uma breve revisão da álgebra linear, e embora nós confiemos em funções construídas para inversão de matriz (como `Inv` *Em MATLAB®ou* `Linalg.inv(a)` *Em Python), os algoritmos por trás das várias opções devem ser entendidos às vezes.*

L.1 Em matrizes . . . 3045
- L.1.1 Definições . . . 3045
- L.1.2 Operações de matriz elementar . . . 3046
- L.1.3 Determinantes . . . 3047
- L.1.4 Inversão . . . 3048

L.2 Soluções de equações lineares . . . 3049
- L.2.1 Estratégias . . . 3049
- L.2.2 Descomposição . . . 3049
- L.2.3 Métodos indiretos . . . 3056

L.3 Características matriciais e melhorias computacionais . . . 3057
- L.3.1 Singularidade e hierarquia . 3057
- L.3.2 Autovalores e autovetores . . 3058
- L.3.3 Número da condição . . . 3059
- L.3.4 Pré-condicionamento . . . 3059

L.4 Exemplos . . . 3062
- L.4.1 Ex L.1: Eliminação de Gauss 3063
- L.4.2 Ex L.2: Eliminação Gauss-Jordan . . . 3063
- L.4.3 Ex L.3: **lu** Descomposição . . 3064
- L.4.4 Ex L.4: A decomposição de Cholesky . . . 3065
- L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel . . . 3066
- L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel . . . 3067
- L.4.7 Ex L.7: Decomposição de valor singular . . . 3068
- L.4.8 Ex L.8: Pré-condicionamento 3069

CÓPIA PARA REVISÃO

L.1 Em matrizes

L.1.1 Definições

Matrix:

$$[A] = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Indicamos as dimensões da matriz por $\mathbf{A}_{m\times n}$ e um termo individual da matriz por A_{ij}. Note que matrizes, e vetores são geralmente negritos quando digitados, ou com um til quando escrito à mão $\tilde{A}$.

Vetores: são umas matrizes pilar:

$$\{X\} = \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{Bmatrix}$$

Um vetor de linha seria

$$\mathbf{C}^T = \lfloor C \rfloor = \lfloor \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \dots & B_i & \dots & B_m \end{array} \rfloor$$

Note que escalares, vetores e matrizes são tensores da ordem 0, 1 e 2 respectivamente.

Matriz quadrada: são matrizes com igual número de linhas e pilares. $\mathbf{A}_{m\times m}$

Simetria: $A_{ij} = A_{ji}$

Matriz de identidade: é uma matriz quadrada com todas as suas entradas iguais a zero exceto os termos diagonais que são iguais a um. É frequentemente denotado Como **I**, e

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ 1, & if\, i = j \end{cases}$$

Matriz diagonal: é uma matriz quadrada com todas as suas entradas iguais a zero exceto os termos diagonais que são diferentes de zero. É muitas vezes Denotado como **D**, e

$$D_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ \neq 0, & if\, i = j \end{cases}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Matriz triangular superior: é uma matriz quadrada com todas as suas entradas igual a zero, exceto aqueles ao longo e acima da diagonal. É muitas vezes Denotado como **U**, e

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i > j \\ \neq 0, & if\, i \leq j \end{cases}$$

Matriz triangular inferior: é uma matriz quadrada com todas as suas entradas igual a zero, exceto aqueles ao longo e abaixo da diagonal. É muitas vezes Denotado como **L**, e

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i < j \\ \neq 0, & if\, i \geq j \end{cases}$$

Matrizes ortogonais: $\mathbf{A}_{m\times n}$ e.. $\mathbf{B}_{m\times n}$ são said to be orthogonal if $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Uma matriz quadrada $\mathbf{C}_{m\times m}$ É ortogonal if $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$

Traço de uma matriz: $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Submatrices: são matrizes dentro de uma matriz, por exemplo

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 &= [4]\,[3\ \ 2] = [12\ \ 8] \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 14 & 34 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Operar em submatrices como se estivéssemos operando em matriz individual Elementos.

L.1.2 Operações de matriz elementar

1 **Transporte:** de uma matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ é outra matriz $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T_{n\times m}$ De tal forma que.. $B_{ij} = A_{ji}$ Note que

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Adição (subtração): $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n}$; $A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$

Multiplicação Escalar:$\mathbf{B} = k \cdot \mathbf{A}$; $B_{ij} = kA_{ij}$

Multiplicação Matrix: de duas matrizes é possível se o número de pilares do primeiro é igual ao número de linhas do segundo.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{m\times n} &= \mathbf{B}_{m\times p} \cdot \mathbf{C}_{p\times n} \\ A_{ij} &= \underbrace{\lfloor \mathbf{B}_i \rfloor_{1\times p} \cdot \left\{\mathbf{C}_j\right\}_{p\times 1}}_{1\times 1} \\ &= \sum_{r=1}^{p} B_{ir} C_{rj}\end{aligned}$$

Algumas propriedades importantes dos produtos matriciais incluem:

Associativo: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

Distributivo: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

Não-Comutatividade: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

L.1.3 Determinantes

O Determinante de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$, denotado como $\det \mathbf{A}$ ou $|\mathbf{A}|$, é recursivamente definido como

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}$$

Onde $\mathbf{A}_{1j}$ é o $(n-1)$x$(n-1)$ Matriz obtida eliminando a linha i-h e o j-th da matriz $\mathbf{A}$.

Por um.. 2×2 Matriz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a21$$

Por um.. 3×3 Matriz

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}\end{aligned}$$

Pode ser desafiador escrever um programa de computador para calcular o determinante de uma $n \times n$ Matriz.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

8 Nós notamos que um $n \times n$ Matriz teria um determinante que contém $n!$ termos cada um envolvendo n Multiplicações. Por isso, se $n = 10$ Não seria $10! = 3,628,800$ termos, cada um envolvendo 9 multiplicações, portanto, mais de 30 milhões de operações flutuantes seriam realizado para avaliar o determinante. É por isso que é impraticável usar a regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.

9 Algumas propriedades importantes dos deteminantes:

1. O determinante da transposição de uma matriz é igual ao determinante da matriz
$$| \mathbf{A} | = | \mathbf{A}^T |$$
2. Se pelo menos uma linha ou um pilar é uma combinação linear do outras linhas ou pilares, então o determinante é zero. O inverso também é Verdade, se o determinante é igual a zero, então pelo menos uma linha ou uma pilar é uma combinação linear de outras linhas ou pilares.
3. Se há dependência linear entre as linhas, então também existe uma entre pilares e *vice-versa*.
4. O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é igual a o produto dos termos diagonais principais.
5. O determinante do produto de duas matrizes quadradas é igual a o produto dos determinantes individuais
$$| \mathbf{AB} | = | \mathbf{A} || \mathbf{B} |$$

10 Singularidade e classificação são discutidos em §45.1.1 em conjunto com matrizes de rigidez.

L.1.4 Inversão

11 O inverso de uma matriz quadrada (não-singular) $\mathbf{A}$ é denotado por $\mathbf{A}^{-1}$ E é tal que
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

12 Algumas observações

1. O inverso da transposição de uma matriz é igual à transposta do inverso
$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1^T}$$
2. O inverso de um produto matricial é o produto inverso do Inversos
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$
3. O inverso de uma matriz simétrica também é simétrico

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

4. O inverso de uma matriz diagonal é outra diagonais com entradas iguais ao inverso das entradas da matriz original.
5. O inverso de uma matriz triangular é uma matriz triangular.
6. É computacionalmente mais eficiente decompor uma matriz ($\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$) usando decomposição superior e inferior ou eliminação Gauss) do que para inverter Uma matriz.

L.2 Soluções de equações lineares

L.2.1 Estratégias

13 Como discutido em §45.2.1A decomposição é um passo crítico para determinar $\mathbf{K}^{-1}$.

14 Nós procuramos resolver para $\mathbf{x}$ em um sistema de equações lineares

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Simbolicamente Esta operação é representada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

15 Em geral, há três abordagens para esta operação:

Inversão direta usando a regra de Cramer onde $\mathbf{A}^{-1} = \frac{[adj\mathbf{A}]}{\mathbf{A}}$.. No entanto, esta abordagem é computacionalmente muito ineficiente para $n \geq 3$ Porque requer avaliação de n Determinações de alta ordem. Nunca é usado (além da inversão de mão de um 2×2 Matriz).

Descomposição: onde, no caso mais geral, procuramos decompor

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LDU}$$

Este método tem um número finito de operações necessárias para alcançar a decomposição Resultados exatos.

Métodos indiretos: ou técnica de decomposição iterativa, sem *A-priori* O conhecimento do número de operações necessárias, produzindo uma solução aproximada com o nível definido pelo usuário de precisão.

16 Os principais métodos de solução são mostrados na tabela L.1.

L.2.2 Descomposição

17 Nesta classe de solução, exploraremos três operações elementares que podem ser usadas em uma matriz:

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela L.1: Métodos de solução para equações lineares

Método	**b**	Direto	$\mathbf{A}^{-1}$
Gauss	Sim	Sim	No
Gauss-Jordan	Sim	Sim	No
L-U	No	Sim	Sim
Cholesky	No	Sim	Sim
Gauss Seidel	Sim	No	No

1. Troque as posições de duas das fileiras.
2. Multiplique uma das fileiras por um escalar não zero.
3. Adicione ou subtraia o múltiplo escalar de uma fila para outra.

L.2.2.1 Eliminação de Gauss

18 Transformaremos as equações em *Remem o escalão* Formar e resolver as variáveis desconhecidas por substituição.

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \rightarrow \mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$$

19 A forma fileira é uma matriz diagonal onde todas as entradas abaixo de um coeficiente principal são zero.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{mm} \end{bmatrix}$$

20 Note que este método simplesmente fornecerá uma solução de **x** E não para $\mathbf{A}^{-1}$.

L.2.2.2 Eliminação Gauss-Jordan

21 O método é uma extensão da eliminação Gauss, em vez de transformar o **A** em **U**Transforma equações que contêm variáveis desconhecidas em *Forma de fileira reduzida* (uma que tem todas as entradas na diagonal principal igual a 1, e todas as outras entradas têm um valor de 0, i.e. **I**)

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

Assim, nenhuma substituição é necessária e a matriz inversa pode ser explicitamente obtida.

22 Note que Gauss-Jordan produz tanto a solução das equações quanto o inverso da matriz original. Isso requer três vezes (n^3) mais operações que Gauss ou LU decomposição ($\frac{n^3}{3}$).

23 Procedimento

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Troque as linhas para que todas as linhas com todas as entradas zero estejam na parte inferior
- Troque as fileiras para que a fila com a maior entrada não zero à esquerda esteja no topo.
- Multiplique a linha de cima por um escalar para que a entrada principal da linha de topo se torne 1.
- Adicionar/subtrair múltiplos da linha superior para as outras linhas de modo que todas as outras entradas no pilar contendo a entrada principal da linha de topo são todos zero.
- Repita os passos 2-4 para a próxima entrada não zero à esquerda até que todas as entradas principais sejam 1.
- Troque as linhas para que a entrada principal de cada linha não zero seja à direita da entrada principal da linha acima dela.

L.2.2.3 LU Descomposição

24 Eliminação gaussiana e eliminação Gauss-Jordan ambos usam a matriz aumentada $[A|b]$, so **b** Deve ser conhecido. Em contraste, LU-decomposição usa apenas matriz **A**Assim que a fatoração estiver completa, ela pode ser aplicada a qualquer vetor **b**.

25 De fato, em algumas aplicações pode ser desejável decompor a matriz sem ter o RHS concluído. Por exemplo, no método da rigidez direta podemos ter vários casos de carga ainda gostaríamos de inverter apenas uma vez o matriz de rigidez. Isso será alcançado através da seguinte decomposição:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$$

26 A solução consiste em:

Descomposição: da matriz independente do vetor do lado direito

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Substituição: para cada vetor do lado direito

1. Resolva {**y**} De.. **L**{**y**} = {**b**} Começando do início
2. Resolva {**x**} De.. **U**{**x**} = {**y**} Começando de baixo

27 O vetor **y** é o mesmo que aquele para o qual **b** foi reduzido para a Eliminação de Gauss.

28 Aritmeticamente:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

1. Dado:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Resolva:

$$\begin{aligned} &a_{11} = u_{11} && a_{12} = u_{12} \cdots && a_{1n} = u_{1n} \\ &a_{21} = l_{21}u_{11} && a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} && a_{2n} = l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ &\vdots \\ &a_{n1} = l_{n1}u_{11} && a_{n2} = l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} && a_{nn} = \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn} + u_{nn} \end{aligned}$$

3. Vamos.

$$\mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Pegue a linha por linha ou pilar por pilar

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} && i > j \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} && i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

Elementos computados l_{ij} ou u_{ij} Pode sempre substituir o elemento correspondente a_{ij}

29 Passo a passo:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

30 Substituindo, pilar por pilar

$$\begin{aligned} \lfloor\ L_{11}^{\checkmark} \quad L_{21}^{\checkmark} \quad L_{31}^{\checkmark}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}\ \rfloor && \text{Column 1} \\ \lfloor\ L_{11}U_{12} \quad L_{21}U_{12} + L_{22} \quad L_{31}U_{12} + L_{32}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{12}^{\checkmark} \quad L_{22}^{\checkmark} \quad L_{32}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 2} \\ \lfloor\ L_{11}U_{13} \quad L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \quad L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{13}^{\checkmark} \quad U_{23}^{\checkmark} \quad L_{33}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 3} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e a cada passo resolver para n Incógnitos.

31 Mesmo se $\mathbf{A}$ é simétrico $\mathbf{L}^T \neq \mathbf{U}$.

32 Em MATLAB® `x = A\b` é preferível `x = inv(A)*b` Se alguém só está procurando $\mathbf{x}$ e não $\mathbf{A}^{-1}$. `Inv` em troca, usa um LU ou uma decomposição de LDL.

33 Para matrizes simétricas, a decomposição da LU reduz-se para:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \\ l_{ij} &= \frac{u_{ji}}{u_{jj}} \end{aligned}$$

L.2.2.4 A decomposição de Cholesky

34 If $\mathbf{A}$ é simétrico $\mathbf{A}^F$ Não é. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ .25 & 1 & \\ .5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ & 4 & -6 \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

35 Enquanto que, sempre podemos nos decompor $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{U}^{*^T}$$

e para matrizes simétricas, isso reduziria a

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{L}^{*^T}$$

36 Além disso, a matriz diagonal $\mathbf{D}$ pode ser fatorado como o produto de duas matrizes: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ Assim:

$$\mathbf{A} \rightarrow \underbrace{[\mathbf{L}^*]\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{L}^*]^T}_{\mathbf{L}^T}$$

37 Passo a passo

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

38 Então podemos correr ao longo do pilares e obter

$$\begin{aligned}
\lfloor\ L_{11} \quad L_{21} \quad L_{31}\ \rfloor &= \quad \sqrt{A_{11}} \quad \tfrac{A_{12}}{L_{11}} \quad \tfrac{A_{13}}{L_{11}}\ \rfloor \quad \text{Column 1} \\
\lfloor\ L_{22} \quad L_{32}\ \rfloor &= \quad \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} \quad \tfrac{A_{32} - L_{21}L_{31}}{L_{22}}\ \rfloor \quad \text{Column 2} \\
L_{33} &= \quad \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \quad \text{Column 3}
\end{aligned}$$

39 Claramente termos diagonais devem ser positivos.

40 Este algoritmo pode ser resumido como:

$$\begin{aligned}
l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\
l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1}}{l_{jj}} \qquad i > j
\end{aligned}$$

L.2.2.5 Decomposição de valor singular

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

41 Singular Value Decomposition (SVD) é uma ferramenta matemática versátil que decompõe qualquer $m \times n$ Matriz A em três matrizes mais simples e bem definidas. É expresso como:

$$A = U\Sigma V^T$$

Onde:

- U $(m \times m)$ é uma matriz ortogonal cujo pilares são os **Vetores únicos esquerdos** de A.
- Σ $(m \times n)$ é uma matriz diagonal contendo o **Valores singulares** $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0)$ de A.
- V^T $(n \times n)$ é uma matriz ortogonal cujas linhas são **Vetores singulares à direita** de A.

42 Valores singulares (σ_i) refletem a importância dos vetores singulares correspondentes, quantificando o quanto cada um contribui para a estrutura geral da matriz.

43 O pilares de U e.. V Formar bases ortonormais para a linha e espaços de A, respectivamente.

44 A SVD se transforma A em uma forma mais simples, revelando propriedades intrínsecas, como classificação, alcance e espaço nulo.

45 SVD tem várias aplicações, uma delas está resolvendo Sistemas Lineares, particularmente para matrizes mal-condicionadas ou singulares onde os métodos tradicionais falham.

46 O procedimento é o seguinte:

1. Faça a SVD

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Decompor-se A em U, Σ, e V^T.
- Use ferramentas computacionais como:
  - Matlab: `[U, S, V] = svd(A)`
  - Python Python (NumPy): `U, S, Vt = np.linalg.svd(A)`

2. Analise os Valores Singulares
   - Inspecione os elementos diagonais de Σ (os valores singulares).
   - Pequenos ou zero valores singulares indicam que A pode estar mal condicionado, requerendo regularização ou filtragem para garantir cálculos estáveis.
3. Reconstrua a Matrix
   - Validar a decomposição reconstruindo A:

$$A = U\Sigma V^T$$

4. Resolva sistemas lineares Por.. $Ax = b$:
   - Expresse a solução usando SVD:

$$x = V\Sigma^+ U^T b$$

     Onde Σ^+ é o pseudo-inverso de Σ, obtido invertendo valores não-zero singulares e transpondo Σ.
   - Para matrizes mal-condicionadas:
     - Regularize descartando valores singulares abaixo do limite para estabilizar cálculos.
     - Esta abordagem é especialmente eficaz para matrizes com valores singulares muito pequenos.
5. Aproximem-se da Matrix
   - Para redução da dimensionalidade ou filtragem de ruído, truncar Σ Retendo apenas o topo k Valores singulares (defina os outros como zero).
   - Reconstrua o posto$k$ Aproximação de A:

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$$

47 Por exemplo, dado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix},$$

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

1. Computar SVD:
   - U = Base orthonormal de AÉ o espaço.
   - $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ (valores singulares).
   - V^T = Base orthonormal de AÉ o espaço da fila.
2. Resolva $Ax = b$ Com SVD:
$$x = V\Sigma^{+}U^{T}b$$
3. Regularizar pequenos valores singulares para garantir estabilidade se A está mal condicionado.

48 A SVD é de fato particularmente eficaz para matrizes que são difíceis de decompor devido à quase-singularidade ou mal-condicionamento, fornecendo uma estrutura robusta para resolver equações, estabilizar cálculos e analisar propriedades da matriz.

L.2.2.6 Decomposição QR

49 A decomposição QR é uma técnica fundamental de fatoração da matriz em álgebra linear, onde uma dada matriz **A** é expresso como o produto de duas matrizes: **Q**, uma matriz ortogonal (ou unitária), e **R**, uma matriz triangular superior. Matematicamente, isto é representado como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}.$$

50 Aqui **Q** Satisfaz $\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (ou $\mathbf{Q}^{*}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ no caso complexo), significando que seu pilares formam uma base ortonormal.

51 A matriz **R** é triangular superior, onde todas as entradas abaixo da diagonal são zero. A decomposição QR é tipicamente aplicada a matrizes retangulares de dimensões $m \times n$, onde $m \geq n$.

L.2.3 Métodos indiretos

52 Os métodos iterativos são mais adequados para sistemas de equação muito grandes, ou quando podemos ter uma inicial "pergunta"da solução

53 O método mais popular é o Gauss Seidel.

L.2.3.1 Gauss Seidel

54 Começando com nosso sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} c_{11}x &+ c_{12}y &+ c_{13}z &= r_1 \\ c_{21}x &+ c_{22}y &+ c_{23}z &= r_2 \\ c_{31}x &+ c_{32}y &+ c_{33}z &= r_3 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

resolver 1^{st} equação para x_1 usando inicial "Adivinha' para y, z $(y0, z_0)$

$$x_1 = \frac{r_1 - c_{12}y_0 - c_{13}z_0}{c_{11}}$$
$$y_1 = \frac{r_2 - c_{21}x_1 - c_{23}z_0}{c_{22}}$$
$$z_1 = \frac{r_3 - c_{31}x_1 - c_{32}y_1}{c_{33}}$$

E assim por diante & assim por diante $\cdots$

Nota:

1. O processo iterativo pode ser considerado convergente se:

$$|\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}}{\mathbf{x}^{lk}}| \leq \varepsilon$$

2. A convergência pode ser acelerada pelo relaxamento

$$x_i^k = \lambda x_i^k + (1 - \lambda)x_i^{k-1}$$

Onde λ é um fator de peso entre 0. e 2. Para valores abaixo de 1 temos *Subrelaxamento*, e para valores Mais que 1 nós temos *sobre-relaxamento*. O primeiro é usado para sistemas não convergentes, enquanto o último é usado Acelere a convergência dos convergentes. Otimizado λ Para análise pórtico é de cerca de 1,8.

L.3 Características matriciais e melhorias computacionais

L.3.1 Singularidade e hierarquia

55 Se o determinante de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ é zero, do que se diz que a matriz é singular.

56 Como vimos antes, isso significa que há pelo menos uma fileira ou uma pilar que é uma combinação linear das outras.

57 Os conceitos de singularidade e classificação de um sistema de equações lineares estão intimamente relacionados com os autovalores da matriz do coeficiente associado.

58 Dada uma matriz quadrada **A** de tamanho $n \times n$, a singularidade da matriz é determinada por seu determinante. Uma matriz é singular se e somente se seu determinante for zero, o que implica que ela não tem a patente completa.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

59 Esta condição se liga diretamente aos autovalores de A:. O determinante é o produto dos autovalores, $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, onde λ_i são os autovalores de $\mathbf{A}$.. Se houver algum valor próprio $\lambda_i = 0$, o determinante torna-se zero, e a matriz é singular.

60 A classificação de uma matriz representa o número máximo de linhas linearmente independentes ou pilares em $\mathbf{A}$, e corresponde ao número de autovalores não-zero da matriz quando considerando suas multiplicações algébricas. Uma matriz de tamanho completo $n \times n$ tem tudo n autovalores não-zero. Por outro lado, se a classificação da matriz é $r < n$, então exatamente $n - r$ Os autovalores são zero.

61 De uma perspectiva numérica, os autovalores também influenciam o condicionamento do sistema. Uma matriz com autovalores próximos de zero, mesmo que não-singular, pode levar a instabilidade numérica, destacando a importância dos autovalorem análises teóricas e práticas de sistemas lineares.

62 If n é o tamanho do global matriz de rigidez de uma estrutura em que o condições de contorno não foram contabilizados (n = é igual a Número total de nós vezes o número total de graus de liberdade por nó) Teria uma patente r igual a n menos o número de possíveis corpos rígidos movimentos (3 e 6 em 2 e 3 dimensionais respectivamente).

63 Por exemplo, na Eq. 44.1, o aumento matriz de rigidez $\mathbf{K}$ tem uma patente r menor do que.. n, enquanto que $\mathbf{K}_{tt}$ Tem $r = n$.

L.3.2 Autovalores e autovetores

64 Uma forma especial do sistema de equação linear

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}$$

é um em que o lado direito é um múltiplo da solução:

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \lambda\{\mathbf{x}\}$$

Que pode ser reescrita como

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{0}$$

65 Uma solução não trivial para este sistema de equações é possível se e somente if $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ é singular ou..

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

ou

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

66 Quando o determinante é expandido, nós conseguimos um n^{th} Ordem polinomial em termos de λ que é conhecida como a equação característica de $\mathbf{A}$.. O n soluções (que podem ser reais ou complexas) são os autovalores de $\mathbf{A}$, e cada um deles λ_i Satisfaz

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}_i\} = \lambda_i \{\mathbf{x}_i\}$$

Onde $\{\mathbf{x}_i\}$ é um autovetor correspondente.

Pode-se mostrar que:

1. O n autovalores de matrizes simétricas reais de classificação n são todos reais.
2. Os autovetores são ortogonais e formam uma base ortogonal em E_n.

Os autovalores e os autovetores são usados na análise da estabilidade, dinâmica análise, e para avaliar o desempenho de formulações elemento finito.

L.3.3 Número da condição

67 A condição número de uma matriz é uma medida da sensibilidade da solução de um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para mudanças nos dados de entrada ou erros de arredondamento durante a computação. Ele quantifica o quanto a saída (solução) $\mathbf{x}$) vai mudar para uma dada perturbação na entrada $\mathbf{b}$.

68 Para uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, if $\mathbf{A}$ é diagonalizável ou simétrico positivo definido, o número de condição na 2-norma (norma espectral) é definido como:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Onde λ_{max} e.. λ_{min} são os maiores e menores autovalores (em valor absoluto) de $\mathbf{A}$ respectivamente.

69 Esta definição implica:

- $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$, desde que $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$ Of positivo matrizes definitivas.
- Um pequeno $\kappa(\mathbf{A})$ (perto de 1) significa que uma matriz está bem condicionada, enquanto um grande valor indica uma matriz mal-condicionada.

L.3.4 Pré-condicionamento

This example was generated by OpenAI, 2025 and should be interpreted with caution. Readers should carefully evaluate its validity before accepting its results.

70 Pré-condicionamento é uma técnica usada para transformar uma matriz $\mathbf{A}$ de uma forma que melhora suas propriedades numéricas antes de aplicar métodos diretos para resolver um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.. O objetivo é tornar o problema mais fácil de resolver, ou reduzindo a condição número de $\mathbf{A}$ ou simplificando a decomposição da matriz.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

71 O sistema original $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é transformado usando um *Matriz do pré-condicionamento* $\mathbf{M}$ em uma forma equivalente:

72 A matriz $\mathbf{M}$ é escolhido de tal forma que:

- $\mathbf{M}$ aproximados $\mathbf{A}$ mas é mais fácil de inverter.
- $\mathbf{M}$ é não-singular.

73 Discutimos dois tipos de pré-condicionamento, esquerda e direita, mesa L.2.

Tabela L.2: Pré-condicionamento; Comparação entre esquerda e direita

Aspect	**Pré-condicionamento à esquerda**	**Pré-condicionamento direito**
Matriz Pré-condicionada	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{AM}^{-1}$
Lado direito	Transformado como $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$	Permanece inalterado$\mathbf{b}$)
Ação do Pré-Condicionador	Atua em ambos $\mathbf{A}$ e.. $\mathbf{b}$	Atuar em $\mathbf{A}$ e os desconhecidos via $\mathbf{x} = \mathbf{My}$
Quando Aplicado	Antes de resolver, modifica o sistema completamente	Durante o processo de resolução, modifica apenas os desconhecidos

L.3.4.1 Pré-condicionamento esquerdo

74 No pré-condicionamento esquerdo, transformamos o sistema linear original $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em uma forma que melhora a estabilidade numérica e eficiência, pré-multiplicando tanto a matriz de coeficiente $\mathbf{A}$ e o vetor do lado direito $\mathbf{b}$ pelo inverso de uma matriz pré-condicionadora $\mathbf{M}$.. O sistema pré-condicionado é escrito como:

$$\underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}'}.$$

75 Procedimento:

1. Matriz pré-condicionada ($\mathbf{A}'$):
$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$
Esta é a matriz de coeficiente transformada. O pré-condicionador $\mathbf{M}$ é escolhido de tal forma que:
   - $\mathbf{M}$ aproximados $\mathbf{A}$, mas é mais fácil de inverter,

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

- **M** Melhora o condicionamento de **A′**, tornando os solucionadores numéricos mais estáveis.

2. Lado direito pré-condicionado (**b′**):

$$\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

O lado direito também é transformado para permanecer consistente com a matriz pré-condicionada.

3. Resolva o sistema pré-condicionado: O novo sistema é:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

Já que o pré-condicionamento modifica os dois **A** e.. **b**Nós resolvemos diretamente para.. **x** usando técnicas padrão (por exemplo, decomposição de LU).

76 Os passos são:

1. Computar $\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$.
2. Formem a matriz pré-condicionada $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$.
3. Resolva $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ para **x** usando um solucionador direto.

L.3.4.2 Pré-condicionamento direito

77 Começamos com:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

1. Introduza uma substituição:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y},$$

Onde **M** é a matriz de pré-condicionamento, e **y** é o novo vetor de desconhecidos. Esta substituição significa que a solução original **x** pode ser recuperado usando:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

2. Substituto $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ na equação original:

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = \mathbf{b}. \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

3. Agora o problema é resolver:

$$(\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

4. Decompor-se **AM** em:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

onde:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tabela L.3: Comparação do pré-condicionamento da matriz e decomposição de valor singular (SVD)

Aspect	Precondicionamento Matrix	Descomposição do Valor Singular (SVD)
Propósito	Acelera solucionadores iterativos para sistemas grandes.	Analisa a estrutura da matriz e resolve de forma robusta.
Tamanho da Matriz	Grandes matrizes esparsas.	Matrizes pequenas a médias.
Ill-Conditioning	Melhora o condicionamento para solucionadores iterativos.	Ele lida com o mau-condicionamento diretamente.
Eficiência	Computacionalmente eficiente para métodos iterativos.	Computacionalmente caro, mas preciso.
Aplicações	Solucionadores iterativos para PDEs, grandes simulações.	PCA, compressão de dados, filtragem de ruído, soluções robustas.
Cenários	Problemas repetidos ou em larga escala.	Alta precisão, analisando a estrutura da matriz.

- **L** é uma matriz triangular inferior,
- **U** é uma matriz triangular superior.

5. Para resolver **LUy** = **b**, prossiga em dois passos:
   (a) Resolva **Lz** = **b** para **z** usando substituição para frente.
   (b) Resolva **Uy** = **z** para **y** usando substituição para trás.
6. Depois de resolver para **y**, recuperar o vetor original desconhecido **x** usando:

$$\mathbf{x} = \mathbf{My}.$$

[78] Mesa L.3 compara a decomposição do valor singular com o pré-condicionamento da matriz.

L.4 Exemplos

CÓPIA PARA REVISÃO

L.4.1 Ex L.1: Eliminação de Gauss

Neste primeiro exemplo nós simplesmente procuramos resolver para o vetor desconhecido $\{\mathbf{x}\}$ dado:

$$\begin{cases} +10x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 1. \\ -20x_1 & +3x_2 & +20x_3 & = 2. \\ +5x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 6. \end{cases}$$

1. Adicionar $\frac{20}{10}$ vezes a primeira equação para a segunda Um deles vai eliminar o x_1 coeficiente da segunda equação.
2. Subtrair $\frac{5}{10}$ vezes a primeira equação da terceira Um deles vai eliminar o x_1 coeficiente da terceira equação.

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10.x_3 & = 4. \\ & +2.5x_2 & +7.5x_3 & = 5.5 \end{cases}$$

3. Subtrair $\frac{2.5}{5}$ vezes a segunda equação de O terceiro eliminará o x_2 coeficiente da última equação

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10x_3 & = 4. \\ & & +2.5x_3 & = 3.5 \end{cases}$$

4. Agora podemos substituir e resolver de baixo para cima:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3.5}{2.5} = 1.4 \\ x_2 &= \frac{4. - 10.x_3}{5.} = -2. \\ x_1 &= \frac{1. - x_2 + 5.x_3}{10.} = 1. \end{aligned}$$

L.4.2 Ex L.2: Eliminação Gauss-Jordan

Neste segundo exemplo vamos determinar ambos $\{\mathbf{x}\}$ e a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

A operação é idêntica à primeira, no entanto aumentamos a matriz $\mathbf{A}$ por $\mathbf{I}$: $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, e operar simultaneamente sobre os dois Submatriz.

1. Matriz inicial

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 3 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array}\right\}$$

2. Eliminação do primeiro pilar:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

(a) Fila 1=0.1 (linha 1)
(b) Linha 2=(linha2)+20(nova linha 1)
(c) Fila 3=(linha 3) -5 (nova fileira 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 7.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.1 \\ 4 \\ 5.5 \end{array}\right\}$$

3. Eliminação da segunda pilar

(a) Linha 2=0,2 (linha 2)
(b) Linha 1=(linha 1)-0.1 (nova linha 2)
(c) Fila 3=(linha 3) -2.5 (nova fileira 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.7 & 0.06 & -0.02 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.02 \\ 0.8 \\ 3.5 \end{array}\right\}$$

4. Eliminação do terceiro pilar

(a) Fila 3=0.4 (linha 3)
(b) Linha 1=(linha 1)+0.7(nova linha 3)
(c) Linha 2=(linha 2)-2(nova linha 3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.36 & -0.16 & 0.28 \\ 0 & 1 & 0 & 1.6 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0.4 \end{array}\right] \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1.4 \end{array}\right\}}_{\{x\}}$$

Esta última equação é $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$

L.4.3 Ex L.3: lu Descomposição

Dado:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 6 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Seguindo o procedimento acima, pode ser decomposto em:

Linha 1: $u_{11} = a_{11} = 7$; $u_{12} = a_{12} = 9$; $u_{13} = a_{13} = -1$; $u_{14} = a_{14} = 2$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Fila 2:

$$\begin{aligned}
l_{21} &= \tfrac{a_{21}}{u_{11}} && = \tfrac{4}{7} \\
u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} && = -5 - 4\tfrac{9}{7} && = -10.1429 \\
u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} && = 2 + 4\tfrac{1}{7} && = 2.5714 \\
u_{24} &= a_{24} - l_{21}u_{14} && = -7 - 4\tfrac{2}{7} && = -10.1429
\end{aligned}$$

Fila 3:

$$\begin{aligned}
l_{31} &= \tfrac{a_{31}}{u_{11}} && = \tfrac{1}{7} \\
l_{32} &= \tfrac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} && = \tfrac{6-(0.1429)(9)}{-10.1429} && = -0.4647 \\
u_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} && = -3 - (0.1429)(-1) - (-0.4647)(2.5714) && = -1.6622 \\
u_{34} &= a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} && = -4 - (0.1429)(2) - (-0.4647)(-8.1429) && = -8.0698
\end{aligned}$$

Fila 4:

$$\begin{aligned}
l_{41} &= \tfrac{a_{41}}{u_{11}} && = \tfrac{3}{7} \\
l_{42} &= \tfrac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} && = \tfrac{-2-(0.4286)(9)}{-10.1429} = -0.5775 \\
l_{43} &= \tfrac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} && = \tfrac{-1-(0.4286)(-1)-(0.5775)(2.5714)}{-1.6622} = 1.2371 \\
u_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} && = -5 - (0.4286)(2) - (0.5775)(-8.1429) - (1.2371)(-8.0698) \\
& && = 8.8285
\end{aligned}$$

ou

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .5714 & 1 & 0 & 0 \\ .1429 & -.4647 & 1 & 0 \\ .4286 & .5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & -10.1429 & 2.571 & -8.143 \\ 0 & 0 & -1.662 & -8.069 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

L.4.4 Ex L.4: A decomposição de Cholesky

Dado:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

Pilar 1:

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} && = \sqrt{4} && = 2 \\
l_{21} &= \tfrac{a_{21}}{l_{11}} && = \tfrac{6}{2} && = 3 \\
l_{31} &= \tfrac{a_{31}}{l_{11}} && = \tfrac{10}{2} && = 5 \\
l_{41} &= \tfrac{a_{41}}{l_{11}} && = \tfrac{4}{2} && = 2
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Pilar 2:

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} &&= \sqrt{13 - 3^2} &&= 2 \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{13-(5)(3)}{2} &&= -1 \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{6-(2)(3)}{2} &&= 0 \end{aligned}$$

Pilar 3:

$$\begin{aligned} l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} &&= \sqrt{27 - 5^2 - (-1)^2} &&= 1 \\ l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41} l_{31} - l_{42} l_{32}}{l_{33}} &&= \frac{2-(2)(5)-(0)(-1)}{1} &&= -8 \end{aligned}$$

Pilar 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{72 - (2)^2 - (0)^2 - (-8)^2} = 2$$

ou

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

L.4.5 Ex L.5: Gauss-seidel

$$\begin{cases} 4x & +2y & +3z & = 8. \\ 3x & -5y & +2z & = -14. \\ -2x & +3y & +8z & = 27. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (8 - 2y_n - 3z_n)/4 \\ y_{n+1} &= (-14 - 3x_{n+1} - 2z_n)/(-5) \\ z_{n+1} &= (27 + 2x_{n+1} - 3y_{n+1})/(8) \end{aligned}$$

Assuma $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, a primeira iteração dará

$$\begin{aligned} x_1 &= (8 - 2\times 0 - 3\times 0)/4 &&= 2 \\ y_1 &= (-14 - 3\times 2 - 2\times 0)/(-5) &&= 4 \\ z_1 &= (27 + 2\times 2 - 3\times 4)/(8) &&= 2.375 \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

A segunda iteração

$$\begin{aligned} x_2 &= (8 - 2\times 4 - 3\times 2.375)/4 &&= -1.781 \\ y_2 &= (-14 - 3\times(-1.781) - 2\times 2.375)/(-5) &&= 2.6814 \\ z_2 &= (27 + 2\times(-1.781) - 3\times 2.681)/8 &&= 1.924 \end{aligned}$$

Terceira edição

$$\begin{aligned} x_3 &= (8 - 2\times 2.681 - 3\times 1.924)/4 &&= -0.784 \\ y_3 &= (-14 - 3\times(-0.784) - 2\times 1.924)/(-5) &&= 3.099 \\ z_3 &= (27 + 2\times 2\times(-0.784) - 3\times 3.099)/8 &&= 2.017 \end{aligned}$$

Iter.	x	y	z
1	2.000	4.000	2.375
2	-1.781	2.681	1.924
3	-0.784	3.099	2.017
4	-1.062	2.969	1.996
5	-0.982	3.009	2.001
6	-1.006	2.997	2.000
7	-0.998	3.001	2.000
8	-1.001	3.000	2.000
9	-1.000	3.000	2.000
10	-1.000	3.000	2.000

L.4.6 Ex L.6: Gauss-Seidel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ 2x+y &=& 8 \end{array}\right. \Rightarrow y = -3 - x; \rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5 \\ y &=& -2 \end{array}\right.$$

Resolvendo iterativamente:

Iteração	x	y	$N = x^2 + y^2$	$\frac{N_i - N_{i-1}}{N_i}$
1	0	3	9	
2	2.5	0.5	6.5	38.00%
3	3.75	-0.75	14.625	55.56%
4	4.375	-1.375	21.03125	30.46%
5	4.6875	-1.6875	24.82031	15.27%
6	4.84375	-1.84375	26.86133	7.60%
7	4.921875	-1.92188	27.91846	3.79%
8	4.960938	-1.96094	28.45618	1.89%
9	4.980469	-1.98047	28.72733	0.94%
10	4.990234	-1.99023	28.86347	0.47%
11	4.995117	-1.99512	28.93169	0.24%
12	4.997559	-1.99756	28.96583	0.12%

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

L.4.7 Ex L.7: Decomposição de valor singular

Nós procuramos resolver $\mathbf{y} = \mathbf{Ab}$, onde $\mathbf{A}$ É uma matriz severamente mal-condicionada, com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+1e-15 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix}$$

1. Resolva por solução direta

$$\mathbf{y} \begin{bmatrix} 1.2000 \\ 0.8000 \end{bmatrix}$$

2. Execute a Descomposição de Valor Singular (SVD) MATLAB®comando `[U, S, V] = svd(A)`

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

3. Construir o pseudo-inverso de $\mathbf{S}$ com regularização e o limite de regularização é 1e-6. Mas primeiro nós inicializamos

$$\mathbf{S}_{plus} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Pesquise todas as entradas de $\mathbf{S}$E aqueles maiores que o limiar são substituídos pelo inverso

$$\mathbf{S}_{plus} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Computar o pseudo-inverso de $\mathbf{A}$ usando SVD

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{plus} &= \mathbf{V}\mathbf{S}_{plus}U' \\ &= \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Resolva usando o pseudo-inverso

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{SVD} &= \mathbf{A}_{plus}\mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A MATLAB®Código para SVD é dado em §I.5.4.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

L.4.8 Ex L.8: Pré-condicionamento

Matriz A e suas propriedades

1. Considerando que a matriz mal-condicionada **A** é geralmente dado, neste caso vamos construir sinteticamente um usando a relação
$$\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\top$$
Onde **D** é uma matriz diagonal com os autovalores pré-selecionados, e **Q** é qualquer matriz ortogonal (embora controle a orientação dos autovetores).
2. Nós pegamos **D** para ser composto pelos autovalores $\{1, 0.1, 0.01\}$.
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \end{bmatrix}$$
3. Para gerar **Q** Primeiro precisamos de uma matriz de números aleatórios
$$\mathbf{Random} = \begin{bmatrix} 0.4170 & 0.3023 & 0.1863 \\ 0.7203 & 0.1468 & 0.3456 \\ 0.0001 & 0.0923 & 0.3968 \end{bmatrix}$$
4. **Q** será uma matriz ortogonal obtida de **Random** através de sua decomposição QR, produzindo
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5010 & 0.7769 & -0.3813 \\ -0.8654 & -0.4499 & 0.2206 \\ -0.0001 & 0.4405 & 0.8978 \end{bmatrix}$$
5. Então nós determinamos $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\top$, substituindo:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$
6. Os autovalores de **A** são:
$$\lambda(\mathbf{A}) = \{1.000, 0.100, 0.010\}$$
(Como esperado, como **A** foi construído a partir de **D**).
7. O número da condição de **A** é:
$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{1.0}{0.01} = 100.00$$

Matriz Pré-condicionamento M A matriz de pré-condicionamento **M** será derivado da decomposição de Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^\top$, onde:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.5593 & 0 & 0 \\ 0.7112 & 0.5136 & 0 \\ 0.0552 & -0.1109 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

e:

$$\mathbf{M} = \mathbf{LL}^\top = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Pré-condicionamento do lado esquerdo

1. O sistema pré-condicionado à esquerda é definido como:

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{b}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

2. Substituindo

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

3. Os autovalores da matriz pré-condicionada à esquerda são:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

4. O número da condição é:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$$

5. A proporção dos números de condição é:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}})} = 100.00$$

Pré-condicionamento do lado direito

1. O sistema pré-condicionado certo é definido como:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$$

2. Se nós fossemos resolver para **y**Nós faríamos uma decomposição da LU. Neste caso

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

   e.. $\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$ (note que este é um caso peculiar onde **L** e.. **U** são diagonais
3. Resolva o sistema, em dois passos, para frente e depois para trás substituição
4. A matriz pré-condicionada certa é:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

5. Os autovalores da matriz pré-condicionada são:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

6. O número da condição é:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = 1.00$$

7. A proporção dos números de condição é:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}})} = 100.00$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Resumo dos resultados

- Número de condição da matriz original **A**: $\kappa(\mathbf{A}) = 100.00$
- Número da condição após o pré-condicionamento do lado esquerdo: $\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$
- Número da condição após o pré-condicionamento do lado direito: $\kappa(A_{\text{right-precond}}) = 1.00$
- Razão dos números de condição para o pré-condicionamento do lado esquerdo: 100.00
- Razão dos números de condição para o pré-condicionamento do lado direito: 100.00

O correspondente MATLAB®O código está dentro §I.5.5.

Alternar A

Note que no MATLAB®código, o leitor pode querer usar diretamente

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 & 0.98 \\ 0.99 & 1.00 & 0.99 \\ 0.98 & 0.99 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Que se renderia

- Condição número da matriz original: 4.465028e+02
- Número da condição após o pré-condicionamento do lado esquerdo: 1.000000e+00
- Número da condição após o pré-condicionamento do lado direito: 1.000000e+00
- Razão de número de condição (original / pré-condicionado para a esquerda): 4.465028e+02
- Rácio de número de condição (original / direito-precondicionado): 4.465028e+02

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice M

Probabilidade e Estatística

Abstract

Este capítulo introduz os conceitos fundamentais de probabilidade e estatística, uma área crucial de estudo. Muitos tópicos avançados e a maioria dos exemplos aplicados são baseados em simulações probabilísticas. O capítulo começa explicando as diferenças entre variáveis aleatórias discretas e contínuas. Ele então explora as propriedades de várias distribuições de probabilidade amplamente usadas. Finalmente, introduz o conceito de distribuições multivariadas e funções de probabilidade conjuntas, enfatizando sua significância na modelagem e análise.

M.1 Introdução à probabilidade e estatística . . . 3072
M.2 Conceitos fundamentais em probabilidade . . . 3073
M.2.1 Determinista *vs.* Probabilística 3073
M.2.2 Definição . . . 3074
M.2.3 Probabilidade condicional . 3074
M.2.4 Tipos de variáveis aleatórias 3075
M.3 Ferramentas estatísticas para análise de probabilidade . . . 3075
M.3.1 Função de distribuição cumulativa . . . 3077
M.3.2 Intervalo de confiança . . . 3077
M.4 Medidas estatísticas . . . 3078
M.4.1 Momentos e medidas de tendência central . . . 3078
M.4.2 Relações entre variáveis . . . 3081
M.5 Distribuição . . . 3082
M.5.1 Distribuições univariadas . . 3082
M.5.2 Distribuição Bivariada . . . 3087

M.1 Introdução à probabilidade e estatística

Probabilidade e estatísticas formam a base da compreensão Região de Confiança e variabilidade em vários campos da ciência e engenharia. Este capítulo constrói os conceitos necessários para modelar a aleatoriedade e analisar dados de forma eficaz. As seguintes seções exploram princípios fundamentais, distribuições-chave e medidas estatísticas.

CÓPIA PARA REVISÃO

M.2 Conceitos fundamentais em probabilidade

M.2.1 Determinista *vs.* Probabilística

Tradicionalmente, avaliações de adequação estrutural foram expressas por fatores de segurança $SF = \frac{C}{D}$, onde C é a capacidade (ou seja, força) e D é a demanda (ou seja, carga). Embora esta avaliação seja muito simples de entender, ela sofre de muitas limitações: 1) trata todas as cargas igualmente; 2) não difere entre capacidade e incertezas da demanda; 3) está restrito a cargas de serviço; E por último, mas não menos importante 4) não permite comparar a confiabilidade relativa entre diferentes estruturas para diferentes modos de desempenho. Outra grande deficiência é que todos os parâmetros são atribuídos um único valor em uma análise que é então determinística.

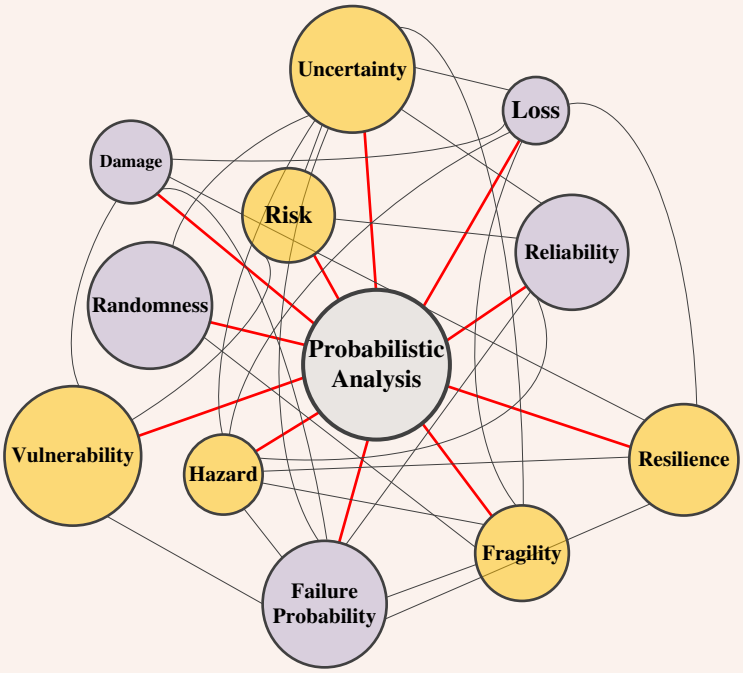


Figura M.1: Interconexão de conceitos incorporados na análise probabilística (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

Por outro lado, a chamada abordagem probabilística é, de fato, uma extensão do determinístico que explica as incertezas. Eles incluem, mas não se limitam a incertezas na demanda, capacidade, tipo de análise, interpretação dos resultados, etc. Diferentes conceitos desempenham um papel em uma análise probabilística dependendo do objetivo do projeto e dos resultados esperados. Estes parâmetros, esqueticamente mostrados na Figura M.1, será explicado mais tarde.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

M.2.2 Definição

A probabilidade de um evento, A, é uma fração entre 0 e 1.

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

Uma é a probabilidade de um evento que vai acontecer. Zero é a probabilidade de um evento que não pode acontecer.

Uma variável aleatória (RV) é o resultado de um processo natural que não pode ser previsto com certeza. O conjunto de todos os resultados possíveis para um trailer é chamado de "espaço amostra", Ω.

$$P\{\Omega\} = 1$$

Uma variável aleatória é "qualitativa"ou "quantitativa", dependendo do tipo de valor no espaço amostral. RVs quantitativos expressam valores como massa, resistência à tração e módulo de elasticidade. RVs qualitativos expressam valores como gênero e raça.

Quanto mais vezes um julgamento for repetido, mais provável é que a frequência relativa de qualquer evento em particular esteja próxima da probabilidade desse evento. Isso é chamado de "Lei dos Grandes Números" Por exemplo, se jogarmos uma moeda muitas vezes, quanto mais vezes a virarmos, mais provável é que o número de "cabeças"dividido pelo número total de lances seja próximo de 1/2.

Para cada sequência $A_1, A_2, \ldots$ De eventos mutuamente desarticulados, Figura M.2:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}$$

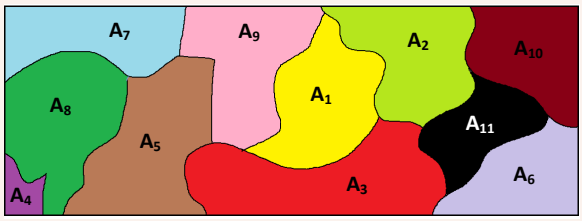


Figura M.2: O conceito de espaço amostra e eventos mutuamente disjuntos (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

M.2.3 Probabilidade condicional

A probabilidade condicional de A, dado B, escrito como $P\{A|B\}$, é definido para ser

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$P\{A \cap B\}$ é interpretada como a probabilidade/probabilidade de que A Ocorre dado o conhecimento de que B Ocorreram.

Dois eventos A e.. B são "independentes"uns dos outros se

$$P\{A|B\} = P\{A\}$$

Ou,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}.P\{B\}$$

Significa conhecimento de BA ocorrência não tem efeito sobre a probabilidade de que A ocorrerá.

M.2.4 Tipos de variáveis aleatórias

If X é um trailer (i.e. uma função definida sobre os elementos de um espaço amostral) com um número finito de valores possíveis $x_i \in R_X$ com $i = 1,2,...$, onde R_X é o intervalo de valores do RV, então é uma variável aleatória discreta

A probabilidade de X tendo um valor específico x_i, $p(x_i) = P(X = x_i)$ é um número tal que

$$p(x_i) \geq 0$$

para cada $i = 1,2,...$, e

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

A coleção de pares $(x_i; p(x_i))$, $i = 1,2,...$ é chamado de ”distribuição de probabilidade” de X, em que $p(x_i)$ é a função de massa ’probabilidade’ de X.

Para um pequeno número de amostras, os resultados podem não refletir exatamente o verdadeiro modelo distribucional. Por exemplo, todos os enredos da Figura M.3 são geradas com apenas 100 amostras aleatórias. Dá para ver as claras diferenças entre eles.

Aumentar o número de amostras ajudará. As tramas na Figura M.4 são baseadas em 1.000, 10.000 e 100.000 amostras, respectivamente.

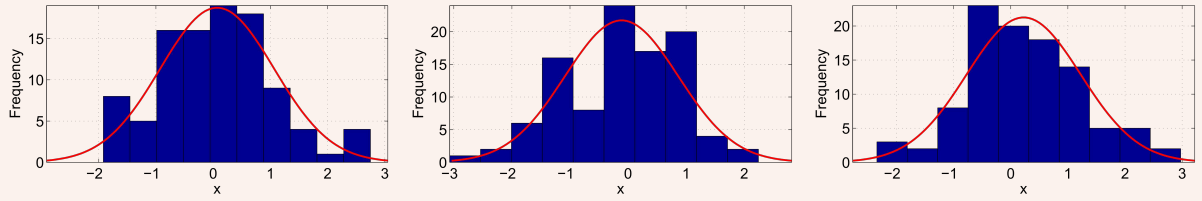
M.3 Ferramentas estatísticas para análise de probabilidade

If R_X é um intervalo em vez de um conjunto discreto, então X É uma variável aleatória contínua $X \in [a, b]$ É

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

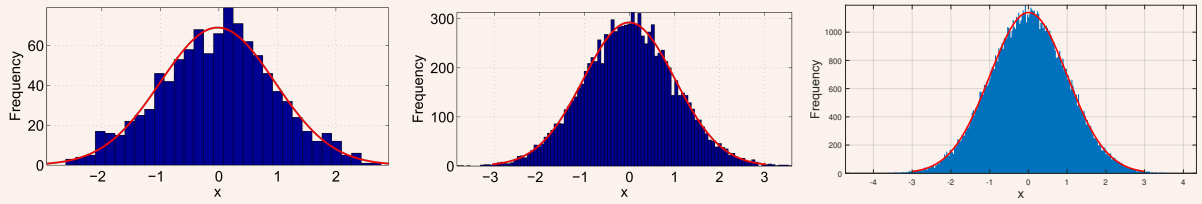
CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) 100 amostras, primeira tentativa (b) 100 amostras, segunda tentativa (c) 100 amostras, terceira tentativa

Figura M.3: Comparação de histogramas devido a 100 amostras por três vezes



(a) Mil amostras (b) 10.000 amostras (c) 100 mil amostras

Figura M.4: Comparação de histogramas devido a 1.000 a 100.000 amostras

Onde $f(x)$ é a função "probabilidade densidade" (PDF) X. Sempre,

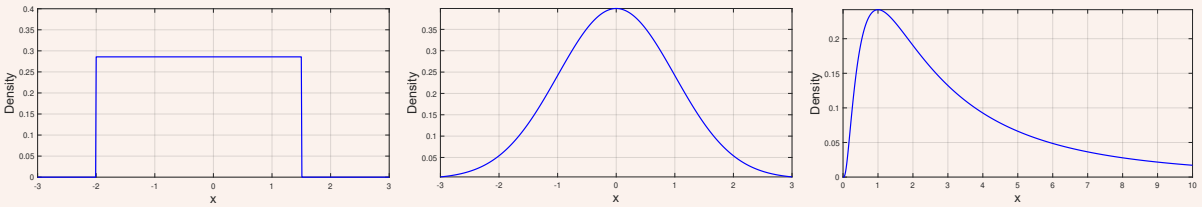
$$f(x) \geq 0$$

E,

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

E, se.. $x \notin R_X$, então $f(x) = 0$.

Figura M.5 mostra três amostras de PDFs para três tipos diferentes de funções contínuas. Estas funções serão explicadas mais tarde em detalhes.



(a) Distribuição uniforme (b) Distribuição normal (c) Distribuição lognormal

Figura M.5: Exemplos de três funções de distribuição contínua

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

M.3.1 Função de distribuição cumulativa

A probabilidade de que $X \leq x$, $P(X \leq x) = F(x)$ é a função de distribuição cumulativa e desafia-se da seguinte forma:

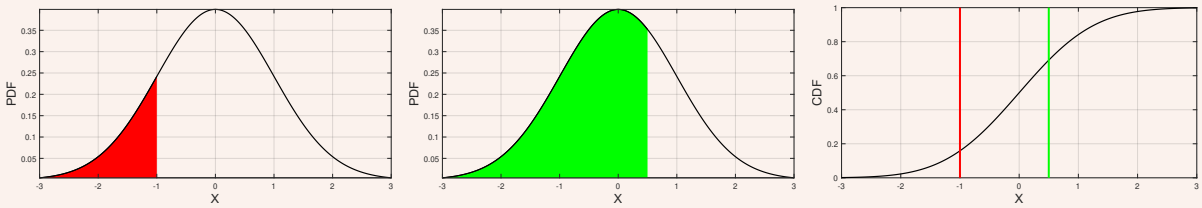
- Para discreto $X \leq x_n$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

- Para contínua $X \leq x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau) d\tau$$

Figura M.6 mostra a relação entre o PDF e CDF para uma distribuição normal.



(a) PDF; baixa probabilidade (b) PDF; Alta probabilidade (c) CDF correspondente

Figura M.6: Relação entre PDF e CDF

Algumas características chave do CDF podem ser resumidas da seguinte forma:

- If $a < b$, então $F(a) < F(b)$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

Figura M.7 mostra a relação entre um PDF limitado e seu CDF correspondente.

M.3.2 Intervalo de confiança

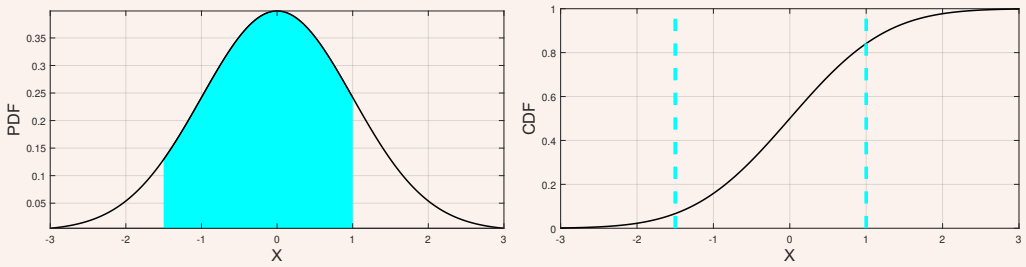
O intervalo de confiança é uma gama de valores que provavelmente conterá o verdadeiro parâmetro populacional (por exemplo, média, proporção) com um nível de confiança especificado. Ele quantifica o Região de Confiança de uma estimativa derivada de uma amostra, Fig. M.8.

Para uma média populacional μ, o intervalo de confiança é calculado como:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) Distribuição uniforme (b) Distribuição normal

Figura M.7: Relação entre o PDF limitado e CDF

onde: $\bar{x}$:. Amostra significa, z:. Valor crítico (da distribuição normal padrão) correspondente ao nível de confiança (por exemplo, $z = 1.96$ Por 95% confiança), σ:. Desvio padrão da população, n:. Tamanho da amostra.

Se o desvio padrão da população σ É desconhecido, o desvio padrão da amostra s é usado, e o t-Distribuição é aplicada:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

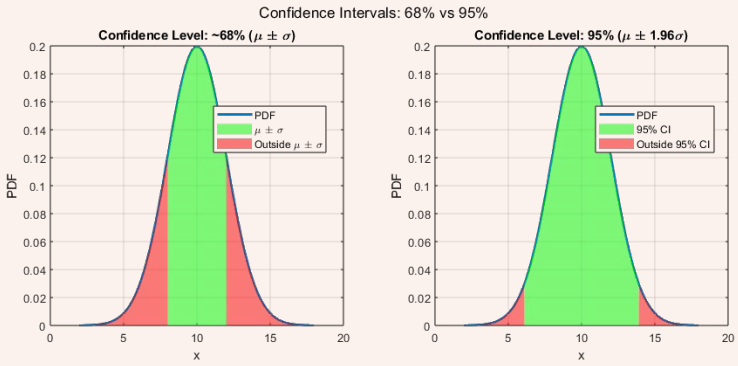


Figura M.8: Ilustração do intervalo de confiança

M.4 Medidas estatísticas

M.4.1 Momentos e medidas de tendência central

Momentos são medidas quantitativas que descrevem a forma e as características de um distribuição de probabilidade. Cada momento captura aspectos específicos dos dados,

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

como tendência central, variabilidade, assimetria e auge. Os momentos mais usados e medidas relacionadas são descritos abaixo:

Primeiro momento: Malvada A média é a média aritmética dos dados, representando a tendência central da distribuição:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

A média indica onde os dados se agrupam e é comumente usada como uma medida de localização, fig. 1. M.9.

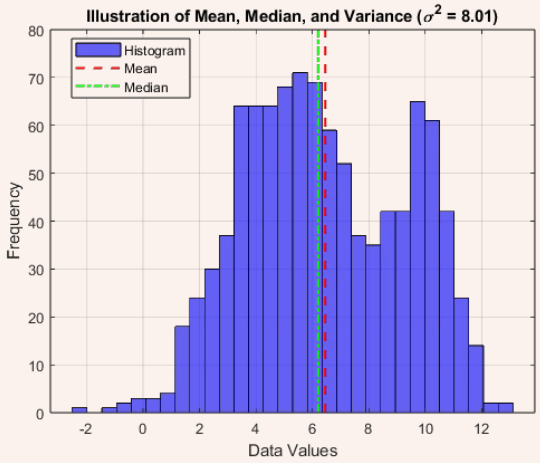


Figura M.9: Ilustração de média e mediana

Mediana A mediana é o valor que separa a metade superior e a metade inferior de um conjunto de dados.

Segundo momento: Variância A variação quantifica a dispersão ou dispersão dos dados em torno da média:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

Ele fornece informações sobre a variabilidade dos dados. Variâncias maiores indicam dados mais dispersos.

Desvio padrão O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, expressa nas mesmas unidades que os dados, fig. 1. M.10:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Desvio padrão é frequentemente usado porque é mais fácil de interpretar em comparação com a variância.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

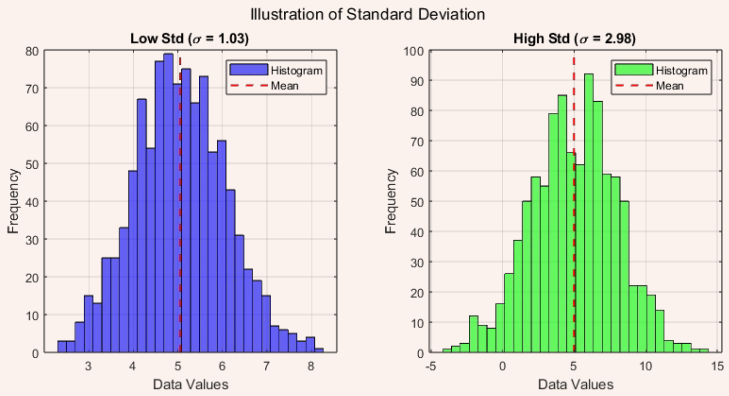


Figura M.10: Ilustração de Desvio Padrão

Coeficiente de Variação O coeficiente de variação (COV) é a razão do desvio padrão para a média, proporcionando uma medida normalizada da variabilidade:

$$\text{COV} = \frac{\sigma}{\mu}$$

COV é particularmente útil para comparar variabilidade entre conjuntos de dados com diferentes unidades ou escalas.

Terceiro Momento: Esquema A inclinação mede a assimetria da distribuição dos dados em torno da média:

$$\text{Skewness} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

Uma inclinação positiva indica uma distribuição com uma cauda mais longa à direita, enquanto uma inclinação negativa indica uma cauda maior à esquerda, Fig. M.11.

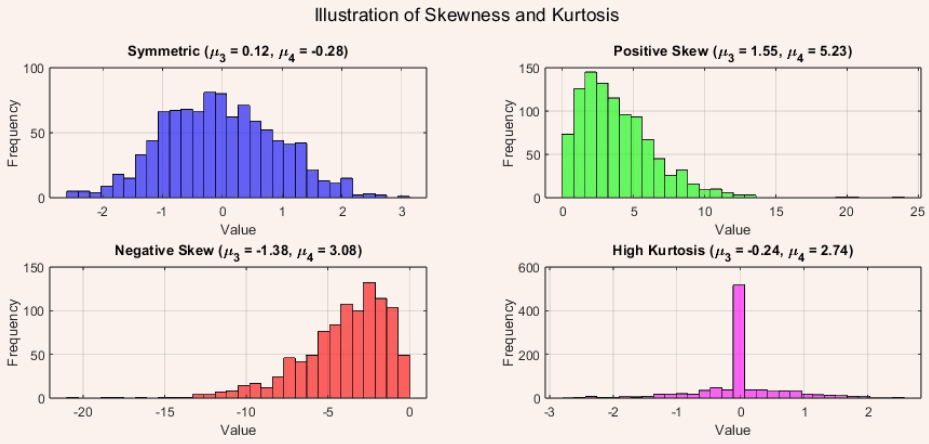


Figura M.11: Ilustração de Esquema e Curtose

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Quarto Momento: Kurtosis Kurtosis descreve o "pico"ou "flatness"de uma distribuição relativa a uma distribuição normal:

$$\text{Kurtosis} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^4 - 3$$

Uma curtose positiva indica um pico agudo e caudas pesadas, enquanto uma curtose negativa indica uma distribuição liso.

M.4.2 Relações entre variáveis

Covariância A covariância mede o grau em que duas variáveis variam juntas:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$

Uma covariância positiva indica que as variáveis tendem a aumentar ou diminuir juntas, enquanto uma covariável negativa indica uma relação inversa.

Coeficiente de correlação: ρ_{xy} é uma medida não-dimensional do grau de correlação

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Um coeficiente de correlação de 1.0 ou −1.0 indica uma correlação linear perfeita, Fig. M.12.. Um valor positivo indica que as variáveis tendem a aumentar ou diminuir juntas, enquanto um valor negativo indica que uma tende a aumentar à medida que a outra diminui. Um valor zero não indica correlação linear. Não implica, em geral, independência.

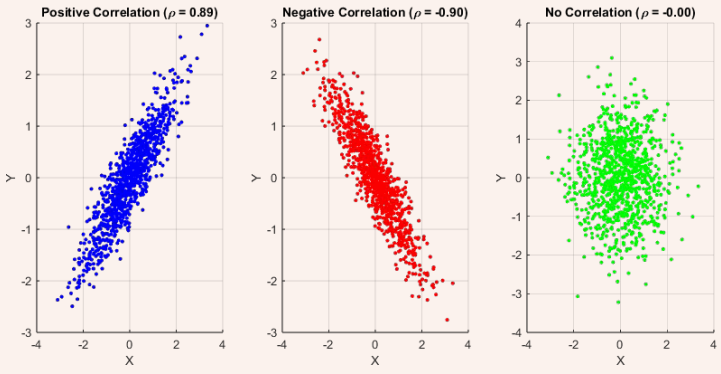


Figura M.12: Ilustração de coeficientes de correlação

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

M.5 Distribuição

M.5.1 Distribuições univariadas

Em uma análise probabilística, cada um dos parâmetros incertos pode ser representado por uma variável aleatória e seu PDF associado na forma de $X \sim f_X(x)$.. Esta seção mostra alguns dos modelos de distribuição univariada comumente usados na engenharia civil e suas principais características. Os mais importantes são:

- Distribuição uniforme
- Distribuição gaussiana/normal
- Distribuição lognormal
- Distribuição de Weibull
- Distribuição de valor extremo (Gumbel)

Distribuição uniforme

Distribuição uniforme é usada para representar variáveis aleatórias com momentos desconhecidos e suporte conhecido.

- Nota: $X \sim \mathcal{U}(a, b)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- - Sim, senhor.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- Estatísticas:

$$\begin{cases} \mu_X = \frac{a+b}{2} \\ \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{cases}$$

Distribuição normal

As distribuições normais são amplamente usadas em muitas áreas de ciência aplicada e engenharia para representar erros de medição, termo de ruído, etc.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Nota: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- - Sim, senhor.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau$$

- Estatísticas:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu \\ \sigma_X = \sigma \end{cases}$$

Distribuição lognormal

As distribuições lognormais são amplamente utilizadas em muitas áreas de ciência aplicada e engenharia para representar erros de medição, termo de ruído, etc.

- Nota: $X \sim \mathcal{LN}(\lambda, \zeta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp(-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2})$$

- - Sim, senhor.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\sqrt{2}\zeta}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)$$

  Onde erf é chamado de função de erro e Φ é a função de distribuição cumulativa da distribuição normal padrão.
- Estatísticas:

$$\begin{cases} \mu_X = e^{\lambda+\zeta^2/2} \\ \sigma_X = e^{\lambda+\zeta^2/2}\sqrt{e^{\zeta^2} - 1} \end{cases}$$

Onde λ e.. ζ são a média e desvio padrão do logaritmo natural da variável.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Distribuição de Weibull

Este modelo é usado para caracterizar variáveis do tipo tempo-para-fracasso. Pode ser usado para a resistência do material e parâmetros de vida útil para materiais quebradiços,

- Nota: $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- - Sim, senhor.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- Estatísticas:

$$\begin{cases} \mu_X = \alpha\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma_X = \alpha\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2} \end{cases}$$

Distribuição Gumbel

A distribuição Gumbel (ou Distribuição Generalizada de Valor Extremo Tipo I) é usada para modelar a distribuição do máximo (ou mínimo) de uma série de amostras de várias distribuições.

- Nota: $X \sim \mathcal{G}(\mu, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta} - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- - Sim, senhor.

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- Estatísticas:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu + \beta\gamma_e \\ \sigma_X = \frac{\pi\beta}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

  Onde $\gamma_e = 0.577216...$ é a constante de Euler.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

M.5.1.1 Comparação

Fig. M.13 ilustra as várias distribuições com as seguintes características:

Aqui, descrevemos as características das distribuições usadas na análise comparativa, incluindo suas Funções de Densidade de Probabilidade (PDFs), Funções de Distribuição Cumulativa (CDFs) e os valores numéricos adotados para cada um.

Distribuição Uniforme

- **PDF:** Uma curva plana entre a e.. b, indicando igual probabilidade para todos os valores dentro do intervalo.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{for } a \leq x \leq b$$

- **- Sim, senhor.** Um aumento linear de a para b, começando em 0 e terminando em 1.
- **Parâmetros chave:**
  - $a = 0$:. Mais baixo.
  - $b = 1$:. Limite superior.
- **Características:** Simétrica e plana, sem inclinação ou curtose.

Distribuição Normal

- **PDF:** Uma curva em forma de sino, simétrica sobre a média μ:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **- Sim, senhor.** Uma curva em forma de S, começando em 0 e assintoticamente se aproximando de 1.
- **Parâmetros chave:**
  - $\mu = 0$:. Média (localização do pico).
  - $\sigma = 1$:. Desvio padrão (controles espalhados).
- **Características:** Simétrico e unimodal, sem inclinação e kurtose zero (mesokurtic).

Distribuição Lognormal

- **PDF:** Uma curva bem distorcida começando em 0:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{for } x > 0$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- **- Sim, senhor.** Uma curva em forma de S, começando em 0 e assintoticamente se aproximando de 1.
- **Parâmetros chave:**
  - $\mu = 0$:. Média do logaritmo da variável.
  - $\sigma = 0.25$:. Desvio padrão do logaritmo da variável.
- **Características:** Escorregou para a direita com kurtose dependente de σ.

Weibull Distribuição

- **PDF:** Varia com o parâmetro de forma k:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad \text{for } x \geq 0$$

- **- Sim, senhor.** Uma curva em forma de S para $k > 1$, começando em 0 e assintoticamente aproximando-se 1.
- **Parâmetros chave:**
  - $k = 1.5$:. Parâmetro de forma.
  - $\lambda = 1$:. Parâmetro de escala.
- **Características:** Versátil, modelando aumentando, diminuindo ou falhando constantemente.

Distribuição Gumbel

- **PDF:** Esmagado com um modo próximo μ:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- **- Sim, senhor.** Uma curva assimétrica em forma de S, começando em 0 e aproximando-se assintoticamente 1.
- **Parâmetros chave:**
  - $\mu = 0$:. Parâmetro de localização (posição do pico).
  - $\beta = 1$:. Parâmetro de escala (controles se espalham).
- **Características:** Deslizado para a direita, usado para modelar valores extremos (por exemplo, precipitação máxima).

Esta descrição detalhada fornece uma visão abrangente das distribuições e os valores numéricos adotados para seus parâmetros na análise.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

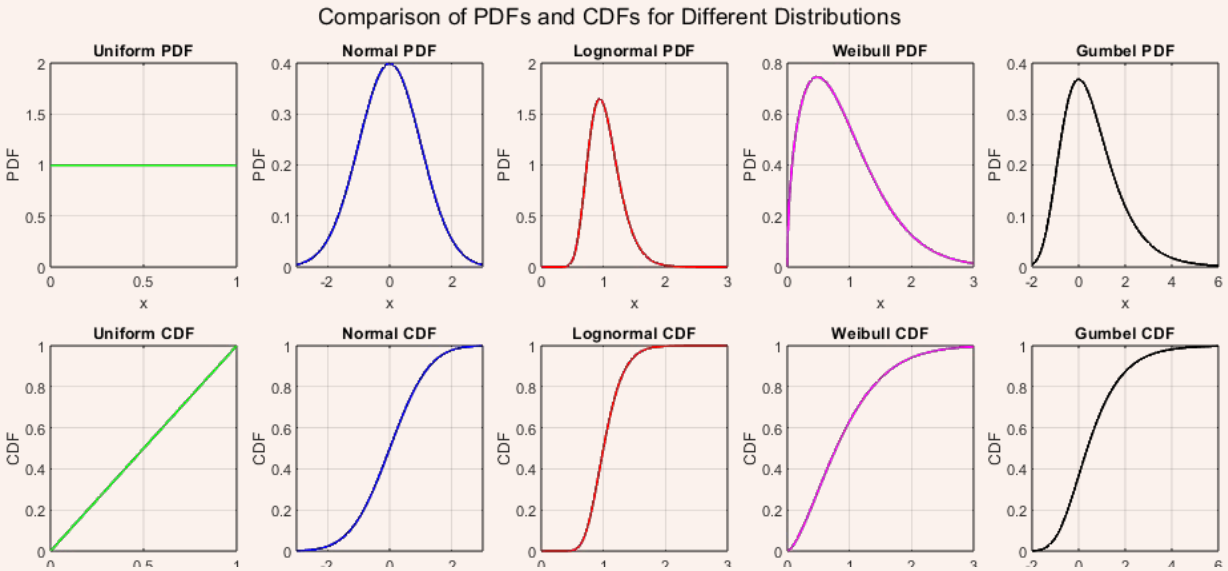


Figura M.13: Comparação de várias funções de distribuição (e cumulativas)

M.5.2 Distribuição Bivariada

Uma distribuição bivariada descreve o comportamento conjunto de duas variáveis aleatórias, X e.. Y.. Caracteriza as probabilidades associadas a todos os possíveis pares de resultados (x, y).. Tais distribuições são usadas para entender relações, dependências e correlações entre duas variáveis.

Dadas as duas variáveis aleatórias contínuas, X e.. Y, a função de distribuição bivariada cumulativa conjunta é:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

A densidade das juntas é definida como

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ou,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Consequentemente, a probabilidade de que $(X, Y) \in A$ é:

$$\mathbb{P}(A) = \int_{A} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Distribuição normal bivariada

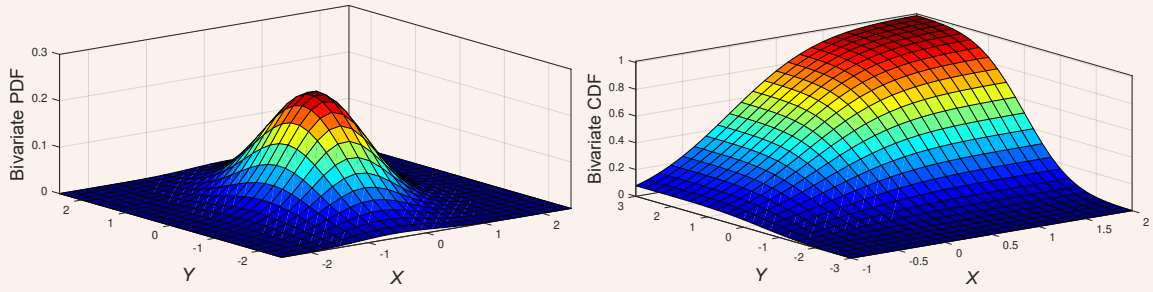
No caso bidimensional ($k = 2$), a função de densidade de probabilidade conjunta da distribuição normal bivariada é definida como:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right] \right)$$

onde:

- μ_X e.. μ_Y são os meios de X e.. YIndicando a localização central de cada variável.
- $\sigma_X > 0$ e.. $\sigma_Y > 0$ são os desvios padrão de X e.. Y, respectivamente, representando a dispersão ou dispersão dos dados para cada variável.
- ρ é o coeficiente de correlação entre X e.. Y, que mede a força e direção da relação linear entre as duas variáveis. Ele está no alcance $-1 \leq \rho \leq 1$.

Figura M.14 mostra uma amostra de PDF e CDF de distribuição normal bivariada em que $\mu_X = \mu_Y = 0.0$, $\sigma_X = 0.707$ e.. $\sigma_Y = 1.000$.



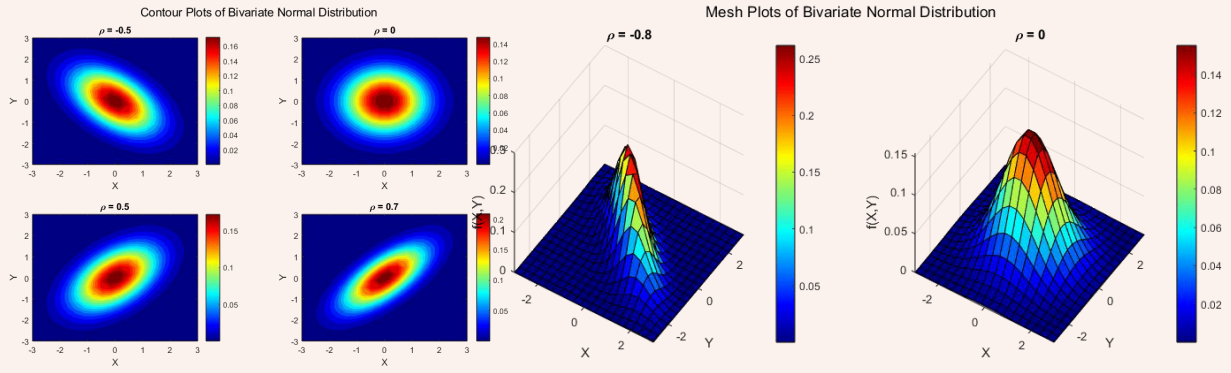
(a) PDF bivariado (b) CDF bivariado

Figura M.14: Distribuição normal bivariada

Figura M.15 mostra o impacto da correlação ρ na distribuição normal bivariada.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



(a) (b)

Figura M.15: Impacto da correlação ρ na distribuição normal bivariada

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice N

Índice de confiabilidade

Abstract

Este apêndice introduz o índice de confiabilidade como uma medida quantitativa de segurança estrutural e probabilidade de falha. Tratando tanto a capacidade estrutural quanto a demanda como variáveis aleatórias (tipicamente normais ou log-normal), o índice de confiabilidade quantifica a margem de segurança como a diferença entre a capacidade média e a demanda média, normalizada pelo padrão combinado Desvio. O apêndice desenvolve abordagens aritméticas e logarítmicas para calcular o índice de confiabilidade, relaciona-o com probabilidades de falha alvo, e conecta-o a fatores de projeto de segurança. O framework suporta decisões probabilísticas de projeto e avaliações informadas do risco usadas em engenharia baseada no desempenho, onde manter níveis prescritos de confiabilidade estrutural em diferentes estados limites é central para o processo de design.

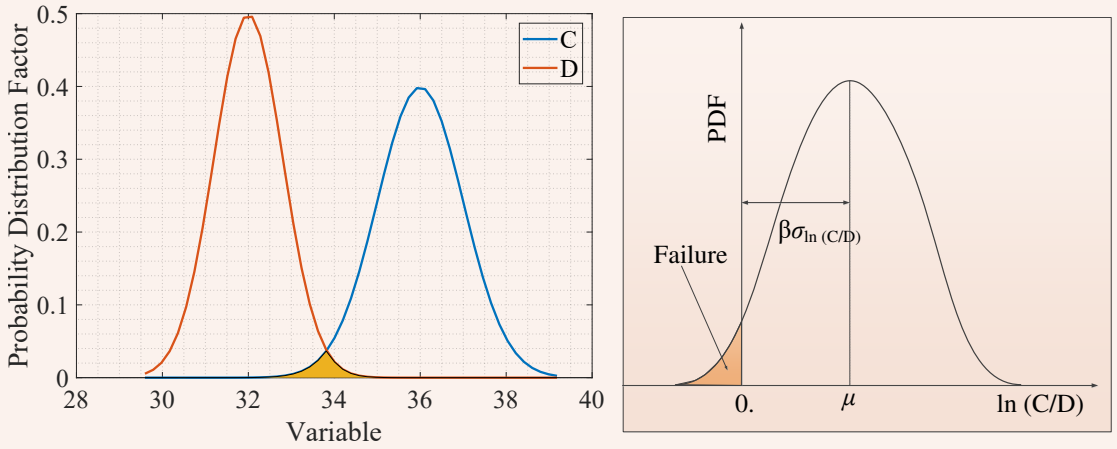
Parte 5: Teoria Avançada e Otimização

1 Índice de confiabilidade é uma medida quantitativa da segurança ou confiabilidade de uma estrutura, sistema ou componente. Normalmente é usado para avaliar a probabilidade de falha ou colapso de uma estrutura ou sistema sob diferentes cargas ou condições ambientais.

2 O índice de confiabilidade é calculado com base na probabilidade de falha ou colapso e na margem de segurança ou fator de segurança da estrutura ou sistema. É expresso como um valor numérico, com um valor maior indicando uma menor probabilidade de falha ou colapso e um valor menor indicando uma maior probabilidade de falência ou colapso.

3 É determinado a partir da diferença entre capacidade (C) e demanda (D) ambos presumidos como variáveis aleatórias (geralmente considerados normais, embora um log-normal pode ser preferível em alguns casos). Já que as distribuições normais são definidas em $[-\infty - \infty]$Sempre haverá uma probabilidade de fracasso, Fig. N.1a.

CÓPIA PARA REVISÃO



(a) Probabilidade Distribuição de Demanda e Capacidade

(b) Definição de Índice de confiabilidade

Figura N.1: Definições de índice de confiabilidade

4 Há duas abordagens para determinar β dependendo de como é calculada a margem de segurança.

Aritmética

$$
\begin{aligned}
M &= C - D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \\
\sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} \\
&= \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}
\end{aligned}
$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Logarítmico

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} &= \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \\
&= \frac{\ln \mu_C / \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

5 O índice de confiabilidade β é geometricamente definido na figura. N.1b.

6 O correspondente *Probabilidade de falha* P_f é igual à proporção da área sombreada, Fig. N.1b Para a área total sob a curva e é dado por $\Phi(-\beta)$ Onde Φ é a função normal de probabilidade cumulativa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{N.1}$$

7 A relação entre índice de confiabilidade e probabilidade de falha é mostrada na figura. N.2.

8 β é selecionado para refletir as consequências do fracasso, tabela N.1.

Tabela N.1: Valores selecionados para estruturas de aço e concreto

Tipo de Carga/Membro	β
AISC	
DL + LL; Membros	3.0
DL + LL; Ligações	4.5
DL + LL + WL; Membros	3.5
DL + LL +EL; Membros	1.75
ACI	
Fracasso Ducil	3-3.5
Fracassamentos Brittle	3.5-4

9 Índices de confiabilidade para vários componentes, ou vários modos de desempenho, podem ser usados para estimar a confiabilidade geral de uma estrutura/sistema. Dois casos extremos podem ser considerados:

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

CÓPIA PARA REVISÃO

Sistema de séries: Tal sistema não funcionará bem se qualquer componente executar de forma insatisfatória. Se um sistema tem n componentes em série, a probabilidade de desempenho insatisfatório do iO componente é.. p_i e sua confiabilidade $R_i = 1 - p_i$.. Então a confiabilidade do sistema, ou probabilidade de que todos os componentes irão executar satisfatoriamente é

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n \ = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$$

Sistemas paralelos: Tal sistema só será insatisfatório se todo componente executar de forma insatisfeito. Por isso, a confiabilidade é

$$R = 1 - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n \tag{N.2}$$

10 Índices de confiabilidade são uma medida relativa da condição atual e fornecem uma estimativa qualitativa do desempenho estrutural. Estruturas com índices de confiabilidade relativamente altos serão esperadas para funcionar bem. Se o valor é muito baixo, então a estrutura pode ser classificada como perigosa. Valores-alvo para β são mostrados na tabela N.2.. Isto é ilustrado pela Figura N.2

Tabela N.2: Confiabilidade das estruturas de aço e concreto

Performance Esperada	β	Probabilidade de falha
Alto	5	3/10 milhões
Bom	4	3/100,000
Acima da Média	3	1/1,000
Abaixo da Média	2.5	6/1,000
Pobre	2.0	2.3/100
Insatisfatório	1.5	7/100
Perigoso	1.0	16/100

Ex N.1: Índice de confiabilidade

Para um módulo de seção S = 150^3, rendimento tensão: μ_{f_y} = 36 KSI e σ_{f_y} = 1 KSI), submetido a um carga concentrada μ_P = 40 Kips, e σ_P = 1 Kips.

1. Determine o índice de confiabilidade pelos dois métodos
2. Repita o estudo através de uma simulação de Monte Carlo

```
clear;clc; close all;
```

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

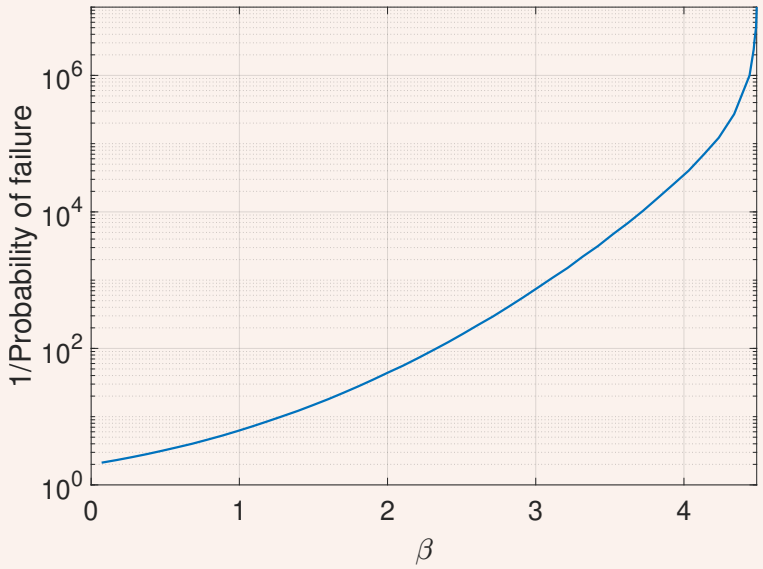


Figura N.2: Probabilidade de falha em termos de índice de confiabilidade β

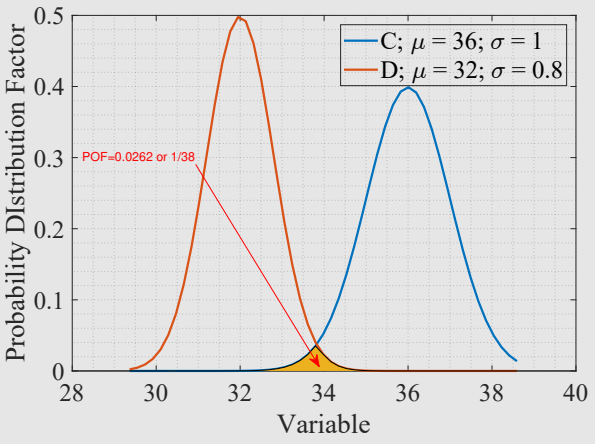
```
fs=16;font='Times New Roman';opengl software;
%
% Span of the beam(in)
L = 480;
% section modulus (in^3)
S = 150;
% Mean and Standard Deviation (SD) of Capacity,fy, (C) and Load (P)
Mu_C = 36;
SD_C = 1;
Mu_D = 40; % different units than C
SD_D = 1;
%Calculation of mean and SD of Demand (D)
Mu_D = Mu_D*L/4/S;
SD_D = SD_D*L/4/S;
sd=SD_D;md=Mu_D;sc=SD_C;mc=Mu_C;
%=========================================
% POF returns the Probability of Failure
%=========================================
% Approach (I): safety margin (M) = C - D, and C and D are normally
    distributed.
RI_I = (Mu_C-Mu_D)/sqrt(SD_C^2+SD_D^2);
POF_I = 0.5*(1 + erf(-RI_I/sqrt(2)));
% Approach (II): safety margin (M) = lnC - lnD, and C and D are normally
    distributed.
V_C = (SD_C/Mu_C);
V_D = (SD_D/Mu_D);
RI_II = log(Mu_C/Mu_D)/sqrt(V_C^2+V_D^2);
POF_II = 0.5*(1 + erf(-RI_II/sqrt(2)));
```

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

```
%
fprintf('Approach    beta   1/POF \n');
fprintf('I           %5.2f  %4.0f \n',RI_I,1/POF_I);
fprintf('II          %5.2f  %4.0f \n\n',RI_II,1/POF_II);
%=========================================
% Monte Carlo simulation to determine the probability of failure of the
    beam
% Approach: random numbers between 0 and 1 are created
% and the corresponding values of C and D are calculated
% using the inverse cumulative distribution function (icdf)
pd_C = makedist('Normal','mu',Mu_C,'sigma',SD_C);
pd_D = makedist('Normal','mu',Mu_D,'sigma',SD_D);
for p = 2:7
  subplot(2,3,p-1)
  SampleSize = 10^p;
  x(p-1)=SampleSize;
  CC = icdf(pd_C,rand(SampleSize,1));
  DD = icdf(pd_D,rand(SampleSize,1));
  N = sum(DD>CC);
  POF_MonteCarlo (p-1) = N/SampleSize;
  % Plot histograms
  bin=(30 : 0.1 : 42);
  plot(bin,hist(CC,bin)/SampleSize,bin,hist(DD,bin)/SampleSize,'LineWidth
    ',2);
  xlim([30 42]);
  grid
  lgnd=legend('C','D');
  set(lgnd, 'Color','none')
  label=['Sample Size =10^' int2str(p)];
  title(label);
  set(gca,'FontName', font,'color', 'none','fontsize',fs/2);
  l=sprintf('%3.0f  %5.2e',p,POF_MonteCarlo (p-1));
  disp(l);
end
```

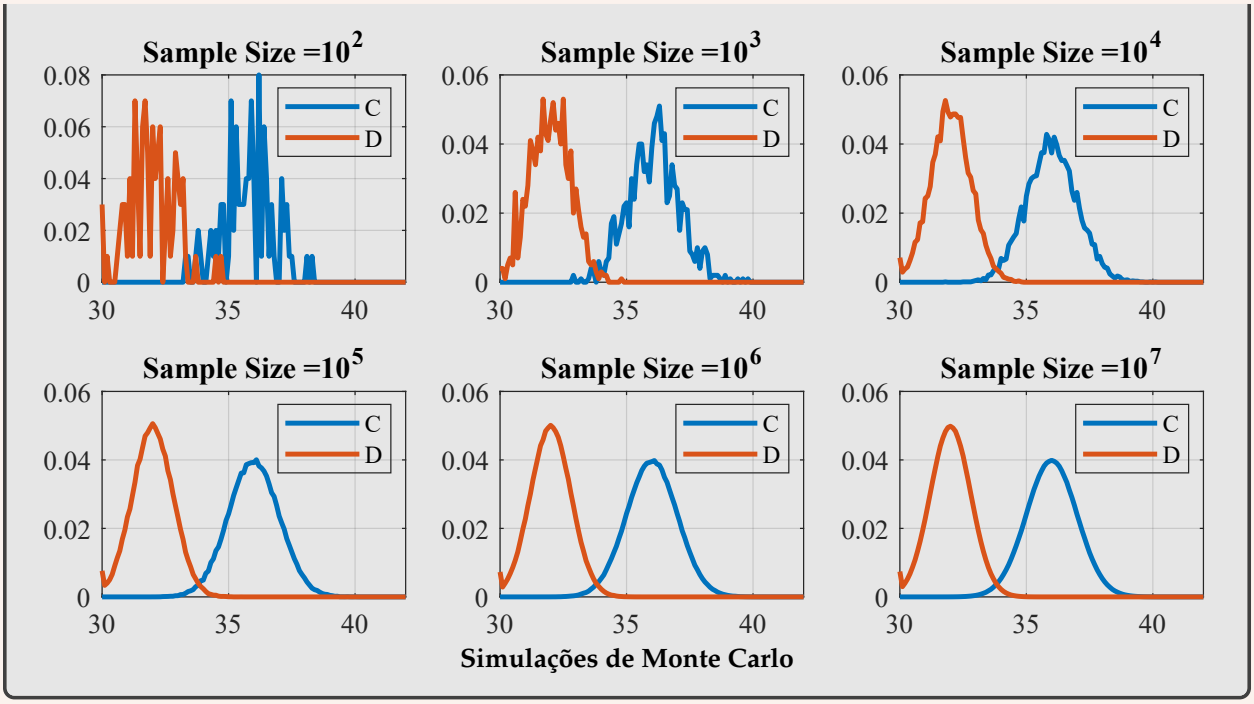


Aproxime-se	β	1/POF
I	3.12	1,119
II	3.15	1,232

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.



CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice O

Mecânica de Corpos Deformáveis, um Primer

Abstract

Mecânica é onde tudo começa. Enraizado em matemática, ele fornece uma base sólida para os capítulos subsequentes sobre métodos de Variação e derivações correspondentes. É muito mais exaustivo do que realmente é necessário[1]*, e como tal pode ser de interesse limitado para a maioria dos leitores deste livro.*

No entanto, acredito fortemente que um pré-requisito para dominar a engenharia estrutural é um conhecimento sólido da Mecânica de Corpos Deformáveis (também conhecido como "Deformable Bodies"). Mecânica sólida). Assim como um bom arquiteto também deveria ter um bom comando de engenharia estrutural.

O.1 Introdução . . . 3098
O.1.1 Notação . . . 3098
O.1.2 Tensores . . . 3100
O.1.3 Interpretação física de invariantes tensão . . . 3106
O.2 Campos de vetor; mecânica de corpos deformáveis . . . 3107
O.2.1 Forças . . . 3107
O.2.2 Tensor de Cauchy tensão . . . 3108
O.2.3 Cinemática . . . 3111
O.3 Leis fundamentais de mecânica do contínuo . . . 3114
O.3.1 Leis de conservação . . . 3114
O.3.2 Fluxos . . . 3115
O.3.3 Conservação da massa; equação de continuidade . . . 3116
O.3.4 Conservação do momento; equação de movimento . . . 3116
O.3.5 Conservação de energia; Primeiro princípio da termodinâmica . . . 3119
O.4 Equações constitutivas . . . 3121
O.4.1 Caso geral em 3D . . . 3121
O.4.2 Caso isotrópico transversamente . . . 3123
O.4.3 Casos especiais em 2D . . . 3123
O.5 Observações fenomenológicas . . . 3124
O.5.1 Carregar, deslocamento e testes de controle . . . 3124
O.5.2 Resposta pré/pós-pico do material de aço e concreto . . . 3125
O.6 Localização da deformação . . . 3127
O.6.1 Provas experimentais . . . 3127
O.7 Condições de contorno . . . 3130
O.8 Diagrama Tonti . . . 3131
O.9 Conceito de esforço interno . . . 3133

[1] Acontece que este capítulo foi previamente escrito para outra publicação (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)E no final, decidi mantê-lo em sua integralidade com apenas pequenas mudanças.

CÓPIA PARA REVISÃO

O.1 Introdução

1 A cobertura da infraestrutura avançada análise estrutural requer uma base sólida nos fundamentos da mecânica e elemento finito. O objetivo deste capítulo é, de fato, fornecer uma revisão sucinta.

2 A abordagem adotada é proceder de um rigoroso *mecânica do contínuo* paradigma usando notação tensorial primeiro, e depois expandir no sistema de coordenadas cartesiana mais tradicionalmente usado.

O.1.1 Notação

3 Assumindo que o conceito de tensor (definido abaixo) é entendido, a notação em engenharia/mecânica pode tomar forma diferente. Com referência à tabela O.1.

Tabela O.1: Notações

	$[A]$	A_{ij}	$\mathbf{A}$	
Matriz	✓	X	✓	$\lfloor x \rfloor [A] \{x\}$ $\mathbf{x}.\mathbf{A}.\mathbf{x}$
Tensor	X	✓	✓	$x_i A_{ij} x_j$ $\mathbf{x}.\mathbf{A}.\mathbf{x}$

Engenharia/Voigt (Timoshenko) Tensores simétricos de segunda ordem são frequentemente escritos como matrizes pilar. Esta conversão, e o outro dos tensores de ordem superior em matrizes pilar, é chamado Voigt notação .. A regra de Voigt depende se o tensor é uma quantidade cinética (como tensão) ou cinemática (comodeformação).

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

Matrix: Elemento finito, $[A]$, $[\sigma]$, $\{F\}$ Eles podem ser facilmente relacionados com matrizes em computação.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tensores: Mecânica cartesiana, F_x, σ_{ij}, C_{ijkl} e.. $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{C}$.. Na notação tensor os índices não são mostrados. Enquanto as equações indiciais cartesianas se aplicam apenas às coordenadas cartesiana, expressões em notação tensor são independentes do sistema de coordenadas e aplicam-se a outros sistemas de coordenadas como cilíndricos, curvilineares, etc. Em notação indicial, indicamos tensores da ordem um ou maior em letras de negrito. Geralmente é recomendado usar letras minúsculas para tensores de ordem 1 e maiúsculas para tensores de ordem 2 ou superior. Distinguimos entre notação tensor e notação matriz usando pontos e cólons entre termos, como em $\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv a_i b_i$ (o '.' indica uma contração de um par de índices repetidos que aparecem na mesma ordem), e $\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{ij}B_{ij}$.. ou $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ é equivalente a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$.

4 Nas seções seguintes, explicarei brevemente a última Considerando que a notação da Engenharia pode ser a mais simples e intuitiva, muitas vezes leva a equações longas e repetitivas. Alternativamente, o tensor levará a formas mais curtas e compactas.

5 Enquanto trabalhava na relatividade geral, Einstein cansou-se de escrever o símbolo da soma com sua gama de somações abaixo e acima (como $\sum_{i=1}^{n=3} a_{ij}b_i$) e notou que na maioria das vezes o alcance superior (n) era igual à dimensão do espaço (3 para nós, 4 para ele), e que quando a somação envolveu um produto de dois termos, o somatório foi sobre um índice repetido (i em nosso exemplo). Por isso, ele decidiu que não há necessidade de incluir o sinal summation $\sum$ Se houvessem índices repetidos (i), e assim qualquer índice repetido é um índice simulado e é somado ao longo da faixa 1 a 3. Um índice que não se repete é chamado de índice livre e presumiu ter um valor de 1 a 3. Por isso, esta chamada notação indicial também é referido à notação de Einstein .. As seguintes regras definem notação indicial:

1. Se há um índice de letras, esse índice vai desde i para n (intervalo do tensor). Por exemplo:
$$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \qquad i = 1, 2, 3$$
supondo que $n = 3$.
2. Uma repetição (t.c.p. O índice irá assumir todos os valores de sua faixa, e os tensores resultantes somarão. Por exemplo:
$$a_{1i}x_i = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
3. Ordem do tensor:
   - Tensor de primeira ordem (como força) tem apenas um índice livre:
   $$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor$$
   outros tensores de primeira ordem são $a_{ij}b_j$, F_{ikk}, $\varepsilon_{ijk}u_j v_k$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

- Tenor de segunda ordem (t.c.p. Diádico) terá dois índices livres.

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

  outros exemplos são A_{ijip}, $\delta_{ij}u_k v_k$.
- Um tensor de quarta ordem (como constantes elásticas) terá quatro índices livres.

4. Derivados de tensor em relação a x_i é escrito como $,i$.. Por exemplo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_{,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k} = T_{i,j,k};$$

6 A utilidade da notação indicial é apresentar sistemas de equações em forma compacta. Por exemplo:

$$x_i = c_{ij}z_j \equiv \begin{cases} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 \end{cases}$$

Da mesma forma:

$$A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D_{pq}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} \\ A_{12} &= B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22} \\ A_{21} &= B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22} \\ A_{22} &= B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22} \end{aligned}$$

7 Usando notação indicial, podemos reescrever a definição do produto de ponto

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O.1.2 Tensores

8 Nós generalizamos o conceito de um vetor introduzindo o tensor (**T**), que essencialmente *existe para operar em vetores* **v** *para produzir outros vetores* (ou em tensores para produzir outros tensores!). Nós designamos esta operação por **T**·**v** Ou simplesmente **Tv**.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \text{ or } u_i = T_{ij}v_j \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{S} \text{ onde } \mathbf{S} = \mathbf{T}^T \end{aligned}$$

Considerando que um tensor é essencialmente um operador em vetores (ou outros tensores), também é uma quantidade física independente de qualquer sistema específico

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

de coordenadas ainda especificado mais convenientemente por se referir a um sistema apropriado de coordenadas.

9 Os tensores surgem frequentemente como entidades físicas cujos componentes são os coeficientes de uma relação linear entre vetores. Um tensor é classificado pelo posto ou ordem. Um tensor da ordem zero é especificado em qualquer sistema de coordenadas por uma coordenada e é um escalar. Um tensor de ordem 1 tem três componentes de coordenadas no espaço, portanto é um vetor. Em geral 3-D, espaço o número de componentes de um tensor é 3^n onde não é a ordem do tensor. Força e tensão são tensores da ordem 1 e 2, respectivamente.

10 Tensores da ordem dois também são chamados *Diádico* e são muito comuns na mecânica (por exemplo. tensão, deformação, inércia).

O.1.2.1 Operações

11 A soma de dois tensores (deve ser da mesma ordem) é simplesmente definida como:

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{U}_{ij}$$

A multiplicação escalar de um tensor (de segunda ordem) é definida por:

$$\mathbf{S}_{ij} = \lambda \mathbf{T}_{ij}$$

12 O produto externo de dois tensores é o tensor cujos componentes são formados multiplicando cada componente de um dos tensores por cada componente do outro. Isso produz um tensor com uma ordem igual à soma das ordens dos tensores de fator.

$$\begin{aligned} a_i b_j &= T_{ij} \quad \text{or} \left\{ \quad \right\}_{n\times 1} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \\ v_i F_{jk} &= b_{ijk} \\ D_{ij} T_{km} &= \phi_{ijkm} \end{aligned}$$

13 O produto interno de dois tensores: contração de um índice de cada tensor

$$\begin{aligned} & a_i b_i \\ a_i E_{ik} &= f_k \quad \text{or} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} \left[\quad \right]_{mxn} = \lfloor \quad \rfloor_{1xn} \\ E_{ij} F_{jm} &= G_{im} \quad \text{or} \left[\quad \right]_{n\times p} \left[\quad \right]_{p\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \end{aligned}$$

14 O produto cruzado pode ser definido

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{pqr} a_q b_r \mathbf{e}_p = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Na segunda equação, há um índice livre p assim, existem três equações, há dois índices repetidos (dummy) q e.. r, assim cada equação tem nove termos. ε_{pqr} é chamado de símbolo de permutação e é definido como

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 1 & \text{Se os valores de } i,j,k \text{ formam uma permutação par de 1,2,3} \\ & \text{(isto é, se aparecem como 1 2 3 1 2)} \\ -1 & \text{Se os valores de } i,j,k \text{ formam uma permutação ímpar de 1,2,3} \\ & \text{(isto é, se aparecem como 3 2 1 3 2)} \\ 0 & \text{Se os valores de } i,j,k \text{ não formam uma permutação de 1,2,3} \\ & \text{(isto é, se dois ou mais índices têm o mesmo valor)} \end{cases}$$

O produto escalar de dois tensores é definido como

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = T_{ij} U_{ij}$$

em qualquer sistema retangular. O seguinte produto interno Os axiomas estão satisfeitos.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{U} &= \mathbf{U} : \mathbf{T} \\ \mathbf{T} : (\mathbf{U} + \mathbf{V}) &= \mathbf{T} : \mathbf{U} + \mathbf{T} : \mathbf{V} \\ \alpha(\mathbf{T} : \mathbf{U}) &= (\alpha\mathbf{T}) : \mathbf{U} = \mathbf{T} : (\alpha\mathbf{U}) \\ \mathbf{T} : \mathbf{T} &> 0 \text{ unless } \mathbf{T} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

O.1.2.2 Rotação de eixos

15 Considere dois conjuntos diferentes de sistemas de coordenadas ortogonais cartesianas $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e.. $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3\}$, qualquer vetor $\mathbf{v}$ pode ser expresso em um sistema ou outro

$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = \overline{v}_j \overline{\mathbf{e}}_j$$

Para determinar a relação entre os dois conjuntos de componentes, consideramos o produto do ponto $\mathbf{v}$ com um (qualquer) dos vetores base

$$\overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{v} = \overline{v}_i = v_j (\overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

Assim podemos definir os nove valores escalares

$$a_i^j \equiv \overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\overline{x}_i, x_j)$$

que são os cossenos de direção entre os nove pares de vetores base. Uma transformação covariável transformará um tensor de uma base para outra:

$$\overline{v}_j = a_j^p v_p$$

Note que o índice livre na primeira e segunda equações aparecem no índice superior e inferior respectivamente.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

16 Considere a transformação de um vetor **V** De.. (**X**, **Y**, **Z**) Coordene o sistema para (**x**, **y**, **z**), Figura O.1a.. Da Equação O.1

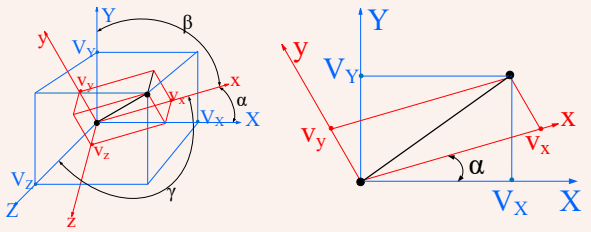
$$V_j = a_j^p \overline{V}_p \text{ or } \left\{ \begin{array}{rcl} V_1 & = & a_1^1 \overline{V}_1 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_1^3 \overline{V}_3 \\ V_2 & = & a_2^1 \overline{V}_2 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_2^3 \overline{V}_3 \\ V_3 & = & a_3^1 \overline{V}_3 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_3^3 \overline{V}_3 \end{array} \right.$$

Ou,

$$\left\{ \begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_x^X & a_x^Y & a_x^Z \\ a_y^X & a_y^Y & a_y^Z \\ a_z^X & a_z^Y & a_z^Z \end{array} \right]}_{a_j^k} \left\{ \begin{array}{c} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{array} \right\} \tag{O.1}$$

Onde a_i^j é a direção cosseno do eixo i com respeito ao eixo j

- $a_x^j = (a_x^X, a_x^Y, a_x^Z)$ direção cossenos de **x** com respeito a **X**, **Y** e.. **Z**
- $a_y^j = (a_y^X, a_y^Y, a_y^Z)$ direção cossenos de **y** com respeito a **X**, **Y** e.. **Z**
- $a_z^j = (a_z^X, a_z^Y, a_z^Z)$ direção cossenos de **z** com respeito a **X**, **Y** e.. **Z**



(a) 3D (b) 2D

Figura O.1: Transformação vetorial

17 Para o caso 2D, Figura O.1b, a matriz de transformação é escrita como

$$T = \left[\begin{array}{cc} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{array} \right]$$

Mas desde então.. $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$ e.. $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, então $\cos\gamma = -\sin\alpha$ e.. $\cos\beta = \sin\alpha$, assim a matriz de transformação torna-se

$$T = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array} \right] \tag{O.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O.1.2.3 Transformação de tensores

18 Rotação de um tensor de segunda ordem T_{jq}:

$$\begin{aligned}\overline{u}_j &= T_{jq}\overline{v}_q \\ \overline{u}_i &= a_i^j u_j \\ &= a_i^j T_{jq} v_q \\ &= a_i^j T_{jq} a_p^q \overline{v}_p\end{aligned}$$

Mas nós também temos $\overline{u}_i = \overline{T}_{ip}\overline{v}_p$ no sistema barrado, equiparando estas duas expressões obtemos

$$\overline{T}_{ip} = a_i^j a_p^q T_{jq}$$

Por isso,

$$\begin{aligned}\overline{T}_{ip} &= a_i^j a_p^q T_{jq} \text{ in Matrix Form } [\overline{T}] = [A]^T[T][A] \\ T_{jq} &= a_i^j a_p^q \overline{T}_{ip} \text{ in Matrix Form } [T] = [A][\overline{T}][A]^T\end{aligned}$$

19 Se considerarmos o caso 2D, da Equação O.2

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix}T_{xx} & T_{xy} & 0\\ T_{xy} & T_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ \overline{T} &= \begin{bmatrix}\overline{T}_{xx} & \overline{T}_{xy} & 0\\ \overline{T}_{xy} & \overline{T}_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = A^T T A\end{aligned}$$

Substituindo e simplificandosin $2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ e.. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$)

$$\begin{Bmatrix}\overline{T}_{xx}\\ \overline{T}_{yy}\\ \overline{T}_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_{xx}\\ T_{yy}\\ T_{xy}\end{Bmatrix}$$

O.1.2.4 Valores principais dos tensores simétricos de segunda ordem

20 Dois tensores fundamentais em mecânica do contínuo são de segunda ordem e simétricos (tensão e deformação); examinamos algumas propriedades importantes desses tensores.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Para cada tensor simétrico T_{ij} definido em algum ponto do espaço, há associação com cada direção (especificada pela unidade normal) n_j), Figura O.2, naquele ponto um vetor dado pelo produto interno

$$v_i = T_{ij} n_j$$

Se a direção é uma para qual v_i é paralelo a n_i, o produto interno é

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i$$

e a direção n_i é chamado de direção principal de T_{ij}.. Desde então $n_i = \delta_{ij} n_j$Isso pode ser reescrito como

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

que representa um sistema de três equações para os quatro desconhecidos n_i e.. λ.

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 &= 0 \\ T_{21} n_1 + (T_{22} - \lambda) n_2 + T_{23} n_3 &= 0 \\ T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \lambda) n_3 &= 0 \end{aligned}$$

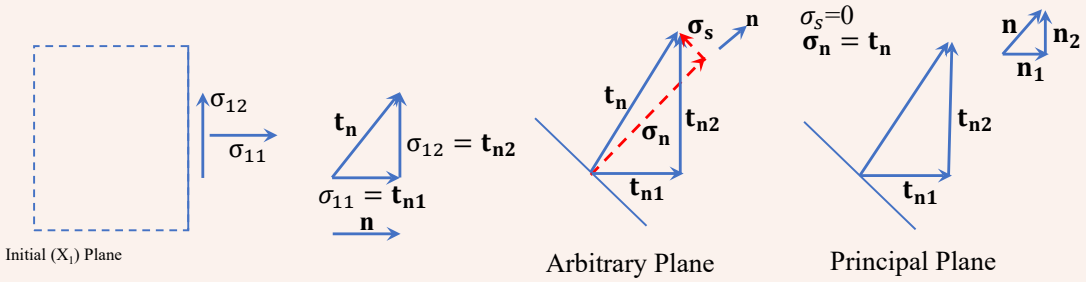


Figura O.2: Direções principais do tensor da ordem dois

21 Ter uma solução não trivial$n_i \neq 0$), o determinante dos coeficientes deve ser zero:

$$\left| T_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right| = 0$$

22 A expansão desse determinante leva à seguinte equação característica

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + II_T \lambda - III_T = 0$$

onde as raízes são chamadas os valores principais de T_{ij} e..

$$\begin{aligned} I_T &= T_{ii} = \text{tr}\, T_{ij} \\ II_T &= \frac{1}{2}(T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ij}) \\ III_T &= |T_{ij}| = \det T_{ij} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

são chamados de primeiro, segundo e terceiro invariantes respectivamente de T_{ij}.. É costume ordenar essas raízes como $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \lambda_{(3)}$.. Em termos do principal tensões, essas invariantes podem ser simplificadas em

$$\begin{aligned} I_T &= T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)} \\ II_T &= -(T_{(1)}T_{(2)} + T_{(2)}T_{(3)} + T_{(3)}T_{(1)}) \\ III_T &= T_{(1)}T_{(2)}T_{(3)} \end{aligned}$$

23 Para um tensor simétrico com componentes reais, os valores principais também são reais. Se esses valores são distintos, as três direções principais são mutuamente ortogonais.

O.1.3 Interpretação física de invariantes tensão

24 Um plano octaédrico é um que faz ângulos iguais com relação a cada uma das direções principais, Figura O.3; O normal para este avião é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

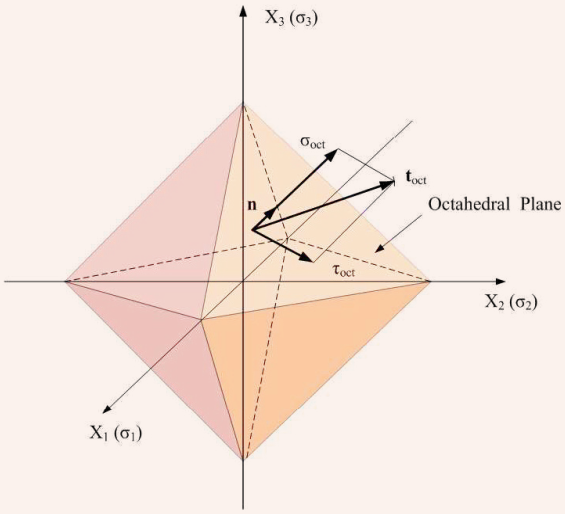


Figura O.3: Avião Octaédrico

25 O vetor de tração neste plano é

$$\mathbf{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e o componente normal do tensão no plano octaédrico é dado por

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}_{oct} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3}\mathbf{I}_1 = \sigma_{hyd}$$

26 O octaédrico é obtido a partir de

$$\tau_{oct}^2 = |\mathbf{t}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

27 Na manipulação algébrica, pode-se mostrar que

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

e finalmente, a direção do octaedro cisalhamento tensão é dada por

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} \frac{J_3}{\tau_{oct}^3}$$

28 A energia elástica deformação (total) por volume unitário pode ser decomposta em duas partes: $U = U_1 + U_2$, onde

$$\begin{array}{rcll} U_1 & = & \frac{1-2\nu}{E} I_1^2 & \text{Dilational energy} \\ U_2 & = & \frac{1+\nu}{E} J_2 & \text{Distortional energy} \end{array}$$

O.2 Campos de vetor; mecânica de corpos deformáveis

O.2.1 Forças

29 Há dois tipos de forças em mecânica do contínuo

Forças do corpo: Atuar sobre os elementos de volume ou massa dentro do corpo, por exemplo. gravidade, campos eletromagnéticos. $d\mathbf{F} = \rho \mathbf{b} dVol$.

Forças de superfície: (ou tracção) são forças de contato agindo sobre o corpo livre em sua superfície limite. Esses serão definidos em termos de força por unidade de área, Figura O.4Equação O.3.

$$\int_\Gamma \mathbf{t} d\Gamma = \mathbf{i} \int_\Gamma t_x d\Gamma + \mathbf{j} \int_\Gamma t_y d\Gamma + \mathbf{k} \int_\Gamma t_z d\Gamma \tag{O.3}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

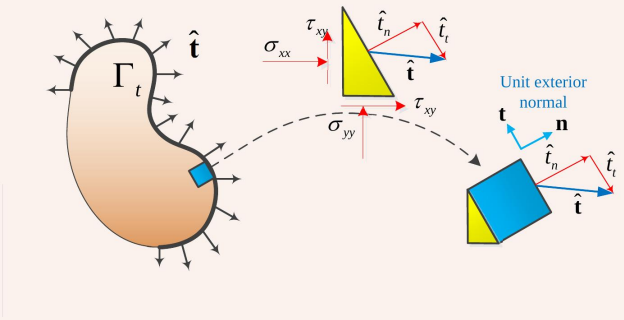
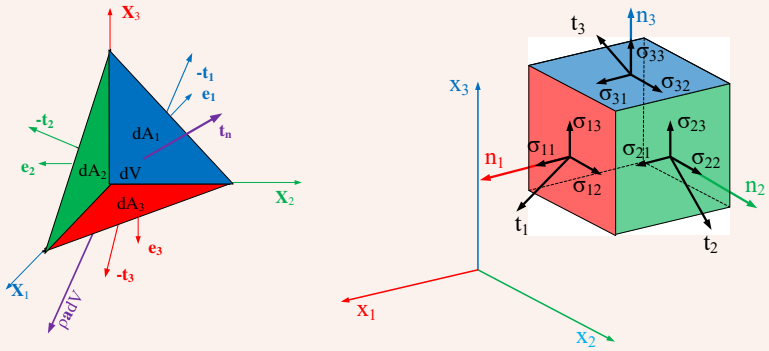


Figura O.4: Forças de superfície

30 Geralmente limitamos o termo tração a uma superfície limite real de um corpo e usamos o termo vetor tensão para uma superfície interior imaginária. Os vetores de tração em planos perpendiculares aos eixos de coordenadas são particularmente úteis. Quando os vetores agindo em um ponto sobre três planos mutuamente perpendiculares são dados, o vetor tensão nesse ponto em qualquer outro plano arbitrariamente inclinado pode ser expresso em termos do primeiro conjunto de tração.

O.2.2 Tensor de Cauchy tensão

31 O conceito de força foi no primeiro resumo, a física aristotélica referia-se ao ímpeto .. Galileu e Newton (1687) formalizaram. Quanto ao conceito de tensão não foi firmemente compreendido até 1822 quando Cauchy apresentou a idéia de vetor de tração que contém tanto os componentes normais e tangenciais $\mathbf{t} = t_n \mathbf{e}_n + t_t \mathbf{e}_t$.. Seu "gênio"foi considerar o que ficou conhecido como tetraedro Cauchy , Figura O.5a, e aplicava a segunda lei de Newton (ou mais precisamente sua extensão às partículas por Euler: A primeira lei de movimento de Euler).



(a) Tetraedro (b) Tensões

Figura O.5: Cauchy: tetraedro para tensão

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

32 O equilíbrio do tetraedro Cauchy produz

$$\mathbf{t}dA - \mathbf{t}_1 dA_1 - \mathbf{t}_2 dA_2 - \mathbf{t}_3 dA_3 = \rho dV \mathbf{a}$$

Onde **a** é a aceleração e ρ a densidade de massa. As áreas dos rostos são dadas por

$$\begin{aligned} dA_1 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_1 dA \\ dA_2 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_2 dA \\ dA_3 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_3 dA \end{aligned}$$

Substituindo a equação de equilíbrio, e considerando o caso limitante onde $dV \longrightarrow 0$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \tag{O.4}$$

Os vetores de tração Deve ter componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

33 Deve-se notar que historicamente e tradicionalmente em mecânica do contínuo o tensão é denotado por **T**.. Isso foi substituído por σ.. Substituindo pela Equação O.4

$$\begin{aligned} \mathbf{t} =& n_1(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3) + n_2(\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3) \\ &+ n_3(\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3) \\ =& (n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31})\mathbf{e}_1 + (n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32})\mathbf{e}_2 \\ &+ (n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33})\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Ou simplesmente

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{O.5}$$

34 Há um tensor de segunda ordem chamado Cauchy tensão tensor onde o primeiro subscrito (i) refere-se à direção do exterior voltado para o normal, eo segundo (j) para a direção da força do componente, Figura O.5b.

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right]}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

As equações anteriores desempenharam um papel importante na fundação de Mecânica do contínuo .

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

35 Finalmente, Voigt Notação (normalmente usado em engenharia) é uma forma de representar o tensor simétrico reduzindo sua ordem.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

36 Nota: ainda não introduzimos a equação do equilíbrio (equação momentum).

O.2.2.1 Tensores hidrostáticos e desviatórios

37 Vamos σ Denotam a média normal tensão p:

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\text{tr}\ \boldsymbol{\sigma}$$

38 Então o tensor tensão pode ser escrito como a soma de dois tensores:

Hidrostático tensão em que cada normal tensão é igual a $-p$ e o cisalhamento tensões são zero. O hidrostático tensão produz mudança de volume sem alteração na forma em um meio isotrópico.

$$\sigma_{hyd} = -p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Deviatoric Tensão: O que causa a mudança de forma.

$$\sigma_{dev} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}$$

O.2.2.2 Representação geométrica de tensão estados

39 Usando o três diretor tensões σ_1, σ_2, e σ_3, como as coordenadas, um espaço tridimensional tensão pode ser construído, Figura O.6.. Esta representação é conhecida como o espaço Haigh-Westergaard.

OP = **ON** + **NP**.. O primeiro está na direção do vetor unitário $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e.. **NP**$\perp$**ON**.

ON é o componente hidrostático do estado tensão, eixo $O\xi$ é chamado de eixo hidrostática ξE cada ponto deste eixo tem $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = p$, ou $\xi = \sqrt{3}p$. **NP** representa o componente desviatório do estado tensão (s_1, s_2, s_3) e é perpendicular ao ξ Eixo. Qualquer plano perpendicular ao eixo hidrostático é chamado de plano desviatório e expresso como

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}) = \xi$.. Um avião que passa pela origem é chamado de π E é representado por $\xi = 0$.. Qualquer plano que contenha o eixo hidrostático é chamado de plano meridiano. O vetor **NP** está em um plano meridiano e tem $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$.

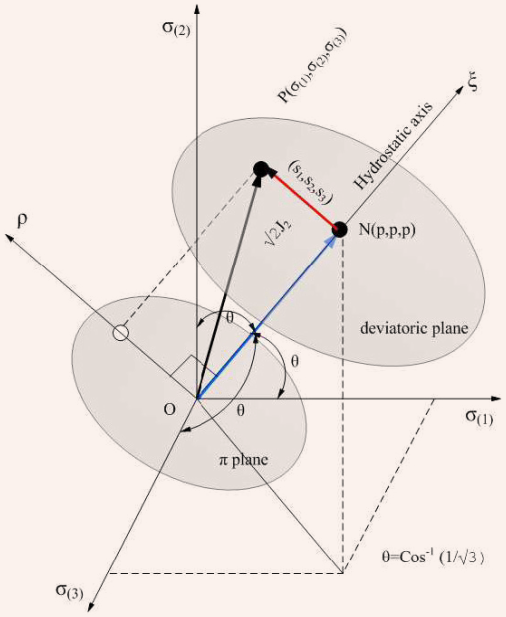


Figura O.6: Representação geométrica de tensão

O.2.3 Cinemática

O.2.3.1 Posição e deslocamento

40 Considerando a deformação de um sólido, podemos ter, Figura O.7 Dois sistemas distintos de coordenadas:

Coordenadas materiais (X_1, X_2, X_3) definido no sistema de coordenadas original não formado que dá origem ao sistema de coordenação Lagrangiano.

Coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) definido no sistema de coordenadas deformado. Isso dá origem ao sistema de coordenadas Euleriano.

Mais especificamente, na configuração inicial, P_0 tem o vetor de posição

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3$$

que está aqui expressa em termos das coordenadas materiais (X_1, X_2, X_3). Na configuração deformada, a partícula P_0 Agora se mudou para a nova posição P E tem o seguinte vetor de posição

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

que é expressa em termos de coordenadas espaciais. O vetor deslocamento **u** Conectando P_0 e.. P é o vetor deslocamento que pode ser expresso tanto nas coordenadas materiais ou espaciais

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_K \mathbf{I}_K \\ \mathbf{u} &= u_k \mathbf{i}_k \end{aligned}$$

O.2.3.2 Deformações

41 Se ambos os gradientes deslocamento e o próprio deslocamentos são pequenos, então $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, e assim o Eulerian eo infinitesimal Lagrangian deformação tensores podem ser tomados como iguais, $E_{ij} = E^*_{ij}$.

42 No outro pode-se introduzir representações alternativas deformação, Tabela O.2.

Tabela O.2: Deformação representações

		Deslocamento gradiente	
		Pequeno	Grande
Deslocamento	Pequeno	Lagrangian pequeno deformação (Cauchy)	Lagrangian grande deformação (Green-Lagrange)
	Grande	Euleriano pequeno deformação	Euleriano finito deformação (Eulerian-Almansi)

43 Neste livro, nos limitaremos à representação Lagrangiana.

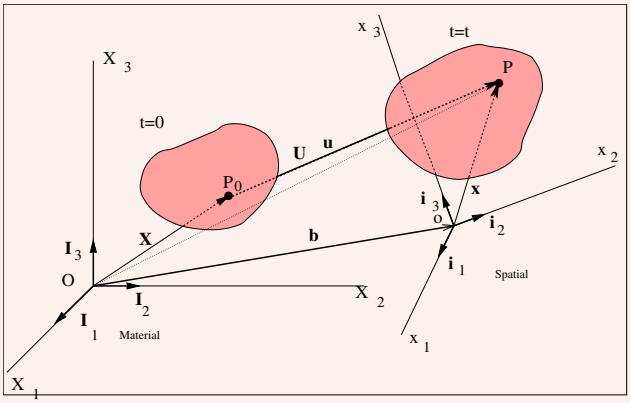


Figura O.7: Posição e vetores deslocamento

CÓPIA PARA REVISÃO

44 Se grande deformação é contabilizada (como em flambagem, o finito euleriano deformações no sistema cartesiano de coordenadas são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{O.6}$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

45 Note que a engenharia (normalmente usada) cisalhamento deformação é definido como

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

46 Na maioria dos casos, as deformações são pequenas o suficiente para que os termos quadráticos sejam derrubados

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \tfrac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \tfrac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \tfrac{\partial w}{\partial z}; \\
\gamma_{xy} &= \tfrac{\partial v}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \tfrac{\partial w}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \tfrac{\partial w}{\partial y} + \tfrac{\partial v}{\partial z};
\end{aligned}$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)$$

Que é chamado de Cauchy deformação .. Em elemento finito, o deformação é frequentemente expresso através do operador linear **L** :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

ou

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{O.7}$$

O.3 Leis fundamentais de mecânica do contínuo

47 Nesta seção, vamos derivar equações diferenciais que regem o caminho tensão e a deformação varia em um ponto e com o tempo. Eles se aplicarão a qualquer meio contínuo, mas não teremos equações suficientes para determinar o campo de tensor desconhecido. Para isso precisamos esperar pela próxima seção onde as leis constitutivas relativas tensão e deformação serão introduzidas.

48 Somente com equações constitutivas e condições de contorno e iniciais poderemos obter um problema matemático bem definido para resolver para a distribuição tensão e deformação ou os campos de velocidade.

49 Vamos resumir as equações diferenciais que expressam localmente a conservação de massa, momento e energia. Estas equações diferenciais de equilíbrio serão derivadas de formas integrais da equação do equilíbrio expressando os postulados fundamentais de mecânica do contínuo.

O.3.1 Leis de conservação

50 As leis de conservação constituem um componente fundamental da física clássica. Uma lei de conservação estabelece um equilíbrio de uma escalar ou quantidade tensorial em voulme V limitado por uma superfície S.. Em sua forma mais geral, tal lei pode ser expressa como

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{A}\mathrm{d}V}_{\text{Rate of variation}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}S}_{\text{Exchange by Diffusion}} = \underbrace{\int_V \mathbf{A}\mathrm{d}V}_{\text{Source}}$$

Onde $\mathcal{A}$ é a densidade volumétrica da quantidade de interesse **a** (massa, momento linear, energia, ...), **A** é a taxa de densidade volumétrica do que é fornecido de fora, e $\boldsymbol{\alpha}$ é a taxa de densidade superficial do que se perde através da superfície S de V e será uma função do normal para a superfície **n**.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

51 Assim, lemos a equação anterior como: A quantidade de entrada (fornecida pelo lado direito) é igual ao que se perde através do limite e para modificar $\mathcal{A}$ que é a quantidade de interesse. As dimensões de várias quantidades são dadas por

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{a}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3}) \\ \dim(\boldsymbol{\alpha}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-2}t^{-1}) \\ \dim(\mathbf{A}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3}t^{-1}) \end{aligned}$$

52 Por isso, esta seção aplicará a lei de conservação anterior à massa, momento e energia. As equações diferenciais resultantes fornecerão relações interessantes adicionais com relação à incompressibilidade dos sólidos (importantes nas teorias clássicas da hidrodinâmica e plasticidade), equilíbrio e simetria do tensor tensão, e a primeira lei de termodinâmica. A enunciação das três leis de conservação anteriores mais a segunda lei da termodinâmica constituem o que é comumente conhecido como as leis fundamentais de mecânica do contínuo.

O.3.2 Fluxos

53 Antes da enunciação da primeira lei de conservação, precisamos definir o conceito de fluxo através de uma superfície limitada. O fluxo através da superfície pode ser graficamente definido pela consideração de uma superfície imaginária fixa no espaço com contínuo "medium" fluindo através dela. Se atribuirmos um lado positivo para a superfície, e tomar **n** no sentido positivo, então o volume de "material" fluindo através da superfície infinitesimal dS Com o tempo dt é igual ao volume do cilindro com base dS e altura inclinada vdt paralelo ao vetor de velocidade **v**, Figura O.8.

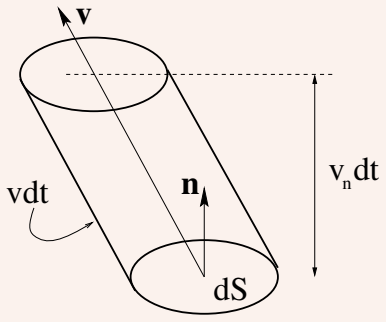


Figura O.8: Fluxo através da área dS

(If **v**·**n** é negativo, então o fluxo está na direção negativa). Assim, definimos o fluxo de volume como

$$\text{Volume Flux} = \int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S v_j n_j \mathrm{d}S$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

onde a última forma é para componentes cartesianos retangulares. Podemos generalizar esta definição e definir os seguintes fluxos por unidade de área através dS:

$$\begin{aligned}\text{Mass Flux} &= \int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S \rho v_j n_j \mathrm{d}S\\ \text{Momentum Flux} &= \int_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S = \int_S \rho v_k v_j n_j \mathrm{d}S\\ \text{Heat flux} &= \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S q_j n_j \mathrm{d}S\end{aligned}$$

O.3.3 Conservação da massa; equação de continuidade

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ or } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

54 A forma vetorial é independente de qualquer escolha de coordenadas. Esta equação mostra que a divergência do campo vetorial de velocidade é igual a $(-1/\rho)(d\rho/dt)$ e mede a taxa de fluxo do material longe da partícula e é igual à taxa unitária de diminuição da densidade ρ na vizinhança da partícula.

55 Se o material é incompressível para que a densidade na vizinhança de cada partícula do material permaneça constante à medida que se move, então a equação da continuidade assume a forma mais simples

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ or } \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

56 Esta é a condição de incompressibilidade .

O.3.4 Conservação do momento; equação de movimento

57 A taxa de mudança temporal do momento total de um determinado conjunto de partículas é igual à soma vetorial de todas as forças externas atuando sobre as partículas do conjunto, desde que a Terceira Lei de Newton se aplique. A forma contínua deste princípio é um postulado básico[2] de mecânica do contínuo. Começando com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \underbrace{\rho\mathbf{v}}_{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}V - \int_S \underbrace{\mathbf{t}}_{\alpha}\,\mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\rho\mathbf{b}}_{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}V$$

e anotando que

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A}) &= \rho\mathbf{v} = \tfrac{m}{L^2 t}\\ \dim(\alpha) &= \mathbf{t} = \tfrac{ma}{L^2} = \tfrac{m}{Lt^2}\\ \dim(\mathbf{A}) &= = \rho\mathbf{b} = \tfrac{m}{L^3}\tfrac{L}{t^2} = \tfrac{m}{L^2t^2}\end{aligned}$$

[2]postulado: uma declaração, também conhecida como um axioma, que é considerada verdadeira sem provas.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Lembre-se de Divergence Theorem. R.4)

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S \underbrace{v_i n_i}_{\text{flux}} dS$$

58 O fluxo de uma função vetorial através de alguma superfície fechada é igual à integral da divergência dessa função sobre o volume fechado pela superfície. Nós substituímos $t_i = T_{ij} n_j$ e aplicar o teorema da divergência (Eq. R.4) para obter

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) \mathrm{d}V &= \int_V \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V \\ \int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \right] \mathrm{d}V &= 0 \end{aligned}$$

Ou para um volume arbitrário

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

que é o princípio do momento linear, ou mais simplesmente a equação de equilíbrio. Quando expandido em 3D e para problemas estáticos, esta equação produz:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0 \\ \tfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0 \\ \tfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{O.8}$$

ou

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{O.9}$$

59 Equação (O.8) representa Cauchy equações de movimento. Para um fluido newtoniano (inviscido), o tensor tensão reduz-se a um puramente normal tensão,

$$T_{ij} = \sigma \, \delta_{ij},$$

Onde σ denota o normal (dinâmico) tensão e δ_{ij} é o Kronecker Delta. Consequentemente,

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \sigma, \qquad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

60 Substituindo essas relações em Eq. (O.8) Rende-se

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \rho b_1 = \rho a_1, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \rho b_2 = \rho a_2, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \rho b_3 = \rho a_3,$$

Onde a_i são os componentes da aceleração de partículas.

61 Apresentando a partícula fluida deslocamentos

$$a_1 = \ddot{\xi}, \qquad a_2 = \ddot{\eta}, \qquad a_3 = \ddot{\zeta},$$

e observando que, na formulação hidrodinâmica, a gravidade é contabilizada em O campo estático hidrostática (de modo que $b_i = 0$ Para o problema incremental), a Equações reduzem-se para

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \rho \ddot{\xi}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \rho \ddot{\eta}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} = \rho \ddot{\zeta}.$$

62 Finalmente, usando $w = \rho g$Nós obtemos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

que são as relações empregadas na análise hidrodinâmica.

63 Notamos que estas equações também poderiam ter sido derivadas do diagrama de corpo livre com a suposição de equilíbrio (via segunda lei de Newton) considerando um elemento infinitesimal de dimensões $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$, Figura O.9.

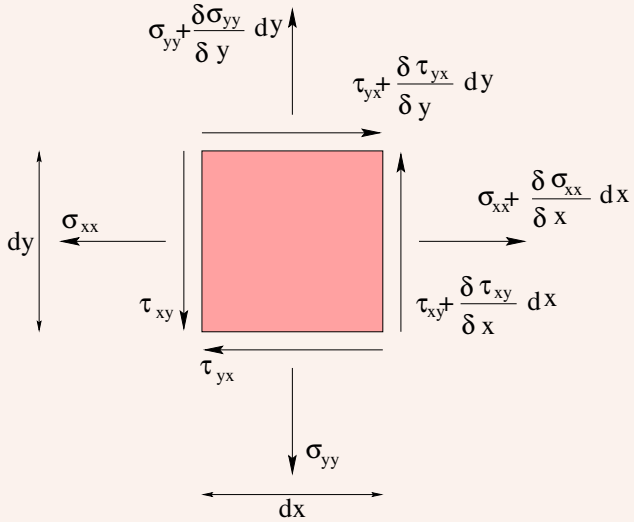


Figura O.9: Equilíbrio de tensões, coordenadas cartesianas

CÓPIA PARA REVISÃO

O.3.5 Conservação de energia; Primeiro princípio da termodinâmica

64 O primeiro princípio da termodinâmica relaciona o trabalho feito em um sistema (fechado) e a transferência de calor para o sistema com a mudança de energia do sistema. Assumiremos que as únicas transferências de energia para o sistema são por trabalho mecânico feito no sistema por tração superficial e forças do corpo e por transferência de calor através da fronteira.

65 Se as quantidades mecânicas só forem consideradas, o princípio da conservação de energia para o contínuo pode ser derivado diretamente do equação de movimento dado pela Equação O.8.. Isso é feito tomando a integral sobre o volume V do produto escalar entre a Equação O.8 E a velocidade v_i.

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V v_i T_{ji,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho b_i v_i \mathrm{d}V$$

Considere o lado esquerdo

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

que representa a taxa de variação da energia cinética K no contínuo.

66 Se considerarmos processos térmicos, a taxa de aumento do calor total no continuum é dada por

$$Q = -\int_S q_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho r \mathrm{d}V$$

Q tem a dimensão[3] De poder, isto é ML^2T^{-3}, e a unidade SI é o Watt (W). $\mathbf{q}$ é o fluxo de calor por unidade de área por condução, sua dimensão é MT^{-3} E a unidade de SI correspondente é Wm^{-2}.. Finalmente, r é a constante de calor radiante por unidade de massa, sua dimensão é $MT^{-3}L^{-4}$ E a unidade de SI correspondente é Wm^{-6}.. Nós temos

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V = \int_V (v_i T_{ji})_{,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q$$

67 Em seguida, convertemos a primeira integral do lado direito para uma integral de superfície pelo teorema da divergência (Eq. R.4) e desde então, $t_i = T_{ij}n_j$ Nós conseguimos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V &= \int_S v_i t_i \mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q \\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q\end{aligned}$$

[3] Trabalho=$FL = ML^2T^{-2}$; Poder=Trabalho/tempo

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

68 Esta equação relaciona a taxa de variação do tempo da energia mecânica total do continuum no lado esquerdo à taxa de trabalho feita pela superfície e forças do corpo no lado direito.

69 Se as energias mecânicas e não mecânicas devem ser consideradas, o primeiro princípio afirma que *a taxa de variação do tempo da cinética mais a energia interna é igual à soma da taxa de trabalho mais todas as outras energias fornecidas para, ou removidas do contínuo por unidade de tempo (calor, químico, eletromagnético, etc.).* Para um continuum termomecânico, é costume expressar a taxa de tempo da mudança de energia interna pela expressão integral

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V$$

Onde u é a energia interna por unidade de massa ou energia interna específica. Nós notamos que U aparece apenas como um diferencial no primeiro princípio, portanto, se realmente precisamos avaliar esta quantidade, precisamos ter um valor de referência para o qual U Será nulo.

70 A dimensão de U é uma de energia: Dim $U = ML^2T^{-2}$, e a unidade SI é o Joule. Da mesma forma, ofuscar $u = L^2T^{-2}$ com a unidade SI de Joule/Kg.

71 Em termos de energia integral, o primeiro princípio pode ser reescrito como

$$\overbrace{\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V}_{\frac{dK}{dt}=\dot{K}} + \underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V}_{\frac{dU}{dt}=\dot{U}}}^{\text{Rate of increase}} = \overbrace{\underbrace{\int_S t_i v_i \mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V}_{\frac{dW}{dt}(\mathcal{P}_{ext})}}^{\text{Exchange}\quad\text{Source}}$$

$$+ \overbrace{\underbrace{\int_V \rho r \mathrm{d}V - \int_S q_i n_i \mathrm{d}S}_{Q(\mathcal{P}_{cal})}}^{\text{Source}\quad\text{Exchange}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q \tag{O.10}$$

72 Na elasticidade ideal, a transferência de calor é considerada insignificante, e todo o trabalho de entrada é assumido convertido em energia interna na forma de energia elástica armazenada recuperável deformação que pode ser recuperada como trabalho quando o corpo é descarregado.

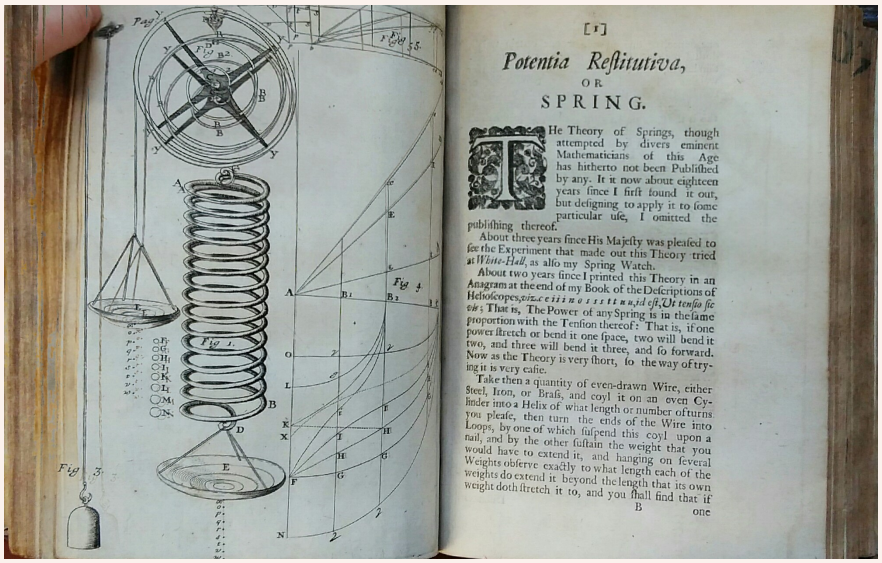
73 Em geral, no entanto, a maior parte do trabalho de entrada em um material deformante não é recuperado mas dissipado pelo processo de deformação causando um aumento na temperatura do corpo e eventualmente sendo conduzido para longe como calor.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O.4 Equações constitutivas

74 Hooke[4] publicado em 1676 um anagrama *C.e.i.n.o.s.st.t.u.u.*. Só em 1678 ele publicou a chave (em latim) *UT tensão, sic vis*, que significa "como a extensão, assim a força.' ' Nessas palavras: *O poder de qualquer primavera está na mesma proporção com a sua tensão: Ou seja, se uma extensão de potência ou dobra é um espaço, dois vão dobrá-lo dois, e três vão dobre-lo três, e assim por diante*, Figura O.10.. De fato, foi dito que Hooke era muito pouco conhecido ultimamente



[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It it now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Heliſcopes, *viz. c e i i i n n o o r s s t t u u m, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an oven Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

Figura O.10: Prato da palestra de Hooke sobre molas

75 Daí em diante, Hooke tornou-se o pai indiscutível da elasticidade.

O.4.1 Caso geral em 3D

76 A Lei Geralizada de Hooke pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{O.11}$$

77 O tensor (quarto ordem) das constantes elásticas D_{ijkl} tem 81 (3^4) componentes; No entanto, devido à simetria de ambos σ e.. ε, há no máximo 36 $\left(\frac{9(9-1)}{2}\right)$ termos elásticos distintos.

[4] Hooke, um contemporâneo de Newton, era muito reservado, amargo e ciumento (não diferente de Salieri e Mozart) como ele sentiu que tinha sido negado crédito por muitas descobertas.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

78 Com o propósito de escrever a Lei de Hooke, o sistema duplo indexado é muitas vezes substituído por um simples sistema indexado com uma faixa de seis:

$$\sigma_k = \overbrace{D_{km}}^{6^2=36} \varepsilon_m \qquad k,m = 1,2,3,4,5,6$$

79 Em termos das constantes do Lame, Lei de Hooke para um corpo isotrópico é escrito como

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij} && \text{or } \mathbf{T} = \lambda\mathbf{I}_E + 2\mu\mathbf{E} \\ E_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}T_{kk}\right) && \text{or } \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\mathbf{I}_T + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} \end{aligned}$$

80 Em termos de constantes de engenharia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

81 Da mesma forma no caso de puro cisalhamento no x_1x_3 e.. x_2x_3 Aviões, nós temos

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = \sigma_{12} &= \tau \quad \text{all other } \sigma_{ij} = 0 \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\tau}{G} \end{aligned}$$

e.. μ é igual ao módulo cisalhamento G.. A lei de Hooke para material isotrópico em termos de constantes de engenharia torna-se

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \text{ or } \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}_\varepsilon\right) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \text{ or } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathbf{I}_\sigma \end{aligned}$$

82 Quando a equação deformação é expandida em coordenadas cartesianas 3D, ela produz:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

83 Se invertermos esta equação, nós obtemos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} \tag{O.12}$$

O.4.2 Caso isotrópico transversamente

84 Para isotrópico transversal, podemos expressar a relação tensão-deformação em termos de

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + a_{33}\sigma_{zz} \\ \gamma_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz} \end{aligned}$$

e..

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{13} = -\frac{\nu'}{E'}; \quad a_{33} = -\frac{1}{E'}; \quad a_{44} = -\frac{1}{\mu'}$$

Onde E é o Módulo de Young no avião de isotropia e E' O que está no avião é normal. ν corresponde à contração transversa no plano da isotropia quando a tensão é aplicada no plano; ν' corresponde à contração transversa no plano da isotropia quando a tensão é aplicada normal ao plano; μ' corresponde ao módulo cisalhamento para o plano de isotropia e qualquer plano normal a ele, e μ é cisalhamento moduli para o plano de isotropia.

O.4.3 Casos especiais em 2D

85 Muitas vezes se pode fazer suposições simplificadas para reduzir um problema 3D em 2D.

Avião Deformação Por problemas envolvendo um corpo longo no z direção sem variação de carga ou geometria, então $\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.. Assim, substituindo a Equação O.12 Nós conseguimos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Axissimetria Em sólidos da revolução, podemos usar um sistema de coordenadas polares e

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}\\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r}\\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}\\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}$$

A relação constitutiva é novamente análoga a 3D/plano

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{rr}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \tau_{rz}\end{array}\right\}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{array}{cccc}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{rz}\end{array}\right\}$$

Avião Tensão Se a dimensão longitudinal em z A direção é muito menor que na x e.. y Então, as direções $\tau_{yz}=\tau_{xz}=\sigma_{zz}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ através da espessura. Novamente, substituindo-se pela Equação O.12 Nós obtemos:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} &= \frac{1}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}\\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{1-\nu}\nu(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})\end{aligned}$$

O.5 Observações fenomenológicas

86 Discutimos brevemente alguns aspectos fenomenológicos gerais associado a testes de fratura e resposta do concreto.

O.5.1 Carregar, deslocamento e testes de controle

87 Antes de prosseguir com a cobertura linear e não-linear mecânica da fratura de concreto, é essencial que o leitor entenda a diferença material e resposta estrutural quando um espécime é submetido a uniforme carga de tração, deslocamento ou deformação controle durante o teste. Equipamento de teste moderno pode ser programado para aplicar uma

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

taxa pré-determinada de carga (medida por uma célula de carga), de deslocamento (medido por um deslocamento transdutor), ou de deformação (medido por uma gage deformação / clip ou outros Instrumentos), Fig. O.11

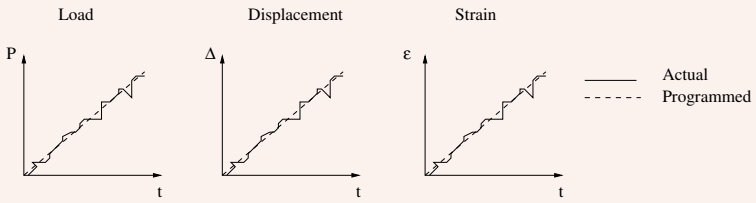


Figura O.11: Controles de teste

Controle de Carga: A cabeça cruzada aplica uma carga crescente independentemente da deformação ou resposta do espécime. Para todos materiais, quando a resistência à tração é alcançada, há uma súbita e abrupta Fracasso quebradiço. A energia deformação acumulada no espécime é De repente liberado uma vez que a carga final do espécime é alcançado, assim A falha súbita pode ser explosiva.

Deslocamento/Controle Stroke: A cabeça cruzada se aplica um aumento deslocamento para o espécime. Para amolecer o material Haverá uma resposta pós-pico com uma diminuição gradual em tensão acompanhando um aumento em deslocamento. Neste caso, há um gradual liberação de energia deformação que é então transferida para a energia da superfície durante Formação de crack.

Controle: é análogo ao controle deslocamento, exceto que O feedback é fornecido por (“’ ’estrategicamente posicionado”) deformação gage ou um clipe gage, ou uma deformação arbitrária do espécime (não necessariamente correspondente à direção de carga). Para realizar Este teste, um clip gage ou uma gage tem que fornecer o feedback sinal para o equipamento de teste, a fim de ajustar o curso.

88 A maioria dos ensaios de fratura de concreto são conduzidos sob controle deformação Gage localizado na boca do crack fornecendo o espécime Resposta.

89 Tanto o derrame quanto os testes controlados requerem um O que normalmente é caro e.. Não estava amplamente disponível até muito recentemente.

O.5.2 Resposta pré/pós-pico do material de aço e concreto

90 Como introdução à fratura de concreto, vamos comparar o pré- e Resposta pós-pico de metais e concreto, como ilustrado em Fig.O.12, ambos obtidos em um teste controlado por deformação de um espécime não rachado ou não entalhado.

1. **Pré-pico**:

   (a) Metal exibe uma resposta elástica linear até o rendimento tensão σ_{yld}, e um aproximadamente deformação de 0.1%.. Depois disso, Devido à deformação

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

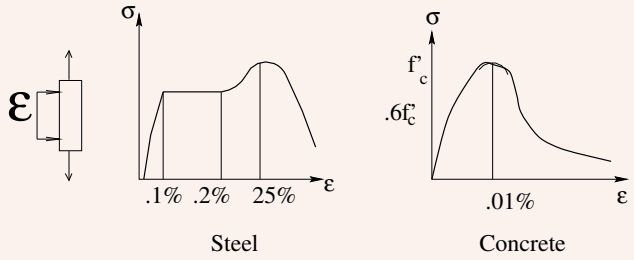


Figura O.12: Tensão-Deformação curvas de metais e concreto

plástica interna com deslocamento, deformação até 25% pode resultar em ser seguido por encruamento.

(b) Concreto exibe uma resposta linear até aproximadamente $0.6 f_t'$.. Subsequentemente, microcracking interno induz uma resposta não linear até um pico tensão f_t' e um correspondente deformação de Aproximadamente 0.01%.

Sob controle de carga só a resposta pré-pico pode ser medida.

2. **Pós-pico**:

(a) A resposta dos metais na zona pós-pico ainda não está bem compreendida. Não só não é de utilidade prática, mas também está em grande parte ofuscada Por amor de Deus.

(b) Resposta concreta na zona pós-pico é muito interessante, como ele pode exibir mais deformações. O ramo descendente da resposta concreta Na Fig. O.12 é uma idealização da resposta material média. Uma descrição mais precisa deve ser responsável pela localização das fissuras induzidas. Assim, longe da fenda localizada há um descarga elástica, e na fenda, já que um deformação não pode ser corretamente definido, uma abertura tensão-crack deslocamento é um modelo mais apropriado. Isso será discutido na seção seguinte.

Respostas pós-pico só podem ser obtidas sob deslocamento ou testes controlados.

91 Em qualquer caso, a área sob o tensão-deformação A curva representa a energia que pode ser absorvida por uma unidade superfície da fratura e, portanto, concreto irá exibir uma resposta mais frágil do que metais.

92 Tendo observado experimentalmente que o *macroscópico* resposta de concreto exibe uma resposta suavizante, e tendo atribuiu a resposta dúctil dos metais ao Deslocamento, fazemos a próxima pergunta, por que o concreto está amolecendo?

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O.6 Localização da deformação

O.6.1 Provas experimentais

93 Se considerarmos um espécime de concreto, carregado uniaxialmente por uma carga de tração F, Podemos gravar o alongamento por um transdutor LVDT (linearmente variável deslocamento) Montado como na configuração 1, 2 ou 3, Fig. 1. O.13.

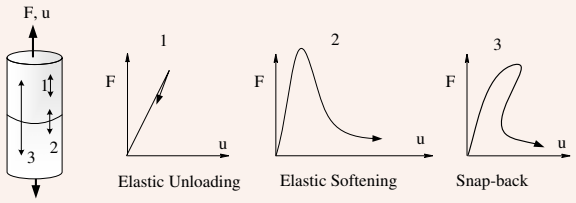


Figura O.13: Capturando localização experimental em espécimes de concreto uniaxialmente carregados

94 Uma vez atingido o pico de carga, e a fissuração iniciada, o transdutor 1 irá gravar descarga elástica, 2 deformação suavizando, e 3 snap-back.

95 Se nós fossemos homogeneizar tomando $\sigma = F/A$, e $\varepsilon = u/L$, Está claro que não podemos fornecer uma definição única do deformação através da fenda. Neste local, o deformação não pode mais tempo ser definido, e em vez disso devemos caracterizar a rachadura por sua Abertura de rachaduras COD Que então será traçada com o tensão (σ-Dói.

96 Esta capacidade de transmitir tensões através de uma fenda sob controle deslocamento é uma característica dos materiais suavizantes.

O.6.1.1 σ- Diagrama de bacalhau, modelo de Hillerborg

97 Da discussão anterior, é claro que o concreto O amolecimento é caracterizado por uma curva de abertura tensão-crack (e não tensão-deformação). A exata characterização do A resposta suavizante deve ser obtida de um teste uniaxial de um espécime não quebrado. No entanto, ele foi encontrado (Li e Liang, 1986; Hordijk, Reinhardt e Cornelissen, 1989) que não são apenas esses testes extremamente sensível, mas resultados drasticamente diferentes podem ser obtidos de geometrias diferentes, tamanhos e máquinas de teste. Assim, o A curva de amolecimento é muitas vezes indiretamente determinada pelo teste entalhado Amostras.

98 No que é provavelmente o trabalho mais referenciado no não linear Fratura da literatura de concreto, Hillerborg (Hillerborg, Modéer e Petersson, 1976) apresentado em 1976 um modelo muito simples e elegante que tem sido anteriormente descrito qualitativamente. Neste modelo, a fissura é composta por duas partes, Fig. O.14:

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

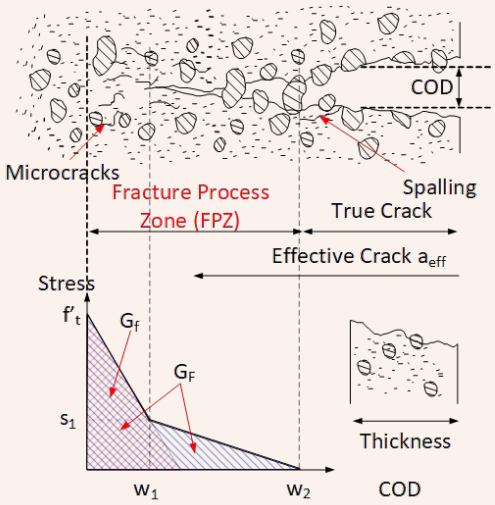


Figura O.14: Modelo de crack fictício de Hillerborg

1. Uma fenda verdadeira ou física através da qual nenhum tensões pode Seja transmitido. Ao longo desta zona temos ambos deslocamento e tensão descontinuidades.
2. Fractura Fictícia ou Zona de Processo de Fratura (FPZ) Antes do anterior, caracterizado por:

   (a) pico tensão em sua ponta igual à resistência à tração de concreto
   (b) diminuindo tensão distribuição de f_t' Na ponta da fictícia crack a zero na ponta do crack físico

   Deve-se notar que ao longo da FPZ, temos deslocamento descontinuidade e tensão continuidade.

[99] Este modelo está entre os mais utilizados em não-lineares mecânica da fratura elemento finito análise, no entanto devido à complexidade computacional, poucos Estruturas de engenharia foram analisadas. Além disso,

1. Há um ponto de inflexão no ramo descendente.

   (a) A primeira parte foi associada com microcracking (desligado) antes do crack tensão-livre
   (b) A segunda parte com a ponte da rachadura por agregados

2. A área sob a curva, chamou de energia da fratura G_F (Não se confunda com G_c Ou liberação de energia crítica É uma medida da energia que precisa ser gasta para Gerar uma superfície unitária de crack.
3. Analisando numerosos dados de teste, BažFormiga e Oh (Bažant, 1984) Achei que..

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

G_F Pode ser previsto (com um coeficiente de variação de cerca de 16%) a partir da seguinte equação empírica:

$$G_F = 0.0214(f_t' + 127) f_t'^2 \frac{d_a}{E_c} \tag{O.13}$$

Onde E_c e.. f_t' estão em libras por polegada quadrada, d_a é o Tamanho agregado em polegadas.

4. G_F:. ou energia de fratura. Para barragens gravitacionais, um valor de 1.35×10^{-3} Kip/in. é recomendado, (Saouma et al., 1991). Note que para as represas de arco, este valor pode ser provavelmente aumentado com base em testes laboratoriais. Além disso, testes laboratoriais podem ser realizados em núcleos recuperados para obter uma melhor indicação de G_F, (Brühwiler, E., 1988).
5. Forma do diagrama de suavização ($\sigma - COD$), e em geral um modelo bi-linear para o amolecimento deformação deve ser usado. Com referência à Fig. O.15, Um tópico de

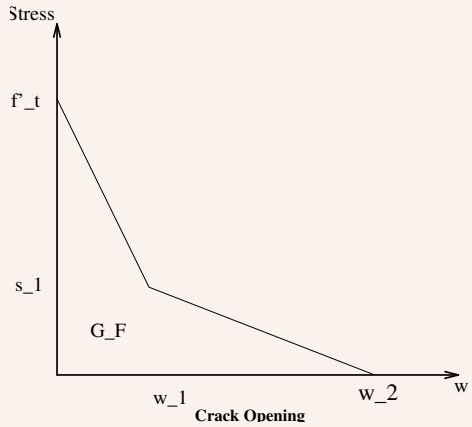


Figura O.15: Concreto deformação amaciando modelos

muita pesquisa tem sido a determinação experimental da energia da fratura G_F, e a forma resultante do diagrama de suavização (Cedolin, Dei Poli e Iori, 1987; Petersson, 1981; Whitman et al., 1988; Jeang e Hawkins, 1985; Gopalaratnam e Shah, 1985; Duda, 1990; Giuriani e Rosati, 1986). A fim de avaliar a relevância do exato valor de G_F e a forma da curva de suavização em simulações numéricas, Três diferentes experimentos de fratura são analisados usando a energia média de fratura relatada. A forma do O diagrama de suavização é assumido como o bilinear proposto em (Whitman et al., 1988), Fig. O.15. Este modelo simples pode ser definido de forma única em termos de resistência à tração f_t', e a energia da fratura G_F. Em (Brühwiler

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

e Whitman, 1990)Descobriu-se que os pontos ideais para o concreto com agregado com tamanho máximo de 1 polegada:

$$s_1 = 0.4 f_t' \tag{O.14}$$

$$w_1 = 0.8 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.15}$$

$$w_2 = 3 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.16}$$

Considerando que para o concreto estrutural, (Whitman et al., 1988), os valores correspondentes são:

$$s_1 = \frac{f_t'}{4} \tag{O.17}$$

$$w_1 = 0.75 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.18}$$

$$w_2 = 5 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.19}$$

Onde f_t' é a resistência à tração uniaxial. Dentro do contexto de uma análise não linear mecânica da fratura, esta tração força Não pode ser tomado como zero, caso contrário não haverá nenhuma zona de processo de fratura. Como f_t' é raramente determinado experimentalmente, supõe-se que seja 9% de f_c', (Mindess e Young, 1981).

6. Em vez de um teste de tensão direta, um teste flexural pode ser realizado sob deformação controle, e a energia da fratura G_F ainda poderia ser determinado da área sob a carga e correspondente curva deslocamento.
7. Para análise dinâmica, as propriedades de fratura do concreto da represa dependem tanto da taxa de carga quanto da taxa Pré-carregamentos. Resultados dos testes (Brühwiler e Whitman, 1990) mostrar que as propriedades da fratura Geralmente aumenta com o aumento da taxa de carga. No entanto, compressão dinâmica pré-carregamento leva a uma redução das propriedades da fratura em ambos quase-estático e Altas taxas de carga.

O.7 Condições de contorno

100 Em geral, condições de contorno pode ser obtido a partir das equações de Euler-Lagrange correspondentes ao governante equação diferencial (conservação do momento ou equilíbrio na mecânica sólida).

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Tabela O.3: Exemplos de condições de contorno em análise estrutural

Problema	Membro Axial Carga distribuída	Membro Flexural Carga distribuída
Equação diferencial	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
B.C. Essencial. $[0, m-1]$	u	w, $\frac{dw}{dx}$
B.C. Natural. $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ ou $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ e.. $\frac{d^3w}{dx^3}$ ou $M = EIw_{,xx}$ e.. $V = EIw_{,xxx}$

101 Para variáveis de campo em que a maior derivada no governo equação diferencial é da ordem $2m$, então nós temos (§47.2.6):

Essencial (ou forçado, ou geométrico) condições de contorno (porque era essencial para a derivação da equação de Euler) se $\eta(a)$ ou $\eta(b)$ =0. Essencial condições de contorno envolve derivadas da ordem zero (a própria variável de campo) através de m-1. Matematicamente, isso corresponde a problemas de valor limite Dirichlet.

Natural (ou estática) se nós deixássemos η para ser arbitrária, então seria necessário usar $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ Em.. $x = a$ ou b.. Natural condições de contorno envolvem derivados de ordem m E mais alto. Matematicamente, isso corresponde a problemas de valor limite Neuman.

Condições de contorno mistas são problemas nos quais condições de contorno essenciais e naturais são especificadas em porções complementares da fronteira (como Γ_u e Γ_t). Matematicamente, correspondem aos chamados problemas de valor de contorno de Robin.

Mesa O.3 fornece exemplos em análise estrutural.

O.8 Diagrama Tonti

102 Para este problema de campo vetorial, os diagramas Tonti correspondentes (Fig. O.16) é mostrado na figura O.17.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

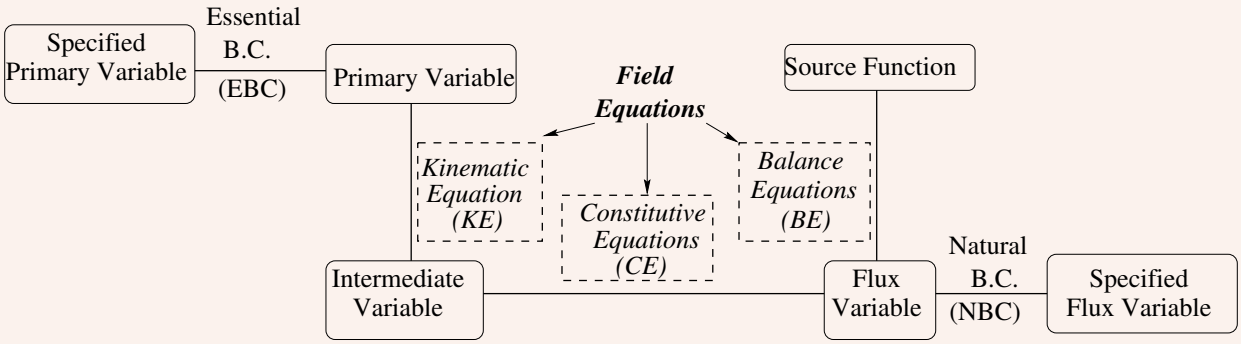


Figura O.16: Componentes do diagrama de Tonti (Felippa, 2000)

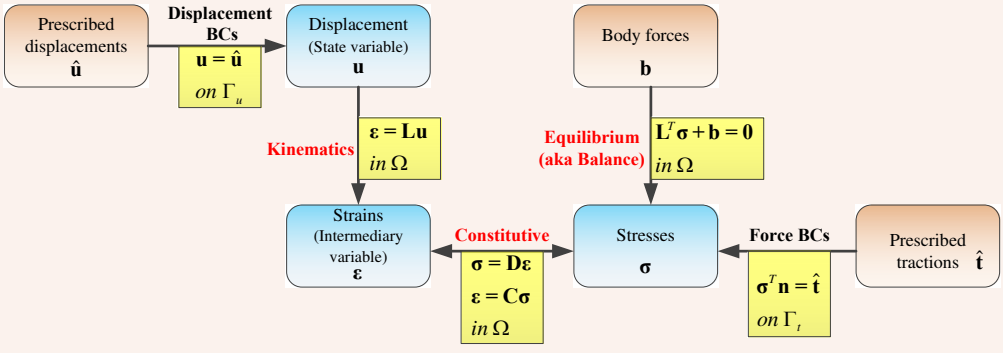


Figura O.17: Diagrama de Tonti para mecânica de corpos deformáveis

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

O.9 Conceito de esforço interno

103 Como nem sempre é fácil realizar uma análise em termos do termo fundamental de tensão e deformação, é conveniente substituí-los por seus valores integrais: *interno* forças e deslocamentos.

104 Nós definimos *Esforços internos* como integrais de tensões. Para pratos, temos Fig. O.18 E os resultados por unidade de largura são dados por

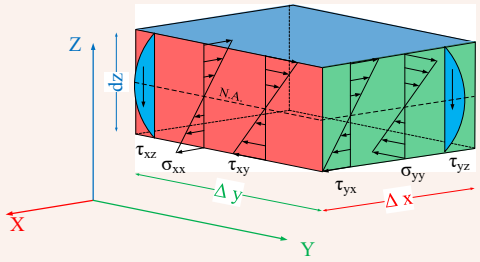


Figura O.18: Esforços internos em termos de tensões

$$\text{Membrane (Axial) Forces} \quad \mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz \quad \rightarrow N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \text{ etc.}$$

$$\text{Bending Moments} \quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz \quad \rightarrow M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \text{ etc.}$$

$$\text{Transverse Shear Forces} \quad \mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz \quad \rightarrow V_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \text{ etc.}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice P

Homenagem a Westergaard

Abstract

Na minha opinião, Westergaard se destaca como talvez o engenheiro mais excepcional do século XX. Sua abordagem, compartilhada por apenas um punhado de figuras, notavelmente Stephen Timoshenko, era estar com um pé firme na engenharia estrutural e o outro em mecânica estrutural, usando mecânica avançada e matemática para resolver problemas de prática imediata importância. É precisamente esta dupla postura, exemplificada anteriormente por Rankine (§6.8.2Isso tem servido como meu próprio ideal profissional.

Que Westergaard contribuiu com duas equações fundamentais - uma na fratura Mecânica *E o outro na represa* Engenharia*, ambos os campos próximos ao meu próprio trabalho - não é portanto mera coincidência.*

Em homenagem a este herói intelectual, dediquei um apêndice deste livro a duas das suas mais icônicas derivações.

O primeiro apresenta uma solução analítica para o campo tensão na ponta de uma fenda, marcando formalmente o nascimento de uma nova disciplina: mecânica da fratura. Eu deliberadamente carrego essa derivação através de seu rigor total, nenhuma tarefa para os fracos de coração, porque até mesmo os engenheiros devem, às vezes, parar para reconhecer a beleza de uma solução matemática colocada ao serviço de um problema profundamente prático.

No segundo, desenvolvido durante sua colaboração com o Bureau de Recuperação sobre o projeto da represa Hoover, Westergaard obteve uma expressão excepcionalmente elegante para as forças hidrodinâmicas induzidas pelo movimento do terremoto em uma face de barragem.

Em ambos os casos, o comando incomparável de Westergaard da mecânica e matemática foi colocado inequivocamente ao serviço da engenharia - transformando teoria abstrata em soluções de valor prático duradouro.

P.1 Campo da ponta de crack tensão . . 3135
P.1.1 Função Airy Tensão 3135
P.1.2 Solução 3137
P.2 Interação da estrutura de fluidos . . 3142

CÓPIA PARA REVISÃO

P.1 Campo da ponta de crack tensão

P.1.1 Função Airy Tensão

1 Para compreender completamente a solução de Westergaard (**west**), primeiro deve-se introduzir as funções Airy tensão expressas através de variáveis complexas. Rastrear a derivação completa do fator de intensidade da ponta de crack tensão, em todo seu rigor, sutilidade e elegância matemática, é se envolver diretamente com a mente de um mestre mecânico. No entanto, este mesmo intelecto também foi o de um engenheiro praticante, capaz de traduzir análise abstrata em soluções concretas para problemas práticos prementes - uma dualidade que se tornará evidente na seção seguinte.

2 Em problemas de elasticidade procuramos uma função em termos das coordenadas espaciais que pode satisfazer tanto o equilíbrio quanto as equações de compatibilidade. Airy mostrou que podemos definir tal função $\Phi(\mathbf{x})$ De tal forma que:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2}. \tag{P.1}$$

Ele pode ser mostrado (por substituição direta destas equações em Eq. O.8) que a equação de equilíbrio é automaticamente satisfeita.

3 Para materiais isotrópicos elásticos lineares, a satisfação da compatibilidade A equação requer ainda mais que Φ Deve ser tal que

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{P.2}$$

Onde ∇^2 é o **Operador Laplaciano**.. Uma solução para a equação de Laplace é referida como um **função harmônica**.

4 Em coordenadas polares

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)$$

5 Assim, a função Airy tensão nos permitirá resolver a elasticidade problemas desde que possamos chegar à escolha certa para Φ Que.. satisfaz o natural condições de contorno (tensões).

Variáveis complexas

6 Como será mostrado no próximo capítulo, podemos usar a função Airy tensão Variáveis reais para determinar o campo tensão em torno de um buraco circular, no entanto nós

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Precisamos estender as funções de Airy tensão a variáveis complexas para Analisar: 1) tensões em torno de um buraco elíptico (Inglis), e tensões na ponta de uma rachadura (Westergaard).

7 Primeiro, definimos o número complexo z como:

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$$

Onde $i = \sqrt{-1}$, x_1 e.. x_2 são as coordenadas cartesianas, e r e.. θ são as coordenadas polares.

8 Nós ainda definimos um **função analítica**, $f(z)$ Um que deriva Depende apenas de.. z.. Aplicando a regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \tag{P.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \frac{\partial z}{\partial x_2} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x_2} = if'(z) \tag{P.4}$$

9 If $f(z) = \alpha + i\beta$ Onde α e.. β são funções reais de x_1 e.. x_2, e $f(z)$ é analítica, então da Eq. P.3 e.. P.4 Nós temos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_1} = f'(z), \\ \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_2} = if'(z) \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{i\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)}_{i\ 1^{st}\ \text{Equation}} = \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_2}}_{2^{nd}\ \text{Equation}}$$

10 Equacionar as partes reais e imaginárias produz o **Cauchy-Riemann** Equações:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \beta}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}$$

11 Se diferenciarmos essas duas equações, primeiro com relação a x_1, então com respeito a x_2, e depois somamos eles nós obtemos

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \nabla^2(\alpha) = 0$$

Que é a equação de Laplace.

12 Da mesma forma, podemos ter:

$$\nabla^2(\beta) = 0$$

Por isso, tanto o real (αE a parte imagináriaβ) de um analítico A função fornecerá separadamente a solução para a equação de Laplace, e α e.. β são **conjugar funções harmônicas**.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Funções do complexo Airy

13 Pode-se mostrar que qualquer função tensão pode ser expressa como

$$\Phi = \text{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)] \tag{P.5}$$

desde que ambos $\psi(z)$ (psi) e $\chi(z)$ (chi) são harmônicos (i.e $\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0$) funções analíticas de x_1 e.. x_2. ψ e.. χ são frequentemente referidos como Kolonov-Muskhelishvili Potenciais complexos.

14 If $f(z) = \alpha + i\beta$ e os dois α e.. β são reais, Então sua função conjugada é definida como:

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$$

15 Note que as funções conjugadas não devem ser confundidas com o conjugar funções harmônicas. Por isso podemos reescrever o Eq. P.5 como:

$$\Phi = \text{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

16 Substituindo o Eq. P.1.1 Eq. P.1, Podemos determinar o tensões

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\text{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned} \tag{P.6}$$

e pela separação de partes reais e imaginárias podemos então resolver para $\sigma_{22} - \sigma_{11}$ & σ_{12}.

17 Deslocamentos podem ser obtidos da mesma forma.

P.1.2 Solução

18 Considerando que.. Kirsch, 1898 desenvolveu uma expressão para a concentração de estreitez em torno de um buraco circular, e mais tarde Inglis, 1913 Derivou a contrapartida para buraco elíptico, foi **west** que derivaram uma expressão do campo tensão na ponta de uma rachadura afiada.

19 Vamos considerar um prato infinito submetido ao uniforme Biaxial tensão σ_0 com uma fenda central de comprimento $2a$, Fig. P.1. Da solução de Inglis, sabemos que haveria um teoricamente infinito tensão na ponta da fenda, no entanto, nem a natureza da singularidade Nem o campo tensão pode ser derivado dele.

20 Solução de Westergaard, (**west**) Começa assumindo que.. $\Phi(z)$ como uma função harmônica (Assim satisfazendo a equação de Laplace $\nabla^2(\Phi) = 0$). Denotando por $\phi'(z)$ e.. $\phi''(z)$ o primeiro e o segundo derivados, respectivamente, e $\bar{\phi}(z)$ e.. $\bar{\bar{\phi}}(z)$ sua primeira e segunda integrais, respectivamente da função $\phi(z)$.

21 Westergaard postulou que

$$\Phi = \text{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + x_2\text{Im}\bar{\phi}(z)$$

É uma solução para o problema do crack[1]. $\phi(z)$ Supõe-se que seja analítico.

[1] Note que não devemos confundir a função Airy tensão Φ com o função complexa $\phi(z)$.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

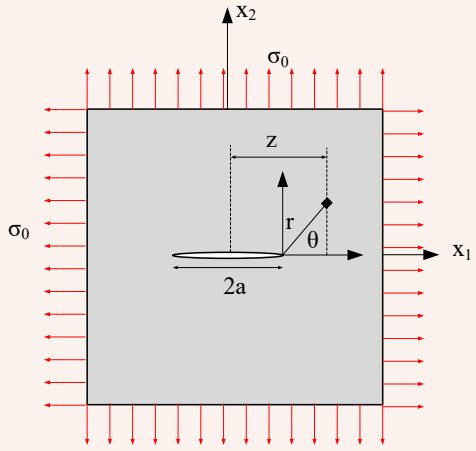


Figura P.1: Quebre em um prato infinito

22 Vamos verificar isso Φ Satisfaz a equação biharmônica. Pegando os primeiros derivados, e lembrando Isso $\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = f'(z)$Nós temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\text{Re}\,\bar{\bar{\phi}}\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\text{Im}\bar{\phi}(z) + \text{Im}\bar{\phi}(z) \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{0} \right] \tag{P.7}$$

$$= \text{Re}\bar{\phi}(z) + x_2 \text{Im}\phi(z) \tag{P.8}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\text{Re}\bar{\phi}(z)\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\text{Im}\phi(z) + \text{Im}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right] \tag{P.9}$$

$$= \text{Re}\phi(z) + x_2 \text{Im}\phi'(z) \tag{P.10}$$

Da mesma forma, diferenciando-se com respeito a x_2, e lembrando De Eq. P.4 Isso $\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = i f'(z)$Nós obtemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\text{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + [x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\text{Im}\bar{\phi}(z)\right) + \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\text{Im}\bar{\phi}(z)] \tag{P.11}$$

$$= -\text{Im}\bar{\phi}(z) + x_2 \text{Re}\phi(z) + \text{Im}\bar{\phi}(z) \tag{P.12}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\text{Re}\phi(z) + \text{Re}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_2} \tag{P.13}$$

$$= -x_2 \text{Im}\phi'(z) + \text{Re}\phi(z) \tag{P.14}$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \text{Re}\phi'(z) \tag{P.15}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Tendo expressões derivadas para o tensões e o segundo derivado parcial de Φ, substituindo-se em Eq. P.2, pode-se mostrar que a equação biharmônica está satisfeita, assim Φ É uma solução válida.

[23] Se quisermos nos convencer de que o tensões realmente Satisfazer as equações de equilíbrio e compatibilidade (o que eles fazem em virtude de Φ satisfazendo a equação bi-harmônica), nós Tenho do Eq. O.8 Em 2D:

1. Equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{P.16}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \tag{P.17}$$

   Vamos considerar a primeira equação

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)] \\
&= \mathrm{Re}\phi'(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi''(z) \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}[-x_2 \mathrm{Re}\phi'(z)] \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi''(z)
\end{aligned}$$

   Se substituirmos essas duas equações em Eq. P.16 Então nós obtemos zero. Da mesma forma, pode-se mostrar que Eq. P.17 Está satisfeito.

2. Compatibilidade: No avião deformação, deslocamentos são dados por

$$\begin{aligned}
2\mu u_1 &= (1-2\nu)\mathrm{Re}\,\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \\
2\mu u_2 &= 2(1-\nu)\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Re}\,\phi(z)
\end{aligned}$$

   e são obtidos pela integração do deformações, que por sua vez são obtidos do tensões. Como um cheque nós calculamos

$$\begin{aligned}
2\mu\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
&= (1-2\nu)\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= (1-\nu)\underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{11}} - \nu \underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{22}} \\
&= (1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}
\end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Lembrando que

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Então..

$$E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$$

isso mostra que $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} - \sigma_{33})$ e, para deformação plana, $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ e $E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$

24 Até agora Φ foi definido independentemente do problema, e nós simplesmente determinaram o tensões em termos dele, e verificaram que a bi-harmônica A equação estava satisfeita.

25 Em seguida, temos que determinar ϕ De tal forma que.. Os condições de contorno estão satisfeitos. Por razões que se tornarão aparentes mais tarde, nós generalizar nosso problema para um em que temos um estado biaxial de tensão aplicado na placa. Daí:

1. Ao longo da fenda: Em.. $x_2 = 0$ e.. $-a < x_1 < a$ Nós temos $\sigma_{22} = 0$ (crack livre de atração).
2. No infinito: Em.. $x_2 = \pm\infty$, $\sigma_{22} = \sigma_0$

Nós anotamos da Eq. P.10 Isso em.. $x_2 = 0$, σ_{22} reduz para

$$(\sigma_{22})_{x_2=0} = \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.18}$$

26 Além disso, esperamos que $\sigma_{22} \to \sigma_0$ quando $x_1 \to \infty$ e que σ_{22} seja maior que σ_0 quando $\mid x_1 - a \mid > \varepsilon$ (devido à singularidade antecipada prevista Por Inglis), assim uma possível escolha para σ_{22} Seriam $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{1-\frac{a}{x_1}}$, Para simetria, isto é estendido para $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{\left(1-\frac{a^2}{x_1^2}\right)}$.

No entanto, nós também precisamos ter $\sigma_{22} = 0$ Quando $x_2 = 0$ e.. $-a < x_1 < a$, assim a função $\phi(z)$ deve tornar-se imaginário Ao longo da fenda, e

$$\sigma_{22} = \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}}\right)$$

27 Assim vindo da Eq. P.18 Nós temos (note a transição de x_1 para z).

$$\phi(z) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

28 Se fizermos uma mudança de variável e definirmos $\eta = z - a = re^{i\theta}$ E supondo que $\frac{\eta}{a} \ll 1$, e lembrando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, Então, o primeiro termo de Eq. P.10 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\phi(z) &= \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\eta^2+2a\eta}{\eta^2+a^2+2a\eta}}} \approx \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{2a\eta}{a^2}}} \\ &\approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2\eta}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2re^{i\theta}}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}e^{-i\frac{\theta}{2}} \approx \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

29 Lembrando que $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ E isso.. $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, nós substituímos $x_2 = r\sin\theta$ no segundo mandato

$$x_2\mathrm{Im}\phi' = r\sin\theta\mathrm{Im}\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\frac{a}{2(re^{i\theta})^3}} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$$

30 Combinando as equações acima, com Eq. P.10, P.14, e.. P.15 Nós conseguimos

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots \\ \sigma_{11} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots \\ \sigma_{12} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{3\theta}{2}+\cdots \end{aligned}$$

31 Lembre-se que este era o caso biaxial, o caso uniaxial pode ser reproduzido por Superpondo uma pressão na x_1 direção igual a $-\sigma_0$, no entanto Isso não deve afetar o campo tensão perto da ponta de crack.

32 Usando uma abordagem semelhante, podemos derivar expressões para o campo tensão em torno de uma ponta de crack em um prato submetido a Campo distante cisalhamento tensões (modo II como definido mais tarde) usando A seguinte expressão de ϕ

$$\Phi_{II}(z) = -x_2\mathrm{Re}\bar{\phi}_{II}(z) \Rightarrow \phi_{II} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

e para o mesmo crack mas submetido a antiplano cisalhamento tensões (modo III)

$$\Phi'_{III}(z) = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

33 Irwin[2] (Irwin, 1957) introduziu o conceito de *Fator de intensidade* definido como:

$$\left\{ \begin{array}{c} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{array} \right\} = \lim_{r \to 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\}$$

Onde σ_{ij} são a ponta de crack perto tensões, e K_i estão associados com três cinemáticos independentes movimentos das superfícies superiores e inferiores de fissura com respeito a Um ao outro, como mostrado em Fig. P.2

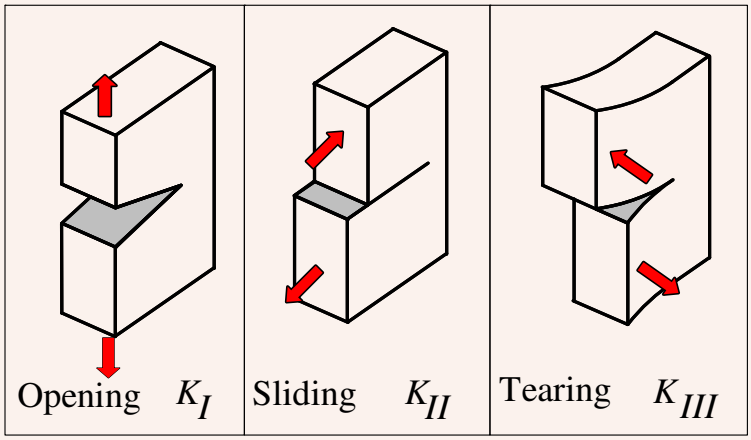


Figura P.2: Modos independentes de crack Deslocamentos

P.2 Interação da estrutura de fluidos

Da tese de doutorado "Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR" por Mahdavi, 2023.

Em um papel de referência, Westergaard, 1933 desenvolveu um modelo para quantificar as forças hidrodinâmicas atuando em uma barragem usando uma massa adicionada (ou grudada no contexto de elemento finito). Este modelo será usado na análise atual.

Apesar de sua ampla adoção e do melhor conhecimento do autor, o modelo nunca foi descrito completamente. Em vez disso, suas equações finais são apresentadas e adotadas.

[2]Irwin foi perguntado pelo Escritório de Pesquisa Naval (ONR) para investigar o fracasso das naves da Liberty durante a Segunda Guerra Mundial, assim como Trinta anos antes Inglis investigava a falha de navios britânicos.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Esta investigação de Westergaard é muito interessante em vários pontos. Em primeiro lugar, ela fornece uma solução para um problema de engenharia altamente prático, firmemente enraizado nos fundamentos da mecânica. Segundo, apesar do rigor associado à mecânica, Westergaard não é dogmático; Ele sabe como relaxar certas suposições quando necessário para chegar a uma solução.

Modelo teórico

Enquanto um salto para §P.2 para calcular a massa adicionada em conta para as forças hidrodinâmicas, entender sua derivação é importante por ser uma fusão mais elegante de matemática, mecânica e engenharia.

Por isso, esta seção vai rever em grandes detalhes o papel de referência por (Westergaard, 1933).

Quando as pressões de água são conhecidas, sua influência sobre o tensões pode ser calculada pelos métodos que se aplicam a cargas estáticas. O problema que precisa de atenção especial, portanto, é a mudança das pressões da água durante o terremoto.

Notação

A seguinte notação é adotada:

x, y, z	coordenadas retangulares x e.. y como mostrado na figura. P.3 ; O eixo de x Está junto A superfície não perturbada da água, é dirigida para o rio, e é perpendicular para o avião em frente à represa. O eixo de y é vertical para baixo.
t	Tempo.
h	Profundidade do reservatório.
g	aceleração devido à gravidade. (Eq. P.26)
w	Peso de água por unidade de volume, (Eq. P.26)
k	Módulo em massa de água (pressão dividida pela redução do volume) por unidade de volume). (Eq. P.26)
ξ e.. η	deslocamentos de uma partícula de água nas direções de x e.. y.. respectivamente.
ξ_0	valor de ξ na face da represa.
σ	tensão na água devido à ação dinamie, tensão positiva sa (para ser combinada com A pressão hidrostática existe antes.
α	razão que mede a intensidade do terremoto = máxima horizontal componente da aceleração da fundação dividido por g.
T	período de vibrações horizontais da fundação.
r, v	amplitude e velocidade máxima das vibrações horizontais da fundação.
v_n	velocidade do som na água.
i	comprimento das ondas de expansão na água quando o período é T.
c_n	Valor definido pelas equações P.33, e.. P.37 (com $n = 1, 3, 5 \ldots$).
p	pressão máxima da água na represa na profundidade, y, devido à ação dinâmica.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

p_0 valor de p no fundo ($y = h$).
Q horizontal cisalhamento produzido em uma represa de gravidade reta na profundidade, y, pel
Q_0 valor de Q no fundo ($y = h$).
M momento fletor produzido em uma represa de gravidade reta na profundidade, y.. Pelas press
M_s valor de M no fundo ($y = h$).
o, K Coeficientes em fórmulas aproximadas (Eq. P.45 para P.51).
b, b' Dimensões mostradas na figura. P.5

Equações em Movimento da Água

Como os movimentos envolvidos são pequenas, equações relativamente simples (som em líquido) podem ser usadas. Estas equações podem ser interpretadas em termos da teoria da elasticidade dos sólidos como equações de elasticidade sem cisalhamento das estreitezas. As forças agindo em um elemento de volume, $dxdydz$, são expressos em termos de tensão, σ, que deve ser sobreposto à pressão hidrostática existente antes da perturbação.

Usando o princípio de D'Alembert para o equilíbrio dinâmico para um fluido newtoniano (isto é, Incompressível) (Eq. O.3.4Nós temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{P.20}$$

Este é o equação de movimento na direção de x e.. y.. Nós não consideramos movimento na z (vertical) direção, uma vez que o movimento é paralelo ao xy-Avião. O deformação é dado por

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Pela água

$$p = \frac{1}{2}\sigma_{ii} = k\varepsilon_{ii}$$

Assim, o tensão pode ser reescrito como

$$\sigma = k\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{P.21}$$

A moção é assim governada pelas Equações P.19, P.20 e.. P.21.. Uma comparação com as equações gerais da hidrodinâmica para fluidos compressíveis mostra que essas equações se aplicam apenas quando ξ e.. η são pequenos, e quando, além disso, as proporções dos produtos, $\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ e.. $\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ para $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$, são insignificantes.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nas soluções dadas em Equações P.31, P.32, e P.35, estas proporções serão encontradas como sendo da ordem da amplitude dos movimentos dividido pela profundidade do reservatório.

Estudo preliminar, assumindo apenas movimento horizontal

Embora a água que atua na represa possa ter uma vertical deslocamento, este estudo preliminar ignorará esse movimento vertical. No entanto, ele vai lançar alguma luz sobre o problema. Com $\eta = 0$, Eq. P.19 e.. P.21 Dará:

$$k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.22}$$

Esta é a equação da onda (Eq. 35.16) qual solução geral é da forma

$$G(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_s}\right)$$

Como uma suposição simplificada, consideramos que durante o terremoto a represa se move em um simples movimento harmônico com período, T, e uma aceleração máxima, αg, ocorrendo quando $t = 0, T, 2T$, etc. A moção será assim dada por

$$\xi_0 = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^4}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{P.23}$$

Com $\xi_{x=0} = \xi_0$Equação P.22 Será satisfeito por

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\left[\beta\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + (1-\beta)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v_s}\right)\right] \tag{P.24}$$

Onde β é uma constante, e,

$$v_s = \sqrt{\frac{gk}{w}} \tag{P.25}$$

v_s, é a velocidade da onda na água; isto é, a velocidade do som (por causa da baixa frequência, estas ondas, claro, não seriam audíveis como o som). Usando

$$\begin{aligned} k &= 300,000\ \text{lbs/in}^2 = 21,600\text{ton/ft}^2 \\ g &= 32.2\ \text{ft/sec}^2 \\ w &= 0.03125\ \text{ton/ft}^3 \end{aligned} \tag{P.26}$$

Dê $v_s = 4,718$ ft/sec.

O termo em Equação P.24 contendo o fator, β, em frente ao cosseno representa ondas que se afastam da represa, enquanto aquela contendo o fator, $1-\beta$, representa ondas movendo-se em direção à represa.

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Equações P.24 e.. P.21 Dê-me $x = 0$ (isto é, na face up-stream da represa):

$$\sigma = (1 - 2\beta)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw}\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{P.27}$$

Quando $\beta > 1/2$, as ondas que se afastam (da represa) predominam sobre aqueles que se movem em direção a ela.

Equação P.27 mostra que a pressão máxima na represa, quer dizer, $(-\sigma)_{max}$ Ocorre às vezes $t = \frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}, \ldots\ldots$, e é igual a,

$$p = (2\beta - 1)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw} \tag{P.28}$$

Deve-se notar que a maior aceleração da barragem, e consequentemente, as maiores forças de inércia devido à massa móvel da represa, ocorrem quando $t = 0, T, 2T, \ldots$ O tensões na represa devido às pressões, p, e as forças de inércia, portanto, teriam que ser combinadas na forma de duas correntes alternadas com uma diferença de fase de um quarto do período.

Da Equação P.23, a velocidade máxima da represa é,

$$v = \frac{\alpha g T}{2\pi} \tag{P.29}$$

Assim, substituindo a Equação P.25 P.29em P.28 Obtemos o valor da pressão

$$p = (2\beta - 1)\frac{v}{v_s}k \tag{P.30}$$

Com $\beta = 1$, isto é, quando as ondas se afastam da represa apenas, Equação P.28 (ou, alternativamente Equação P.30), com as constantes numéricas dadas em Equações P.26, e com $\alpha = 0.1$ e.. $T = \frac{4}{3}$ Seg., dá $p = 3.13$ toneladas/pé^2.. Mas como a água pode escapar verticalmente as pressões são muito menores, e não se distribuem uniformemente pela profundidade do reservatório. Uma solução correta deve produzir pressão zero na água no topo.

Solução Considerando Movimentos Horizontais e Verticais da Água

Se permitirmos que a água também se mova verticalmente, ainda teremos que satisfazer as Equações P.19 P.20 e.. P.21 mas submetido ao seguinte condições de contorno:

1. $\sigma = 0$, em $y = 0$;
2. $\eta = 0$, em $y = h$;
3. $\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}$, em $x = 0$;
4. σ Converge para 0 quando x torna-se grande.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Desde a primeira condição, para pequenos valores de η Não faz nenhuma diferença apreciável se alguém especifica $\sigma = 0$ na superfície não perturbada ou perturbada.

Uma solução que satisfaz as três equações e o condição de contorno é uma baseada na série Fourrier

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.31}$$

$$\eta = \frac{\alpha q T^2}{\tau^3} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,0_n..}^{n} \frac{1}{n c_n} e^{-q_n} \cos\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.32}$$

Onde

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} \tag{P.33}$$

e..

$$q_n = \frac{n\pi c_n x}{2h}$$

Equação P.33 Dá,

$$\frac{1}{c_n} - c_n = \frac{16 w h^2}{n^2 c_n g k T^2} \tag{P.34}$$

Então Equações P.21, P.31, P.32, e P.34 Dará

$$\sigma = -\frac{8\alpha w h}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.35}$$

Podemos facilmente verificar que Equações P.31, P.32, e P.35 Satisfazer as Equações P.19 e.. P.20 em todos os pontos, diferenciando-se com respeito a t, x, e y.. Equação P.21 Está satisfeito porque foi usado na Equação derivada P.35 De Equações P.31 e.. P.32.. Além disso, inspeção das expressões para η e.. σ Mostrem que as condições 1, 2 e 4 estão satisfeitas. Para verificar essa condição 3, para $x = 0$, está satisfeito, temos que comparar a Equação P.31 para $x = 0$ com a expressão para $\frac{\pi}{4}$, em termos de uma série Fourier quando $0 < u < \pi$,

$$\frac{\pi}{4} = \sin u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{5}\sin 5u + \ldots$$

Na presente aplicação, $u = \frac{\pi y}{2h}$.

Assim, todas as condições especificadas estão satisfeitas. A aplicabilidade das equações depende, no entanto, de uma condição adicional: o deslocamentos definido pela solução, bem como seus derivados em relação x e.. y Deve ser pequeno. Assim, devemos considerar as possibilidades de grandes deslocamentos. Uma possibilidade é identificada com ressonância na água; outro será investigado determinando a forma da onda formada pela superfície da água e os movimentos verticais ao longo da face up-stream da represa.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Em seu jornal, Westergaard, 1933 aborda a possibilidade de ressonância na água e conclui que, uma vez que as principais vibrações no terremoto não são susceptíveis de ter um período Menos de 1 segundo, esta forma de ressonância pode ser ignorada.

Pressões na represa

Da Equação P.35, a pressão máxima da água ($p = -\sigma$ para $x = 0$), ocorre quando $t = 0, T, 2T, \ldots$. Assim,

$$p = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \sin \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.36}$$

onde, como antes, de acordo com a Equação P.35, e com as constantes numéricas dadas em Equações P.26:

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.71889}{n^2} \left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{ T ft}} \right)^2}. \tag{P.37}$$

O maior valor da pressão, p, ocorre no fundo do reservatório ($y = h$), e é,

$$p_0 = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 c_n} \tag{P.38}$$

Fig. P.3 mostra a pressão p Perfil de distribuição. Da Equação P.38, a derivada, $\frac{dp}{dy}$ é infinito

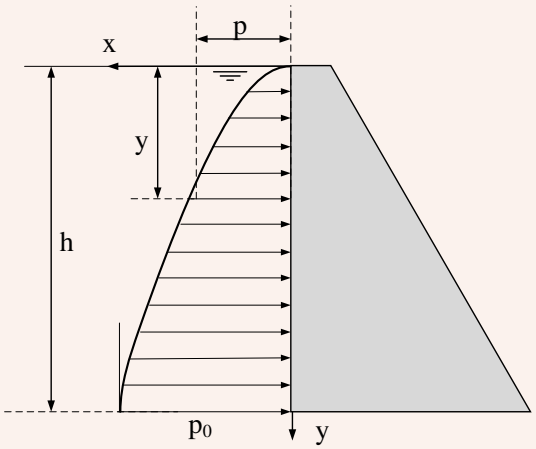


Figura P.3: Pressões na represa devido à ação dinâmica da água (Westergaard, 1933)

quando $y = 0$E zero quando $y = h$; Isto é, a curva para p tem uma tangente horizontal no topo e uma tangenta vertical no fundo.

Itens 1 e 2 da Tabela P.1 contém valores numéricos da relação, $\frac{p_0}{\alpha h}$E de.. p_0, calculado a partir de Equações P.37 e.. P.38.. A proporção, $\frac{p_0}{\alpha h}$, varia apenas lentamente com h.. Por..

CÓPIA PARA REVISÃO

Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$h = 600$ ft, $T = \frac{4}{3}$ Seg. (e para $h = 200$ ft, $T = \frac{4}{9}$ Seg.), a pressão na profundidade, $y = \frac{h}{2}$, foi encontrado para ser $p = 0.814 p_0$.

Tabela P.1: Resultados numéricos correspondentes ao período, $T = \frac{4}{3}$ Segundo

Item	Profundidade do reservatório, h	Ft.	Pequeno	200	600	800
1	Coeficiente de pressão, $\frac{p_0}{sh}$	Ton/ft^3	0.023202	0.023407	0.025254	0,027257
2	Pressão no fundo, p_0, quando $a = 0,1$	Ton/ft^2	⋯	0.468	1.515	2.181
3	Coeficiente de cisalhamento,	Ton/ft^3	0.016961	0.017094	0.018286	0.019576
4	Cisalhamento no fundo, Q_0, quando $\alpha = 0.1$	Ton/ft	...	68.4	658.3	1253
5	Coeficiente de momento, $\frac{M_0}{\alpha h^3}$	Ton/ft^3	0.0068089	0.0068576	0.0072947	0.0077666
6	Momento no fundo, M_0, wben $a = 0,1$	ft.-ton/ft	...	5486	157600	397600
7	$C = \frac{15 M_0}{4\alpha m^2}$	Ton/ft^3	0.025533	0.025716	0.027355	0.029125
8	$K = C\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{T ft.}}\right)^2}$	Ton/ft^3	0.025533	0.025507	0.025282	0.025068
	Coeficientes aproximados da Eq. P.45, P.46, P.47, P.51, e P.53					
9	$\frac{p_0}{a^h}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0255	0.0257	0.0276	0.0296
10	$\frac{Q_0}{ah^2}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0170	0.0171	0.0184	0.0198
11	$\frac{M_0}{ah^3}$	$\frac{\text{ton}}{f^3}$	0.00680	0.00686	0.00736	0.00790

A aceleração horizontal máxima é igual a αg.. Quando T é variado, os coeficientes declarados permanecem constantes se h é mudado pela mesma proporção; Por exemplo, os coeficientes indicados para $h = 800$ft., $T = \frac{4}{3}$ Seg., aplique-se aos casos, $h = 600$ft., $T = 1$ Seg., e $h = 200$ft., $T = \frac{1}{3}$ Seg.; Os coeficientes indicados para $h = 200$ft, $T = \frac{4}{3}$ Seg., aplique-se ao caso, $h = 600$ft, $T = 4$sec.

Cisalhamento e Momentos

Pode ser particularmente útil expressar as forças de cisalhamento horizontal e o momentos fletores produzido pelas cargas, p, em várias seções horizontais da barragem atua como um cantilever (dama de gravidade). As tesouras estão declaradas como força por unidade de largura do cantilever, por exemplo, em toneladas por pé, e os momentos são declarados como momento por unidade da largura, por ex., em pés-tons por pé (ou simplesmente em toneladas). A tesoura, Q, na profundidade, y, e Q_0 Na profundidade, h, e os momentos, M, na profundidade, y, e M_0, na profundidade, h, são obtidos de p Em Eq. P.36 pela integração

$$Q = \int_0^y p\,dy; \quad Q_0 = \int_0^h p\,dy; \quad M = \int_0^y Q\,dy; \quad M_0 = \int_0^h Q\,dy$$

Definindo

$$q = \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \tag{P.39}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Nós obtemos:

$$Q = \frac{16\alpha w h}{\pi^3}\left(q - \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n}\cos\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.40}$$

$$Q_0 = \frac{16}{\pi^3}\alpha v h^2 q \tag{P.41}$$

$$M = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2}\frac{y}{h} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^4 c_n}\sin\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.42}$$

$$M_0 = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}}}{n^4 c_n}\right) \tag{P.43}$$

$$\tag{P.44}$$

Valores numéricos das proporções, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$ e.. $\frac{M_0}{\alpha h^3}$E de.. Q_0 e.. M_{00} Computado a partir de Equações P.39, P.41, e P.43, também são dadas na tabela P.1 (Itens, 3, 4, 5 e 6).

Derivação de Fórmulas aproximadas

Computações podem ser simplificadas substituindo o diagrama de pressões na Fig. P.3 Por um quadrante de uma elipse (ver Equação) P.54 Derivado abaixo); a elipse se torna um círculo quando atraído para alguma escala particular de p.. Uma representação aproximada mais satisfatória é obtida, no entanto, substituindo a curva na Fig. P.3 por uma parábola com eixo vertical, como mostrado na figura. P.4Mesmo que essa parábola tenha uma tangente inclinada no fundo. A parábola leva às seguintes fórmulas simples, nas quais, C é

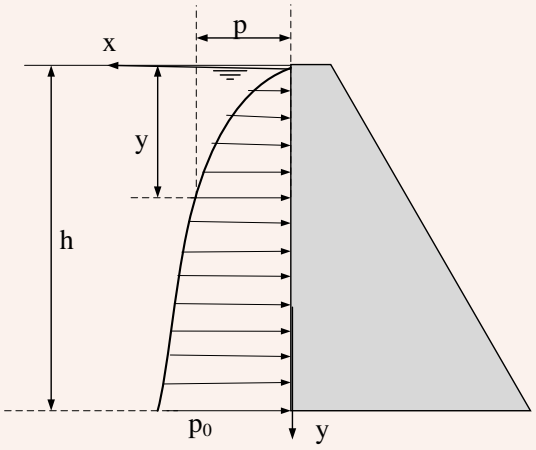


Figura P.4: Distribuição aproximada de pressões (Westergaard, 1933)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

um coeficiente dependendo da proporção de h para T:

$$p = C\alpha\sqrt{hy}; \qquad p_0 = C\alpha h \tag{P.45}$$

$$Q = \frac{2}{3}C\alpha y\sqrt{hy}; \qquad Q_0 = \frac{2}{3}C\alpha h^2 \tag{P.46}$$

$$M = \frac{4}{15}C_{\alpha y^2}\sqrt{hy}; \qquad M_0 = \frac{4}{15}C_\alpha h^2 \tag{P.47}$$

O coeficiente, C, pode ser determinado de modo que p_0 Terão o valor calculado da Equação P.38, mas se obtém uma melhor representação do diagrama de pressões como um todo, determinando C para que o momento, M_0, terá o valor calculado da Equação P.43.. Em termos de um conhecido M_0, se encontra então,

$$C = \frac{15M_0}{4\alpha h^2}$$

Mesa P.1 (Item 7) mostra alguns valores numéricos de C.. Nota-se que a dimensão de C é força por unidade de volume; C multiplicado por ah Dá a pressão como força por unidade de área.

O coeficiente, C, varia lentamente dentro do alcance considerado. Para estimativas rápidas pode-se muito bem assumir algum valor constante de C; Por exemplo, com $T \geq \frac{4}{3}$ Seg:

$$h < 310 \text{ ft} \qquad C = 0.026\frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.48}$$

$$310 \text{ ft} < h < 540 \text{ ft} \qquad C = 0.027\frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.49}$$

$$540 \text{ ft} < h < 680 \text{ ft} \qquad C = 0.028\frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.50}$$

Esses são valores discretos de C.. Seria melhor ter uma função contínua para expressar C que se aplicará aproximadamente dentro de todo o alcance. A principal fonte de variação do C é a constante, c_n, definido por Equação P.37 com $n = 1$; c_1 aparece no denominador do primeiro termo de cada uma das somas em Equações P.39 e.. P.43.. É razoável, portanto, experimentar uma fórmula aproximada do tipo, $C = \frac{K}{c_1}$, em que, K é uma constante. A fórmula seria

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}$$

Os valores de K mostrados na Tabela 2 (Item 8) foram computados a partir desta fórmula usando os valores de C No item 7. A inspeção desses resultados mostra que se pode adotar

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

o valor, $K = 0.0255$ Ton-ft^{-3}.. Conclui-se que o coeficiente, C, em Equações P.45, P.46, e P.47, é satisfatoriamente dada pela fórmula

$$C = \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000\text{T}}\right)^2}} \tag{P.51}$$

Resultando fórmula aproximada para as pressões de água

A seguinte fórmula aproximada para as pressões máximas de água, a ser adicionada às pressões de hidrostatio existentes antes do terremoto, representa a principal conclusão deste estudo; É obtida diretamente das Equações P.45 e.. P.51:

$$p = C\alpha\sqrt{hy} \tag{P.52}$$

$$= \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}\alpha\sqrt{hy} \tag{P.53}$$

Para cálculos rápidos, no entanto, Equações P.45, P.48, P.49, e P.50 Pode ser usado. Valores dos coeficientes, $\frac{p_0}{\alpha h}$, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$, e $\frac{M_0}{\alpha h^2}$, obtido pelo uso da Equação P.53, são declarados como itens 9, 10 e 11 na tabela 2. Uma comparação com os itens 1,3 e 5, respectivamente, mostra que a aproximação é satisfatória.

Usando um quadrante de uma elipse (como sugerido acima) em vez da parábola para representar as pressões, obtém-se a seguinte fórmula aproximada por um processo semelhante ao que leva à Equação P.53:

$$p = \frac{0.0204 \text{ ton ft}^{-3}\alpha\sqrt{y(2h - y)}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}} \tag{P.54}$$

Esta fórmula dá exatamente os mesmos valores de M_0 como Equação P.53, mas dá valores muito pequenos de p_0 e da força total, Q_0.. Equação P.53 dá valores muito grandes de p_0 e.. Q_0E é preferível.

Nota-se que as pressões, p, ocorrer quando $t = 0, T, 2T$, etc., isto é, (ver Condição (3)), quando a represa (durante a vibração) está na posição extrema abaixo do fluxo. O tensões devido a essas pressões de água, portanto, deve ser adicionado ao máximo tensões devido às acelerações da massa da própria represa.

Quando, durante a vibração, a represa está na posição extrema acima do fluxo, as pressões, p, são invertidos e se tornam tensões. Essas tensões, como as pressões na posição extrema abaixo do fluxo, devem ser combinadas com as pressões hidrostáticas existentes antes. A inspeção dos valores numéricos na Tabela 2 mostra que quando a pressão da atmosfera é incluída, não há perspectiva do resultado tensão na água se tornando uma tensão ou uma compressão muito pequena.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Aplicabilidade de fórmulas para outros casos que não os assumidos

As fórmulas foram derivadas sob a suposição de que não há transbordamento. Em caso de transbordamento sobre um vertedouro é sugerido que Equação P.53 ser usado com as profundezas, h e.. y, medido a partir da superfície plana do reservatório em alguma distância atrás da represa. O diagrama parabólico de pressões é então usado como antes, apenas a parte superior é cortada.

Enquanto as fórmulas foram derivadas sob o pressuposto de que a face up-stream é um plano vertical, eles fornecerão uma indicação das pressões que podem ser esperados em outros casos, por exemplo, na facilidade de represas arco.

Massa adicionada

Para visualizar a ação dinâmica da água na barragem, pode-se pensar em um certo corpo de água como se movendo com a represa enquanto o restante do reservatório permanece inativo. Para este fim, o corpo de água que se move com a represa pode ser imaginado como congelado em camadas horizontais de massa adicionada (gelo no (Westergaard, 1933)), enquanto o resto do reservatório está vazio.

Simplificando, estamos substituindo forças hidrodinâmicas por forças inerciais causadas pela massa adicionada.

A forma do corpo de água ou massa adicionada assim considerada para se mover com a barragem deve ser determinada de modo que as forças de inércia se tornem iguais às pressões realmente exercidas pela água devido à ação dinâmica.

A massa adicionada pode ser aplicada de duas maneiras

Aumente a largura b como originalmente formulado por Westergaard, 1933. Aqui b é a dimensão transversal da massa adicionada na direção de x Na profundidade, y.. Então, a massa correspondente por unidade de área da face up-stream da represa torna-se $\frac{bw}{g}$, e a força de inércia correspondente quando a aceleração é αg se torna $\frac{bw}{g} \times \alpha g = \alpha w b$, que deve ser igual a p, ou

$$b = \frac{p}{\alpha w}$$

A forma desta massa adicionada (ou gelo) é a mesma do diagrama para p quando as pressões são descartadas a uma escala adequada.

Será suficiente para o presente propósito determinar b Por uma das expressões aproximadas para p; Por exemplo (compare Equações) P.45, P.48, P.49, e P.50),

$$p = 0.02734 \text{ ton-ft}^{-3} \alpha \sqrt{hy}$$

O que dá, com $w = 0.03125$ Ton-ft^{-3},

$$b = \frac{7}{8}\sqrt{hy} \tag{P.55}$$

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

Fig. P.5 mostra o corpo de água ou gelo definido pela Equação P.55. Em vez do corpo d'água, podemos preferir considerar um corpo equivalente de concreto, com a mesma massa. Se o concreto pesa 144 lb/ft^3, a dimensão correspondente a b torna-se,

$$b' = 0.38\sqrt{hy}$$

A curva pontilhada na Fig. P.5 indica este corpo de concreto.

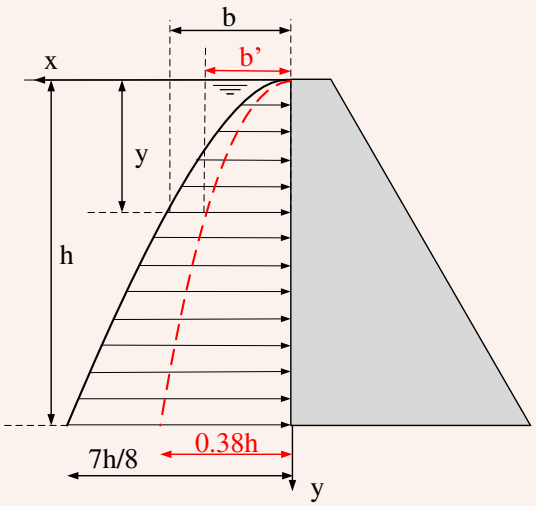


Figura P.5: Corpo de água que pode ser considerado para mover com represa. (Westergaard, 1933)

Massa adicionada é uma abordagem mais conveniente no contexto de uma análise elemento finito. Isso implicará adicionar uma massa por unidade de área da face a montante da represa

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{p(y)}{\alpha g} \tag{P.56}$$

A pressão hidrodinâmica é novamente dada pela Equação P.53

$$p(y) = C\alpha\sqrt{hy}$$

Onde C foi determinado em Eq. P.51, e pode ser reescrito (Da Eq. P.37) como

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{16\rho_w H_w^2}{gkT^2}}} \tag{P.57}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Combinando Equações P.56-P.57 a relação final para determinar a massa por unidade de área da face da barragem acima devido à ação dinâmica da água na represa será

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{K\sqrt{hy}}{g\sqrt{1 - \frac{16\rho_w h^2}{gkT^2}}} \tag{P.58}$$

Note-se que em seu trabalho original, Westergaard passou por uma simplificação adicional da equação anterior (removendo a dependência de TRendendo-se:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{7}{8}\rho_w\sqrt{hy}$$

que é mais frequentemente referenciada na literatura, mas é menos exata do que a Equação P.58.

Figura P.6 mostra as diferenças entre as soluções aproximadas e exatas baseadas nas equações acima mencionadas para um modelo de represa hipotético em que o nível da água, h, é 100 m.

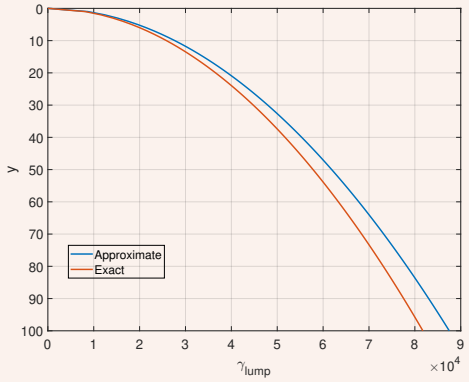


Figura P.6: Massa amassada por unidade de área versus altura

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice Q

Região de Confiança e Métodos Levenberg-Marquardt

Da tese de doutorado "Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR" por Mahdavi, 2023.

Abstract

Este apêndice apresenta as bases matemáticas e algoritmos práticos para a região de confiança e métodos de otimização Levenberg-Marquardt usados na identificação de parâmetros e problemas não lineares mínimos quadrados. A partir de expansões da série Taylor e condições necessárias e suficientes para a otimização, o apêndice desenvolve a teoria da otimização baseada em gradientes, o método Gauss-Newton, e a estratégia adaptativa amortecimento de Levenberg-Marquardt que se equilibra rapidamente convergência com robustez em terreno difícil. O apêndice fornece o quadro teórico e computacional completo referenciado ao longo das seções de calibração de parâmetros, incluindo critérios de convergência, estratégias de escala, e aproximações de incerteza local para parâmetro Estimativa.

Q.1 Região de confiança 3157
Q.2 Algoritmo 3161
Q.3 Formulação em MATLAB® 3161
Q.4 Visualização em tempo real 3164

A fim de resolver os problemas de minimização em funções suaves, o teorema de Taylor é geralmente usado. Assumindo que $f : R^n \to R$ é continuamente diferenciável e que $p \in R^n$ Então nós temos (Nocedal e Wright, 2006):

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \tag{Q.1}$$

para alguns $t \in (0,1)$.. Além disso, se f é duas vezes continuamente diferenciável, nós temos:

$$\nabla f(x+p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp) p dt \tag{Q.2}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

E isso..

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp) p \tag{Q.3}$$

para alguns $t \in (0,1)$. As condições necessárias para a otimização são derivadas assumindo que x^* é um minimizador local e então provando fatos sobre $\nabla f(x^*)$ e.. $\nabla^2 f(x^*)$.

2 Condições:

Condições necessárias para a primeira ordem: If x^* é um minimizador local e f é continuamente diferenciável em um bairro aberto de x^*, então $\nabla f(x^*) = 0$.

Condições necessárias para segunda ordem: If x^* é um minimizador local de f e.. $\nabla^2 f$ existe e é contínuo em uma vizinhança aberta de x^*, então $\nabla f(x^*) = 0$ e.. $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida positiva.

Condições Suficientes de Segunda Ordem If $\nabla^2 f$ é contínua em um bairro aberto de x^* E isso.. $\nabla f(x^*) = 0$ e.. $\nabla^2 f(x^*)$ é positivo, definitivamente. Então.. x^* é um rigoroso minimizador local de f.

Q.1 Região de confiança

3 Os algoritmos de otimização geralmente seguem um procedimento típico de começar a partir de um primeiro ponto e seguir para o próximo iterates até que seja alcançado uma solução com precisão aceitável ou não há mais progresso. No entanto, a diferença de vários algoritmos de otimização está na estratégia de passar de um iterado para o outro. Bons algoritmos devem possuir as seguintes propriedades(Nocedal e Wright, 2006):

- Robustness: Eles devem ter um bom desempenho em uma grande variedade de problemas em sua classe, para todos os valores razoáveis do ponto de partida.
- Eficiência: Eles não devem exigir tempo excessivo de computador ou armazenamento.
- Precisão: Eles devem ser capazes de identificar uma solução com precisão, sem serem excessivamente sensíveis a erros nos dados ou aos erros de arredondamento aritmética que ocorrem quando o algoritmo é implementado em um computador.

Há fundamentalmente duas estratégias para encontrar o próximo iterate em algoritmos de otimização: Um. Linha de busca 2. Região de Confiança. No método de busca em linha basicamente uma direção é determinada pelo algoritmo e o próximo ponto é encontrado nessa direção, de tal forma que a função atinge um valor menor. A estratégia da região de confiança usa uma região ao redor do ponto atual em que aceitamos a aproximação quadrática da função. Neste estudo, focamos no método posterior.

4 Na estratégia da região de confiança, uma função modelo m_k é construído perto do ponto atual x_k O que aproxima o comportamento real da função em torno desse ponto. No

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

entanto, esta função pode não ser capaz de aproximar a função principal nos outros pontos desde a busca por um valor mínimo de m_k é restrito a uma região definida ao redor x_k.. O passo p do candidato é determinado pela solução da seguinte equação:

$$\min m_k(x_k + p) \quad s.t. \left\|p\right\| \leq \Delta_k \tag{Q.4}$$

5 Se a região de confiança é muito grande, a solução não resultaria em redução suficiente da função e assim o raio da região deve ser reduzido e o problema deve ser resolvido novamente. Normalmente, a região de confiança é uma esfera definida por $\left\|p\right\|_2 \leq \Delta$, onde $\Delta \geq 0$ é o raio da região de confiança.

6 O modelo m_k é geralmente definido como:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p \tag{Q.5}$$

Onde f_k e.. ∇f_k são os valores de função e gradiente calculados no ponto x_k.. A matriz B_k ou é o Hessiano$\nabla^2 f_k$ ou alguma aproximação a ele.

7 Se assumirmos que m_k em cada iterato é quadrático baseado na expansão da série Taylor f Nós teremos:

$$f(x_k + p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p \tag{Q.6}$$

Onde $f_k = f(x_k)$ e.. $g_k = \nabla f(x_k)$ e t é algum escalar no intervalo (0,1). Supondo que.. B_k Para ser igual ao verdadeiro Hessian $\nabla^2 f(x_k)$Teremos o método Newton, região de confiança no qual estamos buscando uma solução para subproblema:

$$\min m_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad s.t. \left\|p\right\| \leq \Delta_k \tag{Q.7}$$

8 Um passo importante no método da região de confiança é determinar o raio da região da confiança em cada iteração deste propósito uma proporção é definida como:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)} \tag{Q.8}$$

9 Se a nova avaliação da função é maior que o valor atual, já que o denominador é sempre positivo na equação acima, ρ_k é negativo, e assim o passo não levou ao aumento da função em vez de diminuí-la, o passo é inaceitável. se ρ_k é perto de 1, mostra que o m_k nesta etapa é suficientemente perto do $f(x_k)$ e, portanto, a região pode ser ampliada na próxima iteração. No entanto, se estiver perto de zero ou negativo o raio da região deve ser reduzido na próxima iteração. Figura Q.1 mostra 4 iterações de um método região confiança com 2 variáveis, nesta figura os pontos azul e vermelho são indicativos do ponto atual e próximo iter estimativa, respectivamente. Como afirmado, a região de confiança só se expande se o próximo palpite fornecer redução suficiente na função.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

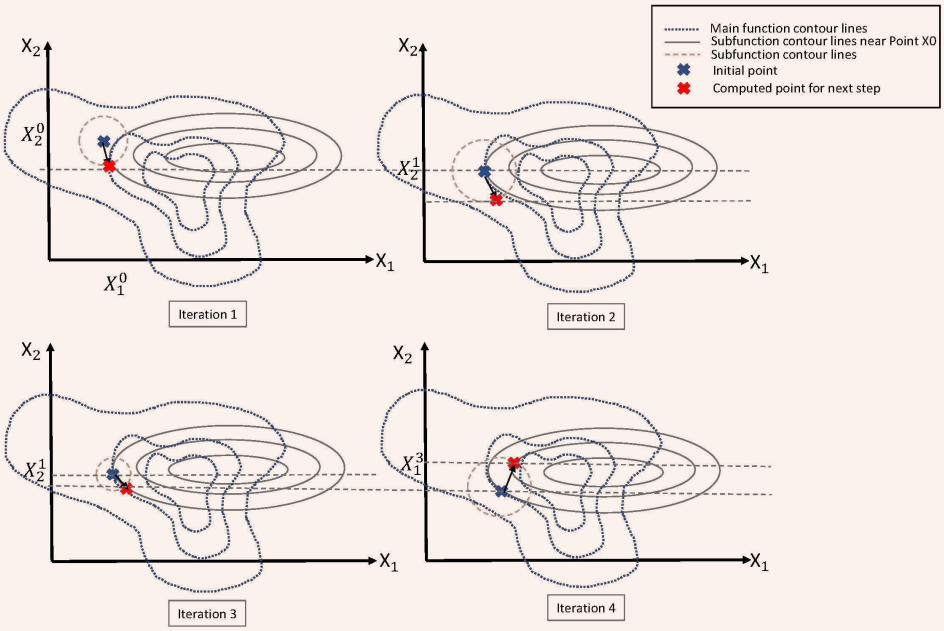


Figura Q.1: Algoritmo da região de confiança

10 Para o problema neste estudo, a função objetiva correspondente, Jacobiano, gradiente, e matrizes hessianas (Dennis e Schnabel, 1983) são então dadas por:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}') = \mathbf{r}^T\cdot\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m}(u_i-u_i')^2 \tag{Q.9}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\mathbf{L} \tag{Q.10}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{r} \tag{Q.11}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\nabla f(\mathbf{x})\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[2\mathbf{J}^T\mathbf{r}\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{J} + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \tag{Q.12}$$

11 Perto do mínimo, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \rightarrow 0$Nós temos $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \simeq 2\mathbf{J}^T\mathbf{J}$.. Uso do método Levenberg-Marquardt (Dennis e Schnabel, 1983) permite resolver para $\mathbf{x}_{k+1}$ De:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\right]^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_k) \tag{Q.13}$$

Onde ε_k é tal que todos os autovalores de $[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)]$ são positivos definitivos. Um desenvolvimento do método Levenberg-Marquardt, conhecido como o método região de confiança, pode finalmente ser introduzido. Nós realmente procuramos minimizar a função objetiva, $m_k(\mathbf{x})$, dentro de uma região de confiança onde a aproximação quadrática (como obtida por uma série Taylor) é considerada confiável:

$$m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)^T\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) \tag{Q.14}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

12 A região de confiança é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{\Omega}_k = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta_k\}; \Delta_k > 0 \tag{Q.15}$$

O problema de otimização se torna:

$$\min_{\mathbf{x}} \{m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\} \tag{Q.16}$$

13 A condição necessária para atualizar a região é dada por:

$$\rho_k = \frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1})}{f(\mathbf{x}_k) - m_k(\mathbf{x}_{k+1})} \tag{Q.17}$$

14 A atualização do ponto de partida é a mesma que foi ilustrada para o método Levenberg-Marquardt. Com este método, também podemos definir os limites superiores e inferiores para estes parâmetros como:

$$\min_{\mathbf{x}} \{m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\}; \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \tag{Q.18}$$

15 O ponto de partida do processo de identificação dos parâmetros pode ser determinado a partir de testes laboratoriais (recedendo uma estimativa inicial de $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$, $\tau_L(T_0)$ e.. $\tau_C(T_0)$). Alternativamente, ajuste de curva da crista da represa deslocamento:

$$u_{irr}^{AAR}(t, \theta) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_c(\theta)}}}{1 + e^{-\frac{(t-\tau_l(\theta))}{\tau_c(\theta)}}} u_{irr}^{AAR,\infty} \tag{Q.19}$$

(onde u_{irr}^{AAR} e.. $u_{irr}^{AAR,\infty}$ são irreversíveis, tempo e temperatura-dependentes deslocamento e final deslocamento devido ao AAR respectivamente) fornece uma estimativa conservadora para os tempos mas não para $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$.. Os parâmetros do alvo devem ser normalizados de tal forma que todos os valores iniciais tenham a mesma ordem de grandeza, ou seja: a) A variação inicial deve ser grande o suficiente para produzir uma variação nos resultados calculados (grandes valores normalizados podem levar a uma interrupção imediata do processo de identificação); e b) a variação final de parâmetros deve ser pequena o suficiente para permitir um pequeno ajuste final dos parâmetros identificados sem grandes oscilações em torno da solução final (um parâmetro excessivamente pequeno normalizado pode resultar em uma grande oscilação).

16 Uma função de peso pode ser introduzida para atribuir importância ao último campo de dados, que normalmente contém um grande valor absoluto e é assim mais representativo do efeito irreversível da expansão AAR em relação ao efeito das cargas normais. Vamos notar que esta identificação do sistema não requer uma análise térmica e, de um ponto de vista prático, implica uma simples modificação de três variáveis incluídas no arquivo de entrada de análise tensão.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Q.2 Algoritmo

17 Dados $\hat{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$ e $\eta \in [0, \frac{1}{4})$: ((Nocedal e Wright, 2006))
para $k = 0, 1, 2, ...$
calcular ρ_k
se $\rho_k < \frac{1}{4}$
  $\Delta_{k+1} = \frac{1}{4}\Delta_k$
caso contrário
  se $\rho_k > \frac{3}{4}$ e $\left\|p_k\right\| = \Delta_k$
    $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \hat{\Delta})$
  caso contrário
    $\Delta_{k+1} = \Delta_k$;
se $\rho_k > \eta$
  $x_{k+1} = x_k + p_k$
caso contrário
  $x_{k+1} = x_k$;
fim(para)

Q.3 Formulação em MATLAB®

18 O processo é implementado em MATLAB®por meio do fluxograma mostrado na Fig. Q.2. O código é estruturado essencialmente em torno da função , que minimiza o quadrado da norma euclidiana de **f**(**x**)

$$\min\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = \min\left(f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_n(\mathbf{x})^2\right)$$

Onde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 \cdots f_n(\mathbf{x})^2}$$

$$\text{Residual} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{Fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{Meas}}(t)$$

Onde $\mathbf{x}_{\text{Fea}}(t)$ é o vetor de deslocamento (em um ponto selecionado) calculado pela análise elemento finito, e $\mathbf{x}_{\text{Meas}}(t)$ é o vetor correspondente dos valores medidos. Ambos são em termos de tempo.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

19 Trata-se de uma operação bastante simples no MATLAB®[1]

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output] = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)
```

Onde

`fun`	Função a ser minimizada
`x0`	Vetor de valores iniciais
`lb`	Vetor de limites inferiores
`ub`	Vetor de limites superiores
`options`	Estrutura que define as opções de otimização
`resnorm`	Quadrado da norma 2 do resíduo em x: $\sum(fun(\mathbf{x}).^2)$
`residual`	Valor da função objetivo na solução, geralmente $fun(\mathbf{x})$
`exitflag`	Razão para a interrupção do solucionador
`output`	Informações finais sobre o processo de otimização (uma estrutura)

20 Considerando que a maioria dos parâmetros são relativamente simples, o conjunto mais crítico é `Opções`.. Aqueles usados neste projeto incluem

`MaxFunEvals`	Número máximo de avaliações da função
`MaxIter`	Número máximo de iterações
`TolFun`	Tolerância da função
`TolX`	Tolerância das incógnitas
`MaxPCGIter`	Número máximo de iterações do gradiente conjugado pré-condicionado
`TolPCG`	Tolerância de término da iteração PCG
`TypicalX`	Magnitude típica dos parâmetros **x**, usada para escalar as diferenças finitas na estimativa do gradiente
`FiniteDifferenceStepSize`	Fator vetorial do tamanho do passo para diferenças finitas, definido manualmente para assegurar uma exploração adequada

21 O tamanho do passo diferença finita teve um papel crucial no progresso de nossa análise. Se não especificado, o valor padrão para este parâmetro é sqrt(eps) para a frente diferenças finitas. No entanto, este valor padrão em nosso estudo de caso levou a ter passos muito pequenos diferença finita para chamar uma mudança e, portanto, o programa foi incapaz de capturar qualquer diferença, variando as variáveis de entrada e eventualmente cedeu ao palpite inicial como o Resposta de otimização. Definendo um vetor de tamanhos de passos diferença finita (v) o programa calcula o diferença finita δ para cada variável x como:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v} \cdot \max(abs(\mathbf{x}), \text{Typical}\mathbf{x}); \tag{Q.20}$$

22 Definindo valores mais elevados resultou em diferenças mais tangíveis nas variáveis e garantindo assim uma exploração razoável para a função dentro do domínio da variável resposta.

[1] Um exemplo de código em MATLAB®é apresentado no Apêndice I.6.1.

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.
CÓPIA PARA REVISÃO

MATLAB®Código

23 O MATLAB®O código está descrito na figura. Q.2 e é relativamente simples de seguir.

24 Note que neste caso, a análise se concentra em uma represa afetada pela reação do agregado álcali (RAA). O objetivo é determinar os parâmetros do modelo AAR de tal forma que a crista deslocamentos da análise elemento finito correspondam estreitamente às medidas de campo.

1. Medições de campo são lidas e ajustadas.
2. O arquivo de entrada de controle é lido, e dividido em três partes: uma central contendo as linhas a serem modificadas pelo código (associado com as propriedades AAR), e as duas adjacentes que permaneceriam inalteradas. Números de linhas correspondentes são registrados para uso posterior pela função de minimização.
3. Variáveis definidas pelo usuário são lidas de um arquivo externo do Excel.
4. Os parâmetros de otimização estão definidos
5. O `lsqnonlin` função, §Q.3, é então chamado.

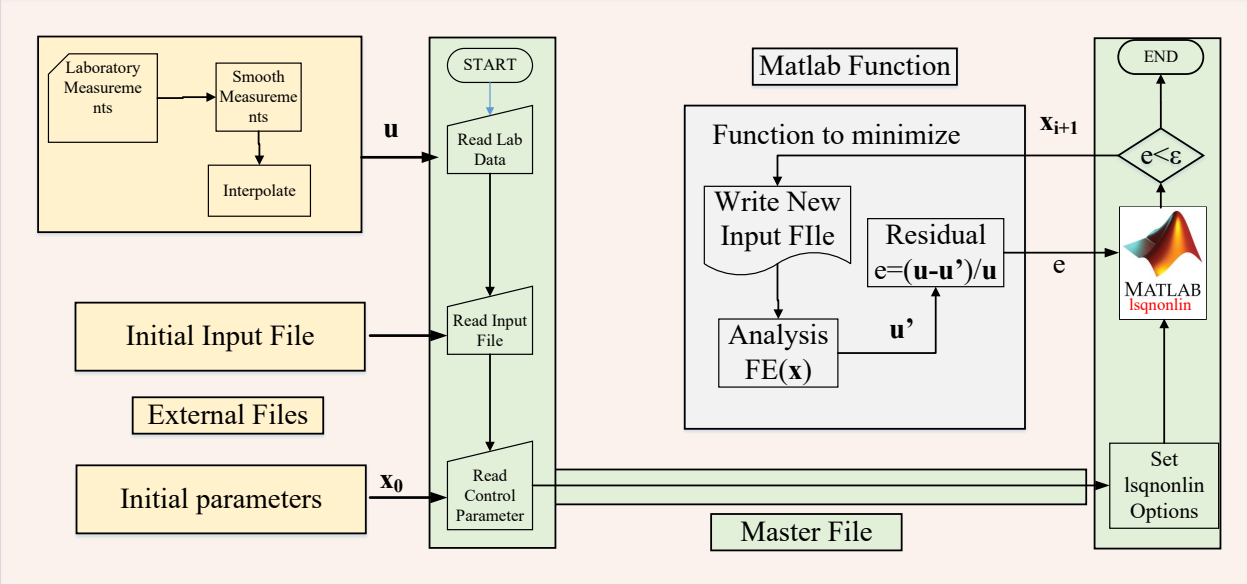


Figura Q.2: Fluxograma do procedimento de identificação do parâmetro

Definição da função

25 Uma parte crítica do algoritmo é a definição da função a ser minimizada.

1. Escreva um novo arquivo em termos de **x** (Primeira iteração, use os valores padrão de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.. Isso é facilitado pela partição anterior do arquivo de controle.

CÓPIA PARA REVISÃO

2. Faça a análise elemento finito usando Merlin neste caso.
3. Extrair do arquivo de saída o computado deslocamentos, $\mathbf{x}_{\text{Fea}}(t)$
4. Computar o resíduo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{Fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{Meas}}(t)$.
5. Computar a norma e dos resíduos.
6. Retorne o novo vetor da norma de deslocamentos.

26 A conclusão do programa é governada por `Isqnonlin` com base na norma e opções previamente selecionadas (§Q.3). Porque não há nenhuma chamada direta para a função ser minimizada pelo MATLAB®Código, parâmetros extras $\mathbf{x}_{\text{Meas}}(t)$ são passados como `Global` Variáveis.

27 A MATLAB®Código para executar a otimização não linear menos quadrada é dado em §I.6.1.

Q.4 Visualização em tempo real

28 Tendo em mente que a simulação não linear elemento finito da expansão do AAR em uma represa pode levar para cima de 3 horas cada, e que no contexto dos procedimentos de identificação parâmetro múltiplas análises são necessárias, este é um muito intensivo computador Processo.

29 Assim, uma interface gráfica de usuário é usada, Figura Q.3.. O primeiro quadrante é uma parcela do intermediário deslocamentos ($\mathbf{x}_{\text{Fea}}(t)$) em comparação com os medidos ($\mathbf{x}_{\text{Meas}}(t)$). Os outros três quadrantes são parcelas de variáveis selecionadas a serem identificadas (ε^{∞}, τ_l, e τ_c) em termos de números de iteração.

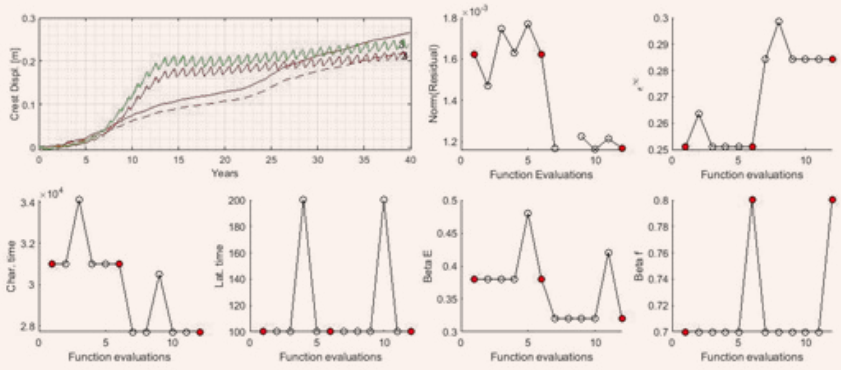


Figura Q.3: Interface gráfica de usuário para identificação do parâmetro de reação agregado álcali (Saouma e Hariri-Ardebili, 2021)

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Apêndice R

Vetor Cálculo; Um Primer

Abstract

Este apêndice cobre elementos essenciais do cálculo vetorial necessários para entender algumas das derivações deste livro. Uma referência recomendada para mais exploração é (Schey, 1973). Por favor, note que esta seção não é exaustiva ou abrangente; Serve como um refrescante.

R.1 Definições básicas 3166
R.1.1 Derivação para um escalar . 3166
R.1.2 Divergência 3168
R.1.3 Gradiente 3171
R.2 Teoremas integrais 3174
R.2.1 Integral de um vetor 3174
R.2.2 Linha integral 3175
R.2.3 Integração por partes 3175
R.2.4 Gauss; Teorema da divergência 3175
R.2.5 Teorema de Stoke 3177
R.2.6 Verde; Teorema do gradiente 3177

1 A *Campo* é uma função definida sobre uma região contínua. Isso inclui, *Campo Scalar* $g(\mathbf{x})$, *Campo Vetor* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, ou *Campo de Tensor* $\mathbf{T}(\mathbf{x})$.

2 Nós primeiro apresentamos o *operador de vetor diferencial* "Nabla"denotado por ∇

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

3 Também notamos que existem tantas maneiras de diferenciar um campo vetorial como há formas de multiplicando vetores, a analogia sendo dada pela tabela R.1.

CÓPIA PARA REVISÃO

Multiplicação		Diferenciação		Ordem de Tensor
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$	ponto	$\nabla\cdot\mathbf{v}$	divergência	$\downarrow$
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$	Cruz	$\nabla\times\mathbf{v}$	Curva	$\rightarrow$
$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$	Tensor	$\nabla\mathbf{v}$	gradiente	$\uparrow$

Tabela R.1: Semelhanças entre operadores de multiplicação e diferenciação

R.1 Definições básicas

R.1.1 Derivação para um escalar

4 A derivada de um vetor $\mathbf{p}(u)$ com respeito a um escalar u, Fig. R.1 é definido por

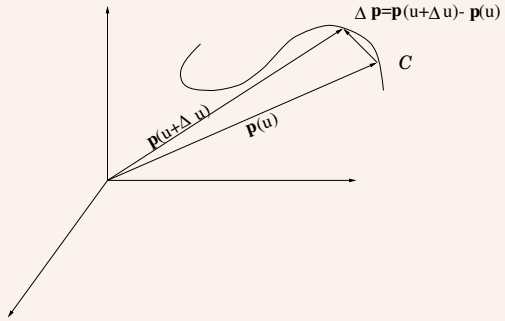


Figura R.1: Diferenciação do vetor de posição $\mathbf{p}$

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u+\Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}$$

5 If $\mathbf{p}(u)$ é um *Vetor de posição* $\mathbf{p}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$, então

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

é um vetor ao longo da tangente à curva.

6 If u É a hora t, então $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ é a velocidade

7 Em *Geometria diferencial*Se considerarmos uma curva C definido pela função $\mathbf{p}(u)$ Então.. $\frac{d\mathbf{p}}{du}$ é um vetor tangente ot C, e se u É o curvilíneo Coordenar s medido a partir de qualquer ponto ao longo da curva, então $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ é uma tangente de unidade Vetor para C $\mathbf{T}$, Fig. R.2. E

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

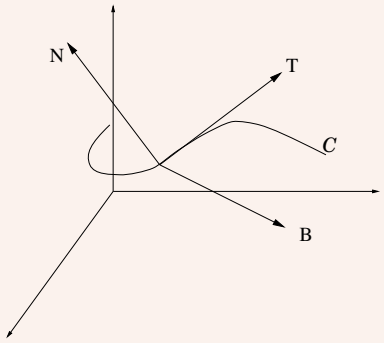


Figura R.2: Curvatura de uma curva

nós temos as seguintes relações

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{T}$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$
$$\kappa = \text{ curvature}$$
$$\rho = \frac{1}{\kappa} \text{ Radius of Curvature}$$

Nós também notamos que $\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds} = 0$ if $\left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right| \neq 0$.

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

R.1.1.1 Ex R.1: Tangente para uma curva

Determine o vetor unitário tangente à curva: $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$ para $t = 2$.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i} + (4t-3)\mathbf{j} + (2t^2-6t)\mathbf{k}\right] = 2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = \sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}}$$

$$= \frac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} \text{ for } t = 2$$

R.1.2 Divergência

R.1.2.1 Vetor

8 O *divergência* de um campo vetorial de um corpo $\mathcal{B}$ com limite Ω, Fig. R.3 é definido considerando que cada ponto da superfície tem um normal **n**, e isso O corpo está cercado por um campo vetorial **v**(**x**).. O volume do corpo é $v(\mathcal{B})$.

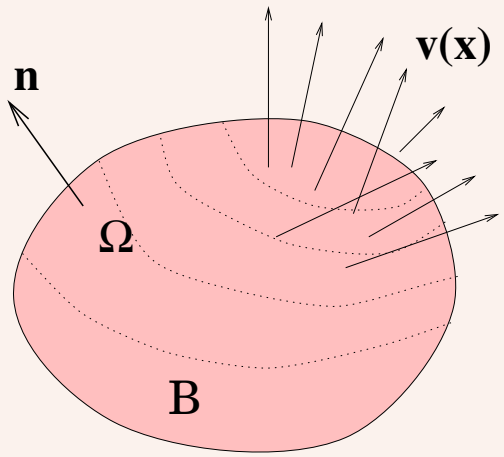


Figura R.3: Campo de vetor cruzando uma região sólida

9 A divergência do campo vetorial é assim definida como

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B})\to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})} \int_{\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dA$$

Onde **v**.**n** é muitas vezes referido como o *Fluxo* e representa o total volume de "fluido" que passa dA No tempo da unidade, Fig. R.4 Este volume é então igual à base do cilindro dA

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

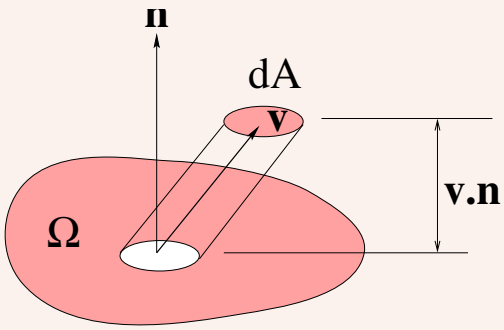


Figura R.4: Fluxo através da área dA

vezes a altura do cilindro **v**·**n**.. Nós notamos que as simplificações que são tangentes à fronteira não deixam nenhum fluido sair, enquanto aqueles normais a ele Deixe-o sair com mais eficiência.

10 A divergência assim mede a taxa de mudança de um campo vetorial.

11 A definição é claramente independente da forma do região sólida, no entanto, podemos obter uma visão sobre o divergência considerando um paralelo retangular com lados Δx_1, Δx_2, e Δx_3, e com vetores normais apontando no As direções dos eixos de coordenadas, Fig. R.5. Se também considerarmos o canto mais próximo da origem como localizado em

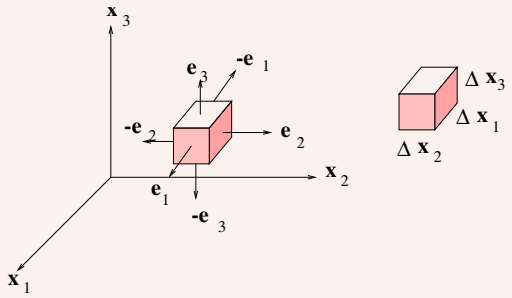


Figura R.5: Elemento infinito para a avaliação da divergência

x, em seguida, a contribuição (de Eq. R.1.2.1) das duas superfícies com vetores normais $\mathbf{e}_1$ e.. $-\mathbf{e}_1$ É

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0}\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3}[\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1+\mathbf{v}(x)\cdot(-\mathbf{e}_1)]dx_2dx_3$$

ou

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0}\frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1dx_2dx_3=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$
$$=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Assim, podemos generalizar

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i$$

ou alternativamente

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\right) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \partial_i v_i = v_{i,i}\end{aligned}$$

A divergência de um vetor é uma *escalar*.

Nós notamos que o *Operador Laplaciano* é definido como

$$\nabla^2 F \equiv \nabla\nabla F = F_{,ii}$$

R.1.2.1.1 Ex R.2: Divergência de um vetor

Determine a divergência do vetor $\mathbf{A} = x^2 z\mathbf{i} - 2y^3 z^2\mathbf{j} + xy^2 z\mathbf{k}$ Em.. Ponto $(1, -1, 1)$.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (x^2 z\mathbf{i} - 2y^3 z^2\mathbf{j} + xy^2 z\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial x^2 z}{\partial x} + \frac{\partial - 2y^3 z^2}{\partial y} + \frac{\partial xy^2 z}{\partial z} \\ &= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2 \\ &= 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3 \text{ at } (1, -1, 1)\end{aligned}$$

R.1.2.2 Tensor de segunda ordem

Por analogia com Eq. R.1.2.1A divergência de um tensor de segunda ordem Campo $\mathbf{T}$ É

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B}) \to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})} \int_\Omega \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA$$

que é o *Campo vetor*

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p} \mathbf{e}_q$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

R.1.3 Gradiente

R.1.3.1 Campo escalar

16 O *gradiente* de um campo escalar $g(\mathbf{x})$ é um campo vetorial $\nabla g(\mathbf{x})$ de tal forma que para qualquer vetor unitário $\mathbf{v}$, a derivada direcional dg/ds Na direção de $\mathbf{v}$ é dado por

$$\frac{dg}{ds} = \nabla g \cdot \mathbf{v}$$

Onde $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$ Notamos que a definição não faz referência a nenhum sistema de coordenadas. O gradiente é assim a *vetor invariante*.

17 Para encontrar os componentes em qualquer sistema de coordenadas cartesianas retangular que usemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dx_i}{ds}\mathbf{e}_i$$
$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}$$

que pode ser substituído e irá render

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$$

ou

$$\nabla\phi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$
$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

E note que isso define um *Campo vetor*.

18 O significado físico do gradiente de um campo escalar é que ele aponta no direção em que o campo está mudando mais rapidamente (para uma superfície tridimensional, o gradiente está apontando ao longo do normal para o plano tangente à superfície). O comprimento do vetor $\|\nabla g(\mathbf{x})\|$ é perpendicular às linhas de contorno.

19 $\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$ dá a taxa de mudança do campo escalar na direção de $\mathbf{n}$.

R.1.3.1.1 Ex R.3: Gradiente de um campo escalar I

Determine o gradiente de $\phi = x^2yz + 4xz^2$ no ponto $(1, -2, -1)$ Ao longo da Direção $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + (x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k}$$
$$= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ at } (1, -2, -1)$$
$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$
$$\nabla\phi\cdot\mathbf{n} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

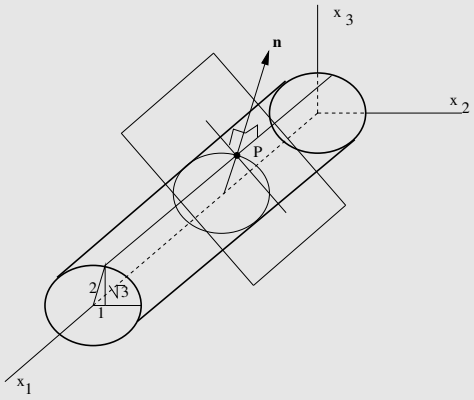
Já que este último valor é positivo, ϕ aumenta nessa direção.

R.1.3.1.2 Ex R.4: Gradiente de um campo escalar ii

O tensor tensão em todo o continuum é dado com respeito a Eixos cartesianos como

$$\sigma = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3^2 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar o vetor tensão (ou tração) no ponto $P(2, 1, \sqrt{3})$ da Plano tangente à superfície cilíndrica $x_2^2 + x_3^2 = 4$ Em.. P,



No ponto P, o tensor tensão é dado por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

A unidade normal para a superfície em P é dado de

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2x_2\mathbf{2_2} + \mathbf{2x_3e_3}$$

No ponto P,

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2\mathbf{2_2} + \mathbf{2\sqrt{3}e_3}$$

e assim a unidade normal em P É

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Assim, o vetor de tração será determinado a partir

$$\sigma = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

ou $\mathbf{t^n} = \frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_3$

R.1.3.2 Campo de vetor

20 Também podemos definir o gradiente de um campo vetorial como

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Isso é.. $[\nabla\mathbf{v}]_{ij}$ Dá a taxa de mudança do iO componente de $\mathbf{v}$ com respeito ao jO eixo de coordenadas.

21 Observe a diferença entre $\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}$ e.. $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$.. Na representação matricial, um é a transposição do outro.

22 O gradiente de um vetor é um tensor da ordem 2.

23 Podemos interpretar o gradiente de um vetor geometricamente, Fig. R.6. Se considerarmos dois pontos a e.. b que estão perto um do outro (i.e Δs é muito pequeno), e deixe o vetor unitário $\mathbf{m}$ pontos na direção de a para b.. O valor do campo vetorial em a É $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e o valor do campo vetorial Em.. b É $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \Delta s\mathbf{m})$.. Desde o campo vetorial mudanças com a posição no domínio, esses dois vetores são diferentes Tanto em comprimento e orientação.

24 Se agora transportarmos uma cópia de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e coloque-o Em.. b, então comparamos as diferenças entre esses dois vetores. O vetor conectando as cabeças de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e.. $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \Delta s\mathbf{m})$ É $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \Delta s\mathbf{m}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$, a mudança no vetor. Assim, se nós Divida esta mudança por Δs, então nós temos a taxa de mudança enquanto nos movemos na direção especificada.

25 Tomando o limite como Δs Vamos para o zero, nós conseguimos

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + \Delta s\mathbf{m}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta s} \equiv D\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}$$

26 A quantidade $D\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}$ é chamado de *Derivado direcional* Porque.. Ele dá a taxa de mudança do campo vetorial enquanto nos movemos na direção $\mathbf{m}$.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

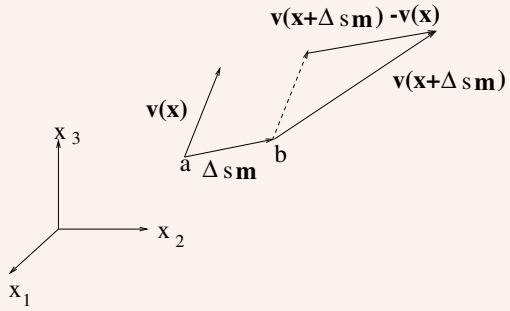


Figura R.6: Gradiente de um vetor

R.1.3.2.1 Ex R.5: Gradiente de um campo vetorial

Procuramos determinar o gradiente de um simples campo vetorial em duas dimensões dadas por

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2, 2xy)$$

Para determinar o gradiente deste campo vetorial $\nabla\mathbf{F}$, calculamos os derivados parciais de cada componente do vetor com relação a x e.. y, so

$$\nabla\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

ou

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x \tag{R.1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} 2xy = 2x \tag{R.2}$$

Assim

$$\nabla\mathbf{F} = (2x, 2x)$$

R.2 Teoremas integrais

R.2.1 Integral de um vetor

27 A integral de um vetor $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{e}_1 + R_2(u)\mathbf{e}_2 + R_3(u)\mathbf{e}_3$ é definido como

$$\int \mathbf{R}(u)du = \mathbf{e}_1 \int R_1(u)du + \mathbf{e}_2 \int R_2(u)du + \mathbf{e}_3 \int R_3(u)du$$

se um vetor $\mathbf{S}(u)$ existe de tal forma que $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$, então

$$\int \mathbf{R}(u)du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\, du = \mathbf{S}(u) + c$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

R.2.2 Linha integral

28 Dado $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{e}_1 + y(u)\mathbf{e}_2 + z(u)\mathbf{e}_3$ Onde $\mathbf{r}(u)$ é um vetor de posição que define uma curva C Ponto de conexão P_1 para P_2 Onde $u = u_1$ e.. $u = u_2$ respectivamente, ANF dado $A(x, y, z) = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ sendo uma função vetorial definida e continua C, então a integral do componente tangencial de $\mathbf{A}$ Por favor C De.. P_1 para P_2 é dado por

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

If $\mathbf{A}$ Se fosse uma força, então esta integral representaria o trabalho correspondente.

29 Se o contorno está fechado, então definimos o *Contorno integral* Como

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

30 Pode-se mostrar que se $\mathbf{A} = \nabla\phi$ Então..

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \text{ é independente do caminho } C \text{ que conecta } P_1 \text{ a } P_2$$
$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ ao longo de um contorno fechado}$$

R.2.3 Integração por partes

31 A integração por parte da fórmula é

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b u\,dv &= uv|_a^b - \int_a^b v\,du \end{aligned} \tag{R.3}$$

R.2.4 Gauss; Teorema da divergência

32 No caso mais geral que temos

$$\int_\Omega \delta F = \int_{\delta\Omega} F$$

33 O teorema da divergência (também conhecido como Teorema de Ostrogradski) vem repetidamente em mecânica sólida e pode ser declarado Como se segue:

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}\,d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{v}.\mathbf{n}\,d\Gamma \text{ or } \int_\Omega v_{i,i}\,d\Omega = \int_\Gamma v_i n_i\,d\Gamma \tag{R.4}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Isso é o vetor divergência sobre um volume é igual ao vetor Fluxo sobre uma superfície.

34 Para transformações 2D-1D, temos

$$\int_A \nabla\cdot\mathbf{q}dA = \oint_s \mathbf{q}^T\mathbf{n}ds \tag{R.5}$$

35 Este teorema é, em algum momento, referido como o teorema de Green no espaço.

36 *Green-Gauss* Teorema

$$\int_\Omega \Phi\nabla\cdot\mathbf{v}d\Omega = \int_\Gamma \Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n}d\Gamma - \int_\Omega (\nabla\Phi)^T\mathbf{v}d\Omega \tag{R.6}$$

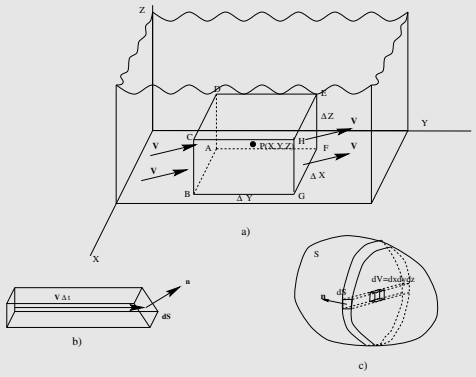
Se nós selecionarmos $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$Nós obtemos

$$\int_\Omega \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi d\Omega$$

R.2.4.1 Ex R.6: Interpretação física do teorema da divergência

Fornecer uma interpretação física do Teorema da Divergência.

Um fluido tem um campo de velocidade $\mathbf{v}(x,y,z)$ e primeiro procuramos determinar o fluxo líquido por unidade de tempo por volume unitário em um paralelepípedo centrado em $P(x,y,z)$ com dimensões $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (a).



$$\begin{aligned} v_x\big|_{x,y,z} &\approx v_x \\ v_x\big|_{x-\Delta x/2,y,z} &\approx v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{AFED} \\ v_x\big|_{x+\Delta x/2,y,z} &\approx v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{GHCB} \end{aligned}$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

A entrada líquida por unidade de tempo através do x Aviões são..

$$\begin{aligned}\Delta V_x &= \left(v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - \left(v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\Delta V_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

Assim, o aumento total por unidade de volume e tempo unitário será dado por

$$\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

Além disso, se considerarmos o total de fluídos atravessando dS durante Δt (b), será dado por $(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS\Delta t$ ou o volume de fluido atravessando dS por unidade de tempo É $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$.

Assim, para um volume arbitrário (c), a quantidade total de fluido atravessando uma superfície fechada S Por que Hora da unidade é.. $\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$.. Mas isso é igual a $\int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$ (Eq. R.2.4.1), assim

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$$

que é o teorema da divergência.

R.2.5 Teorema de Stoke

37 O teorema de Stoke diz que

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int\int_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

Onde $\mathcal{S}$ é uma superfície aberta com duas faces confinadas por C

R.2.6 Verde; Teorema do gradiente

38 O teorema de Green no plano é um caso especial do Teorema de Stoke.

$$\oint (Rdx + Sdy) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dxdy$$

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Referências das Partes II–IV

AASHTO, LRFD (2017). *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*. 8th Edition. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

AASHTO, Seismic (2011). *AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design*. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

Abramowitz, M. e I. Stegun (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Rel. técn. Applied Mathematics Series, No. 55. National Bureau of Standard.

Academie Royale des Sciences (1741). "*Eloge de M. De La Hire*". Em: Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Annee MDCCXVIII, pp. 76–89.

ACI 318 (2019). *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary*. American Concrete Institute.

ACI 318.2-14 (2014). *Building code requirements for Concrete Thin Shells (ACI 318.2-14) and commentary*. Rel. técn. American Concrete Institute.

American Institute of Steel Construction (2016). *Specification for structural steel building ANSI/AISC 360-16*. American Institute of Steel Construction.

American Society of Civil Engineers (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17. Reston, VA: American Society of Civil Engineers.

Anthropic (2025). *Claude*. https://www.anthropic.com/claude. AI assistant.

Applied Technology Council (2012a). *Seismic Performance Assessment of Buildings Volume 1 - Methodology*. Rel. técn. FEMA P-58-1. Federal Emergency Management Agency.

– (2012b). *Seismic performance assessment of buildings, (Volume 1): Methodology*. Rel. técn. ATC-58-1. Redwood City, CA: Federal Emergency Management Agency.

ASCE/SEI 7-16 (2017). *Minimum Design Loads For Buildings and Other Structures*. Rel. técn. American Society of Civil Engineers.

ATC-13 (1985). *Earthquake damage evaluation data for California. Report No.ATC-13*. Rel. técn. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

ATC-40 (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. Volume 1*. Rel. técn. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

Atkinson, G. e D. Boore (1995). "Ground-motion relations for eastern North America". Em: *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.1, pp. 17–30.

Baker, A. e A. Amarakone (1964). ""Inelastic Hyperstatic Frames Analysis"". Em: *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, pp. 85–142.

CÓPIA PARA REVISÃO

Baker, A. L. L. (1956). *The ultimate-load theory applied to the design of reinforced & prestressed concrete frames*. Concrete Publications.
Baker, E., L Kovalevsky e F. Rish (1972). *Structural Analysis of Shells*. McGraw Hill.
Baker, J. (2015). "Efficient analytical fragility function fitting using dynamic structural analysis". Em: *Earthquake Spectra* 31.1, pp. 579–599.
Baker, J. e N. Jayaram (2008). "Correlation of spectral acceleration values from NGA ground motion models". Em: *Earthquake Spectra* 24, pp. 299–317.
Baker, W. F. (2023). *William Baker: Structural Engineer and Problem Solver*. The Grainger College of Engineering, University of Illinois Urbana–Champaign.
Bate, S. et al. (1962). "Ultimate Load Design Of Concrete Structures." Em: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 21.2, pp. 399–442.
Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall Inc.
Bažant, Ž. (1984). "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal". Em: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.
Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. Alemão. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.
Benjamin, J. e C. Cornell (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. New York: McGraw Hill.
Berry, M., M. Parrish e M. Eberhard (2004). *Peer Structural Performance database*. Rel. técn. Pacific Earthquake Engineering Research Center; University of California, Berkeley.
Bertero, R. e V. Bertero (2002). "Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach". Em: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 627–652.
Bhatt, P (1986). *Programming the matrix analysis of skeletal structures*. E. Horwood.
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Billington, D. (1983). *Structural Studies*. Rel. técn. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Bisplinghoff, R. L., J. W. Mar e T. H. Pian (1965). *Statics of deformable solids*. Dover.
Bisshopp, K. e D. C. Drucker (1945). "Large deflection of cantilever beams". Em: *Quarterly of applied mathematics* 3.3, pp. 272–275.
Bolt, B. (1973). "Duration of strong ground motion". Em: *Proceedings of the 5th World Conference on Earthquake Engineering*. Vol. 1, pp. 1304–1313.
Bommer, J. e A. Martinez-Pereira (1999). "The effective duration of earthquake strong motion". Em: *Journal of earthquake engineering* 3.02, pp. 127–172.
Boore, D., W. Joyner e T. Fumal (1997). "Equations for estimating horizontal response spectra and peak acceleration from western North American earthquakes: A summary of recent work". Em: *Seismological research letters* 68.1, pp. 128–153.
Bozorgnia, Y. e V. Bertero (2003). "Damage spectra: characteristics and applications to seismic risk reduction". Em: *Structural Engineering, ASCE* 129, pp. 1330–1340.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Bradley, B. (2010). "A generalized conditional intensity measure approach and holistic ground-motion selection". Em: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.12, pp. 1321–1342.
Brandonisio, G. e A. De Luca (2020). "Statics of Buttressed Masonry Arches in Light of Traditional Design Rules". Em: *Proceedings of XXIV AIMETA Conference 2019 24*. Springer, pp. 2162–2176.
Branson, D. E. et al. (1963). *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Rel. técn. Alabama. State Highway Department.
Brühwiler, E. e F. Whitman (1990). "Failure of Dam Concrete Subjected to Seismic Loading Conditions". Em: *Engineering Fracture Mechanics* 35.3, pp. 565–572.
Brühwiler, E. (1988). *Fracture Mechanics of Dam Concrete Subjected to Quasi-Static and Seismic Loading Conditions*. (in German). Lausanne: Doctoral Thesis No 739, Swiss Federal Institute of Technology.
Bryant, L., J. Brokaw e P. Mlakar (jan. de 1993). *Reliability Modeling of Concrete Overstressing*. Rel. técn. Report Submitted to U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station. JAYCOR, Vicksburg Mississippi.
Bucher, C. (2009). *Computational analysis of randomness in structural mechanics: Structures and infrastructures book series, Vol. 3*. Crc Press.
CALTRANS, S. (2013). *CALTRANS Seismic Design Criteria*. California Department of Transportation.
Campbell, K. e Y. Bozorgnia (2012). "Cumulative absolute velocity (CAV) and seismic intensity based on the PEER-NGA database". Em: *Earthquake Spectra* 28.2, pp. 457–485.
Carol, I e J Murcia (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact'formulation—I. Theory". Em: *Computers & structures* 33.1, pp. 79–87.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cedolin, L., S. Dei Poli e I. Iori (1987). "Tensile Behavior of Concrete". Em: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 113.3.
Cella, P. (1999). "Reexamining the catenary". Em: *The College Mathematics Journal* 30.5, pp. 391–393.
Center, P. E. E. R. (2010). *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Performance-Based Earthquake Engineering Framework*.
Chen, W. e H. Zhang (1990). *Structural Plasticity*. Springer-Verlag.
Chopra, A. e R. Goel (1999). "Capacity-Demand-Diagram Methods Based on Inelastic Design Spectrum". Em: *Earthquake Spectra* 15, pp. 637–656.
Civil Engineers, A. S. of (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17.
– (2022). *Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures*. ASCE/SEI 7-22.
Clough, R. W. (1966). "Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements". Em: *Proceedings of Japan earthquake engineering symposium*.
Clough, R. e J. Penzien (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Inc., London, UK.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Cohen, I. B. (2002). "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion". Em: *The Cambridge Companion to Newton*. Ed. por I. Cohen e G. Smith.
Cornell, C. A. (1964). *Stochastic process models in structural engineering*. Department of Civil Engineering, Stanford University.
Cornell, C. e F. Jalayer (2002). "Factored nonlinear displacement demand estimation methods for probability-based safety assessment". Em: *Annual Meeting Research Digest No. 2002-7, A publication of the Pacific Earthquake Engineering Research Center*.
Coulomb, C. (1773). "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*". Em: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
Couplet, C. (1729). "*De la poussée des voûtes*". Em: *Mémoires de l'académie Royale des Sciences*, pp. 79–117.
– (1730). "*Seconde partie de l'examen des voûtes*". Em: *mémoires de l'académie Royale des Sciences*, pp. 117–141.
Courant, R., K. Friedrichs e H. Lewy (1967). "On the partial difference equations of mathematical physics". Em: *IBM Journal of Research and Development* 11.2, pp. 215–234.
Cuthill, E. e J. McKee (1969). "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices". Em: *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pp. 157–172.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.
D'Ambrisi, A. e M. Mezzi (2015). "An energy-based approach for nonlinear static analysis of structures". Em: *Bulletin of Earthquake Engineering* 13.5, pp. 1513–1530.
Danyzy, A. (1732). "Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes". Em: *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2.1718-1745, pp. 40–56.
de Belidor, B. F. (1729). *La science des Ingegnieurs*. Chez Nyon.
– (1757). *Nouveau cours de mathématique a l'usage de l'artillerie et du génie...* Chez Nyon.
de la Hire, P. (1712). "*Sur la construction des voûtes dans les édifices*". Em: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 69.
de La Hire, Philippe (1695). *Traité de Mécanique, où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, et les propriétés des corps pesans lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*. La Compagnie des libraires.
Den Hartog, J. P. (1961). *Strength of materials*. Dover.
Dennis, J. e R. Schnabel (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs.
Desayi, P (1964). "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete". Em: *Journal of the American Concrete Institute* 61.3, pp. 1169–1183.
Desmorat, R. et al. (2008). *Anisotropic damage model for multifibre dynamics and pseudo-dynamics analyses*.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Dolati, S. S. K., A. Matamoros e W. Ghannoum (2023). "Evaluating the effects of loading protocol on the strength and deformation capacity of Flexure-Shear critical concrete columns". Em: *Engineering Structures* 279, p. 115592.
Douglas, J (2011). *Ground Motion Estimation Equations 1964–2010*.
Duda, H. (1990). "Stress-Crack-Opening Relation and Size Effect in High-Strength Concrete". Em: *Darmastad Concrete* 5, pp. 35–46.
Eddy, H. T. (1878). *Researches in graphical statics*. D. van Nostrand.
Eisenberg, M. A. e L. Malvern (1973). "On Finite Element Integration in Natural Co-ordinates". Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7, pp. 574–575.
Elnashai, A. e L. Di Sarno (2015). *Fundamentals of earthquake engineering: from source to fragility*. John Wiley & Sons.
Elwood, K. e J. Moehle (2002). *Shake table tests and analytical studies on the gravity load collapse of reinforced concrete frames*. Rel. técn. PEER Report 2003/01. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California.University of California, Berkeley.
Erberik, M. (2015). "Seismic Fragility Analysis". Em: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. por M. Beer et al. Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–10.
Estekanchi, H., A. Vafai e M. Sadeghazar (2004). "Endurance time method for seismic analysis and design of structures". Em: *Scientia Iranica* 11, pp. 361–370.
European Committee for Standardization (CEN) (2010). *Eurocode – Basis of Structural Design (EN 1990:2002+A1:2005+A1:2005/AC:2010)*. European Standard. Brussels, Belgium: CEN.
Felippa, C. (1999). *Finite Element Lecture Notes*. Rel. técn. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
– (2000). *Lecture Notes in Advanced Finite Element Methods (ASEN 5367)*. Rel. técn. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
FEMA (1997a). *NEHRP commentary on the guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Rel. técn. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
– (1997b). *NEHRP guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Rel. técn. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
FEMA (2012). *Seismic Performance Assessment of Buildings*. P-58.
FEMA-356 (2000). *Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings*. Rel. técn. Federal Emergency Managemt Agency.
Feodossiev, V. (1977). *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis*. Traduction Française. Moscou: Editions MIR.
Filiatrault, A. (2013). *Elements of earthquake engineering and structural dynamics*. Presses inter Polytechnique.
Filippou, F., E. Popov e V. Bertero (nov. de 1983). "Modeling of Reinfored Concrete Joints under Cyclic Excitations". Em: *ASCE, Journal of Structural Engineering* 109.11.
Finsterwalder, U. (1933). "Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt". Em: *Ingenieur-Archiv* 4.1, pp. 43–65.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Fischler, M. A. e R. C. Bolles (1981). “Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography”. Em: *Communications of the ACM* 24.6, pp. 381–395.
Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. Second Edition. Springer Verlag.
Freeman, S. (1978). “Prediction of response of concrete buildings to severe earthquake motion”. Em: *Proceedings of Douglas McHenry international symposium on concrete and concrete structures*. Ed. por A. C. Institute. Detroit, MI, USA.
– (1998). “The capacity spectrum method”. Em: *Proceedings of the 11th European conference on earthquake engineering*. Paris, France.
Gakuhari, Y. (ago. de 2021). “Modeling Considerations Related to Concrete with AAR”. Diss. de mestr. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Gallagher, R. (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gavin, H. P. (2012). *Mathematical Properties of Stiffness Matrices*. CEE 421L, Matrix Structural Analysis course notes. Duke University, Department of Civil e Environmental Engineering.
Georg, R. (dez. de 2014). “Historical Analysis of Arches and Modern Shells”. Saouma, Victor E. advisor. M.S. Thesis. Boulder, CO, U.S.A.: University of Colorado, Dept. Civ. Eng.
Gerstle, K. (1974). *Basic Structural Analysis*. Out of Print. McGraw-Hill.
Ghannoum, W. (2010). Personal communication.
– (2020). *Decision-Oriented Column Simulation Capabilities for Enhancing Disaster Resilience of RC Building*. "Seminar at the University of Colorado, Boulder".
Ghorbani, R. et al. (2022). “Uniaxial model for simulating the cyclic behavior of reinforced concrete members”. Em: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 51.15, pp. 3574–3597.
Gibson, J. E. (1968). *The design of shell roofs*. Spon.
Giuriani, E. e G. P. Rosati (1986). “Behaviour of Concrete Elements under Tension After Cracking”. Em: *Studi e Ricerche, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato* 8. (in Italian), pp. 65–82.
Gopalaratnam, V. S. e S. Shah (1985). “Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension”. Em: *ACI Journal* 82, pp. 310–323.
Gunay, S. e K. Mosalam (2013). “PEER performance-based earthquake engineering methodology, revisited”. Em: *Journal of Earthquake Engineering* 17.6, pp. 829–858.
Gutenberg, B. e C. Richter (1954). “Frequency and energy of earthquakes”. Em: *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, pp. 17–19.
Hamburger, R. et al. (2004). “The ATC-58 Project: Development of next-generation reformance-based earthquake engineering design criteria for buildings”. Em: *Proceeding of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada.
Hariri-Ardebili, M. e H. Mirzabozorg (2014). “Estimation of probable damages in arch dams subjected to strong ground motions using endurance time acceleration functions”. Em: *KSCE Journal of Civil Engineering* 18, pp. 574–586.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Hariri-Ardebili, M. e V. E. Saouma (2015). "Quantitative failure metric for gravity dams". Em: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 44, pp. 461–480.
Hariri-Ardebili, M., V. E. Saouma e K. Porter (2016). "Quantification of Seismic Potential Failure Modes in Concrete Dams". Em: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
Hariri-Ardebili, M. et al. (2016). "A new class of seismic damage and performance indices for arch dams via ETA method". Em: *Engineering Structures* 110, pp. 145–160.
Haselton, C. et al. (2011). "Accounting for ground-motion spectral shape characteristics in structural collapse assessment through an adjustment for epsilon". Em: *Structural Engineering* 137.3, pp. 332–344.
Haselton, C. B. et al. (2008). "An assessment to benchmark the seismic performance of a code-conforming reinforced-concrete moment-frame building". Em: *Pacific Earthquake Engineering Research Center* 2007/1.
Haselton, C. B. et al. (2016). "Calibration of model to simulate response of reinforced concrete beam-columns to collapse." Em: *ACI Structural Journal* 113.6.
Heyman, J. (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1969). "The safety of masonry arches". Em: *International Journal of Mechanical Sciences* 11.4, pp. 363–385.
Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM.
Hillerborg, A., M. Modéer e P. Petersson (1976). "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements". Em: *Cement and Concrete Research* 6.6, pp. 773–782.
Hinton, E. e D. Owen (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press, London.
Hordijk, D., H. Reinhardt e H. Cornelissen (1989). "Fracture Mechanics Parameters of Concrete from Uniaxial Tensile Tests as Influenced by Specimen Length". Em: *RILEM-SEM Int. Conference on Fracture Mechanics of Rock and Concrete*. Ed. por S. Shah e S. Swartz. New-York: Springer-Verlag.
Hoshiya, M e Z Hasgur (1978). "AR and MA models of nonstationary ground motion". Em: *Bull. Int. Inst. Seismol. Earthq. Eng.* 16, pp. 55–68.
Howard, S. (1966). *Structure: An Architect's Approach*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Hsu, T. et al. (1963). "Micro cracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve". Em: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 209–224.
Huerta, S. (2008). "The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan". Em: *Architectural Science Review* 51.4, pp. 297–328.
Ibarra, L. F. (2004). "Global collapse of frame structures under seismic excitations". Tese de dout. Stanford University.
ICBO (1994). *Uniform Building Code*. Rel. técn. International Conference of Building Officials.
Inglis, C. (1913). "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners". Em: *Trans. Inst. Naval Architects* 55, pp. 219–241.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Irwin, G. (1957). "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate". Em: *Transactions ASME, J. Appl. Mech.* 24.

Jalayer, F. (2003). "Direct probabilistic seismic analysis: implementing non-linear dynamic assessments". Tese de dout. Palo-Alto, CA: Stanford University.

Jankovic, S. e B. Stojadinovic (2004). "Probabilistic performance-based seismic demand model for {R/C} frame buildings". Em: *Proceeding of the 13th World Conferance on Earthquake Engineering*. Vancouver, B.C., Canada.

Jeang, F. L. e N. M. Hawkins (1985). *Nonlinear Analysis of Concrete Fracture*. Structures and Mechanics Report. Seattle, WA: Department of Civil Engineering, University of Washington.

Joukowsky, N. Y. (1948). *Sobranie Sochinenii (Collected Works)*. Vol. 2. 25 vols., 1935–1950. The bicycle wheel problem (ring on elastic foundation) appears in the mechanics volume; first solved ca. 1890s at the Moscow Technical School. Moscow: Gostekhizdat.

Kaila, K. e H. Narain (1971). "A new approach for preparation of quantitative seismicity maps as applied to Alpide belt-Sunda arc and adjoining areas". Em: *Bulletin of the Seismological Society of America* 61.5, pp. 1275–1291.

Kang, D. (2010). "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation". Tese de dout. Dept. of Civil Engineering, University of Colorado, Boulder.

Kappos, A. (1997). "Seismic damage indices for RC buildings: evaluation of concepts and procedures". Em: *Progress in Structural Engineering and Materials* 1, pp. 78–87.

Kassimali, A. (2021). *Matrix analysis of structures*. Cengage Learning.

Kennedy, M. C. e A. O'Hagan (2001). "Bayesian Calibration of Computer Models". Em: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.3, pp. 425–464.

Kent, D. e R. Park (1971). "Flexural Members with Confined Concrete". Em: *Journal of the Structural Division, ASCE* 97.ST7.

Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.

Kirsch, C (1898). "Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre". Em: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 42, pp. 797–807.

Kolosova, G. S. e V. V. Kuroyedov (2013). "Application of Krylov's functions for solving structural mechanical problems". Em: *Stroitel'stvo Unikal'nyh Zdanij i Sooruzenij* 9, p. 42.

Ladeveze, P. (1983). "Sur une théorie de l'endommagement anisotrope". Em: *Rapport Interne LMT* 34, pp. 1–34.

Lee, T.-H. e K. M. Mosalam (2004). "Probabilistic fiber element modeling of reinforced concrete structures". Em: *Computers and Structures* 82, pp. 2285–2299.

Li, V. C. e E. Liang (1986). "Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cementitious Composites". Em: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 112.6, pp. 566–586.

Lignos, D. G. e H. Krawinkler (2013). "Development and utilization of structural component databases for performance-based earthquake engineering". Em: *Journal of Structural Engineering* 139.8, pp. 1382–1394.

Lin, T. e J. Baker (2014). "Conditional Spectra". Em: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. por M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–13.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Lin, T. e S. Stotesbury (1981). *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers*. John Wiley.
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4ª ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Mackie, K. e B. Stojadinovic (2005). *Fragility basis for California highway overpass bridge seismic decision making*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
Mahdavi, G. (dez. de 2023). "Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR". Tese de dout. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Mander, J. B., M. J. Priestley e R Park (1988). "Theoretical stress-strain model for confined concrete". Em: *Journal of structural engineering* 114.8, pp. 1804–1826.
Maney, G. A. (1915). "Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution". Em: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Mashayekhi, M. e H. Estekanchi (2013). "Investigation of strong-motion duration consistency in endurance time excitation functions". Em: *Scientia Iranica* 20, pp. 1085–1093.
Mashayekhi, M., H. Estekanchi e H. Vafai (2019a). "Simulation of Endurance Time Excitations Using Increasing Sine Functions". Em: *Int. J. Optim. Civil Eng* 9.1, pp. 65–77.
– (2019b). "Simulation of endurance time excitations via wavelet transform". Em: *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 43.3, pp. 429–443.
Mashayekhi, M. et al. (2018a). "Development of hysteretic energy compatible endurance time excitations and its application". Em: *Engineering Structures* 177, pp. 753–769.
Mashayekhi, M. et al. (2018b). "Simulation of Cumulative Absolute Velocity Consistent Endurance Time Excitations". Em: *Journal of Earthquake Engineering*, pp. 1–26.
Mazars, J. (1986). "A Description of Micro- and Macroscale Damage of Concrete Structures". Em: *Engineering Fracture Mechanics* 25.5–6, pp. 729–737.
Mazzoni, S. et al. (2006). *OpenSees Command Language Manual*. Rel. técn. University of California, Berkeley: The Open System for Earthquake Engineering Simulation.
McGuire, W e R. Gallagher (1979). *Matrix Structural Analysis*. First Edition.
McGuire, W. e G. Winter (1968). *Steel structures*. Prentice-Hall.
Menegotto, M. e P. Pinto (1973). "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior". Em: *IABSE symposium on resistance and ultimate deformability of structure. Acted on by Well-Defined Repeated Loads. Lisbon: ACmPress*. Vol. 15, pp. 15–22.
Milankovitch, M. (1907). "Theorie der druckkurven". Em: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 55, pp. 1–27.
Mindess, S. e F. Young (1981). *Concrete*. Prentice-Hall, Inc.
Morris, M. (1991). "Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments". Em: *Technometrics* 33.2, "161–174".
Moseley, H. (1833). "L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure". Em: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 3.16, pp. 285–288.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Moseley, H. (1869). *The mechanical principles of engineering and architecture*. J. Wiley & son.
Nobile, L. e V. Bartolomeo (2014). "Methods for the assessment of historical masonry arches". Em: *Proc., 5th European Conf. of Civil Engineering (ECCIE'14)*, pp. 160–167.
Nocedal, J. e S. Wright (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.
Norris, C. H. e J. Wilbur (1960). *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill.
Nozari, A. e H. Estekanchi (2011). "Optimization of endurance time acceleration functions for seismic assessment of structures". Em: *International Journal of Optimization in Civil Engineering* 1, pp. 257–277.
O'Hara, T. e J. Jacobson (1991). *Standardization of the cumulative absolute velocity*. Rel. técn. Electric Power Research Inst.
Olsson, A. e G. Sandberg (2002). "Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis". Em: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 121–125.
OpenAI (2025). *ChatGPT: Conversation with AI*. Generated in response to a user's query. Available at `https://chat.openai.com`.
Ottosen, N. e H. Petersson (1992). *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice-Hall.
Padgett, J., B. Nielson e R. DesRoches (2008). "Selection of optimal intensity measures in probabilistic seismic demand models of highway bridge portfolios". Em: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 37, pp. 711–725.
Park, R. e T. Paulay (1991). *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons.
Park, Y.-J. e A. H.-S. Ang (1985). "Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete". Em: *Journal of structural engineering* 111.4, pp. 722–739.
PEER (2014). *Ground Motion Database*. Last viewed November 2014. Pacific Earthquake Engineering Research Center.
Petersson, P. (dez. de 1981). *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and similar Materials*. Rel. técn. TVBM 1006. Lund, Sweden: Lund Institute of Technology.
Pilkey, W. e W. Wunderlich (1994). *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press.
Pippard, A. J., E. Tranter e L Chitty (1936). "The Mechanics Of The Voussoir Arch.(Includes Appendix)." Em: *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4.2, pp. 281–306.
Pippard, A. J. S. e J. F. Baker (1943). *The analysis of engineering structures*. Edward Arnold London.
Pitarka, A. et al. (1998). "Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan, earthquake". Em: *Bulletin of the Seismological Society of America* 88.2, pp. 428–440.
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.
Porter, K. (2003). "An overview of PEER's performance-based earthquake engineering methodology". Em: *Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9)*. San Francisco, CA.
Porter, K., R. Kennedy e R. Bachman (2007). "Creating Fragility Functions for Performance-Based Earthquake Engineering". Em: *Earthquake Spectra* 23, pp. 471–489.
Portland Cement Association (1947). *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section*. Portland cement association.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Portland Cement Association (1954). *Design of Barrel Shell Roofs*. Rel. técn. Portland Cement Association.
Powell, G. H. (dez. de 2008). "Structural Analysis: Are We Relying Too Much on Computers. Part 2: A Solution". Em: *STRUCTURE Magazine*. Structural Forum article.
Priestley, M. B. (1965). "Evolutionary spectra and non-stationary processes". Em: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 204–237.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Ragueneau, F. et al. (2006). "Anisotropic damage for concrete within multifibre beam finite element theory". Em: *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*.
Ramamoorthy, S., P. Gardoni e J. Bracci (2006). "Probabilistic Demand Models and Fragility Curves for Reinforced Concrete Frames". Em: *Journal of Structural Engineering* 132, pp. 1563–1572.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin e Company.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Reich, R. (mai. de 1993). "On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams". Tese de dout. University of Colorado, Boulder.
Rezaeian, S. e A. Der Kiureghian (2008). "A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities". Em: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 37.13, pp. 1565–1584.
– (2010). "Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics". Em: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.10, pp. 1155–1180.
Rezaeian, S. e X. Sun (2014). "Stochastic ground motion simulation". Em: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. por M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–15.
Richart, F. E., A. Brandtzæg e R. L. Brown (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. Rel. técn. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering . . .
Saenz, L. P. (1964). "discussion of" Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete" by Desayi and Krishnan". Em: *Journal of the American Concrete Institute* 61, pp. 1229–1235.
Saltelli, A. (2002). "Making Best Use of Model Evaluations to Compute Sensitivity Indices". Em: *Computer Physics Communications* 145.2, pp. 280–297.
Saouma, V. e M. Sivaselvan (2014). *Hybrid simulation: Theory, implementation and applications*. CRC Press.
Saouma, V. E. e M. Hariri-Ardebili (2021). *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*. Springer-Nature.
Saouma, V. E., D. Kang e G. Haussmann (2012). "A computational finite-element program for hybrid simulation". Em: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3, pp. 375–389.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Saouma, V. E. et al. (ago. de 1991). "Effect of aggregate and specimen size on fracture properties of dam concrete". Em: *ASCE, Journal of Materials in Civil Engineering* 3.3, pp. 204–218.
Saouma, V. E. et al. (2013). "Real-time hybrid simulation of a nonductile reinforced concrete frame". Em: *Journal of Structural Engineering* 140.2.
Schey, H. (1973). *Div Grad Curl and all That; An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton.
Schodek, D. e M. Bechthold (2014). *Structures*. Pearson.
Schrama, W. (2021). "A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames". Em: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.
Schueller, W. (1996). *The design of Building Structures*. Prentice Hall.
Scott, B., R. Park e M. Priestley (1982). "Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rages". Em: *ACI Journal* 79.1, pp. 13–27.
SEAOC (1995). *Performance-based seismic engineerin, SEAOC Vision 2000 Committee*. Rel. técn. Sacramento, CA: Structural Engineers Association of California.
Segura, C. (2011). "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code". Diss. de mestr. University of Colorado, Boulder.
Shinozuka, M. e Y Sata (1967). "Simulation of nonstationary random process". Em: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 93.1, pp. 11–40.
Slate, F. e S. Olsefski (1963). "X-Rays for Study of Internal Structures and Microcracking of Concrete". Em: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 575–587.
Smars, P. (2000). "Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes". Tese de dout. Katholieke Universiteit Leuven.
– (2022). Personal Communication.
Sobol', I. M. (2001). "Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates". Em: *Mathematics and Computers in Simulation* 55.1–3, pp. 271–280.
Sohier, H., H. Piet-Lahanier e J.-L. Farges (2015). "Analysis and optimization of an air-launch-to-orbit separation". Em: *Acta Astronautica* 108, "18–29".
Sohier, H., J.-L. Farges e H. Piet-Lahanier (2014). "Improved of the Representativity of the Morris Method for Air-Launch-to-Orbit Separation". Em: *Preprints of the 19th World Congress*.
Sokolnikoff, I. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, NY.: McGraw-Hill.
Somerville, P. et al. (1997). "Modification of empirical strong ground motion attenuation relations to include the amplitude and duration effects of rupture directivity". Em: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 199–222.
Sonavane, T. (2014). "Analysis of Arches". Diss. de mestr. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Southwell, R. V. (1935). "Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints"—I and II". Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Spacone, E., V. Ciampi e F. Filippou (ago. de 1992). *A BEAM ELEMENT FOR SEISMIC DAMAGE ANALYSIS*. Rel. técn. UCB/EERC-92/07. Earthquake Engineering Research Center College of Engineering, University of California, Berkeley.
Stewart, J. (2009). *Verification Methods and NRC Regulations: A Brief Overview*. Rel. técn. Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).
Suselo, A. A. (2021). "Simulated Behavior of Rectangular Reinforced Concrete Columns under Seismic Loading". Tese de dout. The University of Texas at San Antonio.
Taborda, R. e D. Roten (2014). "Physics-based ground-motion simulation". Em: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. por M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–33.
Takeda, T., M. A. Sozen e N. N. Nielsen (1970). "Reinforced concrete response to simulated earthquakes". Em: *Journal of the structural division* 96.12, pp. 2557–2573.
Taucer, F, E. Spacone e F. Filippou (1991a). "A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center". Em: *College of Engineering, University of California*.
– (1991b). *A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center*. Rel. técn. College of Engineering, University of California.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Rel. técn. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
Thandavamoothy, T. (2011). *Structural Analysis*. First Edition. YMCA Library Building, New Delhi, India: OXFORD University Press, pp. 1016–1088.
Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger et al. (1959). *Theory of plates and shells*. Vol. 2. McGraw-hill New York.
USBR-manual (2011). *Dam safety risk analysis, Best practices training manual, Version 2.2*. Rel. técn. Denver, Colorado: U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation in coorporation with the U.S. Army Corps of Engineers.
USGS (2003). *PSHA Interactive Deaggregation Tool, U.S. Geological Survey*.
Vamvatsikos, D. e C. Cornell (2002). "Incremental dynamic analysis". Em: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 491–514.
– (2004). "Applied incremental dynamic analysis". Em: *Earthquake Spectra* 20, pp. 523–553.
Červenka, J. (1994). "Discrete crack modeling in concrete structures". Tese de dout. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vlasov, V. (1961). "Thin walled elastic beams (2nd edn) National Science Foundation". Em: *Washington, DC*.
Voldoire, F. e Y. Bamberger (2008). *Mécanique des structures*. Presses Ponts et Chaussées.
Wang, C.-h. et al. (2001). "Hysteretic models for deteriorating inelastic structures". Em: *Journal of Engineering Mechanics* 127.11, pp. 1200–1202.
Wang, G. et al. (2016). "A general definition of integrated strong motion duration and its effect on seismic demands of concrete gravity dams". Em: *Engineering Structures* 125, pp. 481–493.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Wang, W., C. Gu e T. Bao (2013). "Safety Monitoring Index of High Concrete Gravity Dam Based on Failure Mechanism of Instability". Em: *Mathematical Problems in Engineering* 2013, pp. 1–14.
Wen, Y.-K. (1976). "Method for random vibration of hysteretic systems". Em: *Journal of the engineering mechanics division* 102.2, pp. 249–263.
Westergaard, H. (1933). "Water Pressures on Dams During Earthquakes". Em: *Transactions ASCE* 59.8, pp. 418–433.
White, R., P. Gergely e R. Sexmith (1976). *Structural Engineering*. Out of Print. John Wiley & Sons.
Whitehead, R. (2020). "Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction". Em: *Constructing Building Enclosures*. Routledge, pp. 105–123.
Whitman, F. et al. (1988). "Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens". Em: *Materials and Structures* 21, pp. 21–32.
Whitney, C. et al. (1952). *Manuals of Engineering Practice-31: Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. Rel. técn. New York: American Society of Civil Engineering.
Whittaker03, A., R. Hamburger e A. Mahoney (2003). "Performance-based engineering of buildings for extreme events". Em: *Proc., Steel Building Symp. Blast and Progressive Collapse Resistance*, pp. 55–66.
Williams, M. S., I. Villemure e R. G. Sexsmith (1997). "Evaluation of seismic damage indices for concrete elements loaded in combined shear and flexure". Em: *Structural Journal* 94.3, pp. 315–322.
Winkler, E. (1879). "*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*". Em: *Deutsche Bauzeitung* 13, pp. 117–119, 127–128, 130.
– (1880). "*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*". Em: *Deutsche Bauzeitung* 14, pp. 58–60.
Yamamoto, Y. (2011). "Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets". Tese de dout. Palo-Alto, CA: Stanford University, Stanford.
Yamamoto, Y. e J. Baker (2013). "Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets". Em: *Bulletin of the Seismological Society of America* 103.6, pp. 3044–3056.
Yassin, M. H. M. (1994). "Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads". Tese de dout. University of California.
Youngs, R. et al. (1997). "Strong ground motion attenuation relationships for subduction zone earthquakes". Em: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 58–73.
Zareian, F. e H. Krawinkler (2009). *Simplified performance based earthquake engineering, Report No. 169*. Rel. técn. Stanford University.
Zareian, F. et al. (2010). "Basic concepts and performance measures in prediction of collapse of buildings under earthquake ground motions". Em: *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 19, pp. 167–181.
Zeris, C. e S. Mahin (1988). "Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation." Em: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 114(ST 4), pp. 804–820.

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Índice temático — Partes II–IV: Análise

$p - \delta$, 1855, 1888
Região de ConfiançaAnálise, 2058
Região de Confiançaquantificação, 2058

AASHTO, 2182
acknowledgments, xxii
airfoil, 745
airplane, 780
aleatory, 2059
alkali aggregate reaction, 2106, 3026
allowable stress design, 1760
alluvial plot, 796
anagram, 2983
analysis
  cloud, 2214, 2218
  damage, 2247
  endurance time, 2218
  loss, 2239
  multiple strip, 2211
  nonlinear, 2247
  response spectrum, 2181
analytical baseline, 1723
annual rate of exceedance, 2161
approximate, 1314
approximate analysis, 1308
  cantilever method, 1332
  frames, 1343
  lateral deflections, 1340
  portal method, 1318
  tube systems, 1335
  vertical load, 1314
  wall subsystems, 1334
arch, 1081
  circular, 1082
  elastic Center, 1112
  generalized solution, 1098
  helicoidal, 1122
  hingeless, 1090
  hingeless circular, 2339
  masonry, 1052
  parabolic, 1386
  temperature, 1383
  three hinged, 1083
  three-hinged circular, 2313
  two hinged, 1089
  two hinged arch design, 1375
  variable i, 1386
arche
  three-hinged circular, 2297
Archimedes' principle, 784
architects
  Jahn, Helmut, 937
  Pei, I.M., 937, 1122
architecture
  Dulles airport, 937
  Louvre staircase, 1122
  Pyramide du Louvre, 937
  Sagrada Familia, 1122
  Sony Center, 937
attenuation models, 2129
author, xlii
autocovariance, 2061
axial load
  impact on flexural deformation, 1879

CÓPIA PARA REVISÃO

Os Quatro Livros da Análise Estrutural © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

axial vibration
natural frequencies, 1739
axisymmetry, 2986

backbone, 2008, 2025
barge, 781
base isolation, 1260, 1743
example, 1260
Bauschinger
effect, 1773
effect, 1770
Bayesian parameter identification, 2102
beam
bimetallic, 853
conjugate, 864, 865
curved, 812, 938, 1119, 1510
elastic foundation, 841
Euler-Bernoulli, 1403
flexure & shear deformation, 900
floating, 840
Galerkin, 1704
king post, 937
large deflections, 990
queen post, 935
rigid offset, 1518
ring, 908
semi-rigid, 1520
thermal, 901
Timoshenko, 1408
torsion & flexure, 898
variable cross section, 1526
beam-column, 1404
nonlinear formulation, 1896
Belidor, 1054
bicycle wheel, 845
biffurcation, 1873
bifurcation point, 995
bimoment, 876
body force, 2970
Botero, 2154
boundary conditions, 1399, 1455, 1457, 1459, 1548, 2993
Dirichlet, 1549
inclined, 778
mixed, 1549
Neuman, 1549
boundary value problem, 1399
box culvert, 968
bridge
Alamillo, 2413
Dora Riparia, 1062
Gard, 1127
George Washington, 1368
Goethals, 2181
loads, 2283
suspension, 1038
Viaducte de Chillon, 834
Walnut Lane, 1291
Broken Obelisk, 789
bubble function, 1646
buckling, 1874
column, 994, 1874
constrained, 1006
eigenvalue, 997
elastic, 998
frame, 1876
frames, 1011
inelastic, 1014
water tower, 1007
buoyancy
centre of, 784
Butterworth filter, 2902

cable, 1017
catenary, 1042
comparison, 1049
parabola, 1024
prestress, 1041
sag, 1040
temperature, 1040, 1041
trolley cable, 1046
capacity
Curve, 2169
Diagram, 2169
Function, 2169

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

curve, 2174, 2176, 2210
function, 2216
capacity design
example, 1256
Carder, 768
Castigliano, 1062, 1107, 1111
theorems, 1599
casualties, 2240
Cauchy strain, 2976
Cauchy stress tensor, 2972
Cauchy tetrahedron, 2970
Cauchy's equation of motion, 2979
center of pressure, 1072
central difference method, 1736
characteristic equation, 2291
Charles Mosca, 1062
chemical bonds, 1771
chord, 1018
circular ring, 908
Cisalhamento
V_{2500}, 2199
Clapeyron's theorem, 942
coefficient of variation, 2943
coefficient plot, 2071
collapse, 2254
mechanism, 2208
column
life-safety, 2037
compressive meridian, 1768
computational fuse, 2001
condensation, 1492
condition number, 1483, 1488
condition of incompressibility, 2978
conditional spectra, 2141
confidence interval, 2940
congruent transformation, 1512
consequnce function, 2240
conservation laws, 2976, 2977
conservation of energy, 2981
conservation of momentum, 2978
consistency condition, 1777
constitutive
Bauschinger, 1949
bilinear, 1949
Drucker-Prager, 1769
Ghannoum, 2025
heuristic models, 1947
hysteretic, 2005
Ibarra Krawinkler, 2005
Mohr-Coulomb, 1768
peak oriented, 2010
pinching, 2013
shear limit state, 2001
strength degradation, 2016
Tresca, 1767
constitutive equations, 2983
continuity equation, 2978
continuum mechanics, 1946, 2972
control
displacement, 1865
load, 1857
convergence, 1847, 1850, 1862
coordinate system
stiffness method, 1394
triangular, 1623
correlation, 2060
matrix, 2060
correlation coefficient, 2944
costs, 2240
Coulomb, 1059
Couplet, 1058
covariance, 2060, 2944
spatial, 2061
temporal, 2061
cumulative
displacement demand, 2229
inelastic duration, 2227
distribution function, 2940

D'Alembert, 1566
d'Alembert's principle, 1224
dam
pine flat, 2136
damage

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

measure, 2248
multiple, 2254
assessment, 2177
Index, 2230
index, 2226
metrics, 2229
probabilistic representation, 2228
damping
Rayleigh coefficients, 1722
damping ratio, 1227
Danyzy, 1059
data mining, 2032
de la Hire, 1053
de Veubeke, 1563
decision
variable, 2249
decomposition, 2913
Cholesky, 2916
LU, 2915
QR, 2919
singular value, 1488, 2917
dedication, iii
deflected shape diagrams, 1309
deflection
curvature, 843
curvature area method, 854
integration, 836
large, 1884
virtual work, 885
deformation theory, 1774
degree
freedom, 1396
freedom-rotational, 1692
kinematic indeterminacy, 1398
demand, 2174
capacity ratio, 2226
curve, 2179
loads, 2188
spectrum, 2176
design codes, 1264, 1271
design vs. analysis, 730, 1264, 2246
determinant, 771
deterministic, 1267, 1760
differential vector operator, 3028
direction cosines, 803, 1443
Dirichlet, 1399
Dirichlet b.c., 2993
discrete Fourier transform, 2904
discretization, 1457
dislocation, 1773
displacement control, 1865
displacement ductility, 1256, 1741
distributed plasticity, 1946
distribution
bivariate, 2950
bivariate normal, 2951
gumbel, 2947
lognormal, 2946
noraml (Gauss), 2945
Poisson, 2163
uniform, 2945
univariate, 2945
weibull, 2947
downtime, 2240
drift, 1308, 2177
drilled shaft, 2184
ductility, 1786
example, 1256
ratio, 1800
Duhamel integral, 1237
rectangular pulse, 1238
step load, 1237
Dulles airport, 1349
dummy index, 2962
dynamic amplification factor, 1237
dynamic analysis, 1711
frames, 1713
when, 1223
dynamic effects, 2175

effective length, 1011
effective mass matrix, 1733
Eiffel tower, 1356
eigenvalue, 1482, 1735, 2921

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Índice temático — Partes II–IV: Análise

buckling, 997
problem, 1874
stiffness, 1481
stiffness matrix, 1478
eigenvalues & eigenvectors, 2922
Einstein's notation, 2962
elastic
instability, 1873
solution, 1811
element
hierarchical, 1646
isoparametric, 1662
Lagrangian, 1644
nodal equivalent loads, 1683
parasitic shear, 1689
stress recovery, 1680
elementary effect, 2073
elliptic integral, 991
elliptic integrals, 2290
endurance
time analysis, 2215
time excitation functions, 2148
engineering
demand parameter, 2222, 2248
shear strain, 2975
epistemic, 2059
equal displacement rule, 1256
equation of motion, 2978
equations of statics, 1493
equilibrium, 766
global, 960
equivalent viscous damping, 1255
error
estimate, 1850
hidden, 1903
error discovery program, xxiv
espectros de resposta, 2190
Euler, 1543
equation, 1546
method, 1724, 1846
Euler-Lagrange, 1555
Eulerian angles, 1448
explicit
incremental analysis, 1882
method, 1853

factor of safety, 1754
failure mode, 1754, 2173
fast Fourrier transform, 2902
fault tolerance, 1754
Fermi's solution, 1308
FFT, 2904
filter
Butterworth, 2902
finite element, 1650
bilinear rectangle, 1629
brick, 1631
compatibility, 1660
constant strain triangle, 1628
error, 1658
lower bound solution, 1659
mesh verification, 2034
modelling, 2030
numerical integration, 1674
requirements, 1656
flambagem
Sem $\mathbf{k}_{geom}$, 1888
flexibility, 914
method, 1414
matrix, 921
floating body, 784
flow rule, 1775
flux, 2977
force, 1574, 2970
in terms of displacement, 950
force-shear-moment
differential relations, 816
integral relations, 817
foreword, iv
form follows function, 786
Fourier analysis
periodic forcing, 1241
Fourier transform, 2904
fracture process zone, 1990

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Índice temático — Partes II–IV: Análise

fragility
  curve, 2228
  curve vs. surface, 2256
  definitions, 2253
  vs. vulnerability vs. hazard, 2253
  continuous vs. discrete, 2255
  curve, 2253
  role in PBEE, 2257
free body diagram, 771
free index, 2962
free vibration, 1230
  initial conditions, 1723
frequency domain, 2903
frequency response function, 1241
function
  consequence, 2240
  cumulative distribution, 2940
fundamental laws, 2976
funicular
  cable, 1018
  polygon, 1018

gable frame, 776
Galerkin, 1694
  FE discretization, 1704
  weak form, 1701
Galileo, 868, 884
Gauss elimination, 2914
Gauss-Jordan decomposition, 2914
Gauss-Seidel, 975, 2920
geometric
  nonlinearity, 1869
  stiffness matrix, 1870
geometric nonlinearity, 1018
gondola, 1022
grid, 779
ground motion
  intensity, 2129
  prediction equation, 2129
Gutenberg Richter law, 2126
guyed tower, 1036

Hamilton, 1555, 1567
hardening
  isotropic, 1770, 1775, 1780
  kinematic, 1770, 1781
  modulus, 1775
  work, 1773
hazard
  analysis, 1754
  curve, 2161
heat transfer, 1707
helicoidal, 1122
Hellinger-Reissner, 1563
hermitian interpolation, 1638
high frequency, 1712
Hilber-Hughes-Taylor, 1730
hinge formation, 2177, 2189
Hooke's law, 2984
hourglas, 1689
Hu-Washizu, 1563
hydrodynamic, 2980
hydrostatic fluid, 2980
hydrostatic pressure
  dependent, 1768
  independent, 1766
hyperstatic, 769
hypocentral distance, 2131
hysteresis, 1254
  energy dissipation, 1255

IDA curve, 2217
identicon, 2417, 2730
identifiability, 2100
ill-condition, 1487
Impetus, 2970
impulse response function
  example, 1236
incremental dynamic analysis, 2209
independent mechanisms, 1815
index
  performance, 2226
indicial notation, 2962
indirect methods, 2920
influence line, 755, 978

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

Índice temático — Partes II–IV: Análise

inner product, 2965
instability, 770
    geometric, 770
integration
    full, 1687
    reduced, 1687
    selective reduced, 1689
integration methods, 1855
intensity
    measure, 2248
    measure, 2209, 2248
interaction diagram, 1281
internal forces, 810
interpolation
    Hermitian, 1638
    Lagrangian, 1631
interstory drift, 2229
invariants, 2968
isopleth, 1013
isostatic, 769

Jacobian, 1849
Jacobsen formula, 1255
Joyner-Boore distance, 2130

Kiewit, 2181
kinematic
    indeterminacy, 1398
    instability, 1501
    matrix, 1502
kinematically admissible field, 1813
Kuhn-Tucker, 1777, 1973
kurtosis, 2944

laboratory observations, 1770
Lagrange, 1568
Lagrangian
    function, 1556
    interpolation, 1631
Lame's constants, 2984
latin hypercube, 2063, 2075
    etymology, 2064
    example, 2065
law
    large numbers, 2937
layer/fiber section, 1907
least squares
    weighted nonlinear, 2096
Legendre polynomial, 1679
Leonardo da Vinci, 768
Levenberg–Marquardt, 2095
Levenberg-Marquardt, 2717, 3022
limit state, 2223, 2255
    elements, 1989
    calibration&validation, 2225
    multiple, 2225
    shear, 2001
linear equations, 2912
Linear Regression, 2213
linearization, 1846
load
    resistance and factor design, 1760
    bridge, 2283
    combination, 755, 2284
    dead, 2269
    demand, 2199
    earthquakes, 2273
    hydrostatic, 772
    impact, 751
    incremental, 2176
    limit, 1812
    live, 2269
    parabolic, 774
    path, 757
    pattern, 2175
    placement, 2287
    projected, 754
    secondary, 752
    thermal, 753
    unsafe theorem, 1813
    wind, 744, 2269
logarithmic decrement, 1230
logic tree, 2161
lower bound
    lumped plasticity analogy, 1837

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.

pushover analogy, 1834
slabs, 1828
theorem, 1819
LRFD, 1268
Limitations, 2243
lsqnonlin, 2106, 3024, 3026
lumped-plasticity, 1748, 1837, 1935, 1999, 2043, 2052, 2558

Müller-Breslau, 982
Magazini Generali, 1364
Maillart, 1364
margin of safety, 1754
material coordinates, 2973
matrix
augmented stiffness, 1455
condition number, 1483
decomposition, 1455
decomposition vs. inversion, 1488
ill-conditioned, 1484
orthogonal, 1443
structural analysis, 1390
matrix inversion, 2912
maximum likelihood estimation, 2211, 2213
Maxwell-Betti, 889, 921, 982
mean, 2942
mechanics of deformable bodies, 2960
mechanics review, 2960
mechanism, 1812
method of moments, 2210
modal analysis, 1247
example, 1248
mode shapes, 1246
model
complexity, 2032
Rezaeian and Der Kiureghian, 2144
Yamamoto and Baker, 2146
modified Newton-Raphson, 1860
modulus
hardening, 1775
tangent, 1777
tangent elastic, 1775
moment
curvature
generalization, 1798
curvature
$\sigma - \varepsilon \rightarrow m - \phi$, 1790
$m - \phi$, 1787
distribution, 969
envelope, 818
redistribution, 1995
statistics, 2941
Monte Carlo simulation, 2063
Morris method, 2073
Moseley, 1061
motion
Cauchy equations of, 2979
first law of, 2970
fluid, 745
ground, 733
harmonic, 1230
rigid body, 1482, 1501, 1619, 1657
water, 3006
Mozart, 2983

natural frequency, 1226
footbridge, 1252
Nervi
Palazetto dello sport, 786
Neuman, 1399
Neuman b.c., 2993
Newmark, Nathan, 1727
Newmark-beta method, 1737
Newton
method, 1845
Newtonian fluid, 2980
nodal equivalent forces, 952
nodal numbering, 1488
nomograph, 1013
nonlinear
analysis
element formulation, 1892
notation, xxviii
sources, 1748

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

types of, 1751
why, 1750
equations
Runge-Kutta, 1724
Euler method, 1724
norm, 1441
Euclidian, 3024
euclidian, 1849
infinity, 1863
notation, xxv, xxxiii
indicial, 2962
Voigt, 2961
numerical analysis
explicit, 1732
Hilber-Hughes-Taylor, 1730
implicit, 1727
numerical integration, 1674
Gauss-Legendre, 1677
newton-cotes, 1675

occurrence time, 2135
octahedral stress, 2968
opensees, 1953
operator
differential, 1695
incremental, 1882
Jacobian, 1665, 1668
strain **I**, 2976
tensor, 2963
variation, 1544
optimality, 3020

Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2224
parallel systems, 2955
parameter identification, 2088
MATLAB program, 2108
Pascal triangle, 1619
PBEE
example, 2258
first generation, 2244
implementation, 2251
key documents, 2263
Matlab example, 2725
PBA, 2246
PBSD, 2246
SEAOC, 2234
second generation, 2246
peak
ground acceleration, 2165
shear force, 2229
performance
assessments
intensity, 2142
scenario, 2142
time based, 2142
based
assessment, 2233
earthquake engineering, 2232
earthquake engineering (PBEE), 1761, 2242
engineering, 1295, 2232
seismic design, 2233
point, 2176
pieds droits, 1054
pipeline, 902
Pippard, 1063
plane strain, 2986
plane stress, 2987
plastic
displacement, 2198
moment, 2196
hinge, 863, 1812, 2175
hinge length, 2195
length, 1997
modulus, 1775
solution, 1811
zone, 1990
plates, 1128
axisymmetric bending, 1139
circular plates, 1139
Kirchoff, 1133
Reissner-Mindlin, 1128
variational formulation, 1144
point estimate method, 2067

CÓPIA PARA REVISÃO

Poisson's probability model, 2135
polynomial chaos expansion, 2070
position, 2973
potential
  energy, 1576, 1595
  external work, 1576
potential energy, 1552
precision, 1487
preconditioning, 1487, 1488, 2923
predictor, corrector, 1857
presure
  dynamic, 744
principal values, 2967
principle
  complementary virtual work, 1586, 1819
  Hamilton, 1555
  thermodynamics, 1573
  total complementary potential energy, 1599
  total potential energy, 1552, 1595
  virtual work, 1591, 1813
probabilistic
  risk assessment, 1754
  seismic demand analysis, 2214
probability, 2935
  conditional, 2937
  distribution, 2938
prolegomena, v
pushover, 2173
  analysis, 1833

QR decomposition, 2919

R/C
  beams, 736
  bond, 1784
  buildings, 758
  columns LRFD, 1281
  moment of inertia, 1993
  plastic strength, 1272
  pushover, 2184
Random Sample Consensus (RANSAC), 2091
random variable, 2937, 2938
random variables, 2080
rank, 1482, 2921
rate theory, 1774
Rayleigh damping, 1247
  calibration, 1722
Rayleigh-Ritz, 1605
reaction, 765
reaction vector, 1858
reciprocal frame
  example, 827
recurrence relationship, 2126
redundancy, 1754
Região de Confiança, 2058
reliability index, 1269, 1754, 2953
repair cost, 2240
residual forces, 1858
resonance, 1232
  pedestrian, 1252
response spectra, 2216
response spectrum, 1243
  example, 1244
retrofit, 2174, 2177
rigidity factor, 1523
risk assessment, 1754
Robin b.c., 2993
root finding, 1845
rupture distance, 2130

safety, 1754
safety-critical system, 1754
sag, 1017
Saint-Venant, 875
Salieri, 2983
Secant
  method, 1852
  Newton, 1860
seismic
  coefficient, 2176
  hazard analysis
    deterministic, 2132

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

probabilisitc, 2133
hazard curves, 2136
hazard deaggregation, 2139
hazard map, 2138
load, 747
source model, 2128
Seismic hazard analysis
Matlab example, 2722
seismic record
filtering, 2902
seismogenic
depth, 2131
distance, 2131
sensitivity analysis, 2072
serendipity, 1620
series system, 2955
shape functions, 1621, 1622
shear building, 1248
shear deformation
transverse, 869
shear modulus, 2985
shells, 1147
cylindrical free, 1178
cylindrical on beams, 1203
design barrel roof, 2384
general theory, 1148
membrane, 1173
shallow, 1169
shock spectrum, 1238, 1239
sign convention
analysis, 949
design, 815
stiffness method, 1394
Simpson's rule, 1353
single-degree-of-freedom system (SDOF), 1225
singularity, 2921
skewness, 2943
slenderness ratio, 1011
slope deflection, 959
Smars, 1069
Sobol indices, 2078
soil-structure interaction, 1258, 1742
solid mechanics, 2960
spatial coordinates, 2973
spatial distribution ratio, 2227
spectra
target response, 2140
spring
defelction, 1605
helicoidal, 851, 910
standard deviation, 2942
state determination
beam column
flexibility, 1915
stiffness, 1900
truss, 1895
zero length element, 1936
zero length section, 1941
static
determinacy, 769
indeterminacy, 1398
statics
matrix, 802
statistics, 2935
stiffness
matrix
tangent, 1857
geometric, 1870
assembly, 1460, 1512
augmented, 1454
axial vs. flexural, 1713
coefficients, 1401
computer implementation, 1459
definition, 1401
direct, 1415
eigenvalues, 1478
element, 1401
equation numbers, 1460
flexibility relation, 1506
grid element, 1405
location matrix, 1460
matrix derivation, 1653
nodal numbering, 1488

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Índice temático — Partes II–IV: Análise

orthogonal structures, 1413
strain energy, 1481
stochastic ground motion, 2144
strain, 2975
large, 1871
linear operator, 2976
strain energy, 1574
stiffness matrix, 1481
virtual, 1576
strains, 2974
Eulerian, 2974
stress
geometric representation, 2973
hydrostatic, 2972
recovery, 1456
Stressor, 2170
structural
design, 1264
ASD, 1267
LRFD, 1268
performance based earthquake engineering, 1295
prestressed concrete, 1290
R/C beam, 1272
R/C column, 1281
safety, 1265
response, 2176
structural dynamics, 1223
structures
idealization, 1392
modeling, xlii, 1869
substructuring, 1492
Sum of Squared Error Minimization, 2212
supports, 766

tangent modulus
engineering derivation, 1778
generalized derivation, 1775
tangent stiffness matrix, 1718
Taylor series, 1658, 1724, 1727, 1846, 3019
finite difference estimation, 2068
temperature
beam deflection, 901
curvature relation, 860
frame deflection, 860
tensile meridian, 1768
tension stiffening, 1961, 1993
tensor, 2963
stress, 2970
tensor notation, 2962
tensors, 2963
thermodynamics
potential, 1946
first law, 1573, 2981
first principle, 2981
law, 887
thrust, 1018
thrust line, 1072
time discretization, 1726
Timoshenko, 1408
Tonti diagram
D'Alembert, 1569
deformable body, 2994
Hamilton, 1569
Hu-Washizu, 1566
Lagrange, 1569
Tonti diagrams, 2994
tornado diagram, 2085
torsion
deformation, 874
St Venant, 1411
Vlasov, 1410
torsional
deformation
Vlasov/nonuniform, 876
Torção
Deformação^{t} Venant/Uniform, 875
traction, 1574, 2970
traction vectors, 2971
transformation
Eulerian angles, 1448
matrix, 1439
tensors, 2966
vectors, 2965
transient dynamic analysis, 1712

CÓPIA PARA REVISÃO

© © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês, podem ocorrer erros.

Índice temático — Partes II–IV: Análise

transverse isotropy, 2986
tri-diagonal matrix, 942
tributatry area, 760
truss
  analysis, 790
  nonlinear formulation, 1893
  stiffness matrix, 1403
trust region, 3020
tuned mass damper, 1258, 1742
  example, 1259

uniform hazard spectra, 2140
upper bound theorem, 1813

variance, 2942
variational formulation, 1717
variational principle
  Hu-Washizu, 1563
Varignon's theorem, 769
vector fields, 2970
verification & validation, 2034
virtual work
  complementary, 886
visualization, 2107, 3027
Voigt notation, 2961, 2972
von Mises, 1767
voussoir, 1052
  generalized solution, 1069
  historical development, 1053
vulnerability, 2253

warping constant, 876, 879
wave equation, 1251, 1738
wave speed
  axial, 1739
weak form, 1545, 1703
weak points, 2174
weakest link, 2032
weight factor, 1704
weighted residual
  Galerkin, 1694
Winkler, 1063
work, 1575
  complementary virtual, 1586
  internal, 1577
  path independence, 1578
  principle virtual, 1591
  virtual, 1586

yield
  condition, 1765
  function, 1765, 1775
  line, 1828, 1990
  strength, 2194
  stress, 1773
  surface, 1766

zero-length
  element, 1935
  section element, 1939

CÓPIA PARA REVISÃO

 © © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
Traduzido por IA a partir da versão original em inglês,
podem ocorrer erros.